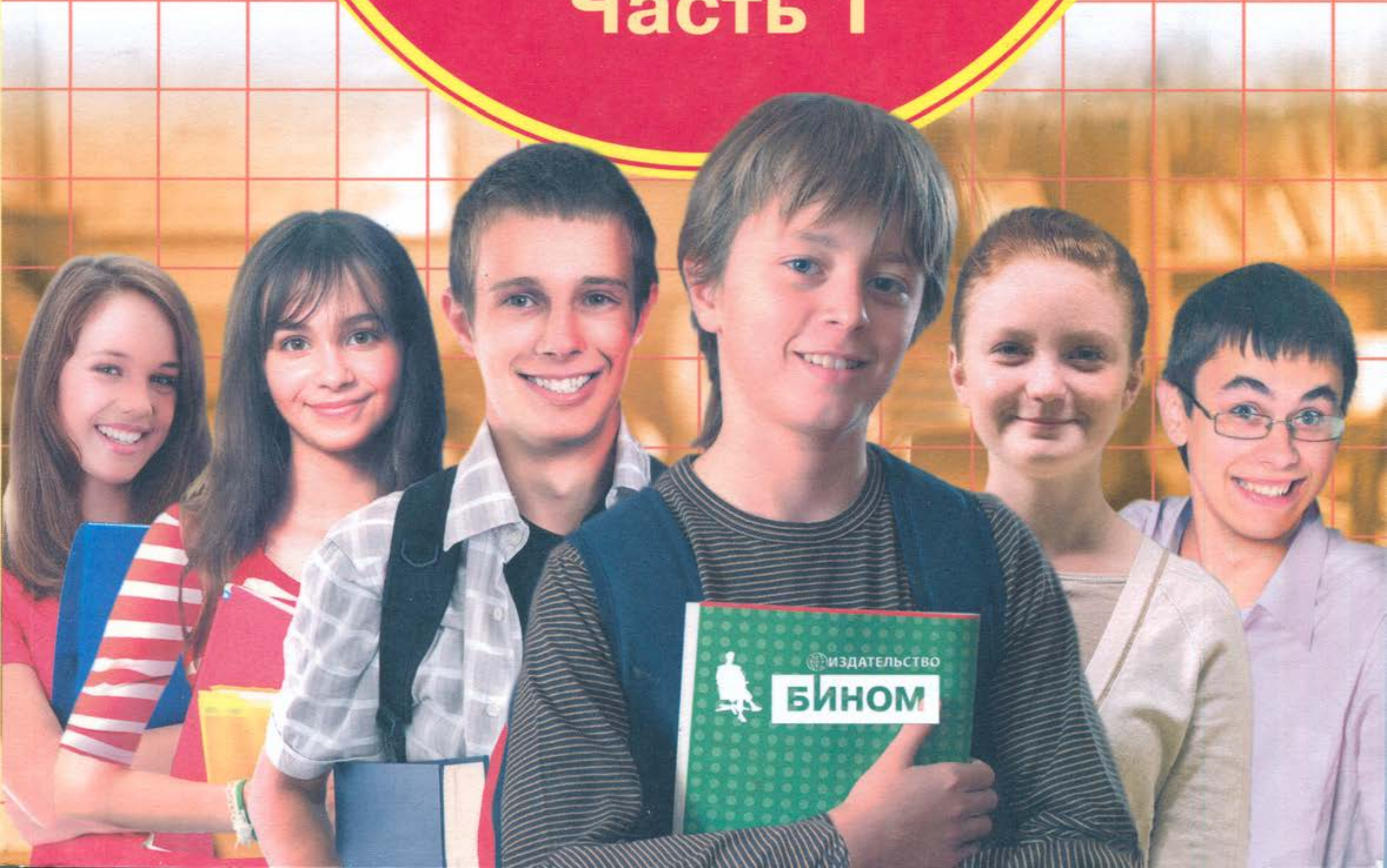
ФГОС
ООО

Л. Г. Петерсон, Д. Л. Абраров, Е. В. Чуткова

Алгебра

7 класс

Часть 1



УДК 373:51
ББК 22.1я721
Д 69

Образовательная система Л. Г. Петерсон

«УЧУСЬ УЧИТЬСЯ»

Непрерывный курс математики
для дошкольников, учащихся начальной и основной
школы 1–9 (от 3 до 15 лет)

П 29 **Петерсон, Л. Г.** Алгебра. 7 класс : учебник (в 3 частях). Ч. 1 / Л. Г. Петерсон, Д. Л. Абраров, Е. В. Чуткова. — 2-е изд., стереотип.— М. : Просвещение, 2021. — 136 с. + [4 с., вкл.] : ил. — ISBN 978-5-09-081067-8.

Учебник ориентирован на развитие мышления и творческих способностей учащихся, формирование у них системы прочных математических знаний, общеучебных умений, развитие личностных качеств, познавательного интереса и ценностного отношения к образованию.

Является частью непрерывного УМК по математике «Учусь учиться» для дошкольников, учащихся начальной и основной школы (от 3 до 15 лет). Соответствует федеральному государственному образовательному стандарту основного общего образования.

Реализует дидактическую систему деятельностного метода обучения Л. Г. Петерсон. Отмечен Премией Президента РФ в области образования.

Может использоваться во всех типах школ.

Курсовую и методическую поддержку по реализации УМК «Учусь учиться» осуществляет НОУ ДПО «Институт системно-деятельностной педагогики». Подробную информацию можно получить на сайте www.sch2000.ru.

УДК 373:51
ББК 22.1я721

ISBN 978-5-09-081067-8 (Ч. 1)
ISBN 978-5-09-081070-8

ФГОС
ООО

Л. Г. Петерсон, Д. Л. Абраров, Е. В. Чуткова

Алгебра

7 класс

Учебник

(в 3 частях)

Часть 1

2-е издание, стереотипное

Допущено
к использованию при реализации имеющих государственную аккредитацию образовательных программ начального общего, основного общего, среднего общего образования

Москва
«Просвещение»
2021

Чтобы учебником было удобно пользоваться, в нём введены следующие обозначения:

К – задачи по новой теме для работы в классе,

Д – задачи для домашней работы,

П – повторение ранее пройденного,

С – задачи на смекалку,

– задания базового уровня,

– более сложные задания по новым темам и темам повторения,

* – задания, требующие умения находить нестандартные способы решения,

▼ – завершение доказательства теоремы,

☺☺☺ – материал для тех, кому интересно.

Глава 1
Построение математической теории

§ 1. Математическое моделирование

1.1.1. Математическая модель реальной задачи

Математика – это искусство называть разные вещи одним и тем же именем.

Анри Пуанкаре (1854–1912), французский математик, физик и философ

При изучении проблем физики, химии, биологии, экономики и многих других наук сегодня широко используется математическое моделирование. Наблюдая за явлениями окружающего мира, учёные стараются выявить их наиболее существенные свойства и установить закономерности, которым они подчиняются. Когда результаты таких наблюдений получается записать на математическом языке, удаётся построить математическую модель явления.

Иногда, казалось бы, различные явления или процессы описываются одними и теми же законами. Тогда возникает возможность дать их единое описание. Вот здесь и проявляется практическое удобство математического моделирования. Например, формула $a = bc$ может описывать как прямолинейное равномерное движение ($s = vt$), так и равномерную работу ($A = wt$) и множество других равномерных процессов. Поэтому при решении задач данного типа мы, например, можем легко найти значения величин v и w по общему правилу нахождения неизвестного множителя ($v = s : t$, $w = A : t$).

Язык математики, состоящий, в частности, из чисел, букв и выражений, уравнений и неравенств, помогает записать взаимосвязи, лежащие в основе различных процессов. А это уже позволяет упростить решение многих практических задач.

Идея моделирования состоит в замене реального объекта некоторым его «заместителем», называемым *моделью*. Сначала свойства изучаемого объекта формулируются, например, на языке физики. Таким образом строится физическая модель. Построенная физическая модель – это фактически текст математической задачи. Записав его на математическом языке, мы получим *математическую модель*.

При построении модели, как правило, происходит упрощение первоначальной задачи. Так, в задачах, которые мы рассматривали ранее, рабочие работали с одинаковой производительностью, а все объекты двигались с одинаковой скоростью. Конечно же, упрощение при моделировании происходит не только в школьных учебниках, но и в реальной жизни. Например, автопилот самолёта всегда проще человека – пилота, а компьютерная имитация игры в футбол проще реальной игры.

Процесс *математического моделирования*, как мы уже знаем, включает в себя три этапа. Вспомним их.

I. Построение математической модели.

На данном этапе текст задачи переводится на математический язык. Для этого определяется, что известно, что надо найти, устанавливаются взаимосвязи между известными и неизвестными величинами, вводятся буквенные обозначения, составляются математические соотношения: уравнения и неравенства. При этом важно выбрать буквенные обозначения таким образом, чтобы полученные соотношения имели как можно более простой вид.

II. Работа с математической моделью.

В результате перевода практической задачи на математический язык могут возникнуть два случая:

1) имеется математическая теория, позволяющая получить решение данной задачи;

2) такой математической теории не существует.

В первом случае мы просто выбираем способ, позволяющий получить решение задачи. Во втором случае мы должны создать новый или усовершенствовать некоторый старый способ таким образом, чтобы получить в итоге решение данной задачи (и одновременно всех других подобных задач). При этом происходит развитие и самой математической теории.

Математика может развиваться также, исходя лишь из своей внутренней логики и красоты, опережая потребности практики. Так, например, Евклид ещё до нашей эры заложил основы теории делимости, а сегодня она широко используется в задачах шифрования и дешифрования текстов.

III. Практический вывод.

Получив решение математической задачи, необходимо его проанализировать, то есть разобраться в его реальном смысле, а затем сделать выводы. В этом состоит третий этап математического моделирования.

Таким образом, математическое моделирование позволяет свести решение большого числа внешне различных практических задач к решению уравнений и неравенств. А это, в свою очередь, ведёт к развитию математической теории, в частности к развитию теории уравнений и неравенств.

Но для начала нам надо научиться *строить удобные математические модели, приводящие к уравнениям, способ решения которых известен.* И тогда следующий шаг – применение знакомого алгоритма – не составит труда, являясь, как говорят, «делом техники».

Вспомним и уточним известный нам алгоритм решения задач методом математического моделирования. Для этого рассмотрим следующую задачу.

Задача. Мама купила Мише книги и диски. Вместе книг и дисков было 9. Известно, что количество купленных мамой книг при делении на 3 даёт остаток 1, а количество купленных ею дисков при делении на 3 даёт остаток 2. Один из дисков Миша подарил свой сестре. Сколько дисков у него осталось?

Решение:

I. Построение математической модели.

<u>Фиксируем, что известно и что надо найти.</u>

Нам известно, что мама купила общим числом 9 книг и дисков. Количество книг при делении на 3 даёт остаток 1, количество дисков при делении на 3 даёт остаток 2. Один из дисков Миша подарил своей сестре.

Нужно найти, сколько дисков осталось у Миши.

<u>Выбираем неизвестные величины, которые будем обозначать буквой.</u>

Обозначим x – количество книг, а y – количество дисков, которые купила мама.

Из условия задачи следует, что $x \in N$ и $y \in N$.

<u>Устанавливаем взаимосвязи между известными и неизвестными величинами.</u>

Так как x при делении на 3 даёт остаток 1, то по формуле деления с остатком $x = 3a + 1$ $(a \in N_0)$, где N_0 – множество натуральных чисел и 0.

Аналогично $y = 3b + 2$ $(b \in N_0)$.

<u>Составляем уравнение.</u>

По условию, сумма искомых чисел равна 9, значит, $x + y = 9$.

Все взаимосвязи, заданные в условии задачи, описаны полученными уравнениями.

Таким образом, мы получили математическую модель, состоящую из трёх уравнений и требований к переменным, входящим в эти уравнения. Запишем их все вместе и *зафиксируем значение величины, которое требуется найти.* (Фигурная скобка обозначает, что все уравнения должны выполняться одновременно.)

$$\begin{cases} x + y = 9,\ x \in N,\ y \in N; \\ x = 3a + 1,\ a \in N_0; \\ y = 3b + 2,\ b \in N_0. \end{cases} \longrightarrow \boxed{y - 1 = ?}$$

Заметим, что в ходе построения математической модели мы выделили три важных шага, не зафиксированные в алгоритме, который использовался нами ранее:

✓ мы определили множество значений, которые могут принимать неизвестные величины;

⚐ проверили, что каждый элемент условия задачи описан соответствующим уравнением;

★ зафиксировали искомую величину.

Каждый из этих новых выделенных шагов непосредственно влияет на правильность построения модели и правильность ответа, поэтому необходимо дополнить этими шагами построенный ранее алгоритм.

II. Работа с математической моделью.

После того как модель построена, можно в первое уравнение вместо x и y подставить соответствующие им выражения и выполнить несложные преобразования полученного уравнения, помня, что $x,\ y \in N,\ a,\ b \in N_0$:

$(3a + 1) + (3b + 2) = 9 \Leftrightarrow 3(a + b) = 6 \Leftrightarrow a + b = 2 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow a = 0,\ b = 2$, или $a = 1,\ b = 1$, или $a = 2,\ b = 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x = 1,\ y = 8$, или $x = 4,\ y = 5$, или $x = 7,\ y = 2$.

Тогда количество дисков, оставшихся у Миши, равно:

$$y - 1 = 7, \text{ или } y - 1 = 4, \text{ или } y - 1 = 1.$$

III. Практический вывод.

Итак, мы получили, что данная задача имеет три решения, для каждого из которых значения величин x и y соответствуют условию задачи: полученные значения – натуральные числа, при этом во всех указанных случаях число книг при делении на 3 даёт остаток 1, а число дисков при делении на 3 даёт остаток 2.

Ответ: у Миши осталось либо 7 дисков, либо 4 диска, либо 1 диск.

В итоге мы пришли к следующему уточнённому варианту алгоритма решения задач методом математического моделирования:

Алгоритм решения задач методом математического моделирования

I. Построение математической модели.

1. Внимательно прочитать задачу.
2. Определить, какие величины известны и какие надо найти.
3. Проверить соответствие единиц измерения величин.
4. Выбрать неизвестные величины и ввести для них буквенные обозначения.
5. Определить множество значений, которые могут принимать неизвестные величины.
6. Установить взаимосвязи между величинами.
7. Составить уравнение и обосновать его.
8. Проверить, что каждый элемент условия задачи описан соответствующим уравнением.
9. Зафиксировать искомую величину.

II. Работа с математической моделью.

10. Найти все решения, удовлетворяющие построенной модели.

III. Практический вывод.

11. Проверить соответствие полученного ответа вопросу задачи.
12. Убедиться, что полученные решения соответствуют смыслу задачи.

К

1 Запишите решение задачи в виде буквенного выражения и найдите его значение для:

а) $n = 208$, $m = 50$; в) $n = 242$, $m = 110$;

б) $n = 180$, $m = 46$; г) $n = 210$, $m = 62$.

1) За книгу и фотоальбом заплатили n р. Книга стоила на m р. дороже фотоальбома. Сколько стоила книга?

2) Автомобиль и автобус проехали вместе n км. Известно, что автобус проехал на m км меньше, чем автомобиль. Сколько километров проехал автомобиль?

3) Двое рабочих сделали вместе n деталей. При этом первый рабочий сделал на m деталей больше, чем второй. Сколько деталей сделал первый рабочий?

2 Постройте математическую модель и решите задачу:

а) Петю спросили, сколько ему лет. Он ответил: «Если из моего удвоенного теперешнего возраста вычесть утроенный мой возраст, который был восемь лет назад, то получится мой теперешний возраст». Сколько лет Пете?

б) Когда повара спросили, сколько яиц нужно взять, чтобы приготовить пирог, он ответил: «Если взять на 3 яйца меньше, чем это необходимо, увеличить это число в 5 раз, а затем вычесть из полученного результата число, в 2 раза большее необходимого числа яиц, то получится число, на 5 большее искомого». Сколько яиц нужно взять, чтобы приготовить три пирога по рецепту этого повара?

в) Высота Останкинской башни на 216 м больше, чем Эйфелевой. Если высоту Останкинской башни увеличить в 3 раза, а из высоты Эйфелевой башни вычесть 134 и сложить полученные величины, то получится 1810. Чему равна высота Останкинской башни?

3 Решите задачу:

а) Выручка книжного магазина (поступление денежных средств от покупателей) составила в первом квартале 700,46 тыс. р. Известно, что в январе выручка была на 49,58 тыс. р. больше, чем в феврале, а в марте – на 178,92 тыс. р. меньше, чем в феврале. Сколько денежных средств получил магазин от покупателей в марте?

б) Три файла занимают на диске 112,73 Мб. Размер второго файла на 4,54 Мб меньше, чем первого, а размер третьего файла — на 5,61 Мб больше, чем первого. Каков размер второго файла?

в) Шоколадная фабрика выпустила в августе 524,48 тонны конфет трёх сортов: «Миндальные», «Клубничные», «Сливочные». При этом миндальных конфет произвели на 39,56 тонны меньше, чем клубничных, а сливочных – на 97,69 тонны больше, чем клубничных. Сколько миндальных конфет произвели на шоколадной фабрике в августе?

4 а) Компания «Дискоспэйс» выпускает диски DVD. Стоимость изготовления одного диска составляет 50 р. При этом компания несет ежемесячно следующие расходы: аренда помещений – 50 000 р., зарплата персонала – 100 000 р., лицензии и авторские гонорары – 200 000 р., прочие расходы – 30 000 р. Цена продажи одного диска составляет в среднем 250 р. Какое количество дисков должна продавать компания ежемесячно, чтобы окупать все свои расходы?

б) Компания «Шокодрим» продает шоколадные батончики. Стоимость закупки одного батончика составляет 24 р., а стоимость продажи – 32 р. В месяц компания продаёт 80 000 батончиков. Какими должны быть другие ежемесячные расходы компании, чтобы её прибыль равнялась нулю?

в) Компания «Лайтстар» продает многофункциональные туристические фонари. Стоимость продажи одного фонаря составляет 570 р. Ежемесячно компания несёт следующие расходы: аренда помещений – 300 000 р., зарплата персонала – 400 000 р., прочие расходы – 76 900 р. В месяц компания продаёт 4570 фонарей. По какой максимальной цене может закупать компания эти фонари, чтобы покрывать все свои расходы?

5 Постройте математическую модель и решите задачу:

а) Сумма двух натуральных чисел равна 12. Первое число при делении на 5 даёт остаток 3, а второе число при делении на 5 даёт остаток 4. Найдите эти числа.

б) Сумма двух натуральных чисел равна 28. Первое число при делении на 8 даёт остаток 5, а второе число при делении на 8 даёт остаток 7. Найдите эти числа.

в) Сумма двух натуральных чисел равна 44. Первое число при делении на 11 даёт остаток 9, а второе число при делении на 11 даёт остаток 2. Найдите эти числа.

г) Сумма двух натуральных чисел равна 47. Первое число при делении на 15 даёт остаток 11, а второе число при делении на 15 даёт остаток 6. Найдите эти числа.

П **6** Разбейте записи на три группы: выражения, уравнения, неравенства.

а) $158 + 2 \cdot 6$; в) $-1 = 3(7a + 2)$; д) $a^3 - b^3$; ж) $-1{,}04 \leqslant 2c < \frac{1}{9}$;

б) $0{,}5y - 45 = 5x$; г) $2 > 3$; е) $(a - b)^3$; з) $d^2 \geqslant 0$.

Вспомните, какими особенностями обладает каждая из этих групп.

7 Что общего во всех высказываниях?

а) Разностью двух чисел $a - b$ называется число c, такое, что $a = b + c$.

б) Средним арифметическим нескольких чисел называется результат деления суммы этих чисел на их количество.

в) Переменной величиной называется буквенное обозначение для элемента некоторого множества.

г) Натуральной (n-й) степенью числа a называется число a^n, равное произведению n множителей, каждый из которых равен a.

8 Запишите следующие выражения:

1) сумма квадратов двух чисел; 3) разность квадратов двух чисел;
2) квадрат суммы двух чисел; 4) квадрат разности двух чисел.

Найдите значения полученных выражений для чисел:

а) 8 и 2; б) −4 и 3; в) 7 и −5; г) −9 и −6.

9 Решите уравнение:

а) $2(x - 9{,}5) - 3(x + 1{,}8) = -4{,}4$; в) $-4(x - 7{,}6) = 8(x - 1{,}8) - 3{,}2$;

б) $5{,}7 - (x - 11{,}3) = 2(x + 3{,}7)$; г) $15{,}3 - 2(x - 0{,}9) = -0{,}7 + 3(x - 2{,}4)$.

10 Решите задачу:

а) Автомобилист проехал за два дня 580 км, причём в первый день он проехал расстояние в 1,5 раза большее, чем во второй. Сколько километров проехал автомобилист в первый день?

б) Расходы предприятия на закупку сырья увеличились в марте в 2,1 раза по сравнению с февралем. Всего в феврале и марте на закупку сырья потратили 1643 тыс. р. Какую сумму потратило предприятие на закупку сырья в марте?

в) Задумали три натуральных числа. Известно, что их сумма равна 960. Первое число на 36 больше второго, а второе в 2,5 раза больше третьего. Какие числа задумали?

г) Команда из 4 бегунов участвовала в эстафете. Их результат составил 104,3 с. Первый бегун пробежал свою часть дистанции на 3 с быстрее второго, второй – на 2,1 с медленнее третьего, а четвёртый – на 1,6 с медленнее первого. За сколько секунд пробежал четвёртый бегун свою часть дистанции?

Д **11** Решите задачу:

а) Выручка магазина составила в этом году на 323,69 тыс. р. больше, чем в предыдущем. Всего за эти два года магазин получил выручку в размере 927,45 тыс. р. Сколько денег получил магазин от покупателей в этом году?

б) В вагоне метро, после того как из него вышли 9 человек, а вошли 17 человек, стало в 1,5 раза больше людей, чем было до этого. Сколько человек стало в вагоне?

12 Запишите следующие выражения:

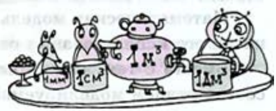
1) сумма кубов двух чисел; 2) куб суммы двух чисел.

Найдите значения полученных выражений для чисел:

а) 3 и 1; б) –5 и 2.

Что вы замечаете?

13 Решите уравнение:



а) $-(x + 15{,}4) = -5{,}4 + (3{,}7 - 2x)$;

б) $x + 12{,}3 - 5(x - 5{,}9) = 8{,}6$.

14 Выполните вычисления и расположите ответы примеров в порядке возрастания, сопоставив их соответствующим буквам. Вы узнаете название раздела математики, основоположником которого был великий французский математик Анри Пуанкаре.

П	$-4{,}3 + (-3{,}1 - 7{,}8)$	Л	$-(11{,}8 - 3{,}6) + 2{,}5$
О	$-6{,}4 + 5{,}2 - (12{,}7 - 3{,}5)$	О	$(0{,}5 + 14{,}9) - (17{,}4 + 1{,}9)$
Я	$-(11{,}2 - 2{,}4 - 32{,}5)$	Т	$(18{,}1 - 17{,}3 + 2{,}5) - 34{,}5$
И	$5{,}8 + 13{,}1 - (-3{,}4)$	О	$45{,}7 - 38{,}9 + (-28{,}4)$
Г	$3{,}2 + 15{,}8 - (-5 + 4)$		

С **15*** Выпускники школы после выпускного вечера обменялись фотографиями каждый с каждым. Всего потребовалось 650 фотографий. Сколько было выпускников?

16* Мальчик спустился по движущемуся вниз эскалатору метро и насчитал 45 ступенек. Затем он с той же скоростью поднялся вверх по этому эскалатору и насчитал 225 ступенек. Сколько ступенек он насчитал бы, пройдя по неподвижному эскалатору?

1.1.2. Основные требования к математической модели

Вместо того чтобы искать некоторое соотношение, надо спросить, возможно ли такое соотношение.

Нильс Хенрик Абель (1802–1829), норвежский математик

В предыдущем пункте мы говорили о том, что построение математических моделей является эффективным методом исследования явлений и объектов окружающего мира. Математическое моделирование позволяет не только их изучать, но и управлять ими. Хорошо построенная модель помогает даже прогнозировать (предвидеть, определять заранее) моделируемое явление.

Математическая модель – это инструмент в руках исследователя. Для эффективности его использования он должен быть *достаточно простым*.

Вместе с тем, важно находить разумный баланс между простотой модели и её соответствием моделируемой ситуации. Ведь усложнение модели за счёт чрезмерной детализации может привести порой к невозможности исследования такой модели, а сильное упрощение модели может не дать достоверной информации о поведении исследуемого объекта.

Поэтому важным является требование *достаточной полноты* математической модели. А именно, математическая модель должна отражать все существенные для решения задачи свойства объекта. Эти свойства могут быть описаны явно в условии задачи. Они могут также следовать и из особенностей изучаемых объектов. Так, например, если в задаче речь идёт о количестве n учащихся класса, то ответ $n = -5\frac{2}{3}$ заведомо неверный. Ведь в задаче фактически есть условие $n \in N$, которое явно не указано.

Давайте решим задачу и посмотрим, какие изменения в нашем алгоритме повлекут эти требования к математическим моделям.

Задача. Первый угол треугольника на 20° больше второго, но в три раза меньше третьего угла. Найдите углы этого треугольника, если сумма первого и третьего углов равна 120°.

<u>Определяем, что известно и что надо найти.</u>

Известно, что первый угол треугольника на 20° больше второго, но в три раза меньше третьего, а сумма первого и третьего углов равна 120°.

Надо найти углы этого треугольника.

<u>Проверяем соответствие единиц измерения величин.</u>

Величины всех углов выражены в градусах, поэтому единицы измерения величин соответствуют друг другу.

Выбираем неизвестные величины, которые будем обозначать буквой.

Для того чтобы получить более простые уравнения, обозначим x° величину меньшего из углов треугольника, то есть величину второго угла.

Определяем множество значений, которые могут принимать неизвестные величины.

Величина угла треугольника может принимать только положительные значения, меньшие 180°, значит, $0 < x < 180$.

Устанавливаем взаимосвязи между известными и неизвестными величинами.

Величина первого угла треугольника равна $(x + 20)^\circ$, а третьего угла – $3(x + 20)^\circ$. Так как это углы треугольника, то для них также должны выполняться неравенства:

$$0 < x + 20 < 180; \ 0 < 3(x + 20) < 180.$$

Также известно, что сумма первого и третьего углов равна 120°.

На первый взгляд кажется, что другой информации в условии не дано. Однако нередко бывает так, что какие-то взаимосвязи заданы не явно, а вытекают из свойств заданного объекта.

В нашем случае объект моделирования – треугольник, а сумма углов любого треугольника равна 180°.

Таким образом, при построении математической модели необходимо также *установить взаимосвязи между величинами, возникающие из свойств моделируемого объекта (если они есть).*

Составляем и обосновываем уравнение.

По условию, сумма первого и третьего углов равна 120°, значит,

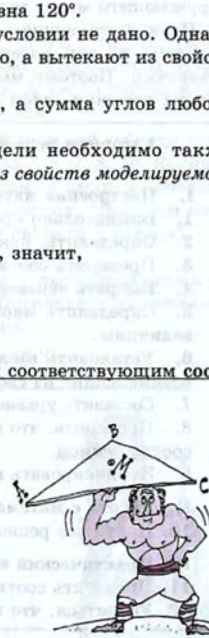
$$(x + 20) + 3(x + 20) = 120.$$

Сумма углов треугольника равна 180°, значит,

$$(x + 20) + x + 3(x + 20) = 180.$$

Проверяем, что каждый элемент условия задачи описан соответствующим соотношением.

Мы зафиксировали, что первый угол треугольника на 20° больше второго и в три раза меньше третьего, сумма первого и третьего углов равна 120° и что заданная фигура – треугольник.



Заметим, что ранее при моделировании задач мы сталкивались лишь с уравнениями, но требуемые соотношения могут быть заданы и неравенствами. Так, указанное множество значений переменной x не может быть описано уравнением, но может быть описано *неравенствами.* Поэтому соотношения мы будем понимать теперь в более широком смысле.

Фиксируем искомую величину.

Требуется найти величины каждого из трёх углов треугольника, то есть значения $x + 20$, x и $3(x + 20)$.

Выпишем соотношения, которые мы составили, и зафиксируем искомые величины. При этом важно заметить, что все составленные соотношения должны выполняться одновременно.

$$\begin{cases}(x + 20) + 3(x + 20) = 120; \\ (x + 20) + x + 3(x + 20) = 180; \\ 0 < x < 180;\ 0 < x + 20 < 180;\ 0 < 3(x + 20) < 180.\end{cases} \longrightarrow \boxed{\begin{array}{l} x + 20 = ? \\ x = ? \\ 3(x + 20) = ? \end{array}}$$

<u>Ищем все решения, удовлетворяющие построенной модели.</u>

Искомое значение x должно удовлетворять каждому из составленных соотношений. Однако из первого уравнения следует, что $x = 10$, а из второго – что $x = 20$, что одновременно выполняться не может. Таким образом, приходим к выводу, что данная задача не имеет решений.

Проведенное исследование показывает, насколько важно при работе с математическими моделями учитывать все существенные свойства исследуемых объектов. Действительно, если бы мы не учли того, что сумма углов треугольника равна 180°, то получили бы решение 30°, 10° и 90°, которое не отражает объективных законов окружающего мира: треугольников с такими углами не существует.

Итак, математическая модель должна удовлетворять требованию *достаточной полноты*, то есть содержать все существенные взаимосвязи между исследуемыми объектами. Поэтому мы приходим к следующему *уточнению шагов* общего ***алгоритма решения задач методом математического моделирования***:

Алгоритм решения задач методом математического моделирования с уточнёнными шагами

I. Построение математической модели.
1. Внимательно прочитать задачу.
2. Определить, какие величины известны и какие надо найти.
3. Проверить соответствие единиц измерения величин.
4. Выбрать неизвестные величины и ввести для них буквенные обозначения.
5. Определить множество значений, которые могут принимать неизвестные величины.
6. Установить взаимосвязи между величинами (<u>явно заданные в условии и возникающие из свойств моделируемого объекта</u>).
7. Составить уравнение или <u>неравенство</u> (одно или несколько) и обосновать их. ✓
8. Проверить, что каждый элемент условия задачи описан соответствующим <u>соотношением</u>. ✓
9. Зафиксировать искомую величину.

II. Работа с математической моделью.
10. Найти все решения, удовлетворяющие построенной модели.

III. Практический вывод.
11. Проверить соответствие полученного ответа вопросу задачи.
12. Убедиться, что полученные решения соответствуют смыслу задачи.

К **17** Периметр прямоугольного участка земли равен 62 м, а разность между его длиной и шириной равна 5 м. Чему равна площадь этого участка земли?

18 а) Расстояние AD между началом и концом ломаной $ABCD$ равно 9,6 см. Известно, что AB равно четверти AD, BC на 0,4 см меньше AB, а CD в 1,5 раза больше BC. Чему равна длина ломаной $ABCD$?

б) Постройте ломаную $ABCD$, удовлетворяющую условию предыдущей задачи.

19 Постройте математическую модель и решите задачу:

1) Величины углов треугольника в градусах равны трём последовательным натуральным числам. Найдите их.

2) Величины углов треугольника в градусах равны трём последовательным четным числам. Найдите их.

3) Величины углов треугольника в градусах равны трём последовательным натуральным числам, кратным трём. Найдите их.

20 Решите задачу, используя метод перебора:

а) В школьном парке растут дубы, клёны, берёзы и тополя. Известно, что дубов, клёнов и берёз одинаковое количество. При этом число тополей более чем в 3 раза больше, чем число всех остальных деревьев. А число клёнов и тополей меньше 12. Сколько в этом парке растет тополей?

б) В городском зоопарке живут обезьяны, крокодилы, слоны и тигры. Известно, что обезьян, слонов и крокодилов одинаковое количество. Число тигров более чем на 11 больше, чем число обезьян и крокодилов вместе. А число тигров и слонов в сумме меньше 16. Сколько в этом зоопарке крокодилов?

в) В турнире принимали участие не менее 12 игроков. В итоговой таблице турнира было указано, что игроки могли набрать следующие баллы: 5, 7, 8, 10. Количество игроков, набравших 5, 7 и 10 баллов, было одинаковым, а игроков, набравших 8 баллов, было больше, чем всех остальных, вместе взятых. При этом больше 7 баллов набрали менее 10 игроков. Сколько игроков набрали 8 баллов?

П **21** Какие высказывания являются общими, какие – высказываниями о существовании, а какие – ни теми ни другими? Определите их истинность. Для ложных высказываний постройте отрицание.

а) Температура воздуха в Красноярске всегда равна –30 °С.

б) Некоторые грибы – съедобные.

в) Насекомые являются животными.

г) Известный математик Абель жил в Норвегии.

д) Иногда на пальмах растут кокосы.

е) Все школьники любят играть в шахматы.

ж) Автомобиль может развивать скорость 300 км/ч.

з) Некоторые реки не имеют истока.

и) Некоторые собаки лают.

к) Иногда родители балуют своих детей.

л) Все учителя – женщины.

м) На прошлом уроке мы изучали правила сложения дробей.

22 Длина прямоугольника равна 17 см. Какие значения может принимать ширина этого прямоугольника, если его периметр меньше периметра прямоугольника, длина которого равна 15 см, а ширина – 13 см?

23 Решите задачу:

а) Когда турист прошел $\frac{1}{9}$ всего пути, то до середины пути ему оставалось пройти ещё $4\frac{2}{3}$ км. Найдите длину всего пути.

б) Если к числу рабочих на заводе прибавить половину их количества и ещё $\frac{2}{3}$ от их количества, то получится 3510 человек. Сколько рабочих на этом заводе?

в) В одной школе три седьмых класса: 7 «А», 7 «Б» и 7 «В». В 7 «А» учится $\frac{3}{14}$ всех семиклассников, в 7 «Б» – $\frac{3}{7}$ всех семиклассников, а в 7 «В» – 20 человек. Сколько семиклассников в этой школе?

24 Решите задачу методом проб и ошибок:

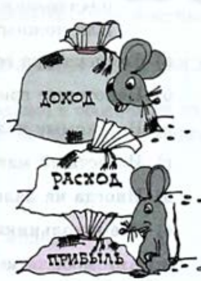
а) Ваня загадал два натуральных числа. Одно из этих чисел на 10 больше другого числа. Их произведение равно 375. Какие числа загадал Ваня?

б) Когда Таню попросили дать её адрес, она сказала: «Номер моего дома на 12 меньше номера моей квартиры, а их произведение равно 1728». Какой номер у Таниного дома?

в) В классе мальчиков на 4 больше, чем девочек. А произведение количеств мальчиков и девочек равно 252. Сколько мальчиков в этом классе?

25 Решите задачу:

а) Выручка компьютерной компании в первый год работы после открытия составила 527,3 тыс. р., а расходы – 723,9 тыс. р. Во второй и последующие годы выручка была на 135,2 тыс. р. больше, чем в первый год. Расходы же во второй и последующие годы были на 159,7 тыс. р. меньше, чем в первый год. Через сколько лет после открытия сумма всех расходов компании сравнялась с выручкой?



б) Расходы компании по производству велосипедов в первый год работы составили 895,5 тыс. р. Во второй год работы они сократились на 123,6 тыс. р. и более не изменялись. Выручка компании не изменялась год от года. Какой была ежегодная выручка этой компании, если к концу шестого года сумма всех расходов компании со дня открытия сравнялась с выручкой за это время?

26 Решите уравнение:

а) $x + \frac{2}{5} = 5\frac{1}{5}$; б) $\frac{x}{5} + \frac{x}{4} = 1\frac{7}{20}$; в) $\frac{3x}{7} = \frac{3x}{2} + 5$;

г) $\frac{4x}{5} - 9 = \frac{5x}{4}$; д) $\frac{5x}{7} - \frac{7x}{5} = 4$; е) $3\left(\frac{x}{5} - 3\right) = 5\left(\frac{x}{3} - 5\right)$.

Д **27** Один из острых углов прямоугольного треугольника больше другого на 26°. Найдите величину меньшего угла этого треугольника.

28 Антон и Ксюша создали компанию по производству пончиков и купили оборудование стоимостью 50 100 р. Они решили, что при расчёте ежемесячной прибыли будут учитывать в расходах лишь часть стоимости этого оборудования. На какую сумму будет ежемесячно уменьшаться первоначальная стоимость оборудования, если уменьшение должно происходить равномерно в течение 5 лет, а к концу 5-го года стоимость оборудования должна быть равна нулю?

29 а) Иван должен был увеличить число $34\frac{3}{17}$ в 18 раз, а увеличил его на 18. На сколько полученный им результат меньше правильного?

б) Катя должна была увеличить число $27\frac{5}{6}$ на 7, а увеличила его в 7 раз. На сколько полученный ей результат больше правильного?

в) Алексей должен был уменьшить число $12\frac{6}{7}$ в 3 раза, а уменьшил его на 3. На сколько полученный им результат больше правильного?

г) Наташа должна была уменьшить число $2\frac{8}{11}$ на 4, а уменьшила его в 4 раза. На сколько полученный ей результат больше правильного?

30 Решите уравнение:

а) $2x - \frac{1}{5} = \frac{3}{7}$; б) $\frac{x}{3} + \frac{x}{15} = 9$; в) $\frac{3x}{12} = \frac{5x}{6} - 1$.

31 Выполните вычисления и расшифруйте название чина городской полиции в Российской империи:

Д $\frac{2}{5} : \frac{8}{25} + 2\frac{1}{7} \cdot \frac{14}{3}$ **В** $10\frac{1}{2} : 1\frac{1}{4} \cdot \frac{3}{14} - 1\frac{23}{35} + 2\frac{2}{7}$

О $2\frac{3}{4} - 1\frac{1}{9} : \frac{5}{27} + \frac{5}{6}$ **О** $15 : \frac{5}{18} : 3\frac{3}{8} \cdot 2\frac{1}{16} - 32\frac{7}{15}$

Й $\frac{4}{15} + 2\frac{7}{12} - \frac{30}{128} : \frac{9}{32}$ **Р** $\frac{1}{16} + \frac{11}{36} + \frac{5}{48} + \frac{7}{18}$

О $3\frac{1}{2} : 4\frac{2}{3} - 4\frac{2}{3} + 1\frac{1}{12}$ **О** $\left(11\frac{5}{11} - 8\frac{21}{22}\right) \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{3}{5}$

Г $4\frac{5}{12} - 3\frac{13}{24} + 1\frac{1}{9} \cdot \frac{3}{2}$

$2\frac{13}{24}$	$-2\frac{5}{12}$	$\frac{31}{36}$	$-2\frac{5}{6}$	$11\frac{1}{4}$	1	$2\frac{3}{7}$	$\frac{8}{15}$	$2\frac{1}{60}$

C **32*** Школьник с 7 по 11 класс включительно принял участие в 31 соревновании. При этом каждый новый учебный год он принимал участие в большем количестве соревнований, чем в предыдущий. А в 11 классе он принял участие в 3 раза большем количестве соревнований, чем в 7 классе. В скольких соревнованиях участвовал школьник в 10 классе?

§ 2. Основы построения математической теории*

1.2.1. Метод построения математической теории

Математика – всего лишь игра, в которую играют согласно простым правилам...

Давид Гильберт (1862–1943),
немецкий математик

Метод математического моделирования используется для решения разных практических задач. После построения математической модели естественным образом встаёт вопрос о существовании математической теории, позволяющей получить решение исходной задачи. Поэтому давайте обсудим, каким образом строятся математические теории и в чём их преимущество перед другими теориями.

Для этого рассмотрим простой пример. Мы знаем, что *сумма трёх последовательных натуральных чисел делится на* 3. Это верно, так как данная сумма может быть записана в виде $n + (n + 1) + (n + 2)$, где $n \in N$. Преобразовав полученное выражение $n + (n + 1) + (n + 2) = 3n + 3 = 3(n + 1)$, мы приходим к доказательству требуемого утверждения.

Своё доказательство мы основывали на том, что *сумму трёх последовательных натуральных чисел можно записать в виде* $n + (n + 1) + (n + 2)$.

В свою очередь, это последнее утверждение непосредственно следует из того, что *если натуральное число равно* n, *то следующее за ним равно* $n + 1$, *а число, следующее за* $n + 1$, *равно* $n + 2$.

А почему же верно последнее утверждение?

Для того чтобы ответить на этот вопрос, разберёмся сначала в том, как строится математическая теория.

Математические утверждения, образно говоря, можно выстраивать в цепочки, в которых одно утверждение логически следует из другого. Но каждая из этих цепочек должна иметь начальное звено, иначе процесс обоснования утверждений будет бесконечным.

Вот почему в основу математической теории должны быть положены некоторые *первоначальные утверждения* – утверждения, истинность которых принимается без доказательства. Эти утверждения – начальные звенья в цепи математической теории. Они называются *аксиомами*. Все остальные элементы цепи называются *теоремами* и выводятся из аксиом путем *логических рассуждений*.

Аксиома ⇨ Теорема 1 ⇨ Теорема 2 ⇨ Теорема 3 ⇨ ...

Мы уже встречались с подобной ситуацией, когда говорили о том, что в математике одни понятия определяются через другие, другие через третьи и т. д. Так как этот процесс также не может продолжаться бесконечно, то должны появиться понятия, не имеющие определения. Эти неопределяемые понятия в математике называются *первоначальными*, или *основными*. Например, в классической геометрии основными понятиями являются понятия *точки*, *прямой* и *плоскости*. А *единица* и *натуральное число* относятся к первоначальным понятиям теории чисел.

Первоначальное понятие ⇨ Определяемое понятие 1 ⇨ Определяемое понятие 2 ⇨ …

Итак, определение каждого понятия, не являющегося первоначальным, опирается на ранее введённые понятия. При этом если понятие A определяется через понятие B, то B называют ***родом*** (или *родовым понятием*) для A, а указанные в определении новые существенные признаки A – его **видовым отличием**.

Рассмотрим, например, определение квадрата:

«Квадрат – это ***прямоугольник***, у которого **все стороны равны**».

Мы видим, что квадрат определяется как прямоугольник с особыми свойствами. Значит, для квадрата родовым понятием является понятие прямоугольника, а его видовым отличием является то, что у него все стороны равны.

Соотношение между родовым понятием B (прямоугольники) и понятием A (квадраты) можно изобразить с помощью диаграммы Эйлера–Венна (рис. 1). На этой диаграмме мы видим, что множество квадратов является подмножеством множества прямоугольников.

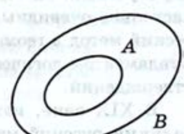


Рис. 1

Таким образом, при построении математической теории мы сначала выбираем первоначальные понятия, а затем с их помощью определяем остальные понятия. Однако при выборе первоначальных понятий мы сталкиваемся с некоторыми трудностями. Действительно, если им невозможно дать определение, то как мы узнаем, что они означают? Ведь поясняющие примеры дают лишь некоторое представление о них, а математика является наукой точной и не допускает нестрогости своих основ.

Для разрешения этого противоречия математики приняли ***аксиоматический метод построения теории***. Суть его заключается в следующем.

Аксиоматический метод

1. Выбирается перечень первоначальных понятий.
2. Основные свойства первоначальных понятий задаются *системой аксиом*.
3. Новые понятия вводятся только с помощью первоначальных и ранее введённых понятий.
4. Новые утверждения (теоремы) доказываются только с помощью аксиом и ранее доказанных утверждений.

Так каждый раз на базе уже известного даются определения новым понятиям и доказываются их неизвестные свойства.

Построение математической теории можно сравнить со строительством здания. Понятно, что для возведения нового здания нужно заложить фундамент и на нём строить дом. Так и в математической теории сначала выбираются первоначальные понятия и утверждения, принимаемые без доказательств, а затем на их основе вводятся новые понятия, а все остальные утверждения доказываются с помощью логических умозаключений.

Что же даёт аксиоматический метод? В математике он обеспечивает *надёжность*, как и фундамент для дома. А для математической теории это означает *достоверность* полученных выводов. Именно поэтому об уровне развития науки сегодня судят по тому, в какой степени в ней применяются математические методы.

Аксиомы в современной математике – это не безусловные истины, как иногда принято считать. Скорее, аксиомы – это некоторые выбранные свойства первоначальных понятий. Создатель математической теории может сам выбирать первоначальные понятия и аксиомы. Однако этот выбор он может делать с определёнными ограничениями. В частности, выбранная система аксиом должна быть *непротиворечивой*, то есть она не должна приводить к противоречащим друг другу выводам. Действительно, если система аксиом некоторой математической теории такова, что в результате логических рассуждений может быть получено, что одно и то же утверждение одновременно верно и неверно, то поиск истины с помощью этой теории теряет смысл.

Значение аксиом первым оценил Аристотель, величайший древнегреческий философ и учёный. Он считал, что во всех областях науки имеются высказывания, которые настолько очевидны, что не нуждаются в доказательствах. А применить аксиоматический метод в геометрии удалось Евклиду: он создал систему аксиом, которая стала фундаментом логического обоснования всех известных на тот момент геометрических утверждений.

В XIX веке, изменив всего лишь одну аксиому в системе аксиом Евклида, великий русский математик Н. И. Лобачевский построил новую непротиворечивую геометрию. Геометрию Лобачевского назвали *неевклидовой*, подчеркнув её отличие от классической геометрии, основанной на аксиомах Евклида.

Может возникнуть вопрос: какую же геометрию считать правильной – геометрию Евклида или Лобачевского? Ответ оказывается парадоксальным – это две разные математические теории, каждая из которых имеет реальный практический смысл. Геометрия Евклида – это геометрия плоского пространства, а геометрия Лобачевского – геометрия искривлённого пространства, похожего на воронку. В зависимости от поставленных задач мы можем пользоваться той или другой математической теорией.

Теперь, ознакомившись с идеями, на которых строится математическая теория, мы можем ответить и на вопрос о свойствах натуральных чисел, поставивший нас в тупик вначале. Система аксиом для множества натуральных чисел была сформулирована итальянским математиком Джузеппе Пеано лишь в XIX веке. Она, в частности, позволила вывести все известные нам свойства натуральных чисел логическим путем. И именно из аксиом Пеано следует, что если натуральное число равно n, то следующее за ним равно $n + 1$, а число, следующее за $n + 1$, равно $n + 2$.

К **33** Какие из следующих предложений являются определениями? Для определений назовите определяемые понятия и понятия, с помощью которых дается определение:

а) Окружность – это не квадрат.

б) У квадрата все углы равны.

в) Натуральное число является составным, если оно имеет более двух различных делителей.

г) Чётные числа – это натуральные числа, кратные 2.

д) Арифметика – это царица математики.

е) Отрезком называется часть прямой, ограниченная двумя точками.

34 Прочитайте определения и назовите определяемые понятия. Какой должна быть последовательность определения этих понятий при построении математической теории? Почему?

а) Квадратом называется прямоугольник, все стороны которого равны.

б) Четырёхугольник – это многоугольник с четырьмя сторонами.

в) Четырёхугольник, все углы которого равны, называется прямоугольником.

Может ли процесс поиска ранее введённых понятий, на которые опираются новые понятия, продолжаться бесконечно?
Какой выход из этого предложен в математике?

35 Сформулируйте определения:

а) правильной дроби;
б) простого числа;
в) отношения;
г) пропорции;
д) чётного числа;
е) процента,

выбирая нужные понятия и свойства из нижеприведённого списка:

1) натуральное число;
2) дробь;
3) число;
4) кратное 2;
5) меньше единицы;
6) два отношения;
7) числитель меньше знаменателя;
8) произведение двух чисел;
9) сотая доля;
10) частное двух чисел;
11) имеет ровно 2 различных делителя;
12) истинное равенство.

36 а) Назовите родовые понятия и видовые отличия в определениях из № 34. Нарисуйте для данных понятий диаграмму Эйлера–Венна.

б) Выполните то же задание для определений из № 33.

37 Прочитайте определения и назовите определяемые понятия. Для каждого из определений назовите понятия, которые в них использованы:

а) Число a противоположно числу b, если $a + b = 0$.

б) Целые числа – это натуральные числа, им противоположные и нуль.

в) Модулем числа a называется расстояние от точки, соответствующей данному числу на числовой прямой, до 0.

38 Докажите, что:

а) Сумма трёх последовательных чётных чисел делится на 6.

б) Сумма трёх последовательных нечётных чисел делится на 3.

в) Сумма четырёх последовательных натуральных чисел при делении на 4 даёт остаток 2.

г) Сумма четырёх последовательных чётных чисел при делении на 8 даёт остаток 4.

39 В некоторой математической теории введены следующие *первоначальные понятия: торик, банарик, сладкий, кислый, круглый, квадратный, мягкий, твёрдый*. Для этих понятий введена следующая *система аксиом:*

A_1. Есть хотя бы один торик и хотя бы один банарик.
A_2. Торик сладкий.
A_3. Банарик кислый.
A_4. Торики и банарики могут быть как круглыми, так и квадратными.
A_5. Торики и банарики могут быть как мягкими, так и твердыми.

С учетом новых определений докажите указанную теорему:

а) **Определение.** Яблоко – круглый торик.
Теорема. Яблоко сладкое.
б) **Определение.** Лимон – мягкий банарик.
Теорема. Лимон кислый.
в) **Определения.** Апельсин – это круглый торик.
Мандар – это твердый апельсин.
Теорема. Мандар круглый и сладкий.
г) **Определения.** Помидор – это квадратный банарик.
Картоль – это твёрдый помидор.
Теорема. Картоль квадратный и кислый.

40 Вычислите устно и расположите ответы примеров в порядке убывания. Вы узнаете название самой яркой звезды на ночном небе.

Р $24{,}4 + 9{,}7 + 2{,}5 + 15{,}6 + 10{,}3$
И $20{,}98 \cdot 0 - 1 \cdot (12{,}7 - 0 : 4{,}56) + 92{,}7 : 1$
И $42{,}9 : 1 - 0 \cdot 35{,}16 + 5{,}28 : 52{,}8$
У $95{,}614 - (19{,}99 + 45{,}614)$
С $(75{,}48 + 3{,}916) - 75{,}48$
С $-2{,}5 \cdot (-4) \cdot 8 \cdot 12{,}5$

41 Составьте выражение и найдите его значение при $a = -15$, $b = -12{,}6$.

а) Первое из задуманных чисел больше a на 32, а второе равно результату от деления числа b на 2,1. Найдите сумму этих чисел.

б) Второе из задуманных чисел равно произведению числа a и числа 3,3, а первое – произведению числа b и числа 4,7. Найдите разность между первым и вторым числами.

в) Первое из задуманных чисел равно результату от деления числа a на 5, а второе меньше b на 34. Найдите произведение этих чисел.

г) Второе из задуманных чисел меньше a на 90, а первое равно результату от деления числа b на 12. Найдите частное от деления второго числа на первое.

42 Прочитайте высказывания, записанные на математическом языке с помощью кванторов общности ($\forall$) и существования ($\exists$). Докажите истинные высказывания, а для ложных – постройте их отрицания.

а) $\exists\, n \in N : n = 3k + 2,\ k \in N$;
б) $\forall\, m \in N : m = 15l + 4,\ l \in N$;
в) $\forall\, a \in N$: a делится на само себя;
г) $\exists\, b \in N$: b делится на 0;
д) $\forall\, n \in N$: $2n$ – составное число;
е) $\exists\, m \in N$: $2m + 1$ – простое число;
ж) $\exists\, k \in N$: $2k$ – кратно 3;
з) $\forall\, d \in N$: $3d + 1$ – не кратно 5.

43 Составьте буквенное выражение для нахождения неизвестного числа и найдите его при данных значениях букв:

а) число, равное $\frac{2}{3}$ от a ($a = 1{,}2$);

б) число, равное 0,25 от b ($b = 5{,}6$);

в) число, $\frac{1}{7}$ которого равна c ($c = 0{,}14$);

г) число, 0,3 которого равны d ($d = 90$);

д) число, равное части, которую число k составляет от числа m $\left(k = 0{,}25,\ m = \frac{1}{3}\right)$;

е) число, равное части, которую число n составляет от числа p $\left(n = 0{,}8,\ p = 2\frac{1}{5}\right)$.

44 Постройте математическую модель и решите задачу:

а) Выручка предприятия в первый день составила $\frac{14}{15}$ выручки за второй день. Всего за эти два дня выручка составила 76 908 р. Сколько денег получили от покупателей в первый день?

б) За месяц расходы компании на бензин составили 45 720 р., что составило $\frac{3}{11}$ всех расходов компании. Сколько денег израсходовала компания в этом месяце?

в) Прибыль компании в первом полугодии составила 648 000 р., а во втором – 342 000 р. Какую часть составила прибыль второго полугодия от прибыли первого?

45 Найдите множество целых решений неравенства:

а) $x - 3 > 2$; в) $2 < a \leqslant 7$; д) $|z| < 2$;

б) $y + 9 \leqslant 12$; г) $-3 \leqslant b < 5$; е) $|n + 3| \geqslant 4$.

46 Сравните числа A и B:

$A = (6{,}8547 : 2{,}19 + 0{,}6039 : 5{,}49) : 1{,}62;$
$B = (0{,}9893 : 0{,}13 - 6{,}4) \cdot 62{,}9 - 77{,}109.$

Д **47** Оставьте буквы, соответствующие определениям, а остальные зачеркните. Прочитайте подряд оставшиеся буквы – и вы узнаете единицу измерения вязкости, которая была названа так в честь выдающегося французского физика.

П Число a называется обратным к числу $b \neq 0$, если $a \cdot b = 1$.

Л В прямоугольном треугольнике два угла острые.

У Произведением двух натуральных чисел a и b называется сумма b слагаемых, каждое из которых равно a.

А Натуральное число a делится на натуральное число b, если существует такое натуральное число c, что $a = bc$.

О Дробь – это не целое число.

Д Неправильная дробь больше или равна 1.

Н Модуль любого числа больше или равен нулю.

М Окружность – это не прямая.

З Производительность – это объём работы, сделанной за единицу времени.

48 В некоторой математической теории введены следующие *первоначальные понятия: талл, воад, твёрдый, жидкий, прямой, кривой*. Для этих понятий введена следующая *система аксиом:*

A_1. Есть хотя бы один талл и хотя бы один воад.
A_2. Таллы и воады могут быть как прямыми, так и кривыми.
A_3. Талл твёрдый.
A_4. Воад жидкий.

С учётом новых определений докажите указанную теорему:

а) **Определение.** Алюминий – это прямой талл.
Теорема. Алюминий – твёрдый.

б) **Определение.** Сок – это кривой воад.
Теорема. Сок – жидкий.

49 Владельцы пончиковой компании Антон и Ксюша посчитали, что количество пончиков, проданных ими в феврале, составило $\frac{5}{7}$ от количества пончиков, проданных ими в марте. Всего за эти два месяца они продали 480 пончиков. Сколько пончиков Антон и Ксюша продали в феврале?

50 Несколько школьников, вложив поровну денег, выбрали компьютерную игру и решили её купить. В последний момент двое отказались участвовать в покупке, поэтому каждому из оставшихся школьников пришлось заплатить на 1 р. больше. Сколько стоила компьютерная игра, если её стоимость больше 140 р., но меньше 160 р.?

51 Выполните вычисления и расшифруйте фамилию второго в истории шахмат чемпиона мира, ученика Давида Гильберта.

Е $(0,04 + 3,59)(7,35 + 2,65)$

К $(6,39 - 2,1028) : (18 - 5,3408 - 11,3022 : 1,35)$

А $(13 - 12,47) \cdot 0,8 \cdot 19$

Р $[1,91 \cdot 6 : (2,5 \cdot 5)] : (114,6 \cdot 0,002)$

Л $(5,4 - 3,65)(10,28 - 7,09)$

С $[7,36 \cdot 4,5 \cdot (15,2 \cdot 0,2)] \cdot (65,24 : 13,048)$

5,5825	8,056	503,424	1	36,3	4

C **52*** Одновременно зажгли две свечи одинаковой длины. Одна свеча полностью сгорает за 6 часов, а вторая – за 2 часа. Через некоторое время свечи одновременно погасили, и оказалось, что огарок первой свечи в 3 раза длиннее, чем второй. Сколько времени горели свечи?

1.2.2. Некоторые методы математического доказательства

Именно математика даёт надёжнейшие правила: кто им следует – тому не опасен обман чувств.

Леонард Эйлер (1707–1783),
швейцарский математик

Как мы уже видели, любая математическая теория строится на базе первоначальных понятий и аксиом. С помощью логических рассуждений, называемых *доказательствами*, устанавливается справедливость всех остальных утверждений теории – теорем.

Так что же такое доказательство и какие методы доказательства существуют?

Если посмотреть определение понятия «доказательство» в толковом словаре, то мы увидим, что *доказательство* – это рассуждение, обосновывающее доказываемое утверждение. В математике доказать какое-либо утверждение – значит показать, что это утверждение логически следует из уже доказанных утверждений или аксиом. Никакое другое рассуждение, даже подтверждённое сколь угодно большим количеством частных примеров, доказательством не считается.

Как же находить доказательства математических утверждений?

Общего рецепта здесь нет. Поиск доказательств во многом определяет развитие математики как науки. Для доказательства некоторых математических утверждений требуются столетия и создание целых теорий. Вот два ярких примера. Так называемая великая теорема Ферма была сформулирована Пьером Ферма ещё в 1637 году, а доказана лишь в 1995 году английским математиком Эндрю Уайлсом, совершившим в процессе этого доказательства прорыв в теории чисел. И только в 2002 году российский математик Григорий Перельман доказал, используя парадоксальные идеи, знаменитую гипотезу Анри Пуанкаре почти вековой давности.

Тем не менее в математике есть способы доказательства, которые успешно работают при установлении истинности самых разных с виду утверждений. С некоторыми из них мы с вами уже встречались, некоторые нам встретятся впервые.

Метод перебора

Задача 1. Доказать, что среди двузначных чисел есть только два числа, 72 и 94, которые на 58 больше произведения своих цифр.

Доказательство:

Любое двузначное число можно представить в виде $10a + b$, где a и b – соответственно первая и вторая цифры этого числа. Значит, a – натуральное число, меньшее 10, а b может быть одним из целых чисел от 0 до 9.

Тогда указанное в условии свойство можно записать в виде равенства:

$$10a + b = 58 + ab.$$

Искомое двузначное число равно $58 + ab$, где a и b – целые числа от 0 до 9, поэтому оно больше 58. А значит число его десятков a больше или равно 5. Последовательно перебираем все возможные значения a и b и получаем, что указанное равенство возможно только для двузначных чисел 72 и 94, что и требовалось доказать.

Итак, мы использовали доказательство *методом перебора*: проверили истинность утверждения для каждого элемента рассматриваемого множества.

Метод проб и ошибок

Задача 2. Доказать, что уравнение $x(x + 9) = 90$, где $x \in N$, имеет единственное решение.

Доказательство:

Возьмём $x = 6$, тогда $6(6 + 9) = 90$. Тем самым мы доказали, что решение указанного уравнения существует.

Теперь покажем, что другого натурального решения нет. Действительно, при увеличении значения x оба множителя в левой части увеличиваются, а при уменьшении x вплоть до значения $x = 1$ оба множителя уменьшаются. В обоих случаях произведение будет отлично от 90.

Значит, уравнение $x(x + 9) = 90$, где $x \in N$, имеет единственное решение, что и требовалось доказать.

Итак, мы доказали это утверждение с применением *метода проб и ошибок*:

1. Подобрали конкретные объекты с заданными свойствами.

2. Показали, что других объектов, удовлетворяющих этим свойствам, нет.

Отметим, что в математике часто требуется доказывать утверждения о существовании объекта с заданными свойствами. Как мы уже знаем, для доказательства таких утверждений достаточно предъявить хотя бы один удовлетворяющий условию объект. В этом случае нет необходимости доказывать, что других таких объектов не существует.

Задача 2а. Доказать, что существует решение уравнения $x(x + 9) = 90$.

Доказательство:

Возьмём $x = 6$, тогда $6 \cdot (6 + 9) = 90$. Тем самым мы доказали, что решение указанного уравнения существует, что и требовалось доказать.

Доказательство существования, при котором предъявляется объект с указанными свойствами, называется ***прямым***.

Косвенные доказательства

Иногда предъявить требуемый объект сложнее, чем доказать его существование. Если при доказательстве существования объект не указывается, то такое доказательство называется ***косвенным***.

С косвенными доказательствами мы уже с вами встречались, но не выделяли их в отдельную группу.

Задача 3. В школе 370 учеников. Докажите, что существуют хотя бы два ученика, справляющие день рождения в один и тот же день года.

Доказательство:

В обыкновенном году 365 дней, а в високосном – 366 дней. В школе всего 370 учеников. Значит, у всех у них не могут быть дни рождения в разные дни, так как $370 > 366$. Поэтому как минимум у двух учеников дни рождения совпадают, что и требовалось доказать.

Одним из способов косвенного доказательства, получившим широкое распространение, является так называемое **доказательство *методом от противного*.** Суть его состоит в следующем. Истинность утверждения A доказывают тем, что показывают ложность утверждения $\neg A$ (отрицание A). Дело в том, что по закону исключённого третьего из двух утверждений A и $\neg A$ одно истинно, а другое – ложно. Значит, если в результате предположения о том, что $\neg A$ истинно, мы приходим к противоречию (так называемому «абсурду») или к выводу об истинности заведомо ложного утверждения, то тем самым мы доказываем истинность исходного утверждения.

Задача 4. Докажите, что не существует наибольшего чётного числа.

Доказательство:

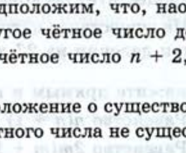
Проведем доказательство методом от противного. Предположим, что, наоборот, существует наибольшее чётное число n. Тогда всякое другое чётное число должно быть меньше n. Однако, прибавив 2 к числу n, получим чётное число $n + 2$, большее, чем n.

Полученное противоречие доказывает, что наше предположение о существовании наибольшего чётного числа ложно. Значит, наибольшего чётного числа не существует, что и требовалось доказать.

Алгоритм доказательства методом от противного

1. Предположить, что доказываемое утверждение неверно.
2. Исходя из этого предположения либо получить противоречие, либо прийти к выводу об истинности заведомо ложного утверждения.
3. Сформулировать вывод о том, что сделанное предположение неверно, а значит, верно доказываемое утверждение.

Метод доказательства математических теорем от противного весьма эффективен и очень распространён. Чаще всего он используется для доказательства того, что объекта с заданными свойствами не сущест-вует. Так, упомянутая выше великая теорема Ферма была доказана с использованием именно такого метода.



К **53** Постройте отрицания следующих высказываний. Определите истинность данных высказываний и их отрицаний.

а) Сумма двух чисел не зависит от порядка слагаемых.

б) Число 0 является натуральным числом.

в) Разность двух натуральных чисел всегда число натуральное.

г) Частное двух целых чисел a и b может быть целым числом.

д) Дробь $\frac{2}{5}$ означает, что целое разделили на 2 равные части и взяли 5 таких частей.

е) Все правильные дроби больше или равны 1.

ж) Правильная дробь всегда меньше неправильной.

з) Модуль числа может быть отрицательным.

54 Проведите доказательство косвенным методом:

а) В гостинице 124 номера, в которых живут 250 человек. Докажите, что есть хотя бы один номер, в котором живет не менее 3 человек.

б) Население Земли на 1 июля 2009 года составляло 6 786 167 712 человек. Считая, что на Земле нет людей, возраст которых более 200 лет, докажите, что найдутся по крайней мере 2 человека, которые родились в одну и ту же секунду.

55 Докажите следующие утверждения:

а) Не существует наибольшего нечётного числа.

б) Существует бесконечно много натуральных чисел вида $15n + 7$, где $n \in N$.

в) Не существует натурального числа, которое при делении на 18 даёт остаток 5, а при делении на 27 даёт остаток 3.

56 Докажите прямым и косвенным методами:

а) Равенство $n(n + 1) = 35\ 419$ неверно при любом натуральном n.

б) Равенство $2m(m + 1) = 37\ 582$ неверно при любом $m \in N$.

57 Используя метод доказательства от противного, докажите:

а) При любых натуральных a и b число 15 не может быть корнем уравнения $ax^2 + bx + 48 = 0$.

б) Число 3 не может быть корнем уравнения $ax^3 + bx^2 + x + 9 = 0$ при любых натуральных a и b.

П **58** Сформулируйте утверждения, обратные к данным, и определите истинность прямых и обратных утверждений. Найдите высказывания, для которых истинны как прямое, так и обратное утверждение. Вспомните, как называются такие высказывания.

а) Если произведение двух натуральных чисел делится на 7, то хотя бы одно из этих чисел делится на 7.

б) Если произведение двух натуральных чисел делится на 15, то хотя бы одно из этих чисел делится на 15.

в) Если натуральное число делится на 2, то оно оканчивается нулём.

г) Если натуральное число оканчивается на 5 или на 0, то оно делится на 5.

д) Если сумма цифр натурального числа делится на 9, то оно делится на 3.

е) Если натуральное число делится на 9, то и сумма его цифр делится на 9.

ж) Если квадрат натурального числа делится на 4, то и само число делится на 4.

з) Если квадрат натурального числа делится на 5, то и само число делится на 5.

59 Решите задачу:

а) Телефонная станция получила заказ на прокладку кабеля и подключение новых телефонных номеров. Один телефонист может выполнить этот заказ за 37,5 часа, а другой может выполнить 5% заказа за 2,5 часа. Сколько времени потребуется этим двум телефонистам для выполнения всего заказа, если они будут работать вместе с указанной производительностью?

б) Для наполнения бассейна используются две трубы. Через первую трубу пустой бассейн наполняется за 15 часов, а через вторую – за 0,8 этого времени. За какое время можно наполнить пустой бассейн, включив обе трубы одновременно?

в) На автомобильном заводе работают 72 станка. Они выполняют дневное производственное задание за 10 часов. Сколько станков нужно добавить, чтобы выполнить эту же работу за 8 часов? Считать, что все станки работают с одинаковой производительностью.

г) На молочном заводе работают 210 рабочих. Профсоюз рабочих принял решение сократить рабочий день с 8 до 7 часов. Сколько рабочих необходимо будет принять на завод, для того чтобы сохранить неизменным ежедневный выпуск продукции? Считать, что все рабочие работают с одинаковой производительностью.

60 Переведите в указанные единицы измерения и вычислите:

а) в килограммы:
0,057 т + 6,43 кг + 870 г – 0,003 ц;

б) в сантиметры:
4,8 м + 317,2 мм – 4,72 см – 2,3 дм;

в) в часы:
30 мин + 1 сутки – 3,5 ч + 2700 с;

г) в рубли:
5,2 тыс. р. – 500 к. + 38 р. – 3 тыс. р.

61 Упростите выражение при допустимых значениях переменных:

а) $36abc : 9$; в) $3a : a$; д) $\frac{39abc}{13ac}$; ж) $\frac{84a^2nx}{7ax}$;

б) $7\frac{1}{2}ax : 3$; г) $6b : \frac{2}{3}b$; е) $\frac{76abxy}{18aby}$; з) $\frac{6{,}25pq^2r}{5prx}$.

Д **62** Проведите доказательство косвенным методом:

1) Шесть рыбаков поймали вместе 14 рыб. Докажите, что хотя бы два рыбака поймали рыб поровну.

2) В классе 25 учеников. Докажите, что есть такой месяц в году, когда день рождения справляют не менее 3 учеников.

3) Докажите, что существует бесконечно много натуральных чисел, имеющих вид $4k + 1$, где $k \in N$.

63 Используя метод доказательства от противного, докажите, что при любых натуральных a и b число 7 не может быть корнем уравнения $ax^2 + bx + 5 = 0$.

64 Сформулируйте утверждения, обратные к данным, и определите истинность прямых и обратных утверждений. Найдите равносильные утверждения.

а) Если $|a| = |b|$, то $a = b$.

б) Если $a > 0$ и $b > 0$, то $ab > 0$.

в) Если число оканчивается на одну из цифр 0, 2, 4, 6, 8, то оно делится на 2.

65 Землеройная машина за 8 часов работы может вырыть канаву шириной 30 см, глубиной 3 м и длиной 6 км. Скольких землекопов заменяет такая машина, если один землекоп роет канаву с производительностью 0,5 м^3 земли в час?

66 Антон и Ксюша получили заказ на выпечку пончиков. Работая вместе, они могут выполнить этот заказ за 1 ч 20 мин. Ксюша может выполнить этот заказ полностью в 2 раза быстрее Антона. Какое время потребуется каждому из них в отдельности на выполнение этого заказа?

67 Сравните величины:

$A = 4{,}3$ м $- 3{,}5$ см $+ 1{,}44$ м $: 3{,}6 + 3{,}6$ дм $: 1{,}44 \cdot (0{,}1 - 0{,}02)$;

$B = 1{,}35$ дм $: 27 + 6{,}02$ м $- 5{,}9$ см $+ 0{,}4$ мм $: 2{,}5 \cdot (4{,}2 - 1{,}075)$;

$C = 4{,}735$ м $: 0{,}5 + 14{,}95$ дм $: 1{,}3 + 2{,}121$ мм $: 0{,}7$.

C **68*** Докажите, что сумма n первых нечетных чисел равна n^2.

1.2.3. Логический вывод

Первое условие, которое надлежит выполнять в математике, – это быть точным, второе – быть ясным и, насколько можно, простым.

Лазар Карно (1753–1823),
французский государственный деятель и учёный

Обсуждая принципы построения математических теорий и методы доказательств в математике, мы использовали термины «логический вывод», «логические рассуждения». Мы говорили о том, что доказательство математических утверждений, по сути, состоит из последовательности правильных выводов. Но как узнать, какие выводы правильные, а какие – нет? Какие из рассуждений «логически следуют» из уже известных?

Законы конструирования правильных рассуждений изучает специальная наука – *логика*. Математическая логика, как и любая математическая теория, не опирается на такие аргументы, как наблюдения, конкретный случай, чьи-то ощущения. Она выстроена на базе системы основных понятий и аксиом, описывает общие законы и тем самым создаёт возможность для согласования различных мнений и взглядов. Поэтому законы логики – это принципы, которыми надлежит руководствоваться при проведении рассуждений в самых разнообразных науках и в жизни.

Вопросы логики интересовали учёных ёще в древности. Так, великий древнегреческий философ Аристотель и его ученики начиная с IV века до н.э. исследовали законы конструирования логически правильных суждений.

Привести примеры таких суждений можно, опираясь на простые ситуации из повседневной жизни, где, как и в математике, мы постоянно рассуждаем и делаем разные выводы. Например, из того, что некоторую женщину зовут Татьяна Ивановна, *следует*, что её отца зовут Иван. Данное рассуждение, как вы уже знаете, можно записать в форме $A \Rightarrow B$, где A (условие) – это высказывание «женщину зовут Татьяна Ивановна», а B (заключение) – высказывание «отца этой женщины зовут Иван». В то же время, если отца женщины зовут Иван, то из этого вовсе *не следует*, что она именно Татьяна Ивановна, – её могут звать также и Мария Ивановна, и Елена Ивановна. На языке логики эта ситуация описывается формой $B \not\Rightarrow A$, где B становится условием, а A – заключением.

Примером хорошо известной нам логической формы, которую мы постоянно используем при проведении доказательств, является форма: «Если A – истинно и $A \Rightarrow B$, то B – истинно». Другими словами, если выполняется условие A и известно, что верно логическое следование $A \Rightarrow B$, то будет выполняться и B. Например:

$$\boxed{\begin{array}{l} A \\ \underline{A \Rightarrow B} \\ B \end{array}}$$

В числе 258 сумма цифр делится на 3 – *истинно.*
<u>Сумма цифр числа делится на 3 ⇒ Число делится на 3.</u>
Число 258 делится на 3 – *истинно.*

Рассмотрим ещё несколько способов обобщенного описания рассуждений на языке логики. Проанализируем два похожих на первый взгляд рассуждения.

1. Все Олины кубики – деревянные. Все деревянные предметы не тонут в воде. Следовательно, все Олины кубики не тонут в воде.

2. Все Олины кубики не тонут в воде. Все деревянные предметы не тонут в воде. Следовательно, все Олины кубики – деревянные.

Рассуждение 1 правильное, а рассуждение 2 – нет. Действительно, из того, что все кубики не тонут в воде, не следует, что все они деревянные. Например, они могут быть пластмассовыми. Поэтому, сделав вывод в рассуждении 2, мы совершили логическую ошибку.

Разберёмся в том, почему произошла ошибка. Для этого обозначим буквой A высказывание «Кубик принадлежит Оле», буквой B – высказывание «Предмет деревянный», а буквой C – «Предмет не тонет в воде». Тогда проведённые рассуждения можно записать в следующих формах:

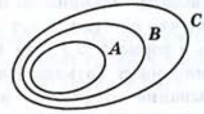
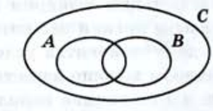
1) $\boxed{\begin{array}{l} A \Rightarrow B \\ \underline{B \Rightarrow C} \\ A \Rightarrow C \end{array}}$

(Если $A \Rightarrow B$, $B \Rightarrow C$, то $A \Rightarrow C$)

2) $\boxed{\begin{array}{l} A \Rightarrow C \\ \underline{B \Rightarrow C} \\ A \Rightarrow B \end{array}}$

(Если $A \Rightarrow C$, $B \Rightarrow C$, то $A \Rightarrow B$)

Проверить правильность данных рассуждений можно, используя язык теории множеств. Пусть A – множество Олиных кубиков, B – множество деревянных предметов, а C – множество предметов, которые не тонут в воде. Тогда рассуждения 1 и 2 можно перевести на язык теории множеств следующим образом:

	Перевод рассуждения на язык теории множеств	Диаграмма Эйлера–Венна
1	Множество A является подмножеством множества B. Множество B является подмножеством множества C. Следовательно, множество A является подмножеством множества C. (Истинно.)	 $A \subset B, B \subset C \Rightarrow A \subset C$
2	Множество A является подмножеством множества C. Множество B является подмножеством множества C. Следовательно, множество A является подмножеством множества B. (Ложно.)	 $A \subset C, B \subset C \not\Rightarrow A \subset B$

Как видите, для того чтобы проверить правильность рассуждения, мы можем использовать также уже известные нам диаграммы Эйлера–Венна. И хотя этот способ не является строгим доказательством, он даёт наглядное представление о сделанном высказывании и позволяет разобраться в правильности того или иного рассуждения.

Итак, мы показали, что рассуждения вида:

«Если $A \Rightarrow B$ и A – истинно, то B – истинно»;

«Если $A \Rightarrow B$, $B \Rightarrow C$, то $A \Rightarrow C$»

построены логически грамотно и являются верными логическими выводами.

Ясно, что цепочку следований мы можем продолжить и дальше, например:

$$\text{Если } A \Rightarrow B,\ B \Rightarrow C,\ C \Rightarrow D,\ D \Rightarrow E, \text{ то } A \Rightarrow E.$$

Как мы уже говорили, именно такие логические цепочки и лежат в основе математических теорий, метод построения которых мы обсуждали в пункте 1.2.1.

К **69** В спортивном клубе в секциях аэробики и плавания занимаются 58 человек. Аэробикой занимаются 27 человек, а плаванием – 39 человек. В каком случае это возможно?

70 а) Пусть A – множество натуральных решений неравенства $4{,}5 < a \leqslant 8$, а B – множество натуральных решений неравенства $-1{,}5 \leqslant b < 7$. Запишите множества A и B с помощью фигурных скобок и постройте для них диаграмму Эйлера–Венна. Найдите объединение и пересечение множеств A и B.

б) Выполните задание а) для случая, когда A и B – множества целых решений этих же неравенств.

71 Нарисуйте диаграммы Эйлера–Венна, иллюстрирующие высказывания:

а) Все кошки являются животными.
б) Некоторые кошки – рыжие.
в) Ни одна кошка не является птицей.
г) Некоторые кошки не умеют плавать.

72 Определите правильность следующих выводов:

а) Если некоторые четвероногие животные лают, то некоторые лающие животные – четвероногие.
б) Если некоторые фрукты сладкие, то некоторые сладкие предметы – фрукты.
в) Если ни одна птица не рычит, то ни одно рычащее животное – не птица.
г) Если ни один школьник не является студентом, то ни один студент не является школьником.
д) Если все цветы красивые и некоторые красивые предметы – красные, то некоторые красные предметы – цветы.
е) Если все игры – компьютерные и некоторые компьютерные игры – не стратегии, то некоторые игры – не стратегии.
ж) Если ни один слон не крокодил, а некоторые крокодилы живут в Африке, то некоторые живущие в Африке – не слоны.
з) Если все семиклассники любят читать и ни один семиклассник не библиотекарь, то все любящие читать – не библиотекари.

73 Проверьте правильность следующих выводов с помощью диаграмм Эйлера–Венна. В каких случаях неправильно построенные выводы привели к истинным заключениям? К ложным заключениям? Можно ли считать неверные выводы доказательством или опровержением данных утверждений?

а) Если все тигры являются животными, то некоторые животные не являются тиграми.
б) Если все попугаи говорят и все попугаи – птицы, то все птицы говорят.
в) Если все птицы говорят и все попугаи говорят, то все попугаи – птицы.
г) Если все птицы говорят и все попугаи – птицы, то все попугаи говорят.
д) Если ни один тигр не летает, то ни один летающий предмет – не тигр.
е) Если некоторые попугаи говорят и все попугаи – птицы, то некоторые птицы говорят.
ж) Если все тигры – хищники и ни один тигр не поёт, то некоторые хищники не поют.
з) Если ни один дельфин не является тигром и все дельфины живут в море, то ни один тигр не живет в море.

74 Правилен ли логический вывод, имеющий форму:

а) Если некоторые A являются B, то некоторые B являются A.
б) Если ни одно A не является B, то ни одно B не является A.
в) Все A являются B, и некоторые B являются C, – значит, некоторые C являются A.
г) Все A являются B, и некоторые B не являются C, – значит, некоторые A не являются C?

75 Постройте отрицания данных высказываний. Определите истинность исходного высказывания и его отрицания:

а) Если вы живёте в Австралии, то вы живёте южнее Москвы.

б) Если вам больше 2 лет, то вы учитесь в 7 классе.

в) Если $x = 5$, то $x - 5 = 0$.

г) Если число делится на 10, то оно делится на 5.

д) Если $a < 0$, то $|a| < 0$.

е) Если $ab = 1$, то $a < b$.

ж) Если $a + b = 0$, то $a = -b$.

з) Если из обеих частей равенства вычесть одно и то же число, то равенство не нарушится.

76 Приведите подобные слагаемые:

а) $2xy + 0{,}5xy + (xy) : 6 + (xy) : 3 + xy$;

б) $a + 2b + 2a + 4b + 3a + 6b$;

в) $8\frac{3}{11}x + 0{,}66y + 5\frac{2}{11}x + 2{,}34y$;

г) $a + (a + b) + (a + 2b) + (a + 3b) + (a + 4b)$;

д) $17x - (3y + z) + (5z - x) - (2x - 8y)$;

е) $67x - (32y + 4z - 8x) - (15x - 6y + 18z) - (x - 4y - 5z)$;

ж) $x + (x - y) + (x - 0{,}2y) + (x - 0{,}4y) + (x - 0{,}8y) + (x - 1{,}6y)$;

з) $c - (c - d) - \left(c - \frac{d}{2}\right) - \left(c - \frac{d}{4}\right) - \left(c - \frac{d}{8}\right) - \left(c - \frac{d}{16}\right) + \frac{d}{16}$.

77 Найдите значение выражения:

а) $4x^2 - 5x + 7$ при $x = -6$;

б) $5y^3 + 15 - 7y$ при $y = -3$;

в) $2z^5 - 14z^4 + 6z^3 - 7z^2 + 9$ при $z = -2$;

г) $(6k^6 + 14k^4) : (3k^5 + 5k^3 - 3k)$ при $k = -1$.

78 Постройте математическую модель и решите задачу:

а) Две обувные фабрики, работая вместе, выполнили некоторый заказ на пошив партии обуви за 20 дней. Зная, что производительность второй фабрики составляет 40% от производительности первой, определить, за сколько дней смогла бы выполнить этот заказ вторая фабрика, работая самостоятельно.

б) На заводе по производству фруктовых напитков резервуар с соком наполняется через две трубы. Через первую трубу пустой резервуар наполняется за 6 часов, а через обе трубы – за 4 часа. За сколько часов будет наполнен этот резервуар, если он будет наполняться через одну вторую трубу?

в) На кофейный комбинат прибыло два вагона с зелёным кофе. В каждом вагоне находилось 60 т зелёного кофе. Выгрузка его была поручена нескольким грузчикам. Случилось так, что половина грузчиков заболели, поэтому каждому из оставшихся пришлось выгрузить на 10 тонн больше кофе. Сколько грузчиков работало на выгрузке зелёного кофе?

79 Нарисуйте диаграммы Эйлера–Венна, соответствующие высказываниям:

а) Все A являются B.

б) Некоторые A являются B.

в) Некоторые A не являются B.

г) Все A не являются B.

80 Проверьте правильность следующих выводов, используя диаграммы Эйлера–Венна:

а) Все семиклассники родились в 1997 году. Коля – семиклассник. Значит, Коля родился в 1997 году.

б) Все семиклассники родились в 1997 году. Петя не родился в 1997 году. Значит, Петя не семиклассник.

в) Все семиклассники родились в 1997 году. Саша не семиклассник. Значит, Саша родился не в 1997 году.

г) Все семиклассники родились в 1997 году. Миша родился в 1997 году. Значит, Миша семиклассник.

81 Определите правильность следующих выводов:

а) Если некоторые девочки любят мороженое, то некоторые любящие мороженое – девочки.

б) Если ни один мальчик не обидит девочку, то ни один обидчик девочки – не мальчик.

в) Если все семиклассники – отличники и некоторые отличники – девочки, то некоторые девочки – семиклассницы.

г) Если ни один мальчик не любит играть в куклы и некоторые любящие играть в куклы любят ходить в кино, то некоторые мальчики не любят ходить в кино.

82 Найдите значение выражения:

а) $10x^2 - x$ при $x = 8$;

б) $7c^5 - 10c^4 + 5c^2 - 1$ при $c = 2$.

83 а) Найдите значение выражения.

Л $12 : (4 : 4) + (58 - 58 \cdot 0) \cdot (797 - 796)$;

Х $(0{,}008 + 0{,}992)(5{,}06 - 1{,}4 \cdot 0)$;

Л $(0{,}93 - 0{,}805) : (0{,}93 + 0{,}07) + (53{,}7 - 49) \cdot 0$;

Е $(50\,000 - 1397{,}3) \cdot 78 \cdot (0 : 7) - 1{,}375 \cdot (47 - 46)$;

Р $1{,}35 \cdot 45{,}7 - 1{,}35 \cdot 44{,}7 + (552 - 23 \cdot 24) \cdot (-59{,}98)$;

Л $(1975{,}6 + 8024{,}4) : 100 \cdot (13{,}7 \cdot 39{,}9 - 39{,}8 \cdot 13{,}7)$;

О $(605{,}125 : 12{,}5 - 36{,}8706 : 0{,}87 - 0{,}0012) \cdot (1085 - 35 \cdot 31)$;

А $(90{,}09 \cdot 5 - 50{,}05 \cdot 9)^7 - 3{,}48 \cdot (73 - 8 \cdot 9)$.

б) Сопоставьте ответы соответствующим буквам – и вы узнаете, как называется одноклеточная водоросль, широко используемая для очистки воздуха в космических кораблях.

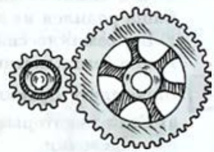
5,06	70	0	1,35	−1,375	0,125	137	−3,48

84 Упростите выражение:

а) $7a - 9b + (a + b)$;
в) $(3m - 7n - 5p) + (2m + 4n - 3p) - (4m - 3n - 6p)$;
б) $6{,}6x - 2\frac{2}{7}y - \left(0{,}06x - 3\frac{5}{7}y\right)$;
г) $c - [(d - l) - (a - c)]$.

85 В связи с увеличением спроса на пончики Антон и Ксюша приняли решение взять на работу одну из двух новых бригад пекарей. Первая из этих бригад смогла выполнить заказ на изготовление 120 пончиков за 6 часов. Работая вместе, первая и вторая бригады выполнили заказ на изготовление 500 пончиков за 12 часов. Оплата за 1 час работы каждой бригады одинаковая. Какую бригаду пекарей выгоднее взять на работу?

C **86*** Два зубчатых колеса находятся в сцеплении. Колесо A имеет 18 зубьев, а колесо B – 63. Какое минимальное количество оборотов должно сделать каждое колесо до того, как оба они вернутся в исходное положение?



1.2.4. Логические ошибки

Истина истине не может противоречить.

Джордано Бруно (1548–1600),
итальянский учёный и поэт

Построение математической теории основано на выстраивании последовательности утверждений. При этом каждое новое утверждение выводится из аксиом или уже доказанных утверждений в соответствии с законами логики. Однако нередко рассуждения, построенные, казалось бы, в соответствии с правильными логическими формами, приводят в итоге к абсолютно нелепым утверждениям.

Для того чтобы избежать ошибок при доказательстве разного рода утверждений, важно разобраться в том, какие виды ошибок могут быть допущены. Понимание причин ошибок, приводящих к очевидной нелепице, позволяет понять, почему в математике существуют те или иные ограничения и правила.

Но если вы всё-таки ошиблись, то старайтесь извлечь из этого пользу, проанализировав причины случившегося. Ошибались даже самые выдающиеся математики, но выявление причин своих ошибок продвигало их вперед. Не зря говорят: на ошибках учатся. Ведь если вы сможете разобраться, почему произошла ошибка, то это поможет вам глубже осознать математические законы и значительно облегчит решение последующих задач.

Рассмотрим некоторые из наиболее распространённых логических ошибок.

I. «Порочный круг» (попытка доказать некоторое утверждение, используя при доказательстве истинность доказываемого утверждения).

Если кто-нибудь «доказывает», например, равенство $a + b = b + a$, ссылаясь на то, что от перестановки слагаемых сумма не меняется, то доказывающий лишь повторяет то, что должен доказать. И хотя приводимое им заключение верно, доказательством оно не является.

II. Попытка доказать некоторое утверждение, исходя из ложного предположения.

Если вывод некоторого утверждения основывается на неправильном предположении, то это также может привести к ошибке.

Чтобы разобраться в этом, рассмотрим следующую задачу.

Задача. Участник соревнования по бегу пробежал дистанцию длиной 200 м за 25 с. Какое расстояние он пробежит за 1 час?

Решение:

Так как за 1 секунду бегун пробежал 200 м : 25 = 8 м, а 1 ч = 3600 с, то за 1 час он пробежит 8 м · 3600 = 28 800 м = 28,8 км.

Ответ: за 1 час бегун пробежит 28,8 км.

Однако полученный результат совершенно не согласуется с представлениями о реальных возможностях человека. Ведь человек физически не способен пробежать за 1 ч расстояние в 28,8 км. В чем же причина противоречия?

Анализ причин противоречия.

Дело в том, что при решении данной задачи сделано неверное предположение о том, что спортсмен в течение 1 часа будет бежать с той же скоростью, с какой он пробежал дистанцию в 200 м. Понятно, что в реальной жизни скорость бегуна зависит от длины дистанции. Поэтому, сделав неверное предположение, мы получили в этом случае неверный результат.

III. Распространение общего правила на исключительные случаи.

Данная группа ошибок связана с применением общего правила в тех случаях, на которые это правило не распространяется.

Рассуждение. Докажем, что 2 = 5. Для этого рассмотрим равенство:

$$16 + 6 - 22 = 40 + 15 - 55.$$

Вынесем за скобки в правой и левой частях равенства общие множители. Получим

$$2 \cdot (8 + 3 - 11) = 5 \cdot (8 + 3 - 11).$$

Разделим обе части этого равенства на общий множитель $(8 + 3 - 11)$. Получаем 2 = 5.

Почему же так получилось?

Анализ причин противоречия.

В соответствии с известным правилом равенство не изменится, если мы разделим обе его части на одно и то же число, отличное от нуля. В нашем же случае, поскольку $8 + 3 - 11 = 0$, мы делили на 0. Поэтому и получили в итоге неверное утверждение.

IV. Замена одного утверждения неравносильным другим.

Проиллюстрируем ошибки данного вида следующим рассуждением.

Рассуждение. Мы знаем, что 1 р. = 100 к. Так как 10 р. = 1000 к. и при умножении равенства на одно и то же число оно не изменится, получаем:

$$1 \cdot 10 \text{ р.} = 100 \cdot 1000 \text{ к.} \Leftrightarrow 10 \text{ р.} = 100\,000 \text{ к.}$$

Разделим обе части последнего равенства на 10:

$$1 \text{ р.} = 10\,000 \text{ к.}$$

Таким образом, мы получили, что 1 рубль одновременно равен 100 к. и 10 000 к. Почему так получилось?

Анализ причин противоречия.

Выполняя действия с именованными числами, мы должны всегда помнить о том, что аналогичные действия необходимо производить и с единицами их измерения. Так, например, умножив ширину прямоугольника, равную 5 см, на его длину, равную 6 см, мы получим площадь прямоугольника, выраженную в квадратных сантиметрах:

$$5 \text{ см} \cdot 6 \text{ см} = 30 \text{ (см} \cdot \text{см)} = 30 \text{ см}^2.$$

В нашем рассуждении мы заменили первоначальное равенство неравносильным, так как должны были получить:

$$1 \text{ р.} \cdot 10 \text{ р.} = 100 \text{ к.} \cdot 1000 \text{ к.} \Leftrightarrow 10 \text{ р.}^2 = 100\,000 \text{ к.}^2$$

Это и явилось причиной указанного противоречия.

V. Неточные формулировки и двусмысленность понятий.

Для иллюстрации этого случая рассмотрим следующее рассуждение.

Рассуждение. В одну гостиницу приехало 12 туристов. Администратор обнаружил, что свободными остались всего 11 номеров. Он подумал и предложил следующий способ размещения всех этих туристов по одному в каждом номере.

Предупредив двенадцатого туриста, что он временно размещается в первой комнате, администратор принялся за размещение остальных туристов по одному в каждой комнате, начиная с первой. В итоге такого расселения в первой комнате оказалось два человека, третий турист был помещен во второй комнате, четвёртый – в третьей и так до одиннадцатого туриста, помещенного в десятой комнате.

Одиннадцатая комната осталась свободной, и в нее администратор поселил временного жильца первой комнаты – двенадцатого туриста.

Таким образом, оказалось возможным разместить 12 туристов по одному в 11 комнатах. А значит, получилось, что 12 = 11.

Где же в рассуждениях администратора была допущена ошибка?

Анализ причин противоречия.

Если внимательно проанализировать рассуждение администратора, то станет ясно, что второй турист остался без комнаты, так как о его существовании при распределении номеров просто забыли.

Данная ошибка обнаруживается только при внимательном анализе рассуждения, так как в нем смешаны два разных понятия – количество туристов и порядковый номер их размещения. Путем такого смешения и достигается иллюзия правдоподобности. В самом деле, в рассуждении говорится, что в первой комнате оказалось два человека, однако их номера 1 и 12 явно не называются. При этом делается ссылка на то, что «двое» туристов уже размещены и сразу совершается переход к туристу под номером 3.

Приведённые рассуждения являются примерами того, как неточность формулировок, невнимание к условиям, при которых выполнимы те или иные операции и процессы, неравносильность выполняемых преобразований могут привести к доказательству ошибочных утверждений.

Чтобы избегать подобных ошибок или своевременно их отыскивать, можно пользоваться следующими простыми *правилами*:

Правила логических рассуждений

1. Проверить общее утверждение на простом частном случае, и если для частного случая утверждение неверно, то оно неверно вообще.

2. Проверить истинность всех используемых в процессе доказательства утверждений, помня о том, что на основе ложного исходного утверждения можно доказать что угодно.

3. Каждое новое утверждение должно следовать из других в соответствии с законами логического следования.

4. Смысл всех используемых понятий должен быть однозначно определён.

5. При решении задач надо всегда делать проверку, проверяя полученное решение как на соответствие условиям задачи, так и на соответствие здравому смыслу.

К **87** Прочитайте высказывания и запишите их на математическом языке с помощью кванторов общности ($\forall$) и существования ($\exists$). Докажите истинные высказывания, а для ложных – постройте их отрицания.

а) Любое натуральное число больше нуля.

б) Можно найти натуральное число, квадрат которого больше 30.

в) Квадрат любого натурального числа больше самого числа.

г) Существуют два натуральных числа, одно из которых больше другого на 5, и их произведение равно 5.

88 Постройте утверждения, обратные к данным. Определите истинность прямого и обратного утверждений:

а) Если натуральное число больше 9, то оно больше или равно 10.

б) Сумма двух натуральных чисел, каждое из которых больше 5, меньше 9.

в) Натуральное число, кратное 4 и 25, кратно 100.

г) Если число неотрицательно, то его модуль равен самому числу.

Какие утверждения называются равносильными?

89 Найдите ошибки в следующих рассуждениях:

а) Рассмотрим уравнение $2(x - 7) = 0$. Разделим обе его части на $x - 7$, получим: $\frac{2(x-7)}{x-7} = \frac{0}{x-7}$. Правая часть равенства равна 0, а левая после сокращения на $x - 7$ равна 2. Значит, $2 = 0$.

б) Рассмотрим равенство $105 - 65 - 40 = 63 - 39 - 24$. Вынесем за скобки в правой и левой частях равенства общие множители. Получим

$$5 \cdot (21 - 13 - 8) = 3 \cdot (21 - 13 - 8).$$

Разделив обе части данного равенства на общий множитель $(21 - 13 - 8)$, получаем, что $5 = 3$.

в) Рассмотрим уравнение $7(y + 15) = 0$. Разделим обе его части на $y + 15$, получим: $\frac{7(y+15)}{y+15} = \frac{0}{y+15}$. Правая часть равенства равна 0, а левая после сокращения на $y + 15$ равна 7. Значит, $7 = 0$.

г) Рассмотрим равенство $99 + 162 - 261 = 44 + 72 - 116$. Вынесем за скобки в правой и левой частях равенства общие множители. Получим

$$9 \cdot (11 + 18 - 29) = 4 \cdot (11 + 18 - 29).$$

Разделив обе части этого равенства на общий множитель $(11 + 18 - 29)$, получаем, что $9 = 4$.

90 Придумайте рассуждения, «доказывающие», что:

а) $3 = 7$; б) $8 = 0$; в) $4 = 21$; г) $24 = 0$.

Объясните причины ошибочности этих рассуждений.

91 Найдите причины следующих недоразумений:

а) Мы знаем, что 1 кг = 1000 г. Так как 10 кг = 10 000 г и при умножении равенства на одно и то же число оно не изменится, получаем:

$$1 \cdot 10 \text{ кг} = 1000 \cdot 10\,000 \text{ г, или } 10 \text{ кг} = 10\,000\,000 \text{ г}.$$

Разделив последнее равенство на 10, получаем: 1 кг = 1 000 000 г. Таким образом, мы получили, что 1 кг одновременно равен 1000 г и 1 000 000 г.

б) Докажем, что $15 - 15 = 18$. Записываем уменьшаемое в виде суммы натуральных чисел от 5 до 1: $15 = 5 + 4 + 3 + 2 + 1$, а вычитаемое – в виде суммы тех же чисел, взятых в обратном порядке: $15 = 1 + 2 + 3 + 4 + 5$. Расположим вычитаемое под уменьшаемым и будем вычислять разность $15 - 15$, вычитая числа второй строки из чисел первой строки. Так как 5 из 1 вычесть нельзя, займём единицу из следующего числа, получаем $11 - 5 = 6$. Выполняем вычисления далее и получаем:

$$\begin{array}{r} - \begin{array}{r} 5 + 3 + 4 + 2 + 1 \\ 1 + 2 + 3 + 4 + 5 \end{array} \\ \hline 4 + 1 + 0 + 7 + 6 \end{array}$$

Так как $4 + 1 + 0 + 7 + 6 = 18$, то, значит, $15 - 15 = 18$.

в) Рассмотрим равенство:

$$9 : 9 = 7 : 7.$$

Вынесем за скобки общий множитель в каждой части равенства, получим:

$$9 \cdot (1 : 1) = 7 \cdot (1 : 1) \Leftrightarrow (3 \cdot 3) \cdot (1 : 1) = 7 \cdot (1 : 1).$$

Так как $1 : 1 = 1$, то $3 \cdot 3 = 7$.

П **92** Прочитайте высказывания и определите их истинность. Для ложных высказываний постройте их отрицания.

а) Если натуральное число больше 5, то оно больше или равно 6.
б) Делитель натурального числа может быть больше этого числа.
в) Любое натуральное число является делителем самого себя.
г) Единица является делителем всех натуральных чисел.
д) У натурального числа не бывает больше 3 делителей.

93 Докажите следующие утверждения:

а) Число 89 является делителем числа 625 670.
б) Число 169 491 кратно 3.
в) Число 9 является делителем числа 24 070 802 301.
г) Число 3 805 464 400 кратно 8. Определите, не вычисляя частное, каким ещё 5 числам кратно данное число.

94 Запишите, используя фигурные скобки, множество делителей чисел:

а) 32; б) 42; в) 60; г) 81; д) 91.

95 Найдите наибольший общий делитель чисел:

а) 7, 15, 25; б) 8, 18, 32; в) 9, 12, 33; г) 4, 16, 36.

96 Найдите наименьшее общее кратное чисел:

а) 5, 15, 25; б) 7, 8, 14; в) 3, 10, 18; г) 2, 26, 52.

97 а) Автомобиль и трактор выехали одновременно из пунктов A и B, расстояние между которыми равно 240 км, навстречу друг другу. Скорость автомобиля равна 60 км/ч, а скорость трактора равна 20 км/ч. Через сколько часов они встретятся?

б) Автомобиль и трактор выехали одновременно из пунктов A и B навстречу друг другу. Скорость автомобиля равна 60 км/ч, а скорость трактора равна 20 км/ч. Чему равно расстояние между пунктами A и В, если известно, что автомобиль встретится с трактором через 3 часа?

в) Автомобиль и трактор выехали одновременно из пунктов A и B, расстояние между которыми равно 240 км, навстречу друг другу. Скорость автомобиля равна 60 км/ч. Чему равна скорость трактора, если известно, что автомобиль встретится с трактором через 3 часа?

г) Автомобиль и трактор выехали одновременно из пунктов A и B, расстояние между которыми равно 240 км, навстречу друг другу. Скорость трактора равна 20 км/ч. Чему равна скорость автомобиля, если известно, что автомобиль встретится с трактором через 3 часа?

Что общего в задачах а) – г)? Чем они отличаются? Как называются такие задачи?

98 Решите уравнение:

а) $\left(18\frac{5}{12}x - 3\frac{17}{36}\right) \cdot 2{,}5 - 4\frac{1}{3} : 0{,}65 = 0;$ в) $2{,}88 \cdot \frac{35}{72} = \left(2{,}2z - \frac{5}{12}\right) \cdot 16;$

б) $\left(3\frac{11}{25} - 3{,}68y\right) : 2\frac{1}{2} = 1 : (2{,}1 - 2{,}09);$ г) $\left(1\frac{11}{24} + \frac{13}{36}c\right) \cdot 1{,}44 - \frac{8}{15} \cdot 0{,}5625 = 0.$

99 Найдите в указанном множестве чисел пары:
$A = \left\{-15; -2\frac{1}{3}; -\frac{3}{7}; -\frac{1}{4}; 0; \frac{1}{4}; \frac{3}{7}; \frac{1}{2}; \frac{2}{3}; 1\frac{1}{2}; 2; 2\frac{1}{3}; 4{,}27\right\}$

а) обратных чисел; б) противоположных чисел; в) чисел, имеющих равный модуль.
Какой вывод вы можете сделать о модуле противоположных чисел? Докажите это свойство.

100 Определите истинность высказываний. Для ложных высказываний постройте их отрицания:
а) Число a, кратное числу b, не может быть больше b.
б) Любое натуральное число, большее 1, имеет по крайней мере 2 делителя.
в) Любое натуральное число кратно самому себе.

101 Докажите следующие утверждения:
а) Число 804 является делителем числа 566 820.
б) Число 236 235 кратно 3, но не кратно 9.
в) Число 4 253 696 не кратно ни 5, ни 10.
г) Число 28 725 300 108 кратно 2, 9 и 18.

102 Найдите ошибки в следующих рассуждениях:

а) Рассмотрим уравнение: $17(x + 28) = 0$. Разделим обе его части на $x + 28$, получим: $\frac{17(x+28)}{x+28} = \frac{0}{x+28}$. Правая часть равенства равна 0, а левая после сокращения на $x + 28$ равна 17. Значит, $17 = 0$.

б) Рассмотрим равенство: $275 - 325 + 50 = 132 - 156 + 24$.
Вынесем за скобки в правой и левой частях равенства общие множители:
$$25 \cdot (11 - 13 + 2) = 12 \cdot (11 - 13 + 2).$$
Разделив обе части этого равенства на общий множитель $(11 - 13 + 2)$, получаем, что $25 = 12$.

103 Придумайте рассуждения, «доказывающие», что: а) $18 = 4$; б) $79 = 0$. Объясните причины ошибочности этих рассуждений.

104 Найдите в указанном множестве чисел пары:
$B = \left\{-48; -2\frac{1}{4}; -\frac{4}{9}; -\frac{1}{4}; 0; \frac{1}{5}; \frac{4}{9}; \frac{1}{2}; \frac{7}{8}; 1\frac{1}{7}; 2; 2\frac{1}{4}; 5{,}48\right\}$

а) взаимно обратных чисел; б) противоположных чисел; в) чисел, имеющих равные модули.
Какое свойство противоположных чисел поможет быстрее выполнить это задание?

105 Найдите наибольший общий делитель и наименьшее общее кратное чисел:

а) 16, 36, 56; б) 18, 48, 90.

106 Решите задачу и придумайте ещё 3 задачи, обратные к ней:

Два пешехода вышли одновременно в одном направлении из двух пунктов, расстояние между которыми равно 18 км. Первый пешеход догоняет второго. Скорость первого пешехода равна 6 км/ч. Найдите скорость второго пешехода, если известно, что пешеходы встретились через 9 часов.

107 Решите уравнение:

а) $\left(6{,}72x : \frac{3}{5} + 1\frac{1}{8} \cdot 0{,}8\right) : 1{,}2 = 6\frac{7}{20}$; б) $3{,}075 : 1{,}5 = \frac{1}{4} \cdot \left(\frac{1}{20} + 3{,}26x\right)$.

108* Найдите причину недоразумения:

В магазине было два ящика с персиками по 300 штук в каждом. В первом ящике были персики по цене 100 р. за 10 штук, а во втором – 100 р. за 15 штук. Поэтому общая стоимость персиков равнялась 5000 р. Продавец рассудил, что если он возьмёт из первого ящика 10 персиков, а из второго 15, то должен будет продавать 25 персиков за 200 р. Поэтому он смешал персики из обоих ящиков и продавал эти 600 персиков по цене 200 р. за 25 штук.

В результате он получил 4800 р., то есть на 200 р. меньше того, что должен был получить от продажи всех персиков. Почему так вышло?

109* По завещанию отца три сына должны были разделить стадо из 7 овец так, чтобы старшему сыну досталась половина всех овец, среднему – четвёртая часть всех овец, а младшему – восьмая. Завещание отца смутило наследников, так как они не знали, как разделить 7 овец пополам, – ведь они не хотели резать их на части.

Их дядя, видя их затруднение, подсказал им следующий способ. Он присоединил к стаду одну свою овцу. Получилось 8 овец. После этого он предложил братьям делить всех этих овец в соответствии с завещанием отца.

Старший сын получил половину стада – 4 овцы, средний – четвёртую часть, то есть 2 овцы, а младший восьмую часть, то есть 1 овцу. После такого раздела осталась 8 – 4 – 2 – 1 = 1 дядина овца, которую братья с благодарностью вернули её хозяину.

Выполнили братья завещание своего отца?

Задачи для самоконтроля к главе 1

110 Вычислите:

а) $(2{,}55 + 2{,}7) : \left(0{,}1 - \frac{1}{80}\right) - 3\frac{3}{4} \cdot 1\frac{1}{5}$;

б) $\left(3{,}35 - 2\frac{13}{15} + \frac{5}{8}\right) \cdot \left(224 : 12{,}5 - 3\frac{14}{19} \cdot 2\right) - 24{,}57 : 3{,}5$;

в) $-\left(2\frac{1}{2} \cdot 0{,}24 - \frac{15}{29}\right) \cdot \left(5{,}45 + 1\frac{4}{45} - 6\frac{1}{18}\right) + 36{,}05 : 10{,}3$;

г) $2\frac{1}{2} : \frac{1}{2} - 3{,}6 \cdot \left[17{,}2 \cdot 0{,}125 - \left(2\frac{32}{45} - 1\frac{7}{60}\right)\right] - 24{,}15 : 2{,}3$.

Задачи для самоконтроля к главе 1

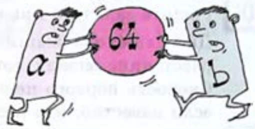
111 Решите уравнение:

а) $3,7(x - 2,4) + 2,3(x - 6,8) = -7,9$;

б) $9,78 - 1,2(x - 13,8) = 4,8(x - 7,3)$;

в) $-5,1(x - 14,2) = 9,9(x + 6,5) - 6,93$;

г) $28,32 - 4,9(x - 2,7) - 5,83 = 8,1(x + 1,2)$.



112 Найдите значение выражения:

а) $2,1a^2 - 5,3a + 15,4$ при $a = -2$;

б) $1,8b^3 - 6,9b + 14,8$ при $b = -3$;

в) $16,8c^5 + 27,6c^4 - 76,3c^3 + 39,5c^2 - 48,4$ при $c = -1$.

113 а) Самая высокая железнодорожная станция в мире Тангла, находящаяся в Китае, расположена над уровнем моря на высоте на 239 м большей, чем железнодорожная станция Тиклио, находящаяся в Перу. Если высоту Тиклио увеличить в 6 раз и вычесть 3634 м, то получится высота Танглы, увеличенная в 5 раз. На какой высоте над уровнем моря расположена железнодорожная станция Тангла?

б) Магеллан пустился в первое в истории кругосветное путешествие на 19 лет позже, чем португалец Диогу Диаш открыл остров Мадагаскар. Если год открытия Мадагаскара увеличить в 4 раза и вычесть из результата 2962, то получится удвоенный год начала кругосветного путешествия Магеллана. В каком году Магеллан пустился в первое в истории кругосветное путешествие?

114 Постройте математическую модель и решите задачу:

а) Выручка компании за год составила 659,8 тыс. р. В первом квартале выручка была на 78,6 тыс. р. больше, чем во втором, в третьем – в 2,5 раза больше, чем во втором, а в четвёртом была равна среднему арифметическому выручки первых трех кварталов. Сколько денег компания получила от покупателей в четвёртом квартале?

б) Автомобильный завод выпустил за год 5944 автомобиля. Во втором квартале было выпущено на 54 автомобиля меньше, чем в третьем, а в четвёртом квартале – в 2 раза больше, чем в третьем. Выпуск автомобилей в первом квартале был равен среднему арифметическому их выпуска в трёх последующих кварталах. Сколько автомобилей выпустил завод в четвёртом квартале?

115 Решите задачу:

а) Расстояние AD между началом и концом ломаной $ABEFD$ равно 76 см. Известно, что длина первого звена ломаной в 4 раза меньше AD, второго – на 10 см меньше, чем первого, третьего – на 12 см больше, чем второго, а четвёртого – на 9 см меньше, чем третьего. Найдите длину ломаной $ABEFD$.

б) Величина первого угла треугольника на 30 градусов меньше второго и в 2 раза больше третьего. Найдите величину второго угла этого треугольника.

116 Переведите в указанные единицы измерения и вычислите:

а) в килограммы:

$0{,}5\ \text{т} \cdot 34{,}8 - (9{,}8 + 1{,}4) \cdot 4000\ \text{г} + 0{,}6\ \text{ц} : (24{,}3 - 24{,}288) + 18{,}8\ \text{кг}$;

б) в миллиметры:

$4{,}735\ \text{м} : 0{,}5 + 14{,}95\ \text{см} : 1{,}3 + 14\ \text{мм} + 2{,}121\ \text{дм} : 0{,}7 + 0{,}00015\ \text{км}$;

в) в часы:

$589{,}8\ \text{мин} : 5 - 18{,}3\ \text{ч} \cdot 2{,}5 + 5760\ \text{с} : 4 + 1382{,}4\ \text{с}$.

117 Решите задачу:

а) Две ремонтные бригады, работая вместе, отремонтировали выставочный павильон за 13 дней. Зная, что производительность первой бригады составляет 130% от производительности второй, определите, сколько дней потребовалось бы первой бригаде, чтобы самостоятельно отремонтировать этот павильон.

б) Для загрузки вагонов используются 2 погрузчика. Первый погрузчик может загрузить вагон полностью за 7 часов. Производительность второго погрузчика на 80% больше первого. Сколько времени понадобится этим двум погрузчикам на загрузку вагона, если они будут работать вместе?

118 Прочитайте определения и назовите определяемые понятия. Укажите для каждого из них род и видовое отличие и нарисуйте диаграмму Эйлера–Венна.

а) Натуральное число, кратное 3, – это натуральное число, которое делится на 3.

б) Правильная дробь – это дробь, числитель которой меньше знаменателя.

в) Составное число – это натуральное число, имеющее более двух различных делителей.

г) Нечётное число – это натуральное число, которое при делении на 2 даёт остаток 1.

119 Нарисуйте диаграммы Эйлера–Венна, иллюстрирующие высказывания:

а) Все автомобили являются транспортными средствами.

б) Некоторые автомобили – синие.

в) Ни один автомобиль не является мотоциклом.

г) Некоторые автомобили не имеют автоматической коробки передач.

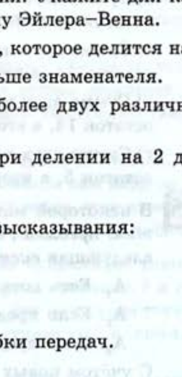
120 Проверьте истинность следующих выводов, используя диаграммы Эйлера–Венна.

а) Все школьники любят ходить в кино. Маша – школьница. Значит, Маша любит ходить в кино.

б) Все школьники любят ходить в кино. Иван не школьник. Значит, Иван не любит ходить в кино.

в) Все школьники любят ходить в кино. Оля не любит ходить в кино. Значит, Оля не школьница.

г) Все школьники любят ходить в кино. Катя любит ходить в кино. Значит, Катя – школьница.



Задачи для самоконтроля к главе 1

121 Докажите, что:

а) Не существует наибольшего натурального числа, которое при делении на 5 даёт остаток 1.

б) Существует бесконечно много чисел вида $3n + 1$, где $n \in N$.

в) Равенство $5m(m + 1) = 47\ 565$ неверно при любом $m \in N$.

г) Если 9 математиков доказали 35 теорем, то хотя бы два математика доказали одинаковое число теорем.

122 Упростите выражение при допустимых значениях переменных:

а) $\frac{3ab}{7xy} : \frac{2ab}{7by}$;   в) $4am : \frac{8mx}{2x^2}$;   д) $\left(\frac{3a}{5b} : \frac{4a}{7b}\right) \cdot \frac{20}{21}$;

б) $\frac{2x}{3y} : \frac{7bx}{9ay}$;   г) $15n : \frac{5nx}{3y}$;   е) $\left(\frac{25xy}{3ab} \cdot \frac{24b^2}{35x^2y}\right) : \frac{1}{x}$.

123 Найдите множество целых решений неравенств:

а) $x + 8{,}1 > 3{,}5$;   в) $4{,}5 < a \leqslant 6$;   д) $|z| < 6{,}2$;

б) $y - 2{,}5 \leqslant 7$;   г) $-2{,}8 \leqslant b < 3{,}7$;   е) $|n - 2| \leqslant 5$.

124 Постройте математическую модель и решите задачу:

а) Сумма двух натуральных чисел равна 45. Первое число при делении на 12 даёт остаток 4, а второе число при делении на 12 даёт остаток 5. Найдите эти числа.

б) Сумма двух натуральных чисел равна 54. Первое число при делении на 17 даёт остаток 11, а второе число при делении на 17 даёт остаток 9. Найдите эти числа.

в) Сумма двух натуральных чисел равна 48. Первое число при делении на 19 даёт остаток 14, а второе число при делении на 19 даёт остаток 15. Найдите эти числа.

г) Сумма двух натуральных чисел равна 35. Первое число при делении на 7 даёт остаток 5, а второе число при делении на 7 даёт остаток 2. Найдите эти числа.

125 В некоторой математической теории введены следующие *первоначальные понятия: предмет, добрый, злой, радостный, грустный*. Для этих понятий введена следующая *система аксиом*:

A_1. Есть хотя бы один предмет.

A_2. Если предмет добрый, то он радостный.

A_3. Если предмет злой, то он грустный.

С учётом новых определений докажите указанную теорему:

а) **Определение.** Книга – добрый предмет.

Теорема. Книга радостная.

б) **Определение.** Нож – злой предмет.

Теорема. Нож грустный.

126 Используя метод доказательства от противного, докажите:

а) При любых натуральных a и b число 17 не может быть корнем уравнения $ax^2 - bx + 15 = 0$.

б) Число 11 не может быть корнем уравнения $ax^3 - bx^2 + 11x + 33 = 0$ при любых натуральных a и b.

Глава 2

Введение в теорию делимости

§ 1. Делимость на множестве натуральных чисел

2.1.1. Делимость чисел и её свойства

Подчинить вычисления своей воле,
сгруппировать математические операции... –
вот задачи математиков будущего...

Эварист Галуа (1811–1832),
французский математик

Интерес людей к натуральным числам всегда был очень велик. Красота и даже магия чисел, заключающаяся в удивительных закономерностях, связанных с ними, завораживала. Это стимулировало математиков развивать теорию чисел, детально изучающую их свойства.

Время показало возрастающую прикладную роль теории чисел. Когда-то теория чисел просто отвечала повседневной потребности в счете, а сейчас помогает в решении таких актуальных проблем, как, например, повышение быстродействия компьютеров.

В центре теории чисел лежит изучение свойств делимости *натуральных* чисел. С некоторыми из этих свойств мы уже знакомились в 5–6 классах. Теперь нам надо систематизировать наши знания. Для этого вспомним основные определения, уже известные свойства и докажем некоторые новые ***свойства делимости натуральных чисел***.

Определение. Число a *делится* (без остатка) на число b, если существует такое число c, что $a = bc$. Числа b и c – ***делители*** числа a, число a – ***кратное*** чисел b и c.

Рассмотрим, например, число 17 964. Это число делится на 3, так как существует число 5988, такое, что $17\,964 = 3 \cdot 5988$. Но может быть, существует ещё какое-то натуральное число n, для которого верно $17\,964 = 3 \cdot n$?

Оказывается, что другого такого числа не существует. Именно это и утверждает следующая теорема.

Теорема 1. Если число a делится на число b, то существует *единственное* число c, такое, что $a = bc$ $(a,\ b,\ c \in N)$.

Доказательство:

Проведём доказательство методом от противного. Предположим, что существуют два различных числа c_1 и c_2, таких, что $a = bc_1$ и $a = bc_2$, где $c_1 \neq c_2$.

Вычтем из первого равенства второе. Получаем

$$a - a = bc_1 - bc_2 \quad \Leftrightarrow \quad 0 = b(c_1 - c_2).$$

Полученное равенство невозможно, так как оба множителя, b и $c_1 - c_2$, отличны от 0. Действительно, число b – натуральное и, значит, $b \neq 0$. И так как, исходя из сделанного предположения, $c_1 \neq c_2$, то $c_1 - c_2 \neq 0$.

Значит, мы получили противоречие и наше предположение неверно. Таким образом, существует единственное число c, такое, что $a = bc$, что и требовалось доказать. ▼

Теорема 2. Любое натуральное число делится на единицу.

Доказательство:

По определению делимости, существует число a, такое, что $a = 1 \cdot a$. Значит, любое натуральное число делится на единицу, что и требовалось доказать. ▼

Теорема 3. Любое натуральное число делится на само себя.

Доказательство:

По определению делимости, существует число 1, такое, что $a = a \cdot 1$. Значит, любое натуральное число делится на само себя, что и требовалось доказать. ▼

Теорема 4. Если натуральное число a делится на натуральное число b, а число b, в свою очередь, делится на число a, то $a = b$.

Доказательство:

По условию, число a делится на число b. Следовательно, по определению делимости, существует такое число n, что $a = bn$. Аналогично, так как число b делится на число a, то существует такое число m, что $b = am$.

Поэтому получаем:

$$a = bn \quad \Leftrightarrow \quad a = (am)n \quad \Leftrightarrow \quad 1 = mn.$$

Значит, $m = 1$ и $n = 1$, а следовательно, $a = b$, что и требовалось доказать. ▼

Теорема 5. Если число a делится на число c, а число b делится на число d, то ab делится на cd ($a, b, c, d \in N$).

Доказательство:

По определению делимости, существуют такие числа n и m, что $a = cn$, $b = dm$.

Найдем произведение чисел a и b:

$$ab = (cn) \cdot (dm) = cd(nm).$$

А это, по определению делимости, и означает, что ab делится на cd, что и требовалось доказать. ▼

Введем обозначения:

a делится на b $\Leftrightarrow$ $a \vdots b$	a не делится на b $\Leftrightarrow$ $a \not\vdots\, b$

Данные обозначения позволяют кратко сформулировать уже известные вам свойства делимости, которые мы доказывали в 5–6 классах ($a, b, c \in N$). А теперь вы можете попробовать доказать их самостоятельно.

Теорема 6. Если $a \vdots b$, а $b \vdots c$, то $a \vdots c$.

Теорема 7. Если $a \vdots c$ и $b \vdots c$, то $(a + b) \vdots c$ и $(a - b) \vdots c$.

Теорема 8. Если $a \vdots c$, а $b \not\vdots\, c$, то $(a + b) \not\vdots\, c$ и $(a - b) \not\vdots\, c$.

Теорема 9. Если $a \vdots c$ или $b \vdots c$, то $ab \vdots c$.

127 Разбейте данные примеры, имеющие вид $a : b$ (где a и b натуральные числа), на две группы: 1) a делится на b, 2) a не делится на b.

а) 79 : 3; г) 6401 : 25; ж) 3500 : 100;

б) 836 : 4; д) 2000 : 10; з) 6840 : 180;

в) 630 : 9; е) 9105 : 15; и) 7350 : 300.

Как можно быстро выяснить, делится ли число на 2, 3, 5, 10?

128 Определите, не вычисляя частного, истинность следующих утверждений. Для ложных высказываний постройте их отрицания.

а) Число 56 789 976 431 делится на 1.

б) Число 793 457 891 делится само на себя.

в) Число 678 делится на 983.

г) Число 862 056 делится на 9.

д) Разность чисел 398 470 − 125 052 делится на 5.

е) Сумма чисел 3 000 333 + 205 783 069 делится на 3.

ж) Произведение чисел 4554 · 3029 не делится на 18.

з) Число 555 555 делится на 15.

и) Число 143 526 не делится на 6.

к) Число 4 010 532 не делится на 12.

129 Определите истинность высказывания. Для ложных высказываний постройте отрицания:

а) Если натуральное число делится на 4 и на 3, то оно всегда делится на 12.

б) Если натуральное число делится на 4 и на 6, то оно всегда делится на 24.

в) Если натуральное число делится на 12, то оно всегда делится на 3.

г) Если одно натуральное число делится на 5, а другое натуральное число делится на 7, то их произведение делится на 35.

д) Если одно натуральное число делится на 8, а другое натуральное число делится на 10, то их произведение делится на 80.

е) Если произведение двух натуральных чисел делится на 9, то хотя бы одно из натуральных чисел делится на 9.

ж) Если оба натуральных числа делятся на 7, то их сумма делится на 7.

з) Если натуральное число делится на 11, то его сумма с любым другим натуральным числом делится на 11.

130 а) Делится ли произведение $25^2 \cdot 9^3$ на 5, 3, 15, 20, 45? Обоснуйте свой ответ.

б) Сравните значения числовых выражений $25^2 \cdot 9^3$ и $225^2 \cdot 9$.

131 Известно, что натуральное число a делится на натуральное число b. Сократима ли дробь: а) $\dfrac{a-b}{a+b}$; б) $\dfrac{2a+3b}{5a-b}$?

132 Проанализируйте решение задачи № 131 (а, б). Сформулируйте в общем виде и докажите общее свойство делимости, которое вы наблюдаете.

133 Верно ли следующее утверждение?

а) Если натуральное число a не делится на 3, то $2a$ не делится на 3.

б) Если натуральное число b четное, то $3b$ делится на 6.

в) Если $5c$ делится на 2, то c делится на 2 ($c \in N$).

г) Если $21d$ делится на 7, то d не всегда делится на 7 ($d \in N$).

д) Если $6a + 3b$ делится на 6, то b делится на 2 ($a, b \in N$).

е) Если натуральное число a делится на 5, а натуральное число b делится на 7, то $7a - 5b$ делится на 35.

134 а) Миша купил общую тетрадь из 96 листов и пронумеровал подряд все её страницы, начиная с первой. Вова вырвал из этой тетради 37 листов и сложил номера указанных на них страниц. Может ли он получить в сумме число 2354?

б) Толя приклеил свои 432 марки в альбом по 16 марок на страницу и пронумеровал подряд все марки, начиная с первой. Когда у его сестры Кати был день рождения, он подарил ей 9 листов из своего альбома с марками. Катя сложила номера всех полученных ею в подарок марок. Могла ли она получить в сумме число 5475?

135 Докажите утверждение:

а) Трёхзначное число, записанное тремя одинаковыми цифрами, делится на 37.

б) Разность любого четырёхзначного числа и четырёхзначного числа, записанного теми же цифрами, но в обратном порядке, делится на 9.

в) Произведение любых семи последовательных чисел делится на 2520.

г) Число, записываемое 100 двойками, 100 единицами и 100 нулями, не может быть точным квадратом.

П **136** Прочитайте высказывания с переменными и запишите их на математическом языке. Заменив в каждом высказывании буквы на числа, приведите по два примера истинных высказываний.

а) Число a делится на число b.

б) Число c при делении на d даёт остаток r.

в) Числа p и r взаимно простые.

г) Наибольший общий делитель чисел k и l равен 2.

д) Наименьшее общее кратное чисел m и n равно 468.

137 Найдите НОД и НОК чисел a и b:

а) $a = 300,\ b = 1155$;
б) $a = 195,\ b = 20\,475$;
в) $a = 2^3 \cdot 3^2 \cdot 5^2 \cdot 7,\ b = 2^3 \cdot 7 \cdot 11 \cdot 13$;
г) $a = 7^2 \cdot 11 \cdot 13^2,\ b = 5 \cdot 17 \cdot 19$.

138 Выделите целую часть дроби:

а) $\frac{15}{7}$; б) $\frac{50}{9}$; в) $\frac{97}{41}$; г) $\frac{125}{12}$; д) $\frac{145}{36}$; е) $\frac{256}{33}$; ж) $\frac{673}{40}$; з) $\frac{1201}{55}$; и) $\frac{3256}{421}$; к) $\frac{16\,507}{2500}$.

139 Запишите смешанное число в виде неправильной дроби:

а) $2\frac{3}{17}$; в) $7\frac{13}{25}$; д) $15\frac{4}{7}$; ж) $35\frac{5}{12}$; и) $101\frac{2}{5}$;

б) $5\frac{17}{21}$; г) $12\frac{30}{39}$; е) $20\frac{7}{23}$; з) $78\frac{5}{6}$; к) $407\frac{5}{11}$.

140 Дано множество чисел: $A = \{372; 405; 700; 1075; 4399; 10\,350; 31\,808; 200\,893\}$. В множестве A найдите подмножества, состоящие из чисел, кратных:

а) 2; в) 3; д) 10; ж) 4; и) 8; л) 15;

б) 5; г) 9; е) 100; з) 25; к) 125; м) 20.

141 Решите задачу:

а) Спортсмен пробежал 3,5 км, что составило 28% всей дистанции. Сколько километров ему ещё надо пробежать?

б) В магазине 640 наименований компьютерных игр. Среди них 162 бродилки, 203 стратегии, 115 симуляторов, а остальное – квесты. Какой процент составляют квесты от общего числа компьютерных игр этого магазина?

в) В кинозале 255 мест. На сеанс продали 170 билетов. Какой процент свободные места составят от общего количества мест, если на сеанс придут лишь 90% зрителей, купивших билеты?

г) Мама поручила Леше разложить 168 конфет в две коробки так, чтобы число конфет в первой коробке составляло 60% числа конфет во второй коробке. Сколько конфет Леша должен положить в каждую коробку?

д) После летней распродажи ноутбук стал стоить 18 900 р. Сколько стоил ноутбук до распродажи, если размер скидки составил 25%?

е) Как изменится цена товара, если её сначала уменьшить на 30%, а затем увеличить на 25%?

ж) Робин Бобин Барабек решил сесть на диету. Сначала он похудел на 25%, затем прибавил 20%, а потом похудел ещё на 10%. Похудел он или поправился после того, как сел на диету, и на сколько процентов?

з) В произведении трёх чисел первый множитель увеличили на 20%, второй уменьшили на 25%, а третий увеличили на 10%. Как изменилось произведение?

142 а) Яблоки при сушке теряют 85% своей массы. Решили засушить 200 кг яблок. Сколько получится сушёных яблок?

б) Грибы при сушке теряют 90% своей массы. Из какого количества свежих грибов было получено 5 кг сушеных?

в) Сушёная малина содержит 12% воды. Из 50 кг свежей малины получается 3 кг сушёной малины. Какой процент содержания воды в свежей малине?

Д **143** 1) Делится ли произведение $49^4 \cdot 6^2$ а) на 14; б) на 42? Обоснуйте свой ответ.

2) Сравните значения числовых выражений $49^4 \cdot 6^2$ и $2401^2 \cdot 36$.

144 Известно, что натуральное число a делится на натуральное число b. Сократима ли дробь $\frac{7a - 9b}{2a - 5b}$?

145 Верно ли следующее утверждение?

а) Если натуральное число a не делится на 3, то $5a$ не делится на 3.

б) Если $7c$ делится на 2, то c делится на 2 ($c \in N$).

в) Если натуральное число делится на 48, то оно всегда делится на 12.

г) Если одно натуральное число делится на 9, а другое натуральное число делится на 8, то их произведение делится на 72.

д) Если одно натуральное число делится на 6, а другое натуральное число делится на 4, то их произведение делится на 24.

е) Если произведение двух натуральных чисел делится на 25, то хотя бы одно из этих натуральных чисел делится на 25.

ж) Если оба натуральных числа делятся на 9, то их сумма делится на 9.

з) Если натуральное число делится на 19, то его сумма с любым другим натуральным числом делится на 19.

и) Если $15a + 3b$ делится на 15, то b делится на 5 ($a, b \in N$).

к) Если натуральное число a делится на 5, а натуральное число b делится на 7, то $7a - 5b$ делится на 35.

146 У Вани 240 фотографий. Он разложил свои фотографии в альбом по 8 фото на странице и пронумеровал подряд, начиная с первой, все фотографии. Его младший брат вырвал из альбома 5 листов. Ваня нашел эти листы и посчитал сумму номеров фотографий на вырванных листах. Мог ли он получить в сумме 1375?

147 Докажите утверждение:

а) Произведение любых пяти последовательных чисел делится на 60.

б) Число, записываемое 80 двойками, 80 единицами и 80 нулями, не может быть точным квадратом.

148 Найдите НОД и НОК чисел a и b:

а) $a = 360$, $b = 1848$; б) $a = 1001$, $b = 1820$.

149 Выделите целую часть дроби:

а) $\frac{29}{13}$; б) $\frac{48}{11}$; в) $\frac{157}{28}$; г) $\frac{213}{35}$.

150 Запишите смешанное число в виде неправильной дроби:

а) $1\frac{23}{58}$; б) $4\frac{15}{69}$; в) $6\frac{31}{36}$; г) $13\frac{28}{43}$.

151 Дано множество чисел: $A = \{209; 564; 925; 1260; 40\,375; 74\,999; 150\,024\}$. В множестве A найдите подмножества, состоящие из чисел, кратных:

а) 2; в) 3; д) 10; ж) 4; и) 8; л) 18;

б) 5; г) 9; е) 100; з) 25; к) 125; м) 50.

152 Решите задачу:

а) Антон и Ксюша подводили итоги первого года работы пончиковой компании. Выручка за июнь оказалась равной 8560 р., что составило 16% всей годовой выручки. Чему была равна выручка пончиковой компании за первый год работы?

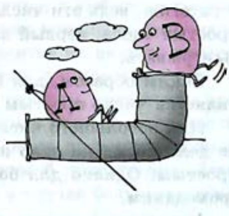
б) Подсчитав выручку своей компании, Антон и Ксюша решили посчитать расходы. Расходы за год составили 21 768 р. При этом в первом квартале было израсходовано 5612 р., во втором – на 1215 р. меньше, чем в первом, а в третьем – в 1,5 раза больше, чем в первом. Какой процент составили расходы четвёртого квартала от суммы всех расходов за год? Ответ округлите до сотых процента.

в) Взяв выручку пончиковой компании за год из пункта а) этой задачи, а расходы – из пункта б), посчитайте, какую прибыль заработала пончиковая компания за первый год работы. Хватит ли Антону с Ксюшей заработанной прибыли, чтобы купить на эти деньги ноутбук стоимостью 28 500 р.? Чему была равна годовая рентабельность продаж (процентное отношение прибыли за период к выручке за тот же период) в пончиковой компании Антона и Ксюши? Ответ округлите до сотых процента.

153 Докажите, что числа A и B взаимно простые:

$$A = \frac{\left(9 - 5\frac{3}{8}\right) \cdot \left[4\frac{5}{12} - 4 : 2\frac{2}{3} + \left(\frac{3}{10} - \frac{1}{2} : 4\right) \cdot \frac{4}{7}\right]}{\frac{1}{24} + \frac{1}{4} : 13\frac{1}{3}};$$

$$B = \left[\frac{\left(3\frac{2}{5} - 1\frac{5}{7}\right) \cdot 11\frac{2}{3}}{1\frac{2}{9} - 1\frac{1}{18}} - \frac{\left(9\frac{3}{4} + 5\frac{1}{6}\right) \cdot 6}{\left(5\frac{3}{20} - 4\frac{1}{4}\right) \cdot 1\frac{1}{9}}\right] : 1\frac{1}{2}.$$



C **154*** Докажите, что если в трёхзначном числе две последние цифры одинаковые и сумма его цифр делится на 7, то это число делится на 7.

155* Можно ли нарисовать замкнутую ломаную линию, состоящую из 15 звеньев, каждое звено которой пересекается ровно с одним из остальных звеньев?

2.1.2. Простые числа

Никакая другая отрасль теории чисел не насыщена настолько таинственностью и элегантностью, как изучение простых чисел, этих непокорных, раздражающих чисел, которые не хотят делиться нацело ни на какое целое число за исключением себя и единицы.

Мартин Гарднер (1914–2010),
американский математик и писатель

Все натуральные числа, большие 1, имеют по крайней мере два различных делителя: 1 и само себя. С этим свойством натуральных чисел связано важное понятие простого числа. Простые числа занимают особое место среди всех натуральных чисел. Они являются теми «кирпичиками», из которых строят все остальные числа.

Вспомним определение простого числа.

Определение 1. ***Простым*** называется натуральное число, которое имеет ровно два различных делителя: единицу и само это число.

Определение 2. ***Составным*** называется натуральное число, которое имеет более двух различных делителей.

Число 1 имеет единственный делитель – само себя, и поэтому оно выделено в ряду натуральных чисел в особую группу: *не является ни простым, ни составным.*

Понятие простого числа может оказаться очень полезным, например, при разработке выигрышной стратегии в следующей игре.

Игра.

В игре участвуют двое. Первый игрок называет число, затем игроки по очереди, начиная со второго, называют его делители. При этом повторять уже названные делители не разрешается. Может ли первый игрок наверняка выиграть, если выигрывает тот, кто назвал последний делитель?

Стратегия игры:

Свойства простых чисел позволяют первому игроку быстро найти выигрышную стратегию, ведь эти числа имеют ровно два различных делителя. Поэтому, называя простые числа, первый игрок гарантированно будет называть последний делитель и выигрывать.

Таким образом, для первого игрока становится важным научиться определять, является число простым или нет.

Для небольшого числа это сделать нетрудно. Например, проверив, что число 19 не делится ни на одно из чисел от 2 до 18, мы убедимся в том, что оно является простым. Однако для больших чисел данный способ решения является слишком громоздким.

Упростить решение этой и многих других задач помогает так называемая ***основная теорема арифметики.***

Теорема 1 (Основная теорема арифметики). Любое составное число можно представить в виде произведения простых множителей. При этом два разложения одного и того же числа на простые множители могут отличаться лишь порядком множителей.

Заметим, что разложением простого числа на простые множители принято считать само это число.

Несмотря на то что эта теорема на первый взгляд кажется очевидной, её доказательство достаточно непросто и не входит в программу нашего курса.

Из основной теоремы арифметики следует важный вывод о том, что *различные представления одного и того же составного числа в виде произведения простых чисел связаны только с различием в порядке множителей.*

Так, например, разложение числа 210 на простые множители может иметь вид $210 = 2 \cdot 5 \cdot 3 \cdot 7$ или $210 = 2 \cdot 3 \cdot 7 \cdot 5$. Для того чтобы избежать такой неоднозначности, математики решили записывать простые множители в разложении натурального числа в порядке возрастания. При этом если встречаются одинаковые простые множители, то в записи для краткости используют обозначение степени.

Такую упорядоченную запись назвали ***каноническим разложением числа на простые множители.*** Например, каноническое разложение числа 210 имеет вид:

$$210 = 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7,$$

а для числа 90 каноническое разложение таково:

$$90 = 2 \cdot 3^2 \cdot 5.$$

Из свойств делимости натуральных чисел и основной теоремы арифметики следует, что если в разложении числа на простые множители нет, например, числа 2, то никакое число, кратное 2, не может быть его делителем. Следовательно, для того чтобы выяснить, является ли данное число простым, достаточно проверить, что оно не делится на все простые числа, меньшие этого числа. Например, для числа 19 это числа 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, а не все числа от 2 до 18.

Однако способ поиска простых чисел можно сделать ещё проще. В этом нам поможет следующее наблюдение.

Пусть число a – составное. Тогда его можно представить в виде произведения двух множителей: $a = bc$, где b и c – натуральные числа, отличные от 1.

Поскольку

$$a \cdot a = (bc) \cdot (bc) = (bb) \cdot (cc) = b^2c^2,$$

то квадраты b и c не могут быть одновременно больше a. Значит, у любого составного числа всегда имеется отличный от 1 делитель, квадрат которого меньше самого числа. Следовательно, если натуральное число n, большее 1, не делится ни на одно простое число, квадрат которого меньше n, то рассматриваемое число n – простое.

Поэтому, для того чтобы выяснить, является ли число простым, достаточно проверить, что оно не делится на простые числа, квадрат которых меньше этого числа.

Так, определив, что 19 не делится на 2 и 3, можно остановить проверку, поскольку следующее простое число 5, а $5^2 = 25 > 19$. Указанный способ существенно облегчает проверку того, является ли число простым, особенно в случае больших чисел.

В итоге мы можем записать следующий алгоритм.

Алгоритм ответа на вопрос «Является ли число a простым?»

1. Выписать все простые числа, квадраты которых меньше a.
2. Если a делится хотя бы на одно из выписанных чисел, то a – составное.
3. Если a не делится ни на одно из выписанных чисел, то a – простое.

Используя указанный алгоритм, проверим, является ли простым число 97.

Выписываем простые числа, квадраты которых меньше 97. Так как $11^2 = 121 > 97$, то получаем следующий список чисел: 2, 3, 5, 7.

Так как 97 не делится ни на одно из указанных чисел, то, значит, 97 – простое число.

Теперь мы знаем, как определить, является ли натуральное число простым. А можно ли найти все простые числа?

Наблюдая даже за несколькими первыми простыми числами, можно заметить, что ряд простых чисел устроен достаточно сложно, простые числа то идут одно за другим, а то их не встретишь в последовательности натуральных чисел довольно долго. Может возникнуть ощущение, что этот ряд может в какой-то момент оборваться.

Следующая теорема доказывает, что если мы уже нашли несколько простых чисел, то всегда можно указать ещё одно простое число. Таким образом, ряд простых чисел, как и ряд натуральных чисел, бесконечен.

Теорема 2. Простых чисел существует бесконечно много.

☺☺☺ *Доказательство:*

Для доказательства воспользуемся методом от противного.

Предположим, что существует лишь конечное число простых чисел и их можно все перечислить: 2, 3, 5, 7, 11, ..., p. Значит, существует самое большое простое число. Обозначим его p. Тогда все остальные натуральные числа являются составными и делятся хотя бы на одно из указанных простых чисел.

Теперь перемножим все наши простые числа и прибавим к их произведению число 1. Получим натуральное число a:

$$a = 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 11 ... \cdot p + 1.$$

Число a больше каждого из имеющихся простых чисел. Значит, исходя из нашего предположения, это число должно быть составным.

В то же время, заметим, что число a при делении на каждое из наших простых чисел даёт остаток 1. Поэтому оно не может быть составным, так как не делится ни на одно из указанных простых чисел.

Таким образом, сделанное нами предположение о том, что множество простых чисел конечно, привело нас к противоречию. Следовательно, оно неверно, и поэтому простых чисел бесконечно много, что и требовалось доказать. ▼

К **156** Запишите высказывания на математическом языке и определите их истинность. Для ложных высказываний постройте отрицание.

а) Число d – делитель числа a, если число a в c раз больше d (a, c, $d \in N$).

б) Число k является кратным числа b, если число k в a раз больше b (a, k, $b \in N$).

в) Число 17 является составным числом.

г) Сумма любых двух простых чисел – простое число.

д) Всякое простое число не может быть чётным.

е) Если натуральное число делится на 15, то сумма его цифр делится на 3 и оно оканчивается на 5.

ж) Если сумма цифр натурального числа делится на 6, то натуральное число делится на 6.

з) Если натуральное число делится на 36, то сумма его цифр делится на 9 и число, составленное из его двух последних цифр, делится на 4.

157 Какие из следующих чисел являются простыми:

а) год вашего рождения; в) номер вашей школы;

б) текущий год; г) номер вашего дома?

158 Разбейте множество $A = \{2, 4, 5, 6, 7, 10, 11, 13, 15, 16, 19, 25, 37, 39, 41\}$ на два подмножества: S – подмножество составных чисел, P – подмножество простых чисел.

Найдите: а) $S \cup P$; б) $S \cap P$.

159 Определите, простыми или составными являются следующие числа:

а) 206; в) 113; д) 121; ж) 145; и) 153; л) 353;

б) 89; г) 117; е) 123; з) 149; к) 163; м) 357.

160 Найдите первое простое число, следующее за числом:

а) 40; б) 110; в) 200; г) 320.

161 Найдите простые числа, лежащие между числами a и b:

а) $a = 1000$, $b = 1010$; в) $a = 130$, $b = 140$;

б) $a = 150$, $b = 160$; г) $a = 510$, $b = 520$.

162 Запишите в каноническом виде разложение чисел на простые множители:

а) 6300; в) 184 275; д) 709 632; ж) 1 858 560;

б) 49 896; г) 343 434; е) 1 000 000; з) 2 619 540.

163 Известно, что p и q – различные простые числа. Сколько делителей у чисел:

а) pq; б) p^2q; в) p^2q^2?

164 Докажите:

а) Если сумма и произведение двух чисел делятся на простое число p, то каждое из этих чисел делится на p.

б) Любое простое число, большее 5, может заканчиваться только цифрами 1, 3, 7, 9.

в) Любое простое число, большее 2, при делении на 4 может иметь остаток либо 1, либо 3.

П **165** Докажите, что высказывание ложно, и постройте его отрицание:

а) Число 11 является составным числом.

б) Число 28 является простым числом.

в) Числа 16 и 28 взаимно простые.

г) Сумма $207\,090 + 120\,513 \cdot 8029$ кратна 9.

д) Произведение $137\,986 \cdot 10\,510$ делится на 25.

е) Произведение $43\,725 \cdot 102\,705$ не кратно 9.

ж) Произведение $376\,415 \cdot 927\,382$ не кратно 10.

166 Найдите модуль каждого из указанных чисел:

а) 12; в) −38; д) 0,58; ж) a, если $a < 0$; и) $\frac{13}{20}c$, если $c > 0$;

б) 0; г) $-3\frac{7}{27}$; е) $-\frac{99}{101}$; з) $-b$, если $b > 0$; к) $-1{,}5x$, если $x < 0$.

167 Найдите величину отношений:

а) 4 кг : 250 г; г) 5 мин : 6 с; ж) 3 га 50 а : 14 000 м²;

б) 1,2 км : 8 м; д) 10 р. : 5 к.; з) 5000 мм³ : 4 дм³;

в) 2 дм² : 0,5 м²; е) 7 а : 25 м²; и) 1 см³ : 1 л.

168 Решите задачу:

а) Три известных французских короля, Карл V Мудрый, Франциск I и «король-солнце» Людовик XIV, правили Францией в общей сложности 120 лет. При этом количество лет их правления относится соответственно как 2 : 4 : 9. Сколько лет правил каждый из указанных королей?

б) Шесть рабочих – маляр, отделочник, плотник, стекольщик, электрик, штукатур – получили за выполненный ремонт квартиры 48 600 р. Как им надо разделить заработанные деньги, если они работали одинаковое время и их часовые ставки оплаты приведены в таблице:

маляр – 120 р./ч	отделочник – 180 р./ч	плотник – 225 р./ч
стекольщик – 240 р./ч	электрик – 300 р./ч	штукатур –150 р./ч

в) В доме 5 квартир. В квартире № 1 живут 3 человека, в № 2 – 2 человека, в № 3 – 6 человек, в № 4 – 5 человек, а в № 5 – 4 человека. Тариф ежемесячного платежа за горячую воду установлен одинаковым для каждого проживающего в этом доме. Рассчитайте сумму, которую должны заплатить за горячую воду за июнь все жители этого дома, если известно, что семья из квартиры № 5 заплатила 1124 р.

169 Докажите:

а) Два последовательных натуральных числа являются взаимно простыми.

б) Два последовательных нечетных числа являются взаимно простыми.

170 Решите задачу:

а) Компания разместила свои свободные деньги в сумме 1800 тыс. р. в банк на два депозита. По одному депозиту доходность составляет 6% в год, а по другому – 10% в год. За год по обоим депозитам получен одинаковый доход. Какую сумму компания положила под 10% годовых, а какую – под 6%?

б) В какую сумму превратится вклад в 10 000 р. через 3 года, если банк начисляет процентный доход в размере 8% годовых?

в) Какая сумма была положена в банк под 5% годовых, если через 2 года вклад составил 55 125 р.?

г) Под какой годовой процент были размещены в банке 2000 р., если процентный доход за 2 года составил 420 р.?

Д **171** Какие из следующих чисел являются простыми:

а) год рождения вашей мамы; в) день вашего рождения;

б) год рождения вашей бабушки; г) номер вашей квартиры?

172 Определите, простыми или составными являются следующие числа:

а) 83; б) 87; в) 91; г) 107; д) 173; е) 177.

173 Найдите первое простое число, следующее за числом:

а) 80; б) 100; в) 115; г) 140.

174 Найдите простые числа, лежащие между числами a и b:

а) $a = 180$, $b = 190$; б) $a = 160$, $b = 170$.

175 Запишите в каноническом виде разложение чисел на простые множители:

а) 3276; б) 65 520; в) 108 000; г) 266 112.

176 Докажите, что:

а) Любое простое число, большее 3, при делении на 6 может иметь либо остаток 1, либо остаток 5.

б) Если разность и произведение двух чисел делятся на простое число p, то каждое из этих чисел делится на p.

177 Найдите модуль каждого из указанных чисел:

а) 31; б) −15; в) 0; г) $-3a$, если $a > 0$; д) $-\frac{9}{22}b$, если $b < 0$.

178 Найдите величину отношений:

а) 7 т : 50 кг; в) 36 ч : 18 мин; д) 5 м^3 : 16 см^3;

б) 5,6 км : 70 см; г) 17 а : 5 дм^2; е) 14 л : 28 см^3.

179 Решите задачу:

а) Антон с Ксюшей узнали у своих родителей новый рецепт теста для «новогодних пончиков» (см. таблицу). Они провели маркетинговое исследование и выяснили, что смогут продать за новогодние праздники 1593 кг готовых пончиков. В каком количестве им надо закупить каждый из продуктов, необходимых для изготовления нужного количества теста для пончиков, если вес готового продукта составляет 90% от веса всех использованных для теста ингредиентов?

Ингредиент	Мука	Сахар	Молоко	Дрожжи	Изюм	Орехи	Яйца взбитые*	Сахарная пудра
Количество частей	25	3	20	1	5	2	2	1

* Из 10 целых яиц получается 1 часть взбитых яиц.

б) Для изготовления новогоднего заказа пончиков Антону с Ксюшей потребовалось нанять дополнительно на работу шеф-повара, повара и помощника повара. Общая оплата за сделанную ими работу составила 3575 р. Оклады шеф-повара, повара и помощника повара относятся как 3 : 2 : 0,5. Какую зарплату должны заплатить Антон с Ксюшей каждому из новых сотрудников?

180 Вычислите. Найдите частное и остаток от деления полученного результата на 7:

$$\frac{5932 \cdot 6001 - 69}{6001 \cdot 5931 + 5932} - \frac{\frac{1}{5} : \left(-0{,}3 \cdot \left(-\frac{2}{3}\right) - 0{,}08 : (-0{,}2)\right)}{1\frac{17}{21} - 2\frac{1}{7}}.$$

C **181*** а) Пять последовательных натуральных чисел 24, 25, 26, 27, 28 являются составными и лежат между двумя простыми числами 23 и 29. Найдите девять последовательных составных чисел.

б) Найдите тринадцать последовательных составных чисел.

2.1.3. Деление с остатком

Чарующая привлекательность этой возвышенной науки во всей своей красоте открывактся только тем, у кого есть смелость углубиться в неё.

Карл Фридрих Гаусс (1777–1855), немецкий математик и физик

Результат деления одного натурального числа на другое не всегда будет числом натуральным. Попытка разделить, например, число 564 на 20 на множестве натуральных чисел показывает, что нельзя найти такое натуральное число c, чтобы $c \cdot 20 = 564$. Поэтому для натуральных чисел наряду с действием деления рассматривают и более общее действие, которое всегда выполнимо. Это действие называют *делением с остатком*. Дадим определение этого действия для натуральных чисел a и b.

Определение. *Разделить число a на число b с остатком* значит представить число a в виде

$$a = bc + r, \text{ где } r < b \ (a, b \in N;\ c, r \in N_0).$$

При этом число c называют *неполным частным*, а число r – *остатком* от деления a на b. Здесь и далее N_0 – множество натуральных чисел и 0.

Таким образом, мы можем разделить число 564 на 20 с остатком, представив его в виде:

$$564 = 20 \cdot 28 + 4, \text{ где } 4 < 20 \ (4, 20 \in N_0).$$

Однако, получив данное представление, естественно задать себе вопросы:

1. Любое ли натуральное число можно представить в указанном виде?
2. Может ли быть несколько таких представлений для одного и того же числа?

Ответ на эти вопросы даёт следующая теорема.

Теорема о делимости. Для любых натуральных чисел a и b существует единственная пара чисел c и r из множества N_0, такая, что $a = bc + r$, где $r < b$.

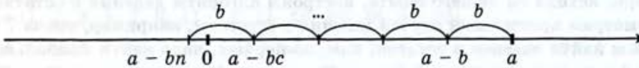
☺☺☺ *Доказательство:*

1. Существование.

Будем выписывать подряд следующие числа:

$a,\ a - b,\ a - b \cdot 2,\ a - b \cdot 3,\ \dots,\ a - b \cdot n,\ \dots\ (n \in N)$

Выписанные таким образом числа образуют последовательность целых чисел, каждое из которых, кроме первого, на b меньше предыдущего.



Последовательно вычитая из натурального числа a натуральные числа вида bn ($n = 1, 2, 3, \ldots$), мы получим в некоторый момент отрицательное число.

Вместе с тем в данной последовательности имеется хотя бы одно неотрицательное число (например, число $a > 0$).

Пусть наименьшее из получившихся неотрицательных чисел равно $a - bc$, где $c \in N_0$. Обозначим его r:

$$a - bc = r \ (r \in N_0).$$

Из данного равенства следует, что число a может быть представлено в виде $a = bc + r$, где c, $r \in N_0$. Покажем теперь, что $r < b$.

Для этого предположим противное, что $r \geqslant b$, и выполним преобразования:

$$r \geqslant b \Leftrightarrow r - b \geqslant 0 \Leftrightarrow a - bc - b \geqslant 0 \Leftrightarrow a - b(c + 1) \geqslant 0.$$

Мы получили неотрицательное число $a - b(c + 1)$ вида $a - bn$ ($n \in N$), которое меньше числа $a - bc$. Но это противоречит нашему выбору наименьшего неотрицательного числа $a - bc$. Следовательно, наше предположение неверно и $r < b$.

Итак, представление $a = bc + r$, где $r < b$ (c, $r \in N_0$), существует, и возможность деления с остатком любых натуральных чисел a и b доказана.

2. Единственность.

Проведём доказательство методом от противного. Предположим, что существуют две различные пары чисел c_1, r_1 и c_2, r_2 (c_1, r_1, c_2, $r_2 \in N_0$), такие, что

$$a = bc_1 + r_1, \text{ где } r_1 < b,$$
$$a = bc_2 + r_2, \text{ где } r_2 < b.$$

Пусть для определённости $r_1 \leqslant r_2$.

Вычтем из первого равенства второе, получим

$$0 = bc_1 + r_1 - bc_2 - r_2 \Leftrightarrow 0 = b(c_1 - c_2) - (r_2 - r_1) \Leftrightarrow (r_2 - r_1) = b(c_1 - c_2).$$

Рассмотрим три случая.

<u>Случай 1</u>: $c_1 - c_2 < 0$.

В этом случае равенство невозможно, так как получается, что неотрицательное число $(r_2 - r_1)$ равно произведению положительного и отрицательного числа.

<u>Случай 2</u>: $c_1 - c_2 = 0$.

В этом случае равенство возможно, только если $r_2 - r_1 = 0$. Тогда $c_1 = c_2$ и $r_2 = r_1$. А это противоречит сделанному предположению.

<u>Случай 3</u>: $c_1 - c_2 > 0$.

Так как $c_1 - c_2 > 0$ и $b \neq 0$, то $r_2 - r_1$ не может быть равно 0.

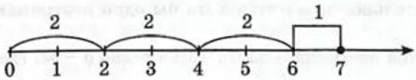
Тогда равенство $(r_2 - r_1) = b(c_1 - c_2)$ означает, что $(r_2 - r_1)$ делится на b. Так как $r_2 < b$, то $r_2 - r_1 < b$. А значит, делимое меньше делителя, что невозможно на множестве N.

Сделанное нами предположение во всех случаях привело нас к противоречию. Значит, оно неверно и мы доказали единственность представления натурального числа a в виде $a = bc + r$, где $r < b$ ($b \in N$, c, $r \in N_0$).

Таким образом, нами доказано существование и единственность деления с остатком на множестве натуральных чисел. ▼

Теперь, исходя из нашего опыта, построим алгоритм деления с остатком.

Рассмотрим простейший случай деления с остатком, например, числа 7 на 2. Для того чтобы найти частное и остаток, нам, во-первых, надо найти наибольшее число, кратное 2 и не превышающее 7 (число 6), затем найти неполное частное ($6 : 2 = 3$), после этого надо найти остаток ($7 - 6 = 1$). Проверим теперь, что деление выполнено верно ($2 \cdot 3 + 1 = 7$), и, наконец, запишем ответ ($7 = 2 \cdot 3 + 1$).



Данный способ действия мы можем записать в общем виде.

Алгоритм деления с остатком натурального числа a на b

1. Найти наибольшее натуральное число k, кратное делителю b и не превышающее делимого a.
2. Разделить k на делитель b, в ответе – неполное частное c ($c \in N_0$).
3. Вычесть k из делимого a, в ответе – остаток r ($0 \leqslant r < b$).
4. Сделать проверку с помощью формулы деления с остатком ($a = bc + r$, где $0 \leqslant r < b$).
5. Записать ответ.

К **182** Запишите утверждения на математическом языке с помощью кванторов общности (∀) и существования (∃). Докажите данные утверждения.

а) Можно найти натуральное число, которое делится на 3.
б) Нечётные числа при делении на 2 дают остаток 1.
в) Имеется натуральное число, которое при делении на 24 даёт остаток 7.
г) Нет натуральных чисел, которые при делении на 38 дают остаток 45.
д) Все натуральные числа, делящиеся на 78, дают при делении на 78 остаток 0.
е) Есть простые числа, которые при делении на 2 дают остаток 1.
ж) Есть простые числа, которые делятся на 2.

183 Отметьте на числовой прямой четыре натуральных числа, которые:

а) при делении на 2 дают остаток 1;
б) при делении на 4 дают остаток 2;
в) при делении на 6 дают остаток 4;
г) при делении на 3 дают остаток 0.

Что вы замечаете? Сформулируйте и докажите свою гипотезу.

184 Заполните следующую таблицу:

Делимое	56	111	175	175		530	697
Делитель	9				7	8	
Неполное частное		10		25	31		98
Остаток			0		0	5	11

Всегда ли это можно сделать? Всегда ли ответ будет однозначным?

185 Выберите из множества A числа, равные неполному частному и остатку от деления a на b:

$A = \{1, 2, 3, 5, 7, 9, 11, 12, 14, 19, 23, 28, 31, 35\}$

а) $a = 32$, $b = 6$; в) $a = 95$, $b = 8$; д) $a = 127$, $b = 46$;
б) $a = 78$, $b = 15$; г) $a = 113$, $b = 9$; е) $a = 241$, $b = 17$.

186 Среди натуральных чисел, больших 10, найдите наименьшее натуральное число:

а) дающее остаток 1 при делении на 2;
б) дающее остаток 3 при делении на 13;
в) дающее остаток 8 при делении на 17;
г) дающее остаток 12 при делении на 26.

187 Для любого $n \in N$ определите, чему равен остаток от деления:

а) $7n + 3$ на 7; в) $10n + 6$ на 5;
б) $12n + 2$ на 2; г) $16n + 8$ на 4.

188 Некоторое натуральное число a разделили с остатком на некоторое натуральное число b. Как изменится неполное частное и остаток, если и делимое, и делитель:

а) увеличить в 2 раза; б) увеличить в 5 раз; в) увеличить в k раз ($k \in N$)?

Что вы замечаете? А что будет происходить при этом с неполным частным? Докажите соответствующее свойство.

189 Докажите:

а) Если натуральное число делится на 4, то оно не может при делении на 16 давать остаток 5.

б) Если натуральное число при делении на 18 даёт остаток 6, то оно не делится на 9.

в) Если натуральное число делится на 7, то при делении на 14 оно не может давать остаток 9.

г) Если натуральное число при делении на 60 даёт остаток 19, то оно не делится на 12.

П **190** Определите, какие из указанных величин связаны прямой пропорциональной зависимостью, а какие – обратной:

а) Масса купленного товара и его стоимость при постоянной цене.

б) Количество единиц проданного товара и его цена при постоянной выручке.

в) Скорость поезда и пройденное им расстояние при постоянном времени.

г) Скорость и время, затрачиваемое на прохождение одного и того же пути.

д) Длина прямоугольника и его площадь при неизменной ширине.

е) Общий фонд заработной платы рабочих с одинаковым постоянным окладом и количество этих рабочих.

ж) Производительность труда и время, затрачиваемое на выполнение одной и той же работы.

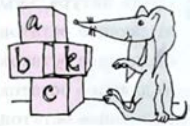
з) Скорость и время наполнения одного и того же бассейна.

191 При каких значениях переменных данные выражения имеют смысл? Упростите их при допустимых значениях переменных.

а) $-ab : (-b)$; в) $(nx - ny) : n$; д) $(ax - bx - cx) : x$;

б) $7n \cdot (-9m) : (-21n)$; г) $(cx - c) : (x - 1)$; е) $(am - bm) : (a - b)$.

192 Решите уравнение:



а) $6(5y - 30) = 5(y - 1)$;

б) $(3z + 2) : 4 = (z - 1) : 3$;

в) $(5x + 4) : 3 - 2 = 0{,}5(3x - 7)$;

г) $(7m - 2) : 2 - 0{,}8(m + 3) + 6 = 1{,}5(m + 2)$.

193 а) Художник нарисовал известные пирамиды, сохранив их пропорции. Так, современную пирамиду, находящуюся во Франции у входа в Лувр, высота которой равна 21,7 м, он изобразил пирамидой высотой 2 дм. Высота пирамиды Цестия, находящейся в Риме, на его рисунке получилась равной 3,3 дм.; высота крупнейшей в Мексике пирамиды Чолула – 7,1 дм, а известной египетской пирамиды Хеопса – 12,8 дм. Определите масштаб рисунка художника и реальную высоту нарисованных художником пирамид с точностью до единиц метра.

б) Какой была бы с точностью до десятых метра высота горы Казбек на рисунке художника из пункта а), если её реальная высота равна 5034 м?

в) Прямоугольный участок земли изображен на плане, выполненном в масштабе 1:5000. Чему равна реальная площадь этого участка, если бо́льшая сторона прямоугольника равна на плане 7,5 см, а меньшая составляет $\frac{3}{5}$ от большей?

г) Прямоугольный участок земли, площадь которого равна 2700 м^2, изображен на плане. Известно, что меньшая сторона прямоугольника равна $\frac{3}{4}$ большей, а бо́льшая равна на плане 5 см. Чему равен масштаб данного плана?

194 а) Для экспедиции на Северный полюс был сделан запас продовольствия на 90 дней из расчёта на человека в день 1 кг продовольствия. Однако при транспортировке $\frac{1}{5}$ запаса была испорчена. На сколько дней хватит оставшегося запаса продовольствия, если количество полярников уменьшится на $\frac{3}{8}$ от первоначального состава экспедиции, а ежедневная порция увеличится на 200 г?

б) В течение апреля ежедневно горели 8 лампочек по 6 часов. За этот месяц за электроэнергию заплатили 864 р. Предполагая, что каждая лампочка тратит одинаковое количество электроэнергии в час, рассчитайте, в течение скольких дней в том же помещении горели 10 лампочек по 7 часов в сутки, если стоимость электроэнергии не изменилась и было заплачено 1050 р.

D **195** Запишите утверждения на математическом языке с помощью кванторов общности ($\forall$) и существования ($\exists$). Докажите данные утверждения.

а) Некоторые натуральные числа четные.
б) Все натуральные числа, делящиеся на 9, делятся на 3.
в) Некоторые натуральные числа, делящиеся на 3, делятся на 9.
г) Остаток при делении натурального числа на 2 равен либо 0, либо 1.

196 Отметьте на числовой прямой четыре натуральных числа, которые:
а) при делении на 5 дают остаток 3; б) при делении на 9 дают остаток 6.
В чём особенность их расположения?

197 Среди натуральных чисел, больших 20, найдите наименьшее натуральное число, которое: а) при делении на 12 даёт остаток 8; б) при делении на 31 даёт остаток 3.

198 Для любого $m \in N$ определите, чему равен остаток от деления:

а) $15\ m + 4$ на 15; б) $28m + 12$ на 4; в) $9m + 4$ на 3; г) $18m + 9$ на 3.

199 Докажите:
а) Если натуральное число делится на 7, то оно не может при делении на 28 давать остаток 9.
б) Если натуральное число при делении на 64 даёт остаток 31, то оно не делится на 8.

200 При каких значениях переменных данные выражения имеют смысл? Упростите их при допустимых значениях переменных.

а) $-4cda : (-32cd)$; б) $(ax - ay) : (ax)$; в) $(xm - ym) : (nx - ny)$.

201 Решите уравнение:

а) $5(4y - 14) = 7(y + 3)$; б) $0{,}25(4x + 8) - (3x + 10) + 7 = 2{,}5(2x - 6)$.

202 Антон и Ксюша в связи с расширением производства запланировали арендовать новое помещение для своей компании. Проведя предварительный анализ базы данных сдаваемых в аренду помещений, они выбрали из них два наиболее интересных. План первого помещения был выполнен в масштабе 1 : 500. Измерения показали, что на плане площадь арендуемого помещения прямоугольной формы равна 42 см². План второго помещения был выполнен в масштабе 1 : 200, а его площадь на плане – 250 см². Ставка арендной платы за первое помещение составила 1000 р. в год за 1 м², а за второе – 1200 р. в год за 1 м². За какое из этих помещений ежемесячная арендная плата получилась меньшей?

203 Антон с Ксюшей решили принять участие в выставке «Продэкспо». Организаторы выставки сообщили, что выставку ежедневно будет посещать одинаковое количество людей. Узнав у организаторов выставки ожидаемое ежедневное количество посетителей и зная, что выставка будет проходить 5 дней, Антон с Ксюшей закупили подарки из расчёта 20 р. на человека в день. Однако $\frac{1}{10}$ часть подарков оказалась испорчена. На сколько дней хватит Антону с Ксюшей закупленных подарков, если они будут дарить подарки на сумму на 10 р. большую, чем планировали, и количество посетителей в день будет на $\frac{1}{5}$ больше ожидаемого?

C **204*** Можно ли найти два натуральных числа, сумма и произведение которых нечётны?

2.1.4. Алгоритм Евклида

Порядок освобождает мысль.

Рене Декарт (1596–1650),
французский математик, философ и физик

Теорема о делимости, доказанная в предыдущем пункте, помогает не только найти результат деления с остатком одного натурального числа на другое, но, например, может быть использована при решении такой задачи, как нахождение наибольшего общего делителя двух натуральных чисел. Но сначала вспомним некоторые уже известные нам определения.

Определение 1. Число c называют ***общим делителем*** двух натуральных чисел a и b, если оно является делителем и для a, и для b.

Множество общих делителей чисел a и b является конечным, так как ни один из общих делителей не может быть больше, чем наименьшее из чисел a и b. Значит, среди общих делителей двух натуральных чисел всегда можно найти наибольший.

Определение 2. Наибольший из общих делителей натуральных чисел a и b называют их ***наибольшим общим делителем***.

Наибольший общий делитель чисел a и b будем, как и ранее, обозначать НОД $(a; b)$.

Аналогично определяется НОД трёх и более натуральных чисел.

Число 0 делится на любое натуральное число. Поэтому логичным расширением определения НОД на случай, когда одно из чисел равно 0, является следующее определение.

Определение 3. НОД $(a; 0) = a$ $(a \in N)$.

Нам известен также следующий *алгоритм нахождения НОД* натуральных чисел:
1. Разложить каждое число на простые множители.
2. Найти все общие простые множители этих чисел и записать их произведение.

Как вы уже знаете, процесс нахождения НОД по данному алгоритму может быть очень трудоёмким. Попробуем, например, решить таким способом следующую задачу.

Задача. Найти наибольший общий делитель чисел 71 004 и 154 452.

Решение:

71 004	2	154 452	2	$71\,004 = 2^2 \cdot 3 \cdot 61 \cdot 97$
35 502	2	77 226	2	
17 751	3	38 613	3	$154\,452 = 2^2 \cdot 3 \cdot 61 \cdot 211$
5917	61	12 871	61	
97	97	211	211	НОД $(71\,004; 154\,452) = 2^2 \cdot 3 \cdot 61 = 732$
1		1		

Таким образом, чтобы решить данную задачу, нам потребовалось не только делить многозначные числа, но и искать их простые делители в тех случаях, когда известные нам признаки делимости применить невозможно.

Так, чтобы найти простой делитель 61 чисел 5917 и 154 452, надо проверить, что эти числа не делятся на 17 простых чисел от 2 до 59. А чтобы доказать, что число 211 – простое, надо проверить, что оно не делится на все простые числа от 2 до 13.

Трудоёмкость решения задач такого типа побудила математиков к созданию упрощающего алгоритма. Данный алгоритм был назван в честь Евклида, жившего в III веке до нашей эры, хотя способ нахождения НОД с помощью этого алгоритма был известен математикам гораздо раньше.

Алгоритм Евклида основан на следующем утверждении.

Теорема. Если $a = bc + r$, то НОД $(a; b)$ = НОД $(b; r)$.

Доказательство:

Для доказательства теоремы выясним, какими свойствами обладают общие делители чисел a, b и чисел b, r.

1) Докажем сначала, что всякий общий делитель чисел a и b является одновременно делителем числа r.

Пусть d является общим делителем a и b. Это значит, что существуют такие натуральные числа k и l, что $a = kd$, $b = ld$.

Подставим данные выражения в формулу деления a на b с остатком:

$$a = bc + r \Leftrightarrow kd = ldc + r \Leftrightarrow r = kd - ldc \Leftrightarrow r = d(k - lc).$$

Из последнего равенства по определению делимости следует, что число d является делителем числа r.

2) Теперь докажем, что всякий общий делитель чисел b и r является одновременно делителем числа a.

Пусть q является общим делителем b и r. Это значит, что существуют такие натуральные числа m и n, что $b = mq$, $r = nq$.

Как и в предыдущем случае, подставим данные выражения в формулу деления a на b с остатком:

$$a = mqc + nq \Leftrightarrow a = q(mc + n).$$

Последнее равенство означает, что q является также делителем a.

Таким образом, мы получили, что множество общих делителей a и b совпадает с множеством общих делителей b и r. Следовательно, совпадает и их наибольший общий делитель, что и требовалось доказать. ▼

Из доказанного утверждения следует, что вместо того, чтобы искать НОД чисел a и b, можно искать НОД меньших чисел – b и r, где r – остаток от деления a на b. причём процедуру поиска меньших чисел с тем же НОД можно продолжать далее.

1. Делим a на b с остатком	$a = bc + r$, где $r < b$
2. Делим b на r с остатком	$b = rc_1 + r_1$, где $r_1 < r$
3. Делим r на r_1 с остатком	$r = r_1c_2 + r_2$, где $r_2 < r_1$
4. Делим r_1 на r_2 с остатком	$r_1 = r_2c_3 + r_3$, где $r_3 < r_2$
И т. д.	

Полученные остатки r, r_1, r_2 ... – это целые неотрицательные числа, которые последовательно уменьшаются:

$$b > r > r_1 > r_2 > ... \geqslant 0.$$

И так как число целых неотрицательных чисел, меньших b, конечно, то на некотором шаге остаток от деления r_n на r_{n+1} будет равен нулю:

$$r_n = r_{n+1} c_{n+2} + 0.$$

В силу доказанной выше теоремы и определения НОД:

НОД $(a; b)$ = НОД $(b; r)$ = НОД $(r; r_1)$ = НОД $(r_1; r_2)$ = ... = НОД $(r_{n+1}; 0) = r_{n+1}$.

Значит, *НОД чисел a и b равен последнему ненулевому остатку* в указанной цепочке делений.

Посмотрим, как полученный вывод может помочь, например, в нахождении НОД чисел 71 004 и 154 452, о которых говорилось выше. Выполним деление с остатком сначала данных чисел, а затем последовательно – делителей и полученных остатков:

$154\,452 = \underline{71\,004} \cdot 2 + \underline{12\,444}$,

$71\,004 = \underline{12\,444} \cdot 5 + \underline{8784}$,

$12\,444 = \underline{8784} \cdot 1 + \underline{3660}$,

$8784 = \underline{3660} \cdot 2 + \underline{1464}$,

$3660 = \underline{1464} \cdot 2 + \underline{732}$,

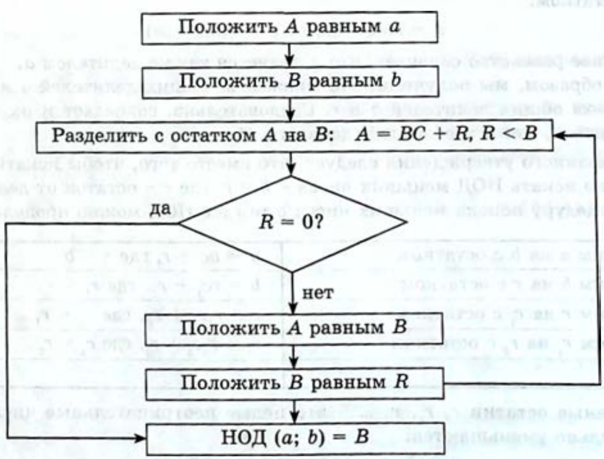
$1464 = \underline{732} \cdot 2 + 0$.

Значит, НОД (71 004; 154 452) = 732.

Понятно, что данный способ поиска НОД является менее трудоёмким, ведь здесь для получения ответа операцию деления потребовалось выполнить всего 6 раз, а используя прежний алгоритм, её надо выполнить 51 раз.

Запишем теперь алгоритм Евклида в виде блок-схемы.

Алгоритм Евклида
нахождения НОД двух натуральных чисел a и b ($a > b$)



К **205** Прочитайте утверждения. Докажите или опровергните их (a, b, $c \in N$ и $a > b$).

а) $a \vdots c$ и $b \vdots c \Rightarrow (2a + 3b) \vdots c$;
б) $a \not\vdots c$ и $b \not\vdots c \Rightarrow (2a + 3b) \not\vdots c$;
в) $a \vdots b \Rightarrow$ НОД $(a, b) = b$;
г) $(a - b) \not\vdots c \Rightarrow a \not\vdots c$ или $b \not\vdots c$.

206 Найдите НОД чисел a и b наиболее рациональным способом:

а) $a = 6$, $b = 15$;
б) $a = 39$, $b = 390$;
в) $a = 4$, $b = 17$;
г) $a = 527$, $b = 528$;
д) $a = 2^3 \cdot 3 \cdot 5^2$, $b = 2^2 \cdot 5 \cdot 17$;
е) $a = 851$, $b = 943$.

207 С помощью алгоритма Евклида найдите НОД чисел a и b:

а) $a = 143$, $b = 247$;
б) $a = 187$, $b = 319$;
в) $a = 451$, $b = 533$;
г) $a = 307$, $b = 945$;
д) $a = 391$, $b = 867$;
е) $a = 2581$, $b = 4005$.

208 Представьте дробь в несократимом виде:

а) $\frac{545}{4578}$; б) $\frac{1067}{1552}$; в) $\frac{3201}{5335}$; г) $\frac{1085}{20\,398}$.

П **209** Сколько среди натуральных чисел от 1 до 50 включительно таких, которые:

а) делятся на 9;
б) делятся на 5;
в) делятся на 9 и на 5;
г) делятся на 5, но не делятся на 9;
д) делятся на 9, но не делятся на 5;
е) не делятся ни на 9, ни на 5?

210 Найдите все делители числа a, которые кратны числу b:

а) $a = 70$, $b = 5$; б) $a = 72$, $b = 12$; в) $a = 1026$, $b = 18$.

211 Найдите числа x и y, если известно, что:

а) $x : y = 7 : 3$ и НОД $(x, y) = 4$;
б) $x : y = 5 : 6$ и НОД $(x, y) = 7$;
в) $x : y = 5 : 8$ и НОД $(x, y) = 12$;
г) $x : y = 11 : 7$ и НОД $(x, y) = 21$.

212 а) Три магазина закупили одинаковое количество банок варенья. Первый магазин купил банки в упаковках по 60 штук, второй – в упаковках по 70 штук, а третий – в упаковках по 15 штук. Сколько банок варенья закупил каждый магазин, если общее количество купленных банок варенья было меньше 1500 штук?

б) Длина кольцевой беговой дорожки стадиона равна 400 м. При организации эстафеты точку старта и финиша решили разместить в одном месте, а длину каждого этапа сделать равной 150 м. Какой будет минимальная длина дистанции эстафеты и сколько в этом случае в ней будет этапов?

213 Запишите с помощью модуля расстояние между точками числовой прямой с координатами a и b. Вычислите расстояние при указанных значениях переменных:

а) $a = 3$, $b = 5$;
б) $a = 7$, $b = 2$;
в) $a = -1$, $b = -2$;
г) $a = -2$, $b = -5$;
д) $a = -8$, $b = 4$;
е) $a = 9$, $b = -5$.

214 Отметьте на числовой прямой все значения x, для которых:

а) $|x| \leqslant 2$; б) $|x| \geqslant 3$; в) $|x - 1| \geqslant 5$; г) $|x - 2| \leqslant 7$.

215 Известно, что точки A и B имеют соответственно координаты (–2) и 16. Найдите координату точки C, если известно, что:

а) $AC = 2BC$; б) $AC = 3BC$; в) $AC = 5BC$; г) $AC = 0{,}5BC$.

216 Упростите выражение:

а) $17x - (3y + z) + (5z - x) - (2x - 8y)$; б) $1{,}9c + 0{,}4b - (1{,}2a - 2{,}6b) - (0{,}8a - 1{,}1c)$;

в) $2(8x - 5) + 4(3x - 7) - 3(9x - 11)$; г) $3{,}7a + 2(1{,}3a - 0{,}7b) - 4(-0{,}1b + 1{,}7a)$.

217 а) В первом и втором кварталах обувная фабрика продала 768 тыс. пар обуви, при этом во втором квартале было продано на 156 тыс. пар обуви меньше, чем в первом. Сколько пар обуви было продано в каждом из этих кварталов?

б) Русские цари Петр I и Иван Грозный вместе царствовали 80 лет, при этом Петр I находился на царском престоле на 6 лет дольше. Сколько лет правил страной каждый из этих царей?

Д **218** С помощью алгоритма Евклида найдите НОД чисел a и b:

а) $a = 5075$, $b = 22\,127$; б) $a = 16\,027$, $b = 160\,787$.

219 Представьте дробь в несократимом виде: а) $\dfrac{3031}{173\,200}$; б) $\dfrac{20\,329}{282\,503}$.

220 Запишите с помощью модуля расстояние между точками числовой прямой с координатами a и b. Вычислите расстояние при указанных значениях переменных:

а) $a = 7$, $b = 25$; б) $a = -11$, $b = -9$; в) $a = 15$, $b = -4$.

221 Упростите выражение:

а) $4(x - 2y) - 2(3x + y) - (-x - 5y)$; б) $3{,}2a - 3(-0{,}6a + 1{,}2b) + 1{,}5(0{,}4a - 1{,}6b)$.

222 а) Антон и Ксюша для трех филиалов своей пончиковой компании купили одинаковое количество муки. В первый филиал мука поступила расфасованной в мешки по 30 кг, во второй – по 25 кг, а в третий – по 35 кг. Сколько муки Антон и Ксюша закупили для каждого филиала, если общее количество купленной муки было меньше 4 т?

б) Миша и Марина, друзья Антона и Ксюши, решили инвестировать в их пончиковую компанию 158 тыс. р., при этом инвестиции Миши были на 42 тыс. р. больше. Какой инвестиционный доход получит через год Миша, а какой Марина, если инвестиции были сделаны под 7% годовых?

223 Найдите числа x и y, если известно, что:

а) $x : y = 5 : 2$ и НОД $(x, y) = 3$; б) $x : y = 4 : 3$ и НОД $(x, y) = 6$.

С **224*** Приходя на очередное заседание Государственной думы, депутаты приветствуют друг друга, обмениваясь рукопожатиями. Известно, что каждый из депутатов сделал нечётное число рукопожатий. Докажите, что число депутатов чётное.

225* Длина дороги между двумя домами равна 3 км. В первом доме живут 78 школьников, а во втором – 92. Где на дороге между этими двумя домами надо построить школу, чтобы общее расстояние, которое будут проходить все 170 школьников по дороге из дома в школу, было наименьшим?

226* Могут ли 17 шестерёнок, сцепленных в замкнутый круг, вращаться одновременно?

§ 2. Развитие теории делимости*

2.2.1. Делимость целых чисел

Кто не ожидает неожиданного, тот не найдёт сокровенного и трудно находимого.

Гераклит Эфесский
(ок. 544 г. до н.э. – ок. 483 г. до н.э.),
древнегреческий философ

Когда мы с вами раньше говорили о делимости чисел, речь всегда шла о натуральных числах. Но мы уже знаем, что кроме натуральных чисел, называемых также положительными целыми числами, существуют числа, им противоположные, – отрицательные целые числа и 0. Все вместе эти числа образуют множество Z целых чисел:

$$Z = \{..., -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, ...\}.$$

Мы уже умеем выполнять арифметические действия с целыми числами и знаем, что операция деления на множестве Z выполнима не всегда. Поэтому естественно встают вопросы:

- Можем ли мы распространить наши знания о делимости натуральных чисел на более широкое множество – множество целых чисел?
- Как в этом случае понимать термины «делится», «не делится», «делитель», «кратное», «частное», «остаток»?
- Как разделить одно целое число на другое с остатком?

Заметим, что эти вопросы в данном случае мы ставим исходя не из какой-либо практической задачи, а из внутренней логики развития самой математики, стремления расширить свои возможности в использовании имеющихся знаний, наконец, из простого любопытства, желания найти ответы на «неожиданные» вопросы:

- Откуда взялся запрет, что «делить на 0 нельзя», который мы постоянно повторяем вот уже много лет?
- Может быть, все-таки иногда делить на 0 можно, хотя бы с остатком?
- А что получится, если число (-7) разделить с остатком на (-2)?

Отвечая на аналогичные вопросы, мы в своё время расширили множество натуральных чисел до множества целых чисел, получили способы выполнения арифметических действий с отрицательными числами, ввели понятие степени. Так *развивается*, казалось бы, не связанная ни с какими реальными процессами, отвлечённая математическая теория. Но при этом удивительным образом оказывается, что расширяются и наши возможности в решении именно практических задач.

При построении новой математической теории существует *фундаментальный принцип*, которому необходимо следовать, чтобы развитие не превратилось в свою противоположность – разрушение. Этот принцип заключается в следующем: *определения новых понятий и их свойства не должны противоречить ранее введённым понятиям и доказанным утверждениям.* Без выполнения данного требования теория будет противоречива, а значит – нежизнеспособна.

Итак, исходя из сформулированного принципа, попробуем выяснить, как надо изменить основные определения делимости, если мы будем рассматривать не натуральные числа, а целые.

Нам известно, что результат деления одного целого числа на другое, как и в случае натуральных чисел, не всегда будет числом целым. Поэтому для целых чисел, как и для натуральных, возникают два вида деления.

I. Деление без остатка.

Можем ли мы распространить определение делимости натуральных чисел на множество целых чисел без всяких изменений? Другими словами, верным ли будет на множестве Z высказывание:

$$\forall\, a, b \in Z,\ a \,\vdots\, b \ \Leftrightarrow\ \exists\, c \in Z : a = bc\ ?$$

Данное высказывание будет верным, ведь именно так мы и определяли действие деления для целых чисел, но... при условии, что $b \neq 0$. Посмотрим, откуда же возникает такое ограничение.

Попробуем разделить число a на число $b = 0$. Тогда, чтобы данное нами определение было общим, нам надо подобрать такое число c, чтобы $c \cdot 0 = a$.

Возможны два случая: $a = 0$ и $a \neq 0$.

1. Если $a = 0$, то мы получим равенство $c \cdot 0 = 0$, которое верно для любого c. Поэтому деление $0 : 0$ не определено однозначно: его результатом может быть любое целое число. А значит, решение любых задач, примеров, уравнений теряет смысл – ведь в ответе без всяких вычислений сразу можно записать любое число.

2. Если $a \neq 0$, то равенство $c \cdot 0 = a$ не может быть выполнено ни для одного значения c, так как слева стоит нуль, а справа – не нуль.

Следовательно, деление на нуль либо неопределённо, либо невозможно. В итоге мы и получаем известное нам правило: «На нуль делить нельзя».

Итак, определение делимости целых чисел должно отличаться от аналогичного определения для натуральных чисел тем, что в нём дополнительно необходимо указать новое условие $b \neq 0$.

Таким образом, мы приходим к следующему определению.

Определение 1. Целое число a ***делится*** (без остатка) на целое число b ($b \neq 0$), если существует такое целое число c, что $a = bc$. Числа b и c – ***делители*** числа a, число a – ***кратное*** чисел b и c.

Заметим, что это определение полностью согласуется с ранее введённым в п. 2.1.1 определением делимости натуральных чисел. Более того, доказательство теорем 1–9 из этого пункта для целых чисел проводится аналогично, а значит, все известные нам свойства делимости распространяются и на множество Z (при условии, что делитель $b \neq 0$).

II. Деление с остатком.

Для случая деления без остатка мы получили, что распространить наши знания можно, просто заменив в определении «натуральные числа» на «целые» и исключив случай $b = 0$. Можно ли так же поступить в случае деления с остатком?

Рассмотрим конкретный пример, заинтересовавший нас ранее. Разделим с остатком число (-7) на (-2), используя формулу деления с остатком, аналогичную формуле для натуральных чисел. Для этого представим число $a = -7$ в виде:

$$-7 = -2c + r, \text{ где } r < -2 .$$

Однако здесь мы сталкиваемся с проблемой неоднозначности выбора пар чисел c и r. Действительно,

при $c = 2$, $r = -3$ верно, что $-7 = -2 \cdot 2 + (-3)$, где $-3 < -2$;

при $c = 1$, $r = -5$ верно, что $-7 = -2 \cdot 1 + (-5)$, где $-5 < -2$;

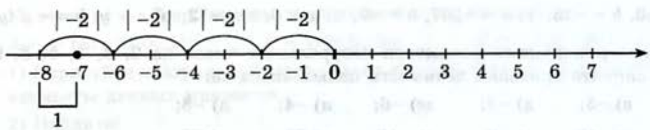
при $c = 0$, $r = -7$ верно, что $-7 = -2 \cdot 0 + (-7)$, где $-7 < -2$, и т. д.,

а значит, действие деления с остатком теряет смысл, ведь каждый человек при делении будет получать свой ответ.

Значит, нам надо изменить каким-то образом определение. Но мы не можем изменять его произвольно, ведь новое определение не должно противоречить введенному ранее определению для натуральных чисел.

При делении натуральных чисел под остатком мы фактически понимали расстояние от делимого a до наибольшего числа, кратного делителю b и не превышающего a, что хорошо видно на рисунке на с. 60.

В случае деления с остатком (-7) на (-2) наибольшим целым числом, кратным (-2) и не превышающим (-7), является число (-8), а расстояние от (-8) до (-7) равно $|-8 - (-7)| = 1$.



При этом расстояние между двумя последовательными числами, кратными (-2), равно $|-2|$, и поэтому для остатка возникает требование:

$$0 \leqslant r < |-2|.$$

Таким образом, в результате деления с остатком мы получаем однозначный ответ, который не противоречит аналогичному определению для натуральных чисел:

$$-7 = -2 \cdot 4 + 1, \text{ где } 0 \leqslant 1 < |-2|.$$

Итак, в определении деления с остатком на множестве целых чисел изменяется требование не только к делителю, но и к остатку.

Определение 2. *Разделить число a на число b ($b \neq 0$) с остатком* значит представить число a в виде

$$a = bc + r, \text{ где } 0 \leqslant r < |b| \ (a, b, c \in Z;\ b \neq 0;\ r \in N_0).$$

Полученное определение согласуется с аналогичным определением для натуральных чисел. Оно позволяет выполнить деление с остатком для любых целых чисел, и его результат всегда будет однозначным.

Доказательство утверждения о существовании и единственности деления с остатком на множестве целых чисел (***теоремы о делимости целых чисел***) аналогично доказательству теоремы о делимости для натуральных чисел, и мы не будем его здесь приводить.

Соответственно изменяется и алгоритм деления с остатком целых чисел.

Алгоритм деления с остатком целых чисел a и b ($b \neq 0$)

1. Найти наибольшее целое число k, кратное делителю b и не превышающее делимого a.
2. Разделить k на делитель b, в ответе – неполное частное c ($c \in Z$).
3. Вычесть k из делимого a, в ответе – остаток r ($0 \leqslant r < |b|$).
4. Сделать проверку по формуле деления с остатком ($a = bc + r$, где $0 \leqslant r < |b|$).
5. Записать ответ.

К **227** Может ли получиться так, что равны между собой:

а) делимое и частное; г) делимое и остаток;
б) делимое и делитель; д) делитель и остаток;
в) делитель и частное; е) неполное частное и остаток?

В случаях, когда такая ситуация возможна, приведите пример, а если это невозможно, то дайте соответствующие объяснения.

228 Делится ли a на b? Если a не делится на b, объясните почему.

а) $a = -32$, $b = 8$; в) $a = -45$, $b = 7$; д) $a = -4$, $b = 0$; ж) $a = -x$, $b = x$ ($x \in N$);
б) $a = 50$, $b = -25$; г) $a = -207$, $b = -9$; е) $a = 0$, $b = -12$; з) $a = y$, $b = -y$ ($y \in Z$).

229 Пользуясь признаками делимости натуральных чисел на 2, 3, 4, 5, 8, 9, 25, сформулируйте признаки делимости целых чисел на:

а) 2; в) –5; д) –3; ж) –6; и) –4; л) –8;
б) –2; г) –10; е) –9; з) –18; к) 25; м) 75.

230 Не вычисляя частного, определите, делится ли число a на b:

а) $a = -78\ 958$, $b = -2$; г) $a = -413\ 208$, $b = 9$; ж) $a = 249\ 564$, $b = -8$;
б) $a = -204\ 016$, $b = 3$; д) $a = -708\ 264$, $b = -6$; з) $a = 756\ 000$, $b = -12$;
в) $a = 1\ 283\ 945$, $b = -5$; е) $a = -325\ 415$, $b = -4$; и) $a = -33\ 333$, $b = -15$.

231 Отметьте на числовой прямой целые числа, которые:

а) при делении на 4 дают остаток 3; в) при делении на (–4) дают остаток 3;
б) при делении на 5 дают остаток 2; г) при делении на (–5) дают остаток 2.

Что вы замечаете? Сформулируйте и докажите свои гипотезы.

232 Найдите неполное частное и остаток при делении на 7 следующих чисел:

а) 0; в) 1; д) 5; ж) 14; и) –32; л) 75;
б) 3; г) –1; е) –5; з) –14; к) 32; м) –75.

233 Найдите неполное частное и остаток при делении на (–7) следующих чисел:

а) 0; в) 1; д) 5; ж) 14; и) –32; л) 75;
б) 3; г) –1; е) –5; з) –14; к) 32; м) –75.

234 Для любого $a \in Z$ определите, чему равен остаток от деления:

а) $-9a + 4$ на 9; б) $17a + 15$ на -17; в) $-12a + 8$ на -6; г) $-25a + 10$ на 5.

235 Убедитесь в истинности высказывания:

а) Если целое число a не делится на (-7), то число $4a$ не делится на (-7).

б) Если целое число b делится на (-4), то число $2b$ делится на (-4).

в) Если число $9c$ делится на (-5), то число c делится на (-5) $(c \in Z)$.

г) Если число $72d$ делится на (-9), то число d не всегда делится на (-9) $(d \in Z)$.

д) Если целое число делится на (-5), то оно не может при делении на (-10) давать остаток 7.

е) Если целое число при делении на (-9) даёт остаток 8, то оно не делится на (-3).

ж) Если целое число делится на (-7), то при делении на (-21) оно не может давать остаток 20.

з) Если целое число при делении на (-45) даёт остаток 39, то оно не делится на (-15).

П **236** Составьте список элементов данных множеств, заданных характеристическим свойством:

а) $A = \{x;\ x \in N\text{: } -1 \leqslant x \leqslant 4\frac{1}{3}\}$; в) $A = \{a;\ a \in N_0\text{: } -3 \leqslant a < 5\}$;

б) $A = \{y;\ y \in Z\text{: } -2 < y \leqslant 2{,}4\}$; г) $A = \{b;\ -7 < b < 14$ и $b = 5n + 4;\ n \in Z\}$.

237 Множества A, B и C заданы перечислением их элементов:

$A = \{-12; -5; 0; 1\}$; $B = \{-8; 0; 3\}$; $C = \{-12; -8; 1; 4\}$.

1) Нарисуйте диаграмму Эйлера–Венна для множеств A, B и C и отметьте на ней элементы данных множеств.

2) Найдите:

а) $A \cap B$; в) $B \cup C$; д) $(A \cup B) \cap C$; ж) $B \cap C \cap A$;

б) $A \cup B$; г) $A \cap C$; е) $B \cup (A \cap C)$; з) $A \cup B \cup C$.

238 Нарисуйте диаграмму Эйлера–Венна для множеств A и B. Найдите их пересечение и объединение:

а) $A = \{a\text{: } a = 3n + 2;\ n \in N;\ 2 \leqslant n < 5\}$; б) $A = \{a\text{: } a = -5n + 1;\ n \in N;\ 3 \leqslant n < 6\}$;

$B = \{b\text{: } b = 2m + 1;\ m \in N;\ 1 < m \leqslant 6\}$; $B = \{b\text{: } b = 7m + 2;\ m \in N;\ 4 < m < 7\}$.

239 Решите уравнение:

а) $3\frac{1}{8} : \left(x - 4\frac{7}{24}\right) = \frac{17}{18} + 1\frac{5}{6}$; в) $\left(4\frac{1}{5} : x + 1\frac{1}{3}\right) : 2\frac{4}{35} - \frac{4}{5} = 1\frac{8}{15}$;

б) $24\frac{1}{14} + 8\frac{3}{7} = \left(x : 1\frac{1}{9}\right) \cdot 5\frac{5}{12}$; г) $4\frac{1}{5} : 1\frac{1}{5} = 2\frac{3}{4} \cdot 4 - 1\frac{7}{18}x$.

240 Найдите среднее арифметическое указанных чисел:

а) 7,5 и 3,8; б) 12,8; 39,4 и 72,6; в) 6,3; 13,2; 27,4 и 76,9.

241 а) Яхта при движении по реке прошла расстояние от города A до города B за 9 часов. На обратный путь ей потребовалось 14 часов. Найдите собственную скорость движения яхты, если скорость течения реки равнялась 3 км/ч. Найдите с точностью до сотых км/ч среднюю скорость движения яхты.

б) Расстояние от Твери до Ульяновска по водному пути составляет 1485 км. За сколько времени проплывёт теплоход путь от Твери до Ульяновска и обратно, если собственная скорость теплохода будет равна 25 км/ч, средняя скорость течения реки составит 10% от скорости теплохода, а остановки составят 20% от всего времени движения?

в) По течению реки плывёт плот. Его догоняет катер. Собственная скорость катера равна 14,5 км/ч. Через сколько времени катер догонит плот, если в данный момент расстояние между ними 29 км?

г) Два теплохода плывут по реке навстречу друг другу. Собственная скорость первого теплохода равна 27 км/ч, а второго – 31,5 км/ч. Через сколько времени они встретятся, если в данный момент расстояние между ними 234 км?

242 а) Теплоход плывёт без остановок из пункта A в пункт B в течение двух суток, а обратно – в течение трех суток. Сколько времени будет плыть плот из A в B?

б) Из города A против течения реки вышел катер с постоянной собственной скоростью, равной 15 км/ч. Через некоторое время из города B по течению реки вышла лодка и встретила катер, пройдя половину расстояния, которое было между катером и лодкой после начала движения лодки. Чему была равна собственная скорость лодки, если скорость течения реки 2 км/ч?

Д **243** Отметьте на числовой оси целые числа, которые:

а) при делении на 3 дают остаток 2; б) при делении на (–6) дают остаток 4.

244 Найдите неполное частное и остаток при делении на (–5) следующих чисел:

а) 0; б) 12; в) 3; г) –4; д) 39; е) –25.

245 Докажите:

а) Если целое число a не делится на (–4), то число $3a$ не делится на (–4).

б) Если целое число b делится на (–8), то число $3b$ делится на (–8).

в) Если целое число делится на (–2), то оно не может при делении на (–8) давать остаток 3.

г) Если целое число при делении на (–3) даёт остаток 2, то оно не делится на (–27).

246 Составьте список элементов множеств A и B, заданных характеристическим свойством. Найдите объединение и пересечение множеств A и B. Постройте диаграмму Эйлера–Венна и отметьте на ней все элементы данных множеств.

$A = \left\{x\colon x \in Z;\ -3 < x \leqslant 2\frac{1}{4}\right\}$; $B = \{y\colon y = 2n + 1;\ n \in N;\ 1 \leqslant n < 4\}$.

247 Решите уравнение:

а) $2\frac{5}{7} : \left(2x - 5\frac{3}{7}\right) = \frac{5}{6} + 3\frac{11}{12}$; б) $13\frac{1}{16} - 7\frac{5}{32} = \left(x : 2\frac{7}{9}\right) \cdot 6\frac{9}{16}$.

248 Найдите среднее арифметическое указанных чисел:

а) 28,1; 36,7 и 4,35; б) 8,9; 17,3; 8,52 и 1,4.

249 а) Для организации корпоративного праздника москвичи Антон и Ксюша решили арендовать яхту и проплыть на ней до Костромы и обратно по реке. Расстояние между Москвой и Костромой составляет по реке 594 км. Сколько времени будет продолжаться это мероприятие, если собственная скорость яхты равна 20 км/ч, средняя скорость течения реки составляет 10% от собственной скорости яхты, а время на стоянки запланировано в размере 25% от времени движения яхты?

б) Пончиковая компания Антона и Ксюши выпустила в январе 1250 пончиков, в феврале – на 3128 пончиков больше, чем в январе, в марте – 5696 пончиков, в апреле – на 2044 пончика меньше, чем в марте, в мае – 9456 пончиков, а в июне – на 1308 пончиков больше, чем в мае. Чему равен среднемесячный выпуск пончиков за эти шесть месяцев?

250 а) Найдите значения выражений:

Е $\dfrac{254 \cdot 399 - 145}{254 + 399 \cdot 253}$ **Н** $333 \cdot \left(\dfrac{71}{111\,111} + \dfrac{573}{222\,222} - \dfrac{2}{3 \cdot 7 \cdot 37}\right)$

Й $182 \cdot \left(\dfrac{1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{9} + \frac{1}{27}}{2 + \frac{2}{3} + \frac{2}{9} + \frac{2}{27}} : \dfrac{4 - \frac{4}{7} + \frac{4}{49} - \frac{4}{343}}{1 - \frac{1}{7} + \frac{1}{49} - \frac{1}{343}}\right) \cdot \dfrac{80\,808\,080}{91\,919\,191}$

б) Расположите ответы примеров в порядке возрастания, сопоставьте их соответствующим буквам – и вы узнаете фамилию маршала армии Наполеона, получившего, по одной из версий историков, титул князя Московского.

251* Владелец сейфовой ячейки банка потерял свой код. Он помнил только, что код состоит из 7 цифр – двоек и троек, что двоек больше, чем троек, и что код делится и на 3, и на 4. Можно ли по этим данным однозначно определить код сейфа?

252* Богатому султану надоели его мудрецы, и он решил избавиться от некоторой части из них. Собрав их в подземелье, он сообщил:

«Утром всех вас выстроят в колонну одного за другим лицом на восток, так что самый последний будет видеть, какие колпаки на всех, кроме него, предпоследний будет видеть, какие колпаки на всех, кроме него и последнего, и так далее. Первый не будет видеть ни одного колпака.

Колпаки будут двух цветов – либо красные, либо синие. Начиная с последнего в колонне, я буду спрашивать, какого цвета колпак на его голове. Мудрецы, которые не смогут назвать цвет колпака, будут казнены, а остальные останутся жить».

Всю ночь думали мудрецы, как же им сохранить свою жизнь. Не желая зависеть от случая, они придумали способ, при котором лишь последний из колонны, называя цвет колпака, может его не угадать, а остальные гарантированно спасают свою жизнь. Какой способ придумали мудрецы?

2.2.2. Классификация целых чисел по остаткам от деления

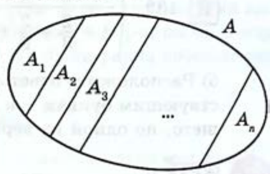
Первоисточник математики – целые числа.

Герман Минковский (1864–1909),
немецкий математик

Полученная нами формула деления с остатком даёт возможность провести классификацию целых чисел по их остаткам от деления на некоторое число.

Объекты классифицируют в самых различных научных областях – физике, химии, биологии, географии и др. – для своеобразного «наведения порядка», систематизации знаний. *Классификация* – это разбиение множества объектов на непересекающиеся подмножества (классы). При этом разбиение производится таким образом, чтобы объединение всех классов составляло все множество объектов.

Наглядным примером классификации является распределение учеников школы в классы: каждый ученик попадает только в один класс, а объединение всех классов представляет собой множество всех учеников школы. Таким образом, разбиение множества A на подмножества A_1, A_2, ... A_n является классификацией, если



$A_i \cap A_j = \varnothing$; $i, j \in N$; $1 \leqslant i \leqslant n$; $1 \leqslant j \leqslant n$ и $A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n = A$.

Классификация целых чисел существенно облегчает изучение их свойств и, в частности, свойств делимости. Ведь гораздо проще установить выполнение какого-либо свойства для конечного множества классов, чем для бесконечного множества целых чисел.

Выберем в качестве признака, на основании которого мы будем проводить классификацию, величину остатка от деления на некоторое заданное число.

Рассмотрим, например, остатки, получающиеся при делении некоторых целых чисел на 4. Так как остаток является неотрицательным целым числом, меньшим модуля делителя, то при делении любого числа на 4 возможны только четыре различных остатка: 0, 1, 2, 3. Например:

$24 = 4 \cdot 6 + 0$; $\qquad -24 = 4 \cdot (-6) + 0$;

$25 = 4 \cdot 6 + 1$; $\qquad -25 = 4 \cdot (-7) + 3$;

$26 = 4 \cdot 6 + 2$; $\qquad -26 = 4 \cdot (-7) + 2$;

$27 = 4 \cdot 6 + 3$; $\qquad -27 = 4 \cdot (-7) + 1$;

$28 = 4 \cdot 7 + 0$ и т. д. $\qquad -28 = 4 \cdot (-7) + 0$ и т. д.

Объединим все числа, имеющие остаток 3 при делении на 4, в одно подмножество множества целых чисел. Обозначим его $Z_4(3)$. Тогда

$$Z_4(3) = \{..., -9, -5, -1, 3, 7, 11, 15...\}.$$

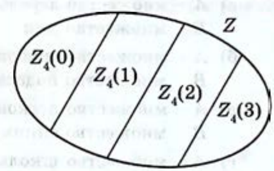
Аналогичным образом определим и подмножества $Z_4(0)$, $Z_4(1)$, $Z_4(2)$.

Все указанные подмножества не пересекаются друг с другом, так как по теореме о делимости при делении любого целого числа на 4 не может возникнуть два различных остатка (единственность). Поэтому любое целое число может попасть только в один класс, и у данных классов не будет общих элементов, то есть:

$$Z_4(0) \cap Z_4(1) = \varnothing;\ Z_4(0) \cap Z_4(2) = \varnothing;\ Z_4(0) \cap Z_4(3) = \varnothing;$$
$$Z_4(1) \cap Z_4(2) = \varnothing;\ Z_4(1) \cap Z_4(3) = \varnothing;\ Z_4(2) \cap Z_4(3) = \varnothing.$$

С другой стороны, все множество целых чисел можно представить в виде объединения данных множеств, так как по теореме о делимости у каждого целого числа при делении на 4 будет остаток (существование), и по определению деления с остатком его возможными значениями могут быть только числа 0, 1, 2, 3. Значит, каждое целое число обязательно попадет в какое-либо из указанных подмножеств, то есть:

$$Z_4(0) \cup Z_4(1) \cup Z_4(2) \cup Z_4(3) = Z.$$



Тем самым нами произведена классификация множества целых чисел в зависимости от их остатка при делении на 4. Таким образом, в соответствии с данным признаком множество целых чисел можно разбить на четыре класса ($k \in Z$):

$Z_4(0)$ – числа вида $4k$ (числа, кратные 4, то есть дающие при делении на 4 остаток 0);

$Z_4(1)$ – числа вида $4k + 1$ (числа, дающие при делении на 4 остаток 1);

$Z_4(2)$ – числа вида $4k + 2$ (числа, дающие при делении на 4 остаток 2);

$Z_4(3)$ – числа вида $4k + 3$ (числа, дающие при делении на 4 остаток 3).

Проведение классификации множества целых чисел по остаткам от деления на некоторое число позволяет упростить решение многих задач. Рассмотрим, например, следующую задачу.

Задача. Доказать, что квадрат любого целого числа либо кратен 3, либо при делении на 3 даёт остаток 1.

Решение:

Так как число целых чисел бесконечно, то данную задачу невозможно решить методом их перебора.

Разобьём тогда множество целых чисел на три класса по остаткам от деления на 3. В результате данного разбиения мы получим числа трех видов:

1) числа вида $3k$;

2) числа вида $3k + 1$;

3) числа вида $3k + 2$ ($k \in Z$).

Проведём доказательство данного утверждения для чисел каждого вида. То есть применим метод перебора не к бесконечному множеству целых чисел, а к конечному числу указанных классов.

1. Квадрат числа вида $3k$ равен $(3k)^2 = (3k) \cdot (3k) = 3 \cdot (3k^2)$, а это означает, что он делится на 3.

2. Для чисел вида $3k+1$ квадрат равен:

$$(3k+1)^2 = (3k+1)(3k+1) = 3k(3k+1) + 1 \cdot (3k+1) = 9k^2 + 3k + 3k + 1 = 3(3k^2 + 2k) + 1,$$

а это означает, что квадрат этого числа при делении на 3 даёт остаток 1.

3. Если число представлено в виде $3k+2$, то квадрат этого числа равен:

$$(3k+2)^2 = (3k+2)(3k+2) = 3k(3k+2) + 2 \cdot (3k+2) = 9k^2 + 6k + 6k + 4 = 3(3k^2 + 4k + 1) + 1,$$

и мы опять получаем, что квадрат данного числа при делении на 3 даёт остаток 1.

Доказав для каждого из классов, что квадрат соответствующего целого числа либо делится на 3, либо даёт при делении на 3 остаток 1, мы тем самым доказали это утверждение и для всех целых чисел. ▼

К **253** Даны множества A и B:

а) A – множество деревьев в школьном саду;
B – множество лип.

б) A – множество грибов в муромском лесу;
B – множество подосиновиков.

в) A – множество легковых машин марки «Лада Калина»;
B – множество синих машин.

г) A – множество школьников, занимающихся легкой атлетикой;
B – множество школьников, занимающихся плаванием.

1) Назовите множество, являющееся пересечением множеств A и B.
2) Назовите множество, являющееся объединением множеств A и B.

254 Множество A задано перечислением его элементов. Задайте его характеристическим свойством:

а) $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$; в) $A = \{3, 6, 9, 12, 15\}$;
б) $A = \{2, 4, 6, 8, 10\}$; г) $A = \{-16, -11, -6, -1, 4\}$.

Запишите подмножество B чётных чисел и подмножество C нечётных чисел множества A. Найдите объединение и пересечение подмножеств B и C.

255 Выберите признак и разбейте множество A на два непересекающихся подмножества, объединением которых является множество A:

а) $A = \{1; 3; 7,5; 8,3; 9,2; 15\}$; б) $A = \{-36; -12; -1; 8; 15; 24\}$.

Как называется проведенная вами операция?

256 Разбейте множество целых чисел на классы по их остаткам от деления на:

а) 2; б) 3; в) 5; г) 6.

Изобразите с помощью диаграммы Эйлера–Венна получившиеся классы. Сколько классов у вас получилось? Сформулируйте гипотезу и докажите её.

257 Проведите классификацию элементов множества A по остаткам от их деления на b:

а) $A = \{-10; -7; -1; 0; 3; 8; 14; 20\}$, $b = 4$; б) $A = \{-8; -4; 0; 5; 9; 11; 16\}$, $b = 3$.

Проверьте, что каждый элемент множества A попал ровно в один класс.

258 Докажите, что:
а) произведение двух последовательных целых чисел либо делится на 3, либо при делении на 3 даёт остаток 2;
б) остаток от деления на 4 произведения двух последовательных нечётных чисел равен 3.

259 Докажите, что:
а) $a^3 + 5a$ для любого целого числа a делится на 3;
б) $a^3 - a$ для любого целого числа a делится на 6.

П **260** Постройте на плоскости прямоугольную систему координат Oxy и отметьте точки с координатами: A (−8; −3), B (−2; 3), C (1; −6), D (9; 6). Постройте ломаную $ABCD$ и найдите приблизительные координаты точек её пересечения с осями Ox и Oy.

261 а) В прямоугольной системе координат Oxy постройте точку A (2; 5). Определите координаты точек:
1) A_x, симметричной точке A относительно оси абсцисс Ox;
2) A_y, симметричной точке A относительно оси ординат Oy;
3) A_O, симметричной точке A относительно начала координат O.
Постройте точки A_x, A_y и A_O.
б) Выполните предыдущее задание для точек B (−3; 4), C (6; −2), D (−1; −8).

262 Решите уравнение:
а) $2(3x - 1) : 3 = \frac{1}{6}(5x - 2) - (6 - x) : 2$;
б) $0{,}1(5x - 6) - (7 - 4x) : 3 = 0{,}2(3x - 4) - (-x + 4)$.

263 а) На последние 10 дней августа был сделан прогноз дневной температуры. Определите прогноз среднедневной температуры на эти 10 дней августа.

Дата	22	23	24	25	26	27	28	29	30	31
Прогноз, t, °С	20	25	24	18	14	15	21	24	24	22

б) В магазине продается 75 книг. Их средняя цена 256 р. Сколько стоила одна проданная книга, если средняя цена оставшихся книг стала равна 258 р.?

264 а) Жан и Поль отправились одновременно из города A в город B, один на автомобиле, другой – на велосипеде. По прошествии некоторого времени оказалось, что если бы Жан проехал втрое больше, то ему осталось бы проехать вдвое меньше, чем сейчас, и что если бы Поль проехал вдвое меньше, то ему осталось бы проехать втрое больше, чем сейчас. Как зовут велосипедиста, если он ехал с меньшей скоростью, чем автомобилист?
б) По случаю праздника был организован парад. Парадная колонна растянулась на 288 м. Факельщики ехали в начале процессии, а замыкали её музыканты. Вскоре после начала марша самый юный из факельщиков вспомнил, что забыл взять факел, который остался у его друга трубача, ехавшего в последнем ряду. Тогда факельщик побежал к своему другу и вернулся через 3 мин. С какой скоростью двигалась парадная колонна, если предположить, что факельщик бежал туда и обратно со скоростью 18 км/ч?

265 а) Сколько квадрантов имеет координатная плоскость? Как по координатам точки, не выполняя построений, определить, какому квадранту она принадлежит?

б) Множество точек координатной плоскости T состоит из элементов:

A (3; –1), B (9; 2), C (–3; 6), D (–6; –3), E (3; 6), F (–3; –6), G (6; –3), H (–1; 10).

Не выполняя построения, определите, какому квадранту принадлежит каждый элемент множества T. Постройте данные точки и проверьте свой ответ.

в) Выполните классификацию множества точек T по их принадлежности квадрантам координатной плоскости.

г) Проведите ломаную $ABCDEFGH$ и определите координаты точек её пересечения с осями координат Ox и Oy.

д) Как, не выполняя построения, по координатам точки определить, принадлежит ли она оси координат, и если да, то какой?

Д **266** Проведите классификацию элементов множества A по остаткам от их деления на 7:

$$A = \{-98; -76; -53; -34; -16; 0; 13; 25; 34; 40; 78\}.$$

267 Докажите, что:

а) произведение двух последовательных четных чисел либо делится на 3, либо при делении на 3 даёт остаток 2;

б) произведение чисел $(a + 5)(a + 9)$ для любого целого a либо делится на 5, либо при делении на 5 даёт остаток 1 или 2.

268 Решите уравнение:

а) $8(x - 4) : 3 - 7 = 1{,}8(5 - 10x) + 4x$;

б) $(x - 3) : 7 - 0{,}2(x - 25) = 7 - 0{,}25(2 + x)$.

269 а) На складе пончиковой компании Антона и Ксюши находится 518 коробок с готовой продукцией – пончиками разных сортов. Средняя цена одной коробки с пончиками равна 138 р. В течение дня продали 143 коробки пончиков, при этом средняя цена коробки пончиков, оставшихся на складе после продажи, стала равна 142 р. На какую сумму продали пончиков в течение этого дня?

б) Расстояние от дома Антона до офиса пончиковой компании равно 40 км, а от офиса до склада компании – 7,7 км. Антон выехал из дома и доехал до склада по дороге, проходящей мимо офиса, за 45 мин. С какой средней скоростью он ехал?

270 В 12 часов дня Антон отправился на велосипеде из дома в офис пончиковой компании со скоростью 16 км/ч. Через 15 минут после этого Ксюша, в свою очередь, отправилась из офиса пончиковой компании в направлении дома Антона со скоростью 20 км/ч. Они условились встретиться в кафе, находящемся ровно посередине дороги между домом Антона и офисом, и приехали туда одновременно. В котором часу они встретились?

271 а) Постройте на плоскости прямоугольную систему координат и отметьте точки с координатами A (2; 5), B (5; –5), C (–4; 5), D (–5; –7), E (4; 8), F (–4; –5).

б) Определите координаты точек, симметричных данным точкам, относительно координатных осей и центра координат и постройте их в той же системе координат. Соедините все построенные точки так, чтобы получилась симметричная фигура.

С **272*** Найдите наименьшее натуральное число, которое при делении на 2 даёт остаток 1, при делении на 3 даёт остаток 2, при делении на 4 даёт остаток 3, при делении на 5 даёт остаток 4, при делении на 6 даёт остаток 5, при делении на 7 даёт остаток 6, а при делении на 8 даёт остаток 7.

273* У отца три совершеннолетних сына. Произведение их полных лет равно 20 677. Сколько лет каждому из сыновей?

2.2.3. Сравнения и их свойства

Величайшие и самые плодотворные успехи и в математике... часто обязаны созданию и введению новых понятий в тот момент, когда к этому вынуждает частое обращение к сложным явлениям.

Юлиус Вильгельм Рихард Дедекинд (1831–1916), немецкий математик

У целых чисел, имеющих одинаковые остатки при делении на одно и то же число, есть очень важное свойство, которое часто оказывается полезным при решении разнообразных задач на делимость. Выясним, что же это за свойство.

Теорема 1. Целые числа a и b имеют одинаковые остатки при делении на m тогда и только тогда, когда их разность делится на m.

☺☺☺ *Доказательство:*

Сначала вспомним, что выражение «тогда и только тогда» употребляется в тех случаях, когда выполняется как прямое, так и обратное утверждение.

Для определенности будем рассматривать разность $a - b$.

I. Доказательство прямого утверждения:

«Если целые числа a и b имеют одинаковые остатки при делении на m, то их разность $a - b$ делится на m».

Тот факт, что числа a и b имеют одинаковые остатки при делении на m, может быть записан с помощью формулы деления с остатком следующим образом (a, b, c_1, $c_2 \in Z$, $r \in N_0$):

$$a = mc_1 + r, \text{ где } 0 \leqslant r < |m|,$$

$$b = mc_2 + r, \text{ где } 0 \leqslant r < |m|.$$

Вычитая первое равенство из второго, получаем:

$$a - b = mc_1 + r - (mc_2 + r) = mc_1 + r - mc_2 - r = mc_1 - mc_2 = m(c_1 - c_2).$$

А это по определению делимости и означает, что $a - b$ делится на m, что и требовалось доказать.

II. Доказательство обратного утверждения:

«Если разность целых чисел a и b делится на m, то числа a и b имеют одинаковые остатки при делении на m».

Тот факт, что разность целых чисел a и b делится на m, может быть записан по определению делимости следующим образом:

$$a - b = mc \ (c \in Z).$$

Разделим число b на m, то есть представим его с помощью формулы деления с остатком в виде:

$$b = mq + r,\ 0 \leqslant r < |\, m \,|\ (q \in Z,\ r \in N_0).$$

Сложим левые и правые части полученных равенств:

$$a - \cancel{b} + \cancel{b} = mc + mq + r = m(c + q) + r.$$

Значит, $a = m(c + q) + r$, где $0 \leqslant r < |\, m \,|\ (c, q \in Z,\ r \in N_0)$. А это и означает, что число a имеет тот же остаток при делении на m, что и число b, что и требовалось доказать. ▼

Числа, имеющие одинаковые остатки при делении на некоторое заданное натуральное число, настолько важны в математике, что получили свое специальное название.

Определение. Если два целых числа a и b имеют одинаковые остатки при делении на некоторое целое число m $(m > 0)$, то говорят, что a и b *сравнимы по модулю* m, и пишут:

$$a \equiv b \pmod{m}.$$

Выражение $a \equiv b \pmod{m}$ называют также *сравнением*.

Сравнения являются языком теории делимости. Но сравнения часто встречаются и в повседневной жизни. Так, например, часовая стрелка показывает время по модулю 12, а дни недели мы определяем по модулю 7.

Понятие сравнения позволяет короче записать теорему 1:

Теорема 1. $a \equiv b \pmod{m}$ тогда и только тогда, когда разность a и b делится на m.

С помощью данной теоремы удобно определять, сравнимы ли числа a и b по некоторому модулю. Приведем примеры.

Высказывание	Запись на языке сравнений	Обоснование
Числа 56 и 1 сравнимы по модулю 11	$56 \equiv 1 \pmod{11}$	$56 - 1 = 55$, а 55 делится на 11. Значит, числа 56 и 1 имеют одинаковые остатки при делении на 11
Числа (−74) и 14 сравнимы по модулю 8	$-74 \equiv 14 \pmod{8}$	$-74 - 14 = -88$, а -88 делится на 8. Значит, числа −74 и 14 имеют одинаковые остатки при делении на 8
Число a делится на число m	$a \equiv 0 \pmod{m}$	$a \,\vdots\, m \Leftrightarrow a = mk \Leftrightarrow a - 0 = mk\ (k \in Z)$. Значит, числа a и 0 имеют одинаковые остатки при делении на m
Число a при делении на число b даёт остаток r (то есть $a = bc + r$)	$a \equiv r \pmod{b}$, $0 \leqslant r < b$	$a = bc + r \Leftrightarrow a - r = bc$. Значит, числа a и r имеют одинаковые остатки при делении на b

Сравнения являются не просто обозначением, они обладают рядом замечательных свойств. Изучив некоторые из них, мы с вами узнаем, как можно просто решить, на первый взгляд «неприступные», задачи на делимость, выведем новые признаки делимости и научимся многому другому.

Вы, наверное, заметили, что обозначение сравнения напоминает знак равенства. И это не случайно, так как сравнения по одному и тому же модулю обладают многими из тех свойств, которыми обладают обыкновенные равенства. Рассмотрим некоторые из них.

Мы знаем, что для равенств на множестве целых чисел выполняются свойства:

Название свойства	Запись свойства на математическом языке	Формулировка свойства
Рефлексивность	$a = a$	Любое число равно самому себе
Симметричность	Если $a = b$, то $b = a$	Если первое число равно второму, то второе число равно первому
Транзитивность	Если $a = b$, а $b = c$, то $a = c$	Если первое число равно второму, а второе – третьему, то первое число равно третьему

Аналогичные свойства справедливы и для сравнений.

Теорема 2 (Рефлексивность сравнений). Любое число a сравнимо само с собой по модулю m (a, $m \in Z$, $m > 0$).

Доказательство:

Рассмотрим разность $a - a$. Так как

$$a - a = 0 = m \cdot 0$$

для любого целого $m > 0$, то указанная разность делится на m. Но тогда, по теореме 1, $a \equiv a \pmod{m}$, что и требовалось доказать. ▼

Теорема 3 (Симметричность сравнений). Если число a сравнимо с числом b по модулю m, то число b сравнимо с числом a по тому же модулю (a, b, $m \in Z$, $m > 0$).

Доказательство:

По условию теоремы $a \equiv b \pmod{m}$. Значит, по теореме 1, существует такое целое число c, что $a - b = mc$.

Но $b - a = -(a - b) = -mc = m(-c)$, и поэтому $b - a$ также делится на m.

Следовательно, по теореме 1, $b \equiv a \pmod{m}$, что и требовалось доказать. ▼

Теорема 4 (Транзитивность сравнений). Если число a сравнимо с числом b по модулю m, а число b сравнимо с числом c по тому же модулю, то число a сравнимо с числом c по модулю m (a, b, c, $m \in Z$, $m > 0$).

Доказательство:

По условию теоремы $a \equiv b \pmod{m}$ и $b \equiv c \pmod{m}$. Тогда, по теореме 1, существуют целые числа k и l, такие, что $a - b = mk$, а $b - c = ml$. Поэтому

$$a - c = (a - b) + (b - c) = mk + ml = m(k + l).$$

Последнее равенство означает, что разность $a - c$ делится на m. Значит, по теореме 1, $a \equiv c \pmod{m}$, что и требовалось доказать. ▼

Запишем свойства сравнений на математическом языке.

Название свойства	Запись на математическом языке
Рефлексивность	$a \equiv a \pmod{m}$
Симметричность	Если $a \equiv b \pmod{m}$, то $b \equiv a \pmod{m}$
Транзитивность	Если $a \equiv b \pmod{m}$, а $b \equiv c \pmod{m}$, то $a \equiv c \pmod{m}$

Покажем теперь, как, пользуясь установленными свойствами сравнений, можно превратить сложные на первый взгляд задачи в простые.

Задача. Известно, что некоторое число сравнимо с числом 747 475 по модулю 74. Доказать, что оно сравнимо с числом 74 000 001 по тому же модулю.

Решение:

Очевидно, что числа 747 475 и 74 000 001 дают остаток 1 при делении на 74, значит, они сравнимы по модулю 74. Тогда, на основании свойств симметричности и транзитивности, если некоторое число сравнимо с одним из этих чисел, значит, оно сравнимо и с другим из них, что и требовалось доказать.

К **274** Запишите на математическом языке, используя формулу деления с остатком, следующие высказывания и докажите их истинность:

а) Число 156 при делении на 11 даёт остаток 2.

б) Число 362 при делении на 17 даёт остаток 5.

в) Числа 6700 и 12 100 дают одинаковые остатки при делении на 54.

г) Числа 760 000 и 1 740 000 дают одинаковые остатки при делении на 98.

275 Докажите, что числа a и b дают одинаковые остатки при делении на c, не вычисляя этих остатков:

а) $a = 100\,000$, $b = 100\,028$, $c = 7$;
в) $a = 410\,000$, $b = 500\,000$, $c = 45$;

б) $a = 599\,999$, $b = 600\,004$, $c = 5$;
г) $a = 888\,888$, $b = 999\,999$, $c = 37$.

276 Запишите данные высказывания на языке сравнений и докажите их истинность:

а) Число 1 133 064 делится на 9.

б) Число 16 985 777 не кратно 4.

в) Число 14 016 при делении на 7 даёт остаток 2.

г) Остаток от деления 320 005 на 8 не равен 3.

д) Числа 12 000 и 12 180 дают одинаковые остатки при делении на 45.

е) Числа 560 000 и 580 000 дают разные остатки при делении на 11.

277 Найдите наименьшее натуральное число, сравнимое с числом 235 по модулю:

а) 3; б) 4; в) 5; г) 7; д) 9; е) 11.

278 Найдите наименьшее натуральное число, сравнимое с числом a по модулю m:

а) $a = 2589$, $m = 11$;
б) $a = 142\,248$, $m = 25$;

в) $a = 68\,227$, $m = 54$;
г) $a = 68\,952$, $m = 120$;

д) $a = 63\,814$, $m = 131$;
е) $a = 56\,400$, $m = 139$;

ж) $a = 126\ 774$, $m = 215$; з) $a = 217\ 335$, $m = 222$.

Как вы могли бы сформулировать данное задание, не используя язык сравнений?

279 Докажите, что:

а) Если некоторое число сравнимо с числом 581 по модулю 9, то оно сравнимо и с числом 18 626 по этому же модулю.

б) Если некоторое число сравнимо с числом 198 по модулю 25, то оно сравнимо и с числом 35 648 по этому же модулю.

в) Если некоторое число сравнимо с числом 400 по модулю 6, то оно сравнимо и с числом 104 902 по этому же модулю.

г) Если некоторое число сравнимо с числом 734 по модулю 15, то оно сравнимо и с числом 502 334 по этому же модулю.

280 Найдите три значения x, таких, что:

а) $x \equiv 5 \pmod 7$; б) $x \equiv 3 \pmod 5$; в) $x \equiv 15 \pmod{17}$;

г) $x \equiv 4 \pmod{23}$; д) $x \equiv 11 \pmod{28}$; е) $x \equiv 19 \pmod{39}$.

281 Запишите с помощью кванторов общности ($\forall$) и существования ($\exists$) данные утверждения на математическом языке так, чтобы они превратились в истинные высказывания.

а) Число $2n$ – составное.

б) Модуль числа a равен a.

в) Дробь $\dfrac{n}{n+9}$ – правильная.

г) Дробь $\dfrac{3a}{b+1}$ – сократимая.

д) Число $n(n+1)$ – простое.

е) Число $4n + 2$ делится на 2.

ж) Дробь $\dfrac{2n}{n+2}$ – правильная.

з) Дробь $\dfrac{4a}{2b+2}$ – сократимая.

282 По данным таблиц постройте линейные диаграммы.

а) Величина прожиточного минимума на одного человека в РФ:

Год	2000	2001	2002	2003	2004	2005	2006	2007	2008
Минимум, рублей	1210	1500	1808	2112	2376	3018	3422	3847	5259

б) Общая жилплощадь, приходящаяся в среднем на одного жителя РФ (по состоянию на конец года):

Год	2000	2001	2002	2003	2004	2005	2006	2007	2008
Площадь, $м^2$	19,2	19,5	19,8	20,2	20,5	20,9	21,1	21,5	22

в) Число высших учебных заведений в РФ (среднегодовой показатель):

Год	2000	2001	2002	2003	2004	2005	2006	2007	2008
Количество, штук	965	1008	1039	1044	1071	1068	1090	1108	1134

283 Раскройте скобки и упростите выражение:

а) $(a - 2)(a + 2)$; в) $(c + 1)(c - 2) - c(c - 1)$;

б) $(b - 1)(b + 3)$; г) $d(d - 2) - (d + 2)(d - 3)$.

284 Решите уравнение:

а) $3 - 0{,}1(3 - 7x) + 0{,}5(x + 1) = 4 - 0{,}2(7 - 3x)$;

б) $(x + 1{,}9) : 3 - 0{,}4(2x - 5) = 6x + 0{,}3(2x - 3)$.

285 а) Два оператора должны набрать на компьютере некоторый текст. Сначала один набрал половину его, а затем второй – вторую половину. При этом они выполнили всю работу за 25 часов. Сколько часов потребовалось бы первому оператору, чтобы выполнить всю работу самостоятельно, если известно, что второй оператор выполняет её самостоятельно за 22 часа?

б) Два телефониста должны проложить кабель. В одиночку первый проложил бы его за 9 рабочих дней, а второй – за 15. Сколько времени им потребуется на эту работу, если они будут работать вместе?

в) Шерлок Холмс и доктор Ватсон при расследовании одного дела столкнулись с необходимостью прорыть подземный ход. Работая вместе, они могли бы его вырыть за 5 суток. Однако доктор Ватсон простудился, и Холмс сначала 4 суток рыл подземный ход самостоятельно. А затем Ватсон рыл в одиночку подземный ход ещё 6 суток. В результате работа была выполнена лишь на 90%. За какое время Шерлок Холмс вырыл бы подземный ход, работая один?

г) Незнайка может съесть торт за 10 минут, банку варенья – за 8 минут, а кастрюлю простокваши – за 15 минут. Пончик может съесть все это, соответственно, за 5, 4, 3 минуты. За какое время они съедят вместе последовательно торт, банку варенья и кастрюлю простокваши?

286 Запишите в виде блок-схемы:

а) алгоритм нахождения модуля числа a;

б) алгоритм определения того, что числа a и b имеют одинаковый остаток при делении на m.

Д **287** Докажите, что числа a и b дают одинаковые остатки при делении на c:

а) $a = 217\ 000$, $b = 150\ 000$, $c = 67$; б) $a = 700\ 000$, $b = 588\ 889$, $c = 37$.

288 Запишите на языке сравнений следующие высказывания и докажите их истинность:

а) Число 16 146 делится на 23.

б) Число 76 361 при делении на 15 даёт остаток 11.

в) Числа 454 826 и 600 000 дают одинаковые остатки при делении на 29.

289 Найдите три значения x, таких, что:

а) $x \equiv 4 \pmod{11}$; б) $x \equiv 3 \pmod{27}$; в) $x \equiv 19 \pmod{31}$.

290 Решите уравнение:

а) $0{,}2(x - 1) - 0{,}8(5 - 2x) + 12 = -1{,}1(4 - x) + 8{,}7$;

б) $-4{,}6 - 1{,}5(4x - 5) + 8{,}5x = 0{,}3(3x - 7) + (2x - 15{,}6) : 7$.

291 По данным таблицы постройте линейную диаграмму, показывающую динамику инвестиций, направленных в РФ на охрану окружающей среды.

Год	2000	2001	2002	2003	2004	2005	2006	2007
Инвестиции, млрд. р.	22	28	25	35	41	59	68	77

292 Антон и Ксюша решили купить для своей пончиковой компании три новые технологические линии. Первая линия может выполнить месячный план по производству пончиков за 50 рабочих дней, вторая – за 45 рабочих дней, а третья – за 60 рабочих дней. Смогут ли эти три линии, работая вместе, выполнить месячный план по производству пончиков за 17 рабочих дней?

293 а) Вычислите:

$$A = \frac{45}{32} \cdot \left(\frac{4{,}62}{20 - 28{,}2 : (13{,}333 \cdot 0{,}3 + 0{,}0001) \cdot 2{,}4} + 4{,}9\right);$$

$$B = \left[\left(7\frac{2}{3} - 6\frac{8}{15} \cdot \frac{5}{14}\right) : \left(8\frac{3}{4} \cdot \frac{2}{7} - 1\frac{1}{6}\right) + \frac{7}{18} : \frac{14}{27}\right] \cdot \left(\frac{5}{6} - 0{,}75\right) \cdot 5\frac{1}{19}.$$

б) Найдите наименьшее натуральное число, с которым число A сравнимо по модулю B.

С **294*** На встрече выпускников встретились шесть одноклассников: Антонов, Баринов, Васильев, Генкин, Дмитриев и Ермаков. Оказалось, что все они теперь жители шести разных городов: Москвы, Санкт-Петербурга, Киева, Тулы, Хабаровска и Омска. В процессе их разговора выяснилось, что:

1) Антонов и москвич – врачи, Дмитриев и петербуржец – учителя, а Васильев и туляк – бизнесмены.

2) Баринов, Ермаков и киевлянин – любители играть в теннис, а туляк терпеть не может эту игру.

3) Баринов и москвич давно не виделись, а Васильев и житель Хабаровска часто встречаются.

4) У жителя Хабаровска детей больше, чем у Антонова, у жителя Омска детей больше, чем у Васильева, а у Ермакова детей меньше всех.

Определите, в каком городе живет каждый из одноклассников и какая у него профессия.

295* В классе 27 человек. Каждый мальчик дружит с 4 девочками, а каждая девочка – с 5 мальчиками. Сколько в этом классе мальчиков и сколько девочек?

296* У трех друзей, Пети, Вани и Толи, было всего 120 шоколадок. Петя дал Ване и Толе столько шоколадок, сколько у них было. Затем Ваня дал Пете и Толе столько, сколько у них было, и, наконец, Толя дал Пете и Ване столько, сколько у них к этому моменту имелось. В результате всем досталось поровну. Сколько шоколадок было у каждого из мальчиков вначале?

2.2.4. Арифметика остатков

Совершенный образ истины – это таблица умножения, точная и достоверная, свободная от всех влияний времени.

Бертран Рассел (1872–1970), английский математик и философ

Мы с вами уже знаем, что наглядное представление о целых числах даёт числовая прямая. На этой прямой каждому целому числу поставлена в соответствие определенная точка.

Однако для наглядного представления о числах, сравнимых по некоторому модулю m, числовая прямая уже не подходит. Ведь два сравнимых по заданному модулю числа имеют одинаковые остатки, и мы хотим их рассматривать как одно число. Например, при сравнении по модулю 12 числа 0, 12, 24, ... должны изображаться одной точкой.

С этой ситуацией мы часто сталкиваемся и в повседневной жизни, когда определяем время на циферблате часов. Представьте теперь, что положительная часть числовой прямой как бы намотана на циферблат часов так, что точки 0, 12, 24, ... совпадают. При этом, в отличие от часов, отсчет на ***числовой окружности*** принято вести против часовой стрелки (рис. 2).

Рис. 2

Так как при делении на 12 возможны лишь остатки 0, 1, 2, ... 11, то каждое целое число сравнимо с одним из них и, следовательно, будет представлено соответствующей точкой данной окружности.

Аналогичным образом изображаются числа, сравнимые по любому модулю m, только окружность делится соответственно на m равных частей, и около каждой точки деления против часовой стрелки последовательно расставляются возможные значения остатков: $0, 1, 2, ..., m - 1$.

Введем на множестве остатков от деления на m *операцию сложения.*

Определение. Пусть числа A и B при делении на m дают соответственно остатки a и b. *Суммой остатков* a и b назовём число c $(0 \leqslant c < m)$, являющееся остатком от деления $A + B$ на m.

Другими словами, если $A \equiv a \pmod{m}$, $B \equiv b \pmod{m}$ и $A + B \equiv c \pmod{m}$, то

$$a + b \equiv c \pmod{m}.$$

В процессе указанной операции мы складываем не сами числа, а их остатки от деления на некоторое число m. Например, если некоторые два числа имеют остатки 5 и 2 при делении на 12, то сумма этих остатков равна 7:

$$5 + 2 \equiv 7 \pmod{12}$$

Чтобы найти значение суммы, можно переместиться по числовой окружности от точки 5 на 2 единицы в направлении отсчета (рис. 3). Заметим, что подобным образом мы действовали и при сложении чисел на числовой прямой.

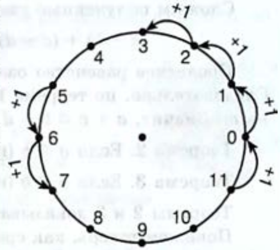


Рис. 3

Пусть теперь некоторые два числа имеют остатки 11 и 4 при делении на 12. Чему будет равна сумма этих остатков?

Используя числовую окружность (рис. 3), получим

$$11 + 4 \equiv 3 \pmod{12}.$$

Этот же ответ можно найти и с помощью вычислений. Действительно, сложив остатки 11 и 4, мы получим 15. Но $15 > 12$ и остатком при делении на 12 не является. А так как $15 \equiv 3 \pmod{12}$ и $3 < 12$, то результатом указанной операции будет число 3.

По сути, операция сложения остатков сводится к обычному сложению. Только здесь результаты сложения никогда не превышают делителя, то есть рассматриваемого модуля.

Аналогичным образом можно ввести операции вычитания и умножения остатков. При этом всегда надо помнить, что при выполнении действий над остатками применяется следующее правило: *если результат сложения, вычитания, умножения остатков по некоторому модулю m стал отрицательным или больше m, то надо переходить к остатку от деления результата на m.*

Так же как и в обычной арифметике, мы можем составить таблицы сложения и умножения остатков. Составим, например, таблицу сложения и умножения остатков от деления на 4.

Таблица сложения
$a + b \equiv c \pmod 4$

	$b \equiv 0$	$b \equiv 1$	$b \equiv 2$	$b \equiv 3$
$a \equiv 0$	0	1	2	3
$a \equiv 1$	1	2	3	0
$a \equiv 2$	2	3	0	1
$a \equiv 3$	3	0	1	2

Таблица умножения
$ab \equiv c \pmod 4$

	$b \equiv 0$	$b \equiv 1$	$b \equiv 2$	$b \equiv 3$
$a \equiv 0$	0	0	0	0
$a \equiv 1$	0	1	2	3
$a \equiv 2$	0	2	0	2
$a \equiv 3$	0	3	2	1

Итак, введённые нами операции позволяют складывать, вычитать и умножать остатки. Докажем теперь, что правила арифметических действий над остатками аналогичны обычным правилам.

Теорема 1. Если $a \equiv b \pmod m$ и $c \equiv d \pmod m$, то $a + c \equiv b + d \pmod m$.

Доказательство:

Так как $a \equiv b \pmod m$ и $c \equiv d \pmod m$, то, по теореме 1, п. 2.2.3, числа $a - b$ и $c - d$ делятся на m. Значит, $a - b = km$ и $c - d = lm$ $(k, l \in Z)$.

Сложим полученные два равенства:

$$(a - b) + (c - d) = km + lm \quad \Leftrightarrow \quad (a + c) - (b + d) = m(k + l).$$

Последнее равенство означает, что разность чисел $a + c$ и $b + d$ делится на m. Следовательно, по теореме 1, п. 2.2.3, они имеют одинаковые остатки при делении на m. Значит, $a + c \equiv b + d \pmod{m}$, что и требовалось доказать. ▼

Теорема 2. Если $a \equiv b \pmod{m}$ и $c \equiv d \pmod{m}$, то $a - c \equiv b - d \pmod{m}$.

Теорема 3. Если $a \equiv b \pmod{m}$ и $c \equiv d \pmod{m}$, то $ac \equiv bd \pmod{m}$.

Теоремы 2 и 3 доказываются аналогично теореме 1.

Покажем теперь, как сравнения и введенная для них арифметика позволяют при решении задач уйти от громоздких преобразований и тем самым упрощают решение. Рассмотрим опять задачу из п. 2.2.2.

Задача. Доказать, что квадрат любого целого числа либо кратен 3, либо даёт при делении на 3 остаток 1.

Решение:

Разделим целые числа на три класса в зависимости от их остатков от деления на 3:

1) $a \equiv 0 \pmod{3}$; 2) $a \equiv 1 \pmod{3}$; 3) $a \equiv 2 \pmod{3}$.

Докажем выполнение указанного свойства для каждого из этих классов.

1) Если $a \equiv 0 \pmod{3}$, то, по теореме 3, $a^2 \equiv 0^2 \pmod{3} \equiv 0 \pmod{3}$.

2) Если $a \equiv 1 \pmod{3}$, то, по теореме 3, $a^2 \equiv 1^2 \pmod{3} \equiv 1 \pmod{3}$.

3) Если $a \equiv 2 \pmod{3}$, то, по теореме 3, $a^2 \equiv 2^2 \pmod{3} \equiv 4 \pmod{3} \equiv 1 \pmod{3}$.

В первом случае a^2 кратен 3, а в двух остальных – остаток при делении a^2 на 3 равен 1, что и требовалось доказать.

К **297** Найдите на числовой прямой все числа, находящиеся от числа a на расстоянии b:

а) $a = 8$, $b = 2$; в) $a = 9$, $b = 4$; д) $a = 7$, $b = 9$;
б) $a = 12$, $b = 3$; г) $a = 2$, $b = 5$; е) $a = 6$, $b = 6$.

298 Известно, что остаток от деления числа A на 19 равен a, а числа B на 19 – равен b. Найдите остаток от деления на 19 чисел: 1) $A + B$; 2) $A - B$; 3) $A \cdot B$, если:

а) $a = 5$, $b = 3$; в) $a = 11$, $b = 6$; д) $a = 17$, $b = 8$;
б) $a = 7$, $b = 2$; г) $a = 18$, $b = 2$; е) $a = 15$, $b = 9$.

299 Выполните указанное действие по модулю m:

а) $8 + 4$, $m = 13$; г) $13 - 5$, $m = 6$; ж) $2 \cdot 5$, $m = 8$;
б) $3 + 6$, $m = 7$; д) $21 - 4$, $m = 3$; з) $12 \cdot 4$, $m = 11$;
в) $7 + 7 + 7$, $m = 5$; е) $9 - 14$, $m = 4$; и) 3^3, $m = 12$.

300 Найдите два значения x, для которых верно данное сравнение:

а) $x + 3 \equiv 6 \pmod{4}$; в) $x - 1 \equiv 7 + 5 \pmod{6}$;
б) $x + 5 \equiv 7 + 1 \pmod{3}$; г) $2x + 6 \equiv x + 8 \pmod{7}$.

301 Составьте таблицы сложения и умножения остатков по модулю: а) 3; б) 5; в) 6. Какие закономерности в этих таблицах вы замечаете?

302 Докажите, что:

а) $a^3 - a$ делится на 3 для любого целого числа a;

б) $a^3 + 11a$ делится на 6 для любого целого числа a;

в) $a^3 + 3a^2 + 2a$ делится на 3 для любого целого числа a.

303 Пользуясь полученными в задании № 301 таблицами умножения, найдите одно значение x, такое, что:

а) $2x \equiv 1 \pmod 3$; б) $2x \equiv 1 \pmod 5$; в) $3x \equiv 4 \pmod 5$; г) $5x \equiv 4 \pmod 6$.

304 Докажите, что:

а) Если числа a и b не делятся на 3, но дают одинаковые остатки при делении на 3, то число $ab - 1$ делится на 3.

б) Если числа a и b не делятся на 3 и дают разные остатки при делении на 3, то число $ab + 1$ делится на 3.

в) $a^5 - a$ делится на 5 для любого целого числа a.

П **305** Какие приемы сравнения обыкновенных дробей вы знаете? Сравните дроби:

а) $\frac{11}{18}$ и $\frac{5}{12}$; б) $\frac{3}{1205}$ и $\frac{2}{803}$; в) $\frac{78}{11}$ и $\frac{5029}{10\,204}$; г) $\frac{379}{380}$ и $\frac{380}{381}$; д) $\frac{548}{547}$ и $\frac{547}{546}$.

306 Сравните, не производя вычислений:

а) $3{,}28 \cdot 0{,}9$ и $3{,}28$; в) $\frac{7}{24}$ и $\frac{5}{4} \cdot \frac{7}{24}$; д) $2\frac{5}{6}$ и $2\frac{5}{6} \cdot \frac{3}{7}$;

б) $5{,}45$ и $5{,}45 \cdot 1{,}2$; г) $8\frac{7}{15}$ и $\frac{4}{11} \cdot 8\frac{7}{15}$; е) $\frac{3}{19}$ и $2\frac{1}{4} \cdot \frac{3}{19}$.

307 Вычислите:

а) $|-10| + |-12| - |-28|$; в) $|-1{,}8| : \left|-\frac{3}{14}\right|$; д) $\left|-\frac{4}{21}\right| : \left|\frac{2}{7}\right| - 0{,}98 \cdot |0|$;

б) $|-2{,}25| - \left|1\frac{3}{4}\right| - \left|-25\frac{1}{2}\right|$; г) $\left|-2\frac{6}{7}\right| \cdot \left|-3\frac{1}{2}\right|$; е) $|-3{,}28| : |-2| - 6{,}72 \cdot (-1)$.

308 Решите уравнение:

а) $|x| = 5$; в) $|-y| = 9$; д) $|-z| = 0$;

б) $-|a| = 11$; г) $|-c| = -1$; е) $-|a| = -7$.

309 Найдите значение выражения:

а) $\frac{2a^2b^3}{8a^3b}$, если $a = 0{,}5$, $b = 2$; в) $\frac{6x(x+y)}{24y(y+x)}$, если $x = 8$, $y = 0{,}75$;

б) $\frac{28xy^3}{4x^3y^2}$, если $x = 4$, $y = \frac{1}{7}$; г) $\frac{8y^2(y-x)}{3x^3(x-y)}$, если $x = 2$, $y = 1{,}5$.

310 а) Латунь представляет собой сплав меди и олова. Сколько меди и сколько олова в 540 г латуни, если количество олова составляет 50% от количества меди?

б) В каких пропорциях надо сплавить золото 375 пробы с золотом 750 пробы, чтобы получить золото 500 пробы?

в) Влажность свежескошенной травы 60%, влажность сена – 15%. Сколько получится сена из 8,5 т свежескошенной травы?

г) Масса арбуза равна 10 кг, а его влажность – 95%. Через некоторое время влажность арбуза стала равна 90%. Сколько теперь весит арбуз?

311 Площади лесных участков номер 1, 2 и 3 относятся соответственно как $2{,}25 : 1{,}5 : 1\frac{5}{6}$, причём площадь третьего участка на 135 га меньше площади первого. На первом, втором и третьем участках вырубили соответственно 15%, 10% и 5% от их площади. На какой площади был вырублен лес?

312 а) В одном классе 85% учащихся ходили в поход, а 75% – ходили в театр. Чему равен наименьший и наибольший процент учащихся, побывавших и в походе, и в театре?

б) По статистике, в одном портовом городе 90% населения умеют объясняться на английском языке, 85% – на немецком языке, 75% – на испанском языке, а 80% – на французском языке. Какой наименьший и наибольший процент населения этого портового города может изъясняться на всех 4 языках?

Д **313** Известно, что остаток от деления числа A на 17 равен a, а числа B на 17 – равен b. Найдите остаток от деления на 17 чисел: 1) $A + B$; 2) $A - B$; 3) $A \cdot B$, если:

а) $a = 11$, $b = 2$; б) $a = 7$, $b = 12$; в) $a = 10$, $b = 11$.

314 Выполните указанное действие по модулю m:

а) $9 + 7$, $m = 8$; в) $7 - 11$, $m = 3$; д) $9 \cdot 5$, $m = 30$;

б) $29 - 12$, $m = 4$; г) $3 \cdot 9$, $m = 21$; е) 2^3, $m = 6$.

315 Найдите два значения x, для которых верно данное сравнение:

а) $x + 9 \equiv 21 \pmod 5$; б) $x - 5 \equiv 14 \pmod{11}$.

316 Составьте таблицу сложения и умножения остатков по модулю: а) 2; б) 7.

317 Вычислите:

а) $|-5{,}45| : |-5| - 5{,}91 \cdot (-1)$; б) $\left|\frac{5}{16}\right| : \left|-1\frac{1}{8}\right| + 101{,}909 \cdot |0|$.

318 Решите уравнение:

а) $|x| = 4$; б) $|-a| = 3$; в) $|-y| = -5$; г) $-|c| = -2$.

319 Найдите значение выражения:

а) $\frac{7c^3b^2}{35c^2b^3}$, если $c = 0{,}25$; $b = 0{,}75$; б) $\frac{36y(2x + 3y)}{4x(3y + 2x)}$, если $x = 6$; $y = 5$.

320 В прошлом году в московском и питерском филиалах пончиковой компании Антона и Ксюши объём выпуска пончиков относился как 2 : 3. В этом году объем выпуска пончиков в московском филиале увеличился на 40%, а в питерском сократился на 20%. На сколько процентов изменился суммарный объём выпуска пончиков в этих двух филиалах?

321 В ноябре и декабре пончиковая компания Антона и Ксюши ежемесячно увеличивала выпуск продукции на одно и то же число процентов. Чему равен этот процент, если известно, что в октябре все пекарни пончиковой компании выпустили 6 т пончиков, а в декабре – 7,26 т?

322 а) Найдите значения выражений рациональным способом:

Ш $45{,}16 \cdot 1{,}04 + 1{,}04 \cdot 54{,}84$;

П $0{,}2 \cdot 7{,}25 \cdot 50 \cdot 10 : 5$;

К $21{,}3 \cdot 0{,}85 + 21{,}3 \cdot 9{,}15$;

Н $7040{,}06 \cdot 0{,}03 - 40{,}06 \cdot 0{,}03$;

У $543 + (748 - 443) - 648$;

И $\left(5\frac{16}{39} - \left(2\frac{16}{39} - 9\frac{6}{11}\right) - 5\frac{6}{11}\right) \cdot 28$.

б) Сопоставьте ответы соответствующим буквам – и вы узнаете фамилию поэта, автора высказывания: «Чтение – вот лучшее учение».

145	200	104	213	196	210

С **323*** Из некоторого натурального числа вычли сумму его цифр, затем в полученном числе зачеркнули одну цифру. Какую цифру зачеркнули, если сумма оставшихся цифр равна 2009?

324* Встретились три путника и решили, собрав все продукты, которые у них были, пообедать. У первого путника был хлеб, у второго – кувшин молока, а у третьего – 6 орехов. За обед третий путник заплатил двум другим 20 монет. Как им следует разделить эти деньги, чтобы каждый получил справедливую долю за свой вклад продуктов? Известно, что все ели поровну; 4 кувшина молока стоят столько же, сколько стоят 3 хлеба, а 1 кувшин молока стоит 36 орехов.

2.2.5. Решение задач с помощью сравнений

Будь благословенно божественное число, породившее богов и людей.

Пифагор Самосский (570 г. до н.э. – 490 г. до н.э.), древнегреческий философ и математик

Сравнения помогают решать множество практических проблем: проверять, например, правильность вычислений, составлять расписание занятий и соревнований, устанавливать признаки делимости чисел, определять, какой цифрой заканчивается число, простым или составным оно является и т. д.

В таких задачах переход к изучению остатков от деления на некоторое число позволяет решить задачи просто и красиво. Рассмотрим несколько примеров.

Задача 1. Определите, каким днем недели будет 1 июня 2011 года, зная, что 1 сентября 2010 года была среда.

Решение:

Так как дни недели повторяются каждые 7 дней, то, выбрав точку отсчёта, мы можем каждому целому числу a поставить в соответствие день недели, определяемый как остаток от деления a на 7.

Примем за точку отсчёта 1 сентября 2010 года и, так как это была среда, сопоставим дням недели следующие числа:

Ср	Чт	Пт	Сб	Вс	Пн	Вт
0	1	2	3	4	5	6

Посчитаем, сколько дней пройдёт с 1 сентября 2010 года до 1 июня 2011 года:

$$30 \cdot 3 + 31 \cdot 5 + 28 = 273 \text{ дня}.$$

Так как $273 \equiv 0 \pmod 7$, 1 июня 2011 года также будет среда.

Задача 2. Найдите остатки от деления на 7 натуральных степеней числа 3.

Решение:

Рассмотрим последовательные степени числа 3 и найдём числа, с которыми они сравнимы по модулю 7:

$$3^1 = 3 \equiv \mathbf{3} \pmod 7; \qquad 3^3 = 27 \equiv \mathbf{6} \pmod 7;$$

$$3^2 = 9 \equiv \mathbf{2} \pmod 7; \qquad 3^4 = 81 \equiv \mathbf{4} \pmod 7.$$

Чтобы находить остатки далее, нужно вычислять 3^5, 3^6, ... Но вы уже знаете, что это достаточно непросто. Сравнения помогают находить остатки от деления, не производя подобных вычислений.

Воспользуемся теоремой 3, п. 2.2.4. Так как $3^1 \equiv 3 \pmod 7$, а $3^4 \equiv 4 \pmod 7$, то

$$3^5 = 3^1 \cdot 3^4 \equiv 3 \cdot 4 \equiv 12 \equiv \mathbf{5} \pmod 7.$$

Найдем таким же способом остатки от деления на 7 следующих степеней 3:

$$3^6 = 3^1 \cdot 3^5 \equiv 3 \cdot 5 \equiv 15 \equiv \mathbf{1} \pmod 7,$$

$$3^7 = 3^1 \cdot 3^6 \equiv 3 \cdot 1 \equiv \mathbf{3} \pmod 7,$$

$$3^8 = 3^1 \cdot 3^7 \equiv 3 \cdot 3 \equiv 9 \equiv \mathbf{2} \pmod 7,$$

$$3^9 = 3^1 \cdot 3^8 \equiv 3 \cdot 2 \equiv \mathbf{6} \pmod 7,$$

$$3^{10} = 3^1 \cdot 3^9 \equiv 3 \cdot 6 \equiv 18 \equiv \mathbf{4} \pmod 7,$$

$$3^{11} = 3^1 \cdot 3^{10} \equiv 3 \cdot 4 \equiv 12 \equiv \mathbf{5} \pmod 7,$$

$$3^{12} = 3^1 \cdot 3^{11} \equiv 3 \cdot 5 \equiv 15 \equiv \mathbf{1} \pmod 7.$$

Мы видим, что за шестью первыми остатками 3, 2, 6, 4, 5, 1 следуют опять остатки 3, 2, 6, 4, 5, 1. Далее остатки будут периодически повторяться, так как, согласно нашему способу определения остатков, число 3 мы будем опять последовательно умножать на одни и те же остатки 3, 2, 6, 4, 5, 1.

Таким образом, не выполняя громоздких вычислений самих степеней, мы с помощью сравнений смогли быстро найти остатки от деления на 7 всех чисел вида 3^n $(n \in N)$.

Ответ: остаток r при делении на 7 чисел вида 3^n $(n \in N)$ равен:

$$r = \begin{cases} 3, \text{ если } n = 6k + 1; \\ 2, \text{ если } n = 6k + 2; \\ 6, \text{ если } n = 6k + 3; \\ 4, \text{ если } n = 6k + 4; \\ 5, \text{ если } n = 6k + 5; \\ 1, \text{ если } n = 6(k + 1), \text{ где } k \in N_0. \end{cases}$$

Периодичность в повторении остатков, которую мы обнаружили, является общим свойством остатков всех натуральных степеней. Так, справедлива следующая теорема.

Теорема о периодичности остатков. Для любых натуральных чисел a и m остатки от деления a, a^2, ..., a^n, ... $(n \in N)$ на m с некоторого момента начинают периодически повторяться. При этом периодическое повторение остатков начинается в тот момент, когда в последовательности остатков появляется остаток, совпадающий с одним из уже найденных.

Доказательство этой теоремы не входит в содержание нашего курса. Но данная теорема крайне важна, и мы будем пользоваться ею при решении практических задач, помня, что в дальнейшем мы должны будем научиться её доказывать.

С помощью этой теоремы легко доказать признак делимости на 9, который мы ранее использовали, но общее доказательство не приводили.

Признак делимости на 9. Натуральное число делится на 9 тогда и только тогда, когда сумма его цифр делится на 9.

Доказательство:

В десятичной системе счисления любое натуральное число A может быть представлено в виде

$$A = a_n \cdot 10^n + a_{n-1} \cdot 10^{n-1} + ... + a_1 \cdot 10^1 + a_0,\ n \in N,$$

где a_n, a_{n-1}, ... , a_1, a_0 – последовательно выписанные цифры данного числа.

Заметим, что $10^1 \equiv 1 \pmod 9$, $10^2 \equiv 1 \pmod 9$, и вообще, в соответствии с нашей теоремой, $10^k \equiv 1 \pmod 9$ для любого $k \in N$.

Тогда, согласно теоремам 1 и 3, п. 2.2.4:

$$a_n \cdot 10^n + a_{n-1} \cdot 10^{n-1} + ... + a_1 \cdot 10^1 + a_0 \equiv a_n + a_{n-1} + ... + a_1 + a_0 \pmod 9,$$

а значит, число A и сумма его цифр имеют одинаковые остатки от деления на 9. Откуда и следует, что натуральное число делится на 9 тогда и только тогда, когда сумма его цифр делится на 9, что и требовалось доказать. ▼

Аналогично можно доказать и известный нам признак делимости на 3.

Признак делимости на 3. Натуральное число делится на 3 тогда и только тогда, когда сумма его цифр делится на 3.

☺☺☺ Сформулируем и докажем теперь признак делимости на 11.

Признак делимости на 11. Натуральное число делится на 11 тогда и только тогда, когда разность между суммой его цифр, стоящих на чётных местах, и суммой его цифр, стоящих на нечётных местах, делится на 11.

Доказательство:

Так как $10 - (-1) = 11$, то на основании теоремы 1, п. 2.2.3, $10^1 \equiv -1 \pmod{11}$.

Далее аналогично:

$10^2 \equiv 1 \pmod{11}$, $\quad 10^3 \equiv -1 \pmod{11}$, $\quad 10^4 \equiv 1 \pmod{11}$.

И вообще, согласно теореме о периодичности остатков, для любого $k \in N$:

$$10^{2k-1} \equiv -1 \pmod{11}, \text{ а } 10^{2k} \equiv 1 \pmod{11}.$$

Тогда если n чётно, то произвольное натуральное число A имеет вид

$$A = a_n \cdot 10^n + a_{n-1} \cdot 10^{n-1} + \ldots + a_1 \cdot 10^1 + a_0 \equiv a_n - a_{n-1} + \ldots - a_1 + a_0 \pmod{11} \equiv$$
$$\equiv (a_n + \ldots + a_0) - (a_{n-1} + \ldots + a_1) \pmod{11}.$$

А если n нечётно, то

$$A = a_n \cdot 10^n + a_{n-1} \cdot 10^{n-1} + \ldots + a_1 \cdot 10^1 + a_0 \equiv -a_n + a_{n-1} - \ldots - a_1 + a_0 \pmod{11} \equiv$$
$$\equiv (a_{n-1} + \ldots + a_0) - (a_n + \ldots + a_1) \pmod{11}.$$

Значит, в обоих случаях мы получили, что всякое натуральное число A даёт тот же остаток при делении на 11, что и разность между суммой его цифр, стоящих на чётных местах, и суммой цифр, стоящих на нечётных местах, что и требовалось доказать. ▼

Сравнения также помогают решить задачи следующего вида.

Задача 3. Найдите остаток от деления 332^{223} на 7.

Решение:

Так как $332 = 7 \cdot 47 + 3$, то $332 \equiv 3 \pmod 7$. Значит, согласно теореме 3, п. 2.2.4,

$$332^{223} \equiv 3^{223} \pmod 7.$$

В задаче 2 данного пункта мы получили, что остаток от деления чисел вида 3^n ($n \in N$) на 7 зависит от того, какой остаток при делении на 6 даёт показатель степени, а именно:

$3^{6k+1} \equiv 3 \pmod 7$, $3^{6k+2} \equiv 2 \pmod 7$, $3^{6k+3} \equiv 6 \pmod 7$, $3^{6k+4} \equiv 4 \pmod 7$,

$3^{6k+5} \equiv 5 \pmod 7$, $3^{6(k+1)} \equiv 1 \pmod 7$, где $k \in N_0$.

И поскольку $223 = 6 \cdot 37 + 1$, то $3^{223} \equiv 3^1 \equiv 3 \pmod 7$. Значит, и число 332^{223} при делении на 7 будет иметь остаток 3.

Таким образом, вместо проведения громоздких вычислений, которые трудно вести даже с помощью компьютера (например, $332^4 = 12\,149\,330\,176$), мы смогли решить задачу всего за три шага:

$$332^{223} \equiv 3^{223} \equiv 3^1 \equiv 3 \pmod 7.$$

Мы видим, что теория сравнений помогает быстро и красиво решать задачи, которые на первый взгляд кажутся «неприступными». Именно такие теории в математике называют *красивыми*.

К **325** Определите, в котором часу прибудет поезд в пункт назначения, если:

а) поезд выехал в 9 часов 30 минут и был в пути 199 часов;

б) поезд выехал в 15 часов 15 минут и был в пути 180 часов;

в) поезд выехал в 23 часа 30 минут и был в пути 277 часов;

г) поезд выехал в 7 часов 45 минут и был в пути 236 часов.

326 Зная, что 1 сентября 2010 года среда, определите:

а) Каким днем недели был 1 ноября 2010 года.

б) Каким днем недели был 31 декабря 2010 года.

в) Каким днем недели был 8 марта 2011 года.

г) Каким днем недели был ваш день рождения в 2011 году.

327 Какие остатки дают натуральные степени числа a при делении на b?

а) $a = 2$, $b = 5$; в) $a = 3$, $b = 5$; д) $a = 4$, $b = 3$;

б) $a = 2$, $b = 7$; г) $a = 3$, $b = 7$; е) $a = 4$, $b = 5$.

328 Определите, не вычисляя частного, делится ли число a на 11:

а) $a = 124\ 567$; в) $a = 9\ 873\ 006$; д) $a = 10\ 863\ 774$;

б) $a = 6\ 268\ 614$; г) $a = 6\ 267\ 059$; е) $a = 26\ 067\ 228$.

329 Найдите остаток от деления a на b:

а) $a = 444^{333}$, $b = 7$; б) $a = 333^{444}$, $b = 7$; в) $a = 2^{431}$, $b = 11$.

330 Определите, делится ли число a на b:

а) $a = 333^{777} + 777^{333}$, $b = 5$; в) $a = 11^{100} - 1$, $b = 5$;

б) $a = 2^{100} + 3^{100}$, $b = 7$; г) $a = 2222^{5555} + 5555^{2222}$, $b = 3$.

331 Определите, какой цифрой оканчивается число:

а) 444^{999}; б) 333^{777}; в) 777^{111}; г) $222\ 222^{333\ 333}$.

332 Решите уравнения:

а) $5{,}5(7 - 3x) = |-39{,}7| - 6{,}3(2 - x)$;

б) $|-7{,}3| \cdot y - 3{,}2(2y + 3) = -5{,}9(2 - y) - |128| \cdot 0 - (-0{,}5)$;

в) $1{,}8x + |-0{,}5| \cdot x = -0{,}7(4 - 5x) + |3| \cdot (-2)$;

г) $|2{,}4| \cdot y + |-4| \cdot (-0{,}1y + 0{,}8) = |-0{,}7| \cdot (3y - 4) + |-1{,}7| \cdot (-y)$.

333 а) Числа 2146, 1991, 1805 дают равные остатки при делении на натуральное число, большее 1. Найдите это число.

б) Числа 3311, 1935, 1376 дают равные остатки при делении на натуральное число, большее 1. Найдите это число.

334 Докажите, что для целых чисел a и b верно, что если $a^2 + b^2$ делится на 3, то a делится на 3 и b делится на 3.

335 а) Пройдя половину пути, пешеход увеличил скорость на 25% и поэтому прибыл в пункт назначения на полчаса раньше запланированного. Сколько времени он шел?

б) Мама кенгуру погналась за своим детёнышем, когда между ними было 20 м. Прыжок мамы кенгуру равен 2 м, а её детёныша – 1 м. В то время как мама кенгуру делает 2 прыжка, её детёныш делает 3. Догонит ли мама кенгуру своего детёныша и за сколько прыжков?

в) Самолёт вылетает из пункта A в 8 часов и прилетает в пункт B в 10 часов. Обратно он вылетает из B в 12 часов и прилетает в A в 18 часов. При этом полет в обе стороны продолжается одно и то же время. Как такое возможно и чему равна продолжительность этого полета?

г) Два поезда движутся навстречу друг другу по параллельным путям – первый со скоростью 60 км/ч, а второй со скоростью 90 км/ч. Пассажир, сидящий во втором поезде, заметил, что первый поезд шёл мимо него в течение 6 с. Чему равна длина первого поезда?

336 а) Пешеход вышел из пункта A в пункт B, рассчитав свою скорость так, чтобы прийти в B через 4 часа. Одновременно из пункта B в пункт A выехал велосипедист, который проезжает это расстояние за 1 час. Через 48 мин после их встречи из B в A выехал другой велосипедист, который проезжает этот путь за 2 часа. За сколько минут до своего прибытия в B пешеход встретится со вторым велосипедистом?

б) Пройдя треть длины узкого моста, пешеход увидел позади себя приближающуюся к мосту машину. Тогда он побежал назад и встретился с машиной у начала моста. Если бы он побежал вперёд, то машина догнала бы его у конца моста. Во сколько раз скорость машины на мосту больше скорости бегущего пешехода, если скорость машины на мосту, на трассе и скорость бега пешехода постоянны?

337 Запишите в шестеричной системе счисления числа: а) 3; б) 6; в) 13; г) 19; д) 27; е) 41.

338 Запишите в десятичной системе счисления: а) 11001_2; б) 186_9; в) 3321_4; г) 76_{12}; д) 95_{16}.

Д **339** Зная, что 1 января 2010 года пятница, определите, каким днём недели будет ваш день рождения в тот год, когда вам исполнится 15 лет.

340 Какие остатки дают натуральные степени числа a при делении на b:

а) $a = 2$, $b = 8$; б) $a = 3$, $b = 6$; в) $a = 4$, $b = 7$?

341 Определите, не вычисляя частного, делится ли число a на 11:

а) $a = 2\ 747\ 943$; б) $a = 6\ 027\ 032$; в) $a = 10\ 860\ 481$.

342 Числа 901, 1696, 4293 дают равные остатки при делении на некоторое натуральное число. Найдите это число.

343 Найдите остаток от деления 555^{222} на 6.

344 Определите, делится ли число a на b:

а) $a = 444^{333} + 333^{444}$, $b = 7$; б) $a = 8^{200} - 5^{200}$, $b = 3$.

345 Определите, какой цифрой оканчивается число: а) 555^{777}; б) $333\ 333^{222\ 222}$.

346 Решите уравнение:

а) $6{,}8(9 - 1{,}5x) = |-26| + 3{,}5(4 - 2x)$;

б) $|-4{,}2| \cdot x + 1{,}2(-6x + 5) = -3{,}2(5 - 2x) - |2{,}1| \cdot (-7 - x) + |-0{,}4|$.

347 Когда Антон проехал одну треть пути от дома до офиса, ему позвонила Ксюша и сообщила, что в офис их пончиковой компании прибыли важные клиенты из Франции и необходимо, чтобы Антон приехал как можно быстрее. Антон увеличил скорость на 30% и прибыл в офис через 20 минут. Сколько времени потратил бы Антон на оставшийся путь, если бы не увеличил скорость?

348 Запишите в семеричной системе счисления числа:

а) 2; б) 7; в) 10; г) 14; д) 25; е) 38.

349 Запишите в десятичной системе счисления: а) 1011_2; б) 345_6; в) 12_9; г) 56_{12}; д) 72_{16}.

350 Вычислите и определите, какие остатки даёт натуральная степень данного числа при делении на 7:

$$\frac{5}{6} - 6\frac{5}{6} \cdot \left(\frac{11}{1591} - \frac{38}{1517}\right) : \frac{169}{1591}.$$

С **351*** Карл сказал однажды Кларе: «Я втрое старше, чем были вы, когда мне было столько лет, сколько вам теперь». Клара же сказала ему в ответ: «Когда мне будет столько лет, сколько вам теперь, нам вместе будет 77 лет». Сколько лет Карлу и сколько – Кларе?

352* В одной клетке квадратной таблицы 4 × 4 стоит знак «–», а в остальных – плюсы. Разрешается одновременно менять знак на противоположный во всех клетках одного столбца или одной строки. Докажите, что, сколько бы мы ни проводили таких замен, нам не удастся получить таблицу, состоящую из одних плюсов.

353* На доске написаны числа 1, 2, 3, ... 101. Разрешается стереть любые два числа и написать их разность. Повторив эту операцию 100 раз, мы получим одно число. Докажите, что это число не может быть равным 0.

Задачи для самоконтроля к главе 2

354 Делится ли произведение $20^2 \cdot 27^3$ на 12, 15, 17, 18, 35, 36? Обоснуйте свой ответ.

355 Докажите утверждение:

а) Если натуральное число a не делится на 5, то число $7a$ не делится на 5.
б) Если натуральное число b делится на 3, то число $2b$ делится на 6.
в) Если число $7c$ делится на 5, то число c делится на 5.
г) Если число $45d$ делится на 9, то число d не всегда делится на 9.

356 Найдите первое простое число, следующее за числом:

а) 50; б) 140; в) 220; г) 435; д) 520.

357 Запишите в каноническом виде разложение чисел на простые множители:

а) 1512; б) 4640; в) 64 800; г) 181 440.

358 Представьте дробь в несократимом виде:

а) $\frac{497}{781}$; б) $\frac{611}{799}$; в) $\frac{469}{1139}$; г) $\frac{1926}{6955}$.

359 Запишите три натуральных числа, дающих:

а) остаток 5 при делении на 7;
б) остаток 11 при делении на 21;
в) остаток 14 при делении на 15;
г) остаток 21 при делении на 48.

360 Докажите утверждение: «Если натуральное число при делении на 15 даёт остаток 7, то при делении на 3 оно даст остаток 1».

361 Отметьте на числовой прямой целые числа, которые:

а) при делении на 3 дают остаток 2;
б) при делении на (–7) дают остаток 6;
в) при делении на 9 дают остаток 7;
г) при делении на (–5) дают остаток 3.

Задачи для самоконтроля к главе 2

362 Найдите неполное частное и остаток при делении на (−11) следующих чисел:

а) 27; б) −31; в) −45; г) 198; д) −213; е) −398.

363 Разбейте множество целых чисел на классы по их остаткам при делении на:

а) 6; б) 9.

364 Запишите на языке сравнений следующие высказывания и докажите их истинность:

а) Число 261 679 делится на 11.

б) Число 740 630 при делении на 13 даёт остаток 7.

в) Числа 115 000 и 1 085 000 дают одинаковые остатки при делении на 97.

365 Найдите наименьшее натуральное число, сравнимое с числом 591 по модулю:

а) 3; б) 4; в) 5; г) 7; д) 9; е) 11.

366 Выполните указанное действие по модулю m:

а) $12 + 15$, $m = 11$; в) $7 - 31$, $m = 5$; д) $15 \cdot 7$, $m = 12$;

б) $38 - 11$, $m = 5$; г) $5 \cdot 31$, $m = 14$; е) 4^4, $m = 9$.

367 Какие приёмы сравнения обыкновенных дробей вы знаете? Сравните дроби:

а) $\frac{8}{15}$ и $\frac{9}{20}$; б) $\frac{4}{305}$ и $\frac{3}{229}$; в) $\frac{17}{15}$ и $\frac{961}{1008}$; г) $\frac{156}{157}$ и $\frac{157}{158}$; д) $\frac{1021}{1020}$ и $\frac{1020}{1019}$.

368 Сравните, не производя вычислений:

а) $\frac{14}{53}$ и $\frac{9}{8} \cdot \frac{14}{53}$; в) $9\frac{3}{5}$ и $9\frac{3}{5} \cdot \frac{7}{15}$; д) $499{,}98 \cdot 0{,}98$ и $499{,}98$;

б) $4\frac{9}{22}$ и $\frac{7}{9} \cdot 4\frac{9}{22}$; г) $\frac{4}{31}$ и $1\frac{7}{11} \cdot \frac{4}{31}$; е) $56{,}32$ и $56{,}32 \cdot 1{,}01$.

369 Выделите целую часть дроби:

а) $\frac{21}{4}$; б) $\frac{78}{27}$; в) $\frac{284}{43}$; г) $\frac{433}{67}$; д) $\frac{1112}{97}$; е) $\frac{1476}{109}$.

370 Запишите смешанное число в виде неправильной дроби:

а) $5\frac{4}{7}$; б) $8\frac{23}{32}$; в) $11\frac{7}{43}$; г) $15\frac{4}{9}$; д) $103\frac{2}{7}$.

371 Упростите выражение при допустимых значениях переменных:

а) $-x^2y : (-y^2)$; г) $y(y - 1) - (y - 2)(y + 1)$;

б) $(-11a) \cdot (-5c) : (-22c)$; д) $(nm - km) : m$;

в) $(x + 3)(x - 1) - x(x + 4)$; е) $(ab - a) : (b - 1)$.

372 Решите уравнение:

а) $2{,}3 : (3 - 11x) = |-34{,}5|$;

б) $|-5{,}1| \cdot x + 4{,}1(x - 2) = -3{,}3(4 - 3x) - (-1{,}8)$;

в) $4{,}7x + |-2{,}4| \cdot x = -1{,}2(3 - x) + |8{,}2| \cdot (-1)$;

г) $|-7{,}8| \cdot x + (-0{,}5x + 3) = |-2{,}6| \cdot (x - 5) + |-3{,}3| \cdot (-x)$.

373 а) Портной сшил 39 платьев, что составило 65% всего заказа. Сколько платьев заказали сшить этому портному?

б) Грузчику надо разложить 680 арбузов в два контейнера так, чтобы число арбузов в одном контейнере составляло 36% числа арбузов в другом контейнере. Сколько арбузов должен положить грузчик в каждый из этих двух контейнеров?

в) Из четырёх чисел первые три относятся как 0,5 : 0,3 : 2, а четвёртое составляет 15% третьего. Найдите эти числа, если известно, что третье число на 36 больше суммы всех остальных.

г) При проведении распродажи товара цену на него сначала снизили на 20%, затем новую цену снизили ещё на 15%, а затем провели снижение ещё на 10%. Как изменилась цена товара?

д) Катер при движении по реке прошел расстояние от города A до города B за 13 часов. На обратный путь ему потребовалось 8 часов. Найдите собственную скорость движения катера, если скорость течения реки равнялась 3 км/ч. Найдите с точностью до сотых среднюю скорость движения катера.

е) Два теплохода плывут по реке навстречу друг другу. Собственная скорость первого теплохода равна 31 км/ч, а второго – 35 км/ч. Через сколько времени они встретятся, если в данный момент расстояние между ними 528 км?

ж) Проехав половину пути, автомобилист уменьшил скорость на 40% и поэтому прибыл в пункт назначения на 2 часа позже запланированного. Сколько времени он ехал?

374 Найдите среднее арифметическое указанных чисел:

а) 7,5 и 3,8; б) 12,8; 39,4 и 72,6; в) 6,3; 13,2; 27,4 и 76,9.

375 а) Центральный банк в течение недели устанавливал следующий курс доллара США к рублю:

Пн	Вт	Ср	Чт	Пт	Сб	Вс
31,5473	31,6503	31,7477	32,6926	32,1457	31,7226	31,7226

Определите с точностью до десятитысячных средний курс доллара США на этой неделе.

б) На складе лежат 112 ящиков с яблоками. Их средний вес нетто равен 12,5 кг. После того как на склад поступило ещё 10 ящиков с яблоками, средний вес нетто ящика с яблоками стал равен 13 кг. Сколько кг яблок поступило на склад?

376 Вычислите:

а) $\dfrac{\frac{1}{3}\cdot(3{,}75-0{,}625)}{12{,}5\cdot 0{,}25}-\dfrac{1}{56}\cdot\dfrac{8\frac{4}{7}:2\frac{26}{77}}{\frac{1}{3}:18\frac{2}{3}\cdot 11}$; б) $2\cdot\dfrac{0{,}66+0{,}5+\frac{7}{40}+\frac{11}{20}}{0{,}0345:\frac{3}{4}-0{,}128\cdot 6\frac{1}{4}}-1\frac{7}{9}$;

в) $\dfrac{20{,}4\cdot 1\frac{1}{6}\cdot 3{,}8\cdot 0{,}26}{2{,}21\cdot 1{,}2\cdot 1{,}9\cdot 4\frac{2}{3}}$; г) $\dfrac{1{,}125+1\frac{3}{4}-\frac{5}{12}}{1\frac{5}{6}}:\dfrac{0{,}59}{\frac{21}{45}-\frac{5}{6}}+0{,}5\cdot\left(2+\dfrac{12{,}5}{5{,}75+0{,}5}\right)$;

д) $\dfrac{3\frac{3}{65}\cdot\frac{26}{99}+\left(2\frac{38}{45}-\frac{1}{15}\right):13\frac{8}{9}}{\frac{1}{85}\cdot\left(18{,}5-13\frac{7}{9}\right)}:\dfrac{0{,}55}{\frac{21}{45}-\frac{5}{6}}-\left(1{,}4+2\frac{1}{3}:1{,}75\right):0{,}205.$

Задачи для самоконтроля к главе 2

377 Найдите простые числа, лежащие между числами a и b:

а) $a = 1100$, $b = 1110$; б) $a = 1800$, $b = 1810$.

378 Докажите утверждение:

а) Произведение любых шести последовательных целых чисел делится на 360.

б) Число, записываемое 50 двойками, 50 единицами и 50 нулями, не может быть точным квадратом.

в) Если натуральное число делится на 3, то оно не может при делении на 6 давать остаток 4.

г) Если натуральное число при делении на 27 даёт остаток 8, то оно не делится на 3.

379 Проведите классификацию элементов множества A по остаткам от их деления на b:

а) $A = \{-58; -39; -21; 0; 11; 28; 47; 61; 97\}$, $b = 3$;

б) $A = \{-81; -54; -43; -24; 14; 26; 56; 85\}$, $b = 7$.

380 Найдите остаток от деления a на b:

а) $a = 222^{777}$, $b = 5$; б) $a = 444^{555}$, $b = 7$.

381 Определите, какой цифрой оканчивается число:

а) $777\,777^{999}$; б) $444\,444^{777}$.

382 Отметьте на числовой прямой все значения x, для которых:

а) $|x| \leqslant 5$; б) $|x| \geqslant 7$; в) $|x - 2| \geqslant 4$; г) $|x - 4| \leqslant 6$.

383 Нарисуйте диаграмму Эйлера–Венна для множеств A и B. Найдите их пересечение и объединение:

$A = \{a\colon a = 4n + 1;\ n \in N;\ 1 \leqslant n < 6\}$;

$B = \{b\colon b = 5m + 3;\ m \in N;\ 1 < m < 5\}$.

384 Известно, что точки A и B имеют координаты (-5) и 16. Найдите координату точки C, если известно, что:

а) $AC = BC$; б) $AC = 2BC$; в) $AC = 6BC$; г) $AC = 0{,}5BC$.

385 а) Сушёная смородина содержит 25% воды. Сколько воды надо выпарить из 5 т свежей смородины, содержащей 85% воды, чтобы получить сушеную смородину?

б) Кусок сплава меди и цинка массой 472 кг содержит 50% меди. Сколько меди надо добавить к этому куску, чтобы новый сплав содержал 80% меди?

в) За 1 кг помидоров и 10 кг огурцов заплачено 350 р. Если бы помидоры подорожали на 15%, а огурцы подешевели на 25%, то за такое же количество огурцов и помидоров заплатили бы 282 р. 50 к. Сколько стоил килограмм помидоров?

Глава 3

Законы равносильных преобразований алгебраических выражений

§ 1. Рациональные числа и законы арифметики

1. Множество рациональных чисел

И долг, и дело жизни математика – доказывать теоремы, и долг этот никогда не может быть надолго оставлен без внимания без неотвратимых следствий.

Андре Вейль (1906–1998),
французский математик

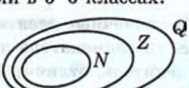
Натуральные числа появились в процессе счета предметов и измерения величин для ответа на вопрос «Сколько?». Однако если мы хотим измерять величины с хорошей точностью, то чисел натурального ряда нам не хватит. Ведь далеко не всегда значения длины, площади, объёма, массы, времени, температуры и т. д. выражаются натуральными числами. Так, нельзя, например, выразить натуральным числом продолжительность солнечных суток на Земле, Луне, Венере и других планетах, так же как и результат понижения температуры воздуха на 7 °С, если изначально она была равна 5 °С. В связи с этим возникает необходимость введения дробных и отрицательных чисел. Что же касается числа нуль, то оно возникло тогда, когда потребовалось показать отсутствие единиц определенного разряда в некотором числе, например 101, 10 001 и т.д.

Таким образом, потребности практических измерений и вычислений привели к развитию представлений о числе и появлению множеств ***натуральных чисел*** N, ***целых чисел*** Z, ***рациональных чисел*** Q, которые мы изучали в 5–6 классах.

$N = \{1, 2, 3, 4, 5, ...\}$;

$Z = \{... -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, ...\}$;

$Q = \left\{\frac{m}{n}, \text{ где } m \in Z, n \in N\right\}$.



Как мы уже знаем, результатом сложения и умножения натуральных чисел всегда будет натуральное число. Множество Z можно рассматривать как расширение множества N до множества, где всегда выполнима операция вычитания, а множество Q – как расширение множества Z до множества, где всегда выполнима операция деления на число, отличное от 0.

Из определения рациональных чисел следует, что любое рациональное число можно записать в виде обыкновенной дроби. Но нам известен и другой способ записи рациональных чисел – в виде десятичной дроби (конечной или бесконечной).

Например, записи $\frac{27}{1000}$ и 0,027 являются, по сути, разными обозначениями для одного и того же рационального числа. То же самое можно сказать и о записях $\frac{1}{3}$ и 0,333...

В связи с этим возникают вопросы:

- Любое ли рациональное число (то есть обыкновенную дробь) можно записать в виде десятичной дроби (конечной или бесконечной)? И если да, то как?
- Любая ли десятичная дробь является рациональным числом (то есть представима в виде обыкновенной дроби)? И если да, то как перевести данную десятичную дробь в обыкновенную?

Сначала ответим на эти вопросы для положительных рациональных чисел, а затем распространим полученные правила на все рациональные числа.

Конечные десятичные дроби

Мы уже знаем, что любую ***конечную десятичную дробь*** можно записать в виде обыкновенной, а вот обратный перевод можно выполнить не всегда. Вспомним известные нам правила перевода дробей, которыми мы пользовались в 5–6 классах.

> **Правило 1.** Чтобы конечную десятичную дробь представить в виде обыкновенной, можно записать эту дробь в числителе, отбросив запятую, а в знаменателе записать единицу со столькими нулями, сколько цифр справа от запятой.

Например:

$$3{,}407 = \frac{3407}{1000}; \qquad 0{,}09 = \frac{009}{100} = \frac{9}{100}.$$

> **Правило 2.** Несократимую обыкновенную дробь можно представить в виде конечной десятичной, если в разложении на простые множители знаменателя обыкновенной дроби нет множителей, отличных от 2 и 5. Чтобы выполнить перевод, можно привести обыкновенную дробь к знаменателю вида 10^n, где $n \in N$, и воспользоваться правилами записи десятичных дробей, либо разделить числитель обыкновенной дроби на её знаменатель.

Например:

$$\frac{49^{\backslash 5}}{20} = \frac{245}{100} = 2{,}45 \quad \text{или} \quad \begin{array}{r|l} -\,49{,}0 & 20 \\ \underline{40} & 2{,}45 \\ -\,90 & \\ \underline{80} & \\ -\,100 & \\ \underline{100} & \\ 0 & \end{array}$$

Бесконечные десятичные дроби

Если знаменатель несократимой обыкновенной дроби имеет хотя бы один простой делитель, отличный от 2 и 5, то в результате деления числителя на знаменатель получится бесконечная десятичная дробь, например:

$$\frac{74}{9} = 8{,}2222...; \qquad \frac{5}{111} = 0{,}045045045...; \qquad \frac{7}{22} = 0{,}31818....$$

Мы видим, что после запятой в полученных десятичных дробях одна и та же группа цифр с некоторого момента начинает повторяться бесконечное число раз. Такая группа цифр называется *периодом* бесконечной десятичной дроби и при записи может заключаться в круглые скобки, например:

$$\frac{74}{9} = 8{,}(2); \qquad \frac{5}{111} = 0{,}(045); \qquad \frac{7}{22} = 0{,}3(18).$$

Такие дроби называются ***периодическими десятичными дробями***.

Периодические десятичные дроби обладают удивительным свойством. Можно доказать, что любая обыкновенная дробь представима в виде периодической десятичной дроби, и обратно. Это означает, что *множество периодических десятичных дробей совпадает* со ***множеством рациональных чисел***. Для обоснования этого утверждения рассмотрим две теоремы.

Теорема 1. Любое положительное рациональное число можно записать в виде периодической десятичной дроби.

☺☺☺ *Доказательство:*

По определению, любое положительное рациональное число можно записать в виде обыкновенной дроби, где m, $n \in N$.

Если на некотором шаге деления числителя m этой дроби на знаменатель n получится остаток 0, то дробь можно записать в виде конечной десятичной дроби. А значит, её можно записать и в виде периодической десятичной дроби с периодом 0, например:

$$\frac{49}{20} = 2{,}45 = 2{,}45000... = 2{,}45(0).$$

Если же при делении m на n на каждом шаге деления мы получаем остаток, не равный 0, то в результате деления получится бесконечная десятичная дробь. При этом при делении на n число остатков равно $n - 1$ (остатки от 1 до $n - 1$). Поэтому, рассматривая подряд n остатков, мы обязательно найдём среди них два одинаковых.

Если все цифры делимого уже использованы, то при делении в столбик мы всё время приписываем к остатку нуль. И так как мы делим все время на одно и то же число, то с момента появления первого повторения в частном будет периодически повторяться одна и та же группа цифр.

Итак, в обоих случаях в результате деления m на n получится периодическая десятичная дробь, что и требовалось доказать. ▼

Так, например, при переводе дроби $\frac{7}{22}$ в десятичную мы делим 7 на 22. Поскольку мы все время делим на одно и то же число 22, то после повторного появления остатка 4 будут появляться в том же порядке одни и те же промежуточные делимые. А значит, и цифры частного будут периодически повторяться.

$$\begin{array}{r|l}
-\,7{,}0 & 22 \\ \cline{2-2}
\underline{6\,6} & 0{,}3181818... \\
-\,40 & \\
\underline{22} & \\
-\,180 & \\
\underline{176} & \\
-\,40 & \\
\underline{22} & \\
-\,180 & \\
\underline{176} & \\
-\,40 & \\
\underline{22} & \\
180... &
\end{array}$$

Верно и обратное утверждение.

Теорема 2. Любая положительная периодическая десятичная дробь является рациональным числом.

Мы не обладаем пока достаточными знаниями, для того чтобы доказать это утверждение в общем виде. Тем не менее рассмотрим на примерах идеи, используемые при его доказательстве, и на этой основе сформулируем (без доказательства) общее правило представления положительной периодической дроби в виде обыкновенной.

Пример 1. Представьте периодическую дробь 0,(25) в виде обыкновенной.

Решение:

Пусть $x = 0{,}(25)$. Тогда можно доказать, что при умножении x на 100 запятая сместится на два знака вправо, то есть $100x = 25{,}(25)$, и при вычитании из второго равенства первого мы сможем избавиться от бесконечного «хвоста»:

$$100x - x = 25{,}(25) - 0{,}(25) \Leftrightarrow 99x = 25 \Leftrightarrow x = \frac{25}{99} \Leftrightarrow 0{,}(25) = \frac{25}{99}.$$

Пример 2. Представьте периодическую дробь 2,1(36) в виде обыкновенной.

Решение:

Пусть $x = 2{,}1(36)$. Сначала представим данную дробь в виде, аналогичном рассмотренному в примере 1, то есть так, чтобы период начинался сразу после запятой:

$$x = 2{,}1(36) \Leftrightarrow 10x = 21{,}(36).$$

Теперь выполним те же преобразования, что и в примере 1:

$100 \cdot (10x) = 2136{,}(36) \Leftrightarrow 1000x = 2136{,}(36);$

$1000x - 10x = 2136{,}(36) - 21{,}(36) \Leftrightarrow 990x = 2136 - 21 \Leftrightarrow x = \dfrac{2136 - 21}{990}.$

Сокращая полученную дробь, приходим к ответу: $2{,}1(36) = \dfrac{25}{99}.$

Конечно, идеи, использованные при решении примеров 1 и 2, требуют строгого доказательства. На них основано также доказательство и общего правила записи положительной периодической десятичной дроби в виде обыкновенной.

Правило 3. Чтобы записать положительную периодическую десятичную дробь в виде обыкновенной, можно:
1) из числа, образованного цифрами, стоящими до второго периода, вычесть число, образованное цифрами, стоящими до первого периода, и записать эту разность как числитель;
2) в знаменателе записать цифру девять столько раз, сколько цифр в периоде, и после девяток записать столько нулей, сколько цифр между запятой и первым периодом.

Используя это правило, представим число $0{,}(629)$ в виде обыкновенной дроби. До первого периода в этом числе стоит цифра 0. Выделим теперь цифры, стоящие до второго периода:

$$0{,}(629) = 0{,}629(629).$$

Цифры 0629, стоящие до второго периода, образуют число 629. Значит, в числителе искомой дроби должна быть разность $629 - 0$. В периоде три цифры, поэтому в знаменателе записываем три девятки. И так как между периодом и запятой нет цифр, то после девяток нет нулей. Получаем:

$$0{,}(629) = \frac{629 - 0}{999} = \frac{17}{27}.$$

Аналогично рассуждая, можно записать число $8{,}21(6)$ как обыкновенную дробь:

$$8{,}21(6) = 8{,}216(6) = \frac{8216 - 821}{900} = \frac{7395}{990} = \frac{493}{60}.$$

Очевидно, что те же правила сохранятся и для отрицательных рациональных чисел, так как если мы поставим перед обыкновенной или десятичной дробью знак минус, то в записи изменится только знак. Что же касается числа 0, то оно может быть записано и в виде обыкновенной, и в виде периодической десятичной дроби, например, следующим образом: $0 = \dfrac{0}{1} = 0{,}(0).$

Таким образом, *любое рациональное число может быть записано в виде бесконечной периодической дроби, и обратно.* Значит, действительно запись в виде десятичной дроби (конечной или бесконечной периодической) есть другая форма записи рационального числа. И мы можем использовать для рациональных чисел ту форму записи, которая нам удобна в каждом рассматриваемом случае.

Итак, мы выяснили, что рациональные числа представляются *только* периодическими десятичными дробями. Однако существуют и непериодические десятичные дроби, например дробь 2,02002000200002...

Действительно, если бы данная дробь была периодической с периодом $n \in N$, то в ней с некоторого момента одна и та же группа из n цифр должна была бы периодически повторяться. Но в записи этой дроби количество нулей между двойками последовательно увеличивается на 1. Поэтому для любого натурального n мы всегда сможем найти как группу из n нулей, так и группу из n цифр, содержащую нули и двойки. Таким образом, дробь 2,02002000200002... – непериодическая.

Значит, существуют числа, не являющиеся рациональными. Такие ***непериодические бесконечные десятичные дроби*** назвали ***иррациональными***, то есть «нерацио-нальными», числами.

Про иррациональные числа мы пока ещё ничего не знаем – не умеем выполнять действия с ними, сравнивать их, но они нам уже встречались. Например, известное нам число $\pi = 3{,}14159265...$, выражающее отношение длины окружности к её диаметру, является одним из примеров иррациональных чисел. А если мы вычислим длину диагонали квадрата со стороной 1, то получим число $\sqrt{2} = 1{,}4142135...$, также являющееся иррациональным.

Но, прежде чем изучать свойства иррациональных чисел, нам надо разобраться с основными свойствами рациональных чисел и научиться уверенно выполнять все действия с ними.

К **386** Запишите десятичную дробь в виде обыкновенной:

а) 34,6; б) −49,37; в) 0,0157; г) −0,00013.

387 Докажите, что данную обыкновенную дробь можно перевести в десятичную, и выполните перевод:

а) $\frac{15}{300}$; б) $-\frac{7}{175}$; в) $\frac{21}{120}$; г) $-\frac{273}{728}$; д) $-\frac{693}{308}$; е) $\frac{1173}{1955}$.

388 Запишите данное рациональное число в виде периодической десятичной дроби:

а) $\frac{1}{2}$; б) $-\frac{27}{1}$; в) $-\frac{5}{30}$; г) $\frac{7}{11}$; д) $-\frac{61}{18}$; е) $\frac{15}{22}$; ж) $\frac{2}{13}$; з) $-\frac{113}{21}$.

389 Запишите периодическую десятичную дробь в виде обыкновенной:

а) 0,(7); в) 1,(25); д) −5,1(38); ж) −29,37(1);

б) −0,(15); г) −3,(781); е) 15,16(2); з) 315,2(76).

390 Сравните рациональные числа:

а) 0,091 и $\frac{1}{11}$; в) 0,(31) и 0,313; д) 0,(451) и $\frac{5}{11}$;

б) $-\frac{3}{11}$ и −0,3; г) −0,789 и −0,7(8); е) $-\frac{4}{7}$ и −0,(5).

391 Найдите значение выражения:

а) $\dfrac{0{,}6(4) - 0{,}4(8)}{\frac{7}{27}} \cdot \dfrac{3{,}512 + 2{,}488 - 1{,}2(3)}{14{,}3} \cdot 10$; в) $7{,}5 \cdot \frac{11}{25} - \left(2{,}(4) \cdot 5\frac{8}{11}\right) : \left(-\frac{35}{4}\right)$;

б) $3{,}5 - 2{,}(4) - 1{,}(5) - \left(0{,}5 + 0{,}(5) - \frac{2}{3}\right) : 0{,}(3)$; г) $\dfrac{\left(\frac{2}{3} + 1{,}(3)\right) : 0{,}25}{(5{,}(6) - 0{,}(42) + 1{,}(75)) \cdot \frac{5}{7}} \cdot \frac{9}{4}$.

392 Определите, является ли число рациональным, и обоснуйте свой ответ:

а) 0,125; в) 3,0030003; д) −5,06060606...;

б) −4,(27); г) −7,070070007...; е) 21,32332333233332...

393 Вычислите рациональным способом:

а) $9 + 27 + 3 + 6 + 5 + 4 + 5 + 2 + 8 + 1$; б) $0{,}125 \cdot 3{,}5 \cdot 80 \cdot \frac{1}{7}$; в) $97 \cdot 15 + 85 \cdot 97$.

г) $45\,786 - 8643 + 4214 + 38\,643$; ж) $339 \cdot 101 - 539 \cdot 101$;

д) $1 + 2 + 3 + ... + 98 + 99 + 100$; з) $580 : 7 - 600 : 14$;

е) $(553 + 796 - (353 - 204)) : (837 - 398 - (137 - 98))$; и) $37 \cdot 36 + 252 \cdot 9$.

394 Запишите выражение на математическом языке:

а) Сумма числа a и частного от деления b на c.

б) Частное от деления произведения чисел x и y на разность чисел m и n.

в) Число, обратное произведению чисел p, q, r.

г) Число, противоположное частному числа d и суммы чисел k и l.

д) Разность квадратов чисел a и b. ж) Сумма кубов чисел x, y и z.

е) Квадрат разности чисел a и b. з) Куб суммы чисел x, y и z.

395 Решите уравнение:

а) $0{,}5(x - 1) = -3(-0{,}05x - 1{,}7)$; в) $10(3y - 2) - 3(5y + 2) = -5(6y - 7) + 29$;

б) $-0{,}2(17 - 1{,}8y) = 0{,}3(0{,}4y - 1{,}2)$; г) $(5x - 1) - 3(0{,}9x - 0{,}1x) = 6(1{,}1 - 0{,}1x)$.

396 Постройте математическую модель и решите задачу:

а) Два пешехода вышли одновременно из двух городов навстречу друг другу и встретились через 2 часа. Скорости пешеходов 5 км/ч и 4 км/ч. Чему равно расстояние между городами?

б) Два автомобилиста выехали одновременно в одном направлении из двух городов, находящихся на расстоянии 150 км друг от друга. Скорость догоняющего автомобилиста равна 75 км/ч. Чему равна скорость второго автомобилиста, если встреча состоится через 10 часов?

в) Из пунктов A и B, находящихся на расстоянии 17 км друг от друга, выехали одновременно в противоположных направлениях два велосипедиста. Скорость первого велосипедиста равна 15 км/ч. С какой скоростью ехал второй велосипедист, если через 5 часов расстояние между ними стало равно 187 км?

г) Волк увидел зайца и погнался за ним. Скорость волка равна 750 м/мин, а скорость зайца равна 800 м/мин. Через 10 мин погони расстояние между ними стало равно 600 м. Какое расстояние было между волком и зайцем в тот момент, когда волк увидел зайца?

397 Из пунктов A и B, находящихся на расстоянии 16 км, одновременно навстречу друг другу вышли два пешехода. Первый пешеход шел со скоростью 3 км/ч, а второй – со скоростью 5 км/ч. Вместе с первым пешеходом из пункта A в пункт B побежала собака со скоростью 12 км/ч. Добежав до второго пешехода, она побежала обратно к первому. Так она бегала, пока пешеходы не встретились. Сколько километров пробежала собака?

Д **398** Запишите рациональное число в виде периодической десятичной дроби:

а) $-\frac{53}{10}$; б) $\frac{13}{15}$; в) $-\frac{98}{11}$; г) $\frac{102}{13}$.

399 Запишите периодическую десятичную дробь в виде обыкновенной:

а) 0,(2); б) −3,(12); в) −0,45(3); г) 1,2(36).

400 Сравните рациональные числа:

а) 0,7 и $\frac{7}{11}$; б) −0,(28) и −0,283; в) 2,(45) и $\frac{22}{9}$.

401 Найдите значение выражения:

а) $0{,}5(6) + 0{,}4(3) - \dfrac{\frac{1}{5} + \frac{1}{7}}{0{,}3(2)} : \dfrac{36}{203}$; б) $\dfrac{\left(3\frac{38}{45} - 2\frac{1}{15}\right) : 3\frac{5}{9} + 5\frac{14}{17} \cdot 0{,}(34)}{(13{,}(6) - 12{,}(7)) : \frac{1}{9}} \cdot 0{,}8$.

402 Определите, является ли число рациональным, и обоснуйте свой ответ:

а) −5,8; б) 15,0150015; в) −4,171171117...

403 Решите уравнение:

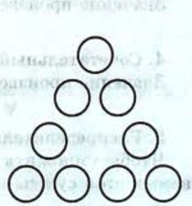
а) $0{,}15x + 1{,}575 - 0{,}875x = 0{,}0625x$;

б) $-2(x - 7) - 11 + 7(3x + 6) + 5(x - 3) = 0$.

404 Северный и южный склады пончиковой компании Антона и Ксюши находятся на расстоянии 30 км друг от друга. Антон был на северном складе, когда с южного склада повезли заказы клиентам компании в направлении, противоположном направлению на северный склад. После того как «газель» с заказами с южного склада уже уехала, Антон вспомнил, что хотел вместе с заказами передать подарки для клиентов. Он сел в свою машину, решив догнать «газель» и передать подарки. Сколько времени потребуется Антону для этого, если он будет ехать со скоростью 110 км/ч, скорость «газели» 60 км/ч и до момента выезда Антона она успела уже проехать 20 км?

С **405*** Для проведения новогоднего праздника закупили шоколадки. Их стали распределять по подаркам, и оказалось, что каждый раз, когда вкладывали в подарки по 2, 3, 4, 5, 6 или 7 шоколадок, всегда оставалась одна лишняя шоколадка. Сколько шоколадок купили, если их было меньше 500 штук?

406* Тетушка Леонсия большая любительница кошек и математики. Когда у нее спрашивают, сколько у неё кошек, она хитро улыбается и отвечает: «У меня пять шестых моих кошек плюс пять шестых кошки». Сколько кошек у тетушки Леонсии?



407* Расставьте числа от 1 до 9 в кружках так, чтобы сумма чисел на каждой стороне треугольника равнялась:

а) 17; б) 20.

3.1.2. Законы арифметических действий и равносильные преобразования

Цель математической строгости состоит в том, чтобы санкционировать и узаконить завоевания интуиции.

Жак Адамар (1865–1963),
французский математик

При решении практических задач мы часто составляем ***выражения***, то есть записи, состоящие из различных математических символов. Если выражения содержат только числа, знаки арифметических действий и скобки, задающие порядок этих действий, то их называют *числовыми*. Если же в состав выражений дополнительно входят буквы, то их называют *буквенными* выражениями.

Преобразуя выражения и вычисляя их значения, мы, естественно, стремимся сделать свои действия максимально простыми и удобными. Например, чтобы найти значение суммы $1 + 2 + 3 + ... + 1000$, мы не станем складывать подряд все числа от 1 до 1000, а заметим, что суммы $1 + 1000$, $2 + 999$, $3 + 998$ и т.д. равны между собой и что имеется всего 500 таких сумм. Значит, значение данного выражения равно

$$(1 + 1000) + (2 + 999) + (3 + 998) + ... + (500 + 501) = 1001 \cdot 500 = 500\,500.$$

Но почему при замене исходного выражения другим, новым выражением мы были уверены, что значения их равны? Потому что в процессе преобразований мы использовали законы арифметических действий (в данном случае переместительный и сочетательный законы сложения). Эти законы верны не только для данных чисел, но и для любых рациональных чисел. Поэтому мы можем сформулировать их в обобщенном виде и записать с помощью букв.

Вспомним основные законы арифметических действий с рациональными числами.

1. Переместительный (коммутативный) закон сложения.

Значение суммы не зависит от порядка слагаемых:

$$\forall\ a, b \in Q: a + b = b + a.$$

2. Сочетательный (ассоциативный) закон сложения.

Значение суммы не зависит от порядка действий:

$$\forall\ a, b, c \in Q: (a + b) + c = a + (b + c).$$

3. Переместительный (коммутативный) закон умножения.

Значение произведения не зависит от порядка множителей:

$$\forall\ a, b \in Q: ab = ba.$$

4. Сочетательный (ассоциативный) закон умножения.

Значение произведения не зависит от порядка действий:

$$\forall\ a, b, c \in Q: (ab)c = a(bc).$$

5. Распределительный (дистрибутивный) закон умножения.

Чтобы умножить число на сумму, можно умножить это число на каждое из слагаемых этой суммы и полученные результаты сложить.

$$\forall\ a, b, c \in Q: a(b + c) = ab + ac.$$

Можно доказать, что данные законы верны также для сумм с произвольным числом слагаемых и для произведений с произвольным числом множителей. Именно поэтому мы и имели возможность в предыдущем примере преобразовать исходную сумму так, чтобы легко было выполнить громоздкие вычисления.

Основные законы сложения верны также и для ***алгебраических сумм***, то есть выражений, содержащих несколько последовательных действий сложения и вычитания. Ведь операция вычитания рационального числа равносильна операции прибавления противоположного числа. Используя эти законы при преобразованиях алгебраических сумм, мы можем моментально найти значение, например, такого выражения:

$$1 - 2 + 3 - 4 + \ldots + 999 - 1000 = 1 + (-2) + 3 + (-4) + \ldots + 999 + (-1000) =$$

$$= (1 + (-2)) + (3 + (-4)) + \ldots + (999 + (-1000)) = (-1) \cdot 500 = -500.$$

Выявление общих свойств арифметических действий и их компактная запись с помощью букв стали «поворотным пунктом» в развитии математики: переходом от *арифметики* к *алгебре*.

Алгебра – это раздел математики, развитие которого связано с решением самых разных уравнений. Корни алгебры уходят в глубокую древность, а само название происходит от арабского *«аль-джебр»* (восполнение, воссоединение, связь) – приёма решения уравнений, описанного в трактате «Китаб аль-Джебр ва-ль-Мукабаля» арабского ученого Мухаммеда ибн Мусы аль-Хорезми (ок. 783 – ок. 850). Решение уравнений требует также и умения упрощать входящие в них выражения. Поэтому алгебра изучает также общие свойства арифметических действий, помогающие рационально проводить преобразования выражений.

Алгебра имеет дело с буквенными выражениями и их преобразованиями, поэтому буквенные выражения называют ещё ***алгебраическими***.

Преобразовывая сложные буквенные выражения в более простые, важно помнить о том, что в итоге мы должны получить ***равносильные выражения***. То есть такие выражения, которые при подстановке любых допустимых значений входящих в них букв будут давать одинаковое числовое значение. Ведь в противном случае мы не придём к верному решению нужной задачи.

Но как убедиться в том, что выполненные ***преобразования равносильны***, то есть что они привели нас к выражению, равносильному первоначальному? Как, например, убедиться в том, что выражения $5x - 2y - 3x + y$ и $2x - y$ равносильны? Ведь мы не можем перебрать все рациональные числа и убедиться в том, что оба выражения дают одинаковые числовые значения.

Здесь нам также помогают законы арифметических действий, ведь они верны для любых рациональных чисел. Так, исходя из этих законов и их обобщений, мы можем сформулировать следующие правила равносильных преобразований.

Правила равносильных преобразований

1. В любой алгебраической сумме можно произвольным образом переставлять слагаемые и объединять их в группы.
2. В любом произведении можно как угодно переставлять множители и объединять их в группы.
3. Если несколько слагаемых алгебраической суммы имеют общий множитель, то его можно вынести за скобку.

Например, равносильность приведённых выше выражений может быть обоснована с помощью этих правил следующим образом:

$$5x - 2y - 3x + y = \underline{5x} + (\underline{-2y}) + (\underline{-3x}) + \underline{y} = (5x + (-3x)) + ((-2y) + y) =$$
$$= (5 - 3)x + (-2 + 1)y = 2x - y.$$

Первый и последний шаги преобразований выполнены на основе правил арифметических действий с рациональными числами, второй шаг – на основе правила равносильных преобразований 1, а третий – на основе правила 3. Пользуясь правилами равносильных преобразований, мы можем упрощать не только алгебраические суммы, но и произведения:

$$12 \cdot a \cdot b \cdot \left(-\frac{1}{3}\right) \cdot a = 12 \cdot \left(-\frac{1}{3}\right) \cdot (a \cdot a) \cdot b = -4a^2\, b.$$

Здесь первый шаг преобразований выполнен на основании правила 2, а второй – на основе правил умножения рациональных чисел и определения степени числа.

Конечно же, указанный список правил не полный и существуют другие приёмы проведения равносильных преобразований. Поэтому мы будем постепенно пополнять его, увеличивая наши возможности красивого решения задач.

К **408** Как называются приведенные записи? На какие две группы их можно разбить?

а) $5{,}8$; в) $4x + 5 \cdot (-0{,}5y)$; д) $0 \cdot (1{,}7 - 3)$; ж) $2cd$;

б) $-3{,}2a + 4$; г) $-\frac{7}{12}$; е) $-6 \cdot (-4{,}2)$; з) $\frac{2x}{zy}$.

409 Введите буквенные обозначения и запишите все данные числовые выражения с помощью одного буквенного выражения. В чём состоит смысл использования буквенных обозначений?

а) $2 \cdot 5 + 3 \cdot 14$; б) $2 \cdot (-7) + 3 \cdot \frac{1}{24}$; в) $7{,}4 \cdot 2 - 3 \cdot 0{,}5$; г) $-2 \cdot 6{,}8 - 0{,}8 \cdot 3$.

410 Прочитайте выражения и вычислите их значения при указанных значениях букв (устно):

а) $17a + 13d$ при $a = 1$, $d = 0$; в) $3(p + q) \cdot (p - q)$ при $p = 6$, $q = 4$;

б) $6xyz$ при $x = 4$, $y = 0{,}25$, $z = \frac{1}{3}$; г) $-2(n + 5) : (m - 4)$ при $n = -5$, $m = 2$.

411 Назовите слагаемые указанных алгебраических сумм и запишите эти суммы, ставя между слагаемыми знак «+». Какие из данных алгебраических сумм являются равносильными выражениями? Почему?

1) $a + b - c + d$; 2) $a + c - b + d$; 3) $a + d - c + b$; 4) $d + b + a - c$.

412 Какие законы арифметических действий позволяют утверждать, что данные равенства верные?

а) $38 + 17 + 43 = 38 + (17 + 43)$; в) $15 \cdot 12 + 15 \cdot 8 = 15(12 + 8)$;

б) $25 \cdot 13 \cdot 4 = (25 \cdot 4) \cdot 13$; г) $28 \cdot 3{,}56 + 3{,}56 \cdot 72 = (28 + 72) \cdot 3{,}56$.

413 Определите, являются ли выражения A и B равносильными. И если да, то объясните, на основании каких правил равносильных преобразований вы сделали этот вывод.

а) $A = 7a + 15bc - 3a + 5bc$, $B = 4a + 20bc$;

б) $A = 3c - 6bc - 5a + 7bc$, $B = -2a + bc$;

в) $A = -12ac - 30c^2 - 18a^2$, $B = -6(2ac - 5c^2 - 3a^2)$;

г) $A = 2xy - 7xy^2 - 9x^2$, $B = x(-7y^2 + 2y - 9x)$.

414 Составьте по два числовых выражения, значение каждого из которых равно −7,2, используя при этом операции: 1) сложения; 2) вычитания; 3) умножения; 4) сложения, вычитания и умножения.

415 Упростите выражение. На основании каких правил равносильных преобразований вы действовали?

а) $7a + b + 2a - 2b$;
в) $3mn^2 - 7m^2n + 5mn^2 - 2m^2n$;
б) $\frac{5}{3}ax + \frac{1}{2}ax - \frac{2}{3}ax - \frac{3}{2}ax$;
г) $5c^2dk + 2cdk^2 - 3dkc^2 - 4k^2dc$.

416 При каких значениях переменных имеют смысл выражения:

а) $4a^3$; в) $\frac{12}{c-9}$; д) $\frac{1}{(x+3)(x-6)}$; ж) $\frac{5m}{(3m+4)(0{,}5m-3)}$;

б) $3b - 8$; г) $\frac{4d-5}{2d+7}$; е) $\frac{3y}{(2-y)(y+5)}$; з) $\frac{2(4-k)}{(k+0{,}5)(4-k)(4k-2{,}8)}$?

417 При каких значениях переменной x значение выражения равно a?

а) $\frac{45}{x-11}$, $a = 15$; б) $(0{,}3x + 9)^2 : 7$, $a = -5$; в) $(5 - x)(x + 4)$, $a = 0$.

П **418** Какие высказывания являются общими, какие – высказываниями о существовании, а какие – ни теми ни другими? Определите их истинность. Для ложных высказываний постройте отрицания.

а) Число, обратное 3, равно −3.
б) Модуль числа x может быть равен $-x$.
в) Произведение двух отрицательных рациональных чисел есть число положительное.
г) Разность двух положительных рациональных чисел может быть числом отрицательным.
д) Алгебраическая сумма рациональных чисел не зависит от порядка слагаемых.
е) Если в произведении рациональных чисел поменять порядок действий, то результат может измениться.

419 Решите задачу:

а) Лошадь съедает копну сена за 2 суток, корова – за 3, овца – за 6. За какое время съедят копну сена лошадь, корова и овца вместе?

б) Гаргантюа может съесть 10 т булочек за 14 дней, а вместе со своим сыном Пантагрюэлем – за 10 дней. За сколько дней может съесть 10 т булочек Пантагрюэль?

в) После того как соседи сверху забыли выключить воду, к нам стала протекать вода с верхнего этажа. К моменту, когда удалось вызвать аварийную команду и насосы начали откачивать воду, в комнате оказалось уже 300 вёдер воды. Известно, что один насос выкачивает за 2 часа 48 вёдер, а другой за 6 часов – 129 вёдер. Через сколько часов выкачают эти два насоса всю воду, если в течение 4 часов с начала работы насосов ежечасно с верхнего этажа будет поступать 16 вёдер воды?

г) Через кран вода заполняет пустой бак за 3 часа, а через сливное отверстие вода из полного бака вытекает за 5 часов. Считая, что скорость заполнения бака и вытекания из него воды постоянна, определите, за какое время вода наполнит из этого крана пустой бак при открытом сливном отверстии.

420 Вычислите:

а) $(5{,}7 + 3{,}2) - (3{,}2 - 5{,}7) - 1{,}4$;
б) $-2{,}3 - (5{,}8 \cdot 25 - 6{,}3 \cdot 25) : 5$;
в) $0{,}01 : (0{,}34 : 34 - 0{,}17 : 34)$;
г) $22{,}5 : 3{,}75 - (208{,}45 - 2{,}5 \cdot 3.38)$;
д) $1{,}35 : 2{,}7 - (6{,}02 - 5{,}9) - 0{,}4 : 2{,}5 \cdot (4{,}2 - 1{,}075)$;
е) $4{,}3 - (3{,}5 - 1{,}44 : 3{,}6) - 1{,}44 : 3{,}6 \cdot (1{,}1 - 0{,}1)$.

421 Решите уравнение:

а) $3(y - 2) - 2(y + 5) - 5(6 - 7y) + 16y = 6$;
б) $-4(5x - 3) - 6(1 - x) - 1 = 7(2x - 4) + 5(3x - 2)$;
в) $0{,}5(2a + 4) - 0{,}2(3a - 7) + 3{,}6(a - 1) = -2{,}4(5 - a) - 4{,}2$;
г) $-0{,}7(2c - 5) - 0{,}1(4 - c) + 0{,}3(5 - 2c) + 6{,}9c = -(3 - c)$.

422 Найдите ошибку в рассуждении:

«Вы просите у меня отпуск? Вы же совсем не работаете, и сейчас я вам это продемонстрирую. Считайте вместе со мной.
Как известно, в году 365 дней. Каждые сутки вы спите 8 ч, что в сумме составляет $8 \cdot 365 = 2920$ ч, или 121 день 16 ч. Ежедневно вы не работаете ещё 8 ч, то есть в сумме 121 день 16 ч. Остаётся для работы всего:

365 дней – (121 день 16 ч) · 2 = 121 день 16 ч.

В году 52 воскресенья и 52 субботы. В эти дни вы также не работаете. Остаётся для работы всего 121 день 16 ч – 104 дня = 16 дней 8 ч. Как известно, в году 12 праздничных дней – с 1 по 5 января, 7 января, 23 февраля, 8 марта, 1 мая, 9 мая, 12 июня, 4 ноября, в которые вы также не работаете.
В итоге для работы остаётся всего 4 дня и 8 часов. И после этого вы говорите, что устали и вам нужен отпуск?»

Д **423** Определите, являются ли выражения A и B равносильными.

а) $A = 5x + 7y - 3x + 5y$, $B = 2x + 12y$;
б) $A = 3a - 5a^2 + 4b - 6b^2$, $B = -2a^2 - 2b^2$;
в) $A = 8m - 32n - 24mn$, $B = 8(m - 4n - 3mn)$;
г) $A = -5x - 7x^2 - 9x^3$, $B = -x(5 - 7x - 9x^2)$.

424 Упростите выражение:

а) $6x + 3y - 3x - 4y$;
б) $\frac{2}{5}cd - \frac{1}{3}cd + \frac{4}{15}cd + \frac{1}{6}cd$;
в) $4a^2 - 2b^2 - 9a^2 + 2b^2$;
г) $-0{,}3n^2 - 2{,}8n + n^2 + 1{,}8n$.

425 Карлсон может съесть 20 плюшек, банку варенья и килограмм конфет за 30 мин, а вместе с Малышом – за 20 минут. За сколько минут съест 20 плюшек, банку варенья и килограмм конфет Малыш?

426 При каких значениях переменных имеют смысл выражения:

а) $3a^5$; б) $\frac{2}{4y + 5}$; в) $\frac{8c}{(c - 5)(c + 2)}$; г) $\frac{m - 5}{(2m + 3)(6 - m)}$?

427 При каких значениях переменной y значение выражения равно c?

а) $\frac{16}{2y - 7}$, $c = 4$; б) $(y + 8)(5 - 3y)$, $c = 0$; в) $(y - 4)^2$, $c = -9$.

428 Пекарям пончиковой компании Антона и Ксюши необходимо выполнить два заказа: большой – для корпоративного праздника крупной компании, и в 2 раза меньший – для праздника небольшой компании друзей. Половину рабочего дня все пекари выполняли большой заказ, а на вторую половину дня они разделились пополам. Одна половина продолжала выполнять большой заказ, а другая половина принялась за выполнение маленького. К концу рабочего дня большой заказ был выполнен. На следующий день лишь один пекарь занимался маленьким заказом и к концу рабочего дня закончил его. Сколько пекарей в пончиковой компании Антона и Ксюши, если все они работают с одинаковой производительностью?

429 Решите уравнение:

а) $-2(3x - 5) - 4(2 - 4x) - 1 = 3(x - 5) + 5(2x - 1)$;

б) $0{,}3(y - 1) - 0{,}1(3y - 9) - 2{,}1(y + 4) = 5(y - 2) - 0{,}7(3y - 6)$.

430 Выполните вычисления и расшифруйте название науки о ледниках:

Я $2 + 0{,}43 + (7{,}57 - 4{,}1)$

Л $252 - (327{,}63 + 52) + 127{,}63$

Г $7{,}8 + 0{,}107 - (5{,}907 - 3)$

И $15{,}8 - 21{,}45 - (4{,}6 - 5{,}25)$

Г $41{,}5 - (20{,}7 + 18{,}5) + 10{,}7$

И $17{,}5 - (13{,}1 + 4{,}4) - 2$

Л $16{,}8 + 1{,}095 - (10{,}8 - 0{,}905)$

О $0{,}5 + 0{,}05 + (0{,}005 - 1{,}555)$

Ц $4 + 0{,}57 - (3{,}4 + 0{,}17)$

О $3{,}18 + 5{,}67 - (1{,}18 - 2{,}33)$

Я $-(16{,}4 + 13{,}2) + 10{,}4 - 2{,}8$

5	8	5,9	1	−5	−1	0	10	13	−2	−22

С **431*** **Куда потерялась монета? (Старинная задача)**

Три путешественника забрели на постоялый двор, хорошо покушали, заплатили хозяйке 30 монет и пошли дальше.

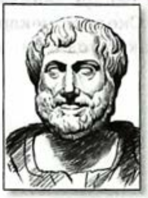
Через некоторое время после их ухода хозяйка обнаружила, что взяла с путешественников лишнее. Будучи женщиной честной, она оставила себе 25 монет, а 5 монет дала мальчику и наказала ему догнать путешественников и отдать им эти деньги.

Мальчик бегал быстро и скоро догнал путешественников. Как им делить 5 монет на троих? Они взяли каждый по 1 монете, а 2 монеты оставили мальчику за его быстроногость. Таким образом, они сначала заплатили за обед по 10 монет, но по 1 монете получили обратно. Следовательно, они заплатили всего $9 \cdot 3 = 27$ монет. Да 2 монеты остались у мальчика: $27 + 2 = 29$ монет. Но вначале-то было 30 монет. Куда делась 1 монета?

432* Сколько раз к наибольшему однозначному числу нужно прибавить наибольшее двузначное, чтобы получить наибольшее трехзначное число?

§ 2. Равносильные преобразования алгебраических выражений

3.2.1. Равносильные преобразования алгебраических сумм



Лучше в совершенстве выполнить небольшую часть дела, чем сделать плохо в десять раз более.

Аристотель (384 до н.э. – 322 до н.э.), древнегреческий философ и учёный

Порядок действий как в числовых, так и в буквенных (алгебраических) выражениях может быть задан расстановкой скобок разного вида, например круглых или квадратных. Поэтому для того, чтобы упрощать такие выражения, мы должны научиться производить равносильные преобразования алгебраических выражений со скобками. Как, например, упростить следующую алгебраическую сумму:

$$5x + 5y - (4y - 1 - 0{,}5(2x - 5y + 3(3y - 2x - 2(x + y))))?$$

Для этого вначале выясним, какие существуют правила раскрытия скобок.

Законы арифметических действий помогают нам получить следующие правила:

- Из сочетательного закона сложения следует, что если в обычной сумме перед скобками отсутствуют множители, то скобки можно просто убрать.
- Из распределительного закона следует, что если перед скобками, в которых записана сумма, стоит множитель, то скобки также можно опустить, умножив на этот множитель каждое слагаемое.

В принципе, этих правил вполне достаточно для того, чтобы упростить любую алгебраическую сумму, в том числе и приведённую выше. Неудобство состоит лишь в том, что каждый раз мы должны записывать упрощаемое выражение в виде суммы, то есть заменять в нём вычитание некоторого числа прибавлением противоположного ему числа. А это сделает наши преобразования слишком громоздкими.

Как этого избежать? Вспомним, что ранее мы пользовались простыми правилами раскрытия скобок, перед которыми стоят знаки «+» и «–», но не обосновывали их. Теперь нам надо эти правила обосновать.

Правило 1. Если в алгебраической сумме перед скобкой стоит знак «+», то после раскрытия скобок знаки слагаемых, расположенных в скобках, не изменяются.

Доказательство:

Рассмотрим алгебраическую сумму, в которой перед слагаемыми стоят как знаки «+», так и знаки «–». Заменим каждое действие вычитания прибавлением противоположного слагаемого. В соответствии с сочетательным законом сложения мы можем теперь убрать скобки, и знаки слагаемых при этом не изменятся. А значит, если бы мы с самого начала просто убрали скобки, то знаки слагаемых не изменились бы, что и требовалось доказать. ▼

Например:

$$a + (b - c) = a + (b + (-c)) = a + b + (-c) = a + b - c.$$

Правило 2. Если в алгебраической сумме перед скобкой стоит знак «−», то после раскрытия скобок знаки слагаемых, расположенных в скобках, изменяются на противоположные.

Доказательство:

Заменим в алгебраической сумме каждое действие вычитания прибавлением противоположного слагаемого.

Значение выражения в скобках при любых значениях входящих в него букв равно некоторому числу. Поэтому его вычитание также можно заменить операцией прибавления противоположного числа. Для этого выражение в скобках умножим на (−1).

При раскрытии скобок каждое слагаемое алгебраической суммы, находящейся в скобках, умножится на (−1) (в соответствии с распределительным законом). И, следовательно, знак каждого слагаемого изменится на противоположный, что и требовалось доказать. ▼

Например:

$$a - (b - c) = a + (-1) \cdot (b + (-c)) = a + (-1) \cdot b + (-1) \cdot (-c) = a - b + c.$$

Таким образом, мы приходим к следующим правилам раскрытия скобок при равносильных преобразованиях алгебраических сумм.

Правила раскрытия скобок в алгебраических суммах

1. Если перед скобкой стоит знак «+», то после раскрытия скобок знаки слагаемых, расположенных в скобках, не изменяются.
2. Если перед скобкой стоит знак «−», то после раскрытия скобок знаки слагаемых, расположенных в скобках, изменяются на противоположные.

Теперь, пользуясь этими правилами, упростим выражение, приведённое в начале пункта: $5x + 5y - (4y - 1 - 0{,}5(2x - 5y + 3(3y - 2x - 2(x + y))))$.

Начнём раскрытие скобок со скобки, расположенной внутри всех остальных. Упростим сначала выражение $3y - 2x - 2(x + y)$. Так как перед скобкой стоит знак «−» и множитель 2, то каждое слагаемое в скобке умножим на 2 и изменим его знак на противоположный, а затем приведем подобные слагаемые:

$$3y - 2x - 2(x + y) = \underline{3y} - \underline{\underline{2x}} - \underline{\underline{2x}} - \underline{2y} = y - 4x.$$

Подставим полученное выражение в следующую скобку и выполним дальнейшие упрощения: $2x - 5y + 3(y - 4x)$. Здесь перед скобкой стоит знак «+» и множитель 3, поэтому знаки слагаемых мы менять не будем, просто умножим каждое из них на 3:

$$2x - 5y + 3(y - 4x) = \underline{\underline{2x}} - \underline{5y} + \underline{3y} - \underline{\underline{12x}} = -10x - 2y.$$

Переходим к следующему выражению, снова применяя правило 2 раскрытия скобок и распределительный закон умножения:

$$4y - 1 - 0{,}5(-10x - 2y) = \underline{4y} - 1 + 5x + \underline{y} = 5y + 5x - 1.$$

И наконец, пользуясь правилом 2, раскроем последнюю скобку в исходном выражении. После раскрытия скобок мы видим, что в выражении имеются противоположные слагаемые, которые «взаимно уничтожаются»:

$$5x + 5y - (5y + 5x - 1) = \underline{\underline{5x}} + \underline{5y} - \underline{5y} - \underline{\underline{5x}} + 1 = 1.$$

Мы получили, что исходное сложное выражение при всех значениях x и y равно 1:

$$5x + 5y - (4y - 1 - 0{,}5(2x - 5y + 3(3y - 2x - 2(x + y)))) = 1.$$

Таким образом, проведённые преобразования очень сильно упростят последующую работу с данным выражением.

433 Найдите и запишите числа, противоположные данным:

а) 7,5; б) $-2\frac{5}{8}$; в) 0,4(15); г) $-(2 - 5 \cdot 4)$; д) $-a$; е) $(-m + n)$.

434 Назовите слагаемые алгебраических сумм и запишите их, ставя между слагаемыми знак «+». Раскройте скобки, используя законы арифметических действий:

1) $a - b + (c - d)$; 2) $-a - (b + c - d)$; 3) $a - (b - c) - d$; 4) $(a - d) - (b - c)$.

435 Раскройте скобки и приведите подобные слагаемые:

а) $(6 - x) - (4 - 2x)$;

б) $-(5y + 2) + (7y - 3)$;

в) $(-5a + 2c - b) - (4b - c - 5a)$;

г) $(3m - 5n - 4k) - (-6k + 3m) + 4n$;

д) $-3(2c - d) + 5(c - 2d)$;

е) $2(m + 4n) - 7(2m - n)$;

ж) $0{,}2(-3x + 15y - 4z) - 0{,}5(-x + 6y - 2z)$;

з) $-\frac{1}{3}\left(a - \frac{1}{2}b + \frac{3}{2}c\right) - \frac{1}{6}(3c + b - 2a)$.

436 Упростите выражение, выполняя равносильные преобразования:

а) $(2x + 3y) - ((x + 4y) - 6) - (x - 2y + 5)$;

б) $3a + ((a - c) + (c - b)) - (4a - b + c)$;

в) $-5y - (-5x - (3y - 2x - 3)) - (2x + 3 - 2y)$;

г) $(5a - 3c) - ((3c - 5a) - 2) - (-2c + (2 - 4c))$;

д) $((6a - 8b) - (3a - 11b)) - ((3b + 7a) - (5a + b))$;

е) $-(3m + 4n) - (3n - (4m + 5)) + (m - (9 - 6n)) - (2m - n)$.

437 Упростите уравнение, разделив обе его части на одно и то же не равное нулю число, а затем найдите его корни:

а) $9(7y - 5) - 3(9y + 11) = 6(15 - 4y) + 27$;

б) $4(34x + 26) - 16(5 - 3x) - 48 = 8(7x - 2) + 20(x - 4)$;

в) $28a - (43 + 8a) \cdot 7 = 14(16a - 9) + 56$;

г) $35c - 15(6c + 3) = 50 - (8c + 7) \cdot 5$.

438 Составьте выражение к задаче и, если возможно, упростите его:

а) Одним из участников эстафеты по биатлону была команда «Метеор», состоящая из 4 спортсменов. Первый биатлонист этой команды прошёл дистанцию за x мин, второй – на 10 мин медленнее первого, третий – на 6 мин быстрее второго, а четвёртый – на 15 мин быстрее третьего. Какой результат в минутах показала команда «Метеор» в этой эстафете?

б) В видеомагазине продают боевики, мелодрамы, комедии и документальные фильмы. Боевиков в этом видеомагазине всегда на 126 меньше, чем комедий, мелодрам – на 68 меньше, чем боевиков, а число документальных фильмов равно полусумме числа комедий и боевиков. Сколько всего фильмов в этом видеомагазине, если сейчас в продаже a комедий?

439 Упростите выражение:

а) $5 + ((2(x + 1) - 3x) + 5x) - 0{,}5(4x - (2x - 4)) + 4x - (5 - 2x)$;

б) $m + 3(n - (-m + k)) - 2(m - (m - 2n) - 4k) + 2(m + n - 2k)$;

в) $-(3(2a - b) + 2(2b - 1)) + 2(1 - (a - 4b) + 3(a - b) + 2) - (a + (b - 2a))$;

г) $p - 3(q - 2(r - s)) - (-p - 4(q - 1{,}5(r - s))) + (p + 2q - 3(p + q))$.

440 Решите уравнение:

а) $3(x + 2) + (x - 2(1 - x)) + (5 - (3x - 2(2 - 3x))) = -2$;

б) $5y + (1 - (3y - 5)) - ((9 - 5y) - 3) + 3(4 - 2y) = 9$;

в) $a - (2a + 2(a - (5 - a))) + 4 - 3(2a - (4a - 9)) + (a - 3 + 4a) = 5$;

г) $1 - ((c - 1) - 2(c + 2)) - 3c + (5c - 3(2c - 3(3c - 4))) = -6$.

441 Найдите значение буквенного выражения при указанных значениях букв:

а) $(x - (2xy - 3x)) - 4xy + 5x - (7 - (2 - (4 - xy - x - y)) - 25)$, если $x = 2$, $y = 5$;

б) $p + 3(2p - q) - 4p^2 - 3q^2 + 5 - 2(6 - 2p^2 - q^2) - 7p + 3q - pq$, если $p = 3$, $q = 0$;

в) $b - 0{,}4a + 0{,}2(3c - (d - 3a)) + 0{,}3(2c - 4d) - (-a - d + c)$, если $a = 0$, $b = 1$, $c = 2$, $d = 3$;

г) $4x - ((2x - 3y) - z) + 2x - 3(2y - (x - z)) + 3y + 0{,}5(2y - 3(-2z + 4x))$, если $x = 0{,}1$; $y = 0{,}2$; $z = 0{,}3$.

П **442** Пусть A – множество целых решений неравенства $|a| \leqslant 3$, а B – множество целых решений неравенства $-1 \leqslant b < 5$. Отметьте элементы множеств A и B на числовой прямой и запишите эти множества с помощью фигурных скобок. Найдите объединение и пересечение множеств A и B, нарисуйте для них диаграмму Эйлера–Венна.

443 Используя диаграммы Эйлера–Венна, определите правильность следующих логических выводов:

а) Если некоторые птицы плавают, то некоторые плавающие животные – птицы.

б) Если некоторые овощи красные, то некоторые красные предметы – овощи.

в) Если ни один поезд не летает, то ни один летающий предмет – не поезд.

г) Если ни один пингвин не живёт на Северном полюсе, то ни один живущий на Северном полюсе – не пингвин.

д) Если все пирожные сладкие и некоторые сладкие предметы из шоколада, то некоторые предметы из шоколада – пирожные.

е) Если все автомобили имеют двигатель и некоторые имеющие двигатель предметы не могут плавать под водой, то некоторые автомобили не могут плавать под водой.

ж) Если ни один мамонт не живёт в настоящее время, а некоторые живущие в настоящее время живут в Австралии, то некоторые живущие в Австралии – не мамонты.

з) Если все кактусы – цветы и ни один кактус не растет в лесу, то все цветы не растут в лесу.

444 Вычислите:

а) $\frac{1}{2} + \frac{2}{7} + 3\frac{3}{4} - \frac{5}{14} - 5\frac{4}{8} + \frac{9}{28}$; г) $\left(5\frac{4}{72} - 7\frac{7}{36} + 2\frac{3}{12}\right) \cdot 36$;

б) $1\frac{1}{3} - 4\frac{2}{5} + 1\frac{4}{15} - \frac{2}{9} + 3\frac{1}{6} - 1\frac{1}{30}$; д) $\left(45\frac{1}{2} - 30\frac{3}{8} + 15\frac{1}{4}\right) : 15$;

в) $2\frac{4}{15} : 3{,}4 \cdot 3\frac{1}{3} : \frac{2}{9}$; е) $\dfrac{\frac{2}{3} + \frac{5}{6} - \frac{7}{18}}{\frac{3}{5} + \frac{2}{15} + \frac{4}{45}} \cdot \frac{37}{90}$.

445 Упростите выражение при допустимых значениях переменных:

а) $\frac{6ab}{12bc}$; в) $\frac{-27a^2b}{-9ab^2}$; д) $\frac{-0{,}25a^2b^3}{20a^3b^3}$; ж) $\frac{0{,}12 \cdot 35x^3y^4}{0{,}7 \cdot 30x^4y^3}$;

б) $\frac{15xyz}{-5xz}$; г) $\frac{-18cdk^2}{6c^2d^2k}$; е) $\frac{4{,}8mn^2k^3}{-1{,}6m^2k^2n}$; з) $\frac{-0{,}44 \cdot 13a^3b^2c^4}{-0{,}143 \cdot a^2bc^3}$.

446 а) В каком отношении нужно смешать 50%-й и 70%-й растворы лимонной кислоты, чтобы получить 65%-й раствор лимонной кислоты?

б) Имеется два куска сплава меди и цинка с процентным содержанием меди 60% и 10% соответственно. В каком отношении нужно взять эти сплавы, чтобы, переплавив взятые куски вместе, получить сплав, содержащий 30% меди?

в) В сосуд ёмкостью 6 литров налито 4 литра 70%-го раствора серной кислоты. Во второй сосуд такой же ёмкости налито 3 литра 90%-го раствора серной кислоты. Сколько литров раствора нужно перелить из второго сосуда в первый, чтобы получить 75%-й раствор серной кислоты?

447 Найдите остаток при делении числа a на b, если известно, что:

а) число a при делении на 5 даёт остаток 2, а при делении на 3 – остаток 1 и $b = 15$;
б) число a при делении на 5 даёт остаток 1, а при делении на 3 – остаток 2 и $b = 15$;
в) число a при делении на 3 даёт остаток 1, а при делении на 4 – остаток 3 и $b = 12$;
г) число a при делении на 3 даёт остаток 2, а при делении на 4 – остаток 1 и $b = 12$.

Д **448** Раскройте скобки и приведите подобные слагаемые:

а) $(7x - 3) - (5x - 4)$; в) $-2(3a + b) + 3(2a - b)$;

б) $(m - n - k) - (k - m) + n$; г) $0{,}3(-c + 2d) - 0{,}4(c - d) + 0{,}5(c - 2d)$.

449 Выполняя равносильные преобразования, упростите выражение:

а) $-(a - 2b) - (5 - (2a + b)) + (4 - (a + b))$;

б) $((3m - 2n) - (m - 2)) - (3n - (n - 2)) + (-m - (m + 2n))$.

450 Упростите выражение:

а) $5x - 4(y + 2z) + 0{,}5(2x - 4(x + y) + 10z) - 3(x - 2y - z)$;

б) $-(0{,}2(c - 3d) - 1{,}4d - 4) - 2(3 - 0{,}4(c + 2d) - 0{,}3(4c - d)) - 3(c + d)$.

451 Составьте выражение к задаче и, если возможно, упростите его:
За контрольную работу в седьмых классах были получены следующие оценки: «5», «4» и «3». Пятерок оказалось на 9 меньше, чем четвёрок, и на 5 больше, чем троек. Сколько школьников писало эту контрольную работу, если четвёрки получили b семиклассников?

452 Упростите уравнение, разделив обе его части на одно и то же число, отличное от нуля, а затем найдите его корень:

а) $5(3a - 2) - 15(2a - 5) = 10(3 - 4a) + 25$;

б) $4(9x - 8) - 20(x - 4) = 16(3 + 2x) - 8(3x + 1)$.

453 Решите уравнение:

а) $3y + 0{,}5(2 - (6y - 8)) - 5((2 - 7y) - 11) - 49 + 6(2 - 3y) = -4$;

б) $4a - 0{,}2(3a + 4(2a - (6 - 3a))) + 28 - 3(4a - (2a - 5)) - (3a - 7 + 12a) = 14$.

454 Пусть A – множество целых решений неравенства $|a| \leqslant 2$, а B – множество целых решений неравенства $-1 < b \leqslant 3$. Отметьте элементы множеств A и B на числовой прямой и запишите эти множества с помощью фигурных скобок. Найдите объединение и пересечение множеств A и B, нарисуйте для них диаграмму Эйлера–Венна.

455 Определите правильность следующих логических выводов:

а) Если некоторые люди умеют писать стихи, то некоторые умеющие писать стихи – люди.

б) Если ни один шкаф в этой комнате не деревянный, то ни один деревянный предмет в этой комнате – не шкаф.

в) Если все фрукты растут на деревьях и некоторые растущие на деревьях предметы – зелёные, то некоторые зеленые предметы – фрукты.

г) Если ни один сотрудник пончиковой компании не опаздывает на работу, а некоторые опаздывающие на работу ездят на метро, значит, некоторые ездящие на метро – не сотрудники пончиковой компании.

456 а) На складе пончиковой компании Антона и Ксюши имеется 10 кг 7% -го сахарного сиропа и 20 кг 10%-го сахарного сиропа. Кладовщики перепутали наклейки на бутылках с сиропами и для того, чтобы не разбираться, где какой сироп, перелили все сиропы в одну бутылку. Какой концентрации сахарный сироп у них при этом получился?

б) Для нового рецепта пропитки для пончиков необходим 12% -й сахарный сироп. В каком отношении нужно смешать 15% -й и 5% -й растворы сахарного сиропа, чтобы получить сироп нужной концентрации?

457 Найдите остаток при делении числа a на 21, если известно, что:

а) число a при делении на 3 даёт остаток 2, а при делении на 7 – остаток 5.

б) число a при делении на 3 даёт остаток 1, а при делении на 7 – остаток 4.

С **458*** Борис задумал натуральное число, умножил его на 13, зачеркнул последнюю цифру результата. Полученное число он умножил на 8, опять зачеркнул последнюю цифру результата и получил 20. Какое число задумал Борис?

459* На полу площадью 12 м² лежат три ковра, площадь первого из них равна 5 м², площадь второго – 4 м², а третьего – 3 м². Каждые два ковра перекрываются на площади 1,5 м², причём 0,5 м² из этих 1,5 м² приходится на участок, перекрываемый всеми тремя коврами. Чему равна площадь пола, не покрытая ни одним ковром?

3.2.2. Равносильные преобразования произведений

Труден лишь первый шаг.

Марк Теренций Варрон (116 до н.э. – 27 до н.э.),
римский учёный-энциклопедист

В предыдущем пункте мы разобрались с тем, как раскрывать скобки в алгебраических суммах. Но при решении разного рода задач нам часто приходится сталкиваться и с алгебраическими выражениями, содержащими произведение и частное нескольких величин. Для указания порядка действий здесь также используются скобки, а значит, нам надо научиться раскрывать скобки и в этих выражениях.

Как, например, упростить следующее выражение:

$$7(c : 5) \cdot (2 : b) \cdot (a \cdot (3 : a) \cdot (b : c) : (21 : (2d))) \cdot (5 : d)?$$

Если $a, b, c, d \neq 0$, то данное выражение имеет смысл, поэтому мы можем упростить его. И здесь опять возникает вопрос: на основании каких законов можно осуществить равносильные преобразования в этом выражении?

Поскольку в основных законах арифметики даны правила только для преобразования сумм и произведений, то естественно свести действие деления к умножению, подобно тому, как мы свели вычитание к сложению.

Для этого воспользуемся тем, что частное чисел m и n, где $n \neq 0$, равно произведению числа m на обратное к n:

$$m : n = \frac{m}{n} = m \cdot \frac{1}{n}.$$

Значит, исходное выражение мы можем записать в виде:

$$7 \cdot \frac{c}{5} \cdot \frac{2}{b} \cdot \left(a \cdot \frac{3}{a} \cdot \frac{b}{c} \cdot \frac{2d}{21}\right) \cdot \frac{5}{d}.$$

Согласно сочетательному закону умножения, ***в любом произведении скобки можно опустить.*** Значит, мы можем сделать это и в нашем выражении. Запишем полученное произведение, представляя целое число или отдельную букву в виде дроби со знаменателем 1:

$$\frac{7}{1} \cdot \frac{c}{5} \cdot \frac{2}{b} \cdot \frac{a}{1} \cdot \frac{3}{a} \cdot \frac{b}{c} \cdot \frac{2d}{21} \cdot \frac{5}{d}.$$

Нам известно также, что произведение нескольких дробей равно дроби, в числителе которой стоит произведение числителей исходных дробей, а в знаменателе – произведение их знаменателей. Выполним данное преобразование и сократим полученную дробь:

$$\frac{\overset{1}{\cancel{7}} \cdot \overset{1}{\cancel{c}} \cdot 2 \cdot \overset{1}{\cancel{a}} \cdot \overset{1}{\cancel{3}} \cdot \overset{1}{\cancel{b}} \cdot 2 \cdot \overset{1}{\cancel{d}} \cdot \overset{1}{\cancel{5}}}{1 \cdot \underset{1}{\cancel{5}} \cdot \underset{1}{\cancel{b}} \cdot 1 \cdot \underset{1}{\cancel{a}} \cdot \underset{1}{\cancel{c}} \cdot \underset{\underset{1}{\cancel{3}}}{\cancel{21}} \cdot \underset{1}{\cancel{d}}} = 4.$$

Итак, пользуясь правилами равносильных преобразований, мы фактически доказали, что при всех допустимых значениях переменных (a, b, c, $d \neq 0$) верно равенство:

$$7(c : 5) \cdot (2 : b) \cdot (a \cdot (3 : a) \cdot (b : c) : (21 : (2d))) \cdot (5 : d) = 4.$$

Равенства, справедливые при любых значениях входящих в них букв, называют *тождествами*. Таким образом, правила равносильных преобразований позволяют не только упрощать выражения, но и доказывать тождества, некоторые из которых для алгебраических преобразований так же важны, как таблица умножения в вычислениях.

Перечислим правила равносильных преобразований произведений, которыми мы пользовались для упрощения исходного выражения.

Правила равносильных преобразований произведений

1. В выражениях операцию деления на число, отличное от нуля, можно заменить умножением на число, обратное делителю.

2. Произведение нескольких дробей можно записать как единую дробь, числитель которой равен произведению числителей исходных дробей, а знаменатель – произведению их знаменателей.

3. Если числитель и знаменатель дроби имеют общий множитель, отличный от нуля, то дробь на него можно сократить[1].

Воспользуемся полученными нами правилами для решения следующей задачи.

Задача. Найдите допустимые значения переменных и докажите тождество:

$$(3x - (2y - 3(5x - 2y))) : (9x - 4y) = 2.$$

Доказательство:

Поскольку делить на нуль нельзя, то равенство будет иметь смысл, только если $9x - 4y \neq 0$. Поэтому все значения переменных x и y, удовлетворяющие данному ограничению, и будут допустимыми значениями.

На основании установленных в данном пункте правил 1 и 2 мы можем для всех допустимых значений x и y записать:

$$(3x - (2y - 3(5x - 2y))) : (9x - 4y) = \frac{3x - (2y - 3(5x - 2y))}{9x - 4y}.$$

Упростим сначала числитель этой дроби, пользуясь правилами преобразования алгебраических сумм:

$$3x - (2y - 3(5x - 2y)) = 3x - (2y - 15x + 6y) = \underline{3x} - \underline{\underline{2y}} + \underline{15x} - \underline{\underline{6y}} =$$
$$= 18x - 8y = 2(9x - 4y).$$

Значит, наше исходное выражение равно дроби, в которой числитель и знаменатель имеют общий множитель $9x - 4y$, отличный от 0. Сократим на него дробь:

$$\frac{2\cancel{(9x - 4y)}^{1}}{\cancel{9x - 4y}_{1}} = 2.$$

Таким образом, мы получили, что, если $9x - 4y \neq 0$ (то есть при всех допустимых значениях переменных x и y), верно равенство

$$(3x - (2y - 3(5x - 2y))) : (9x - 4y) = 2,$$

что и требовалось доказать. ▼

[1] Строго говоря, данное преобразование является равносильным на множестве допустимых значений этой дроби. Более подробно мы будем разбираться с этим вопросом в 8 классе.

К **460** Найдите числа, обратные данным при допустимых значениях переменных:

а) 8; б) -12; в) $\frac{3}{7}$; г) $-2\frac{1}{4}$; д) a; е) $m - n$; ж) $-\frac{1}{x}$; з) $\frac{1}{c - d}$.

461 Упростите выражение при допустимых значениях переменных:

а) $(6 : (5x)) \cdot ((10x) : 3)$;

б) $(4a : c) \cdot (b^2 : (8a)) : b$;

в) $(-p^2 : (6q)) \cdot ((3q) : r) : p$;

г) $(9 : (a^2n)) \cdot a : \frac{1}{n^2} \cdot (-a : 15)$;

д) $(7 : m) \cdot m^2 \cdot (-x : a) : \frac{mx}{12} \cdot (-a^2 : 28)$;

е) $(20 : (-a^2b)) : \frac{c^3}{ab} \cdot ((ab) : 16) : (b : (4c^2))$;

ж) $-\frac{9}{bx} : (-a^2 : b^2) \cdot ((ay) : 18) : ((-by) : (2a))$;

з) $-5a^2y \cdot \frac{b^2}{6x} : (-b) : ((-xy^2) : 4) \cdot \left(-\frac{xy}{10ab}\right)$.

462 Определите, при каких значениях переменных имеют смысл выражения:

а) $\frac{1}{xy}$; б) $\frac{1}{(x-1)(x+2)}$; в) $\frac{x-3}{(x+5)(x-3)}$; г) $\frac{1}{mn} - \frac{1}{m-1}$; д) $\frac{(a-1)^2}{(a-1)} \cdot \frac{3}{a}$; е) $\frac{ab}{(c-d)} : \frac{(a-1)}{a}$.

463 Определите при допустимых значениях переменных, во сколько раз:

а) сумма трёх последовательных целых чисел больше среднего арифметического наибольшего и наименьшего из этих чисел;

б) сумма четырёх последовательных целых чисел больше суммы наибольшего и наименьшего из этих чисел.

464 Упростите выражение при допустимых значениях переменных, вынося при необходимости за скобки общий множитель:

а) $\frac{c-5}{5(c-2)}$; б) $\frac{x+7}{3x(x+7)}$; в) $\frac{a(5-d)}{4d(5-d)}$;

г) $\frac{m-n}{k(n-m)}$; д) $\frac{a+2b}{b(2b+a)}$; е) $\frac{x(3-4y)}{y(4y-3)}$;

ж) $\frac{10-5x}{x^2-2x}$; з) $\frac{2mn+m^2}{mn+2n^2}$; и) $\frac{a^2-ab}{b^2-ab}$;

к) $\frac{x-y}{2y+2x} \cdot \frac{x+y}{3x-3y}$; л) $\frac{pq-4q}{4pq} \cdot \frac{p^2q^2}{4p-p^2}$; м) $\frac{mn-ml}{nk+kl} \cdot \frac{nm+ml}{kl-kn}$.

465 Решите уравнение:

а) $(32x : 8) \cdot (5x^2 : x) : x = 4$;

б) $7(x-9)^2 \cdot \frac{5}{42(5x-45)} = 2$;

в) $(y-3) \cdot (5-y) : (2y-6) = 1$;

г) $\frac{(3x-6)(5x-1)(2x+16)}{(3x+24)(x-2)} = 18$.

466 Найдите значение буквенного выражения при указанных значениях букв:

а) $\frac{27dc^3}{9bc^2} \cdot \frac{4bc^2}{16bc} \cdot \frac{2b}{3cd}$ при $b = 1$, $c = 2$; $d = -1$;

б) $\frac{(4y-8)(6y-7)(3y-18)(8y+15)(2y+5)}{(2y-12)(15+8y)(7-6y)(3y-6)}$ при $y = -2$;

в) $\frac{(3x+7-(5-4x))(4y-9+(15-2y))(7x+2y-(4y-3x))}{4(3+y)(2+7x)}$ при $x = 1$, $y = -1$;

г) $\frac{5a^2b - 3ab^2 - (4a^2b - 2ab^2)}{4a^2b^2} \cdot \frac{12ab(2a+3b)}{(a-b)}$ при $a = 2$, $b = -1$.

467 Найдите допустимые значения переменных и докажите тождества:

а) $\dfrac{0{,}15xy^3 - 0{,}25x^3y - (0{,}05xy^3 - 0{,}2x^3y) + 0{,}05x^3y}{0{,}2xy^2} = 0{,}5y;$

б) $\dfrac{(7y - 21)(y - 5)(8y + 16)(11y + 17)(2y - 3)}{(3 - 2y)(8y - 24)(2 + y)(34 + 22y)\,(7y - 35)} = -0{,}5;$

в) $\dfrac{a + (b - (c - d)) - (a - (b - (c - d))) + (a + 2b - (a - b)) - 5b}{c - d} = -2;$

г) $\dfrac{(m^2 - (mn - 2m^2)) - 3mn + 2m^2 - (1 - (2 - (3 - mn - m^2)) - 2)}{2m - n} = 3m.$

468 Вычислите устно:

а) $(28 : 9) \cdot (9 : 7)$; б) $(-8 : 3) : (2 : 9)$; в) $-(72 : 17) \cdot (51 : 9) : (8 : 5)$.

469 1) Сформулируйте высказывания, обратные данным, и определите истинность прямых и обратных высказываний. Для ложных высказываний постройте их отрицания и установите истинность отрицаний:

а) Если целое число оканчивается на 0, то оно делится на 2 и на 5.

б) Если целое число делится на 2, то оно оканчивается на 2.

в) Если сумма цифр целого числа делится на 3 и число оканчивается на 5 или на 0, то оно делится на 15.

г) Если целое число кратно 3 и 5, то оно кратно 15.

2) Какие из приведённых высказываний являются равносильными? Приведите свой пример равносильных высказываний.

470 По таблице установите возможную формулу зависимости между переменными x и y и постройте график зависимости y от x на координатной плоскости.

а)

x	−2	−1	0	1	2
y	3	3	3	3	3

б)

x	−2	−1	0	1	2
y	6	3	0	−3	6

в)

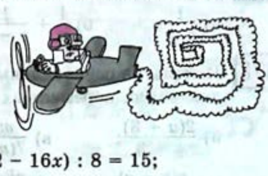
x	−2	−1	0	1	2
y	−4	−2	0	2	4

г)

x	−2	−1	0	1	2
y	0	2	4	6	8

Что общего у графиков всех этих зависимостей? Можно ли с помощью букв записать одну обобщённую формулу, частными случаями которой являются данные зависимости?

471 Решите уравнение:



а) $(12a - 4) : 4 + (15 - 5a) : 5 = 4;$

б) $(4x - 3 + 2x) : 3 - 27 = (6x - 21 + x) : 7;$

в) $(3x - 24 + 5x) : 8 - (42x - 30 + 6) : 6 - (8x - 32 - 16x) : 8 = 15;$

г) $(5x - 22 + 6x) : 11 + (7x + 26 + 6x) : 13 - (9x - 51 + 8x) : 17 = -24.$

472 Постройте математическую модель и решите задачу:

а) Завод запланировал произвести одинаковое количество продукции в течение каждого из первых двух лет своей работы. В действительности за первый год работы объём производства оказался выше запланированного, а в следующем году процент его роста по сравнению с запланированным оказался на 10 больше, чем в первом. Определите, на сколько процентов объём производства в первый год превысил запланированный, если известно, что за два года его общий прирост к запланированному составил 48,5%.

б) В банк положили вклад в размере 10 000 р. под 15% годовых. В конце первого года вкладчик дополнительно внёс на счёт некоторую сумму. К концу второго года размер его вклада был на 475% больше по сравнению с первоначальным вкладом. Какую сумму дополнительно внёс вкладчик на счёт в конце первого года?

473 Вычислите:

а) $2\frac{9}{49} + \left(-7\frac{3}{5} + 3\frac{40}{49}\right)$; в) $\frac{1}{2 \cdot 5} + \frac{1}{5 \cdot 8} + \frac{1}{8 \cdot 11} + \frac{1}{11 \cdot 14} + \frac{1}{14 \cdot 17}$;

б) $\frac{2}{3} + 2\frac{5}{6} : \left(11\frac{4}{7} - 10\frac{5}{14}\right)$; г) $\frac{1}{3 \cdot 7} + \frac{1}{7 \cdot 11} + \frac{1}{11 \cdot 15} + \frac{1}{15 \cdot 19} + \frac{1}{19 \cdot 23}$.

474 Докажите, что:

а) число 444...444 не делится на 8; в) число 53005300...5300 делится на 25;

б) число 1212...12 делится на 3; г) число 6363...63 делится на 9.

475 а) Миша и Серёжа записывают двенадцатизначное число, ставя по очереди цифры. Начинает Серёжа. Докажите, что какие бы цифры ни ставил Серёжа, Миша всегда сможет добиться того, чтобы полученное число делилось на 3.

б) Андрей и Иван записывают двадцатизначное число, ставя по очереди цифры. Начинает Андрей. Докажите, что какие бы цифры ни ставил Андрей, Иван всегда сможет добиться того, чтобы полученное число делилось на 9.

476 Упростите выражение при допустимых значениях переменных:

а) $(7 : 6x) \cdot (9x : 7)$; в) $(-5 : a^2) \cdot a \cdot (10 : (-ay)) : (2 : y^2)$;

б) $(-q^3 : p) \cdot (p^2 : q) : q$; г) $(11m^3 : (-mn)) : (-33m) \cdot (-6n^2 : m^2) : (n : (2,5m))$.

477 Определите, при каких значениях переменных имеют смысл выражения:

а) $\frac{1}{axc}$; б) $\frac{1}{p} + \frac{1}{p-1}$; в) $\frac{c+4}{(c+4)(c-7)}$; г) $\frac{mn}{(m+n)} : \frac{(n+3)}{m}$.

478 Используя равносильные преобразования, упростите выражение при допустимых значениях переменных:

а) $\frac{2(a+3)}{a+3}$; в) $\frac{m-n}{7(n-m)}$; д) $\frac{3bc-c^2}{-bc+3b^2}$; ж) $\frac{km-7k}{4km} \cdot \frac{8m^2}{m^2-7m}$;

б) $\frac{p(p-q)}{5q(p-q)}$; г) $\frac{x^2-xy}{y^2-xy}$; е) $\frac{an+5ad}{5d^2n+dn^2}$; з) $\frac{xy+xz}{xz-z^2} \cdot \frac{xz-x^2}{y^2+yz}$.

479 Решите уравнение:

а) $(7a : 12) \cdot (48a^3 : a) : a^2 = 7$; б) $\dfrac{(6x - 54)(3x - 11)(2x + 18)}{(5x + 45)(x - 9)} = 24$.

480 Найдите значение буквенного выражения при указанных значениях букв:

а) $\dfrac{54x^2y^3}{33zy^2} \cdot \dfrac{21yz^2}{9yxz^3} \cdot \dfrac{11z^3}{21xz}$ при $x = -1$, $y = -2$; $z = 1$;

б) $\dfrac{(9a - 27)(3a + 5)(4a - 32)(4a + 7)(7a - 3)}{(3a - 24)(10 + 6a)(-9 + 21a)(a - 3)}$ при $a = 2$.

481 Найдите допустимые значения переменных и докажите тождества:

а) $\dfrac{0{,}32ab^2 - 0{,}48a^3b^2 - (0{,}12ab^2 + 0{,}12a^3b^2) - 0{,}2b^2a}{-0{,}3a^3b} = 2b$;

б) $\dfrac{(6x - 36)(x + 11)(7x + 42)(2x + 5)}{(2x + 12)(-35 - 14x)(66 + 6x)(5x - 30)} = -0{,}1$.

482 Постройте математическую модель и решите задачу:

а) Антон и Ксюша запланировали в бюджете своей пончиковой компании произвести одинаковое количество пончиков в течение двух лет. В действительности в первый год работы объём производства продукции оказался выше запланированного, а в следующем году процент его роста по сравнению с запланированным оказался на 25 больше, чем в первом. Определите, на сколько процентов объём производства в первый год превысил запланированный, если известно, что за два года его общий прирост к запланированному составил 35%.

б) Количество сотрудников пончиковой компании Антона и Ксюши за год увеличилось на 10%, а количество топ-менеджеров уменьшилось на 1%. Сколько процентов от общего числа сотрудников пончиковой компании составляют теперь топ-менеджеры, если год назад их было 7%?

483 Какое минимальное количество цифр может быть в числе 111...11, если известно, что оно делится на 99?

C **484*** Можно ли расставить числа в таблице так, чтобы сумма в каждой строке была положительной, а в каждом столбце отрицательной?

485* Для того чтобы успеть на последнюю электричку, семье из четырёх человек нужно пройти по узкому мосту быстрее чем за 32 минуты. Одновременно по мосту могут идти не более двух человек, причём ввиду темного времени они должны переходить мост с фонариком. Если мост проходят двое, то они идут со скоростью того, кто идёт медленнее. Может ли успеть на последнюю электричку эта семья и как они должны переходить мост, если известно, что папа может перейти мост за 2 мин, мама – за 4 мин, их дочь – за 10 мин, а бабушка – за 16 мин? Известно также, что у них только один фонарик.

Задачи для самоконтроля к главе 3

486 Вычислите:

а) $36\,258 - 83\,764 + 73\,764 + 23\,742$;

б) $19 + 27 + 48 + 3 + 21 + 42 + 76 + 35 + 24 + 15$;

в) $(278 + 1092 - (478 - 308)) : (521 - 214 - (421 - 314))$;

г) $\frac{1}{3} + 1\frac{9}{11} + 5\frac{4}{11} - 3\frac{2}{11} + 2\frac{1}{2} - 4\frac{5}{6}$;

д) $121 \cdot 120 + 120 \cdot 79$;

е) $390 : 9 - 300 : 9$;

ж) $3\frac{2}{21} \cdot 5\frac{1}{3} : \frac{13}{7} \cdot \frac{9}{20}$;

з) $\left(5\frac{2}{33} - 1\frac{21}{44}\right) : \left(-3\frac{7}{12}\right) \cdot \left(0,35 - \frac{3}{5}\right) : \left(-\frac{1}{80}\right)$;

и) $-1\frac{4}{5} \cdot \dfrac{\frac{1}{4} + \frac{7}{12} - \frac{5}{36}}{\frac{2}{7} - \frac{1}{21} - \frac{5}{63}} \cdot \left(-\frac{8}{21}\right)$;

к) $\frac{1}{7 \cdot 11} + \frac{1}{11 \cdot 15} + \frac{1}{15 \cdot 19} + \frac{1}{19 \cdot 23} + \frac{1}{23 \cdot 27} + \frac{1}{27 \cdot 31} + \frac{1}{31 \cdot 35}$.

487 Запишите рациональное число в виде периодической десятичной дроби:

а) $\frac{17}{5}$; б) $-\frac{4}{9}$; в) $\frac{5}{12}$; г) $-\frac{47}{18}$; д) $\frac{98}{33}$; е) $-\frac{17}{13}$.

488 Запишите периодическую десятичную дробь в виде обыкновенной:

а) $0,(1)$; б) $-2,(54)$; в) $-8,(370)$; г) $3,0(36)$; д) $-10,47(2)$.

489 Сравните рациональные числа:

а) $0,584$ и $\frac{7}{12}$; б) $-\frac{7}{15}$ и $-0,(46)$; в) $0,(67)$ и $0,676$; г) $-0,384$ и $-0,(38)$; д) $0,(619)$ и $\frac{13}{21}$; е) $-0,1(67)$ и $-\frac{1}{6}$.

490 Упростите выражение:

а) $-4x + y + 5x - 3y$;

б) $1\frac{2}{3}ab - 2\frac{7}{15}ab - \frac{1}{5}ab + \frac{5}{6}ab$;

в) $-cd^3 - 2c^3d + cd^3 + 4c^3d$;

г) $0,5n + 0,2n^2 - 0,2n + 0,8n^2$.

491 Раскройте скобки и приведите подобные члены:

а) $(3a - 4) - (2a + 1)$;

б) $-(1,2 + 0,3b) - (-0,8 - 0,4b)$;

в) $2y + (-x + y - 4z) - (5z - x + 3y)$;

г) $\left(\frac{1}{7}cd - 3\frac{1}{2}c^2\right) - \left(\frac{5}{14}cd - 1\frac{1}{4}c^2\right) - \left(-\frac{8}{21}cd - 2,5c^2\right)$.

492 Упростите выражение, выполняя равносильные преобразования:

а) $(m + 6n) - ((2n - 4m) + 8) - (5m + 4n - 11)$;

б) $-(4p - 2q) + (-2p - (3q + 5)) - (2q - (7 + 6p)) - (p - 3q)$;

в) $5s + 4(t - 0,5(2r - 4s)) - (3s - 2(s - 2(t - r))) + 2(3t + r - 3(t + 2s))$.

493 Определите, при каких значениях переменных имеют смысл выражения:

а) $\frac{1}{2x \cdot 3y}$; б) $\frac{1}{3a^2b^3} - \frac{1}{(a-2)(b-2)}$; в) $\frac{p-7}{(p+7)(p-7)}$; г) $\frac{mn}{(n-3)} : \frac{(m-1)}{mn}$.

494 При каких значениях переменной x значение выражения равно a?

а) $\frac{31}{2x-19}$, $a = -62$; б) $(x-7)^2 : 3$, $a = -3$; в) $(4-x)(2x+5)$, $a = 0$.

495 Упростите выражение при допустимых значениях переменных:

а) $x : (2x - y) : y \cdot (y - 2x)$; в) $(ab) : (4b - 3) \cdot (4ab - 3a) : b$;

б) $-\frac{21}{ab} \cdot (3bc : 7) : (3a^2c) \cdot (-4a^3b) \cdot (5c : 12b^2)$; г) $(2b - 10ab) \cdot (-b) : (45ab - 9b^2)$.

496 Решите уравнения:

а) $5(6x - 7) - 2(4x - 3) = 4(6 - 5x) - 11$;

б) $0{,}4(3a - 5) - 0{,}1(4a - 6) - 2{,}1(a + 2) = 0{,}4(a - 3) - 1{,}6(2a - 3) - 0{,}2$;

в) $28b - 14(7b + 5) = -70 - (11b - 21) \cdot 7 + 21(b - 5)$;

г) $(5c - 33 + 4c) : 9 - (28c - 20 + 2) : 6 - (7c - 36 - 31c) : 12 = 6$.

497 Определите правильность следующих логических выводов:

а) Если некоторые теноры поют в Большом театре, то некоторые поющие в Большом театре – теноры.

б) Если ни один комар не долгожитель, то ни один долгожитель – не комар.

в) Если все компьютерные игры интересные и некоторые интересные вещи любимы школьниками, то некоторые любимые школьниками вещи – компьютерные игры.

г) Если все яхты плавают в море и некоторые плавающие в море предметы не имеют парусов, то некоторые яхты не имеют парусов.

д) Если ни один австралийский абориген не умеет решать уравнения, а некоторые умеющие решать уравнения умеют играть в шахматы, то некоторые умеющие играть в шахматы – не австралийские аборигены.

е) Если все студенты сдали зимнюю сессию и ни один сдавший зимнюю сессию не имел двоек на экзаменах, то все студенты не имели двоек на экзаменах.

498 Постройте математическую модель и решите задачу:

а) Два тракториста выехали одновременно из двух деревень навстречу друг другу и встретились через 3 часа. Скорости трактористов 10 км/ч и 11 км/ч. Чему равно расстояние между деревнями?

б) Два дальнобойщика выехали одновременно в одном направлении из двух городов A и B, находящихся на расстоянии 360 км друг от друга. Скорость одного дальнобойщика равна 65 км/ч. Чему равна скорость другого дальнобойщика, если встреча состоится через 9 часов? (Рассмотрите оба возможных варианта.)

в) Москва и Смоленск находятся на расстоянии 399 км друг от друга. Два бегуна выбежали одновременно в противоположных направлениях из Москвы и из Смоленска. Скорость первого бегуна равна 10 км/ч. С какой скоростью бежал второй бегун, если через 30 мин расстояние между ними стало равно 410 км?

Задачи для самоконтроля к главе 3

499 а) Миша съедает торт за 6 часов, Наташа – за 4, а Ваня – за 3. За какое время съедят этот торт Миша, Наташа и Ваня вместе?

б) Первый насос наполняет пустой бассейн за 15 часов, а второй насос выкачивает всю воду из бассейна за 25 часов. Считая, что скорости работы насосов постоянны, определите, за какое время будет наполнен этот бассейн, если он пустой и оба насоса начнут работать одновременно.

в) В каком отношении нужно смешать 10%-й и 25%-й раствор соляной кислоты, чтобы получить 18%-й раствор соляной кислоты?

г) Имеется два куска сплава меди и олова с процентным содержанием олова 9% и 27% соответственно. В каком отношении нужно взять эти сплавы, чтобы, переплавив взятые куски вместе, получить сплав, содержащий 17% олова?

500 На сколько процентов число A меньше числа B? На сколько процентов число B меньше числа A?

A $-0{,}4(3)\cdot\frac{15}{13}-\frac{3}{7}\cdot 0{,}6(2)\cdot 2\frac{1}{2}+\frac{\frac{1}{2}+\frac{1}{3}}{0{,}5(8)}:\frac{50}{53}$;

B $3\frac{1}{2}\cdot\frac{4}{49}-\left(2{,}(4)\cdot 2\frac{5}{11}\right):\left(-\frac{42}{5}\right)$.

501 Определите, является ли число рациональным:

а) 0,241; в) 1,010010001; д) −3,03030303...;

б) −7,(36); г) −9,090090009...; е) 4,525525525...

502 Решите уравнение:

а) $6x + 3(2 - (7x - 9)) - 2((3 - 8x) - 5) - 37 + 4(5 - 6x) = 89$;

б) $1 - ((y - 3) - 3(y + 5)) - 2y + 2(3y - 4(y - 0{,}5(2y - 8))) = -1$;

в) $41(x - 8)^2\cdot\frac{21}{41(7x - 56)} = 9$; г) $\frac{(5x - 35)(3x - 4)(7x + 42)}{(5x + 30)(7 - x)} = -21$.

503 Найдите значение буквенного выражения при указанных значениях букв:

а) $(2a - (3ab + 7a)) - 4ab + 5a - (5 - (9 - (7 - 8ab))) + 3$ при $a = -1$, $b = 8$;

б) $2m + 5(3n - m) - 7m^2 - 14n^2 + (7 - 3{,}5(-2m^2 - 4n^2)) + 4m - 5n$ при $m = 3$, $n = 0$;

в) $\frac{(5x + 9 - (7 - 3x))(6x - 6 - (15 - x))(9x + 7y - (13x - y))}{8(7 + 28x)(15 - 5x)}$ при $x = 5$, $y = -5$;

г) $\frac{6p^2q - 4pq^2 - (3p^2q - 5pq^2)}{5p^3q^3}\cdot\frac{21p^2q^2(3p - 3q)}{(7p - 7q)}$, при $p = 1$, $q = -1$.

504 Найдите допустимые значения переменных и докажите тождества:

а) $\frac{0{,}29ab^2 - 0{,}37a^3b - (0{,}15ab^2 - 0{,}16a^3b) + 0{,}21a^3b}{0{,}7ab} = 0{,}2b$;

б) $\frac{(5d - 40)(7d - 63)(6d + 9)(39d + 24)(10d - 16)}{(27 - 3d)(10d + 15)(16 + 26d)(56 - 35d)(3d - 24)} = 1$.

505 Какой цифрой оканчиваются числа:

а) 2^{100}; б) 3^{1000}; в) $3^{2^{100}}$; г) 7^{100}; д) $7^{2^{100}}$; е) 7^{7^7}?

Ответы

2. а) 12 лет; б) 3 дес. яиц; в) 540 м. **3.** а) 97,68 тыс. р; б) 32,68 Мб; в) 115,89 т. **4.** а) 1900 шт.; б) 640 тыс. р.; в) 400 р. **5.** а) 8 и 4; 3 и 9; б) 5 и 23; 13 и 15; 21 и 7; в) 9 и 35; 20 и 24; 31 и 13; 42 и 2; г) 11 и 36; 26 и 21; 41 и 6. **9.** а) −20; б) 3,2; в) 4; г) 5. **10.** а) 348 км; б) 1113 тыс. р.; в) 421, 385 и 154; г) 26,3 с. **11.** а) 625,57 тыс. р.; б) 24 чел. **13.** а) 13,7; б) 8,3. **15.** 26 вып. **16.** 75 ступ. **17.** 234 м². **19.** 2) 58°, 60°, 62°. **20.** а) 10; б) 1; в) 7. **23.** а) 12 км; б) 1620 чел.; в) 56 чел. **24.** а) 15 и 25; б) 36; в) 18. **25.** а) 3 года; б) 792,5 тыс. р. **26.** б) 3; в) $-4\frac{2}{3}$; г) −20; д) $-5\frac{5}{6}$; е) 15. **27.** 32°. **28.** 835 р. **29.** а) 563. **30.** а) $\frac{11}{35}$; б) 22,5; в) $1\frac{5}{7}$. **32.** В 8-ми. **41.** а) $a + 32 + b : 2{,}1$; 11; б) $4{,}7b - 3{,}3a$; $-9{,}72$; в) $(a : 5)(b - 34)$; 139,8; г) $(a - 90) : (b : 12)$; 100. **43.** в) $7c$; 0,98; г) $\frac{10d}{3}$; 300; д) $\frac{k}{m}$; 0,75; е) $\frac{n}{p}$; $\frac{4}{11}$. **44.** а) 37 128 р.; б) 167 640 р.; в) $\frac{19}{36}$. **45.** д) {−1; 0; 1}. **46.** $A > B$. **49.** 200 шт. **50.** 144 р. **52.** 1,5 ч. **59.** а) $21\frac{3}{7}$ ч; б) 6 ч 40 мин; в) 18 станков; г) 30 рабочих. **60.** а) 64 кг; б) 484 см; в) 21,75 ч; г) 2233 р. **61.** а) $4abc$; б) $2{,}5ax$; в) 3; г) 9; д) $3b$; е) $\frac{38x}{9}$; ж) $12an$; з) $\frac{5q^2}{4x}$. **65.** 1350 землекопов. **66.** Ксюша – 2 ч, Антон – 4 ч. **67.** $C > B > A$. **76.** а) $4xy$; б) $6a + 12b$; в) $13\frac{5}{11}x + 3y$; г) $5a + 10b$; д) $14x + 5y + 4z$; е) $59x - 22y - 17z$; ж) $6x - 4y$; з) $2d - 4c$. **77.** а) 181; б) −99; в) −355; г) −4. **78.** а) 70 дней; б) 12 ч; в) 6 чел. **82.** а) 632; б) 83. **84.** а) $8a - 8b$; б) $6{,}54x + 1\frac{3}{7}y$; в) $m - 2p$; г) $a - d + l$. **85.** Вторую бригаду. **86.** A – 7 об., B – 2 об. **94.** а) {1; 2; 4; 8; 16; 32}; б) {1; 2; 3; 6; 7; 14; 21; 42}; в) {1; 2; 3; 4; 5; 6; 10; 12; 15; 20; 30; 60}; г) {1; 3; 9; 27; 81}; д) {1, 7, 13, 91}. **95.** а) 1; б) 2; в) 3; г) 4. **96.** а) 75; б) 56; в) 90; г) 52. **97.** а) 3 ч. **98.** а) $\frac{1}{3}$; б) −67; в) $\frac{11}{48}$; г) $-3\frac{6}{13}$. **105.** а) НОД = 4, НОК = 1008; б) НОД = 6, НОК = 720. **106.** 4 км/ч. **107.** а) 0,6; б) 2,5. **110.** а) 55,5; б) 4,558; в) 3,46; г) −7,5. **111.** а) 2,77; б) 10,23; в) 1; г) 2. **112.** а) 34,4; б) −13,1; в) 78,2. **113.** а) 5068 м.; б) 1519 г. **114.** а) 164, 95 тыс. р.; б) 2256 авто. **115.** б) 90°. **116.** а) 22 374 кг; б) 10 052 мм; в) −43 ч. **117.** а) 23 дня; б) 2,5 ч. **122.** а) $\frac{3b}{2x}$; б) $\frac{6a}{7b}$; в) ax; г) $\frac{9y}{x}$; д) 1; е) $\frac{40b}{7a}$. **123.** г) {−2; −1; 0; 1; 2; 3}. **124.** а) 40 и 5; 28 и 17; 16 и 29; 4 и 41; б) 45 и 9; 28 и 26; 11 и 43. **137.** а) НОД = 15; НОК = 23 100; б) НОД = 195, НОК = 20 475; в) НОД = 56, НОК = $2^3\cdot3^2\cdot5^2\cdot7\cdot11\cdot13$; г) НОД = 1, НОК = $5\cdot7^2\cdot11\cdot13^2\cdot17\cdot19$. **140.** в) {372; 405; 10 350}; и) {31 808}; к) ∅; м) {700}. **141.** а) 9 км; б) 25%; в) 40%; г) 63 и 105; д) 25 200 р.; е) ум. на 12,5%; ж) похудел на 19%; з) ум. на 1%. **142.** а) 30 кг; б) 50 кг; в) 94,72%. **148.** а) НОД = 24; НОК = 27 720; б) НОД = 91; НОК = 20 020. **151.** г) {1260}; е) ∅; з){925; 40 375}; и) {150 024}; л) {1260}; м) ∅. **152.** а) 53 500 р.; б) 15,35%; в) прибыль – 31 732 р.; хватит; рентабельность – 59,31%. **163.** а) 4; б) 6; в) 9. **166.** ж) $-a$; з) b. **167.** а) 16; б) 150; в) 0,04; г) 50; д) 200; е) 28; ж) 2,5; з) 0,00125; и) 0,001. **168.** а) Карл V – 16 лет, Франциск I – 32 года, Людовик XIV – 72 года; в) 5620 р. **170.** а) под 10% – 675 тыс. р., под 6% – 1125 тыс. р.; б) 12 597,12 р.; в) 50 000 р.; г) 10%. **177.** г) $3a$; д) $-\frac{9b}{22}$. **178.** а) 140; б) 8000; в) 120; г) 34 000; д) 312 500; е) 500. **180.** 2; частное 0, остаток 2. **185.** в) 11 и 7; д) 2 и 35; е) 14 и 3. **186.** а) 11; б) 16; в) 25; г) 12. **191.** в) $n \ne 0$, $x - y$; г) $x \ne 1$, c; е) $a \ne b$, m. **192.** а) 7; б) −2; в) −17; г) $\frac{1}{3}$. **193.** а) Масштаб 10 : 1085, Цестия ≈ 36 м, Чолула ≈ 77 м, Хеопса ≈ 139 м; б) 46,4 м; в) 8 га 43 а 75 м²; г) 1:1200. **194.** а) 96 дн.; б) 25 дн. **197.** а) 32; б) 34. **200.** б) $a \ne 0$, $x \ne 0$, $\frac{x-y}{x}$; в) $n \ne 0$, $x \ne y$, $\frac{m}{n}$. **201.** а) 7; б) 2. **202.** За первое. **203.** 2,5 дня. **206.** е) 23. **207.** а) 13; б) 11; в) 41; г) 1; д) 17; е) 89. **209.** е) 36. **210.** а) {5; 10; 35; 70}; б) {12; 24; 36; 72}; в) {18; 54; 342; 1026}. **211.** а) $x = 28$, $y = 12$; б) $x = 35$, $y = 42$; в) $x = 60$, $y = 96$; г) $x = 231$, $y = 147$. **212.** а) 420 банок; б) 1200 м, 8 этапов. **213.** в) 1; г) 3; д) 12; е) 14. **215.** а) $C(10)$ или $C(34)$; б) $C(11{,}5)$ или $C(25)$; в) $C(13)$ или $C(20{,}5)$; г) $C(4)$ или $C(-20)$. **216.** а) $14x + 5y + 4z$; б) $3c + 3b - 2a$; в) $x - 5$; г) $-0{,}5a - b$. **217.** а) I – 462 тыс. пар, II – 306 тыс. пар; б) Петр I – 43 года, Иван Грозный – 37 лет. **218.** а) 203; б) 517. **220.** б) 2; в) 19. **221.** а) $-x - 5y$; б) $5{,}6a - 6b$. **222.** а) 1050 кг; б) Миша – 7000 р., Марина – 4060 р. **223.** а) $x = 15$, $y = 6$; б) $x = 24$, $y = 18$. **225.** рядом со II домом. **234.** в) 2; г) 0. **236.** г) {−6; −1; 4; 9}. **239.** а) $5\frac{5}{12}$; б) $6\frac{2}{3}$; в) $1\frac{1}{6}$; г) 5,4. **240.** а) 5,65; б) 41,6; в) 30,95. **241.** а) 13,8 км/ч, $v_{ср} \approx 13{,}15$ км/ч; б) 6 суток; в) 2 ч; г) 4 ч. **242.** а) 12 суток; б) 11 км/ч. **247.** а) 3; б) 2,5.

248. а) 23,05; б) 9,03. **249.** а) 3 суток 3 ч; б) 5866 шт. **250.** а) Е=1; Н=$\frac{3}{14}$; Й=20. **262.** а) −4; б) −8. **263.** а) 20,7°С; б) 108 р. **264.** а) Жан; б) 3 м/с. **268.** а) 1,6; б) 10. **269.** а) 18 234 р.; б) 63,6 км/ч. **270.** 13 ч 15 мин. **272.** 839. **273.** 23 года, 29 лет, 31 год. **277.** а) 1; б) 3; в) 5; г) 4; д) 1; е) 4. **278.** а) 4; б) 23; в) 25; г) 72; д) 17; е) 105; ж) 139; з) 219. **283.** а) a^2-4; б) b^2+2b-3; в) −2; г) $6-d$. **284.** а) −1; б) 0,5. **285.** а) 28 ч; б) $5\frac{5}{8}$ раб. дня; в) 6 сут. 16 ч; г) 8,5 мин. **290.** а) −5; б) −5,5. **292.** Смогут. **293.** а) $A=9$; $B=2$; б) 1. **295.** 15 мальчиков и 12 девочек. **296.** Петя − 65 шт., Ваня − 35 шт., Толя − 20 шт. **298.** 1) а) 8; б) 9; в) 17; г) 1; д) 6; е) 5; 2) а) 2; б) 5; в) 5; г) 16; д) 9; е) 6; 3) а) 15; б) 14; в) 9; г) 17; д) 3; е) 2. **299.** а) 12; б) 2; в) 1; г) 2; д) 2; е) 3; ж) 2; з) 4; и) 3. **307.** а) −6; б) −25; в) 8,4; г) 10; д) $\frac{2}{3}$; е) 8,36. **308.** а) {−5; 5}; б) ∅; в) {−9; 9}; г) ∅; д) {0}; е){−7; 7}. **309.** а) 2; б) $\frac{1}{16}$; в) $2\frac{2}{3}$; г) $-\frac{3}{4}$. **310.** а) Медь 360 г, олово − 180 г. б) 2 : 1; в) 4 т; г) 5 кг. **311.** 187,65 га. **312.** а) Наиб. − 75%, наим. − 60%; б) наиб. − 75%, наим. − 30%. **313.** 1) а) 13; б) 2; в) 4; 2) а) 9; б) 12; в) 16; 3) а) 5; б) 16; в) 8. **314.** а) 0; б) 1; в) 2; г) 6; д) 15; е) 2. **317.** а) 7; б) $\frac{5}{18}$. **318.** а) {−4; 4}; б) {−3; 3}; в) ∅; г) {−2; 2}. **319.** а) $\frac{1}{15}$; б) 7,5. **320.** ув. на 4%. **321.** 10%. **323.** 7. **324.** I − 15 монет, II − 5 монет. **325.** а) 16 ч 30 мин; б) 3 ч 15 мин; в) 12 ч 30 мин; г) 3 ч 45 мин. **329.** а) 6; б) 1; в) 2. **331.** а) 4; б) 3; в) 3; г) 2. **332.** а) 0,5; б) 0,34; в) $7\frac{1}{3}$; г) −3,75. **333.** а) 31; б) 43. **335.** а) 4,5 ч; б) 40 прыжков; в) 4 ч; г) 250 м. **336.** а) 96 мин; б) в 3 раза. **337.** а) 3_6; б) 10_6; в) 21_6; г) 31_6; д) 43_6; е) 105_6. **338.** а) 25; б) 159; в) 249; г) 90; д) 149. **342.** 53. **343.** 3. **345.** а) 5; б) 9. **346.** а) $6\frac{5}{8}$; б) 0,6. **347.** 26 мин. **348.** а) 2_7; б) 10_7; в) 13_7; г) 20_7; д) 34_7; е) 53_7. **349.** а) 11; б) 137; в) 11; г) 66; д) 114. **351.** Карл − 33 г., Клара − 22 г. **366.** а) 5; б) 2; в) 1; г) 1; д) 9; е) 4. **371.** а) $\frac{x^2}{y}$; б) $-2{,}5a$; в) $-2x-3$; г) 2; д) $n-k$; е) a. **372.** а) $\frac{4}{15}$; б) $4\frac{4}{7}$; в) −2; г) −2. **373.** а) 60 пл.; б) 180 арб. и 500 арб.; в) I − 20, II − 12, III − 80, IV − 12; г) ум. на 38,8%; д) 12,6 км/ч; ≈ 11,89 км/ч; е) 8 ч; ж) 8 ч. **374.** а) 5,65; б) 41,6; в) 30,95. **375.** а) ≈ 31,8898; б) 186 кг. **376.** а) 0; б) $-6\frac{7}{9}$; в) 1; г) $1\frac{1}{6}$; д) $-25\frac{1}{3}$. **380.** а) 2; б) 6. **381.** а) 3; б) 4. **384.** а) $C(5{,}5)$; б) $C(9)$ или $C(37)$; в) $C(13)$ или $C(20{,}2)$; г) $C(2)$ или $C(-26)$. **385.** а) 4 т; б) 708 кг; в) 50 р. **387.** а) 0,05; б) −0,04; в) 0,175; г) −0,375; д) −2,25; е) 0,6. **388.** а) 0,5(0); б) −27,(0); в) −0,1(6); г) 0,(63); д) −3,3(8); е) 0,6(81); ж) 0,(153846); з) −5,(380952). **391.** а) 2; б) $\frac{2}{3}$; в) 4,9; г) 3,6. **393.** е) 3; з) 40. **395.** а) 16; б) $12\frac{2}{3}$; в) 2; г) $2\frac{3}{8}$. **396.** а) 18 км; б) 60 км/ч; в) 19 км/ч; г) 100 м. **397.** 24 км. **398.** а) −5,3(0); б) 0,8(6); в) −8,(90); г) 7,(846153). **399.** в) $-\frac{34}{75}$; г) $\frac{68}{55}$. **401.** а) −5; б) 0,25. **403.** а) 2; б) −1,25. **404.** 1 ч. **405.** 421 шт. **406.** 5 кош. **417.** а) 14; б) ∅; в) {−4; 5}. **419.** а) 1 сут.; б) 35 дней; в) 8 ч; г) 7,5 ч. **420.** а) 10; б) 0,2; в) 2; г) −194; д) −0,12; е) 0,8. **421.** а) 1; б) 1; в) −10; г) −1,9. **424.** в) $-5a^2$; г) $0{,}7n^2-n$. **425.** 60 мин. **427.** а) 5,5; б) −8 и $1\frac{2}{3}$; в) ∅. **428.** 8 пек. **429.** а) 7; б) −0,4. **432.** 10 р. **435.** д) $-c-7d$; е) $15n-12m$; ж) $0{,}2z-0{,}1x$; з) $-c$. **436.** в) $x-6$; г) $10a$; д) $a+b$; е) −4. **437.** а) 3,25; б) $-\frac{2}{3}$; в) $-\frac{11}{12}$; г) −4. **439.** в) $8-a$; г) 0. **440.** а) 5; б) −3; в) 3,5; г) 1. **441.** а) −9; б) −7; в) 0,2; г) 0,6. **444.** а) −1; б) $\frac{1}{9}$; в) 10; г) 4; д) 2,025; е) $\frac{5}{9}$. **445.** г) $-\frac{3k}{cd}$; д) $-\frac{1}{80a}$; е) $-\frac{3nk}{m}$; ж) $\frac{y}{5x}$; з) $40abc$. **446.** а) 1 : 3; б) 2 : 3; в) $1\frac{1}{3}$ л. **447.** а) 7; б) 11; в) 7; г) 5. **448.** в) $-5b$; г) $-0{,}2c$. **449.** а) $2b-1$; б) $-6n$. **450.** а) x; б) −2. **452.** а) −0,4; б) −1. **453.** а) −1; б) 0,5. **456.** а) 9 %; б) 7 : 3. **457.** а) 5; б) 4. **458.** 20. **459.** 4 м². **461.** г) $-0{,}6n$; д) 3а; е) $-\frac{5}{c}$; ж) $-\frac{1}{x}$; з) $\frac{a}{3x}$. **463.** а) в 3 р.; б) в 2 р. **464.** г) $-\frac{1}{k}$; е) $-\frac{x}{y}$; з) $\frac{m}{n}$; и) $-\frac{a}{b}$; л) $-\frac{q^2}{4}$; м) $-\frac{m^2}{k^2}$. **465.** б) 21; г) ∅. **466.** а) 1; б) −2; в) 6; г) 3. **471.** а) 1; б) 25; в) −2; г) −27. **472.** а) 43,5%; б) 38 500 р. **473.** а) −1,6; б) 3; в) $\frac{5}{34}$; г) $\frac{5}{69}$. **476.** а) 1,5; б) $-pq$; в) $\frac{25y}{a^2}$; г) −5. **478.** в) $-\frac{1}{7}$; г) $-\frac{x}{y}$; д) $\frac{c}{b}$; е) $\frac{a}{dn}$; ж) 2; з) $-\frac{x^2}{yz}$. **479.** а) 0,25; б) 7. **480.** а) −4; б) 30. **482.** а) 22,5%; б) 6,3%. **483.** 18. **486.** в) 6; г) 2; е) 10; ж) 4; з) −20; и) 3; к) $\frac{1}{35}$. **492.** а) 3; б) $2-p$; в) $2r$. **494.** а) 9,25; б) ∅; в) {−2,5; 4}. **495.** а) $-\frac{x}{y}$; б) $\frac{5c}{b}$; в) a^2; г) $\frac{2b}{9}$. **496.** а) 1; б) 6; в) −3; г) −2,2. **498.** а) 63 км; б) 25 км/ч или 105 км/ч; в) 12 км/ч. **499.** а) 1 ч 20 мин; б) 37,5 ч; в) 7 : 8; г) 5 : 4. **502.** а) −3; б) 2; в) 11; г) $2\frac{1}{3}$. **503.** а) −8; б) 10; в) 3; г) 3,6. **505.** а) 6; б) 1; в) 1; г) 1; д) 1; е) 3.

Предметный указатель

Таблица квадратов натуральных чисел до 100

1^2	1	21^2	441	41^2	1681	61^2	3721	81^2	6561
2^2	4	22^2	484	42^2	1764	62^2	3844	82^2	6724
3^2	9	23^2	529	43^2	1849	63^2	3969	83^2	6889
4^2	16	24^2	576	44^2	1936	64^2	4096	84^2	7056
5^2	25	25^2	625	45^2	2025	65^2	4225	85^2	7225
6^2	36	26^2	676	46^2	2116	66^2	4356	86^2	7396
7^2	49	27^2	729	47^2	2209	67^2	4489	87^2	7569
8^2	64	28^2	784	48^2	2304	68^2	4624	88^2	7744
9^2	81	29^2	841	49^2	2401	69^2	4761	89^2	7921
10^2	100	30^2	900	50^2	2500	70^2	4900	90^2	8100
11^2	121	31^2	961	51^2	2601	71^2	5041	91^2	8281
12^2	144	32^2	1024	52^2	2704	72^2	5184	92^2	8464
13^2	169	33^2	1089	53^2	2809	73^2	5329	93^2	8649
14^2	196	34^2	1156	54^2	2916	74^2	5476	94^2	8836
15^2	225	35^2	1225	55^2	3025	75^2	5625	95^2	9025
16^2	256	36^2	1296	56^2	3136	76^2	5776	96^2	9216
17^2	289	37^2	1369	57^2	3249	77^2	5929	97^2	9409
18^2	324	38^2	1444	58^2	3364	78^2	6084	98^2	9604
19^2	361	39^2	1521	59^2	3481	79^2	6241	99^2	9801
20^2	400	40^2	1600	60^2	3600	80^2	6400	100^2	10000

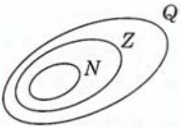
Простые числа до 1000

2	3	5	7	11	13	17	19	23	29
31	37	41	43	47	53	59	61	67	71
73	79	83	89	97	101	103	107	109	113
127	131	137	139	149	151	157	163	167	173
179	181	191	193	197	199	211	223	227	229
233	239	241	251	257	263	269	271	277	281
283	293	307	311	313	317	331	337	347	349
353	359	367	373	379	383	389	397	401	409
419	421	431	433	439	443	449	457	461	463
467	479	487	491	499	503	509	521	523	541
547	557	563	569	571	577	587	593	599	601
607	613	617	619	631	641	643	647	653	659
661	673	677	683	691	701	709	719	727	733
739	743	751	757	761	769	773	787	797	809
811	821	823	827	829	839	853	857	859	863
877	881	883	887	907	911	919	929	937	941
947	953	967	971	977	983	991	997		

Оглавление

* – звездочкой помечены пункты, содержание которых выходит за рамки программы базового курса математики

ЧИСЛОВЫЕ МНОЖЕСТВА



$N = \{1, 2, 3, 4, 5, \ldots\}$ — множество натуральных чисел

$Z = \{\ldots -2, -1, 0, 1, 2, \ldots\}$ — множество целых чисел

$Q = \{\frac{p}{q}$, где $p \in Z, q \in N\}$ — множество рациональных чисел

$$N \subset Z \subset Q$$

Основные свойства сложения и умножения

$a + b = b + a$ и $a \cdot b = b \cdot a$	переместительное свойство
$(a + b) + c = a + (b + c)$ и $(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$	сочетательное свойство
$(a + b) \cdot c = a \cdot c + b \cdot c$	распределительное свойство

Степени числа 2

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
2^n	2	4	8	16	32	64	128	256	512	1024

Степени числа 3

n	1	2	3	4	5	6
3^n	3	9	27	81	243	729

Степени числа 5

n	1	2	3	4
5^n	5	25	125	625

Квадраты и кубы чисел от 1 до 10

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
n^2	1	4	9	16	25	36	49	64	81	100
n^3	1	8	27	64	125	216	343	512	729	1000

Таблица квадратов двузначных чисел

Десятки	Единицы									
	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
1	100	121	144	169	196	225	256	289	324	361
2	400	441	484	529	576	625	676	729	784	841
3	900	961	1024	1089	1156	1225	1296	1369	1444	1521
4	1600	1681	1764	1849	1936	2025	2116	2209	2304	2401
5	2500	2601	2704	2809	2916	3025	3136	3249	3364	3481
6	3600	3721	3844	3969	4096	4225	4356	4489	4624	4761
7	4900	5041	5184	5329	5476	5625	5776	5929	6084	6241
8	6400	6561	6724	6889	7056	7225	7396	7569	7744	7921
9	8100	8281	8464	8649	8836	9025	9216	9409	9604	9801

ПРОЦЕНТЫ

Таблица дробей и процентов

Проценты	4%	5%	10%	12,5%	20%	25%	40%	50%	60%	75%	80%
Десятичные дроби	0,04	0,05	0,1	0,125	0,2	0,25	0,4	0,5	0,6	0,75	0,8
Обыкновенные дроби	$\frac{1}{25}$	$\frac{1}{20}$	$\frac{1}{10}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{2}{5}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{3}{5}$	$\frac{3}{4}$	$\frac{4}{5}$

ФОРМУЛЫ

Периметр	Площадь	Объём	Среднее арифметическое
$P_{\text{прям.}} = 2(a+b)$ $P_{\text{кв.}} = 4a$	$S_{\text{прям.}} = ab$ $S_{\text{кв.}} = a^2$	$V_{\text{пр. пар.}} = abc$ $V_{\text{куба}} = a^3$	$a_{\text{ср.}} = \dfrac{a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_n}{n}$

МЕТОД ПОСТРОЕНИЯ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ТЕОРИИ

В математике одни понятия определяются через другие, другие через третьи и т. д. Так как этот процесс не может продолжаться бесконечно, то вводятся неопределяемые понятия, которые называются **первоначальными**, или *основными*.

Первоначальное понятие ⇨ Определяемое понятие 1 ⇨ Определяемое понятие 2 ⇨ ...

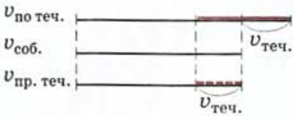
Начальные звенья в цепи математической теории называются **аксиомами.** Все остальные элементы цепи называютс **теоремами** и выводятся из аксиом путём **логических рассуждений.**

Аксиома ⇨ Теорема 1 ⇨ Теорема 2 ⇨ Теорема 3 ⇨ ...

Аксиоматический метод построения математической теории

1) Выбирается перечень первоначальных понятий.
2) Основные свойства первоначальных понятий задаются системой *аксиом*.
3) Новые понятия вводятся только с помощью первоначальных и ранее введённых понятий.
4) Новые утверждения (*теоремы*) доказываются только с помощью аксиом и ранее доказанных утверждений.

ЗАДАЧИ НА ДВИЖЕНИЕ ПО РЕКЕ



$v_{\text{по теч.}} = v_{\text{соб.}} + v_{\text{теч.}}$

$v_{\text{пр. теч.}} = v_{\text{соб.}} - v_{\text{теч.}}$

$v_{\text{соб.}} = (v_{\text{по теч.}} + v_{\text{пр. теч.}}) : 2$

$v_{\text{теч.}} = (v_{\text{по теч.}} - v_{\text{пр. теч.}}) : 2$

ЗАДАЧИ НА ОДНОВРЕМЕННОЕ ДВИЖЕНИЕ

	ДВИГАЮТСЯ В РАЗНЫХ НАПРАВЛЕНИЯХ	ДВИГАЮТСЯ В ОДНОМ НАПРАВЛЕНИИ
Вид движения	**Встречное движение**	**Движение вдогонку**
Скорость сближения	$v_{\text{сбл.}} = v_1 + v_2$	$v_{\text{сбл.}} = v_1 - v_2$
Формула одновременного движения	$s = v_{\text{сбл.}} \cdot t_{\text{встр.}}$	
Расстояние через время t ($t < t_{\text{встр.}}$)	$d_t = s - (v_1 + v_2) \cdot t$	$d_t = s - (v_1 - v_2) \cdot t$
Вид движения	**Движение в противоположных направлениях**	**Движение с отставанием**
Скорость удаления	$v_{\text{уд.}} = v_1 + v_2$	$v_{\text{уд.}} = v_1 - v_2$
Расстояние через время t	$d_t = s + (v_1 + v_2) \cdot t$	$d_t = s + (v_1 - v_2) \cdot t$

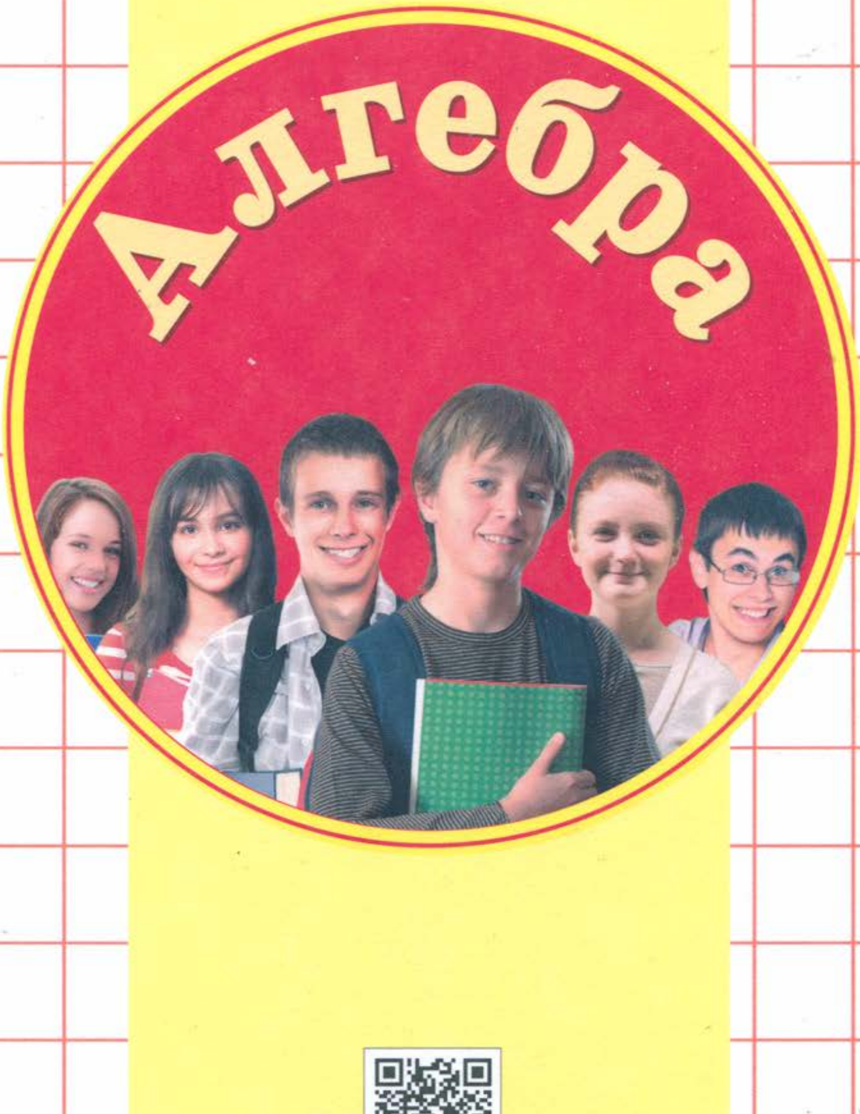
ЗАДАЧИ НА ДРОБИ

$1 - a$ $\frac{m}{n} - ?$	$1 - ?$ $\frac{m}{n} - b$	$1 - a$ $? - b$
$a \cdot \frac{m}{n}$	$b : \frac{m}{n}$	$b : a = \frac{b}{a}$
Общая формула решения задач на дроби: $b = a \cdot \frac{m}{n}$		

ЗАДАЧИ НА ПРОЦЕНТЫ

$100\% - a$ $p\% - ?$	$100\% - ?$ $p\% - b$	$100\% - a$ $?\% - b$
Чтобы найти **$p\%$ от числа**, можно это число умножить на дробь $\frac{p}{100}$: $a \cdot \frac{p}{100}$	Чтобы найти **число по его части, составляющей от него $p\%$**, можно эту часть разделить на дробь $\frac{p}{100}$: $b : \frac{p}{100}$	Чтобы найти, **сколько процентов первое число составляет от второго**, можно первое число разделить на второе и умножить на 100: $\frac{b}{a} \cdot 100$
Общая формула решения задач на проценты: $b = a \cdot \frac{p}{100}$		

ИЗДАТЕЛЬСТВО
БИНОМ



ISBN 978-5-09-081067-8
9 785090 810678