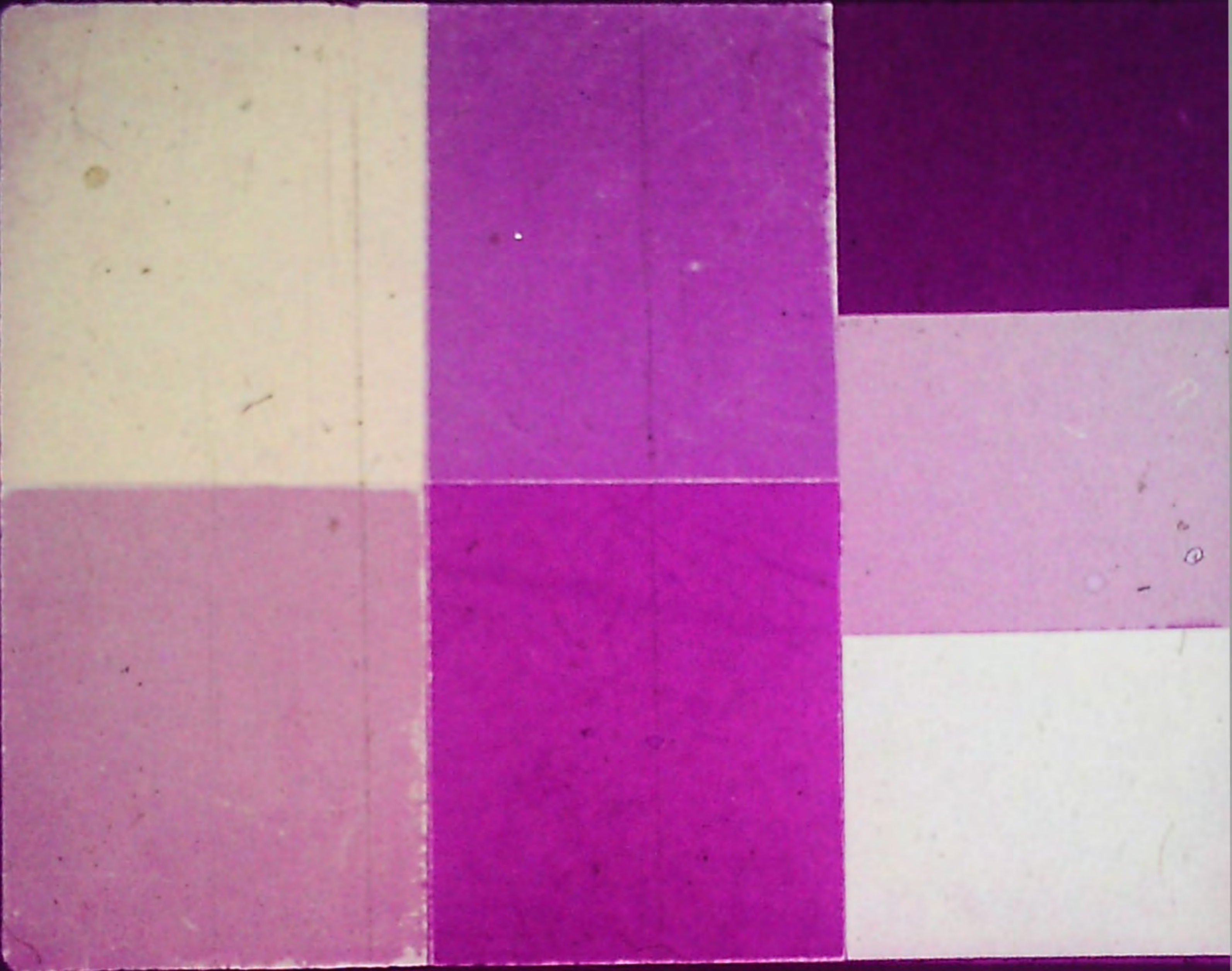


IX 1979

8 6 1

ТУ-19-241-77

5

I

студия

ДИАФИЛЬМ

07–3–392


В. БОЛТЯНСКИЙ
ПРИБЛИЖЕННЫЕ
ВЫЧИСЛЕНИЯ
РИСОВАЛ Ю. МАКАРЕНКО
МАТЕМАТИКА
7-й
КЛАСС

К сведению учителя

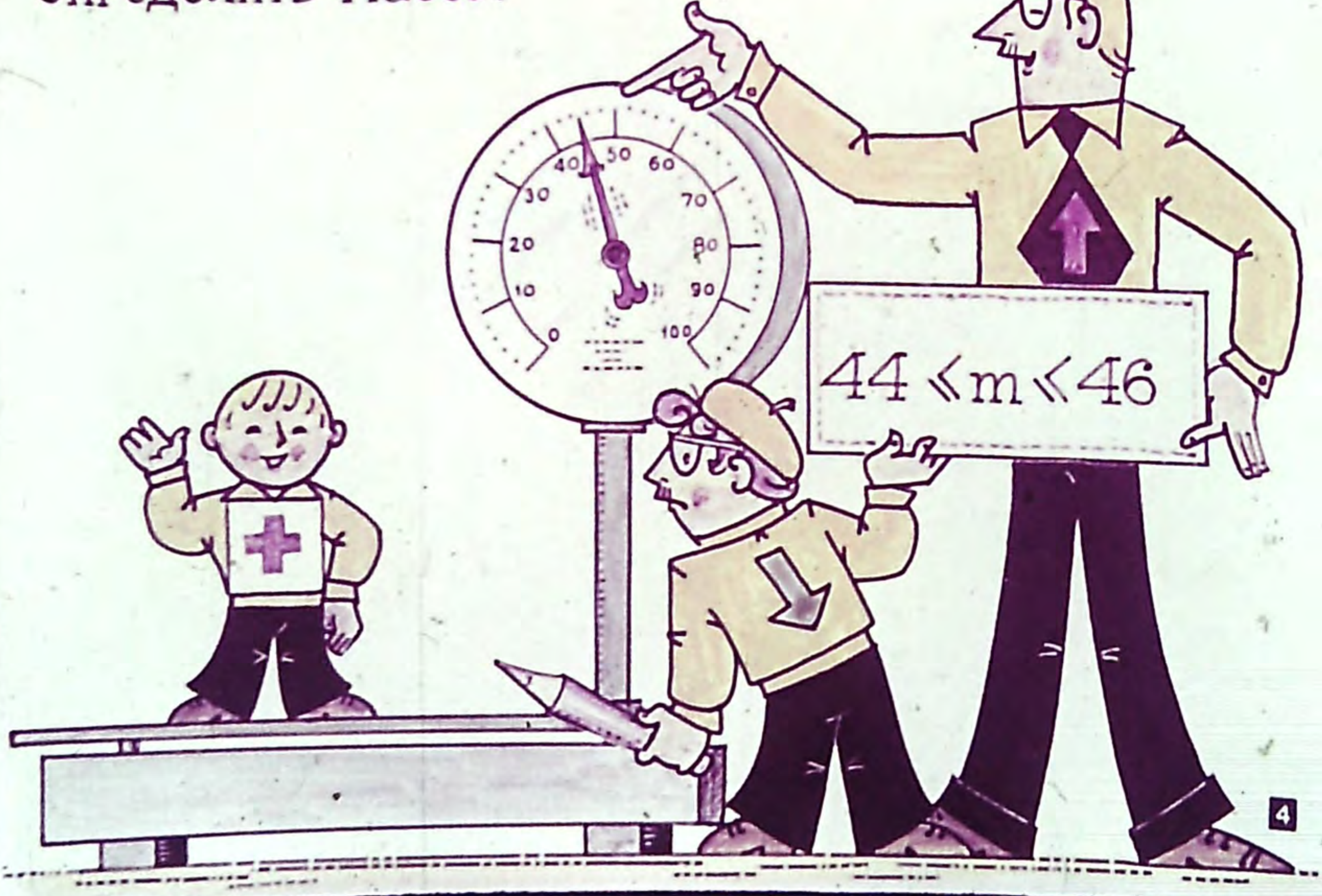
Диафильм может быть использован при объяснении нового материала, закреплении и повторении.

Пункты учебника «Алгебра-7»	21	23	24	25	26	27	28
Кадры диафильма	4-7	8-11	12-19	20-23	25-28	29-30	31-36

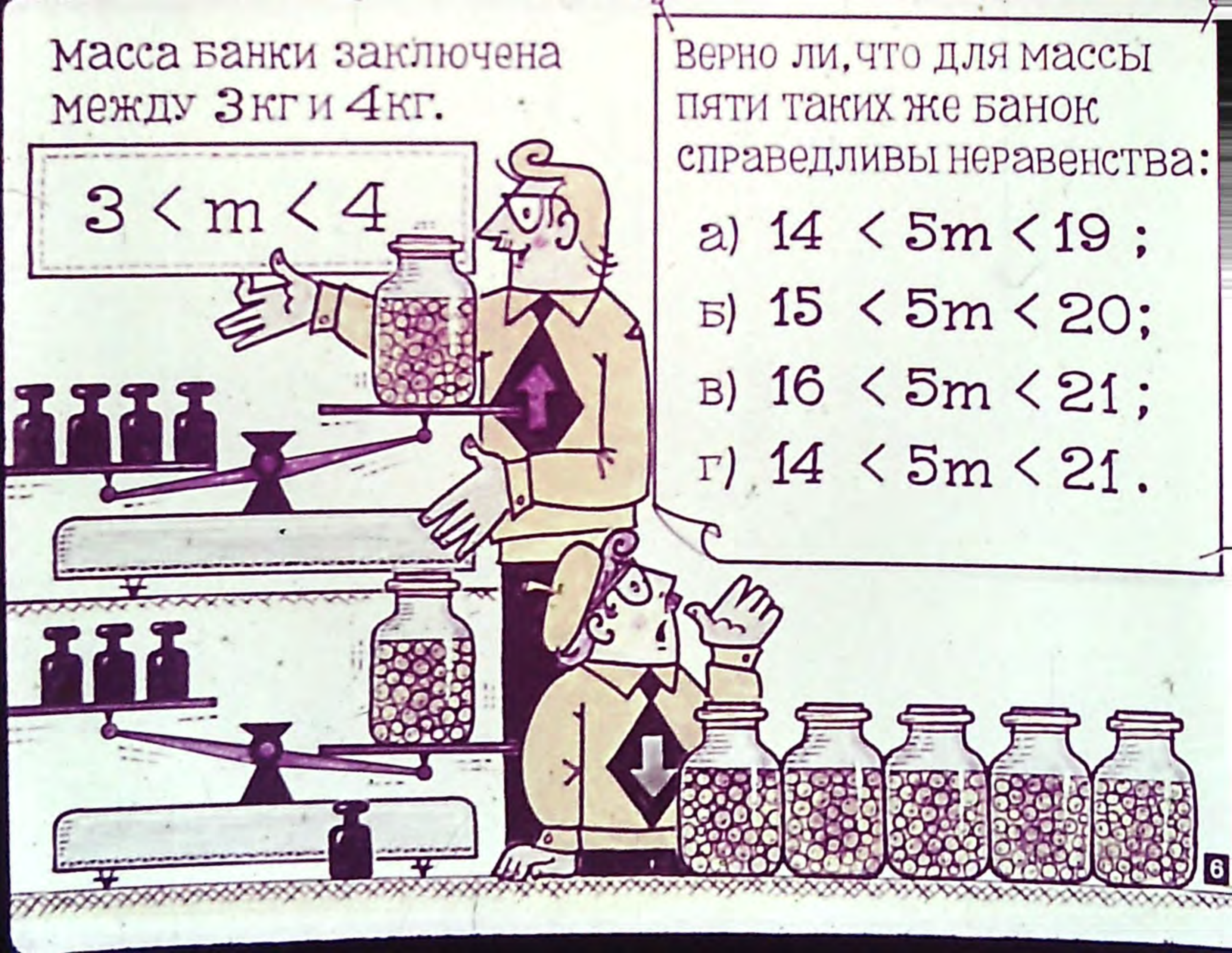
Материал кадров 23, 28 не является обязательным, но полезен для усвоения и углубления основного материала. Желательно провести все вычисления в кадрах 10, 11, 26, 27, 30, 32, 33, 34, 35; это позволит усвоить методы вычислений, оценить их трудоемкость и точность.

ПРИБЛИЖЕННЫЕ ЗНАЧЕНИЯ И ПОГРЕШНОСТИ

Весы не позволяют точно определить массу.

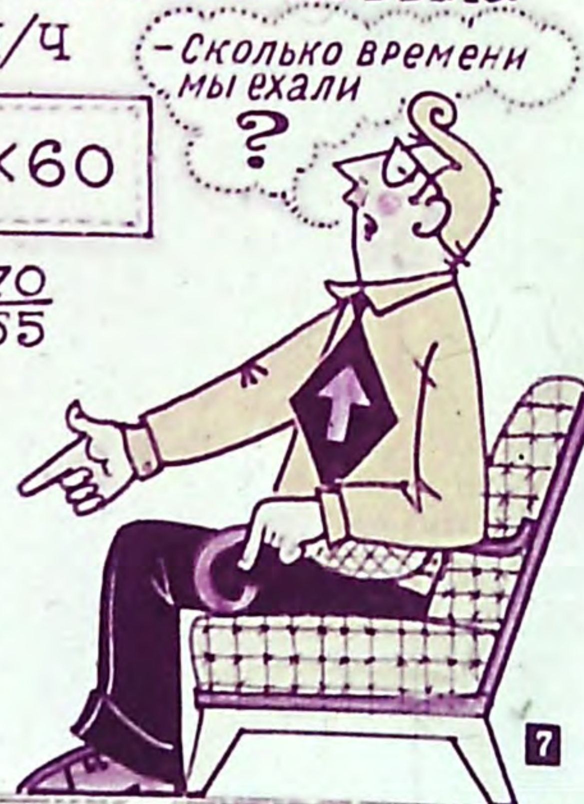



Известно, что $\frac{7}{5} < \sqrt{2} < \frac{17}{12}$,
т.е. $1{,}4 < \sqrt{2} < 1{,}41666...$
Как заменить верхнюю границу числом с двумя знаками после запятой?
-Возьмем для $\frac{17}{12}$ приближение с недостатком?
1,4 1,41 17/12
$1{,}4 < \sqrt{2} < 1{,}41$
-Нет, чтобы избежать ошибки, надо производить расширение промежутка.
1,4 1,41 1,42
$\sqrt{2}$
$1{,}4 < \sqrt{2} < 1{,}42$
5


Масса банки заключена между 3кг и 4кг.
3 < m < 4
Верно ли, что для массы пяти таких же банок справедливы неравенства:
а) 14 < 5m < 19 ;
б) 15 < 5m < 20;
в) 16 < 5m < 21 ;
г) 14 < 5m < 21 .
6

← расстояние между городами 70 км →

Скорость автомобиля в течение всего пути была заключена между 55 и 60 км/ч



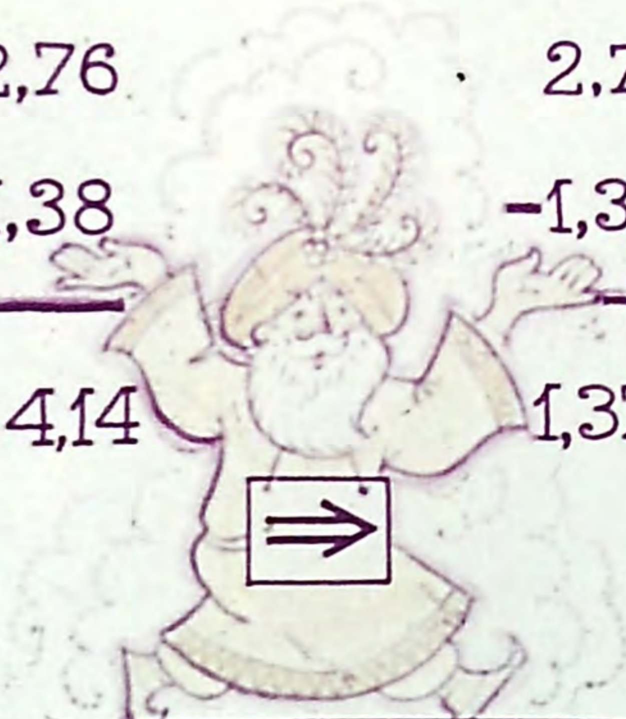
$$\boxed{s = v_{ср.} t} \qquad \boxed{t = \frac{s}{v_{ср.}}} \qquad \boxed{55 < V_{ср.} < 60}$$

$$\frac{1}{60} < \frac{1}{v_{ср.}} < \frac{1}{55} \qquad \frac{70}{60} < \frac{s}{v_{ср.}} < \frac{70}{55}$$

$$1{,}16666\ldots < t < 1{,}2727\ldots$$

$$\boxed{1{,}1 < t < 1{,}3 \text{ /час/}}$$

МЕТОД ГРАНИЦ



$2{,}75 \leqslant x_1 \leqslant 2{,}76$	$2{,}75 \leqslant x_1 \leqslant 2{,}76$
$1{,}37 \leqslant x_2 \leqslant 1{,}38$	$-1{,}38 \leqslant -x_2 \leqslant -1{,}37$
$4{,}12 \leqslant x_1 + x_2 \leqslant 4{,}14$	$1{,}37 \leqslant x_1 - x_2 \leqslant 1{,}39$

$\boxed{\Rightarrow}$

Границы суммы или разности находятся сложением неравенств.

$$2{,}75 \leqslant x_1 \leqslant 2{,}76 \qquad 1{,}37 \leqslant x_2 \leqslant 1{,}38$$

$$\Rightarrow$$

$$2{,}75 \leqslant x_1 \leqslant 2{,}76 \qquad \frac{1}{1{,}38} \leqslant \frac{1}{x_2} \leqslant \frac{1}{1{,}37}$$

$$3{,}7675 \leqslant x_1 x_2 \leqslant 3{,}8088$$

$$\boxed{3{,}76 \leqslant x_1 x_2 \leqslant 3{,}81}$$

$$\frac{2{,}75}{1{,}38} \leqslant \frac{x_1}{x_2} \leqslant \frac{2{,}76}{1.37}$$

$$1{,}9927\ldots \leqslant \frac{x_1}{x_2} \leqslant 2{,}0145\ldots$$

$$\boxed{1{,}99 \leqslant \frac{x_1}{x_2} \leqslant 2{,}02}$$

Границы произведения или частного находятся умножением неравенств.

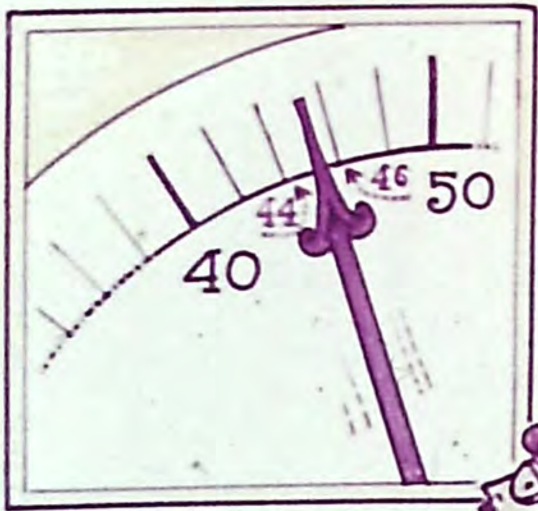
Вычислите с двумя знаками после запятой верхние и нижние границы выражения

$$x_1 + x_1 x_2 - \frac{x_1}{x_2}$$

$2{,}31 \leqslant x_1 \leqslant 2{,}32$	1	$1{,}67 \leqslant x_2 \leqslant 1{,}68$
$3{,}18 \leqslant x_1 \leqslant 3{,}19$	2	$0{,}81 \leqslant x_2 \leqslant 0{,}82$
$1{,}52 \leqslant x_1 \leqslant 1{,}53$	3	$1{,}43 \leqslant x_2 \leqslant 1{,}44$

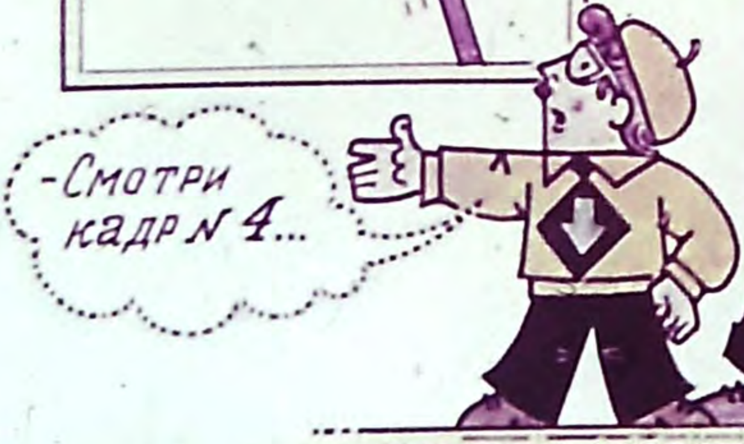

Найдите границы длины окружности, если даны границы длины радиуса /в метрах/ :
а) 0,38 < R < 0,39
б) 0,711 < R < 0,712
– Окружность радиуса R имеет длину 2πR
R
Используйте неравенство 3,14 < π < 3,15

За приближенное значение массы m можно принять среднее арифметическое границ: $a = \frac{44+46}{2} = 45$



Абсолютная погрешность /модуль разности между точным и приближенным значениями/ не превосходит половины расстояния между границами:

$$\Delta = |m - a| < 1$$

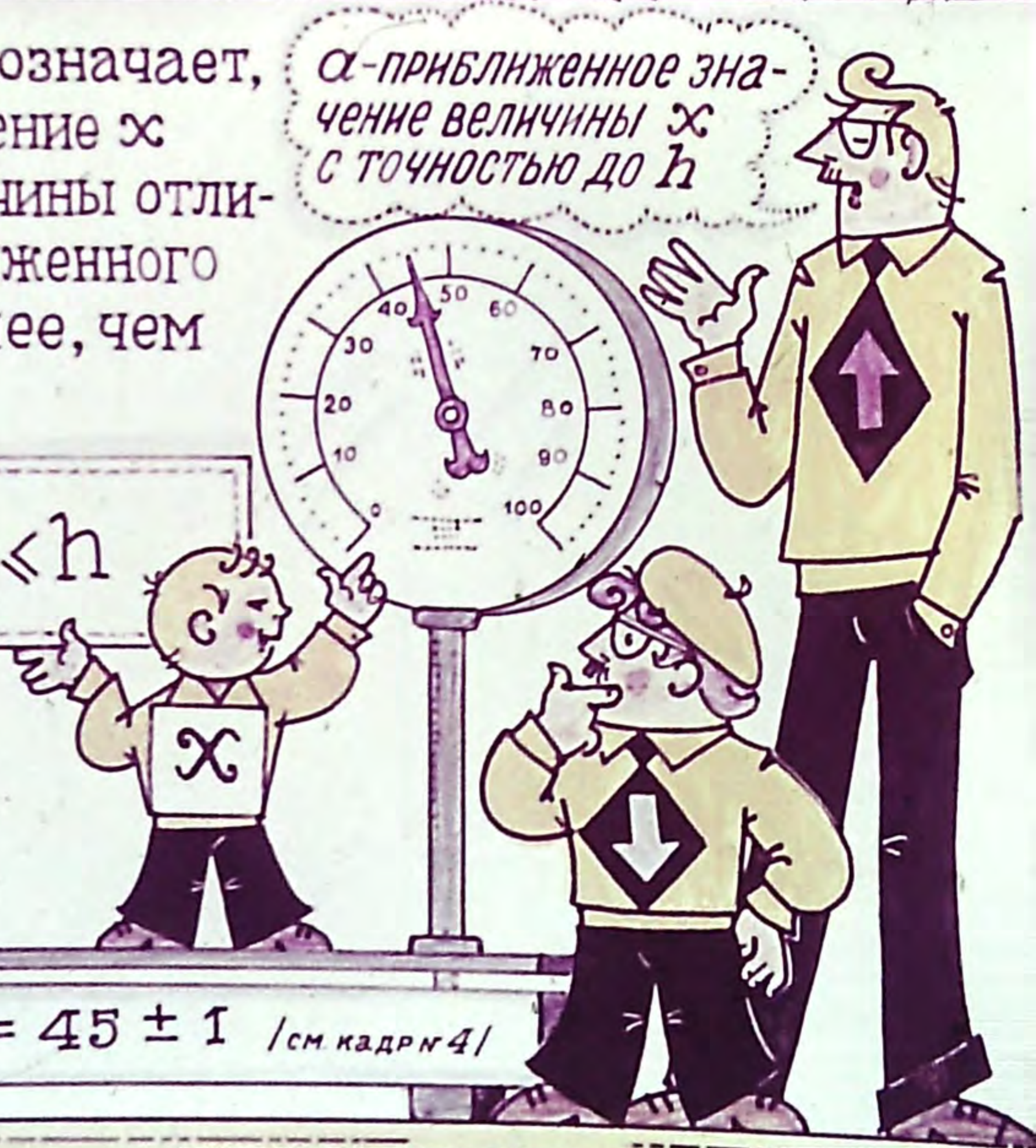


Запись $x = a \pm h$ означает, что точное значение x измеряемой величины отличается от приближенного значения a не более, чем на h:

$$\Delta = |x - a| \leq h$$

или иначе

$$a - h \leq x \leq a + h$$



Штангенциркуль позволяет определить диаметр валика лишь приближенно:

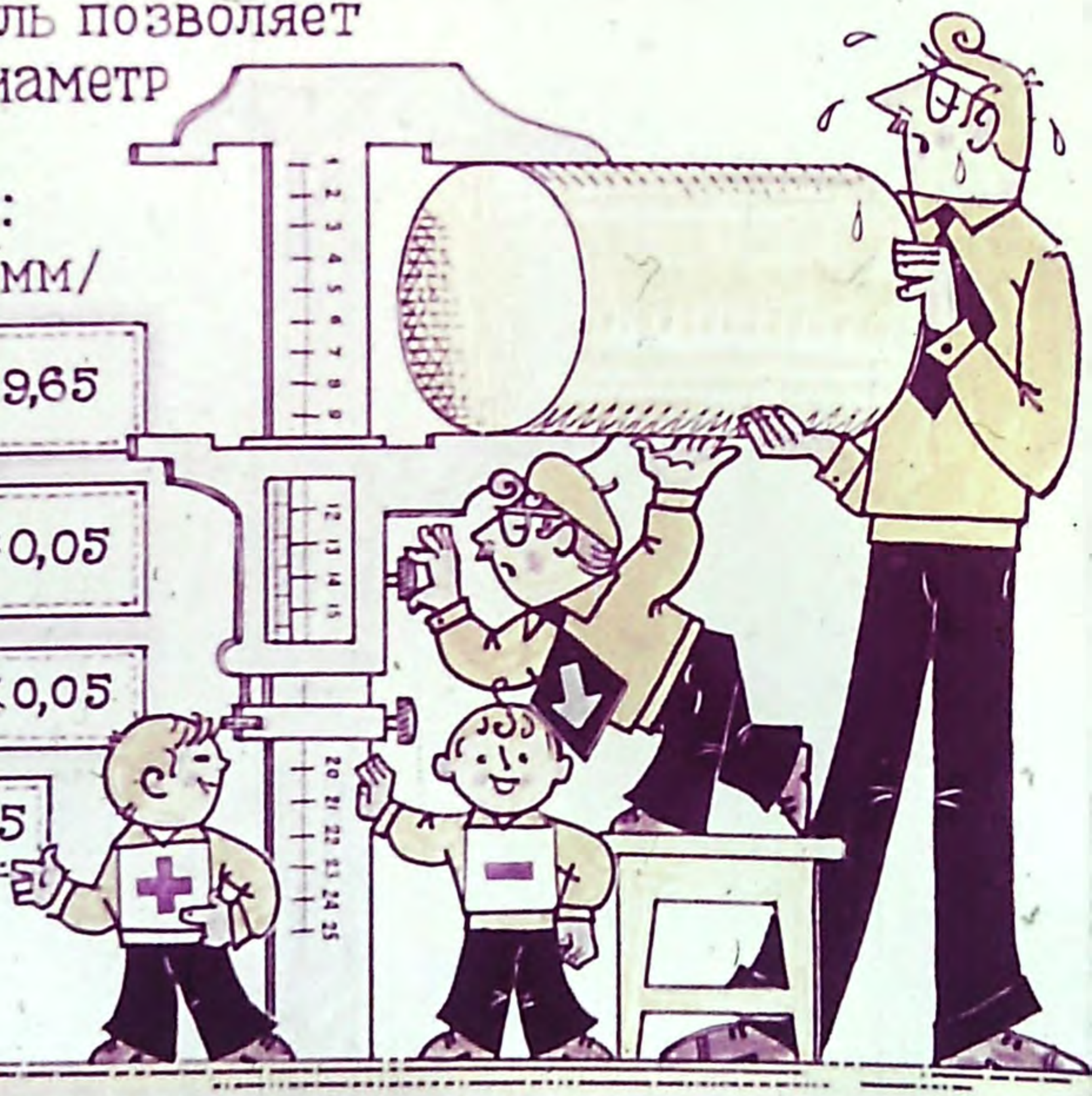
$9{,}6 \leqslant d \leqslant 9{,}7$ /мм/

$$a = \frac{9{,}6 + 9{,}7}{2} = 9{,}65$$

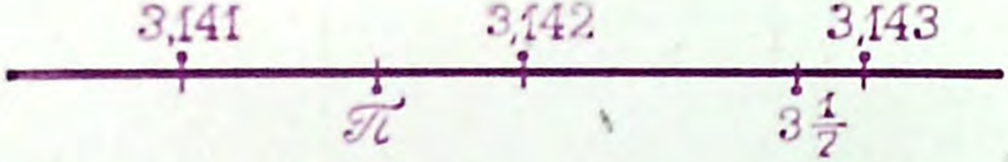
$$h = \frac{9{,}7 - 9{,}6}{2} = 0{,}05$$

$$\Delta = |d - 9{,}65| \leqslant 0{,}05$$

$$x = 9{,}65 \pm 0{,}05$$



АРХИМЕД
287–212 до н. э.

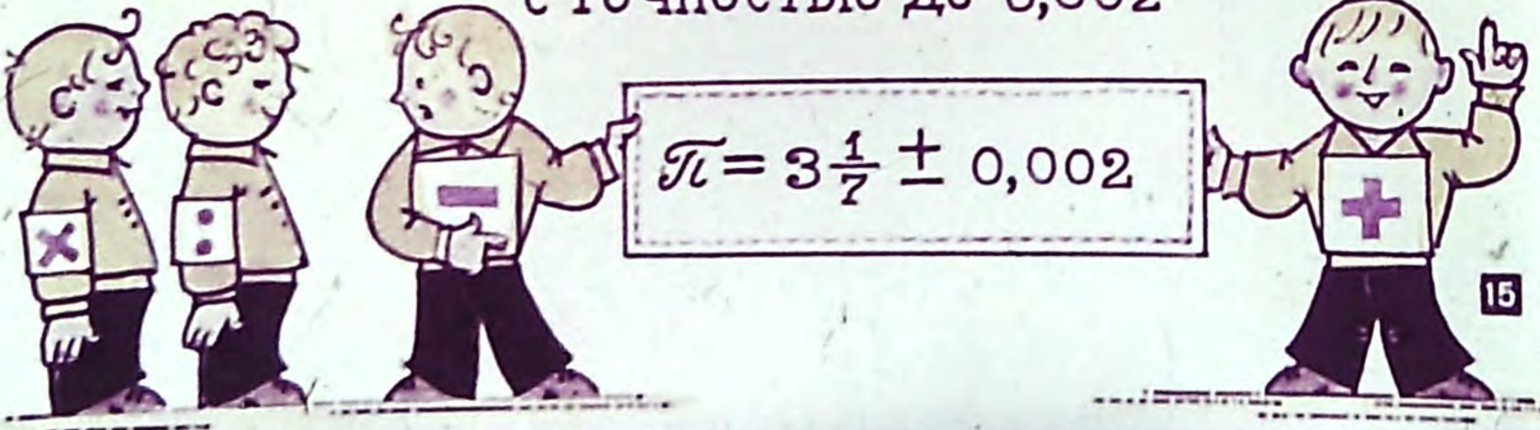


$$\left|\pi - 3\tfrac{1}{7}\right| < 0{,}002$$

$$\pi = 3{,}1415\ldots \qquad 3\tfrac{1}{7} = 3{,}1428\ldots$$

В качестве приближенного значения для π АРХИМЕД предложил число $3\frac{1}{7}$.

$3\frac{1}{7}$ – приближенное значение π с точностью до 0,002



заполните таблицу:

	$\longleftrightarrow$	$\longleftrightarrow$ $x = 45 \pm 1$	$\longleftrightarrow$
	$\longleftrightarrow$ $\lvert x-a \rvert \leqslant h$	$\longleftrightarrow$	$\longleftrightarrow$
$9{,}6 \leqslant d \leqslant 9{,}7$	$\longleftrightarrow$	$\longleftrightarrow$	$\longleftrightarrow$
	$\longleftrightarrow$	$\longleftrightarrow$	$\longleftrightarrow$ $\left\{ \begin{array}{l} 3\frac{1}{7} \text{ - приближ.} \\ \text{значение } \pi \\ \text{с точн. до } 0{,}002 \end{array} \right.$

Математик Шенкс вычислил в прошлом столетии 606 знаков десятичного разложения числа π. Недавно/с помощью ЭВМ/ вычислено значительно большее число знаков. Оказалось, что последние полтораста знаков Шенкс вычислил неверно.

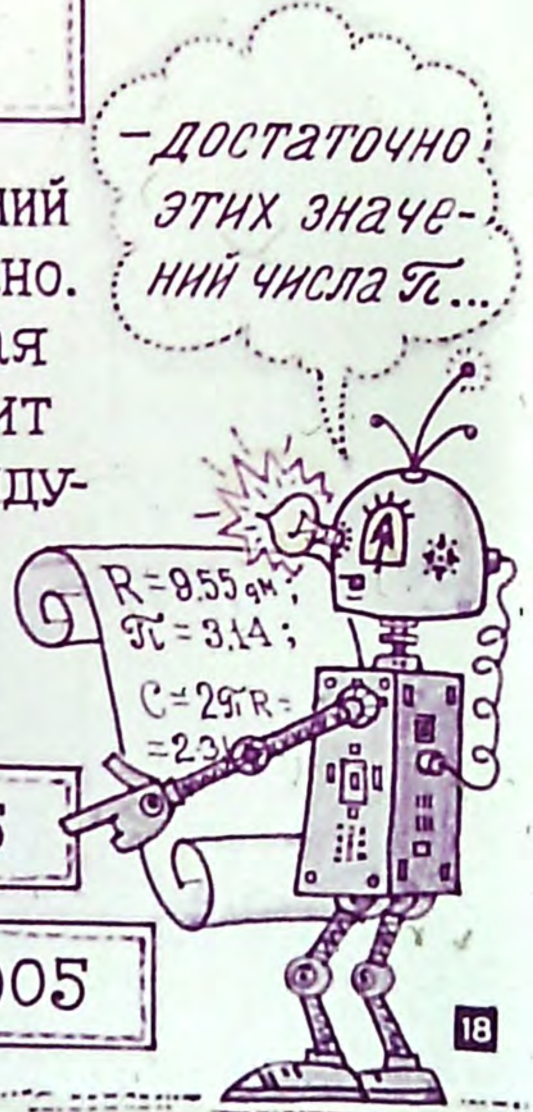
$$\pi = 3{,}1415926536\ldots$$

На практике для вычислений такое число знаков не нужно. При округлении абсолютная погрешность не превосходит половины единицы предыдущего разряда.

$$\pi = 3{,}14 \pm 0{,}005$$

$$\pi = 3{,}142 \pm 0{,}0005$$

$$\pi = 3{,}1416 \pm 0{,}00005$$



Округлите следующие числа до сотых. Укажите, какое приближение /с недостатком или с избытком/ является лучшим, т.е. имеет меньшую погрешность.

Пусть a - приближенное значение числа x с точностью до h /т.е. $x=a+\Delta$, $|\Delta| \leqslant h$/.

Число $\frac{\Delta}{a}$ называется <u>относительной погрешностью</u> этого приближенного значения.

Модуль относительной погрешности не превосходит числа $\varepsilon = \frac{h}{|a|}$

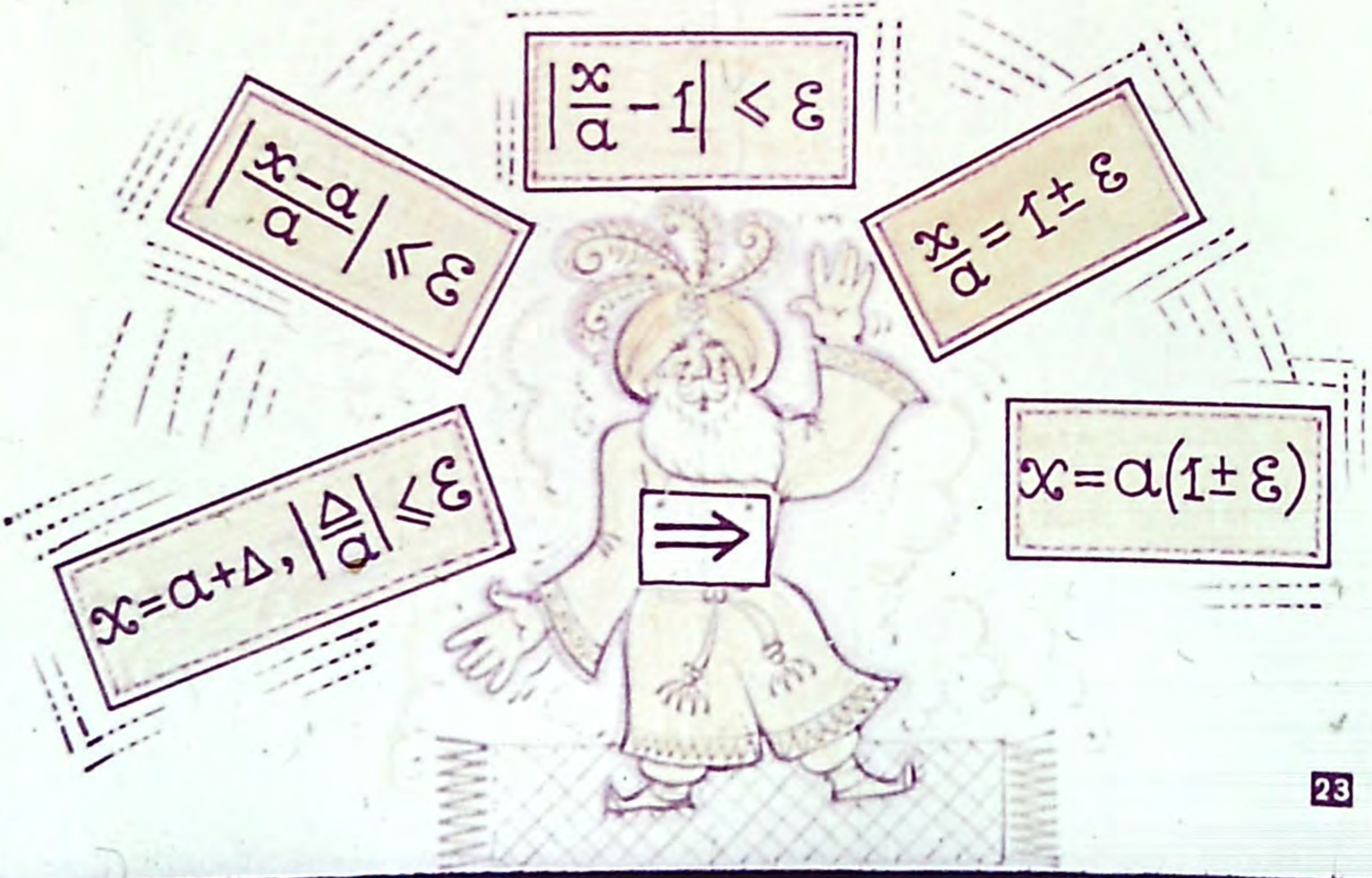
Весы позволяют измерить массу товара с относительной погрешностью до 2%.

$$m_1 \approx 3{,}2\,\text{кг}; \quad m_2 \approx 6{,}7\,\text{кг}; \quad m_3 \approx 1{,}65\,\text{кг}$$

Оцените абсолютную погрешность при каждом взвешивании. Укажите границы, в которых заключена масса каждого предмета.


Относительную погрешность можно рассматривать как показатель качества измерения.
t° = 25,1 ± 0,1 °C
Т
t° = 25 ± 1 °C
Определите относитель-ные погрешности и срав-ните качество измерений, выполненных двумя тер-мометрами.

Число a в том и только в том случае является приближенным значением x с относительной точностью до ε, если $x = a(1 \pm \varepsilon)$.

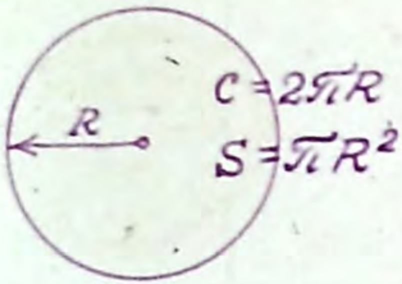


ПРАКТИЧЕСКИЕ ПРИЕМЫ ПРИБЛИЖЕННЫХ ВЫЧИСЛЕНИЙ

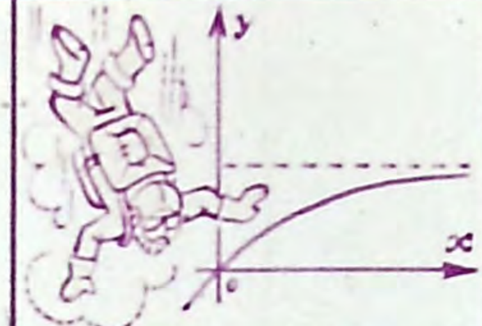
В десятичных приближениях с недостатком и с избытком все цифры верные, т.е. абсолютная погрешность не превосходит единицы последнего разряда.

Запишите приближения в виде десятичных дробей и округлите, сохраняя в записи только верные цифры:

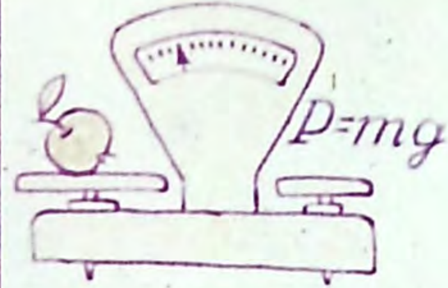
$\pi = 3\frac{1}{7} \pm \frac{1}{700}$



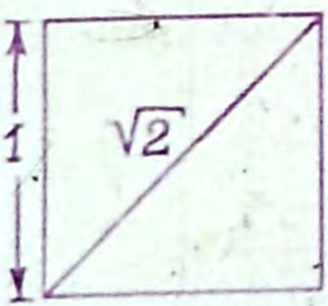
$e = 2\frac{23}{32} \pm \frac{1}{2000}$



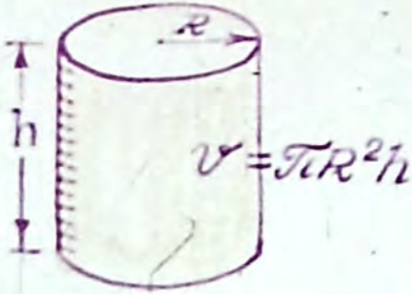
$g = 9\frac{13}{16} \pm \frac{1}{200}$



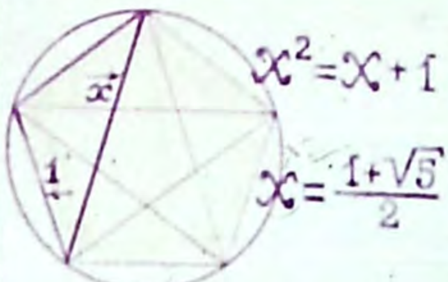
$\sqrt{2} = 1\frac{12}{29} \pm \frac{1}{2000}$



$\pi = 3\frac{16}{113} \pm 5 \cdot 10^{-7}$

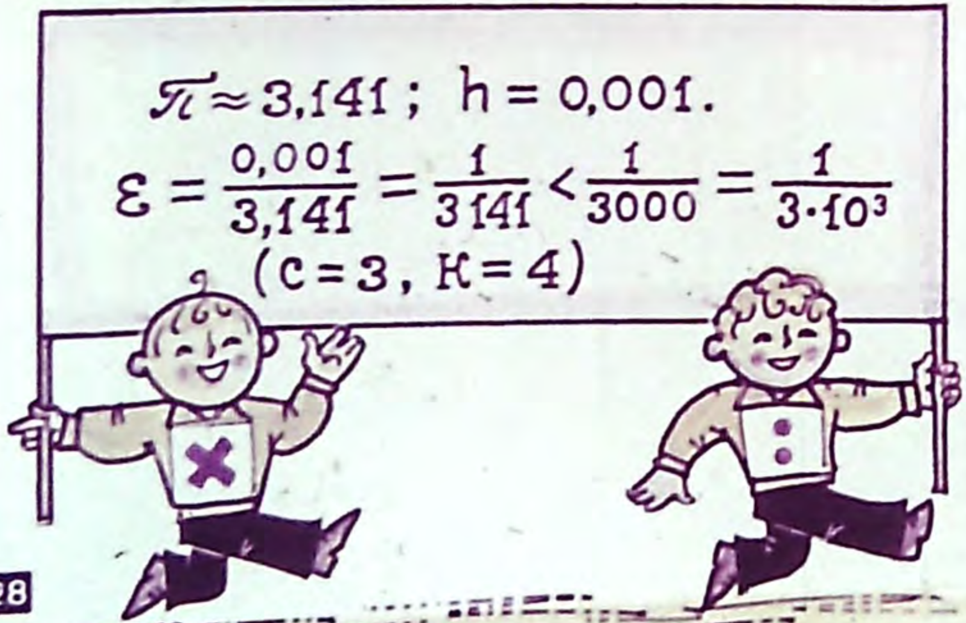


$\sqrt{5} = \frac{47}{21} \pm \frac{1}{550}$



$d \approx 1{,}50 \cdot 10^{8}$ км
$c \approx 2{,}998 \cdot 10^{10}$ см/с
$m \approx 1{,}6733 \cdot 10^{-27}$ кг
$N \approx 6{,}02 \cdot 10^{23}$
$N = (6{,}02 \pm 0{,}01) \cdot 10^{23}$
$|\Delta| \leq 0{,}01 \cdot 10^{23} = 10^{21}$
В физике, астрономии, технике широко используется запись чисел в стандартном виде. Укажите в каждом случае границу погрешности (все цифры верные).
27

Если в десятичной записи приближенного значения все цифры верные, то модуль относительной погрешности не превосходит $\varepsilon = \frac{1}{c \cdot 10^{k-1}}$, где к – число значащих цифр, а с – первая (слева) значащая цифра.



$$\pi \approx 3{,}141\ ;\quad h = 0{,}001.$$

$$\varepsilon = \frac{0{,}001}{3{,}141} = \frac{1}{3141} < \frac{1}{3000} = \frac{1}{3 \cdot 10^3}$$

$$(c = 3\ ,\ k = 4)$$

СЛОЖЕНИЕ И ВЫЧИТАНИЕ

Вычислить $x_1 + x_2 - x_3$,

если $x_1 \approx 2{,}17$; $x_2 \approx 3{,}3742$; $x_3 \approx 4{,}0152$

(все цифры верные).

– Это данное имеет наименьшее число верных знаков.

– Округлим и остальные до сотых?

– Нет, для большей точности оставим еще один знак!

$$x_1 \approx 2{,}17$$
$$x_2 \approx 3{,}374$$
$$\underline{x_3 \approx 4{,}016}$$
$$1{,}528$$

– Результат округлим до сотых...

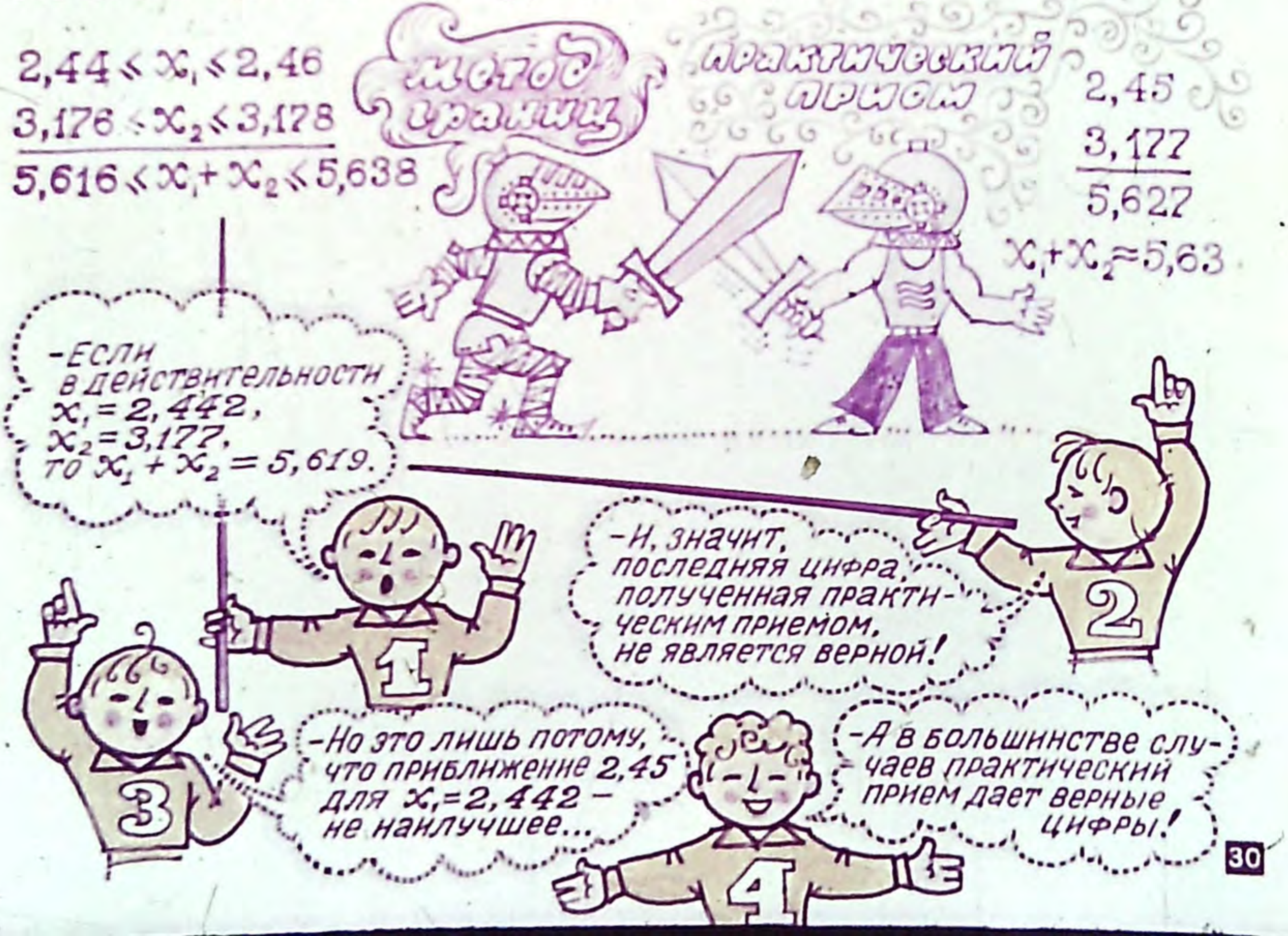
$$x_1 + x_2 - x_3 \approx 1{,}53$$

Пример: найти x_1+x_2, если $x_1\approx 2{,}45$; $x_2\approx 3{,}172$.

$$\begin{array}{l} 2{,}44\leqslant x_1\leqslant 2{,}46 \\ 3{,}176\leqslant x_2\leqslant 3{,}178 \\ \hline 5{,}616\leqslant x_1+x_2\leqslant 5{,}638 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 2{,}45 \\ 3{,}177 \\ \hline 5{,}627 \end{array}$$

$x_1+x_2\approx 5{,}63$



УМНОЖЕНИЕ И ДЕЛЕНИЕ

Вычислить $x_1 \cdot x_2 : x_3$,

если $x_1 \approx 23{,}21$; $x_2 \approx 0{,}0032$; $x_3 \approx 2{,}157$.

(все цифры верные)

$$x_1 \approx 23{,}2$$
$$x_2 \approx 0{,}0032$$
$$x_3 \approx 2{,}16$$

$$23{,}2 \cdot 0{,}0032 : 2{,}16 = 0{,}03437\ldots$$

$$x_1 \cdot x_2 : x_3 \approx 0{,}034$$

В промежуточных результатах надо оставлять на одну цифру больше.

Пример: вычислить $x_1 x_2 + x_3 x_4$,

если $x_1 \approx 0{,}00031$; $x_2 \approx 253{,}27$;

$x_3 \approx 0{,}0237$; $x_4 \approx 5{,}7923$.

— Округлим до трех значащих цифр...

— Округлим до четырех значащих цифр.

— Для большей точности сохраним одну лишнюю цифру в промежуточных результатах.

$$0{,}00031 \cdot 253 \approx 0{,}0784$$

$$0{,}0237 \cdot 5{,}792 \approx 0{,}1373$$

$$0{,}0784 + 0{,}1373 = 0{,}2157$$

— Окончательный результат округлим.

$$x_1 x_2 + x_3 x_4 \approx 0{,}216$$

Рассчитайте тот же пример методом границ

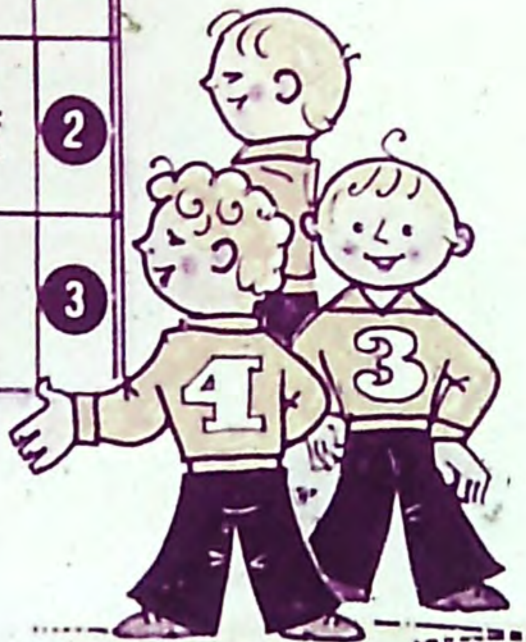
$$x_1 \approx 0{,}00031\,; \quad x_2 \approx 253{,}27\,;$$

$$x_3 \approx 0{,}0237\,; \quad x_4 \approx 5{,}7923\,.$$

$$\boxed{x_1 \cdot x_2 + x_3 \cdot x_4 \approx 0{,}216}$$

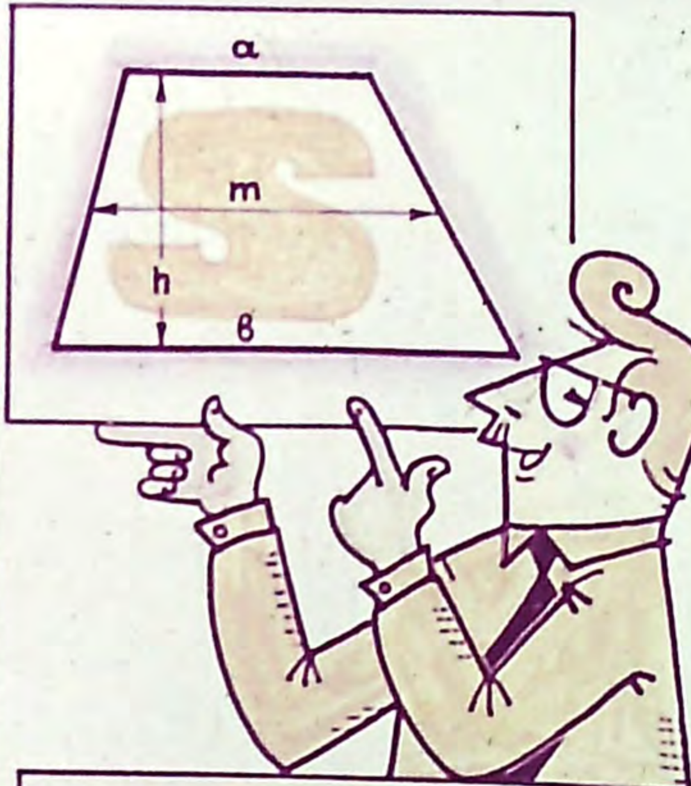
Укажите, с какой точностью целесообразно вычислить x_2 при вычислении произведения $x_1 x_2$ (в записи множителя x_1 все цифры верные).

$x_1 \approx 2{,}76$	$x_2 = \sqrt{\pi - 3}$	1
$x_1 \approx 0{,}037$	$x_2 = \frac{1}{3} - \frac{1}{\pi}$	2
$x_1 \approx 13{,}46$	$x_2 = \frac{7}{\sqrt{11}}$	3



	a	в	m	h	S
1.		4,32	3,77	2,19	
2.	0,371	0,84		1,117	
3.		0,131		0,78	0,085
4.		5,11	3,972		11,38
5.	6,07	9,385			65,29
6.	3,349			2,19	4,503
7.	4,3		3,501	2,136	
8.	6,32		8,443		40,31

У выписанных данных все цифры верные.



Заполните таблицу, вычисляя практическим приемом приближенные значения недостающих данных.


Метод границ
практический прием
-Я-точный метод!
-Я-самый простой и удобный на практике! Ошибки мои невелики...
ТУРНИР МЕТОДОВ
36

Диафильм по математике для 7 класса
сделан по заказу Министерства просвещения СССР

Автор доктор физико-математических наук В. Болтянский
Художественный редактор В. Дугин
Редактор. Г. Витухновская

101 000, Москва, Центр, Старосадский пер., 7
Цветной 0-30 Д-348-78