ЗАДАЧНИК ПО ВЫСШЕЙ МАТЕМАТИКЕ ДЛЯ ВУЗОВ

УЧЕБНОЕ ПОСОБИЕ

Издание второе,
стереотипное

Под редакцией
А. С. ПОСПЕЛОВА

ЛАНЬ®

САНКТ-ПЕТЕРБУРГ • МОСКВА • КРАСНОДАР
2011

ББК 22.1я73
З 15

З 15 Задачник по высшей математике для вузов: Учебное пособие. 2-е изд., стер. / под ред. А. С. Поспелова. СПб.: Издательство «Лань», 2011. — 512 с.: ил. — (Учебники для вузов. Специальная литература).

ISBN 978-5-8114-1024-8

Содержит задачи по всем разделам математики для изучения цикла естественно-научных и математических дисциплин, рассчитанного на подготовку бакалавров в соответствии с Федеральными государственными образовательными стандартами высшего профессионального образования 3-го поколения. Краткие теоретические сведения, снабженные большим количеством разобранных примеров, позволяют использовать методическое пособие для всех видов обучения.

ББК 22.1я73

Коллектив авторов:
В. Н. ЗЕМСКОВ, С. Г. КАЛЬНЕЙ, В. В. ЛЕСИН,
А. С. ПОСПЕЛОВ, А. А. ПРОКОФЬЕВ

Художественный редактор *С. Ю. Малахов*. Технический редактор *А. В. Андреев*
Корректоры *В. О. Логунова, А. М. Плетнева*. Подготовка иллюстраций *Н. Г. Брусянина*
Выпускающие *Е. А. Петрова, О. В. Шилкова*

ЛР № 065466 от 21.10.97. Гигиенический сертификат 78.01.07.953.П.007216.04.10
от 21.04.2010 г., выдан ЦГСЭН в СПб

Издательство «ЛАНЬ»
lan@lanbook.ru; www.lanbook.com
192029, Санкт-Петербург, Общественный пер., 5.
Тел./факс: (812) 412-29-35, 412-05-97, 412-92-72. Бесплатный звонок по России: 8-800-700-40-71

Подписано в печать 22.07.11.
Бумага офсетная. Гарнитура Школьная. Формат 70×100 $^{1}/_{16}$.
Печать офсетная. Усл. п. л. 41,60. Тираж 1500 экз.

Заказ №   .

Отпечатано в полном соответствии с качеством
предоставленных материалов в ОАО «Дом печати — ВЯТКА»
610033, г. Киров, ул. Московская, 122

Обложка
А. Ю. ЛАПШИН

ПРЕДИСЛОВИЕ

Общая структура учебно-методического пособия «Задачник по высшей математике для вузов» содержит необходимые материалы для обеспечения подготовки по программам математических курсов цикла естественно-научных и математических дисциплин по всем направлениям, перечисленным в Федеральных государственных образовательных стандартах высшего профессионального образования (ФГОС ВПО) 3-го поколения.

При составлении пособия авторы широко использовали методический опыт преподавания математических дисциплин в Московском институте электронной техники (техническом университете). В сборнике содержится большое число задач, составленных преподавателями кафедр высшей математики МИЭТ и используемых в обучении студентов. В сборник включены также задачи и из других широко известных изданий.

Каждый из разделов 12 глав пособия содержит необходимые теоретические сведения (определения, формулы, теоремы) и большое число подробно разобранных примеров. На этой основе в разделе сформулированы циклы типовых задач в количестве, достаточном для обеспечения как аудиторных занятий, так и домашних заданий студентов.

Такая структура организации материала в целом повторяет методику изложения, принятую в неоднократно переиздававшемся учебно-методическом пособии «Сборник задач по математике для втузов», часть 1–4, под редакцией А. В. Ефимова и А. С. Поспелова, хорошо зарекомендовавшем себя в организации повышенной математической подготовки студентов в образовательной области техники и технологий. Естественно, что часть простых задач этого сборника была использована при подготовке настоящего пособия.

Характерной особенностью предлагаемого пособия является возможность его использования для индивидуальной самостоятельной работы студентов. Циклы несложных задач легко трансформируются в индивидуальные типовые домашние задания по соответствующим разделам, а также самостоятельные работы текущего контроля.

Хотя работа по подготовке материала распределялась между авторами по главам, авторский коллектив в целом несет ответственность за допущенные ошибки, опечатки и неточности в изложении. Авторы заранее выражают свою благодарность за все критические замечания, которые могут возникнуть в процессе использования учебно-методического пособия, а также за указания на замеченные ошибки и неточности.

Теоретический материал набран петитом, начало решений разобранных примеров отмечено знаком ◄, а конец решения — знаком ►.

P. S. Когда работа над рукописью этой книги подходила к концу, скоропостижно умер ее редактор и соавтор, доктор физ.-мат. наук, профессор, заслуженный работник высшей школы РФ А. С. Поспелов. Светлая память об Алексее Сергеевиче надолго сохранится в его добрых делах. Авторы уверены, что настоящий Задачник — одно из таких дел.

ГЛАВА 1

АНАЛИТИЧЕСКАЯ ГЕОМЕТРИЯ

§ 1.1. ВЕКТОРНАЯ АЛГЕБРА

1. Определители 2-го и 3-го порядка

Определителем 2-го порядка, соответствующим квадратной матрице 2-го порядка $A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$ (или просто *определителем матрицы* A), называется число, вычисляемое по правилу

$$\det A=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}=a_{11}a_{22}-a_{21}a_{12}. \qquad (1.1)$$

Числа a_{11}, a_{12}, a_{21}, a_{22}, составляющие матрицу данного определителя, называют *элементами этого определителя*. Таким образом, *определитель 2-го порядка равен произведению элементов главной диагонали минус произведение элементов побочной диагонали*.

Аналогично, если $A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$ — квадратная матрица 3-го порядка, то соответствующим ей определителем 3-го порядка называется число, вычисляемое по *правилу Саррюса*

$$\det A=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}=$$
$$=a_{11}a_{22}a_{33}+a_{12}a_{23}a_{31}+a_{13}a_{21}a_{32}-a_{13}a_{22}a_{31}-a_{12}a_{21}a_{33}-a_{11}a_{23}a_{32}. \qquad (1.2)$$

Таким образом, *каждый член определителя 3-го порядка представляет собой произведение трех его элементов, взятых по одному из каждой строки и каждого столбца. При этом три произведения берутся со знаком плюс, если их образуют либо элементы главной диагонали, либо элементы, расположенные в вершинах треугольников с основаниями, параллельными главной диагонали, и три со знаком минус, если их образуют элементы, расположенные аналогично относительно побочной диагонали*.

ПРИМЕР 1.1. Вычислить определитель $\begin{vmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 2 & 5 & 3 \\ 3 & 4 & 2 \end{vmatrix}$.

◀ В соответствии с определением определителя 3-го порядка (формула (1.2)) получаем

$$\begin{vmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 2 & 5 & 3 \\ 3 & 4 & 2 \end{vmatrix} = 3\cdot5\cdot2+2\cdot3\cdot3+1\cdot2\cdot4-1\cdot5\cdot3-2\cdot2\cdot2-3\cdot3\cdot4=-3. ▶$$

В задачах 1.1–1.4 вычислить определители 2-го порядка.

1.1. $\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 2 \end{vmatrix}$. **1.2.** $\begin{vmatrix} \sin\alpha & \cos\alpha \\ -\cos\alpha & \sin\alpha \end{vmatrix}$. **1.3.** $\begin{vmatrix} \alpha+\beta & \gamma+\delta \\ \gamma-\delta & \alpha-\beta \end{vmatrix}$. **1.4.** $\begin{vmatrix} \sin\alpha & \cos\alpha \\ \sin\beta & \cos\beta \end{vmatrix}$.

В задачах 1.5–1.8 вычислить определители 3-го порядка.

1.5. $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{vmatrix}$. **1.6.** $\begin{vmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 2 & 5 & 3 \\ 3 & 4 & 2 \end{vmatrix}$. **1.7.** $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 6 \end{vmatrix}$. **1.8.** $\begin{vmatrix} a & b & c \\ c & a & b \\ b & c & a \end{vmatrix}$.

1.9. Доказать следующие свойства определителя 3-го порядка, используя его определение:

а) Определитель не изменится, если строки (столбцы) матрицы определителя сделать столбцами (строками) с теми же номерами (т. е. транспонировать матрицу).

б) Если все элементы какой-либо строки (столбца) матрицы определителя умножить на одно и то же число, то определитель умножится на это число.

в) Если переставить две строки (столбца) матрицы определителя, то определитель изменит знак; в частности, если две строки (столбца) матрицы определителя равны, то он равен нулю.

г) Если каждый элемент некоторой строки (столбца) матрицы определителя представлен в виде суммы двух слагаемых, то определитель равен сумме двух определителей, у которых все строки (столбцы) его матрицы, кроме данной, прежние, а в данной строке (столбце) в матрице первого определителя стоят первые, а во втором — вторые слагаемые.

д) Если одна строка (столбец) матрицы определителя является линейной комбинацией остальных строк (столбцов), то определитель равен нулю.

В задачах 1.10–1.11 доказать тождества, используя свойства определителя 3-го порядка, перечисленные в задаче 1.9 (определитель не развертывать).

1.10. $\begin{vmatrix} a_1-b_1x & a_1+b_1x & c_1 \\ a_2-b_2x & a_2+b_2x & c_2 \\ a_3-b_3x & a_3+b_3x & c_3 \end{vmatrix} = 2x\cdot\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$.

1.11. $\begin{vmatrix} a_1+b_1x & a_1x+b_1 & c_1x+a_1 \\ a_2+b_2x & a_2x+b_2 & c_2x+a_2 \\ a_3+b_3x & a_3x+b_3 & c_3x+a_3 \end{vmatrix} = (x-x^3)\cdot\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$.

Минором M_{ij} элемента a_{ij} определителя 3-го порядка называют определитель второго порядка, получаемый из данного вычеркиванием i-й строки и j-го столбца, на пересечении которых стоит этот элемент. *Алгебраическим дополнением* A_{ij} элемента a_{ij} определителя 3-го порядка называют определитель третьего порядка, получаемый из данного заменой элемента a_{ij} на 1 и обнулением всех остальных элементов i-й строки и j-го столбца.

Алгебраическое дополнение A_{ij} и минор M_{ij} элемента a_{ij} связаны формулой

$$A_{ij} = (-1)^{i+j} M_{ij}.$$

Сформулируем еще один способ вычисления определителя 3-го порядка: *определитель равен сумме произведений элементов какой-либо строки* (*столбца*) *на их алгебраические дополнения*, т. е.

$$\det A = \sum_{k=1}^{3} a_{ik} \cdot A_{ik} \quad \text{или} \quad \det A = \sum_{k=1}^{3} a_{kj} \cdot A_{kj}. \tag{1.3}$$

Этот способ называют *разложением определителя по элементам i-й строки* (*j-го столбца*). В частности, разложение определителя по 1-му столбцу в развернутом виде записывается следующим образом:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11} \cdot \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{21} \cdot \begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{31} \cdot \begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{22} & a_{23} \end{vmatrix}.$$

ПРИМЕР 1.2. Вычислить определитель из примера 1.1:

а) разложением по первой строке;

б) разложением по какой-либо строке, предварительно упрощая его и используя результат задачи 1.9.

◄ а) Используя формулу (1.3) для разложения определителя по первой строке, получаем

$$\begin{vmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 2 & 5 & 3 \\ 3 & 4 & 2 \end{vmatrix} = 3 \cdot \begin{vmatrix} 5 & 3 \\ 4 & 2 \end{vmatrix} - 2 \cdot \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} + 1 \cdot \begin{vmatrix} 2 & 5 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = 3 \cdot (10-12) - 2 \cdot (4-9) + 1 \cdot (8-15) = -3.$$

б) Выполним следующие действия:

1) вычтем из 2-го столбца 3-й; получим

$$\begin{vmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 2 & 5 & 3 \\ 3 & 4 & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 2 \end{vmatrix};$$

2) теперь вычтем из 2-й строки 3-ю:

$$\begin{vmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 3 & 2 & 2 \end{vmatrix};$$

3) наконец, прибавим к 1-му столбцу 3-й:

$$\begin{vmatrix} 3 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 3 & 2 & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 4 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 5 & 2 & 2 \end{vmatrix};$$

4) разложим полученный определитель по второй строке:

$$\begin{vmatrix} 4 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 5 & 2 & 2 \end{vmatrix} = (-1)^{2+3} \begin{vmatrix} 4 & 1 \\ 5 & 2 \end{vmatrix} = -1 \cdot (4 \cdot 2 - 5 \cdot 1) = -3.$$

На основании свойств, сформулированных в задаче 1.9, при выполнении указанных действий определитель не изменился, поэтому $\begin{vmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 2 & 5 & 3 \\ 3 & 4 & 2 \end{vmatrix} = -3.$ ►

В задачах 1.12–1.14 вычислить определитель, используя разложение по какой-либо строке, предварительно упрощая его.

1.12. $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & 0 \end{vmatrix}$. **1.13.** $\begin{vmatrix} a & a & a \\ -a & a & x \\ -a & -a & x \end{vmatrix}$. **1.14.** $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 6 \end{vmatrix}$.

2. Решение систем линейных уравнений с двумя и тремя неизвестными

В школьном курсе алгебры при решении систем линейных уравнений с несколькими неизвестными в основном использовался метод исключения неизвестных. Ниже предлагается метод решения систем линейных уравнений с использованием определителей.

Система двух линейных уравнений с двумя неизвестными

$$\begin{cases} a_1x + b_1y = c_1, \\ a_2x + b_2y = c_2 \end{cases}$$

при условии, что определитель системы $\Delta = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}$ отличен от нуля, имеет единственное решение, которое может быть найдено по формулам

$$x = \frac{\Delta_x}{\Delta}, \quad y = \frac{\Delta_y}{\Delta}. \qquad \textbf{(1.4)}$$

Здесь Δ_x и Δ_y — определители, полученные из определителя Δ заменой столбца коэффициентов при соответствующем неизвестном столбцом свободных членов:

$$\Delta_x = \begin{vmatrix} c_1 & b_1 \\ c_2 & b_2 \end{vmatrix}, \quad \Delta_y = \begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_2 & c_2 \end{vmatrix}.$$

Система трех линейных уравнений с тремя неизвестными

$$\begin{cases} a_1x + b_1y + c_1z = d_1, \\ a_2x + b_2y + c_2z = d_2, \\ a_3x + b_3y + c_3z = d_3 \end{cases}$$

при условии, что определитель системы $\Delta=\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1\\ a_2 & b_2 & c_2\\ a_3 & b_3 & c_3\end{vmatrix}\neq 0$, имеет единственное решение, которое может быть найдено по формулам

$$x=\frac{\Delta_x}{\Delta},\ y=\frac{\Delta_y}{\Delta},\ z=\frac{\Delta_z}{\Delta}, \tag{1.5}$$

где

$$\Delta_x=\begin{vmatrix} d_1 & b_1 & c_1\\ d_2 & b_2 & c_2\\ d_3 & b_3 & c_3\end{vmatrix},\ \Delta_y=\begin{vmatrix} a_1 & d_1 & c_1\\ a_2 & d_2 & c_2\\ a_3 & d_3 & c_3\end{vmatrix},\ \Delta_z=\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & d_1\\ a_2 & b_2 & d_2\\ a_3 & b_3 & d_3\end{vmatrix}.$$

В задачах 1.15–1.20 решить системы уравнений.

1.15. $\begin{cases}2x+3y=8,\\ x-2y=-3.\end{cases}$ **1.16.** $\begin{cases}9x+2y=8,\\ 4x+y=3.\end{cases}$ **1.17.** $\begin{cases}(a+1)x-ay=a+1,\\ ax+(1-a)y=a-1.\end{cases}$

1.18. $\begin{cases}2x+4y+z=4,\\ 3x+6y+2z=4,\\ 4x-y-3z=1.\end{cases}$ **1.19.** $\begin{cases}2x+y-z=0,\\ x-y-3z=13,\\ 3x-2y+4z=-15.\end{cases}$ **1.20.** $\begin{cases}2x+3z-3y=-10,\\ 3y+x-3z=13,\\ z+x=0.\end{cases}$

3. Линейные операции над векторами

Направленным отрезком $\overrightarrow{AB}$ называется отрезок AB, для которого указаны *начало* — точка A и *конец* — точка B (рис. 1.1).

Длиной $\left|\overrightarrow{AB}\right|$ направленного отрезка $\overrightarrow{AB}$ называется длина отрезка AB. Направленные отрезки $\overrightarrow{A_1B_1}, \ldots, \overrightarrow{A_nB_n}$ называются *коллинеарными*, если существует прямая l, которой параллелен каждый из этих отрезков. Направленные отрезки $\overrightarrow{A_1B_1}, \ldots, \overrightarrow{A_nB_n}$ называются *компланарными*, если существует плоскость α, которой параллелен каждый из этих отрезков. *Геометрическим вектором* **a** называется множество всех направленных отрезков, имеющих одинаковую длину и направление. О всяком направленном отрезке из этого множества говорят, что он *представляет* вектор **a** (получен приложением вектора **a** к точке A), и в этом случае пишут $\mathbf{a}=\overrightarrow{AB}$. *Длиной* (*модулем*) вектора **a** называется длина любого направленного отрезка $\overrightarrow{AB}$, представляющего этот вектор: $|\mathbf{a}|=\left|\overrightarrow{AB}\right|$. Вектор нулевой длины называется *нулевым вектором* и обозначается символом **0**.

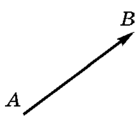


Рис. 1.1

Векторы **a** и **b** называются равными, если множество представляющих их направленных отрезков совпадают.

Пусть направленный отрезок $\overrightarrow{OA}$ представляет вектор **a**. Прикладывая к точке A вектор **b**, получим направленный отрезок $\overrightarrow{AB}$. Вектор, представленный направленным отрезком $\overrightarrow{OB}$, называется *суммой* векторов **a** и **b** и обозначается **a** + **b** (*правило треугольника*, см. рис. 1.2*а*).

Сумма векторов **a** и **b** может быть определена также по *правилу параллелограмма* (рис. 1.2*б*).

Произведением вектора **a** на действительное число $\lambda\neq 0$ называется вектор, обозначаемый $\lambda\mathbf{a}$, такой что: 1) $|\lambda\mathbf{a}|=|\lambda|\cdot|\mathbf{a}|$; 2) векторы **a** и $\lambda\mathbf{a}$ сонаправлены при $\lambda>0$ и противоположно направлены при $\lambda<0$. По определению $0\cdot\mathbf{a}=\lambda\cdot\mathbf{0}=\mathbf{0}$.

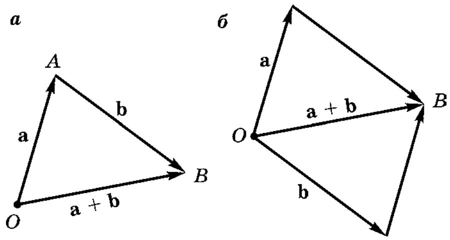


Рис. 1.2

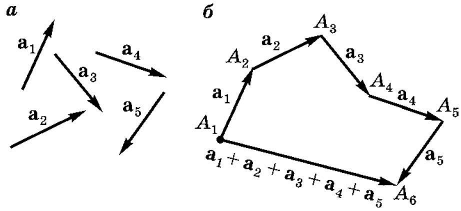


Рис. 1.3

ПРИМЕР 1.3. Найти сумму векторов $\mathbf{a}_1$, $\mathbf{a}_2$, $\mathbf{a}_3$, $\mathbf{a}_4$, $\mathbf{a}_5$, изображенных на рис. 1.3*а*.

◀ Чтобы построить сумму векторов $\mathbf{a}_1$, $\mathbf{a}_2$, $\mathbf{a}_3$, $\mathbf{a}_4$, $\mathbf{a}_5$, к концу вектора $\mathbf{a}_1$ прикладываем вектор $\mathbf{a}_2$ и получаем сумму $\mathbf{a}_1 + \mathbf{a}_2$. Затем к концу полученного вектора прикладываем вектор $\mathbf{a}_3$ и получаем сумму $\mathbf{a}_1 + \mathbf{a}_2 + \mathbf{a}_3$, и т. д. На рис. 1.3*б* изображен процесс построения их суммы. Результирующий вектор равен $\overrightarrow{A_1A_6} = \mathbf{a}_1 + \mathbf{a}_2 + \mathbf{a}_3 + \mathbf{a}_4 + \mathbf{a}_5$ (*правило многоугольника*). ▶

1.21. Длины векторов $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$ заданы. Как следует направить эти векторы, чтобы длина вектора $\mathbf{a} + \mathbf{b}$ была: а) наибольшей; б) наименьшей. в) Может ли длина вектора $\mathbf{a} + \mathbf{b}$ быть меньше длины каждого из векторов $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$?

1.22. $ABCD$ — параллелограмм. Доказать, что $\overrightarrow{DB} = \overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AD}$.

1.23. $ABCD$ — тетраэдр. Найти суммы векторов:

а) $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BD} + \overrightarrow{DC}$; б) $\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{CB} + \overrightarrow{DC}$; в) $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{DA} + \overrightarrow{CD}$.

1.24. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ — параллелепипед. Найти следующие суммы векторов:

а) $\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{BB_1} + \overrightarrow{D_1C_1}$; б) $\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{A_1B_1} + \overrightarrow{AA_1} + \overrightarrow{C_1A_1} + \overrightarrow{AC}$; в) $\overrightarrow{AD_1} + \overrightarrow{AB_1} + \overrightarrow{A_1A}$.

1.25. Коллинеарны ли векторы $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$, если коллинеарны векторы $\mathbf{a} + \mathbf{b}$ и $\mathbf{a} - \mathbf{b}$?

1.26. В треугольнике ABC точка M — точка пересечения медиан. Доказать, что $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} = \mathbf{0}$.

ПРИМЕР 1.4. В параллелепипеде $ABCDA_1B_1C_1D_1$ точка M — центр грани CC_1D_1D (рис. 1.4). Выразить вектор $\overrightarrow{B_1M}$ через векторы $\overrightarrow{AA_1}$, $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AD}$.

◀ Для треугольника B_1C_1M запишем равенство $\overrightarrow{B_1M} = \overrightarrow{B_1C_1} + \overrightarrow{C_1M}$. Так как $\overrightarrow{B_1C_1} = \overrightarrow{AD}$ и $\overrightarrow{C_1M} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{C_1D_1} + \overrightarrow{C_1C})$, а $\overrightarrow{C_1D_1} = -\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{C_1C} = -\overrightarrow{A_1A}$, то отсюда получаем $\overrightarrow{C_1M} = -\frac{1}{2}(\overrightarrow{AA_1} + \overrightarrow{AB})$ и, следовательно, $\overrightarrow{B_1M} = -\frac{1}{2}\overrightarrow{AA_1} - \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}$. ▶

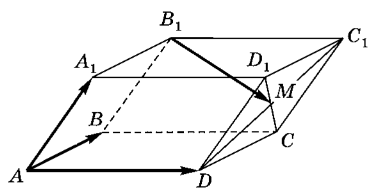


Рис. 1.4

1.27. В параллелограмме $ABCD$ точки M и N — середины сторон BC и CD соответственно. Выразить вектор $\overrightarrow{AB}$ через векторы $\overrightarrow{AM}$, $\overrightarrow{AN}$.

1.28. В правильном шестиугольнике $ABCDEF$ выразить вектор $\overrightarrow{AC}$ через векторы $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{AF}$.

1.29. В призме $ABCA_1B_1C_1$ точка M — центр грани AA_1B_1B. Выразить вектор $\overrightarrow{MC_1}$ через векторы $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{AA_1}$.

1.30. В параллелепипеде $ABCDA_1B_1C_1D_1$ выразить векторы $\overrightarrow{AA_1}$ и $\overrightarrow{AC_1}$ через векторы $\overrightarrow{AB_1}$, $\overrightarrow{AD_1}$, $\overrightarrow{AC}$.

1.31. В параллелепипеде $ABCDA_1B_1C_1D_1$ точка M — центр грани $A_1B_1C_1D_1$. Выразить вектор $\overrightarrow{AM}$ через векторы $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AD}$, $\overrightarrow{AA_1}$.

Система векторов $\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_n$ называется *линейно зависимой*, если существуют числа $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ $(\lambda_1^2 + \ldots + \lambda_n^2 \neq 0)$ такие, что $\lambda_1\mathbf{a}_1 + \ldots + \lambda_n\mathbf{a}_n = \mathbf{0}$. В противном случае система называется *независимой*.

1.32. Доказать следующие критерии линейной зависимости:

1) система векторов $\mathbf{a}_1$, $\mathbf{a}_2$ линейно зависима в том и только том случае, когда векторы $\mathbf{a}_1$ и $\mathbf{a}_2$ *коллинеарны*;

2) система векторов $\mathbf{a}_1$, $\mathbf{a}_2$, $\mathbf{a}_3$ линейно зависима в том и только том случае, когда векторы $\mathbf{a}_1$, $\mathbf{a}_2$ и $\mathbf{a}_3$ *компланарны*;

3) всякая система из $n \geq 4$ векторов линейно зависима.

1.33. Доказать, что точка C принадлежит прямой AB тогда и только тогда, когда векторы $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{AC}$ коллинеарны, т. е. существует такое действительное число k, что $\overrightarrow{AC} = k\overrightarrow{AB}$. Выяснить геометрический смысл числа k.

1.34. В треугольнике OAB OL — биссектриса угла AOB. Выразить вектор $\overrightarrow{OL}$ через векторы $\mathbf{a} = \overrightarrow{OA}$, $\mathbf{b} = \overrightarrow{OB}$ и длины этих векторов.

1.35. Найти линейную зависимость между четырьмя некомпланарными векторами $\mathbf{p} = \mathbf{a} + \mathbf{b}$, $\mathbf{q} = \mathbf{b} - \mathbf{c}$, $\mathbf{r} = \mathbf{a} - \mathbf{b} + \mathbf{c}$, $\mathbf{s} = \mathbf{b} + \frac{1}{2}\mathbf{c}$.

1.36. Доказать, что для любых векторов $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ и $\mathbf{c}$ векторы $\mathbf{a} + \mathbf{b}$, $\mathbf{b} + \mathbf{c}$ и $\mathbf{c} - \mathbf{a}$ компланарны.

1.37. Даны три некомпланарных вектора $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ и $\mathbf{c}$. Найти все значения λ, при которых векторы $\lambda\mathbf{a} + \mathbf{b} + \mathbf{c}$, $\mathbf{a} + \lambda\mathbf{b} + \mathbf{c}$, $\mathbf{a} + \mathbf{b} + \lambda\mathbf{c}$ компланарны.

1.38. Даны два параллелограмма $ABCD$ и $AB_1C_1D_1$ с общей вершиной A. Доказать, что векторы $\overrightarrow{BB_1}$, $\overrightarrow{CC_1}$, $\overrightarrow{DD_1}$ компланарны.

4. Базис и координаты вектора

Упорядоченная тройка некомпланарных векторов $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$, $\mathbf{e}_3$ называется *базисом* $\mathfrak{B} = \{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$ в множестве всех геометрических векторов. Всякий геометрический вектор $\mathbf{a}$ может быть единственным образом представлен в виде

$$\mathbf{a} = X_1\mathbf{e}_1 + X_2\mathbf{e}_2 + X_3\mathbf{e}_3, \tag{1.6}$$

где числа X_1, X_2, X_3 называются координатами вектора $\mathbf{a}$ в базисе $\mathfrak{B}$. Формулу (1.6) называют *разложением вектора* $\mathbf{a}$ *по базису* $\mathfrak{B}$. Используют также следующую форму записи: $\mathbf{a} = \{X_1, X_2, X_3\}$.

Аналогично, упорядоченная пара $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$ неколлинеарных векторов называется базисом $\mathfrak{B} = \{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2\}$ в множестве всех геометрических векторов, компланарных некоторой плоскости.

Наконец, всякий ненулевой вектор $\mathbf{e}$ образует базис $\mathfrak{B} = \{\mathbf{e}\}$ в множестве всех геометрических векторов, коллинеарных некоторому направлению.

Если вектор **a** есть линейная комбинация векторов $\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_n$ с коэффициентами $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$, т. е.

$$\mathbf{a} = \sum_{k=1}^{n} \lambda_k \mathbf{a}_k,$$

то каждая координата $X_i(\mathbf{a})$ вектора **a** равна сумме произведений коэффициентов $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ на соответствующие координаты векторов $\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_n$:

$$X_i(\mathbf{a}) = \sum_{k=1}^{n} \lambda_k X_i(\mathbf{a}_k), \ \ i = 1, 2, 3.$$

Базис $\mathfrak{B} = \{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$ называется *прямоугольным*, если векторы $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$ и $\mathbf{e}_3$ попарно перпендикулярны. Прямоугольный базис $\mathfrak{B} = \{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$ называется *ортонормированным*, если векторы $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$ и $\mathbf{e}_3$ имеют единичную длину. В этом случае приняты обозначения

$$\mathbf{e}_1 = \mathbf{i}, \quad \mathbf{e}_2 = \mathbf{j}, \quad \mathbf{e}_3 = \mathbf{k}.$$

Проекцией вектора **a** на вектор **e** называется число $\text{пр}_{\mathbf{e}}\mathbf{a} = |\mathbf{a}|\cos\varphi$, где $\varphi = \widehat{(\mathbf{a}, \mathbf{e})}$ — угол между векторами **a** и **e** $(0 \le \varphi \le \pi)$.

Координаты X, Y, Z вектора **a** в прямоугольном базисе совпадают с проекциями вектора **a** на базисные орты **i**, **j**, **k** соответственно, а длина вектора **a** равна

$$|\mathbf{a}| = \sqrt{X^2 + Y^2 + Z^2}. \tag{1.7}$$

Числа

$$\cos\alpha = \cos\widehat{(\mathbf{a}, \mathbf{i})} = \frac{X}{\sqrt{X^2 + Y^2 + Z^2}},$$
$$\cos\beta = \cos\widehat{(\mathbf{a}, \mathbf{j})} = \frac{Y}{\sqrt{X^2 + Y^2 + Z^2}},$$
$$\cos\gamma = \cos\widehat{(\mathbf{a}, \mathbf{k})} = \frac{Z}{\sqrt{X^2 + Y^2 + Z^2}}$$

называются *направляющими косинусами* вектора **a**. Направляющие косинусы вектора совпадают с координатами (проекциями) его *орта* $\mathbf{a}_0 = \frac{1}{|\mathbf{a}|}\cdot\mathbf{a}$.

ПРИМЕР 1.5. Дан параллелепипед $ABCDA_1B_1C_1D_1$. Точки M, N, P — центры граней $A_1B_1C_1D_1$, CC_1D_1D, BB_1C_1C соответственно (рис. 1.5). Пусть $\mathbf{a} = \overrightarrow{AM}$, $\mathbf{b} = \overrightarrow{AN}$, $\mathbf{c} = \overrightarrow{AP}$. Найти координаты вектора $\overrightarrow{AC_1}$ в базисе $\mathfrak{B} = \{\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}\}$.

◄ Введем векторы $\mathbf{p} = \overrightarrow{AA_1}$, $\mathbf{q} = \overrightarrow{AB}$, $\mathbf{r} = \overrightarrow{AD}$. Тогда

$$\mathbf{a} = \overrightarrow{AM} = \overrightarrow{AA_1} + \overrightarrow{A_1M} = \mathbf{p} + \frac{1}{2}\mathbf{q} + \frac{1}{2}\mathbf{r}.$$

Аналогично находим

$$\mathbf{b} = \frac{1}{2}\mathbf{p} + \frac{1}{2}\mathbf{q} + \mathbf{r}, \ \mathbf{c} = \frac{1}{2}\mathbf{p} + \mathbf{q} + \frac{1}{2}\mathbf{r}.$$

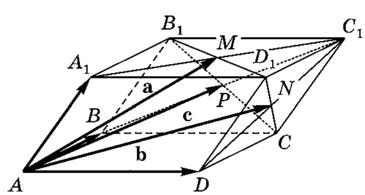


Рис. 1.5

Заметим, что $\overrightarrow{AC_1} = \mathbf{p} + \mathbf{q} + \mathbf{r}$. Получим

$$\mathbf{a} + \mathbf{b} + \mathbf{c} = \left(\mathbf{p} + \frac{1}{2}\mathbf{q} + \frac{1}{2}\mathbf{r}\right) + \left(\frac{1}{2}\mathbf{p} + \mathbf{q} + \frac{1}{2}\mathbf{r}\right) + \left(\frac{1}{2}\mathbf{p} + \frac{1}{2}\mathbf{q} + \mathbf{r}\right) = 2(\mathbf{p} + \mathbf{q} + \mathbf{r}) = 2\overrightarrow{AC}.$$

Отсюда $\overrightarrow{AC_1} = \frac{1}{2}\mathbf{a} + \frac{1}{2}\mathbf{b} + \frac{1}{2}\mathbf{c}$, т. е. $\overrightarrow{AC_1} = \left\{\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right\}$.►

1.39. На сторонах OA, OB треугольника OAB соответственно взяты точки M и N такие, что $OM : MA = 2 : 1$, $ON : NB = 1 : 3$. Пусть P — точка пересечения отрезков AN и BM. Разложить вектор $\overrightarrow{OP}$ по базису $\mathbf{a} = \overrightarrow{OA}$, $\mathbf{b} = \overrightarrow{OB}$.

1.40. В пирамиде $ABCD$ M — середина ребра BD. Разложить вектор $\overrightarrow{CM}$ в базисе из ребер $\mathfrak{B} = \{\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AB}\}$.

1.41. В правильной пирамиде $SABCDEF$ с вершиной S найти координаты вектора $\overrightarrow{SE}$ в базисе из ребер $\mathfrak{B} = \{\overrightarrow{AS}, \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AF}\}$.

1.42. Основанием пирамиды с вершиной S служит параллелограмм $ABCD$. Найти координаты вектора $\overrightarrow{SD}$ в базисе $\mathfrak{B} = \{\overrightarrow{SA}, \overrightarrow{SB}, \overrightarrow{SC}\}$.

1.43. Основанием пирамиды $SABCD$ служит параллелограмм $ABCD$ с центром O. Точка M — точка пересечения медиан треугольника SCD. Найти координаты векторов $\overrightarrow{SC}$, $\overrightarrow{AM}$, $\overrightarrow{SO}$ в базисе $\mathfrak{B} = \{\overrightarrow{AS}, \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}\}$.

1.44. Пусть $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$, $\mathbf{c}$ — некомпланарные векторы. Определить, при каких значениях α и β вектор $3\mathbf{a} + \alpha\mathbf{b} + \beta\mathbf{c}$ коллинеарен вектору $(\alpha - 2)\mathbf{a} + \mathbf{b} + \alpha\mathbf{c}$.

1.45. При каких значениях α и β векторы $\mathbf{a} = -2\mathbf{i} + 3\mathbf{j} + \alpha\mathbf{k}$ и $\mathbf{b} = \beta\mathbf{i} - 6\mathbf{j} + 2\mathbf{k}$ коллинеарны?

1.46. Доказать, что если в базисе $\mathfrak{B} = \{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$ векторы $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$ имеют координаты $\mathbf{a} = \{a_1, a_2, a_3\}$, $\mathbf{b} = \{b_1, b_2, b_3\}$ и k — действительное число, то

$$\mathbf{a} + \mathbf{b} = \{a_1 + b_1, a_2 + b_2, a_3 + b_3\} \quad \text{и} \quad k\mathbf{a} = \{ka_1, ka_2, ka_3\}.$$

1.47. При каких значениях α и β векторы $\{1, \alpha, \beta\}$ и $\{\alpha - \beta, 5, 4\}$ коллинеарны?

1.48. При каких значениях α и β точки с координатами $\{1, \alpha, -3\}$, $\{2, \alpha + 3, 5\}$ и $\{\beta, 3, \alpha - \beta\}$ лежат на одной прямой?

1.49. При каких значениях α векторы $\{1, -1, 0\}$, $\{2, 1, 1\}$ и $\{1, 2 - \alpha, 3\}$ компланарны?

В дальнейшем, если не оговаривается противное, считается, что векторы представлены своими координатами в некотором прямоугольном базисе. Запись $\mathbf{a} = \{X, Y, Z\}$ означает, что координаты вектора $\mathbf{a}$ равны X, Y и Z, т. е. $\mathbf{a} = X\mathbf{i} + Y\mathbf{j} + Z\mathbf{k}$.

1.50. Заданы векторы $\mathbf{a}_1 = \{-1, 2, 0\}$, $\mathbf{a}_2 = \{3, 1, 1\}$, $\mathbf{a}_3 = \{2, 0, 1\}$ и $\mathbf{a} = \mathbf{a}_1 - 2\mathbf{a}_2 + \frac{1}{3}\mathbf{a}_3$. Вычислить: а) $|\mathbf{a}_1|$ и координаты орта $\mathbf{a}_{1,0}$ вектора $\mathbf{a}_1$; б) $\cos(\widehat{\mathbf{a}_1, \mathbf{j}})$; в) координату X вектора $\mathbf{a}$; г) $\text{пр}_{\mathbf{j}}\mathbf{a}$.

В задачах 1.51–1.52 доказать, что векторы $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$ образуют базис в множестве всех векторов плоскости. В базисе $\mathfrak{B} = \{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2\}$ вычислить координаты вектора $\mathbf{a}$ и написать его разложение по базису $\mathfrak{B}$.

1.51. $\mathbf{e}_1 = \{1, -1\}$, $\mathbf{e}_2 = \{1, 1\}$ и $\mathbf{a} = -2\mathbf{i} - \mathbf{j}$.

1.52. $\mathbf{e}_1 = \{-1, 2\}$, $\mathbf{e}_2 = \{2, 1\}$ и $\mathbf{a} = 5\mathbf{i} - 15\mathbf{j}$.

В задачах 1.53–1.54 доказать, что векторы $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$, $\mathbf{e}_3$ образуют базис в множестве всех векторов пространства. В базисе $\mathfrak{B} = \{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$ вычислить координаты вектора $\mathbf{a}$ и написать его разложение по базису $\mathfrak{B}$.

1.53. $\mathbf{e}_1 = \{1, 0, 0\}$, $\mathbf{e}_2 = \{1, 1, 0\}$, $\mathbf{e}_3 = \{1, 1, 1\}$ и $\mathbf{a} = -2\mathbf{i} - \mathbf{k}$.

1.54. $\mathbf{e}_1 = \{1, 0, -1\}$, $\mathbf{e}_2 = \{1, -1, 0\}$, $\mathbf{e}_3 = \{-1, 1, 1\}$ и $\mathbf{a} = \mathbf{i} - 2\mathbf{j} + \mathbf{k}$.

5. Декартовы прямоугольные координаты точки на плоскости и в пространстве. Простейшие задачи аналитической геометрии

Говорят, что в трехмерном пространстве *введена декартова прямоугольная система координат* $\langle O, \mathfrak{B}\rangle$, если заданы:

1) некоторая точка O, называемая *началом координат*;

2) некоторый ортонормированный базис $\mathfrak{B} = \{\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}\}$ в множестве всех геометрических векторов.

Оси Ox, Oy и Oz, проведенные через точку O в направлении базисных ортов $\mathbf{i}$, $\mathbf{j}$ и $\mathbf{k}$, называются координатными осями системы координат $\langle O, \mathfrak{B}\rangle = Oxyz$.

Если M — произвольная точка пространства, то направленный отрезок $\overrightarrow{OM}$ называется *радиус-вектором точки* M. Координатами точки M в системе $\langle O, \mathfrak{B}\rangle$ называются координаты ее радиус-вектора $\overrightarrow{OM}$ как геометрического вектора в базисе $\mathfrak{B}$,

$$x(M) = X(\overrightarrow{OM}),\ \ y(M) = Y(\overrightarrow{OM}),\ \ z(M) = Z(\overrightarrow{OM}).$$

Если $M_1 = (x_1, y_1, z_1)$ и $M_2 = (x_2, y_2, z_2)$ — две произвольные точки в пространстве, то координаты вектора $\overrightarrow{M_1M_2}$ равны

$$X = x_2 - x_1,\ \ Y = y_2 - y_1,\ \ Z = z_2 - z_1.$$

Отсюда на основании (1.7) расстояние между точками выражается формулой

$$\rho(M_1, M_2) = \left|\overrightarrow{M_1M_2}\right| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}.$$

При решении задач аналитической геометрии целесообразно максимально использовать методы векторной алгебры.

ПРИМЕР 1.6. Заданы вершины $A = (-1, 2, 3)$, $B = (0, 1, 4)$ треугольника и точка пересечения его медиан $E = (5, 7, -1)$. Найти координаты вершины C.

◄ Так как координаты вершины A заданы, то для вычисления координат вершины C достаточно найти координаты вектора $\overrightarrow{AC}$. Пусть $\overrightarrow{BM}$ — медиана, проведенная из вершины B. Тогда

$$\overrightarrow{AC} = 2\overrightarrow{AM} = 2(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BM}) = 2\left(\overrightarrow{AB} + \frac{3}{2}\overrightarrow{BE}\right)$$

(здесь учтено, что медиана треугольника делится точкой пересечения медиан в отношении $2:1$).

Так как $\overrightarrow{AB} = \{1, -1, 1\}$ и $\overrightarrow{BE} = \{5, 6, -5\}$, то $\overrightarrow{AC} = \{17, 16, -13\}$. Тогда

$$x(C) = x(A) + X(\overrightarrow{AC}) = 16,\ y(C) = y(A) + Y(\overrightarrow{AC}) = 18,\ z(C) = z(A) + Z(\overrightarrow{AC}) = -10. ►$$

1.55. Вычислить расстояние между точками $M_1 = (6, -3)$ и $M_2 = (9, -7)$ и расстояние от точки M_2 до начала координат.

1.56. Вычислить периметр треугольника с вершинами в точках $A = (-1, -3)$, $B = (2, -3)$, $C = (2, 1)$.

1.57. Показать, что треугольник ABC с вершинами $A = (-3, -3)$, $B = (-1, 3)$, $C = (11, -1)$ — прямоугольный.

1.58. Вершины треугольника имеют координаты $(3, -1, 4)$, $(2, 5, 7)$ и $(1, -1, -5)$. Найти координаты точки пересечения медиан треугольника.

1.59. Даны координаты середин сторон треугольника $(-1, 2, 3)$, $(0, 1, 4)$, $(5, 7, -1)$. Найти координаты вершин.

1.60. Даны две смежные вершины параллелограмма $A = (-2, 6)$, $B = (2, 8)$ и точка пересечения его диагоналей $M = (2, 2)$. Найти две другие вершины.

1.61. Даны координаты трех вершин параллелограмма $ABCD$: $A = (3, -1, 2)$, $B = (2, 2, 5)$, $C = (4, 1, -1)$. Найти координаты четвертой вершины.

1.62. Центр параллелограмма $ABCD$ имеет координаты $(3, 5, 7)$, а координаты середин сторон BC и CD есть $(-1, 0, 1)$ и $(2, 4, -3)$ соответственно. Найти координаты вершин A и B.

1.63. Точка $M = (1, 2, 3)$ задана своими координатами в декартовой прямоугольной системе координат $\langle O, \mathfrak{B} = \{\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}\}\rangle$. Убедиться в том, что базис $\mathfrak{B}' = \{\mathbf{i}', \mathbf{j}', \mathbf{k}'\}$ — прямоугольный, и найти координаты точки M в системе $\langle O', \mathfrak{B}'\rangle$, если: а) $\overrightarrow{OO'} = 2\mathbf{i} + 3\mathbf{j} - 3\mathbf{k}$ и $\mathbf{i}' = \mathbf{i}$, $\mathbf{j}' = \mathbf{j}$, $\mathbf{k}' = \mathbf{k}$; б) $O = O'$ и $\mathbf{i}' = -\mathbf{k}$, $\mathbf{j}' = \mathbf{i}$, $\mathbf{k}' = \mathbf{j}$.

1.64. Найти координаты орта $\mathbf{a}_0$, если $\mathbf{a} = \{1, -2, 2\}$.

1.65. Даны точки $A = (x_1, y_1, z_1)$, $B = (x_2, y_2, z_2)$ и число λ. Найти координаты точки C такой, что $\overrightarrow{AC} : \overrightarrow{CB} = \lambda$.

1.66. Заданы векторы $\mathbf{a} = 2\mathbf{i} + 3\mathbf{j}$, $\mathbf{b} = -3\mathbf{j} - 2\mathbf{k}$, $\mathbf{c} = \mathbf{i} + \mathbf{j} - \mathbf{k}$. Найти: а) координаты орта $\mathbf{a}_0$; б) координаты вектора $\mathbf{a} - 2\mathbf{b} + 3\mathbf{c}$; в) разложение вектора $\mathbf{a} + \mathbf{b} - 2\mathbf{c}$ по базису $\mathfrak{B} = \{\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}\}$; г) $\text{пр}_{\mathbf{j}}(\mathbf{a} - \mathbf{b})$.

1.67. Найти вектор $\mathbf{x}$, коллинеарный вектору $\mathbf{a} = \mathbf{i} - 2\mathbf{j} - 2\mathbf{k}$ и имеющий длину $|\mathbf{x}| = 15$.

1.68. Найти вектор $\mathbf{x}$, образующий со всеми тремя базисными ортами равные острые углы, если $|\mathbf{x}| = 2\sqrt{3}$.

1.69. Найти вектор $\mathbf{x}$, образующий с ортом $\mathbf{j}$ угол $60°$, с ортом $\mathbf{k}$ — угол $120°$, если $|\mathbf{x}| = 5\sqrt{2}$.

1.70. Найти вектор $\mathbf{x}$, направленный по биссектрисе угла между векторами $\mathbf{a} = 7\mathbf{i} - 4\mathbf{j} - 4\mathbf{k}$ и $\mathbf{b} = -2\mathbf{i} - \mathbf{j} + 2\mathbf{k}$ такой, что $|\mathbf{x}| = 5\sqrt{6}$.

1.71. В четырехугольной пирамиде $SABCD$ основание $ABCD$ — прямоугольник, $SA = 2$, $SB = 3$, $SC = 4$. Найти SD.

1.72. В треугольной пирамиде $SBCD$ угол BCD — прямой, $SB = 4$, $SC = 5$, $SD = 6$. Найти расстояние от вершины S до точки A такой, что $ABCD$ — прямоугольник.

6. Скалярное произведение векторов

Скалярным произведением ненулевых векторов $\mathbf{a}_1$ и $\mathbf{a}_2$ (обозначается $(\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2)$ или $\mathbf{a}_1\mathbf{a}_2$) называется число $\mathbf{a}_1\mathbf{a}_2 = |\mathbf{a}_1| \cdot |\mathbf{a}_2| \cdot \cos(\widehat{\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2})$.

Алгебраические свойства скалярного произведения векторов:

1) $\mathbf{a}_1\mathbf{a}_2 = \mathbf{a}_2\mathbf{a}_1$; 2) $\mathbf{a}(\mathbf{b}_1 + \mathbf{b}_2) = \mathbf{a}\mathbf{b}_1 + \mathbf{a}\mathbf{b}_2$; 3) $(\lambda\mathbf{a}_1)\mathbf{a}_2 = \lambda(\mathbf{a}_1\mathbf{a}_2)$.

Геометрические свойства скалярного произведения векторов:

1) $\mathbf{a}_1 \perp \mathbf{a}_2 \Leftrightarrow \mathbf{a}_1\mathbf{a}_2 = 0$ (условие перпендикулярности векторов);

2) если $\varphi = (\widehat{\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2})$, то $0 \le \varphi < \dfrac{\pi}{2} \Leftrightarrow \mathbf{a}_1\mathbf{a}_2 > 0$ и $\dfrac{\pi}{2} < \varphi \le \pi \Leftrightarrow \mathbf{a}_1\mathbf{a}_2 < 0$.

Пусть $\mathbf{a}_1 = \{X_1, Y_1, Z_1\}$, $\mathbf{a}_2 = \{X_2, Y_2, Z_2\}$ — векторы, заданные своими координатами в декартовой прямоугольной системе координат. Тогда

$$\mathbf{a}_1\mathbf{a}_2 = X_1X_2 + Y_1Y_2 + Z_1Z_2. \tag{1.8}$$

Из формулы (1.8), в частности, следует формула определения косинуса угла между векторами:

$$\cos(\widehat{\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2}) = \frac{\mathbf{a}_1\mathbf{a}_2}{|\mathbf{a}_1||\mathbf{a}_2|} = \frac{X_1X_2 + Y_1Y_2 + Z_1Z_2}{\sqrt{X_1^2 + Y_1^2 + Z_1^2}\sqrt{X_2^2 + Y_2^2 + Z_2^2}}.$$

ПРИМЕР 1.7. Пусть $|\mathbf{a}_1| = 2$, $|\mathbf{a}_2| = 3$, $(\widehat{\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2}) = \frac{2\pi}{3}$.

Найти: а) $|\mathbf{a}_1 + 2\mathbf{a}_2|$; б) $\text{пр}_{\mathbf{a}_1-\mathbf{a}_2}(\mathbf{a}_1 + \mathbf{a}_2)$; в) $\cos(\widehat{\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_1 + \mathbf{a}_2})$.

◀ а) По определению находим $\mathbf{a}_1\mathbf{a}_2 = |\mathbf{a}_1||\mathbf{a}_2|\cos(\widehat{\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2}) = 2\cdot 3\cdot(-0{,}5) = -3$. Тогда

$$|\mathbf{a}_1 + 2\mathbf{a}_2| = \sqrt{(\mathbf{a}_1 + 2\mathbf{a}_2)^2} = \sqrt{|\mathbf{a}_1|^2 + 4\mathbf{a}_1\mathbf{a}_2 + 4|\mathbf{a}_2|^2} = \sqrt{4 - 12 + 36} = 2\sqrt{7};$$

б) $$\text{пр}_{\mathbf{a}_1-\mathbf{a}_2}(\mathbf{a}_1 + \mathbf{a}_2) = \frac{(\mathbf{a}_1 + \mathbf{a}_2)(\mathbf{a}_1 - \mathbf{a}_2)}{|\mathbf{a}_1 - \mathbf{a}_2|} = \frac{|\mathbf{a}_1|^2 - |\mathbf{a}_2|^2}{\sqrt{|\mathbf{a}_1|^2 - 2\mathbf{a}_1\mathbf{a}_2 + |\mathbf{a}_2|^2}} = \frac{4 - 9}{\sqrt{4 + 6 + 9}} = -\frac{5}{\sqrt{19}};$$

в) $$\cos(\widehat{\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_1 + \mathbf{a}_2}) = \frac{\mathbf{a}_1(\mathbf{a}_1 + \mathbf{a}_2)}{|\mathbf{a}_1||\mathbf{a}_1 + \mathbf{a}_2|} = \frac{|\mathbf{a}_1|^2 + \mathbf{a}_1\mathbf{a}_2}{|\mathbf{a}_1|\sqrt{|\mathbf{a}_1|^2 + 2\mathbf{a}_1\mathbf{a}_2 + |\mathbf{a}_2|^2}} = \frac{4 - 3}{2\sqrt{4 - 6 + 9}} = \frac{1}{2\sqrt{7}}.$$ ▶

1.73. Пусть $|\mathbf{a}_1| = 2$, $|\mathbf{a}_2| = \sqrt{3}$, $(\widehat{\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2}) = \frac{5\pi}{6}$. Вычислить: а) $\mathbf{a}_1\mathbf{a}_2$; б) $(\mathbf{a}_1 + \mathbf{a}_2)\cdot$ $\cdot(2\mathbf{a}_1 - \mathbf{a}_2)$; в) $|3\mathbf{a}_1 - \mathbf{a}_2|$; г) $\text{пр}_{\mathbf{a}_1-\mathbf{a}_2}\mathbf{a}_1$; д) $\cos(\widehat{\mathbf{a}_2, \mathbf{a}_1 + 2\mathbf{a}_2})$.

1.74. Найти угол между векторами $\mathbf{i} + \mathbf{j}$ и $2\mathbf{k} - \mathbf{j}$.

1.75. Определить, при каком значении λ векторы $\mathbf{i} + \mathbf{j} - 2\mathbf{k}$ и $\mathbf{i} + \lambda(\mathbf{j} + \mathbf{k})$ перпендикулярны.

1.76. Пусть $\mathbf{a}_1$, $\mathbf{a}_2$ — такие векторы, что $|\mathbf{a}_1| = 3$, $|\mathbf{a}_2| = 5$. Выяснить, при каких λ векторы $\mathbf{a}_1 + \lambda\mathbf{a}_2$ и $\mathbf{a}_1 - \lambda\mathbf{a}_2$ перпендикулярны друг другу.

1.77. Найти угол между ненулевыми векторами $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$, если известно, что вектор $\mathbf{a} + \mathbf{b}$ перпендикулярен вектору $\mathbf{a} - 6\mathbf{b}$, а вектор $2\mathbf{a} + 3\mathbf{b}$ перпендикулярен вектору $2\mathbf{a} - 3\mathbf{b}$.

1.78. Найти косинус угла между векторами $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$ единичной длины, если известно, что вектор $\mathbf{a} + 4\mathbf{b}$ перпендикулярен вектору $13\mathbf{a} - 7\mathbf{b}$.

1.79. Найти косинус угла между векторами $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$, если $|\mathbf{a}| = 2$, $|\mathbf{b}| = 3$ и $\cos(\widehat{\mathbf{a}, \mathbf{a} + \mathbf{b}}) = \frac{1}{3}$.

1.80. Найти угол между ненулевыми векторами $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$, если известно, что $|\mathbf{a}| = 2|\mathbf{b}|$ и $|\mathbf{a} - \mathbf{b}| = |\mathbf{a} + 3\mathbf{b}|$.

1.81. Найти $|\mathbf{a} - 2\mathbf{b}|$, если $|\mathbf{a}| = 2$, $|\mathbf{b}| = 3$, $\text{пр}_{\mathbf{b}}\mathbf{a} = 1{,}5$.

1.82. Найти $|\mathbf{a}|$, если $|\mathbf{a} + \mathbf{b}| = \sqrt{39}$, $\text{пр}_{\mathbf{a}}\mathbf{b} = -1$, $\text{пр}_{\mathbf{b}}\mathbf{a} = -0{,}5$.

1.83. Вычислить $|\mathbf{b}|$, если $|\mathbf{a}| = |\mathbf{a} + \mathbf{b}| = 3$, $|2\mathbf{a} - \mathbf{b}| = 4\sqrt{3}$.

1.84. Определить, какие значения может принимать $|\mathbf{a}|$, если $|\mathbf{a} + 3\mathbf{b}| = 1$, $|2\mathbf{a} - \mathbf{b}| = 3$.

1.85. Найти $\text{пр}_{\mathbf{b}}\mathbf{a}$, если $|\mathbf{a}| = 6$, $|\mathbf{b}| = 8$, $|\mathbf{a} - \mathbf{b}| = 12$.

1.86. В треугольнике ABC проведена высота BH. Выразить вектор $\overrightarrow{BH}$ через векторы $\mathbf{a} = \overrightarrow{AB}$, $\mathbf{b} = \overrightarrow{AC}$.

1.87. Найти величину угла A и длину медианы AM треугольника ABC, вершины которого имеют координаты $A = (-3, 1, 3)$, $B = (0, 2, 1)$, $C = (4, 1, 1)$.

1.88. Даны точки $A = (3, 1, -2)$, $B = (0, 1, 1)$, $C = (-4, 1, 2)$, $D = (-3, 5, 0)$. Найти расстояние между серединой ребра AB и точкой пересечения медиан треугольника ACD.

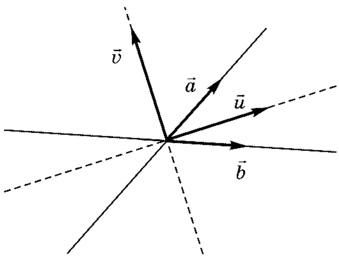


Рис. 1.6

1.89. Доказать, что если **a** и **b** — векторы, то вектор $\mathbf{u}=\dfrac{\mathbf{a}}{|\mathbf{a}|}+\dfrac{\mathbf{b}}{|\mathbf{b}|}$ направлен по биссектрисе угла, образованного векторами **a** и **b**, а вектор $\mathbf{v}=\dfrac{\mathbf{a}}{|\mathbf{a}|}-\dfrac{\mathbf{b}}{|\mathbf{b}|}$ — по биссектрисе смежного угла (рис. 1.6); если же $|\mathbf{a}| = |\mathbf{b}|$, то $\mathbf{u} = \mathbf{a} + \mathbf{b}$, а $\mathbf{v} = \mathbf{a} - \mathbf{b}$.

1.90. Вектор **a** составляет с осями абсцисс и ординат углы 60° и 45° соответственно. Определить, какой угол составляет вектор **a** с осью аппликат.

1.91. Найдите вектор длины 5, составляющий одинаковые углы с осями координат.

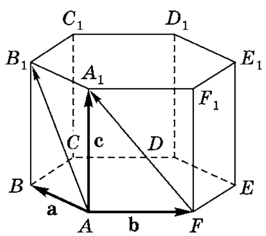


Рис. 1.7

ПРИМЕР 1.8. Боковые грани правильной шестиугольной призмы являются квадратами. Найти угол между скрещивающимися диагоналями двух смежных боковых граней призмы.

◀ Пусть дана призма $ABCDEFA_1B_1C_1D_1E_1F_1$ (рис. 1.7). Найдем угол между прямыми AB_1 и FA_1. Введем векторы $\overrightarrow{AB}=\mathbf{a}$, $\overrightarrow{AF}=\mathbf{b}$, $\overrightarrow{AA_1}=\mathbf{c}$. Пусть ребра призмы равны a, т. е. $|\mathbf{a}| = |\mathbf{b}| = |\mathbf{c}| = a$. Вычислим скалярные произведения:

$$\mathbf{ab}=|\mathbf{a}|\cdot|\mathbf{b}|\cdot\cos(\widehat{\mathbf{a},\mathbf{b}})=a\cdot a\cdot\cos 120^\circ=-\frac{a^2}{2},\quad \mathbf{ac}=\mathbf{bc}=0.$$

Имеем $\overrightarrow{AB_1}=\mathbf{a}+\mathbf{c}$, $\overrightarrow{FA_1}=\mathbf{c}-\mathbf{b}$. Следовательно,

$$\cos\left(\widehat{\overrightarrow{AB_1},\overrightarrow{FA_1}}\right)=\frac{(\mathbf{a}+\mathbf{c})(\mathbf{c}-\mathbf{b})}{|\mathbf{a}+\mathbf{c}|\cdot|\mathbf{c}-\mathbf{b}|}=\frac{\mathbf{ac}+\mathbf{c}^2-\mathbf{ab}-\mathbf{cb}}{|\mathbf{a}+\mathbf{c}|^2}=\frac{0+a^2-(-0{,}5a^2)-0}{a^2+0+a^2}=\frac{3}{4}.$$

Таким образом, $\left(\widehat{\overrightarrow{AB_1},\overrightarrow{FA_1}}\right)=\arccos\dfrac{3}{4}$. ▶

1.92. Все грани параллелепипеда — ромбы со стороной a и острым углом 60°. Найти длины диагоналей параллелепипеда.

1.93. Все ребра правильной треугольной призмы равны между собой. Найти угол между скрещивающимися диагоналями двух боковых граней призмы.

1.94. К вершине куба приложены три силы, равные соответственно 1, 2 и 3 и направленные по диагоналям граней куба. Найти величину равнодействующей этих сил.

1.95. Три диагонали параллелепипеда взаимно перпендикулярны и равны соответственно a, b и c. Найти длину четвертой диагонали.

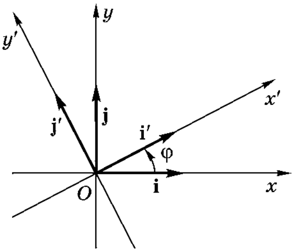


Рис. 1.8

Если базис $\mathfrak{B} = \{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$ — прямоугольный, то координаты произвольного вектора $\mathbf{a} = X_1\mathbf{e}_1 + X_2\mathbf{e}_2 + X_3\mathbf{e}_3$ в этом базисе могут быть вычислены по формуле

$$X_i = \mathbf{a}\mathbf{e}_i, \quad i = 1, 2, 3. \tag{1.9}$$

В частности, формула (1.9) позволяет найти связь между координатами одного и того же вектора в различных прямоугольных базисах.

ПРИМЕР 1.9. Пусть базис $\mathfrak{B}' = \{\mathbf{i}', \mathbf{j}'\}$ получен из базиса $\mathfrak{B} = \{\mathbf{i}, \mathbf{j}\}$ поворотом последнего вокруг точки O на угол $\varphi > 0$ (считается, что $\varphi > 0$, если поворот производится против часовой стрелки, и $\varphi < 0$ в противном случае) (рис. 1.8). Установить связь между координатами вектора $\mathbf{a}$ в базисах $\mathfrak{B}$ и $\mathfrak{B}'$.

◀ Пусть $\mathbf{a} = X\mathbf{i} + Y\mathbf{j}$. Тогда

$$X' = \mathbf{a}\mathbf{i}' = (X\mathbf{i} + Y\mathbf{j})\mathbf{i}' = X\mathbf{i}\mathbf{i}' + Y\mathbf{j}\mathbf{i}', \quad Y' = \mathbf{a}\mathbf{j}' = (X\mathbf{i} + Y\mathbf{j})\mathbf{j}' = X\mathbf{i}\mathbf{j}' + Y\mathbf{j}\mathbf{j}'.$$

С другой стороны, имеем

$$\mathbf{i}\mathbf{i}' = \cos\varphi, \ \mathbf{j}\mathbf{i}' = \cos\left(\frac{\pi}{2} - \varphi\right) = \sin\varphi, \ \mathbf{i}\mathbf{j}' = \cos\left(\frac{\pi}{2} + \varphi\right) = -\sin\varphi, \ \mathbf{j}\mathbf{j}' = \cos\varphi. \ ▶$$

Поэтому формулы преобразования координат принимают вид

$$X' = X\cos\varphi + Y\sin\varphi,$$
$$Y' = -X\sin\varphi + Y\cos\varphi. \ ▶$$

1.96. Вывести формулы преобразования координат точек плоскости при переходе от системы координат $\langle O, \mathfrak{B} = \{\mathbf{i}, \mathbf{j}\}\rangle$ к системе $\langle O', \mathfrak{B}' = \{\mathbf{i}', \mathbf{j}'\}\rangle$, если $\overrightarrow{OO'} = x_0\mathbf{i} + y_0\mathbf{j}$, а базис $\mathfrak{B}'$ получен из базиса $\mathfrak{B}$ поворотом на угол $\varphi > 0$ вокруг точки O.

1.97. Вывести формулы преобразования координат векторов от базиса $\mathfrak{B} = \{\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}\}$ к базису $\mathfrak{B}' = \{\mathbf{i}', \mathbf{j}', \mathbf{k}'\}$, если

$$\mathbf{i}' = \cos\varphi \cdot \mathbf{i} + \sin\varphi \cdot \mathbf{j}, \quad \mathbf{j}' = -\sin\varphi \cdot \mathbf{i} + \cos\varphi \cdot \mathbf{j}, \quad \mathbf{k}' = -\mathbf{k}.$$

1.98. Проверить, что тройка векторов $\mathbf{e}_1 = \{1, -2, 0\}$, $\mathbf{e}_2 = \{0, 1, 1\}$, $\mathbf{e}_3 = \{1, 2, 2\}$ образует (косоугольный) базис. Выразить скалярное произведение векторов $\mathbf{a}_1$, $\mathbf{a}_2$ через их координаты в этом базисе, если

$$\mathbf{a}_1 = X_1^{(1)}\mathbf{e}_1 + X_2^{(1)}\mathbf{e}_2 + X_3^{(1)}\mathbf{e}_3 \ \text{ и } \ \mathbf{a}_2 = X_1^{(2)}\mathbf{e}_1 + X_2^{(2)}\mathbf{e}_2 + X_3^{(2)}\mathbf{e}_3.$$

7. Векторное произведение векторов

Упорядоченную тройку некомпланарных векторов **a**, **b**, **c** называют *правой тройкой*, если она удовлетворяет следующему условию: если смотреть из конца вектора **c**, то кратчайший поворот от вектора **a** к вектору **b** осуществляется против часовой стрелки. Иначе **a**, **b**, **c** — *левая тройка*. Система координат $Oxyz$ — *правая*, если векторы **i**, **j**, **k** образуют правую тройку, и *левая*, если **i**, **j**, **k** — левая тройка.

Векторным произведением вектора **a** на вектор **b** называется вектор, обозначаемый символом $[\mathbf{a}, \mathbf{b}]$ (или $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$), определенный следующими тремя условиями:

1) длина вектора $[\mathbf{a}, \mathbf{b}]$ численно равна площади параллелограмма, построенного на векторах **a** и **b**, т. е. $|[\mathbf{a},\mathbf{b}]| = |\mathbf{a}| \cdot |\mathbf{b}| \cdot \sin(\widehat{\mathbf{a},\mathbf{b}})$;

2) вектор **[a, b]** перпендикулярен плоскости векторов **a** и **b**;

3) упорядоченная тройка векторов **a**, **b**, **[a, b]** правая.

Алгебраические свойства векторного произведения векторов:

1) $[\mathbf{a}, \mathbf{b}] = -[\mathbf{b}, \mathbf{a}]$; 2) $[\mathbf{a} + \mathbf{b}, \mathbf{c}] = [\mathbf{a}, \mathbf{c}] + [\mathbf{b}, \mathbf{c}]$; 3) $[\lambda\mathbf{a}, \mathbf{b}] = \lambda[\mathbf{a}, \mathbf{b}]$.

Пусть $\mathbf{a}_1 = \{X_1, Y_1, Z_1\}$, $\mathbf{a}_2 = \{X_2, Y_2, Z_2\}$ — векторы, заданные своими координатами в правой прямоугольной системе координат. Тогда

$$[\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2] = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ X_1 & Y_1 & Z_1 \\ X_2 & Y_2 & Z_2 \end{vmatrix} = (Y_1Z_2 - Z_1Y_2)\mathbf{i} + (X_2Z_1 - Z_2X_1)\mathbf{j} + (X_1Y_2 - X_2Y_1)\mathbf{k}. \quad (1.10)$$

ПРИМЕР 1.10. Вычислить площадь треугольника с вершинами $A = (1, 3, -2)$, $B = (4, -1, 1)$ и $C = (5, 0, 3)$.

◀ Площадь параллелограмма, построенного на векторах $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{AC}$, численно равна модулю вектора $[\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}]$. Следовательно, площадь треугольника ABC будет равна половине модуля этого вектора. Произведем вычисления. $\overrightarrow{AB} = \{3, -4, 3\}$, $\overrightarrow{AC} = \{4, -3, 5\}$.

Следовательно, $[\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}] = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 3 & -4 & 3 \\ 4 & -3 & 5 \end{vmatrix} = \{-11, -3, 7\}$. Отсюда получаем

$$S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2}\left|[\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}]\right| = \frac{1}{2}\sqrt{11^2 + 3^2 + 7^2} = \frac{1}{2}\sqrt{179}. \blacktriangleright$$

1.99. Пусть $|\mathbf{a}_1| = 3$, $|\mathbf{a}_2| = 2$ и $(\widehat{\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2}) = \dfrac{5\pi}{6}$. Вычислить:

а) $|[\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2]|$; б) $|[2\mathbf{a}_1 + \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_1 + 2\mathbf{a}_2]|$; в) $|[2\mathbf{a}_1 - 3\mathbf{a}_2, 4\mathbf{a}_1 + 3\mathbf{a}_2]|$.

1.100. Зная, что $[3\mathbf{a} + \mathbf{b}, \mathbf{a} - \mathbf{b}] = A$, найти $[\mathbf{a} + \mathbf{b}, 2\mathbf{a} - \mathbf{b}]$.

1.101. Доказать, что $[\alpha\mathbf{a} + \beta\mathbf{b}, \gamma\mathbf{a} + \delta\mathbf{b}] = \begin{vmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{vmatrix} \cdot [\mathbf{a}, \mathbf{b}]$.

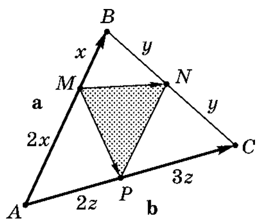


Рис. 1.9

ПРИМЕР 1.11. Площадь треугольника ABC равна S. На сторонах AB, BC, AC соответственно взяты точки M, N, P такие, что $AM : MB = 2 : 1$, $BN : NC = 1 : 1$, $CP : PA = 3 : 2$. Найти площадь треугольника MNP (рис. 1.9).

◀ Пусть $\overrightarrow{AB} = \mathbf{a}$, $\overrightarrow{AC} = \mathbf{b}$. Выразим через эти векторы $\overrightarrow{MP}$ и $\overrightarrow{MN}$:

$$\overrightarrow{MP} = \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{AP} = -\frac{2}{3}\mathbf{a} + \frac{2}{5}\mathbf{b},$$

$$\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{BN} = \frac{1}{3}\mathbf{a} + \frac{1}{2}\overrightarrow{BC} = \frac{1}{3}\mathbf{a} + \frac{1}{2}(\mathbf{b} - \mathbf{a}) = -\frac{1}{6}\mathbf{a} + \frac{1}{2}\mathbf{b}.$$

Отсюда, используя результат задачи 1.101, получаем

$$S_{\triangle MNP} = \frac{1}{2}\left|[\overrightarrow{MP}, \overrightarrow{MN}]\right| = \frac{1}{2}\left|\begin{vmatrix} -2/3 & 2/5 \\ -1/6 & 1/2 \end{vmatrix} \cdot [\mathbf{a}, \mathbf{b}]\right| = \frac{1}{2} \cdot \frac{4}{15} \cdot \left|[\mathbf{a}, \mathbf{b}]\right| = \frac{4}{15}S. \blacktriangleright$$

В задачах 1.102–1.105 упростить выражения.

1.102. $[\mathbf{i}, \mathbf{j} + \mathbf{k}] - [\mathbf{j}, \mathbf{i} + \mathbf{k}] + [\mathbf{k}, \mathbf{i} + \mathbf{j} + \mathbf{k}]$.

1.103. $[\mathbf{a} + \mathbf{b} + \mathbf{c}, \mathbf{c}] + [\mathbf{a} + \mathbf{b} + \mathbf{c}, \mathbf{b}] + [\mathbf{b} + \mathbf{c}, \mathbf{a}]$.

1.104. $[2\mathbf{a} + \mathbf{b}, \mathbf{c} - \mathbf{a}] + [\mathbf{b} + \mathbf{c}, \mathbf{a} + \mathbf{b}]$.

1.105. $2\mathbf{i}[\mathbf{j}, \mathbf{k}] + 3\mathbf{j}[\mathbf{i}, \mathbf{k}] + 4\mathbf{k}[\mathbf{i}, \mathbf{j}]$.

В задачах 1.106–1.107 найти координаты единичного вектора, перпендикулярного векторам $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$.

1.106. $\mathbf{a} = \{1, 3, -4\}$, $\mathbf{b} = \{-2, 0, 1\}$. **1.107.** $\mathbf{a} = \{2, 1, -1\}$, $\mathbf{b} = \{3, 0, 1\}$.

1.108. Определить, при каких значениях α и β вектор $\alpha\mathbf{i} + 3\mathbf{j} + \beta\mathbf{k}$ будет коллинеарен вектору $[\mathbf{a}, \mathbf{b}]$, если $\mathbf{a} = \{1, -2, 2\}$, $\mathbf{b} = \{-2, 1, 1\}$.

1.109. Найти $|[\mathbf{a}, \mathbf{b}]|$, если $|\mathbf{a}| = 3$, $|\mathbf{b}| = 4$ и $(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = 10$.

1.110. Найти координаты вектора $\mathbf{c}$, если известно, что он перпендикулярен векторам $\{2, -3, 1\}$ и $\{1, -2, 3\}$, а также удовлетворяет условию $\mathbf{c}(\mathbf{i} + 2\mathbf{j} - 7\mathbf{k}) = 10$.

1.111. Найти вектор $[\mathbf{a}, \mathbf{a} + \mathbf{b}] + [\mathbf{a}, [\mathbf{a}, \mathbf{b}]]$, если $\mathbf{a} = \{1, -2, 0\}$, $\mathbf{b} = \{0, 1, 1\}$.

1.112. Найти площадь треугольника:

а) построенного на векторах $\mathbf{a} - 2\mathbf{b}$ и $3\mathbf{a} + 2\mathbf{b}$, если $|\mathbf{a}| = |\mathbf{b}| = 5$ и $\widehat{(\mathbf{a}, \mathbf{b})} = \pi/4$;

б) построенного на векторах $\mathbf{a} = 6\mathbf{i} + 3\mathbf{j} + 2\mathbf{k}$ и $\mathbf{b} = 3\mathbf{i} - 2\mathbf{j} + 6\mathbf{k}$;

в) координаты вершин которого равны $(-1, 2, 2)$, $(0, 3, 5)$ и $(1, -1, 4)$.

1.113. Найти площадь параллелограмма, построенного на векторах $\mathbf{a} = 5\mathbf{i} - 4\mathbf{j} + 7\mathbf{k}$ и $\mathbf{b} = \mathbf{i} + \mathbf{j} - 2\mathbf{k}$ как на сторонах.

1.114. Найти длину высоты, опущенной из вершины A треугольника ABC на сторону BC, если $A = (3, -1, 1)$, $B = (0, 1, 2)$, $C = (4, 4, -1)$.

8. Смешанное произведение векторов

Смешанным произведением упорядоченной тройки векторов $\mathbf{a}_1$, $\mathbf{a}_2$, $\mathbf{a}_3$ называется число $([\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2], \mathbf{a}_3)$.

Геометрические свойства смешанного произведения:

1) Если V — объем параллелепипеда, построенного на векторах $\mathbf{a}_1$, $\mathbf{a}_2$, $\mathbf{a}_3$, то

$$[\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2]\mathbf{a}_3 = \begin{cases} +V, \text{ если тройка } (\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3) \text{ — правая,} \\ -V, \text{ если тройка } (\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3) \text{ — левая.} \end{cases} \tag{1.11}$$

2) Для того чтобы три вектора $\mathbf{a}_1$, $\mathbf{a}_2$, $\mathbf{a}_3$ были компланарны, необходимо и достаточно выполнения условия $[\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2]\mathbf{a}_3 = 0$.

Основное алгебраическое свойство смешанного произведения состоит в том, что циклическая перестановка векторов не меняет его величины, т. е. $[\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2]\mathbf{a}_3 = [\mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3]\mathbf{a}_1 = [\mathbf{a}_3, \mathbf{a}_1]\mathbf{a}_2$.

Это свойство позволяет ввести обозначение $[\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2]\mathbf{a}_3 = \mathbf{a}_1\mathbf{a}_2\mathbf{a}_3$ (результат не зависит от того, как расставлены квадратные скобки в правой части).

Следующие два свойства, взятые вместе, выражают *линейность* смешанного произведения векторов по первому аргументу:

$$(\mathbf{a}_1 + \mathbf{a}_2)\mathbf{bc} = \mathbf{a}_1\mathbf{bc} + \mathbf{a}_2\mathbf{bc} \quad \text{и} \quad (\lambda\mathbf{a})\mathbf{bc} = \lambda(\mathbf{abc}).$$

Аналогично имеет место линейность по второму и третьему аргументу.

Пусть $\mathbf{a}_1 = \{X_1, Y_1, Z_1\}$, $\mathbf{a}_2 = \{X_2, Y_2, Z_2\}$, $\mathbf{a}_3 = \{X_3, Y_3, Z_3\}$ — векторы, заданные своими координатами в правой прямоугольной системе координат. Тогда

$$\mathbf{a}_1\mathbf{a}_2\mathbf{a}_3 = \begin{vmatrix} X_1 & Y_1 & Z_1 \\ X_2 & Y_2 & Z_2 \\ X_3 & Y_3 & Z_3 \end{vmatrix}. \tag{1.12}$$

ПРИМЕР 1.12. Пусть $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$, $\mathbf{c}$ — некомпланарные векторы. Найти λ, при котором векторы $\mathbf{p} = \mathbf{a} - 2\mathbf{b} + \lambda\mathbf{c}$, $\mathbf{q} = 3\mathbf{a} + \mathbf{b} - \mathbf{c}$, $\mathbf{r} = \mathbf{a} - \lambda\mathbf{c}$ компланарны.

◀ Векторы $\mathbf{p}$, $\mathbf{q}$, $\mathbf{r}$ компланарны, если $\mathbf{pqr} = 0$. Так как

$$\begin{gathered}\mathbf{pqr} = [\mathbf{a} - 2\mathbf{b} + \lambda\mathbf{c}, 3\mathbf{a} + \mathbf{b} - \mathbf{c}](\mathbf{a} - \lambda\mathbf{c}) = \\ = ([\mathbf{a}, \mathbf{b}] - [\mathbf{a}, \mathbf{c}] - 6[\mathbf{b}, \mathbf{a}] + 2[\mathbf{b}, \mathbf{c}] + 3\lambda[\mathbf{c}, \mathbf{a}] + 3\lambda[\mathbf{c}, \mathbf{b}])(\mathbf{a} - \lambda\mathbf{c}) = \\ = 2[\mathbf{b}, \mathbf{c}]\mathbf{a} + 3\lambda[\mathbf{c}, \mathbf{b}]\mathbf{a} - \lambda[\mathbf{a}, \mathbf{b}]\mathbf{c} + 6\lambda[\mathbf{b}, \mathbf{a}]\mathbf{c} = (2 - 10\lambda)\mathbf{abc}\end{gathered}$$

и $\mathbf{abc} \neq 0$, то, следовательно, $-10\lambda + 2 = 0$, а значит, $\lambda = 1/5$. ▶

1.115. Доказать, что если $\mathbf{p} = \alpha_1\mathbf{a} + \beta_1\mathbf{b} + \gamma_1\mathbf{c}$, $\mathbf{q} = \alpha_2\mathbf{a} + \beta_2\mathbf{b} + \gamma_2\mathbf{c}$, $\mathbf{r} = \alpha_3\mathbf{a} + \beta_3\mathbf{b} + \gamma_3\mathbf{c}$, то

$$\mathbf{pqr} = \begin{vmatrix} \alpha_1 & \beta_1 & \gamma_1 \\ \alpha_2 & \beta_2 & \gamma_2 \\ \alpha_3 & \beta_3 & \gamma_3 \end{vmatrix} \cdot \mathbf{abc}.$$

1.116. Проверить, компланарны ли данные векторы:

а) $\mathbf{a} = -2\mathbf{i} + \mathbf{j} + \mathbf{k}$, $\mathbf{b} = \mathbf{i} - 2\mathbf{j} + 3\mathbf{k}$, $\mathbf{c} = 14\mathbf{i} - 13\mathbf{j} + 7\mathbf{k}$;

б) $\mathbf{a} = 2\mathbf{i} + \mathbf{j} - 3\mathbf{k}$, $\mathbf{b} = 3\mathbf{i} - 2\mathbf{j} + 2\mathbf{k}$, $\mathbf{c} = \mathbf{i} - 4\mathbf{j} + \mathbf{k}$.

1.117. Определить значения λ, при которых векторы $\{-1, 2, 4\}$, $\{3, 5 - \lambda, 0\}$ и $\{2, 4, -5\}$ будут компланарны.

1.118. Найти $(\mathbf{a} + 2\mathbf{b})(2\mathbf{a} - \mathbf{b} + 3\mathbf{c})(3\mathbf{a} + 4\mathbf{c})$, если $\mathbf{abc} = A$.

1.119. Найти $\mathbf{abc}$, если $(2\mathbf{a} - \mathbf{b} - \mathbf{c})(3\mathbf{a} + \mathbf{b})(2\mathbf{a} - 2\mathbf{b} + 3\mathbf{c}) = A$.

ПРИМЕР 1.13. Объем параллелепипеда равен V. Найти объем треугольной пирамиды, одна из вершин которой — вершина параллелепипеда, а три другие — центры противоположных граней параллелепипеда.

◀ Введем векторы $\mathbf{a} = \overrightarrow{AD}$, $\mathbf{b} = \overrightarrow{AB}$, $\mathbf{c} = \overrightarrow{AA_1}$ (рис. 1.10). Тогда в соответствии с определением (1.11) $V = |\mathbf{abc}|$. Векторы $\overrightarrow{AM}$, $\overrightarrow{AN}$, $\overrightarrow{AP}$ в базисе из векторов $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ и $\mathbf{c}$ имеют следующие разложения:

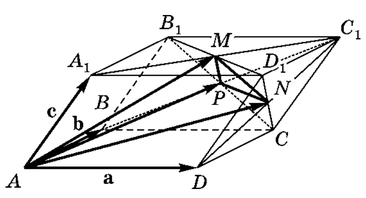


Рис. 1.10

$$\overrightarrow{AM} = \mathbf{c} + \frac{1}{2}\mathbf{a} + \frac{1}{2}\mathbf{b},\ \ \overrightarrow{AN} = \mathbf{a} + \frac{1}{2}\mathbf{b} + \frac{1}{2}\mathbf{c},\ \ \overrightarrow{AP} = \mathbf{b} + \frac{1}{2}\mathbf{a} + \frac{1}{2}\mathbf{c}.$$

Отметим, что объем треугольной пирамиды, построенной на векторах $\overrightarrow{AM}$, $\overrightarrow{AN}$, $\overrightarrow{AP}$, будет в 6 раз меньше объема параллелепипеда, построенного на этих векторах. Отсюда, используя результат задачи 1.115, получаем

$$V_{AMNP} = \frac{1}{6}\left|\overrightarrow{AM}\ \overrightarrow{AN}\ \overrightarrow{AP}\right| = \frac{1}{6}\left\|\begin{matrix} 1/2 & 1/2 & 1 \\ 1 & 1/2 & 1/2 \\ 1/2 & 1 & 1/2 \end{matrix}\right|\mathbf{abc}\right| = \frac{1}{6}\cdot\frac{1}{2}V = \frac{1}{12}V. \blacktriangleright$$

В задачах 1.120–1.121 вычислить объем пирамиды $ABCD$.

1.120. $\overrightarrow{AB} = 3\mathbf{i} + 4\mathbf{j}$, $\overrightarrow{AC} = -3\mathbf{i} + \mathbf{k}$, $\overrightarrow{AD} = 2\mathbf{j} + 5\mathbf{k}$.

1.121. $A = (-1, 3, 5)$, $B = (0, 2, 1)$, $C = (1, 4, -1)$, $D = (0, 0, 3)$.

1.122. Найти высоту пирамиды $ABCD$, опущенную из вершины B, если $A = (2, 1, 0)$, $B = (-1, 4, 3)$, $C = (0, 2, -1)$, $D = (1, 0, -4)$.

1.123. Дан куб $ABCDA_1B_1C_1D_1$ с ребром, равным a. Найти:

а) объем пирамиды A_1C_1DM, где M — середина ребра BB_1;

б) объем пирамиды, вершины которой — середины ребер AA_1, AD и центры граней $A_1B_1C_1D_1$, AA_1D_1D.

1.124. Доказать, что объем параллелепипеда, построенного на диагоналях граней данного параллелепипеда, равен удвоенному объему данного параллелепипеда.

1.125. Найти координаты четвертой вершины тетраэдра $ABCD$, если известно, что она лежит на оси Oy, а объем тетраэдра равен V:

а) $A = (-1, 10, 0)$, $B = (0, 5, 2)$, $C = (6, 32, 2)$, $V = 29$;

б) $A = (0, 1, 1)$, $B = (4, 3, -3)$, $C = (2, -1, 1)$, $V = 2$.

1.126. Доказать тождества:

1) $(\mathbf{a} + \mathbf{c})\mathbf{b}(\mathbf{a} + \mathbf{b}) = -\mathbf{abc}$; 2) $(\mathbf{a} - \mathbf{b})(\mathbf{a} - \mathbf{b} - \mathbf{c})(\mathbf{a} + 2\mathbf{b} - \mathbf{c}) = 3\mathbf{abc}$;

3) $(\mathbf{a} + \mathbf{b})(\mathbf{b} + \mathbf{c})(\mathbf{c} + \mathbf{a}) = 2\mathbf{abc}$; 4) $\forall\alpha, \beta\ (\mathbf{ab}(\mathbf{c} + \alpha\mathbf{a} + \beta\mathbf{b}) = \mathbf{abc})$.

§ 1.2. ЛИНЕЙНЫЕ ГЕОМЕТРИЧЕСКИЕ ОБЪЕКТЫ

1. Прямая на плоскости

Прямая l на плоскости в декартовой прямоугольной системе координат Oxy может быть задана уравнением одного из следующих видов:

1) $Ax + By + C = 0$ — *общее уравнение прямой*;

2) $A(x - x_0) + B(y - y_0) = 0$ — уравнение прямой, проходящей через точку $M_0 = (x_0, y_0)$ перпендикулярно нормальному вектору $\mathbf{n} = \{A, B\}$;

3) $\dfrac{x - x_0}{q_1} = \dfrac{y - y_0}{q_2}$ — уравнение прямой, проходящей через точку $M_0 = (x_0, y_0)$ параллельно *направляющему вектору* $\mathbf{q} = \{q_1, q_2\}$ (*каноническое уравнение* прямой);

4) $\begin{cases} x = x_0 + q_1 t, \\ y = y_0 + q_2 t \end{cases}$ $(t \in \mathbb{R})$ — *параметрические уравнения* прямой. Число t называется *параметром*. Параметрические уравнения в векторной форме имеют вид

$$\mathbf{r}(t) = \mathbf{r}_0 + \mathbf{q}t,$$

где $\mathbf{r}_0 = \{x_0, y_0\}$ — радиус-вектор принадлежащей прямой точки $M_0 = (x_0, y_0)$, $\mathbf{q} = \{q_1, q_2\}$ — направляющий вектор прямой;

5) $\dfrac{x}{a} + \dfrac{y}{b} = 1$ — уравнение прямой *в отрезках*, где a и b — величины направленных отрезков, отсекаемых прямой на координатных осях Ox и Oy соответственно;

6) $x\cos\alpha + y\cos\beta - p = 0$ — *нормальное уравнение* прямой, где $\cos\alpha$ и $\cos\beta$ — направляющие косинусы нормального вектора $\mathbf{n}$, направленного из начала координат в сторону прямой, а $p > 0$ — расстояние от начала координат до прямой.

Общее уравнение 1) приводится к нормальному виду 6) умножением на нормирующий множитель

$$\mu = -\frac{\operatorname{sign} C}{\sqrt{A^2 + B^2}}.$$

Если прямая l задана уравнением вида 6), а $M = (x, y)$ — некоторая точка плоскости, то выражение

$$\delta(M, l) = x\cos\alpha + y\cos\beta - p$$

задает *отклонение* точки M от прямой l. Знак $\delta(M, l)$ указывает на взаимное расположение точки M, прямой l и начала координат, а именно: если точка M и начало координат лежат по разные стороны от прямой l, то $\delta(M, l) > 0$, а если точка M и начало координат находятся по одну сторону от прямой l, то $\delta(M, l) < 0$. Расстояние $\rho(M, l)$ от точки M до прямой l определяется равенством $\rho(M, l) = |\delta(M, l)|$.

ПРИМЕР 1.14. Написать каноническое, параметрические и общее уравнения прямой, проходящей через точки $A = (-1, 3)$ и $B = (4, 1)$.

◄ Направляющим вектором прямой AB можно считать вектор $\mathbf{q} = \overrightarrow{AB} = \{5; -2\}$. Пусть, например, $M_0 = A = (-1, 3)$. Тогда получим каноническое уравнение прямой AB: $\dfrac{x+1}{5} = \dfrac{y-3}{-2}$.

Из этого равенства получаем общее уравнение прямой AB: $2x + 5y - 13 = 0$.

Приравняв в каноническом уравнении левую и правую части равенства к числу t, т. е. $\dfrac{x+1}{5} = \dfrac{y-3}{-2} = t$, получим параметрические уравнения прямой AB:

$$\begin{cases} x = -1 + 5t, \\ y = 3 - 2t \end{cases} \quad (t \in \mathbb{R}). \blacktriangleright$$

В задачах 1.127–1.129 требуется:

1) написать уравнение прямой, привести его к общему виду и построить прямую;

2) привести общее уравнение к нормальному виду и указать расстояние от начала координат до прямой.

1.127. Прямая l задана точкой $M_0 = (x_0, y_0) \in l$ и нормальным вектором $\mathbf{n} = \{A, B\}$:

а) $M_0 = (2, 1)$, $\mathbf{n} = \{1, -1\}$; б) $M_0 = (-1, 0)$, $\mathbf{n} = \{-2, 2\}$.

1.128. Прямая l задана точкой $M_0 = (x_0, y_0) \in l$ и направляющим вектором $\mathbf{q} = \{q_1, q_2\}$:

а) $M_0 = (-1, 2)$, $\mathbf{q} = \{3, -1\}$; б) $M_0 = (1, 1)$, $\mathbf{q} = \{0, -1\}$;

в) $M_0 = (-1, 1)$, $\mathbf{q} = \{2, 0\}$.

1.129. Прямая l задана двумя своими точками $M_1 = (x_1, y_1)$ и $M_2 = (x_2, y_2)$:

а) $M_1 = (1, 2)$, $M_2 = (-2, 1)$; б) $M_1 = (2, 2)$, $M_2 = (0, 2)$.

1.130. Найти расстояние от начала координат до прямой $3x - 4y + 2 = 0$.

1.131. Даны точки $P = (3, 1)$ и $Q = (-1, 6)$. Вывести уравнения прямых, проходящих через концы отрезка PQ перпендикулярно этому отрезку.

1.132. При каком a прямые $3x - 2y + 1 = 0$ и $ax + 5y - 2008 = 0$ перпендикулярны?

1.133. Даны точки $A = (3, -2)$ и $B = (1, 5)$. Найти точку пересечения прямой AB с осью ординат.

1.134. Вывести уравнение средней линии $MN \parallel AB$ треугольника ABC, если $A = (2, 3)$, $B = (-1, 4)$, $C = (8, 1)$.

1.135. Даны точка $M = (-2, 5)$ и прямая l: $3x + 4y - 6 = 0$. Вывести уравнение геометрического места точек B, являющихся серединами отрезков MA, где $A \in l$.

1.136. Вывести уравнение геометрического места точек, равноудаленных от точек $A = (3,\ 7)$ и $B = (2,\ -5)$.

Заданы прямая l и точка M. В примере 1.15 и задачах 1.137–1.138 требуется:

1) вычислить расстояние $\rho(M,\ l)$ от точки M до прямой l;

2) написать уравнение прямой l_1, проходящей через точку M перпендикулярно прямой l;

3) написать уравнение прямой l_2, проходящей через точку M параллельно прямой l.

ПРИМЕР 1.15. l: $3x - 4y + 2 = 0$, $M = (4,\ -1)$.

◄ Приводим общее уравнение данной прямой $3x - 4y + 2 = 0$ с помощью нормирующего множителя $\mu = -\dfrac{\operatorname{sign} C}{\sqrt{A^2 + B^2}} = -\dfrac{1}{5}$ к нормальному виду $-\dfrac{3}{5}x + \dfrac{4}{5}y - \dfrac{2}{5} = 0$. Тогда

$\delta(M, l) = -\dfrac{3}{5}\cdot 4 + \dfrac{4}{5}\cdot(-1) - \dfrac{2}{5} = -\dfrac{18}{5}$, а так как $\rho(M,\ l) = |\delta(M,\ l)|$, то $\rho(M, l) = \dfrac{18}{5}$.

Нормальный вектор $\mathbf{n} = \{3,\ -4\}$ прямой l является направляющим вектором прямой l_1, а значит, можно записать ее каноническое уравнение: $\dfrac{x-4}{3} = \dfrac{y+1}{-4}$. Отсюда $-4(x - 4) = 3(y + 1)$ и общее уравнение прямой l_1 имеет вид $4x + 3y - 13 = 0$.

Взяв $M_0 = M$ и записав равенство $3(x - 4) - 4(y + 1) = 0$, получаем из него общее уравнение прямой l_2: $3x - 4y - 16 = 0$. ►

1.137. l: $-2x + y - 1 = 0$, $M = (-1,\ 2)$. **1.138.** l: $2y + 1 = 0$, $M = (1,\ 0)$.

Пусть заданы две прямые l_1 и l_2. Возможны два случая их взаимного расположения:

1) l_1 и l_2 — параллельные прямые, в частности, они совпадают;

2) l_1 и l_2 пересекаются. Угол φ между прямыми l_1 и l_2 равен углу между их нормальными векторами $\mathbf{n}_1$ и $\mathbf{n}_2$ или дополняет его до π, т. е. $\cos\varphi = \left|\cos\left(\widehat{\mathbf{n}_1, \mathbf{n}_2}\right)\right| = \dfrac{\mathbf{n}_1\mathbf{n}_2}{|\mathbf{n}_1|\cdot|\mathbf{n}_2|}$.

В задачах 1.139–1.142 исследовать взаимное расположение прямых l_1 и l_2. При этом в случае 1) найти расстояние $\rho(l_1,\ l_2)$ между прямыми, а в случае 2) — косинус угла $\left(\widehat{l_1, l_2}\right)$ и точку пересечения прямых.

1.139. l_1: $-2x + y - 1 = 0$, l_2: $2y + 1 = 0$.

1.140. $l_1: \dfrac{x-1}{-2} = \dfrac{y}{1}$, $l_2: \dfrac{x+2}{1} = \dfrac{y}{0}$.

1.141. l_1: $2x - 5y + 1 = 0$, l_2: $4x + y + 3 = 0$.

1.142. l_1: $x + y - 1 = 0$, $l_2: \dfrac{x}{2} = \dfrac{y+1}{-2}$.

ПРИМЕР 1.16. Составить уравнение высоты AH, медианы AM и биссектрисы AL треугольника ABC, если $A = (-8,\ 3)$, $B = (10,\ -1)$, $C = (-1,\ 9)$.

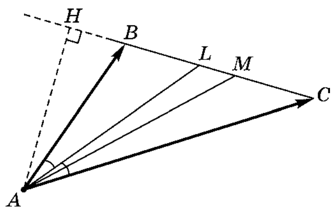


Рис. 1.11

◀ Имеем $\overrightarrow{BC}=\{-11,10\}$ (рис. 1.11). Так как вектор $\overrightarrow{BC}$ является нормальным вектором прямой AH, то $\mathbf{n}=\{-11, 10\}$. В качестве точки M_0 прямой AH возьмем точку A. Запишем теперь уравнение высоты AH: $-11(x+8)+10(y-3)=0$, т. е. $11x-10y+118=0$.

Далее, направляющим вектором прямой AM может служить вектор $\overrightarrow{AM}=\frac{1}{2}(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC})$. Поэтому возьмем $\mathbf{q}=2\overrightarrow{AM}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}=\{25,2\}$. Отсюда получаем уравнение прямой AM: $\frac{x+8}{25}=\frac{y-3}{2}$, или $2x-25y+91=0$.

Составим теперь уравнение биссектрисы AL. Найдем длины векторов $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{AC}$: $|\overrightarrow{AB}|=\sqrt{18^2+4^2}=2\sqrt{9^2+2^2}=2\sqrt{85}$, $|\overrightarrow{AC}|=\sqrt{7^2+6^2}=\sqrt{85}$. Векторы $\overrightarrow{AB}$ и $2\overrightarrow{AC}$ имеют одинаковую длину, поэтому вектор $\mathbf{u}=\overrightarrow{AB}+2\overrightarrow{AC}$ направлен по биссектрисе угла A, а значит, является направляющим вектором прямой AL. Вычисляем: $\mathbf{u}=\{18, -4\}+$ $+2\{7, 6\}=\{32, 8\}=8\{4, 1\}$. Запишем каноническое уравнение прямой AL: $\frac{x+8}{4}=\frac{y-3}{1}$. Отсюда получаем $x-4y+20=0$. ▶

1.143. Даны координаты одной из вершин треугольника: $(3, -1)$ и уравнения двух его медиан: $3x-y+4=0$, $x-2=0$. Найти координаты двух других вершин треугольника.

1.144. Вывести уравнения сторон треугольника, зная одну его вершину $B=(2, 6)$, а также уравнения высоты $x+7y-13=0$ и биссектрисы $x-7y+$ $+15=0$, проведенных из одной вершины.

1.145. Вывести уравнения сторон треугольника, зная одну его вершину $B=(2, -7)$, а также уравнения высоты $3x+y+11=0$ и медианы $x+2y+7=0$, проведенных из разных вершин.

1.146. Даны уравнения $5x+4y=0$ и $3x-y=0$ медиан треугольника и координаты $(-5, 2)$ одной из его вершин. Вывести уравнения сторон треугольника.

1.147. Известно уравнение стороны AB параллелограмма $ABCD$: $3x-$ $-2y+4=0$, его диагонали AC: $x-y=0$ и вершина $D=(-5, 4)$. Найти координаты вершин A, B и C.

1.148. Даны уравнения двух сторон параллелограмма: $3x-2y+1=0$, $4x+y-5=0$ и координаты его центра: $(-5; 6)$. Вывести уравнения двух других сторон и уравнения диагоналей.

Если прямая задана общим уравнением $Ax+By+C=0$ и при этом $B\neq 0$ (т. е. прямая не параллельна оси Oy), то эта прямая может быть описана в виде $y=kx+b$ — *уравнение с угловым коэффициентом*.

1.149. Доказать, что если прямые l_1 и l_2 заданы уравнениями с угловыми коэффициентами, то $\operatorname{tg}(\widehat{l_1,l_2})=\left|\frac{k_2-k_1}{1+k_2k_1}\right|$.

1.150. В уравнении прямой $4x+\lambda y-20=0$ подобрать значение λ так, чтобы угол между этой прямой и прямой $2x-3y+6=0$ равнялся 45°.

ПРИМЕР 1.17. Выяснить, лежит ли точка $M = (2, 5)$ внутри треугольника ABC, если $A = (-1, 9)$, $B = (0, 4)$, $C = (7, 2)$.

◀ Составим уравнения прямых AB, BC и AC:

$\mathbf{q}_{AB} = \overrightarrow{AB} = \{1, -5\}$, уравнение: $\dfrac{x+1}{1} = \dfrac{y-9}{-5}$, т. е. $5x + y - 4 = 0$;

$\mathbf{q}_{BC} = \overrightarrow{BC} = \{7, -2\}$, уравнение: $\dfrac{x-0}{7} = \dfrac{y-4}{-2}$, т. е. $2x + 7y - 28 = 0$;

$\mathbf{q}_{AC} = \overrightarrow{AC} = \{8, -7\}$, уравнение: $\dfrac{x+1}{8} = \dfrac{y-9}{-7}$, т. е. $7x + 8y - 65 = 0$.

Для того чтобы точка лежала внутри треугольника ABC, необходимо и достаточно, чтобы она лежала: 1) по ту же сторону от прямой AB, где лежит точка C, 2) по ту же сторону от прямой BC, где лежит точка A, 3) по ту же сторону от прямой AC, где лежит точка B. Вычисляя соответствующие отклонения, убеждаемся, что:

$$\delta(M, AB) = \frac{10+5-4}{\sqrt{26}} > 0,\ \delta(C, AB) = \frac{35+2-4}{\sqrt{26}} > 0 \text{ — одного знака;}$$

$$\delta(M, BC) = \frac{2\cdot 2+7\cdot 5-28}{\sqrt{53}} > 0,\ \delta(A, BC) = \frac{2\cdot(-1)+7\cdot 9-28}{\sqrt{53}} > 0 \text{ — одного знака;}$$

$$\delta(M, AC) = \frac{7\cdot 2+8\cdot 5-65}{\sqrt{113}} < 0,\ \delta(B, AC) = \frac{7\cdot 0+8\cdot 4-65}{\sqrt{113}} < 0 \text{ — одного знака.}$$

Следовательно, точка M лежит внутри треугольника ABC. ▶

1.151. Определить, по одну или по разные стороны от прямой $3x + 5y - 7 = 0$ расположены точки $(1, 1)$ и $(-3, 3)$.

1.152. Определить, пересекает ли отрезок PQ прямую l, если $P = (3, 1)$, $Q = (-1, 4)$, а прямая l задана уравнением $2x + 3y - 5 = 0$.

1.153. Определить, лежит ли точка с координатами $(1, 2)$ между параллельными прямыми $3x - y - 2 = 0$ и $2y - 6x + 3 = 0$.

1.154. Определить, лежит ли точка M внутри угла ABC, если $A = (2, -7)$, $B = (-4, -9)$, $C = (-8, 1)$, $M = (-9, 12)$.

1.155. Определить, лежат ли точки $(-1, 3)$ и $(5, 13)$ в одном, в смежных или вертикальных углах, образованных прямыми $3x - 7y + 46 = 0$ и $4x + y - 11 = 0$.

1.156. Доказать, что расстояние от точки M_0 до прямой l выражается формулой

$$\rho(M_0, l) = \left|\text{пр}_{\mathbf{n}} \overrightarrow{M_0A}\right| = \frac{\left|(\mathbf{n}, \overrightarrow{M_0A})\right|}{|\mathbf{n}|},$$

где $\mathbf{n}$ — нормальный вектор прямой l, A — произвольная точка этой прямой.

1.157. Доказать, что расстояние от точки $M_0 = (x_0, y_0)$ до прямой l, заданной уравнением $ax + by + c = 0$, выражается формулой

$$\rho(M_0, l) = \frac{|ax_0 + by_0 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}. \qquad (1.13)$$

1.158. Используя формулу (1.13), найти расстояние от точки $(-3, 1)$ до прямой $y = 2x$.

В задачах 1.159–1.160, используя формулу (1.13), найти расстояние между параллельными прямыми l_1 и l_2, заданными своими уравнениями.

1.159. l_1: $3x - 5y + 1 = 0$ и l_2: $3x - 5y - 2 = 0$.

1.160. l_1: $x = 2 - 5t$, $y = 1 + 2t$ и l_2: $x = 1 + 10t$, $y = 3 - 4t$.

1.161. На оси абсцисс найти все точки, равноудаленные от прямых $x - y + 3 = 0$ и $x + 7y - 1 = 0$.

1.162. На прямой $y = x$ найти все точки, равноудаленные от прямых $y = x + 1$ и $y = 7x - 1$.

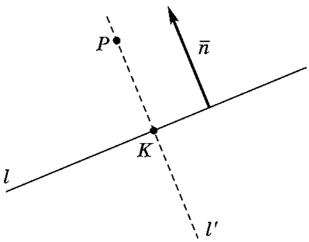


Рис. 1.12

ПРИМЕР 1.18. Найти проекцию точки $P = (3, 5)$ на прямую $y = 2x + 1$.

◀ Обозначим через l прямую $y = 2x + 1$ (рис. 1.12). Уравнение этой прямой можно переписать в виде $2x - y + 1 = 0$. Найдем нормальный вектор прямой l: $\mathbf{n} = \{2, -1\}$. Этот вектор может быть принят в качестве направляющего вектора прямой l': $\mathbf{q}' = \{2, -1\}$. Запишем параметрические уравнения прямой l':

$$x = 3 + 2t, \quad y = 5 - t. \tag{1.14}$$

Теперь найдем координаты точки K пересечения прямых l и l', подставив формулы (1.14) в уравнение прямой l, получим $5 - t = 2(3 + 2t) + 1$. Отсюда $t = -0{,}4$. Подставим теперь это значение t в (1.14), получим $x = 3 + 2 \cdot (-0{,}4) = 2{,}2$, $y = 5 - (-0{,}4) = 5{,}4$. Таким образом, $K = (2{,}2; 5{,}4)$. Точка K — это и есть проекция точки P на прямую l. ▶

1.163. Найти проекцию точки $P = (1, -1)$ на прямую $2x - 2y + 1 = 0$.

ПРИМЕР 1.19. Вывести уравнение прямой, симметричной прямой l: $3x + y - 5 = 0$ относительно: а) начала координат; б) оси абсцисс; в) точки $A = (-1, 4)$.

◀ а) Симметрия относительно начала координат переводит точку (x, y) в точку $(-x, -y)$. Поэтому уравнение симметричной прямой мы получим, заменяя x на $-x$ и y на $-y$. Таким образом, искомое уравнение имеет вид $-3x - y - 5 = 0$, или $3x + y + 5 = 0$.

б) Симметрия относительно оси абсцисс задается формулами $x' = x$, $y' = -y$. Отсюда получаем $3x - y - 5 = 0$.

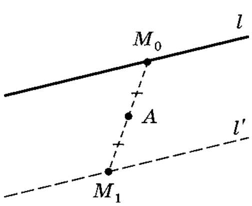


Рис. 1.13

в) Возьмем какую-нибудь точку прямой l, например $M_0 = (0, 5)$ (рис. 1.13) (для этого достаточно подобрать числа x и y, удовлетворяющие уравнению $3x + y - 5 = 0$). Пусть M_1 — точка, симметричная точке M_0 относительно точки A. Тогда $\overrightarrow{AM_1} = \overrightarrow{M_0A} = \{-1, -1\}$ и $\overrightarrow{OM_1} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AM_1} = \{-1, 4\} + \{-1, -1\} = \{-2, 3\}$. Следовательно, $M_1 = (-2, 4)$. Отсюда получаем уравнение прямой l': $3(x + 2) + (y - 3) = 0$, т. е. $3x + y + 4 = 0$. ▶

1.164. Найти точку, симметричную точке $(2, 1)$ относительно прямой $6x - 4y + 5 = 0$.

1.165. Вывести уравнение прямой, симметричной прямой l: $x + 2y - 2 = 0$ относительно:

а) начала координат; б) оси абсцисс; в) точки $A = (2, -1)$.

2. Плоскость и прямая в пространстве

Плоскость P в декартовой прямоугольной системе координат $Oxyz$ может быть задана уравнением одного из следующих видов:

1) $Ax + By + Cz + D = 0$ — *общее уравнение* плоскости;

2) $A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0$ — уравнение плоскости, проходящей через точку $M_0 = (x_0, y_0, z_0)$ перпендикулярно нормальному вектору $\mathbf{n} = \{A, B, C\}$;

3) $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}=1$ — уравнение плоскости *в отрезках*, где a, b и c — величины направленных отрезков, отсекаемых прямой на координатных осях Ox, Oy и Oz соответственно;

4) $x\cos\alpha + y\cos\beta + z\cos\gamma - p = 0$ — *нормальное уравнение* плоскости, где $\cos\alpha$, $\cos\beta$ и $\cos\gamma$ — направляющие косинусы нормального вектора $\mathbf{n}$, направленного из начала координат в сторону плоскости, а $p > 0$ — расстояние от начала координат до плоскости.

Общее уравнение 1) приводится к нормальному виду 4) умножением на нормирующий множитель

$$\mu = -\frac{\operatorname{sign} D}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}.$$

Если плоскость P задана нормальным уравнением 4), а $M = (x, y, z)$ — некоторая точка пространства, то выражение

$$\delta(M, P) = x\cos\alpha + y\cos\beta + z\cos\gamma - p$$

определяет отклонение точки M от плоскости P. Знак $\delta(M, P)$ указывает на взаимное расположение точки M, плоскости P и начала координат, а именно: если точка M и начало координат лежат по разные стороны от плоскости P, то $\delta(M, P) > 0$, а если точка M и начало координат находятся по одну сторону от плоскости P, то $\delta(M, P) < 0$. Расстояние $\rho(M, P)$ от точки M до плоскости P определяется равенством $\rho(M, P) = |\delta(M, P)|$.

Прямая l в пространстве может быть задана:

1) как линия пересечения двух плоскостей, заданных своими общими уравнениями

$$\begin{cases} A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0, \\ A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0, \end{cases}$$

где коэффициенты A_1, B_1, C_1 не пропорциональны коэффициентам A_2, B_2, C_2;

2) *параметрическими уравнениями* $\begin{cases} x = x_0+q_1t, \\ y = y_0+q_2t, \ (t\in\mathbb{R}), \\ z = z_0+q_3t \end{cases}$

или, в векторной форме, $\mathbf{r}(t) = \mathbf{r}_0 + \mathbf{q}t$, где $\mathbf{r}_0 = \{x_0, y_0, z_0\}$ — радиус-вектор принадлежащей прямой точки $M_0 = (x_0, y_0, z_0)$, а $\mathbf{q} = \{q_1, q_2, q_3\}$ — направляющий вектор прямой;

3) *каноническими уравнениями* $\frac{x-x_0}{q_1}=\frac{y-y_0}{q_2}=\frac{z-z_0}{q_3}$,

что равносильно заданию прямой как линии пересечения трех плоскостей, проектирующих эту прямую на координатные плоскости.

Условия параллельности и перпендикулярности прямых и плоскостей.

1. Пусть α_1 и α_2 — две плоскости, заданные уравнениями $A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0$ и $A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0$ соответственно. Тогда:

$$\text{а) } \alpha_1 \parallel \alpha_2 \Leftrightarrow \frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} = \frac{C_1}{C_2} \neq \frac{D_1}{D_2};$$

$$\text{б) } \alpha_1 = \alpha_2 \Leftrightarrow \frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} = \frac{C_1}{C_2} = \frac{D_1}{D_2};$$

$$\text{в) } \alpha_1 \perp \alpha_2 \Leftrightarrow \mathbf{n}_1 \perp \mathbf{n}_2 \Leftrightarrow \mathbf{n}_1\mathbf{n}_2 = 0 \Leftrightarrow A_1A_2 + B_1B_2 + C_1C_2 = 0.$$

2. Пусть l_1 и l_2 — две прямые и $\mathbf{q}$ и $\mathbf{p}$ — их направляющие векторы. Тогда:

$$\text{а) } (l_1 \parallel l_2 \text{ или } l_1 = l_2) \Leftrightarrow \mathbf{q} \parallel \mathbf{p};$$

$$\text{б) } l_1 \perp l_2 \Leftrightarrow \mathbf{q} \perp \mathbf{p} \Leftrightarrow \mathbf{qp} = 0.$$

Углом φ между прямой l_1 и плоскостью α называется угол между прямой и ее проекцией на плоскость. Если направляющий вектор прямой $\mathbf{q}$ и нормальный вектор плоскости $\mathbf{n}$ направлены в одну сторону от плоскости, то угол между ними равен $\frac{\pi}{2} - \varphi$, если же векторы направлены в разные стороны от плоскости, то угол между ними равен $\frac{\pi}{2} + \varphi$. Таким образом,

$$\sin\varphi = \left|\cos\left(\frac{\pi}{2} \pm \varphi\right)\right| = \left|\cos(\widehat{\mathbf{n}, \mathbf{q}})\right| = \frac{|\mathbf{nq}|}{|\mathbf{n}| \cdot |\mathbf{q}|}.$$

ПРИМЕР 1.20. Прямая l является линией пересечения плоскостей, заданных общими уравнениями $\begin{cases} x - 10y + 2z + 10 = 0, \\ 3x - 2y - z + 2 = 0. \end{cases}$ Написать каноническое уравнение этой прямой, а также уравнение ее проекции на координатную плоскость Oyz.

◀ Точка $M = (-2, 0, -4)$ удовлетворяет общим уравнениям плоскостей, следовательно, лежит на прямой l. В качестве направляющего вектора этой прямой может быть взят вектор $\mathbf{q} = [\mathbf{n}_1, \mathbf{n}_2]$, где $\mathbf{n}_1 = \{1, -10, 2\}$ и $\mathbf{n}_2 = \{3, -2, -1\}$ — нормальные векторы плоскостей, линией пересечения которых является заданная прямая. Таким образом,

$$\mathbf{q} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 1 & -10 & 2 \\ 3 & -2 & -1 \end{vmatrix} = 14\mathbf{i} + 7\mathbf{j} + 28\mathbf{k}.$$

Следовательно, канонические уравнения прямой имеют вид $\frac{x+2}{14} = \frac{y}{7} = \frac{z+4}{28}$.

Полученная пропорция эквивалентна системе трех уравнений

$$\begin{cases} 7x - 14y + 14 = 0, \\ 2x - z = 0, \\ 4y - z - 4 = 0, \end{cases}$$

описывающих три плоскости, проектирующие прямую на координатные плоскости Oxy, Oxz, Oyz соответственно (уравнение прямой в проекциях). В частности, уравнение $4y - z - 4 = 0$ есть уравнение проекции заданной прямой на плоскость Oyz. ▶

В задачах 1.166–1.167 вывести уравнение плоскости, проходящей через заданную точку M и перпендикулярной заданной прямой l.

1.166. $M = (-2, 3, 4)$, l: $x = t$, $y = 3 - t$, $z = 4 + 2t$.

1.167. $M = (-2, 1, 3)$, l: $\frac{x-1}{1} = \frac{y-2}{-2} = \frac{z-3}{-4}$.

В задачах 1.168–1.169 вывести уравнение плоскости α_1, проходящей через заданные точки M_1 и M_2 перпендикулярно заданной плоскости α.

1.168. α: $x - 2y + 3z - 2 = 0$, $M_1 = (1, 2, 3)$, $M_2 = (1, 0, -1)$.

1.169. α: $-x + 2y + z + 1 = 0$, $M_1 = (-1, 2, 0)$, $M_2 = (-1, 2, 1)$.

В задачах 1.170–1.171 вывести уравнение плоскости, проходящей через точку M параллельно векторам $\mathbf{a}_1$ и $\mathbf{a}_2$.

1.170. $M = (1, 1, 1)$, $\mathbf{a}_1 = \{0, 1, 2\}$, $\mathbf{a}_2 = \{-1, 0, 1\}$.

1.171. $M = (0, 1, 2)$, $\mathbf{a}_1 = \{2, 0, 1\}$, $\mathbf{a}_2 = \{1, 1, 0\}$.

В задачах 1.172–1.173 вывести уравнение плоскости, проходящей через заданные точки M_1 и M_2 параллельно вектору $\mathbf{a}$.

1.172. $M_1 = (1, 2, 0)$, $M_2 = (2, 1, 1)$, $\mathbf{a} = \{3, 0, 1\}$.

1.173. $M_1 = (1, 1, 1)$, $M_2 = (2, 3, -1)$, $\mathbf{a} = \{0, -1, 2\}$.

В задачах 1.174–1.175 вывести уравнение плоскости, проходящей через три заданные точки M_1, M_2 и M_3.

1.174. $M_1 = (1, 2, 0)$, $M_2 = (2, 1, 1)$, $M_3 = (3, 0, 1)$.

1.175. $M_1 = (1, 1, 1)$, $M_2 = (0, -1, 2)$, $M_3 = (2, 3, -1)$.

1.176. Найти расстояние от начала координат до плоскости $3x - y + 5z - 2 = 0$.

В задачах 1.177–1.182 вывести уравнение плоскости, удовлетворяющей следующим условиям.

1.177. Плоскость проходит через прямую $\frac{x-1}{2} = \frac{y+3}{-3} = \frac{z}{2}$ и точку $(-1, 4, 1)$.

1.178. Плоскость проходит через прямые $x = 3 + 2t$, $y = t$, $z = 4 - t$ и $x = 4 + 2t$, $y = 1 + t$, $z = -1 - t$.

1.179. Плоскость проходит через точку $(3, -2, -5)$ параллельно плоскости $3x + 4y - 2z + 2009 = 0$.

1.180. Плоскость проходит через точки $(-1, 3, 5)$ и $(3, -1, -3)$ перпендикулярно плоскости $3x + 5y - 4z = 0$.

1.181. Плоскость проходит через точку $A = (1, 1, 1)$ и перпендикулярна к плоскостям $2x - y + 5z + 3 = 0$ и $x + 3y - z - 7 = 0$.

1.182. Плоскость перпендикулярна отрезку PQ и проходит через его середину, если $P = (0, 4, 3)$, $Q = (-1, 2, 5)$.

Пусть заданы две плоскости α_1 и α_2. Возможны два случая их взаимного расположения:

1) α_1 и α_2 — параллельные плоскости (в частности, они совпадают);

2) α_1 и α_2 пересекаются.

В задачах 1.183–1.186 исследовать взаимное расположения плоскостей α_1 и α_2. При этом в случае 1) найти расстояние $\rho(\alpha_1, \alpha_2)$ между плоскостями, а в случае 2) — косинус угла между ними.

1.183. α_1: $3x - y + 2z + 4 = 0$, α_2: $4x + y - 5z + 17 = 0$.

1.184. α_1: $2x - y + z - 1 = 0$, α_2: $-4x + 2y - 2z - 1 = 0$.

1.185. α_1: $2x - y - z + 1 = 0$, α_2: $-4x + 2y + 2z - 2 = 0$.

1.186. α_1: $4x + 3y - 5z - 8 = 0$, α_2: $4x + 3y - 5z + 12 = 0$.

В задачах 1.187–1.189 написать канонические и параметрические уравнения прямой, проходящей через две заданные точки M_1 и M_2.

1.187. $M_1 = (1, 2, 3)$, $M_2 = (2, 0, -1)$.

1.188. $M_1 = (-1, 2, 0)$, $M_2 = (-1, -2, 1)$.

1.189. $M_1 = (-3, 2, 1)$, $M_2 = (-1, -2, -3)$.

В задачах 1.190–1.191 написать канонические уравнения прямой, заданной как линия пересечения плоскостей, заданных общими уравнениями.

1.190. $\begin{cases} 2x - y + 2z - 3 = 0, \\ x + 2y - z - 1 = 0. \end{cases}$ **1.191.** $\begin{cases} x + 2y - 3z - 5 = 0, \\ 2x - y + z + 2 = 0. \end{cases}$

Расстояние ρ от точки M до плоскости α выражается следующими формулами:

1) Если $\mathbf{n}$ — нормальный вектор плоскости α, A — произвольная точка плоскости, то

$$\rho(M, \alpha) = |\operatorname{pr}_{\mathbf{n}} \overrightarrow{MA}| = \frac{|(\mathbf{n}, \overrightarrow{MA})|}{|\mathbf{n}|}. \tag{1.15}$$

2) Если $M = (x_0, y_0, z_0)$ и α: $Ax + By - Cz + D = 0$, то

$$\rho(M, \alpha) = \frac{|Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}. \tag{1.16}$$

В задачах 1.192–1.193, используя формулу (1.16), найти расстояние от точки M до плоскости α.

1.192. $M = (5, 1, -1)$, α: $x - 2y - 2z + 4 = 0$.

1.193. $M = (-1, 3, 2)$, α: $2x - y - 2z + 4 = 0$.

1.194. Найти расстояние между плоскостью $2x - 3z - 5 = 0$ и осью ординат.

В задачах 1.195–1.196 вывести уравнение плоскости α_1, проходящей через точку M параллельно плоскости α, и вычислить расстояние $\rho(\alpha, \alpha_1)$.

1.195. α: $x - 2y + 3z - 2 = 0$, $M = (1, 2, 3)$.

1.196. α: $2x + y - z - 1 = 0$, $M = (1, 1, 1)$.

1.197. Вывести уравнения плоскостей, находящихся на расстоянии 5 от плоскости $2x + 2y - z + 5 = 0$.

1.198. Вывести уравнение геометрического места точек, равноудаленных от точек $(-1, 3, 2)$ и $(4, 0, 6)$.

1.199. Найти высоту AH пирамиды $ABCD$, если $A = (1, -2, 3)$, $B = (0, -1, 4)$, $C = (3, 3, -4)$, $D = (-2, 0, 1)$.

1.200. Написать канонические и параметрические уравнения прямой, проходящей через точки $(1, 3, -2)$ и $(2, 5, 7)$.

1.201. Вывести уравнение прямой, проходящей через точку $(3, 2, -5)$ параллельно прямой $\frac{x-1}{3} = \frac{y+2}{4} = \frac{z}{-2}$.

1.202. Написать уравнение прямой, проходящей через точки пересечения плоскости $x - 3y + 2z + 1 = 0$ с прямыми

$$l_1: \frac{x-5}{5} = \frac{y+1}{-2} = \frac{z-3}{-1} \quad \text{и} \quad l_2: \frac{x-3}{4} = \frac{y+4}{-6} = \frac{z-5}{2}.$$

1.203. Через прямую $\frac{x+1}{2} = \frac{y-1}{-1} = \frac{z-2}{3}$ провести плоскость, параллельную прямой $\frac{x}{-1} = \frac{y+2}{2} = \frac{z-3}{-3}$.

В задачах 1.204–1.205 найти угол между прямыми l_1 и l_2.

1.204. $l_1: \dfrac{x-1}{2}=\dfrac{y+3}{3}=\dfrac{z}{-2}$ и l_2: $x = 3 + t$, $y = -2t$, $z = 1 + t$.

1.205. $l_1: \begin{cases} x-y+z-4=0, \\ 2x+y-2z+5=0 \end{cases}$ и $l_2: \begin{cases} x+y+z-4=0, \\ 2x+3y-z-6=0. \end{cases}$

1.206. Найти угол между плоскостью $3x - 5y + 2z - 7 = 0$ и осью ординат.

В задачах 1.207–1.208 найти расстояние от точки M до прямой l.

1.207. $M = (1, 3, -2)$, l: $\dfrac{x-1}{2}=\dfrac{y+1}{-1}=\dfrac{z}{-3}$.

1.208. $M = (0, 2, -1)$, l: $x = 2 - t$, $y = 3 + 2t$, $z = 4t$.

Расстояние между прямыми l_1 и l_2 может быть найдено по формулам:

1. Если l_1 и l_2 параллельны, $\mathbf{q}$ — их направляющий вектор, а точки $M_1 \in l_1$ и $M_2 \in l_2$, то

$$\rho(l_1, l_2) = \frac{|[\mathbf{q}, \overrightarrow{M_1M_2}]|}{|\mathbf{q}|}. \tag{1.17}$$

2. Если прямые l_1 и l_2 скрещиваются и $\mathbf{q}_1$, $\mathbf{q}_2$ — соответственно их направляющие векторы, а точки $M_1 \in l_1$, $M_2 \in l_2$, то

$$\rho(l_1, l_2) = \frac{|\overrightarrow{M_1M_2}\,\mathbf{q}_1\,\mathbf{q}_2|}{|[\mathbf{q}_1, \mathbf{q}_2]|}. \tag{1.18}$$

В задачах 1.209–1.211 убедиться, что прямые l_1 и l_2 параллельны и, используя формулу (1.17), найти расстояние между ними.

1.209. $l_1: \dfrac{x-1}{3}=\dfrac{y}{-4}=\dfrac{z+1}{2}$; $l_2: \dfrac{x}{3}=\dfrac{y+1}{-4}=\dfrac{z+2}{2}$.

1.210. l_1: $x = 2 + 3t$, $y = -1 + 4t$, $z = 2t$; l_2: $x = 7 + 3t$, $y = 1 + 4t$, $z = 3 + 2t$.

1.211. $l_1: \dfrac{x-1}{1}=\dfrac{y}{2}=\dfrac{z+1}{-2}$; l_2: $x = 4 - t$, $y = 1 - 2t$, $z = 3 + 2t$.

В задачах 1.212–1.213, используя формулу (1.18), найти расстояние между скрещивающимися прямыми l_1 и l_2.

1.212. $l_1: \dfrac{x-1}{2}=\dfrac{y+2}{-3}=\dfrac{z}{4}$; l_2: $x = 3 - t$, $y = t$, $z = 1 + 2t$.

1.213. l_1: $x = y = z$, l_2: $x = 1 - 2t$, $y = 3t$, $z = 2 + t$.

1.214. Вывести уравнение прямой, проходящей через точку $(3, -1, 2)$ перпендикулярно плоскости $2x + 4y - 5z + 2009 = 0$.

1.215. Доказать, что прямые l_1 и l_2 пересекаются. Найти точку их пересечения, если $l_1: \dfrac{x+3}{1}=\dfrac{y+1}{2}=\dfrac{z+1}{1}$ и $l_2: \begin{cases} x=3z-4, \\ y=z+2. \end{cases}$

В задачах 1.216–1.217 спроектировать точку M_0 на прямую l или плоскость α.

1.216. $M_0 = (0, -3, 5)$, $l\colon \dfrac{x-1}{3} = \dfrac{y-2}{1} = \dfrac{z-2}{-2}$.

1.217. $M_0 = (3, 5, -4)$, $\alpha\colon x + 2y - 3z - 53 = 0$.

В задачах 1.218–1.219 спроектировать прямую l на плоскость α.

1.218. $l\colon \dfrac{x-1}{3} = \dfrac{y+3}{1} = \dfrac{z-9}{-5}$, $\alpha\colon x - 2y + 3z - 6 = 0$.

1.219. $l\colon \begin{cases} x+y+z-5=0, \\ 2x-3y+z-4=0, \end{cases}$ $\alpha\colon 3x - 2y - z + 15 = 0$.

1.220. Вывести уравнение высоты, выходящей из вершины A треугольника ABC, если $A = (3, 1, -4)$, $B = (0, 0, 2)$, $C = (-2, 3, 3)$.

В задачах 1.221–1.222, используя формулу (1.18), доказать, что прямые l_1 и l_2 принадлежат одной плоскости, и написать уравнение этой плоскости.

1.221. $l_1\colon \dfrac{x-1}{2} = \dfrac{y+2}{-3} = \dfrac{z-5}{4}$ и $l_2\colon \dfrac{x-7}{3} = \dfrac{y-2}{2} = \dfrac{z-1}{-2}$.

1.222. $l_1\colon \dfrac{x-2}{3} = \dfrac{y+1}{2} = \dfrac{z-3}{-2}$ и $l_2\colon \dfrac{x-1}{3} = \dfrac{y-2}{2} = \dfrac{z+3}{-2}$.

§ 1.3. АЛГЕБРАИЧЕСКИЕ КРИВЫЕ И ПОВЕРХНОСТИ

1. Алгебраические кривые на плоскости

Говорят, что кривая γ в декартовой прямоугольной системе координат Oxy имеет уравнение

$$F(x, y) = 0, \tag{1.19}$$

если выполнено следующее условие: точка $M = (x, y)$ принадлежит кривой γ в том и только том случае, когда ее координаты x и y удовлетворяют соотношению (1.19).

Алгебраической кривой второго порядка называется кривая γ, уравнение которой в декартовой системе координат имеет вид

$$a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 + 2a_1x + 2a_2y + a_3 = 0, \tag{1.20}$$

где не все коэффициенты a_{11}, a_{12} и a_{22} равны одновременно нулю. В общем случае может оказаться, что уравнение (1.20) определяет так называемую *вырожденную* кривую (пустое множество, точку, прямую, пару прямых).

Если кривая γ невырожденная, то для нее найдется такая декартова прямоугольная система координат, в которой уравнение имеет один из следующих видов (*каноническое уравнение*):

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1, \quad a \ge b > 0, \tag{1.21}$$

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1, \quad a, b > 0, \tag{1.22}$$

$$y^2 = 2px, \quad p > 0. \tag{1.23}$$

Система координат, в которой уравнение кривой γ имеет вид (1.21), (1.22) или (1.23), называется *канонической* системой координат, а кривая называется соответственно *эллипсом*, *гиперболой* или *параболой*.

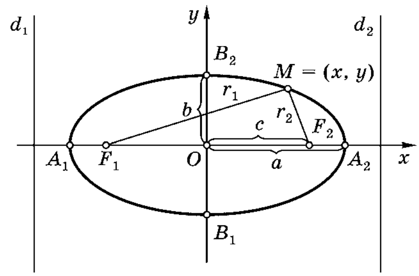


Рис. 1.14

Эллипс с каноническим уравнением $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1,\ a\ge b>0,$ имеет форму, изображенную на рис. 1.14.

Параметры a и b называются *полуосями* эллипса (большой и малой соответственно), точки $A_1=(-a,0)$, $A_2=(a,0)$, $B_1=(0,-b)$ и $B_2=(0,b)$ — его *вершинами*, оси симметрии Ox и Oy — *главными осями*, а центр симметрии O — *центром* эллипса.

Точки $F_1=(-c,0)$, $F_2=(c,0)$, где $c=\sqrt{a^2-b^2}\ge 0$, называются *фокусами* эллипса, векторы $\overrightarrow{F_1M}$ и $\overrightarrow{F_2M}$ — *фокальными радиус-векторами*, а числа $r_1=|\overrightarrow{F_1M}|$ и $r_2=|\overrightarrow{F_2M}|$ — *фокальными радиусами* точки M, принадлежащей эллипсу. В частном случае $a=b$ фокусы F_1 и F_2 совпадают с центром, а каноническое уравнение имеет вид $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{a^2}=1$, или $x^2+y^2=a^2$, т. е. описывает окружность радиуса a с центром в начале координат.

Число $e=\dfrac{c}{a}=\sqrt{1-\dfrac{b^2}{a^2}}$ $(0\le e<1)$ называется *эксцентриситетом* эллипса и является мерой его «сплюснутости» (при $e=0$ эллипс является окружностью).

Прямые $d_1\colon x=-\dfrac{a}{e}$ и $d_2\colon x=\dfrac{a}{e}$, перпендикулярные главной оси и проходящие на расстоянии $\dfrac{a}{e}$ от центра, называются *директрисами* эллипса.

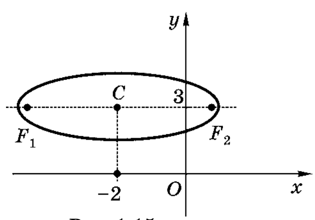


Рис. 1.15

ПРИМЕР 1.21. Написать каноническое уравнение эллипса $x^2+9y^2+4x-54y+76=0$ и найти его характеристики.

◀ Приведем это уравнение к каноническому виду. Выделим полные квадраты по x и по y: $(x^2+4x+4-4)+9(y^2-6y+9-9)+76=0$. Тогда $(x+2)^2+9(y-3)^2=9$, и, поделив обе части на 9, получим каноническое уравнение эллипса $\dfrac{(x+2)^2}{9}+\dfrac{(y-3)^2}{1}=1$. Его центр $C=(-2,3)$. Полуоси: $a=3$, $b=1$. Для определения координат фокусов находим параметр c (половину расстояния между фокусами): $c=\sqrt{a^2-b^2}=2\sqrt{2}$. Отсюда получаем фокусы: $F_1=(-2-2\sqrt{2};3)$, $F_2=(-2+2\sqrt{2};3)$ (рис. 1.15). Эксцентриситет эллипса: $e=c/a=2\sqrt{2}/3$. ▶

1.223. Построить эллипс $9x^2+16y^2=144$. Найти его полуоси, координаты фокусов, эксцентриситет и уравнения директрис.

1.224. Написать каноническое уравнение эллипса, если:

а) $a=3,\ b=2$; б) $a=5,\ c=4$; в) $c=3,\ e=\dfrac{3}{5}$; г) $b=5,\ e=\dfrac{12}{13}$;

д) $c = 2$ и расстояние между директрисами равно 5;

е) $e = \frac{1}{2}$ и расстояние между директрисами равно 32.

1.225. Написать уравнение эллипса с полуосями a и b и центром в точке $C = (x_0, y_0)$, если известно, что его главные оси параллельны осям Ox и Oy.

1.226. Установить, что каждое из следующих уравнений определяет эллипс, найти его центр C, полуоси, координаты фокусов, эксцентриситет и уравнения директрис:

а) $5x^2 + 9y^2 - 30x + 18y + 9 = 0$;

б) $16x^2 + 25y^2 + 32x - 100y - 284 = 0$;

в) $4x^2 + 3y^2 - 8x + 12y - 32 = 0$.

1.227. Доказать следующие утверждения, в которых сформулированы некоторые свойства эллипса:

1) Если $M = (x, y)$ — произвольная точка эллипса $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$, $a \geq b$, то фокальные радиусы этой точки равны

$$r_1(M) = a + ex, \quad r_2(M) = a - ex,$$

(см. рис. 1.14). Отсюда, в частности, следует, что для всякой точки эллипса M выполняется равенство

$$r_1(M) + r_2(M) = \text{const} = 2a.$$

2) Пусть заданы точки $F_1 = (-c, 0)$ и $F_2 = (c, 0)$, где $c \geq 0$. Тогда множество точек M, удовлетворяющих условию $|\overrightarrow{F_1M}| + |\overrightarrow{F_2M}| = \text{const} = 2a$, есть эллипс $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$, где $b^2 = a^2 - c^2$.

1.228. Доказать следующие утверждения:

1) Если $M = (x, y)$ — произвольная точка эллипса $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$, $a > b$, $r_1(M)$ и $r_2(M)$ — фокальные радиусы этой точки, а $\rho(M, d_1)$ и $\rho(M, d_2)$ — расстояния от нее до директрис (см. рис. 1.14), то выполняется равенство

$$\frac{r_1(M)}{\rho(M, d_1)} = \frac{r_2(M)}{\rho(M, d_2)} = \text{const} = e.$$

2) Пусть заданы точка $F = (c, 0)$ и прямая l: $x - d = 0$, $d > c > 0$. Тогда множество точек M, удовлетворяющих условию $\frac{|\overrightarrow{FM}|}{\rho(M, l)} = \text{const} = e < 1$, есть эллипс $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$, где $a = de$ и $b^2 = a^2 - c^2$.

1.229. Эллипс, главные оси которого совпадают с координатными осями, проходит через точки $M_1 = (2, \sqrt{3})$ и $M_2 = (0, 2)$. Написать его уравнение, найти фокальные радиусы точки M_1 и расстояния от этой точки до директрис.

1.230. На эллипсе $9x^2 + 25y^2 = 225$ найти точку, расстояние от которой до фокуса F_2 в четыре раза больше расстояния до фокуса F_1.

1.231. Определить, как расположена прямая относительно эллипса — пересекает, касается или проходит вне его, если прямая и эллипс заданы уравнениями:

а) $2x-y-3=0,\ \dfrac{x^2}{16}+\dfrac{y^2}{9}=1$; б) $2x+y-10=0,\ \dfrac{x^2}{9}+\dfrac{y^2}{4}=1$;

в) $3x+2y-20=0,\ \dfrac{x^2}{40}+\dfrac{y^2}{10}=1$.

ПРИМЕР 1.22. Написать уравнение касательной к эллипсу $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$ в его точке $M_0=(x_0,\,y_0)$.

◀ Пусть сначала $y_0 \neq 0$, т. е. точка M_0 не совпадает ни с одной из вершин $A_1 = (-\,a,\,0)$ и $A_2=(a,\,0)$. В этом случае уравнение $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$ неявно определяет функцию $y=y(x)$, $-a<x<a$, график которой проходит через точку $M_0=(x_0,\,y_0)$ и совпадает с соответствующей (верхней при $y_0>0$ или нижней при $y_0<0$) половиной эллипса. Дифференцируя по x тождество $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2(x)}{b^2}=1$, найдем, что производная $y'(x_0)$ равна

$$y'(x_0)=-\frac{b^2x_0}{a^2y_0}.$$

Отсюда уравнение касательной к эллипсу в его точке $M_0=(x_0,\,y_0)$ имеет вид

$$y-y_0=-\frac{b^2x_0}{a^2y_0}(x-x_0),$$

или, с учетом равенства $\dfrac{x_0^2}{a^2}+\dfrac{y_0^2}{b^2}=1$,

$$\frac{x_0x}{a^2}+\frac{y_0y}{b^2}=1. \qquad (1.24)$$

Если же $y_0=0$ (и, следовательно, $x_0=\pm\,a$), то касательные к эллипсу имеют вид $x_0=\pm\,a$, т. е. и в этом случае задаются формулой (1.24). ▶

1.232. Написать уравнения касательных к эллипсу:

а) $\dfrac{x^2}{10}+\dfrac{y^2}{5/2}=1$, параллельных прямой $3x+2y-5=0$;

б) $\dfrac{x^2}{20}+\dfrac{y^2}{5}=1$, перпендикулярных прямой $2x-2y+5=0$.

Гипербола с каноническим уравнением $\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1$, $a,\,b>0$, имеет форму, изображенную на рис. 1.16.

Параметры a и b называются *полуосями* гиперболы, точки $A_1=(-\,a,\,0)$ и $A_2=(a,\,0)$ — ее *вершинами*, оси симметрии Ox и Oy — *действительной и мнимой осями*, а центр симметрии O — *центром* гиперболы.

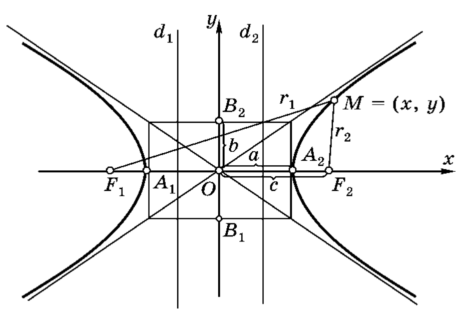


Рис. 1.16

Прямые $y = \pm\frac{b}{a}x$ являются асимптотами гиперболы.

Точки $F_1 = (-c, 0)$, $F_2 = (c, 0)$, где $c = \sqrt{a^2 + b^2} > 0$, называются *фокусами* гиперболы, векторы $\overrightarrow{F_1M}$ и $\overrightarrow{F_2M}$ — *фокальными радиус-векторами*, а числа $r_1 = |\overrightarrow{F_1M}|$ и $r_2 = |\overrightarrow{F_2M}|$ — *фокальными радиусами* точки M, принадлежащей гиперболе.

Число $e = \frac{c}{a} = \sqrt{1 + \frac{b^2}{a^2}}$ $(1 < e < +\infty)$ называется *эксцентриситетом* гиперболы и является мерой ее «сплюснутости». В частном случае $a = b$ гипербола называется *равносторонней*; ее эксцентриситет $e = \sqrt{2}$, а угол между асимптотами равен $\frac{\pi}{2}$.

Прямые $d_1: x = -\frac{a}{e}$ и $d_2: x = \frac{a}{e}$, перпендикулярные главной оси и проходящие на расстоянии $\frac{a}{e}$ от центра, называются *директрисами* гиперболы.

1.233. Построить гиперболу $25x^2 - 9y^2 = 225$. Найти: а) полуоси; б) координаты фокусов; в) эксцентриситет; г) уравнения директрис.

1.234. Написать каноническое уравнение гиперболы, если:

а) $a = 2, b = 3$; б) $b = 4, c = 5$; в) $c = 3,\ e = \frac{3}{2}$; г) $a = 8,\ e = \frac{5}{4}$;

д) $c = 10$ и уравнения асимптот $y = \pm\frac{4}{3}x$;

е) $e = \frac{3}{2}$ и расстояние между директрисами равно $\frac{8}{3}$.

1.235. Написать уравнение гиперболы с асимптотами $y = \pm\, 0{,}8(x - 3) - 2$, касающейся оси Ox.

1.236. Написать уравнение гиперболы с полуосями a и b и центром в точке $C = (x_0, y_0)$, если известно, что ее действительная и мнимая оси параллельны осям Ox и Oy.

1.237. Установить, что каждое из следующих уравнений определяет гиперболу, найти ее центр C, полуоси, координаты фокусов, эксцентриситет, уравнения асимптот и директрис:

а) $16x^2 - 9y^2 - 64x - 54y - 161 = 0$; б) $9x^2 - 16y^2 + 90x + 32y - 367 = 0$;
в) $16x^2 - 9y^2 - 64x - 18y + 199 = 0$.

1.238. Доказать следующие утверждения:

1) Если $M = (x, y)$ — произвольная точка гиперболы $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$, то фокальные радиусы этой точки равны

$$r_1(M) = a + ex, \quad r_2(M) = -a + ex,$$

если точка M лежит на правой ветви гиперболы, и

$$r_1(M) = -a - ex, \quad r_2(M) = a - ex,$$

если точка M лежит на ее левой ветви. Отсюда, в частности, следует, что для всякой точки M эллипса выполняется равенство

$$|r_1(M) - r_2(M)| = \text{const} = 2a.$$

2) Пусть заданы точка $F_1 = (-c, 0)$ и $F_2 = (c, 0)$, где $c > 0$. Тогда множество точек M, удовлетворяющих условию $\left||\overrightarrow{F_1M}|-|\overrightarrow{F_2M}|\right| = \text{const} = 2a$, $a > 0$, есть гипербола $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$, где $b^2 = c^2 - a^2$.

1.239. Доказать следующие утверждения:

1) Если $M = (x, y)$ — произвольная точка гиперболы $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$, $r_1(M)$ и $r_2(M)$ — фокальные радиусы этой точки, а $\rho(M, d_1)$ и $\rho(M, d_2)$ — расстояния от нее до директрис (рис. 1.16), то выполняется равенство

$$\frac{r_1(M)}{\rho(M,d_1)}=\frac{r_2(M)}{\rho(M,d_2)}=\text{const}=e.$$

2) Пусть заданы точка $F = (c, 0)$ и прямая l: $x - d = 0$, $c > d > 0$. Тогда множество точек M, удовлетворяющих условию $\frac{|\overrightarrow{FM}|}{\rho(M,l)}=\text{const}=e>1$, есть гипербола $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$, где $a = de$ и $b^2 = c^2 - a^2$.

1.240. Убедившись, что точка $M=\left(-5, \frac{9}{4}\right)$ лежит на гиперболе $\frac{x^2}{16}-\frac{y^2}{9}=1$, найти фокальные радиусы этой точки и ее расстояния до директрис.

1.241. Найти точки гиперболы $\frac{x^2}{9}-\frac{y^2}{16}=1$, находящиеся на расстоянии 7 от фокуса F_1.

1.242. Написать уравнение касательной к гиперболе $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$ в ее точке $M_0 = (x_0, y_0)$.

1.243. Составить уравнение касательных к гиперболе:

а) $\frac{x^2}{16}-\frac{y^2}{64}=1$, параллельных прямой $10x - 3y - 5 = 0$;

б) $\frac{x^2}{20}-\frac{y^2}{5}=1$, перпендикулярных прямой $4x + 3y - 2 = 0$.

Парабола с каноническим уравнением $y^2 = 2px$, $p > 0$, имеет форму, изображенную на рис. 1.17.

Число p называется *параметром* параболы, точка O — *вершиной* параболы, а ось Ox — осью параболы.

Точка $F = (p/2, 0)$ называется *фокусом* параболы, вектор $\overrightarrow{FM}$ — *фокальным радиус-вектором*, а число $r = |\overrightarrow{FM}|$ — *фокальным радиусом* точки M параболы.

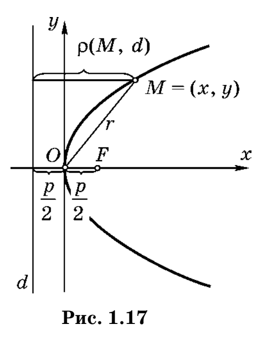


Рис. 1.17

Эксцентриситет параболы считается равным единице: $e = 1$.

Прямая d: $x = -p/2$, перпендикулярная оси и проходящая на расстоянии $p/2$ от вершины параболы, называется ее *директрисой*.

1.244. Построить следующие параболы и найти их параметры:

а) $y^2 = 6x$; б) $x^2 = 5y$;

в) $y^2 = -4x$; г) $x^2 = -y$.

1.245. Написать уравнение параболы с вершиной в начале координат, если известно, что:

а) парабола расположена в левой полуплоскости симметрично относительно оси Ox и $p = 0{,}5$;

б) парабола расположена симметрично относительно оси Ox и проходит через точку $M = (4, -8)$;

в) фокус параболы находится в точке $M = (0, -3)$.

1.246. Написать уравнение параболы, если известно, что ее вершина находится в точке $A = (x_0, y_0)$, параметр равен p, ось параллельна оси Ox и парабола расположена относительно прямой $x = x_0$: а) в правой полуплоскости; б) в левой полуплоскости.

1.247. Построить параболы, заданные следующими уравнениями; найти координаты их вершины и величины параметра p:

а) $y^2 = 4x - 8$; б) $x^2 = 2 - y$; в) $y = 4x^2 - 8x + 7$;

г) $y = -\dfrac{1}{6}x^2 + 2x - 7$; д) $x = -\dfrac{1}{4}y^2 + y$; е) $x = 2y^2 - 12y + 14$.

1.248. Доказать следующие утверждения:

1) Если $M = (x, y)$ — произвольная точка параболы $y^2 = 2px$, $r(M)$ — ее фокальный радиус, а $\rho(M, d)$ — расстояние от точки M до директрисы (см. рис. 1.17), то выполняется равенство

$$\frac{r(M)}{\rho(M,d)} = \mathrm{const} = 1.$$

2) Пусть заданы точка $F = (p/2, 0)$ и прямая d: $x = -p/2$. Тогда множество точек M, удовлетворяющих условию $\dfrac{r(M)}{\rho(M,d)} = \mathrm{const} = 1$, есть парабола $y^2 = 2px$.

1.249. Вычислить фокальный радиус точки M параболы $y^2 = 12x$, если $y(M) = 6$.

1.250. Написать уравнение параболы, если известны:

а) фокус $F = (4, 3)$ и директриса d: $y + 1 = 0$;

б) фокус $F = (2, -1)$ и директриса d: $x - y - 1 = 0$.

1.251. Написать уравнение касательной к параболе $y^2 = 2px$ в ее точке $M_0 = (x_0, y_0)$.

1.252. Составить уравнение касательной к параболе:

а) $y^2 = 8x$, параллельной прямой $4x + 4y - 5 = 0$;

б) $x^2 = 16y$, перпендикулярной прямой $x + 2y - 2 = 0$.

2. Алгебраические поверхности в пространстве

Говорят, что поверхность S в декартовой прямоугольной системе координат $Oxyz$ имеет уравнение

$$F(x, y, z) = 0, \tag{1.25}$$

если выполнено следующее условие: точка $M = (x, y, z)$ принадлежит поверхности S в том и только том случае, когда ее координаты x, y и z удовлетворяют соотношению (1.25).

Алгебраической поверхностью второго порядка называют поверхность S, уравнение которой в некоторой декартовой прямоугольной системе координат имеет вид

$$a_{11}x^2 + a_{22}y^2 + a_{33}z^2 + 2a_{12}xy + 2a_{13}xz + 2a_{23}yz + 2a_1x + 2a_2y + 2a_3z + a_4 = 0, \tag{1.26}$$

причем предполагается, что хотя бы одно из чисел a_{11}, a_{22}, a_{33}, a_{12}, a_{13}, a_{23} ненулевое (в противном случае поверхность S — алгебраическая поверхность первого порядка, т. е. плоскость).

В общем случае может оказаться, что уравнение (1.26) определяет так называемую *вырожденную* поверхность (пустое множество, точку, плоскость, пару плоскостей). Если же поверхность *невырожденная*, то преобразованием декартовой прямоугольной системы координат ее уравнение может быть приведено к одному из указанных ниже видов, называемых *каноническими* и определяющих тип поверхности (*канонические уравнения*):

1. *Эллипсоид*: $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$ (рис. 1.18).

2. *Гиперболоид*:

а) *однополостный*: $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1$ (рис. 1.19);

б) *двуполостный*: $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=-1$ (рис. 1.20).

3. *Конус второго порядка*: $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=0$ (рис. 1.21).

4. *Параболоид*:

а) *эллиптический*: $z=\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}$ (рис. 1.22);

б) *гиперболический*: $z=\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}$ (рис. 1.23).

5. *Цилиндр второго порядка*:

а) *эллиптический*: $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ (рис. 1.24);

б) *гиперболический*: $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$ (рис. 1.25);

в) *параболический*: $y^2 = 2px$ (рис. 1.26).

6. *Мнимый эллипсоид*: $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=-1$ (эта «поверхность» не имеет действительных точек).

7. $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=0$ — *точка*, или *мнимый конус с действительной вершиной*.

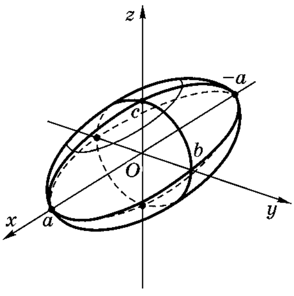


Рис. 1.18

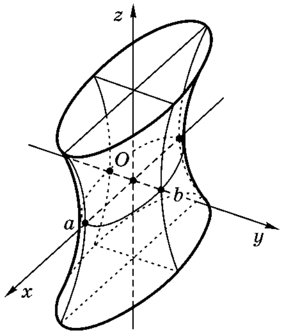


Рис. 1.19

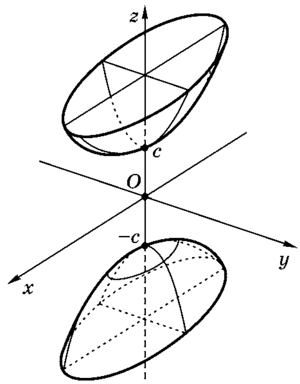


Рис. 1.20

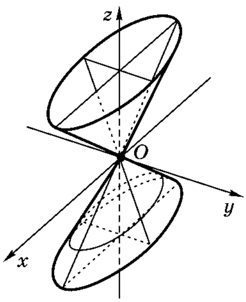


Рис. 1.21

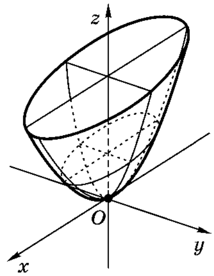


Рис. 1.22

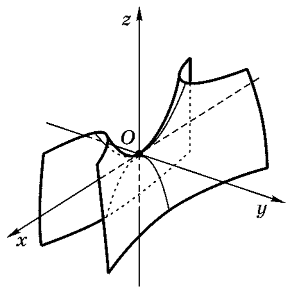


Рис. 1.23

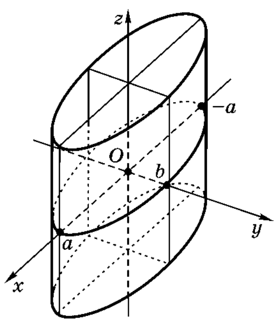


Рис. 1.24

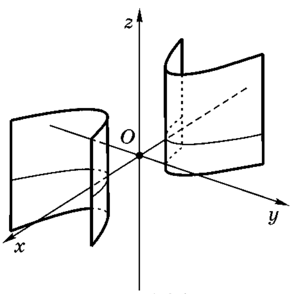


Рис. 1.25

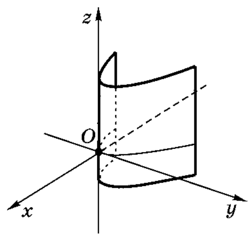


Рис. 1.26

8. $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=-1$ — *мнимый эллиптический цилиндр* (эта «поверхность» не имеет действительных точек).

9. $\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=0$ — *пара пересекающихся плоскостей*.

10. $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=0$ — *пара мнимых плоскостей* с общей действительной прямой.

11. $x^2=A$, $A>0$ — *пара параллельных плоскостей*.

12. $x^2=0$ — *пара совпадающих плоскостей*.

Одним из основных методов исследования формы поверхности по ее уравнению является *метод сечений*.

ПРИМЕР 1.23. Методом сечений исследовать форму и построить поверхность, заданную уравнением $z=2-\dfrac{x^2}{16}-\dfrac{y^2}{25}$.

◀ В сечении поверхности горизонтальной плоскостью $z = h$ получаем кривую Γ_h, проекция которой на плоскость Oxy определяется уравнением

$$h=2-\frac{x^2}{16}-\frac{y^2}{25},$$

или

$$\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{25}=2-h. \tag{1.27}$$

Уравнение (1.27) при $h > 2$ не имеет решений относительно (x, y). Это означает, что рассматриваемая поверхность целиком расположена ниже плоскости $z = 2$. При $h \le 2$ уравнение (1.27) определяет эллипс с полуосями $a=4\sqrt{2-h}$ и $b=5\sqrt{2-h}$, вырождающийся в точку $x = y = 0$ при $h = 2$. Заметим, что все эллипсы, получающиеся в сечении поверхности плоскостями $z = h \le 2$, подобны между собой $\left(\dfrac{a}{b}=\text{const}=\dfrac{4}{5}\right)$, причем с уменьшением h их полуоси неограниченно и монотонно возрастают.

Полученной информации достаточно, чтобы построить эскиз поверхности. Дальнейшее уточнение ее формы можно получить, если рассматривать сечения координатными плоскостями Oxy и Oyz. Сечение плоскостью Oxy: $y = 0$ дает кривую $x^2 = 16(2 - z)$, т. е. параболу с параметром $p = 8$, вершиной в точке $x = 0$, $z = 2$ и ветвями, направленными в сторону убывания значений z. Наконец, сечение плоскостью Oyz: $x = 0$ дает кривую $y^2 = 25(2 - z)$ с параметром $p=\dfrac{25}{2}$, вершиной в точке $y = 0$, $z = 2$ и аналогично направленными ветвями.

Выполненное исследование позволяет теперь достаточно детально изобразить заданную поверхность (рис. 1.27). ▶

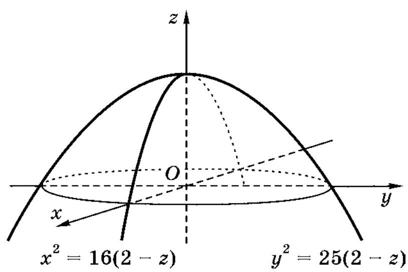


Рис. 1.27

В задачах 1.253–1.267 установить тип заданных поверхностей и построить их.

1.253. $\dfrac{x^2}{9}+\dfrac{y^2}{4}+\dfrac{z^2}{25}=1.$ **1.254.** $x^2 + y^2 - z^2 = -1.$

1.255. $x^2 + y^2 = 2az,\ a \ne 0.$ **1.256.** $2z=x^2+\dfrac{y^2}{2}.$

1.257. $z = 2 + x^2 + y^2.$ **1.258.** $x^2 + y^2 - z^2 = 4.$

1.259. $\dfrac{x^2}{16}+\dfrac{y^2}{4}-\dfrac{z^2}{36}=1.$ **1.260.** $x^2 - y^2 = z^2.$

1.261. $x^2 - y^2 = 2az,\ a \ne 0.$ **1.262.** $x^2 = 2az,\ a \ne 0.$

1.263. $\dfrac{x^2}{5}-\dfrac{y^2}{4}=6z.$ **1.264.** $x^2-\dfrac{y^2}{4}+\dfrac{z^2}{9}+4=0.$

1.265. $x^2 + 2y^2 + 6x - 18y + 8z + 49 = 0$.

1.266. $2x^2 - 3y^2 + 12x + 12y - 12z - 42 = 0$.

1.267. $9x^2 - 36y^2 + 4z^2 - 18x + 144y - 8z - 131 = 0$.

1.268. Даны вершины эллипсоида $A_1 = (8, 0, 0)$, $A_2 = (-2, 0, 0)$. Написать уравнение этого эллипсоида, если известно, что плоскость Oyz пересекает его по эллипсу: $x = 0$, $\frac{y^2}{9} + \frac{z^2}{4} = 1$.

1.269. Написать уравнение кругового конуса, если:

а) ось Oz является его осью, вершина находится в начале координат, точка $M = (3, -4, 7)$ лежит на конусе;

б) ось Oy является его осью, вершина находится в начале координат, а образующие составляют с осью Oy угол $\frac{\pi}{3}$.

В задачах 1.270–1.272, перейдя к параметрическим уравнениям прямой, найти точки пересечения поверхности и прямой.

1.270. $\frac{x^2}{81} + \frac{y^2}{36} + \frac{z^2}{9} = 1$ и $\frac{x-3}{3} = \frac{y-4}{-6} = \frac{z+2}{4}$.

1.271. $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{9} - \frac{z^2}{4} = 1$ и $\frac{x}{4} = \frac{y}{-3} = \frac{z+2}{4}$.

1.272. $\frac{x^2}{5} + \frac{y^2}{3} = z$ и $\frac{x+1}{2} = \frac{y-2}{-1} = \frac{z+3}{-2}$.

ГЛАВА 2

ЭЛЕМЕНТЫ ЛИНЕЙНОЙ АЛГЕБРЫ

§ 2.1. МАТРИЦЫ И ОПРЕДЕЛИТЕЛИ

1. Основные определения

Матрицей A размера $m\times n$ называется прямоугольная таблица чисел a_{ij}, состоящая из m *строк* и n *столбцов*:

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}.$$

Числа a_{ij}, $i = 1, 2, \dots, m$, $j = 1, 2,\dots, n$, называются *элементами* матриц, причем первый индекс указывает номер строки, а второй — номер столбца, на пересечении которых этот элемент стоит. Для обозначения матрицы используют также запись $A = (a_{ij})$ или $A = \|a_{ij}\|$, $i = 1, 2, \dots, m,\ j = 1, 2, \dots, n$.

Если число строк равно числу столбцов, т. е. $m = n$, то матрица называется *квадратной матрицей порядка n*. Диагональ этой матрицы, идущая из левого верхнего угла в правый нижний угол (состоит из элементов $a_{11}, a_{22}, \dots, a_{nn}$), называется *главной диагональю*; диагональ, идущая из левого нижнего угла в правый верхний (состоит из элементов $a_{n1}, a_{n-1,\,2}, \dots, a_{1n}$), называется *побочной*. Квадратная матрица E порядка n называется *единичной матрицей порядка n*, если все элементы ее главной диагонали равны единице, а все элементы вне этой диагонали равны нулю.

Над матрицами могут выполняться арифметические операции сложения и умножения матриц, а также умножения матрицы на число.

Суммой $A + B$ двух матриц $A = (a_{ij})$ и $B = (b_{ij})$ одинакового размера $m\times n$ называется матрица $C = (c_{ij})$, каждый элемент которой равен сумме соответствующих элементов матриц A и B:

$$c_{ij} = a_{ij} + b_{ij},\quad i = 1, 2, \dots, m,\ j = 1, 2, \dots, n. \tag{2.1}$$

Произведением AB матрицы $A = (a_{ij})$ размера $m\times n$ на матрицу $B = (b_{ij})$ размера $n\times k$ называется матрица $C = (c_{ij})$ размера $m\times k$, элемент которой c_{ij}, стоящий на пересечении i-й строки и j-го столбца, равен сумме произведений соответствующих элементов i-й строки матрицы A и j-го столбца матрицы B:

$$c_{ij} = \sum_{p=1}^{n} a_{ip}b_{pj},\quad i = 1, 2, \dots, m,\ j = 1, 2, \dots, k. \tag{2.2}$$

Произведением λA *матрицы* $A = (a_{ij})$ *на число* λ (действительное или комплексное) называется матрица $B = (b_{ij})$, получающаяся из матрицы A умножением каждого ее элемента на λ:

$$b_{ij} = \lambda a_{ij}, \quad i = 1, 2, \ldots, m, \; j = 1, 2, \ldots, n. \tag{2.3}$$

В соответствии с этой операцией общий множитель всех элементов матрицы можно выносить за знак матрицы.

ПРИМЕР 2.1. Вычислить сумму матриц $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ и $B = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 5 & 1 & 2 \end{pmatrix}$.

◄ В соответствии с определением суммы матриц (2.1) запишем

$$C = A + B = \begin{pmatrix} 1+2 & 2+1 & 3+1 \\ 0+5 & 2+1 & 1+2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 3 & 4 \\ 5 & 3 & 3 \end{pmatrix}. \text{►}$$

ПРИМЕР 2.2. Найти произведение λA, если $\lambda = 5$ и $A = \begin{pmatrix} 0 & -3 \\ 0 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$.

◄ В соответствии с определением произведения матрицы на число (2.3) можно записать

$$B = 5A = \begin{pmatrix} 0 & -15 \\ 0 & 10 \\ 5 & 5 \end{pmatrix}. \text{►}$$

В задачах 2.1, 2.2 вычислить сумму матриц A и B.

2.1. $A = \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 2 & -3 \\ -3 & 2 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 5 \\ 2 & -4 \end{pmatrix}$. **2.2.** $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 4 & 2 & 1 \\ 7 & 5 & 3 \\ 9 & 8 & 6 \end{pmatrix}$.

В задачах 2.3, 2.4 вычислить линейные комбинации матриц A и B.

2.3. $3A + 4B$, если $A = \begin{pmatrix} 3 & -3 & 4 \\ 5 & 3 & -2 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} -2 & 3 & -3 \\ 3 & -3 & 4 \end{pmatrix}$.

2.4. $2A - 3B$, если $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & -2 \\ -3 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 3 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$.

ПРИМЕР 2.3. Найти произведение AB матриц

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & -2 & 1 \end{pmatrix} \text{ и } B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 4 & 3 \\ 2 & 1 & -2 & 0 \\ -1 & 3 & 1 & 4 \end{pmatrix}.$$

◄ Прежде всего, убеждаемся в том, что умножение возможно, т. е. число столбцов матрицы A равно числу строк матрицы B. В результате умножения данных матриц размера 2×3 и 3×4 получится матрица C размера 2×4.

Перемножая поочередно элементы первой строки матрицы A на соответствующие элементы столбцов матрицы B в соответствии с формулой (2.2), получим элементы первой строки матрицы C:

$$c_{11} = \sum_{k=1}^{3} a_{1k} \cdot b_{k1} = a_{11} \cdot b_{11} + a_{12} \cdot b_{21} + a_{13} \cdot b_{31} = 1 \cdot 1 + 2 \cdot 2 + 3 \cdot (-1) = 2;$$

$$c_{12} = \sum_{k=1}^{3} a_{1k} \cdot b_{k2} = a_{11} \cdot b_{12} + a_{12} \cdot b_{22} + a_{13} \cdot b_{32} = 1 \cdot 0 + 2 \cdot 1 + 3 \cdot 3 = 11;$$

$$c_{13} = \sum_{k=1}^{3} a_{1k} \cdot b_{k1} = a_{11} \cdot b_{13} + a_{12} \cdot b_{23} + a_{13} \cdot b_{33} = 1 \cdot 4 + 2 \cdot (-2) + 3 \cdot 1 = 3;$$

$$c_{14} = \sum_{k=1}^{3} a_{1k} \cdot b_{k4} = a_{11} \cdot b_{14} + a_{12} \cdot b_{24} + a_{13} \cdot b_{34} = 1 \cdot 3 + 2 \cdot 0 + 3 \cdot 4 = 15.$$

Аналогично получаем элементы второй строки матрицы C:

$$c_{21} = \sum_{k=1}^{3} a_{2k} \cdot b_{k1} = a_{21} \cdot b_{11} + a_{22} \cdot b_{21} + a_{23} \cdot b_{31} = 3 \cdot 1 + (-2) \cdot 2 + 1 \cdot (-1) = -2;$$

$$c_{22} = \sum_{k=1}^{3} a_{2k} \cdot b_{k2} = a_{21} \cdot b_{12} + a_{22} \cdot b_{22} + a_{23} \cdot b_{32} = 3 \cdot 0 + (-2) \cdot 1 + 1 \cdot 3 = 1;$$

$$c_{23} = \sum_{k=1}^{3} a_{2k} \cdot b_{k3} = a_{21} \cdot b_{13} + a_{22} \cdot b_{23} + a_{23} \cdot b_{33} = 3 \cdot 4 + (-2) \cdot (-2) + 1 \cdot 1 = 17;$$

$$c_{24} = \sum_{k=1}^{3} a_{2k} \cdot b_{k4} = a_{21} \cdot b_{14} + a_{22} \cdot b_{24} + a_{23} \cdot b_{34} = 3 \cdot 3 + (-2) \cdot 0 + 1 \cdot 4 = 13.$$

Таким образом, $C = AB = \begin{pmatrix} 2 & 11 & 3 & 15 \\ -2 & 1 & 17 & 13 \end{pmatrix}$. ►

В задачах 2.5–2.11 вычислить произведение матриц.

2.5. $\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -2 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$.

2.6. $\begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 4 & -6 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 9 & -6 \\ 6 & -4 \end{pmatrix}$.

2.7. $\begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 7 & 5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -28 & 93 \\ 38 & -126 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 7 & 3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$.

2.8. $\begin{pmatrix} 1 & -3 & 2 \\ 3 & -4 & 1 \\ 2 & -5 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 5 & 6 \\ 1 & 2 & 5 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}$.

2.9. $\begin{pmatrix} 5 & 8 & -4 \\ 6 & 9 & -5 \\ 4 & 7 & -3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 & 2 & 5 \\ 4 & -1 & 3 \\ 9 & 6 & 5 \end{pmatrix}$.

2.10. $\begin{pmatrix} 4 & 0 & -2 & 3 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ -1 \\ 5 \\ 2 \end{pmatrix}$.

2.11. $\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ -1 \\ 5 \\ 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 4 & 0 & -2 & 3 & 1 \end{pmatrix}$.

Матрица A^{T} называется *транспонированной* к матрице A, если выполняется условие $a_{ij}^{\mathrm{T}} = a_{ji}$ для всех i, j, где a_{ij}^{T} и a_{ij} — элементы матриц A^{T} и A соответственно.

В задачах 2.12, 2.13 записать A^{T} для указанной матрицы.

2.12. $A=\begin{pmatrix}1 & 2 & 3 & 4\\ 0 & 1 & 2 & 3\\ 0 & 0 & 1 & 2\end{pmatrix}$. **2.13.** $A=\begin{pmatrix}a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1m}\\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2m}\\ \dots & \dots & \dots & \dots\\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nm}\end{pmatrix}$.

В задачах 2.14, 2.15 найти AA^{T} и $A^{\mathrm{T}}A$.

2.14. $A=\begin{pmatrix}1 & 2 & 1 & 3\\ 4 & -1 & 5 & -1\end{pmatrix}$. **2.15.** $A=\begin{pmatrix}-1 & 1 & -1 & 1 & -1\\ 2 & 0 & 2 & 0 & 2\\ 0 & -2 & 0 & -2 & 0\end{pmatrix}$.

2.16. Доказать следующие соотношения:
а) $(A^{\mathrm{T}})^{\mathrm{T}}=A$; б) $(A+B)^{\mathrm{T}}=A^{\mathrm{T}}+B^{\mathrm{T}}$; в) $(AB)^{\mathrm{T}}=B^{\mathrm{T}}\cdot A^{\mathrm{T}}$.

2. Определители *n*-го порядка

Для квадратной матрицы можно ввести определенную числовую характеристику — определитель (детерминант), для которого примем следующее обозначение:

$$\det A=\begin{vmatrix}a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n}\\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n}\\ \dots & \dots & \dots & \dots\\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn}\end{vmatrix}.$$

При изучении векторной алгебры были подробно разобраны свойства определителей второго и третьего порядка и получена следующая формула для их вычисления (при $n=2, 3$):

$$\det A=\sum_{k=1}^{n} a_{ik}\cdot A_{ik}=\sum_{k=1}^{n} a_{ik}\cdot(-1)^{i+k}M_{ik}, \tag{2.4}$$

которая была названа разложением определителя по элементам i-й строки. Здесь A_{ik} — алгебраическое дополнение элемента a_{ik}, а M_{ik} — минор (определитель) порядка $(n-1)$, полученный из определителя $\det A$ вычеркиванием i-й строки и k-го столбца. Полученная таким образом величина $\det A$ не зависит от i (номера строки, по которой ведется разложение) при любом n. Примем (2.4) в качестве определения $\det A$ в общем случае (для любого n).

Аналогично справедлива *формула разложения определителя по i-му столбцу*:

$$\det A=\sum_{k=1}^{n} a_{ki}A_{ki}=\sum_{k=1}^{n}(-1)^{i+k}a_{ki}M_{ki}. \tag{2.5}$$

Определители n-го порядка обладают теми же свойствами, что и определители 3-го порядка.

ПРИМЕР 2.4. Пользуясь только определением, вычислить определитель

$$\begin{vmatrix}a_{11} & 0 & 0 & \dots & 0\\ a_{21} & a_{22} & 0 & \dots & 0\\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \dots & 0\\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots\\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \dots & a_{nn}\end{vmatrix}.$$

◀ Используя формулу (2.4), запишем

$$\det A = \begin{vmatrix} a_{11} & 0 & 0 & \dots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & 0 & \dots & 0 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = \sum_{k=1}^{n} a_{1k} \cdot A_{1k} = a_{11} \cdot (-1)^{1+1} M_{11} = a_{11} \cdot \begin{vmatrix} a_{22} & 0 & \dots & 0 \\ a_{32} & a_{33} & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n2} & a_{n3} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

Аналогично, используя разложение минора M_{11} по первой его строке, получаем

$$\det A = a_{11} \cdot a_{22} \cdot \begin{vmatrix} a_{33} & 0 & \dots & 0 \\ a_{43} & a_{44} & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n3} & a_{n4} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

Продолжая аналогичным образом, окончательно получаем

$$\det A = a_{11} \cdot a_{22} \cdot \ldots \cdot a_{nn},$$

т. е. данный определитель равен произведению элементов, стоящих на главной диагонали. ▶

В задачах 2.17–2.20, пользуясь только определением, вычислить определители.

2.17. $\begin{vmatrix} 0 & 2 & 0 & 0 \\ 3 & 9 & 0 & 1 \\ 0 & 10 & 2 & 0 \\ 1 & 11 & 0 & 1 \end{vmatrix}.$ **2.18.** $\begin{vmatrix} 0 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & 2 & 0 \\ 1 & 11 & 10 & 12 \end{vmatrix}.$

2.19. $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ 0 & 0 & a_{33} & \dots & a_{3n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}.$ **2.20.** $\begin{vmatrix} 0 & \dots & 0 & 0 & a_{1,n} \\ 0 & \dots & 0 & a_{2,n-1} & a_{2,n} \\ 0 & \dots & a_{3,n-2} & a_{3,n-1} & a_{3,n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n,1} & \dots & a_{n,n-2} & a_{n,n-1} & a_{n,n} \end{vmatrix}.$

2.21. Пользуясь тем, что свойства определителя n-го порядка аналогичны описанным в задаче 1.9, выяснить, как изменится определитель, если:

а) к каждой строке определителя, кроме последней, прибавить последнюю строку;

б) из каждой строки определителя, кроме последней, вычесть все последующие строки;

в) из каждой строки определителя, кроме последней, вычесть последующую строку, из последней вычесть прежнюю первую строку;

д) первый столбец определителя переставить на последнее место, а остальные столбцы передвинуть влево, сохранив их расположение.

3. Основные методы вычисления определителей *n*-го порядка

Метод понижения порядка определителя сводится к вычислению определителя n-го порядка через определители меньшего порядка, основанный на использовании формул (2.4) и (2.5).

ПРИМЕР 2.5. Вычислить следующий определитель методом понижения порядка:

$$D=\begin{vmatrix} 9 & -5 & 8 & 7 \\ 6 & 2 & 4 & -2 \\ 3 & -2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 2 & 6 \end{vmatrix}.$$

◄ Предварительно, используя свойства определителя, упростим его. Вычитая из его первой строки третью, умноженную на три, а из второй — третью, умноженную на два, получим

$$D=\begin{vmatrix} 0 & 1 & -1 & -5 \\ 0 & 6 & -2 & -10 \\ 3 & -2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 2 & 6 \end{vmatrix}.$$

Полученный определитель разложим по первому столбцу:

$$D=(-1)^{3+1}\cdot 3\cdot\begin{vmatrix} 1 & -1 & -5 \\ 6 & -2 & -10 \\ 1 & 2 & 6 \end{vmatrix}.$$

Далее в полученном определителе из второй строки вычтем первую, умноженную на шесть, а из третьей — первую, и разложим полученный определитель по первому столбцу:

$$D=3\cdot\begin{vmatrix} 1 & -1 & -5 \\ 0 & 4 & 20 \\ 0 & 3 & 11 \end{vmatrix}=3\cdot(-1)^{1+1}\cdot 1\cdot\begin{vmatrix} 4 & 20 \\ 3 & 11 \end{vmatrix}=3\cdot(44-60)=-48. \blacktriangleright$$

Метод приведения к треугольному виду заключается в таком преобразовании определителя, когда все его элементы, лежащие по одну сторону от одной из его диагоналей, становятся равными нулю.

ПРИМЕР 2.6. Определитель из примера 2.5 вычислить методом приведения к треугольному виду.

◄ Выполняя действия, описанные в решении примера 2.5, получаем

$$D=\begin{vmatrix} 9 & -5 & 8 & 7 \\ 6 & 2 & 4 & -2 \\ 3 & -2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 2 & 6 \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} 0 & 1 & -1 & -5 \\ 0 & 6 & -2 & -10 \\ 3 & -2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 2 & 6 \end{vmatrix}.$$

В полученном определителе поменяем местами первую и третью строки, а далее — вторую и третью, учитывая, что при перестановке двух строк определитель меняет знак:

$$D=-\begin{vmatrix} 3 & -2 & 3 & 4 \\ 0 & 6 & -2 & -10 \\ 0 & 1 & -1 & -5 \\ 0 & 1 & 2 & 6 \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} 3 & -2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & -1 & -5 \\ 0 & 6 & -2 & -10 \\ 0 & 1 & 2 & 6 \end{vmatrix}.$$

В последнем определителе вычтем из третьей строки вторую, умноженную на шесть, и из четвертой — вторую:

$$D=\begin{vmatrix}3&-2&3&4\\0&1&-1&-5\\0&0&4&20\\0&0&3&11\end{vmatrix}.$$

Теперь вычтем из четвертой строки третью, умноженную на $\frac{3}{4}$. Наконец, вычисляем определитель, матрица которого приведена к треугольному виду:

$$D=\begin{vmatrix}3&-2&3&4\\0&1&-1&-5\\0&0&4&20\\0&0&0&-4\end{vmatrix}=3\cdot1\cdot4\cdot(-4)=-48.\ \blacktriangleright$$

В задачах 2.22–2.24 вычислить определители, предварительно упростив их.

2.22. $\begin{vmatrix}1&1&1&1\\1&-1&1&1\\1&1&-1&1\\1&1&1&-1\end{vmatrix}$. **2.23.** $\begin{vmatrix}-3&9&3&6\\-5&8&2&7\\4&-5&-3&-2\\7&-8&-4&-5\end{vmatrix}$. **2.24.** $\begin{vmatrix}35&59&71&52\\42&70&77&54\\43&68&72&52\\29&49&65&50\end{vmatrix}$.

В задачах 2.25, 2.26 вычислить определители, используя разложение по строке или по столбцу.

2.25. $\begin{vmatrix}0&-a&-b&-d\\0&0&-c&-e\\b&c&0&0\\d&e&0&0\end{vmatrix}$. **2.26.** $\begin{vmatrix}x&a&b&0&c\\0&y&0&0&0\\0&e&z&0&f\\g&h&k&u&l\\0&0&0&0&v\end{vmatrix}$.

В задачах 2.27, 2.28 вычислить определители порядка n приведением к треугольному виду.

2.27. $\begin{vmatrix}1&2&3&\dots&n\\-1&0&3&\dots&n\\-1&-2&0&\dots&n\\\dots&\dots&\dots&\dots&\dots\\-1&-2&-3&\dots&0\end{vmatrix}$. **2.28.** $\begin{vmatrix}3&2&2&\dots&2\\2&3&2&\dots&2\\2&2&3&\dots&2\\\dots&\dots&\dots&\dots&\dots\\2&2&2&\dots&3\end{vmatrix}$.

В задачах 2.29, 2.30 вычислить определители, элементы которых заданы указанными условиями.

2.29. $a_{ij}=\min(i,j)$. **2.30.** $a_{ij}=\max(i,j)$.

2.31. Доказать, что для любого определителя выполняется соотношение

$$\sum_{k=1}^{n}a_{ik}A_{mk}=\begin{cases}\det A, & i=m,\\ 0, & i\neq m,\end{cases}$$

где A_{mk} — алгебраическое дополнение элемента a_{mk}.

4. Обратная матрица и методы ее вычисления

Квадратная матрица называется *невырожденной* (*неособенной*), если ее определитель не равен нулю, и *вырожденной* (*особенной*) в противном случае.

Обратной матрицей для невырожденной квадратной матрицы A n-го порядка называется такая квадратная матрица A^{-1} n-го порядка, для которой выполняется равенство

$$AA^{-1} = A^{-1}A = E.$$

Укажем основные методы вычисления обратной матрицы.

Метод присоединенной матрицы. Матрица $A^{\vee}$, элементами которой являются алгебраические дополнения A_{ij} соответствующих элементов a_{ij} матрицы A, называется *присоединенной* к матрице A. Справедливо равенство

$$(A^{\vee})^{\mathrm{T}}A = A(A^{\vee})^{\mathrm{T}} = \det A \cdot E.$$

Отсюда, используя свойства определителя n-го порядка, для невырожденной матрицы A получаем способ нахождения матрицы A^{-1} через определитель $\det A$ и ее присоединенную матрицу $A^{\vee}$:

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A}\cdot(A^{\vee})^{\mathrm{T}} = \frac{1}{\det A}\cdot\begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & \dots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \dots & A_{n2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ A_{1n} & A_{2n} & \dots & A_{nn} \end{pmatrix}^{\mathrm{T}}. \qquad (2.6)$$

ПРИМЕР 2.7. Методом присоединенной матрицы найти A^{-1}, если

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -4 & 5 \\ 2 & -3 & 1 \\ 3 & -5 & -1 \end{pmatrix}.$$

◀ Находим $\det A = -1$. Так как определитель не равен нулю, то обратная матрица для матрицы A существует. Вычисляем все алгебраические дополнения A_{ij} элементов a_{ij} матрицы A:

$$A_{11} = (-1)^{1+1}\cdot\begin{vmatrix} -3 & 1 \\ -5 & -1 \end{vmatrix} = 8;\ A_{12} = (-1)^{1+2}\cdot\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 3 & -1 \end{vmatrix} = 5;\ A_{13} = (-1)^{1+3}\cdot\begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 3 & -5 \end{vmatrix} = -1;$$

$$A_{21} = (-1)^{2+1}\cdot\begin{vmatrix} -4 & 5 \\ -5 & -1 \end{vmatrix} = -29;\ A_{22} = (-1)^{2+2}\cdot\begin{vmatrix} 3 & 5 \\ 3 & -1 \end{vmatrix} = -18;\ A_{23} = (-1)^{2+3}\cdot\begin{vmatrix} 3 & -4 \\ 3 & -5 \end{vmatrix} = 3;$$

$$A_{31} = (-1)^{3+1}\cdot\begin{vmatrix} -4 & 5 \\ -3 & 1 \end{vmatrix} = 11;\ A_{32} = (-1)^{3+2}\cdot\begin{vmatrix} 3 & 5 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 7;\ A_{33} = (-1)^{3+3}\cdot\begin{vmatrix} 3 & -4 \\ 2 & -3 \end{vmatrix} = -1.$$

Используя формулу (2.6), отсюда находим матрицу A^{-1}:

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A}\cdot(A^{\vee})^{\mathrm{T}} = (-1)\cdot\begin{pmatrix} 8 & 5 & -1 \\ -29 & -18 & 3 \\ 11 & 7 & -1 \end{pmatrix}^{\mathrm{T}} = \begin{pmatrix} -8 & 29 & -11 \\ -5 & 18 & -7 \\ 1 & -3 & 1 \end{pmatrix}. \ ▶$$

Метод элементарных преобразований. Следующие преобразования матрицы A называются элементарными:

1) перестановка строк (столбцов);

2) умножение строки (столбца) на число, отличное от нуля;

3) прибавление к элементам строки (столбца) соответствующих элементов другой строки (столбца), предварительно умноженных на некоторое число.

Для нахождения обратной матрицы A^{-1} невырожденной матрицы A n-го порядка строят прямоугольную матрицу $\Gamma_A = (A|E)$ размера $n\times 2n$, приписывая к A справа единичную матрицу E. Далее, используя элементарные преобразования только для строк (или только для столбцов одновременно в матрицах слева и справа от черты), приводят матрицу Γ_A к виду $\Gamma_A = (E|B)$, что всегда возможно, если матрица A невырождена. Тогда $A^{-1} = B$.

ПРИМЕР 2.8. Методом элементарных преобразований найти A^{-1} для матрицы

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}.$$

◀ Образуем матрицу $\Gamma_A = \left(\begin{array}{ccc|ccc} 3 & 2 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 3 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$. Обозначив через $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3$ строки матрицы Γ_A, выполним над ними следующие элементарные преобразования:

1. Поменяем местами первую и вторую строки матриц:

$$\begin{array}{l} \gamma_1^{(1)} = \gamma_2, \\ \gamma_2^{(1)} = \gamma_1, \\ \gamma_3^{(1)} = \gamma_3, \end{array} \quad \left(\begin{array}{ccc|ccc} 3 & 2 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 3 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{(1)} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 3 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right).$$

2. Преобразуем вторую и третью строки:

$$\begin{array}{l} \gamma_1^{(2)} = \gamma_1^{(1)}, \\ \gamma_2^{(2)} = \gamma_2^{(1)} - 3\gamma_1^{(1)}, \\ \gamma_3^{(2)} = \gamma_3^{(1)} - \gamma_1^{(1)}, \end{array} \quad \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 3 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{(2)} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & -5 & 1 & -3 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 & -1 & 1 \end{array}\right).$$

3. Приводим левую матрицу в Γ_A к треугольному виду:

$$\begin{array}{l} \gamma_1^{(3)} = \gamma_1^{(2)}, \\ \gamma_2^{(3)} = \gamma_2^{(2)}, \\ \gamma_3^{(3)} = \dfrac{1}{6}(\gamma_3^{(2)} - \gamma_2^{(2)}), \end{array} \quad \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & -5 & 1 & -3 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 & -1 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{(3)} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 2 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & -5 & 1 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1/6 & 1/3 & 1/6 \end{array}\right).$$

4. Преобразуя первую и вторую строки левой матрицы в Γ_A, приводим ее к единичной:

$$\begin{array}{l} \gamma_1^{(4)} = \gamma_1^{(3)} - 2\gamma_3^{(3)}, \\ \gamma_2^{(4)} = \dfrac{1}{2}(\gamma_2^{(3)} + 5\gamma_3^{(3)}), \\ \gamma_3^{(4)} = \gamma_3^{(3)}. \end{array} \quad \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 2 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & -5 & 1 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1/6 & 1/3 & 1/6 \end{array}\right) \xrightarrow{(4)} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1/3 & -2/3 & 2/3 \\ 0 & 1 & 0 & 1/12 & -2/3 & 5/12 \\ 0 & 0 & 1 & -1/6 & 1/3 & 1/6 \end{array}\right).$$

В результате получаем, что правая матрица в Γ_A и есть искомая:

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 1/3 & -2/3 & 2/3 \\ 1/12 & -2/3 & 5/12 \\ -1/6 & 1/3 & 1/6 \end{pmatrix}. ▶$$

В задачах 2.32–2.36 методом присоединенной матрицы найти обратные для данных матриц.

2.32. $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$. **2.33.** $\begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 5 & 7 \end{pmatrix}$. **2.34.** $\begin{pmatrix} 2 & 7 & 3 \\ 3 & 9 & 4 \\ 1 & 5 & 3 \end{pmatrix}$.

2.35. $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & -2 \\ 2 & -2 & 1 \end{pmatrix}$. **2.36.** $\begin{pmatrix} 2 & 5 & 7 \\ 6 & 3 & 4 \\ 5 & -2 & -3 \end{pmatrix}$.

В задачах 2.37–2.41 методом элементарных преобразований найти обратные для данных матриц.

2.37. $\begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 4 & 5 & 2 \\ 2 & 1 & 4 \end{pmatrix}$. **2.38.** $\begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 2 & 6 & 8 \\ 2 & 6 & 12 \end{pmatrix}$. **2.39.** $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & -2 \\ 2 & -2 & 1 \end{pmatrix}$.

2.40. $\begin{pmatrix} 3 & 3 & -4 & -3 \\ 0 & 6 & 1 & 1 \\ 5 & 4 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 3 & 2 \end{pmatrix}$. **2.41.** $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & -2 & -6 \end{pmatrix}$.

5. Матричные уравнения

Матричным уравнением называют уравнение одного из следующих видов:

$$AX = B, \tag{2.7}$$

где A — квадратная матрица n-го порядка, а X и B — матрицы размера $n \times k$;

$$XA = B, \tag{2.8}$$

где A — квадратная матрица n-го порядка, а X и B — матрицы размера $k \times n$;

$$AXB = C, \tag{2.9}$$

где A — квадратная матрица n-го порядка, B — квадратная матрица k-го порядка, X и C — матрицы размера $n \times k$.

Решения уравнений (2.7), (2.8) и (2.9) соответственно записывают в виде $X = A^{-1}B$, $X = BA^{-1}$ и $X = A^{-1}CB^{-1}$.

ПРИМЕР 2.9. Решить матричное уравнение $\begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 3 & 4 & -2 \\ 3 & -2 & 4 \end{pmatrix} \cdot X = \begin{pmatrix} 4 \\ 11 \\ 11 \end{pmatrix}$.

◀ По условию $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 3 & 4 & -2 \\ 3 & -2 & 4 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 4 \\ 11 \\ 11 \end{pmatrix}$.

Находим $\det A = 60$, $A^{-1} = \dfrac{1}{\det A} \cdot (A^{\vee})^{\mathrm{T}} = \dfrac{1}{60} \cdot \begin{pmatrix} 12 & 6 & 6 \\ -18 & 11 & 1 \\ -18 & 1 & 11 \end{pmatrix}$. По формуле $X = A^{-1}B$

получаем

$$X=\frac{1}{60}\cdot\begin{pmatrix}12&6&6\\-18&11&1\\-18&1&11\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}4\\11\\11\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3\\1\\1\end{pmatrix}. \blacktriangleright$$

В задачах 2.42–2.47 решить матричные уравнения.

2.42. $\begin{pmatrix}1&2\\3&4\end{pmatrix}\cdot X=\begin{pmatrix}3&5\\5&9\end{pmatrix}$.

2.43. $X\cdot\begin{pmatrix}3&-2\\5&-4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1&2\\-5&6\end{pmatrix}$.

2.44. $\begin{pmatrix}3&-1\\5&-2\end{pmatrix}\cdot X\cdot\begin{pmatrix}5&6\\7&8\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}14&16\\9&10\end{pmatrix}$.

2.45. $\begin{pmatrix}2&1&0\\1&0&3\\0&5&-1\end{pmatrix}\cdot X=\begin{pmatrix}5\\16\\10\end{pmatrix}$.

2.46. $\begin{pmatrix}1&1&2\\2&-1&2\\4&1&4\end{pmatrix}\cdot X=\begin{pmatrix}-1&2\\-4&8\\-2&4\end{pmatrix}$.

2.47. $\begin{pmatrix}1&2&-3\\3&2&-4\\2&-1&0\end{pmatrix}\cdot X=\begin{pmatrix}1&-3&0\\10&2&7\\10&7&8\end{pmatrix}$.

6. Пространство арифметических векторов

Всякая упорядоченная совокупность из n действительных (комплексных) чисел называется *действительным* (*комплексным*) *арифметическим вектором* и обозначается символом $\mathbf{x}=(x_1, x_2, \ldots, x_n)$. Числа $x_1, x_2, \ldots, x_n$ называются *компонентами* арифметического вектора $\mathbf{x}$.

Над арифметическими векторами вводятся следующие операции.

Сложение: если $\mathbf{x}=(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, $\mathbf{y}=(y_1, y_2, \ldots, y_n)$, то

$$\mathbf{x}+\mathbf{y}=(x_1+y_1, x_2+y_2, \ldots, x_n+y_n). \tag{2.10}$$

Умножение на число: если λ — число (действительное или комплексное) и $\mathbf{x}=(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ — арифметический вектор, то

$$\lambda\mathbf{x}=(\lambda x_1, \lambda x_2, \ldots, \lambda x_n). \tag{2.11}$$

Множество всех действительных арифметических n-компонентных векторов с введенными выше операциями сложения (2.10) и умножения на число (2.11) называется *пространством действительных арифметических векторов*. Всюду в дальнейшем, если не оговаривается противное, рассматривается действительное пространство арифметических векторов, обозначаемое символом $\mathbb{R}^n$.

Система арифметических векторов $\{\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \ldots, \mathbf{x}_k\}$ называется *линейно зависимой*, если найдутся числа $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_k$, не равные одновременно нулю, такие что $\lambda_1\mathbf{x}_1 + \lambda_2\mathbf{x}_2 + \ldots + \lambda_k\mathbf{x}_k = \mathbf{0}$, где $\mathbf{0}=(0, 0, \ldots, 0)$ — нулевой вектор. В противном случае система называется *линейно независимой*.

Пусть Q — произвольное множество арифметических векторов. Система векторов $\mathfrak{B}=\{\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_m\}$ называется *базисом* в Q, если

а) $\mathbf{e}_k\in Q$, $k=1, 2, \ldots, m$;

б) система векторов $\mathfrak{B}=\{\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_m\}$ линейно независима;

в) для любого вектора $\mathbf{x}\in Q$ найдутся такие числа $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_m$, что

$$\mathbf{x}=\sum_{k=1}^{m}\lambda_k\mathbf{e}_k. \tag{2.12}$$

Формула (2.12) называется *разложением вектора* x по базису $\mathfrak{B}$. Коэффициенты $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_m$ однозначно определяются вектором $\mathbf{x}$ и называются *координатами* этого вектора в базисе $\mathfrak{B}$.

Справедливы следующие утверждения:

1. Всякая система векторов $Q \subset \mathbb{R}^n$ имеет по меньшей мере один базис. При этом все базисы состоят из одинакового числа векторов, называемого *рангом* системы Q и обозначаемого $\operatorname{rang} Q$ или $\mathrm{r}(Q)$.

2. Ранг всего пространства $\mathbb{R}^n$ равен n и называется размерностью пространства; при этом в качестве базиса $\mathbb{R}^{\mathbf{n}}$ можно взять следующую систему:

$$\begin{aligned} &\mathbf{e}_1 = (1,0,0,\ldots,0),\\ &\mathbf{e}_2 = (0,1,0,\ldots,0),\\ &\mathbf{e}_3 = (0,0,1,\ldots,0),\\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\\ &\mathbf{e}_n = (0,0,0,\ldots,1). \end{aligned} \tag{2.13}$$

Этот базис называется *каноническим*.

Зафиксируем произвольный базис $\mathfrak{B} = \{\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n\}$ в пространстве $\mathbb{R}^n$. Тогда каждому вектору $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ можно поставить во взаимно однозначное соответствие столбец его координат в этом базисе:

$$\mathbf{x} = x_1\mathbf{e}_1 + x_2\mathbf{e}_2 + \ldots + x_n\mathbf{e}_n \Leftrightarrow X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \ldots \\ x_n \end{pmatrix}.$$

Линейные операции (2.10) и (2.11) над арифметическими векторами в координатной форме записываются следующим образом:

$$\mathbf{z} = \mathbf{x} + \mathbf{y} \;\Leftrightarrow\; Z = X + Y \;\; (z_k = x_k + y_k,\ k = 1, 2, \ldots, n),$$
$$\mathbf{y} = \lambda\mathbf{x} \;\Leftrightarrow\; Y = \lambda X \;\; (y_k = \lambda x_k,\ k = 1, 2, \ldots, n).$$

ПРИМЕР 2.10. Найти линейную комбинацию $3\mathbf{a}_1 + 2\mathbf{a}_2 - 3\mathbf{a}_3$ арифметических векторов $\mathbf{a}_1 = (4, 1, 3)$, $\mathbf{a}_2 = (1, 2, -3)$, $\mathbf{a}_3 = (2, -3, 6)$.

◄ Пусть $\mathbf{x} = 3\mathbf{a}_1 + 2\mathbf{a}_2 - 3\mathbf{a}_3$. Найдем компоненты вектора $\mathbf{x}$, используя правила выполнения линейных операций в координатной форме. Тогда

$$X = 3\begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} + 2\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix} - 3\begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 12 \\ 3 \\ 9 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ -6 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -6 \\ 9 \\ -18 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 12+2-6 \\ 3+4+9 \\ 9-6-18 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 \\ 16 \\ -15 \end{pmatrix}. ►$$

Заданы арифметические векторы $\mathbf{a}_1 = (4, 1, 3, -2)$, $\mathbf{a}_2 = (1, 2, -3, 2)$, $\mathbf{a}_3 = (16, 9, 1, -3)$, $\mathbf{a}_4 = (0, 1, 2, 3)$, $\mathbf{a}_5 = (1, -1, 15, 0)$. В задачах 2.48–2.50 найти линейные комбинации.

2.48. $3\mathbf{a}_1 + 5\mathbf{a}_2 - \mathbf{a}_3 + 2\mathbf{a}_4$. **2.49.** $\mathbf{a}_1 + 2\mathbf{a}_2 - \mathbf{a}_4 - 2\mathbf{a}_5$. **2.50.** $2\mathbf{a}_1 + 4\mathbf{a}_3 - 2\mathbf{a}_5$.

7. Определение и основные методы вычисления ранга матрицы

Пусть в матрице A размера $m\times n$ выбраны произвольно k строк и k столбцов ($k \le \min(m, n)$). Элементы, стоящие на пересечении выбранных строк и столбцов, образуют квадратную матрицу порядка k, определитель которой называется *минором k-го порядка* матрицы A.

Максимальный порядок r отличных от нуля миноров матрицы A называется ее *рангом*, а любой минор порядка r, отличный от нуля, — *базисным минором*.

ТЕОРЕМА О БАЗИСНОМ МИНОРЕ. *Ранг матрицы равен рангу системы ее строк (столбцов); при этом система строк (столбцов) матрицы, содержащая базисный минор, образует базис в системе строк (столбцов) этой матрицы.*

Приведем основные методы вычисления ранга матрицы.

Метод окаймляющих миноров. Пусть в матрице A найден минор k-го порядка M, отличный от нуля. Рассмотрим лишь те миноры $(k + 1)$-го порядка, которые содержат в себе (окаймляют) минор M: если все они равны нулю, то ранг матрицы равен k. В противном случае среди окаймляющих миноров найдется ненулевой минор $(k + 1)$-го порядка, и вся процедура повторяется.

ПРИМЕР 2.11. Методом окаймляющих миноров найти ранг матрицы

$$A=\begin{pmatrix}1 & 2 & 5 & 6 & 1\\ -2 & -4 & 6 & 5 & 2\\ 4 & -2 & 3 & -2 & 3\\ -8 & 4 & -6 & 4 & -6\end{pmatrix}.$$

◄ Находим в матрице A минор M_2 второго порядка, отличный от нуля:

$$A=\begin{pmatrix}1 & \mathbf{2} & \mathbf{5} & 6 & 1\\ -2 & \mathbf{-4} & \mathbf{6} & 5 & 2\\ 1 & -2 & 3 & -2 & 3\\ -8 & 4 & -6 & 4 & -6\end{pmatrix},\quad M_2=\begin{vmatrix}2 & 5\\ -4 & 6\end{vmatrix}=32\neq 0.$$

Минор M_3 третьего порядка, окаймляющий M_2, также отличен от нуля:

$$M_3=\begin{vmatrix}1 & 2 & 5\\ -2 & -4 & 6\\ 1 & -2 & 3\end{vmatrix}=1\cdot(-12+12)-2\cdot(-6-6)+5\cdot(4+4)=64\neq 0.$$

Оба минора 4-го порядка, окаймляющие M_3, равны нулю (проверить самостоятельно!):

$$\begin{vmatrix}1 & 2 & 5 & 6\\ -2 & -4 & 6 & 5\\ 1 & -2 & 3 & -2\\ -8 & 4 & -6 & 4\end{vmatrix}=0 \quad\text{и}\quad \begin{vmatrix}1 & 2 & 5 & 1\\ -2 & -4 & 6 & 2\\ 1 & -2 & 3 & 3\\ -8 & 4 & -6 & -6\end{vmatrix}=0.$$

Следовательно, ранг матрицы A равен трем. ►

Метод элементарных преобразований основан на том факте, что элементарные преобразования строк и столбцов матрицы не меняют ее ранга. Используя эти преобразования, матрицу можно привести к такому виду, когда все ее элементы, кроме элементов a_{11}, a_{22}, ..., a_{rr} $(r \le \min(m, n))$, равны нулю. Следовательно, ранг матрицы равен r.

ПРИМЕР 2.12. Методом элементарных преобразований найти ранг матрицы

$$A=\begin{pmatrix}0 & 1 & 0 & 3\\ 2 & -1 & -2 & -3\\ -6 & 4 & 6 & -2\\ 4 & 3 & 1 & 3\\ 0 & -2 & 5 & 4\end{pmatrix}.$$

◄ Обозначив через $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3, \gamma_4, \gamma_5$ строки матрицы A и выполняя последовательно элементарные преобразования со строками (и, возможно, переставляя столбцы!), приведем ее к такому виду, когда все ее элементы, кроме элементов $a_{11}, a_{22}, \ldots, a_{rr}$ $(r \le \min(m, n))$, будут равны нулю.

1. Приведем матрицу к такому виду, чтобы в первом столбце обнулились все элементы, кроме $a_{11}^{(1)}$:

$$\begin{array}{l} \gamma_1^{(1)} = \gamma_2, \\ \gamma_2^{(1)} = \gamma_1, \\ \gamma_3^{(1)} = \gamma_3 + 3\gamma_2, \\ \gamma_4^{(1)} = \gamma_4 - 2\gamma_2, \\ \gamma_5^{(1)} = \gamma_5, \end{array} \quad \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 3 \\ 2 & -1 & -2 & -3 \\ -6 & 4 & 6 & -2 \\ 4 & 3 & 1 & 3 \\ 0 & -2 & 5 & 4 \end{pmatrix} \xrightarrow{(1)} \begin{pmatrix} 2 & -1 & -2 & -3 \\ 0 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & -11 \\ 0 & 5 & 5 & 9 \\ 0 & -2 & 5 & 4 \end{pmatrix}.$$

2. Далее добиваемся того, чтобы во втором столбце все элементы, расположенные ниже $a_{22}^{(2)}$, были равны нулю:

$$\begin{array}{l} \gamma_3^{(2)} = \gamma_3^{(1)} - \gamma_2^{(1)}, \\ \gamma_4^{(2)} = \gamma_4^{(1)} - 5\gamma_2^{(1)}, \\ \gamma_5^{(2)} = \gamma_5^{(1)} + 2\gamma_2^{(1)}, \end{array} \quad \begin{pmatrix} 2 & -1 & -2 & -3 \\ 0 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & -11 \\ 0 & 5 & 5 & 9 \\ 0 & -2 & 5 & 4 \end{pmatrix} \xrightarrow{(2)} \begin{pmatrix} 2 & -1 & -2 & -3 \\ 0 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & -14 \\ 0 & 0 & 5 & -6 \\ 0 & 0 & 5 & 10 \end{pmatrix}.$$

3. Теперь добиваемся того, чтобы в третьем столбце все элементы, расположенные ниже $a_{33}^{(3)}$, были равны нулю:

$$\begin{array}{l} \gamma_3^{(3)} = \gamma_5^{(2)}, \\ \gamma_4^{(3)} = \gamma_4^{(2)} - \gamma_5^{(2)}, \\ \gamma_5^{(3)} = \gamma_3^{(2)}, \end{array} \quad \begin{pmatrix} 2 & -1 & -2 & -3 \\ 0 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & -14 \\ 0 & 0 & 5 & -6 \\ 0 & 0 & 5 & 10 \end{pmatrix} \xrightarrow{(3)} \begin{pmatrix} 2 & -1 & -2 & -3 \\ 0 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 5 & 10 \\ 0 & 0 & 0 & -16 \\ 0 & 0 & 0 & -14 \end{pmatrix}.$$

4. Выполняя элементарные преобразования, получаем $a_{44}^{(4)} = 1$, $a_{54}^{(4)} = 0$:

$$\begin{array}{l} \gamma_4^{(4)} = -\dfrac{1}{16}\gamma_4^{(3)}, \\ \gamma_5^{(4)} = \gamma_5^{(3)} - \dfrac{14}{16}\gamma_4^{(3)}, \end{array} \quad \begin{pmatrix} 2 & -1 & -2 & -3 \\ 0 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 5 & 10 \\ 0 & 0 & 0 & -16 \\ 0 & 0 & 0 & -14 \end{pmatrix} \xrightarrow{(4)} \begin{pmatrix} 2 & -1 & -2 & -3 \\ 0 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 5 & 10 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Далее полученная матрица легко приводится к виду $\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Следовательно, ранг матрицы равен 4. ►

В задачах 2.51–2.53 методом окаймляющих миноров найти ранг матриц.

2.51. $\begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 & -2 & 4 \\ 4 & -2 & 5 & 1 & 7 \\ 2 & -1 & 1 & 8 & 2 \end{pmatrix}$. **2.52.** $\begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 & -1 \\ 2 & -1 & -3 & 4 \\ 5 & 1 & -1 & 7 \\ 7 & 7 & 9 & 1 \end{pmatrix}$. **2.53.** $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 4 & 5 & 6 \\ 4 & 5 & 6 & 7 \end{pmatrix}$.

В задачах 2.54–2.56 методом элементарных преобразований вычислить ранг матриц.

2.54. $\begin{pmatrix} 0 & 2 & -4 \\ -1 & -4 & 5 \\ 3 & 1 & 7 \\ 0 & 5 & -10 \\ 2 & 3 & 0 \end{pmatrix}$. **2.55.** $\begin{pmatrix} -1 & 3 & 3 & -4 \\ 4 & -7 & -2 & 1 \\ -3 & 5 & 1 & 0 \\ -2 & 3 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. **2.56.** $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

ПРИМЕР 2.13. Выяснить, является ли система арифметических векторов $\mathbf{a}_1 = (4, 1, 3)$, $\mathbf{a}_2 = (1, 2, -3)$, $\mathbf{a}_3 = (2, -3, 9)$ линейно зависимой или линейно независимой. Найти ее ранг и какой-нибудь базис.

◄ Составим матрицу A, столбцами которой являются компоненты векторов $\mathbf{a}_1$, $\mathbf{a}_2$, $\mathbf{a}_3$:

$$A = (\mathbf{a}_1^{\mathrm{T}}, \mathbf{a}_2^{\mathrm{T}}, \mathbf{a}_3^{\mathrm{T}}) = \begin{pmatrix} 4 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & -3 \\ 3 & -3 & 9 \end{pmatrix}.$$

Нетрудно видеть, что ранг матрицы A равен 2. Следовательно, исходная система арифметических векторов линейно зависима, и ее ранг также равен 2. Выделенный минор $M_2 = \begin{vmatrix} 4 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix}$ матрицы A отличен от нуля (равен 7), а $\det A = \begin{vmatrix} 4 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & -3 \\ 3 & -3 & 9 \end{vmatrix} = 0.$

Отсюда следует, что арифметические векторы $\mathbf{a}_1$, $\mathbf{a}_2$ и $\mathbf{a}_3$ линейно зависимы, и по теореме о базисном миноре векторы $\mathbf{a}_1$, $\mathbf{a}_2$ образуют базис исходной системы векторов. ►

В задачах 2.57–2.61 выяснить, являются ли системы арифметических векторов линейно зависимыми или линейно независимыми.

2.57. $\mathbf{x}_1 = (4, 1, 3)$, $\mathbf{x}_2 = (-8, 2, -6)$.

2.58. $\mathbf{x}_1 = (2, -2, 1, -3)$, $\mathbf{x}_2 = (-4, 4, -2, 6)$.

2.59. $\mathbf{x}_1 = (2, -3, 1)$, $\mathbf{x}_2 = (3, 1, -5)$, $\mathbf{x}_3 = (1, -4, 3)$.

2.60. $\mathbf{x}_1 = (1, 1, 1, 1)$, $\mathbf{x}_2 = (1, -1, -1, 1)$, $\mathbf{x}_3 = (1, -1, 1, -1)$, $\mathbf{x}_4 = (1, 1, -1, -1)$.

2.61. $\mathbf{x}_1 = (4, -5, 2, 6)$, $\mathbf{x}_2 = (2, -2, 1, 3)$, $\mathbf{x}_3 = (6, -3, 3, 9)$, $\mathbf{x}_4 = (4, -1, 5, 6)$.

В задачах 2.62, 2.63 найти ранг заданной системы векторов.

2.62. $\mathbf{a}_1 = (1, -1, 0, 0)$, $\mathbf{a}_2 = (0, 1, -1, 0)$, $\mathbf{a}_3 = (1, 0, -1, 1)$, $\mathbf{a}_4 = (0, 0, 0, 1)$, $\mathbf{a}_5 = (3, -5, 2, -3)$.

2.63. $\mathbf{a}_1 = (1, i, -1, -i, 1)$, $\mathbf{a}_2 = (1, -i, -1, i, 1)$, $\mathbf{a}_3 = (1, -1, 1, -1, 1)$, $\mathbf{a}_4 = (3, -1, -1, -1, 3)$.

В задачах 2.64, 2.65 найти ранг и какой-нибудь базис заданной системы векторов.

2.64. $\mathbf{a}_1 = (5, 2, -3, 1)$, $\mathbf{a}_2 = (4, 1, -2, 3)$, $\mathbf{a}_3 = (1, 1, -1, -2)$, $\mathbf{a}_4 = (3, 4, -1, 2)$.

2.65. $\mathbf{a}_1 = (2, -1, 3, 5)$, $\mathbf{a}_2 = (4, -3, 1, 3)$, $\mathbf{a}_3 = (3, -2, 3, 4)$, $\mathbf{a}_4 = (4, -1, 15, 17)$, $\mathbf{a}_5 = (7, -6, -7, 0)$.

2.66. Доказать, что система арифметических векторов $\mathbf{e}_1 = (1, 1, 1, 1, 1)$, $\mathbf{e}_2 = (0, 1, 1, 1, 1)$, $\mathbf{e}_3 = (0, 0, 1, 1, 1)$, $\mathbf{e}_4 = (0, 0, 0, 1, 1)$, $\mathbf{e}_5 = (0, 0, 0, 0, 1)$ образует базис в $\mathbb{R}^5$.

В задачах 2.67, 2.68 найти координаты заданного вектора $\mathbf{x}$ в базисе $\mathfrak{B} = \{\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_5\}$ из задачи 2.66.

2.67. $\mathbf{x} = (1, 0, 1, 0, 1)$. **2.68.** $\mathbf{x} = (5, 4, 3, 2, 1)$.

§ 2.2. СИСТЕМЫ ЛИНЕЙНЫХ УРАВНЕНИЙ

1. Правило Крамера

Пусть задана система n линейных уравнений с n неизвестными

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \ldots + a_{nn}x_n = b_n, \end{cases} \tag{2.14}$$

или, в матричной форме, $AX = B$, где

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} \end{pmatrix}, \quad X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \ldots \\ x_n \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \ldots \\ b_n \end{pmatrix}.$$

Правило Крамера. Если в системе (2.14) $\det A = \Delta \neq 0$, то система (2.14) имеет, и притом единственное, решение

$$X = A^{-1}B,$$

или, в покомпонентной записи,

$$x_i = \frac{\Delta_i}{\Delta}, \quad i = 1, 2, \ldots, n,$$

где Δ_i — определитель, получаемый из определителя Δ заменой i-го столбца на столбец свободных членов.

ПРИМЕР 2.14. Решить систему уравнений

$$\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 + x_3 = 5, \\ 2x_1 - x_2 + x_3 = 6, \\ x_1 + 5x_2 = -3. \end{cases}$$

◄ Матрица $A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 2 & -1 & 1 \\ 1 & 5 & 0 \end{pmatrix}$ невырожденная, так как $\det A = -2 \neq 0$. Присоединенная матрица:

$$A^{\vee} = \begin{pmatrix} -5 & 1 & 11 \\ 5 & -1 & -13 \\ 3 & -1 & -7 \end{pmatrix}.$$

Следовательно, $A^{-1} = -\frac{1}{2}\begin{pmatrix} -5 & 5 & 3 \\ 1 & -1 & -1 \\ 11 & -13 & -7 \end{pmatrix}$. Тогда

$$X = A^{-1}B = -\frac{1}{2}\begin{pmatrix} -5 & 5 & 3 \\ 1 & -1 & -1 \\ 11 & -13 & -7 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 5 \\ 6 \\ -2 \end{pmatrix} = -\frac{1}{2}\begin{pmatrix} -4 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix},$$

т. е. $x_1 = 2$, $x_2 = -1$, $x_3 = 1$. ▶

В задачах 2.69–2.76 решить системы уравнений по правилу Крамера.

2.69. $\begin{cases} 3x - 5y = 16, \\ 2x + 7y = -10. \end{cases}$

2.70. $\begin{cases} 3x - 4y = 7, \\ 3x + 4y = -1. \end{cases}$

2.71. $\begin{cases} 7x + 2y + 3z = 15, \\ 5x - 3y + 2z = 15, \\ 10x - 11y + 5z = 36. \end{cases}$

2.72. $\begin{cases} x + y + 2z = -1, \\ 2x - y + 2z = -4, \\ 4x + y + 4z = -2. \end{cases}$

2.73. $\begin{cases} 5x_1 + 8x_2 + x_3 = 2, \\ 3x_1 - 2x_2 + 6x_3 = -7, \\ 2x_1 + x_2 - x_3 = -5. \end{cases}$

2.74. $\begin{cases} 2x_1 - 3x_2 + x_3 = -7, \\ x_1 + 4x_2 + 2x_3 = -1, \\ x_1 - 4x_2 = -5. \end{cases}$

2.75. $\begin{cases} 4x_1 + 4x_2 + 5x_3 + 5x_4 = 0, \\ 2x_1 + 3x_3 - x_4 = 10, \\ x_1 + x_2 - 5x_3 = -10, \\ 3x_2 + 2x_3 = 1. \end{cases}$

2.76. $\begin{cases} 2x_1 + x_2 - 5x_3 + x_4 = 8, \\ x_1 - 3x_2 - 6x_4 = 9, \\ 2x_2 - x_3 + 2x_4 = -5, \\ x_1 + 4x_2 - 7x_3 + 6x_4 = 0. \end{cases}$

2. Решение линейных систем общего вида

Пусть задана система m линейных уравнений с n неизвестными

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = b_m, \end{cases} \tag{2.15}$$

или, в матричной форме,

$$AX = B, \tag{2.16}$$

где

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} \end{pmatrix}, \quad X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \ldots \\ x_n \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \ldots \\ b_m \end{pmatrix}.$$

Если $B = O$, то система называется *однородной*, в противном случае она называется *неоднородной*.

Решением системы (2.15) называется всякий n-компонентный вектор-столбец X, обращающий матричное уравнение (2.16) в равенство (соответствующий решению X арифметический вектор $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ также будем называть решением (2.15)).

Система называется *совместной*, если у нее существует по крайней мере одно решение, в противном случае она называется *несовместной*.

Две совместные системы называются *эквивалентными*, если множества их решений совпадают.

ТЕОРЕМА (*Кронекера–Капелли*). *Для того чтобы система* (2.15) *была совместной, необходимо и достаточно, чтобы*

$$\operatorname{rang} A = \operatorname{rang} \overline{A}, \tag{2.17}$$

где $\overline{A} = (A \mid B)$ *— расширенная матрица системы.*

Пусть $\operatorname{rang} A = \operatorname{rang} \overline{A} = r$, т. е. система совместна. Не ограничивая общности, будем считать, что базисный минор располагается в первых r $(1 \le r \le \min(m, n))$ строках и столбцах матрицы A. Добиться этого можно, переставляя уравнения и переобозначая неизвестные. Отбросив последние $m - r$ уравнений системы (2.15), запишем укороченную систему:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + \ldots + a_{1r}x_r + a_{1r+1}x_{r+1} + \ldots + a_{1n}x_n = b_1, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{r1}x_1 + \ldots + a_{rr}x_r + a_{r,r+1}x_{r+1} + \ldots + a_{rn}x_n = b_r, \end{cases} \tag{2.18}$$

которая эквивалентна исходной. Назовем неизвестные $x_1, \ldots, x_r$ базисными, $x_{r+1}, \ldots, x_n$ — свободными и перенесем слагаемые, содержащие свободные неизвестные, в правую часть уравнений системы (2.18). Получаем систему линейных уравнений относительно базисных неизвестных:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + \ldots + a_{1r}x_r = b_1 - a_{1r+1}x_{r+1} - \ldots - a_{1n}x_n, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{r1}x_1 + \ldots + a_{rr}x_r = b_r - a_{r,r+1}x_{r+1} - \ldots - a_{rn}x_n, \end{cases}$$

которая для каждого набора свободных неизвестных $x_{r+1} = c_1, \ldots, x_n = c_{n-r}$ имеет единственное решение $x_1(c_1, \ldots, c_{n-r}), \ldots, x_r(c_1, \ldots, c_{n-r})$. Это решение может быть найдено по правилу Крамера. Соответствующее решение укороченной, а следовательно, и исходной систем имеет вид

$$X(c_1, \ldots, c_{n-r}) = \begin{pmatrix} x_1(c_1, \ldots, c_{n-r}) \\ \ldots \\ x_r(c_1, \ldots, c_{n-r}) \\ c_1 \\ \ldots \\ c_{n-r} \end{pmatrix}. \tag{2.19}$$

Формула (2.19), выражающая произвольное решение системы в виде вектор-столбца от $n - r$ свободных неизвестных, называется *общим решением* системы (2.15).

ПРИМЕР 2.15. Установить совместность и найти общее решение системы

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 - x_3 - 3x_4 = 2, \\ 4x_1 + x_3 - 7x_4 = 3, \\ 2x_2 - 3x_3 + x_4 = 1, \\ 2x_1 + 3x_2 - 4x_3 - 2x_4 = 3. \end{cases}$$

◀ Выпишем основную и расширенную матрицы системы:

$$A=\left(\begin{array}{cc|cc} 2 & 1 & -1 & -3 \\ 4 & 0 & 1 & -7 \\ \hline 0 & 2 & -3 & 1 \\ 2 & 3 & -4 & -2 \end{array}\right), \quad \overline{A}=\left(\begin{array}{cc|cc|c} 2 & 1 & -1 & -3 & 2 \\ 4 & 0 & 1 & -7 & 3 \\ \hline 0 & 2 & -3 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & -4 & -2 & 3 \end{array}\right).$$

Так как $\operatorname{rang} A = \operatorname{rang} \overline{A} = 2$ (проверьте!), то исходная система совместна. Выберем в качестве базисного минор $M_2 = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 0 \end{vmatrix}$. Тогда неизвестные x_1, x_2 — базисные, x_3, x_4 — свободные, а укороченная система имеет вид

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 = 2 + x_3 + 3x_4, \\ 4x_1 = 3 - x_3 + 7x_4. \end{cases}$$

Полагая $x_3 = c_1$, $x_4 = c_2$ и решая эту относительно базисных неизвестных, получаем

$$\begin{cases} x_1 = \dfrac{3}{4} - \dfrac{1}{4}c_1 + \dfrac{7}{4}c_2, \\ x_2 = \dfrac{1}{2} + \dfrac{3}{2}c_1 - \dfrac{1}{2}c_2. \end{cases}$$

Следовательно, общее решение исходной системы имеет вид

$$X(c_1, c_2) = \begin{pmatrix} \dfrac{3}{4} - \dfrac{1}{4}c_1 + \dfrac{7}{4}c_2 \\ \dfrac{1}{2} + \dfrac{3}{2}c_1 - \dfrac{1}{2}c_2 \\ c_1 \\ c_2 \end{pmatrix}. \blacktriangleright$$

В задачах 2.77–2.80 исследовать совместность и найти общие решения заданных систем уравнений.

2.77. $\begin{cases} 2x_1 - 3x_2 + 5x_3 + 7x_4 = 1, \\ 4x_1 - 6x_2 + 2x_3 + 3x_4 = 2, \\ 2x_1 - 3x_2 - 11x_3 - 15x_4 = 1. \end{cases}$

2.78. $\begin{cases} 2x_1 + 7x_2 + 3x_3 + x_4 = 6, \\ 3x_1 + 5x_2 + 2x_3 + 2x_4 = 4, \\ 9x_1 + 4x_2 + x_3 + 7x_4 = 2. \end{cases}$

2.79. $\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 - 2x_4 + x_5 = 4, \\ 3x_1 + 6x_2 + 5x_3 - 4x_4 + 3x_5 = 5, \\ x_1 + 2x_2 + 7x_3 - 4x_4 + x_5 = 11, \\ 2x_1 + 4x_2 + 2x_3 - 3x_4 + 3x_5 = 6. \end{cases}$

2.80. $\begin{cases} 6x_1 + 3x_2 + 2x_3 + 3x_4 + 4x_5 = 5, \\ 4x_1 + 2x_2 + x_3 + 2x_4 + 3x_5 = 4, \\ 4x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 2x_4 + x_5 = 0, \\ 2x_1 + x_2 + 7x_3 + 3x_4 + 2x_5 = 1. \end{cases}$

3. Однородные системы

Однородная система $AX = O$ всегда совместна, так как имеет тривиальное решение $X = O$. Для существования нетривиального решения однородной системы необходимо и достаточно, чтобы $r = \operatorname{rang} A < n$ (при $m = n$ это условие означает, что $\det A = 0$).

Пусть $Q \subset \mathbb{R}^n$ — множество всех решений однородной системы. Всякий базис в множестве Q состоит из $n - r$ векторов $\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_{n-r}$. Соответствующая ему в каноническом базисе система вектор-столбцов $E_1, \ldots, E_{n-r}$ называется *фундаментальной системой решений*. Общее решение однородной системы тогда принимает вид

$$X = c_1E_1 + \ldots + c_{n-r}E_{n-r},$$

где $c_1, \ldots, c_{n-r}$ — произвольные постоянные.

Базисные решения $E_1, \ldots, E_{n-r}$ могут быть получены по формуле (2.19), если свободным неизвестным придавать, поочередно значение 1, полагая остальные равными 0.

ПРИМЕР 2.16. Найти фундаментальную систему решений и общее решение однородной системы уравнений

$$\begin{cases} 3x_1 + x_2 - 8x_3 + 2x_4 + x_5 = 0, \\ 2x_1 - 2x_2 - 3x_3 - 7x_4 + 2x_5 = 0, \\ x_1 + 11x_2 - 12x_3 + 34x_4 - 5x_5 = 0, \\ x_1 - 5x_2 + 2x_3 - 16x_4 + 3x_5 = 0. \end{cases}$$

◀ Ранг матрицы коэффициентов $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & -8 & 2 & 1 \\ 2 & -2 & -3 & -7 & 2 \\ 1 & 11 & -12 & 34 & -5 \\ 1 & -5 & 2 & -16 & 3 \end{pmatrix}$ равен $r = 2$. Выберем в качестве базисного минор $M_2 = \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 2 & -2 \end{vmatrix} \neq 0.$ Тогда укороченная система имеет вид

$$\begin{cases} 3x_1 + x_2 = 8x_3 - 2x_4 - x_5, \\ 2x_1 - 2x_2 = 3x_3 + 7x_4 - 2x_5, \end{cases}$$

откуда, полагая $x_3 = c_1$, $x_4 = c_2$, $x_5 = c_3$, находим

$$\begin{cases} x_1 = \frac{19}{8}c_1 + \frac{3}{8}c_2 - \frac{1}{2}c_3, \\ x_2 = \frac{7}{8}c_1 - \frac{25}{8}c_2 + \frac{1}{2}c_3. \end{cases}$$

Общее решение исходной системы имеет вид

$$X(c_1, c_2, c_3) = \begin{pmatrix} \frac{19}{8}c_1 + \frac{3}{8}c_2 - \frac{1}{2}c_3 \\ \frac{7}{8}c_1 - \frac{25}{8}c_2 + \frac{1}{2}c_3 \\ c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix}.$$

Из общего решения находим фундаментальную систему решений:

$$E_1 = X(1,0,0) = \begin{pmatrix} \frac{19}{8} \\ \frac{7}{8} \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad E_2 = X(0,1,0) = \begin{pmatrix} \frac{3}{8} \\ -\frac{25}{8} \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad E_3 = X(0,0,1) = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

С использованием фундаментальной системы решений общее решение однородной системы может быть записано в виде $X(c_1, c_2, c_3) = c_1E_1 + c_2E_2 + c_3E_3$. ▶

В задачах 2.81–2.88 найти фундаментальную систему решений и общее решение однородной системы уравнений.

2.81. $\begin{cases} x_1 + 2x_2 - x_3 = 0, \\ 2x_1 + 9x_2 - 3x_3 = 0. \end{cases}$

2.82. $\begin{cases} x_1 - 2x_2 - 3x_3 = 0, \\ -2x_1 + 4x_2 + 6x_3 = 0. \end{cases}$

2.83. $\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 + x_3 = 0, \\ 2x_1 + 5x_2 + 3x_3 = 0, \\ 3x_1 + 4x_2 + 2x_3 = 0. \end{cases}$

2.84. $\begin{cases} 2x_1 - 3x_2 + x_3 = 0, \\ x_1 + x_2 + x_3 = 0, \\ 3x_1 - 2x_2 + 2x_3 = 0. \end{cases}$

2.85. $\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 4x_3 - 3x_4 = 0, \\ 3x_1 + 5x_2 + 6x_3 - 4x_4 = 0, \\ 4x_1 + 5x_2 - 2x_3 + 3x_4 = 0, \\ 3x_1 + 8x_2 + 24x_3 - 19x_4 = 0. \end{cases}$

2.86. $\begin{cases} 2x_1 - 4x_2 + 5x_3 + 3x_4 = 0, \\ 3x_1 - 6x_2 + 4x_3 + 2x_4 = 0, \\ 4x_1 - 8x_2 + 17x_3 + 11x_4 = 0. \end{cases}$

2.87. $\begin{cases} 6x_1 - 2x_2 + 2x_3 + 5x_4 + 7x_5 = 0, \\ 9x_1 - 3x_2 + 4x_3 + 8x_4 + 9x_5 = 0, \\ 6x_1 - 2x_2 + 6x_3 + 7x_4 + x_5 = 0, \\ 3x_1 - x_2 + 4x_3 + 4x_4 + x_5 = 0. \end{cases}$

2.88. $\begin{cases} x_1 + x_3 + x_5 = 0, \\ x_2 - x_4 + x_6 = 0, \\ x_1 - x_2 + x_5 - x_6 = 0, \\ x_2 + x_3 + x_6 = 0, \\ x_1 - x_4 + x_5 = 0. \end{cases}$

Если задана неоднородная система линейных уравнений общего вида $AX = B$, то ее общее решение может быть найдено как сумма общего решения соответствующей однородной системы $AX = O$ и произвольного частного решения неоднородной системы.

В задачах 2.89–2.92 найти решение данных систем линейных уравнений общего вида как сумму общего решения соответствующей однородной системы и произвольного частного решения неоднородной системы.

2.89. $\begin{cases} 2x_1 + x_2 - x_3 - x_4 + x_5 = 1, \\ x_1 - x_2 + x_3 + x_4 - 2x_5 = 0, \\ 3x_1 + 3x_2 - 3x_3 - 3x_4 + 4x_5 = 2, \\ 4x_1 + 5x_2 - 5x_3 - 5x_4 + 7x_5 = 3. \end{cases}$

2.90. $\begin{cases} 2x_1 - 2x_2 + x_3 - x_4 + x_5 = 1, \\ x_1 + 2x_2 - x_3 + x_4 - 2x_5 = 1, \\ 4x_1 - 10x_2 + 5x_3 - 5x_4 + 7x_5 = 1, \\ 2x_1 - 14x_2 + 7x_3 - 7x_4 + 11x_5 = -1. \end{cases}$

2.91. $\begin{cases} x_1 - x_2 + x_3 - x_4 + x_5 - x_6 = 1, \\ 2x_1 - 2x_2 + 2x_3 + x_4 - x_5 + x_6 = 1. \end{cases}$

2.92. $\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 + 5x_5 = 0, \\ x_1 - 2x_2 - 3x_3 - 4x_4 - 5x_5 = 2, \\ 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 + 5x_5 = -1. \end{cases}$

4. Метод последовательных исключений Жордана–Гаусса

С помощью элементарных преобразований над строками и перестановкой столбцов расширенная матрица системы (2.15) может быть приведена к виду

$$\left(\begin{array}{ccccccc|c} 1 & 0 & \dots & 0 & a'_{1,r+1} & \dots & a'_{1n} & b'_1 \\ 0 & 1 & \dots & 0 & a'_{2,r+1} & \dots & a'_{2n} & b'_2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 1 & a'_{r,r+1} & \dots & a'_{rn} & b'_r \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 & b'_{r+1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 & b'_m \end{array}\right). \tag{2.20}$$

Матрица (2.20) является расширенной матрицей системы

$$\begin{cases} x_1 + \quad \dots \quad + a'_{1,r+1}x_{r+1} + \dots + a'_{1n}x_n = b'_1, \\ \quad x_2 + \dots + a'_{2,r+1}x_{r+1} + \dots + a'_{2n}x_n = b'_2, \\ \qquad \dots\dots\dots\dots\dots \\ \qquad x_r + a'_{r,r+1}x_{r+1} + \dots + a'_{rn}x_n = b'_r, \\ \qquad 0 = b'_{r+1}, \\ \qquad \dots\dots \\ \qquad 0 = b'_m, \end{cases} \tag{2.21}$$

которая с точностью до обозначения неизвестных эквивалентна исходной системе.

Если хотя бы одно из чисел $b'_{r+1}, \dots, b'_m$ отлично от нуля, то система (2.21), а следовательно, и исходная система (2.15) несовместны.

Если же $b'_{r+1} = \dots = b'_m = 0,$ то система совместна и формулы (2.21) дают явное выражение для базисных неизвестных $x_1, \dots, x_r$ через свободные $x_{r+1}, \dots, x_n$.

ПРИМЕР 2.17. Методом Жордана–Гаусса найти общее решение системы

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 + x_4 = -3, \\ 3x_1 - x_2 - 2x_3 = 1, \\ 2x_1 + x_2 - 2x_3 - x_4 = 4, \\ x_1 + 3x_2 - 2x_3 - 2x_4 = 7. \end{cases}$$

◄ Производим элементарные преобразования над строками расширенной матрицы:

$$\bar{A} = \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -2 & 0 & 1 & -3 \\ 3 & -1 & -2 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & -2 & -1 & 4 \\ 1 & 3 & -2 & -2 & 7 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -2 & 0 & 1 & -3 \\ 0 & 5 & -2 & -3 & 10 \\ 0 & 5 & -2 & -3 & 10 \\ 0 & 5 & -2 & -3 & 10 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & -4/5 & -1/5 & 1 \\ 0 & 1 & -2/5 & -3/5 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right).$$

Первые две строки последней матрицы составляют расширенную матрицу системы уравнений

$$\begin{cases} x_1 - \dfrac{4}{5}x_3 - \dfrac{1}{5}x_4 = 1, \\ x_2 - \dfrac{2}{5}x_3 - \dfrac{3}{5}x_4 = 2, \end{cases}$$

эквивалентной исходной. Считая неизвестные x_1, x_2 базисными, а x_3, x_4 свободными, получаем общее решение исходной системы:

$$X(c_1,c_2)=\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\\x_4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1+\frac{4}{5}c_1+\frac{1}{5}c_2\\2+\frac{2}{5}c_1+\frac{3}{5}c_2\\c_1\\c_2\end{pmatrix}. \blacktriangleright$$

В задачах 2.93–2.98 решить системы уравнений.

2.93. $\begin{cases}x_1+2x_2+3x_3+4x_4=0,\\7x_1+14x_2+20x_3+27x_4=0,\\5x_1+10x_2+16x_3+19x_4=-2,\\3x_1+5x_2+6x_3+13x_4=5.\end{cases}$

2.94. $\begin{cases}x_1+x_2=1,\\x_1+x_2+x_3=4,\\x_2+x_3+x_4=-3,\\x_3+x_4+x_5=2,\\x_4+x_3=-1.\end{cases}$

2.95. $\begin{cases}x_1+2x_2+3x_3+x_4=3,\\x_1+4x_2+5x_3+2x_4=2,\\2x_1+9x_2+8x_3+3x_4=7,\\3x_1+7x_2+7x_3+2x_4=12,\\5x_1+7x_2+9x_3+2x_4=20.\end{cases}$

2.96. $\begin{cases}8x_1+6x_2+5x_3+2x_4=21,\\3x_1+3x_2+2x_3+x_4=10,\\4x_1+2x_2+3x_3+x_4=8,\\3x_1+5x_2+x_3+x_4=15,\\7x_1+4x_2+5x_3+2x_4=18.\end{cases}$

2.97. $\begin{cases}x_1-2x_2+3x_3-4x_4+2x_5=-2,\\x_1+2x_2-x_3+0x_4-x_5=-3,\\x_1-x_2+2x_3-3x_4+0x_5=10,\\0x_1+x_2-x_3+x_4-2x_5=-5,\\2x_1+3x_2-x_3+x_4+4x_5=1.\end{cases}$

2.98. $\begin{cases}3x_1+2x_2+2x_3+2x_4=2,\\2x_1+3x_2+2x_3+5x_4=3,\\9x_1+x_2+4x_3-5x_4=1,\\2x_1+2x_2+3x_3+4x_4=5,\\7x_1+x_2+6x_3-x_4=7.\end{cases}$

§ 2.3. ЛИНЕЙНЫЕ ПРОСТРАНСТВА И ОПЕРАТОРЫ

1. Линейное пространство

Множество $\mathcal{L}$ будем называть *линейным* (*векторным*) *пространством*, если выполнены следующие условия:

1. В $\mathcal{L}$ введена операция сложения элементов, которая всякой паре элементов $\mathbf{x}$ и $\mathbf{y}$ из $\mathcal{L}$ ставит в соответствие однозначно определенный элемент $\mathbf{z}=\mathbf{x}+\mathbf{y}$ из $\mathcal{L}$, называемый их *суммой*. Операция сложения элементов удовлетворяет следующим свойствам:

1а) $\mathbf{x}+\mathbf{y}=\mathbf{y}+\mathbf{x}$;

1б) $(\mathbf{x}+\mathbf{y})+\mathbf{z}=\mathbf{x}+(\mathbf{y}+\mathbf{z})$;

1в) $\exists\mathbf{0}\in\mathcal{L}$: $\forall\mathbf{x}\in\mathcal{L}$ $\mathbf{0}+\mathbf{x}=\mathbf{x}$ (элемент $\mathbf{0}$ называется *нулевым*);

1г) $\forall\mathbf{x}\in\mathcal{L}$ $\exists(-\mathbf{x})\in\mathcal{L}$: $\mathbf{x}+(-\mathbf{x})=\mathbf{0}$ (элемент $(-\mathbf{x})$ называется *противоположным* элементу $\mathbf{x}$).

2. В $\mathcal{L}$ введена операция умножения элементов на действительные (комплексные) числа, которая всякому действительному (комплексному) числу λ и всякому

элементу $\mathbf{x}$ из $\mathcal{L}$ ставит в соответствие определенный элемент $\mathbf{y} = \lambda\mathbf{x} \in \mathcal{L}$. Операция умножения элемента на число удовлетворяет следующим свойствам:

2а) $1 \cdot \mathbf{x} = \mathbf{x}$;

2б) $\lambda(\mu\mathbf{x}) = (\lambda\mu)\mathbf{x}$.

3. Операции сложения элементов и умножения их на число удовлетворяют свойствам дистрибутивности:

3а) $\lambda(\mathbf{x} + \mathbf{y}) = \lambda\mathbf{x} + \lambda\mathbf{y}$;

3б) $(\lambda + \mu)\mathbf{x} = \lambda\mathbf{x} + \mu\mathbf{x}$.

Элементы линейного пространства называются *векторами*. Пространство $\mathcal{L}$ называется *действительным*, если в $\mathcal{L}$ операция умножения векторов на число определена только для действительных чисел, и *комплексным*, если эта операция определена для комплексных чисел.

В задачах 2.99–2.103 проверить, что заданные множества являются линейными пространствами.

2.99. Множества $\mathcal{V}_1$, $\mathcal{V}_2$, $\mathcal{V}_3$ геометрических векторов с операциями сложения и умножения вектора на действительное число, определенными обычным образом (см. гл. 1).

2.100. Множество $\mathbb{R}^n$ всех арифметических n-компонентных векторов $\mathbf{a} = (a_1, a_2, \ldots, a_n)$, для которых операция сложения векторов $\mathbf{a} = (a_1, a_2, \ldots, a_n)$ и $\mathbf{b} = (b_1, b_2, \ldots, b_n)$ определена покомпонентно, т. е. $\mathbf{a} + \mathbf{b} = (a_1 + b_1, a_2 + b_2, \ldots, a_n + b_n)$, а произведением вектора $\mathbf{a}$ на число λ называется вектор $\lambda\mathbf{a} = (\lambda a_1, \lambda a_2, \ldots, \lambda a_n)$.

2.101. Множество $C_{[a,\,b]}$ всех функций $f(x)$, непрерывных на отрезке $[a, b]$, с обычным образом введенными операциями сложения функций и умножения их на число.

2.102. Множество $\mathcal{P}_n$ всех многочленов $p(t) = a_{n-1}t^{n-1} + \ldots + a_1 t + a_0$ степени, не превышающей $n - 1$, с обычным образом введенными операциями сложения многочленов и умножения их на число.

2.103. Множество $M_{m,\,n}$ всех матриц размера $m{\times}n$ с операциями сложения матриц и умножения матрицы на число.

2. Конечномерное пространство. Базис в n-мерном пространстве

Система векторов $\{\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \ldots, \mathbf{x}_k\} \subset \mathcal{L}$ называется *линейно зависимой*, если найдутся числа $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_k$, не равные одновременно нулю и такие, что $\lambda_1\mathbf{x}_1 + \lambda_2\mathbf{x}_2 + \ldots + \lambda_k\mathbf{x}_k = \mathbf{0}$; в противном случае эта система называется *линейно независимой*.

Пусть $Q \subset \mathcal{L}$ — произвольное конечное или бесконечное множество векторов линейного пространства. Упорядоченная система векторов $\mathfrak{B} = \{\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_m\}$ из Q называется *базисом* в Q, если:

а) система векторов $\mathfrak{B} = \{\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_m\}$ линейно независима;

б) для любого $\mathbf{x} \in Q$, найдутся такие числа $x_1, x_2, \ldots, x_m$, что

$$\mathbf{x} = \sum_{k=1}^{m} x_k \mathbf{e}_k. \tag{2.22}$$

Формула (2.22) называется *разложением вектора* $\mathbf{x}$ по базису $\mathfrak{B}$. Коэффициенты $x_1, x_2, \ldots, x_m$ однозначно определяются вектором $\mathbf{x}$ и называются координатами этого вектора в базисе $\mathfrak{B}$. При обычной записи координаты вектора пишутся в строчку, заключенную в круглые скобки, например $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_m)$, в матричной записи — столбцом в круглых скобках.

Если множество $Q \subset \mathcal{L}$ имеет несколько базисов, то все они состоят из одинакового числа векторов, называемого *рангом* Q (и обозначаемого $\operatorname{rang} Q$). В частности, если все пространство $\mathcal{L}$ имеет базис, то оно называется конечномерным и обозначается $\mathcal{L}_n$, где $n = \dim\mathcal{L}$ — число векторов в любом базисе, называемое размерностью пространства. В противном случае пространство $\mathcal{L}$ называется *бесконечномерным*.

Пусть $\mathcal{L}_n$ — произвольное n-мерное пространство, $\mathfrak{B} = \{\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n\}$ — фиксированный базис в нем. Тогда каждому вектору $\mathbf{x} \in \mathcal{L}_n$ взаимно однозначно соответствует столбец его координат в этом базисе:

$$\mathbf{x} = x_1\mathbf{e}_1 + x_2\mathbf{e}_2 + \ldots + x_n\mathbf{e}_n \iff X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \ldots \\ x_n \end{pmatrix}.$$

При этом линейные операции над векторами в координатной форме выглядят следующим образом:

$$\mathbf{z} = \mathbf{x} + \mathbf{y} \iff Z = X + Y,$$
$$\mathbf{y} = \lambda\mathbf{x} \iff Y = \lambda X.$$

Пусть $\mathfrak{B} = \{\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n\}$ и $\mathfrak{B}' = \{\mathbf{e}'_1, \ldots, \mathbf{e}'_n\}$ — два различных базиса в $\mathcal{L}_n$. Каждый из векторов базиса $\mathfrak{B}'$ разложим по базису $\mathfrak{B}$:

$$\mathbf{e}'_k = t_{1k}\mathbf{e}_1 + \ldots + t_{nk}\mathbf{e}_n \iff E'_k = \begin{pmatrix} t_{1k} \\ \ldots \\ t_{nk} \end{pmatrix},\ k = 1, 2, \ldots, n.$$

Матрицей перехода $T_{\mathfrak{B}\to\mathfrak{B}'}$ от базиса $\mathfrak{B}$ к базису $\mathfrak{B}'$ называется матрица

$$T_{\mathfrak{B}\to\mathfrak{B}'} = \begin{pmatrix} t_{11} & \ldots & t_{1n} \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ t_{n1} & \ldots & t_{nn} \end{pmatrix},$$

k-й столбец которой есть столбец E'_k координат вектора $\mathbf{e}'_k$ в базисе $\mathfrak{B}$. Таким образом, базисы $\mathfrak{B}'$ и $\mathfrak{B}$ связаны матричным равенством

$$(\mathbf{e}'_1, \ldots, \mathbf{e}'_n) = (\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n) \cdot T_{\mathfrak{B}\to\mathfrak{B}'}.$$

Пусть $\mathbf{x}$ — произвольный вектор из $\mathcal{L}_n$. Его координаты $x_1, x_2, \ldots, x_n$ и $x'_1, x'_2, \ldots, x'_n$ в базисах $\mathfrak{B}$ и $\mathfrak{B}'$ соответственно связаны равенствами $x_i = \sum_{j=1}^{n} t_{ij}x'_j$, или, в матричной форме,

$$X' = (T_{\mathfrak{B}\to\mathfrak{B}'})^{-1}X, \tag{2.23}$$

где X и X' — столбцы его координат в базисах $\mathfrak{B}$ и $\mathfrak{B}'$ соответственно. Формула (2.23) называется *формулой преобразования координат* при преобразовании базиса.

ПРИМЕР 2.18. Найти координаты геометрического вектора $\mathbf{x} = 2\mathbf{i} - \mathbf{j} + \mathbf{k}$ в базисе $\mathfrak{B}'$, состоящем из векторов $\mathbf{e}'_1 = \mathbf{i} + \mathbf{j} + \mathbf{k}$, $\mathbf{e}'_2 = \mathbf{i} - \mathbf{j}$, $\mathbf{e}'_3 = \mathbf{j} - \mathbf{k}$.

◀ В исходном базисе $\mathfrak{B} = \{\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}\}$ векторы $\mathbf{e}'_1, \mathbf{e}'_2, \mathbf{e}'_3$ имеют координаты

$$E'_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix},\ E'_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix},\ E'_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Следовательно, матрица перехода $T_{\mathfrak{B}\to\mathfrak{B}'}$ имеет вид

$$T_{\mathfrak{B}\to\mathfrak{B}'}=\begin{pmatrix}1&1&0\\1&-1&1\\1&0&-1\end{pmatrix}.$$

Обращая матрицу $T_{\mathfrak{B}\to\mathfrak{B}'}$ и используя формулу (2.23), находим

$$X'=(T_{\mathfrak{B}\to\mathfrak{B}'})^{-1}X=\frac{1}{3}\begin{pmatrix}1&1&1\\2&-1&-1\\1&1&-2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2\\-1\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2/3\\4/3\\-1/3\end{pmatrix},$$

т. е. $\mathbf{x}=\frac{2}{3}\mathbf{e}_1'+\frac{4}{3}\mathbf{e}_2'-\frac{1}{3}\mathbf{e}_3'$. ►

2.104. Показать, что если среди векторов $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \ldots, \mathbf{x}_m$ содержится нуль-вектор, то рассматриваемые векторы линейно зависимы.

В задачах 2.105, 2.106 доказать, что система многочленов линейно независима.

2.105. $t^3+t^2+t+1,\ t^2+t+1,\ t+1,\ 1.$

2.106. $2+3t-2t^2,\ 1-2t+3t^2,\ 3+8t-6t^2.$

2.107. Найти ранг и какой-нибудь базис системы геометрических векторов $\mathbf{x}_1=-\mathbf{i}+2\mathbf{j}$, $\mathbf{x}_2=2\mathbf{i}-\mathbf{j}+\mathbf{k}$, $\mathbf{x}_3=-4\mathbf{i}+5\mathbf{j}-\mathbf{k}$, $\mathbf{x}_4=3\mathbf{i}-3\mathbf{j}+\mathbf{k}$.

2.108. Доказать, что система арифметических векторов $\mathbf{x}_1=(1, 2, 0, 4)$, $\mathbf{x}_2=(-1, 0, 5, 1)$, $\mathbf{x}_3=(1, 4, 5, 9)$ линейно зависима, и написать какое-нибудь нетривиальное соотношение вида $\lambda_1\mathbf{x}_1+\lambda_2\mathbf{x}_2+\lambda_3\mathbf{x}_3=\mathbf{0}$. Найти ранг и все базисы этой системы.

2.109. Как изменится матрица перехода от базиса $\mathfrak{B}$ к базису $\mathfrak{B}'$, если:

а) поменять местами два вектора базиса $\mathfrak{B}$?

б) поменять местами два вектора базиса $\mathfrak{B}'$?

в) записать вектора каждого базиса в обратном порядке?

2.110. В линейном пространстве в базисе $\mathfrak{B}=\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$ задан вектор $\mathbf{x}=\mathbf{e}_1+4\mathbf{e}_2-\mathbf{e}_3$. Найти его координаты в базисе $\mathfrak{B}'$, если $T_{\mathfrak{B}\to\mathfrak{B}'}=\begin{pmatrix}5&2&-2\\-1&3&1\\-2&0&1\end{pmatrix}$.

2.111. В пространстве $\mathcal{V}_3$ заданы векторы $\mathbf{e}_1'=\mathbf{i}+\mathbf{j}$, $\mathbf{e}_2'=\mathbf{j}+\mathbf{k}$, $\mathbf{e}_3'=\mathbf{i}+\mathbf{k}$. Доказать, что $\mathfrak{B}'=\{\mathbf{e}_1', \mathbf{e}_2', \mathbf{e}_3'\}$ — базис в $\mathcal{V}_3$, написать матрицу перехода $T_{\mathfrak{B}\to\mathfrak{B}'}$, где $\mathfrak{B}=\{\mathbf{e}_1=\mathbf{i}, \mathbf{e}_2=\mathbf{j}, \mathbf{e}_3=\mathbf{k}\}$. Найти координаты вектора $\mathbf{x}=-\mathbf{i}+2\mathbf{j}+2\mathbf{k}$.

В задачах 2.112–2.114 найти матрицу перехода $T_{\mathfrak{B}\to\mathfrak{B}'}$ и выписать столбец координат вектора $\mathbf{x}=\mathbf{i}-2\mathbf{j}+\mathbf{k}$ в базисе $\mathfrak{B}'$, если $\mathfrak{B}=\{\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}\}$ и $\mathfrak{B}'=\{\mathbf{i}', \mathbf{j}', \mathbf{k}'\}$ — прямоугольные базисы в $\mathcal{V}_3$.

2.112. Базис $\mathfrak{B}'$ получен изменением на противоположное направление всех трех базисных ортов $\mathfrak{B}$.

2.113. Базис $\mathfrak{B}'$ получен перестановкой $\mathbf{i}'=\mathbf{j}$, $\mathbf{j}'=\mathbf{k}$, $\mathbf{k}'=\mathbf{i}$.

2.114. Базис $\mathfrak{B}'$ получен поворотом базиса $\mathfrak{B}$ на угол φ вокруг орта $\mathbf{i}$.

2.115. В пространстве $\mathbb{R}^4$ заданы векторы $\mathbf{e}_1' = (1,1,1,1)$, $\mathbf{e}_2' = (1,1,-1,-1)$, $\mathbf{e}_3' = (1,-1,1,-1)$, $\mathbf{e}_4' = (1,-1,-1,1)$. Доказать, что $\mathfrak{B}' = \{\mathbf{e}_1', \mathbf{e}_2', \mathbf{e}_3', \mathbf{e}_4'\}$ — базис в $\mathbb{R}^4$, написать матрицу перехода $T_{\mathfrak{B}\to\mathfrak{B}'}$, где $\mathfrak{B}$ — канонический базис в $\mathbb{R}^4$ (см. § 3.4). Найти в базисе $\mathfrak{B}'$ координаты вектора $\mathbf{x}$, имеющего в каноническом базисе координаты (1, 2, 1, 1).

2.116. В пространстве $\mathbb{R}^4$ заданы векторы $\mathbf{e}_1' = (1,1,0,1)$, $\mathbf{e}_2' = (2,1,3,1)$, $\mathbf{e}_3' = (1,1,0,0)$, $\mathbf{e}_4' = (0,1,-1,-1)$. Доказать, что $\mathfrak{B}' = \{\mathbf{e}_1', \mathbf{e}_2', \mathbf{e}_3', \mathbf{e}_4'\}$ — базис в $\mathbb{R}^4$, написать матрицу перехода $T_{\mathfrak{B}\to\mathfrak{B}'}$, где $\mathfrak{B}$ — канонический базис в $\mathbb{R}^4$. Найти в базисе $\mathfrak{B}'$ координаты вектора $\mathbf{x}$, имеющего в каноническом базисе координаты (0, 0, 0, 1).

В задачах 2.117–2.121 доказать утверждения.

2.117. Матрица перехода $T_{\mathfrak{B}\to\mathfrak{B}'}$ всегда невырождена, и $T_{\mathfrak{B}'\to\mathfrak{B}} = (T_{\mathfrak{B}\to\mathfrak{B}'})^{-1}$.

2.118. Если

$$T_{\mathfrak{B}\to\mathfrak{B}'} = \begin{pmatrix} t_{11} & \dots & t_{1n} \\ \dots & \dots & \dots \\ t_{n1} & \dots & t_{nn} \end{pmatrix}$$

— невырожденная матрица и $\mathfrak{B} = \{\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n\}$ — некоторый базис в пространстве $\mathcal{L}_n$, то система векторов

$$\mathbf{e}_k' = t_{1k}\mathbf{e}_1 + \dots + t_{nk}\mathbf{e}_n, \quad k = 1, 2, \dots, n,$$

также образует базис в $\mathcal{L}_n$.

2.119. Если $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{B}'$ и $\mathfrak{B}''$ — базисы в $\mathcal{L}_n$, то справедливо матричное равенство

$$T_{\mathfrak{B}\to\mathfrak{B}''} = T_{\mathfrak{B}\to\mathfrak{B}'} \cdot T_{\mathfrak{B}'\to\mathfrak{B}''}.$$

2.120. Система многочленов $1, t, t^2, \dots, t^{n-1}$ образует базис в пространстве $\mathcal{P}_n$ всех многочленов степени $\le n-1$ и, следовательно, $\dim\mathcal{P}_n = n$ (этот базис называется *каноническим*).

2.121. Для произвольного t_0 система многочленов 1, $t - t_0$, $(t - t_0)^2$, ..., $(t - t_0)^{n-1}$ образует базис в $\mathcal{P}_n$.

2.122. Пусть в линейном пространстве заданы базисы $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{B}'$ и $\mathfrak{B}''$. Найти $T_{\mathfrak{B}'\to\mathfrak{B}''}$, если

$$T_{\mathfrak{B}\to\mathfrak{B}'} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \quad \text{и} \quad T_{\mathfrak{B}\to\mathfrak{B}''} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 & 2 \end{pmatrix}.$$

2.123. Найти координаты:

а) многочлена $4t^2 - 2t$ в каноническом базисе пространства $\mathcal{P}_3$;

б) многочлена $t^2 + 2t - 1$ в каноническом базисе пространства $\mathcal{P}_4$.

2.124. Доказать, что система многочленов $t^2 + 1$, $-t^2 + 1$, $t - 1$ образует базис в $\mathcal{P}_3$. Записать в этом базисе координаты многочлена $t^2 - 2t - 2$.

2.125. Найти матрицу перехода от канонического базиса $1, t, t^2, \dots, t^{n-1}$ к базису 1, $t - t_0$, $(t - t_0)^2$, ..., $(t - t_0)^{n-1}$ в $\mathcal{P}_n$.

3. Пространства со скалярным произведением

Действительное линейное пространство $\mathcal{E}$ называется *евклидовым пространством*, если каждой паре векторов $\mathbf{x}$ и $\mathbf{y}$ из $\mathcal{E}$ поставлено в соответствие действительное число, обозначаемое символом $(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ и называемое *скалярным произведением* векторов $\mathbf{x}$ и $\mathbf{y}$, причем выполнены следующие условия:

1) $(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = (\mathbf{y}, \mathbf{x})$; 2) $(\mathbf{x}_1 + \mathbf{x}_2, \mathbf{y}) = (\mathbf{x}_1, \mathbf{y}) + (\mathbf{x}_2, \mathbf{y})$;

3) $(\lambda\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \lambda(\mathbf{x}, \mathbf{y})$, $\lambda \in \mathbb{R}$; 4) $(\mathbf{x}, \mathbf{x}) \geq 0$, причем $(\mathbf{x}, \mathbf{x}) = 0 \Leftrightarrow \mathbf{x} = 0$.

Длиной вектора $\mathbf{x}$ называется число $|\mathbf{x}| = \sqrt{(\mathbf{x}, \mathbf{x})}$. Вектор $\mathbf{x}$, длина которого равна 1, называется *нормированным*.

Для любых векторов $\mathbf{x}$, $\mathbf{y}$ евклидова пространства справедливо *неравенство Коши–Буняковского*

$$|(\mathbf{x}, \mathbf{y})|^2 \leq (\mathbf{x}, \mathbf{x})(\mathbf{y}, \mathbf{y}), \tag{2.24}$$

которое позволяет следующим образом определить угол между ненулевыми векторами:

$$\cos\varphi = \frac{(\mathbf{x}, \mathbf{y})}{|\mathbf{x}|\cdot|\mathbf{y}|}.$$

Ненулевые векторы $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathcal{E}$ называются *ортогональными*, если $(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = 0$.

Базис $\mathfrak{B} = \{\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n\}$ n-мерного евклидова пространства $\mathcal{E}_n$ называется *ортонормированным*, если

$$(\mathbf{e}_i, \mathbf{e}_j) = \delta_{ij} = \begin{cases} 0, & i \neq j, \\ 1, & i = j. \end{cases}$$

Если в пространстве $\mathcal{E}_n$ задан произвольный базис $(\mathbf{f}_1, \mathbf{f}_2, \ldots, \mathbf{f}_n)$, то векторы

$$\mathbf{e}_1 = \mathbf{f}_1, \quad \mathbf{e}_k = \mathbf{f}_k - \sum_{i=1}^{k-1} c_{i,k-1}\mathbf{e}_i, \quad k = 2, 3, \ldots, n, \tag{2.25}$$

где $c_{i,k-1} = \dfrac{(\mathbf{f}_k, \mathbf{e}_i)}{(\mathbf{e}_i, \mathbf{e}_i)}$, образуют ортогональный базис в этом пространстве (*процесс ортогонализации Шмидта*).

Евклидовы пространства в дальнейшем называются *пространствами со скалярным произведением*.

2.126. Доказать, что скалярное произведение любых двух векторов $\mathbf{x} = (x_1, \ldots, x_n)$ и $\mathbf{y} = (y_1, \ldots, y_n)$ евклидова пространства тогда и только тогда выражается равенством

$$(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = x_1y_1 + \ldots + x_ny_n,$$

когда базис, в котором заданы координаты, является ортонормированным.

2.127. Доказать, что в пространстве $\mathcal{P}_n$ многочленов степени $\leq n - 1$ скалярное произведение многочленов $p(t) = a_0 + a_1t + \ldots + a_{n-1}t^{n-1}$ и $q(t) = b_0 + b_1t + \ldots + b_{n-1}t^{n-1}$ можно определить любым из следующих способов:

а) $(p, q) = a_0b_0 + a_1b_1 + \ldots + a_{n-1}b_{n-1}$;

б) $(p, q) = \sum\limits_{k=1}^{n} p(t_k)q(t_k)$, где t_k — произвольные попарно различные действительные числа.

Вычислить скалярное произведение многочленов $p(t) = 1 + t + t^2$ и $q(t) = 1 - 2t^2 + 3t^3$ каждым из указанных способов ($n = 4$), если в случае б) $t_1 = -2$, $t_2 = -1$, $t_3 = 1$, $t_4 = 2$.

2.128. Пользуясь неравенством Коши–Буняковского (2.24), доказать следующие *неравенства треугольника*:

а) $|\mathbf{x} + \mathbf{y}| = |\mathbf{x}| + |\mathbf{y}|$; б) $\|\mathbf{x}| - |\mathbf{y}\| \le |\mathbf{x} + \mathbf{y}|$.

2.129. Доказать, что в пространстве $\mathbb{R}^n$ формула

$$(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = x_1 y_1 + \ldots + x_n y_n,$$

где $\mathbf{x} = (x_1, \ldots, x_n)$, $\mathbf{y} = (y_1, \ldots, y_n)$, задает скалярное произведение (получаемое евклидово пространство арифметических векторов в дальнейшем будем также обозначать $\mathbb{R}^n$).

2.130. Показать, что в евклидовом пространстве $\mathbb{R}^n$ канонический базис (см. (2.13)) является ортонормированным.

2.131. Написать неравенство Коши–Буняковского для евклидова пространства $\mathbb{R}^n$.

2.132. Написать неравенства треугольника в евклидовом пространстве $\mathbb{R}^n$.

В задачах 2.133, 2.134 применить процесс ортогонализации к указанным системам векторов евклидова пространства $\mathbb{R}^4$ (со скалярным произведением из задачи 2.129).

2.133. $\mathbf{f}_1 = (1, 1, 1, 1)$, $\mathbf{f}_2 = (3, 3, -1, -1)$, $\mathbf{f}_3 = (-2, 0, 6, 8)$.

2.134. $\mathbf{f}_1 = (1, 2, 1, 3)$, $\mathbf{f}_2 = (4, 1, 1, 1)$, $\mathbf{f}_3 = (3, 1, 1, 0)$.

В задачах 2.135, 2.136, применяя процесс ортогонализации, построить ортогональный базис подпространства, натянутого на заданную систему векторов в евклидовом пространстве $\mathbb{R}^4$.

2.135. $\mathbf{f}_1 = (1, 2, 2, -1)$, $\mathbf{f}_2 = (1, 1, -5, 3)$, $\mathbf{f}_3 = (3, 2, 8, -7)$.

2.136. $\mathbf{f}_1 = (2, 1, 3, -1)$, $\mathbf{f}_2 = (7, 4, 3, -3)$, $\mathbf{f}_3 = (1, 1, -6, 0)$, $\mathbf{f}_4 = (5, 7, 7, 8)$.

В задачах 2.137–2.139 проверить ортогональность системы векторов в евклидовом пространстве $\mathbb{R}^n$ и дополнить их до ортогональных базисов.

2.137. $\mathbf{e}_1 = \left(\frac{2}{3}, \frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right)$, $\mathbf{e}_2 = \left(\frac{1}{3}, \frac{2}{3}, -\frac{2}{3}\right)$.

2.138. $\mathbf{e}_1 = (1, -2, 1, 3)$, $\mathbf{e}_2 = (2, 1, -3, 1)$.

2.139. $\mathbf{e}_1 = (1, 1, 1, 1, 1)$, $\mathbf{e}_2 = (-1, 1, 0, 0, 0)$, $\mathbf{e}_3 = (0, 0, -1, 1, 0)$.

4. Линейные операторы и действия с ними

Линейным оператором в линейном пространстве $\mathcal{L}$ называется всякое отображение $\mathbf{A}\colon \mathcal{L} \to \mathcal{L}$ пространства $\mathcal{L}$ в себя, обладающее свойствами

$$\mathbf{A}(\lambda\mathbf{x}) = \lambda\mathbf{A}(\mathbf{x})$$
$$\text{и} \quad \mathbf{A}(\mathbf{x} + \mathbf{y}) = \mathbf{A}(\mathbf{x}) + \mathbf{A}(\mathbf{y}).$$

Пусть $\mathbf{A}$ — линейный оператор в конечномерном пространстве $\mathcal{L}_n$ и $\mathfrak{B} = \{\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n\}$ — некоторый заданный базис. Разложим векторы $\mathbf{A}(\mathbf{e}_k)$, $k = 1, 2, \ldots, n$, по базису $\mathfrak{B}$:

$$\mathbf{A}(\mathbf{e}_k) = a_{1k}\mathbf{e}_1 + \ldots + a_{nk}\mathbf{e}_n, \; k = 1, 2, \ldots, n.$$

Тогда матрица

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

называется *матрицей линейного оператора* $\mathbf{A}$ в базисе $\mathfrak{B}$. Матрицу линейного оператора $\mathbf{A}$ будем иногда обозначать также символом $[\mathbf{A}]$ или $[\mathbf{A}]_{\mathfrak{B}}$, если существенно, о каком базисе идет речь.

Заданием матрицы оператор определяется однозначно, а именно: если $\mathbf{y} = \mathbf{A}(\mathbf{x})$, то $Y = AX$, где X, Y — столбцы координат векторов $\mathbf{x}$, $\mathbf{y}$ и A — матрица оператора $\mathbf{A}$ в базисе $\mathfrak{B}$.

ПРИМЕР 2.19. В базисе $\mathfrak{B} = \{\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}\}$ записать матрицу оператора проектирования $\mathbf{P}_\alpha$ на плоскость α: $x + y + z = 0$.

◄ Оператор проектирования $\mathbf{P}_\alpha$ на плоскость α определяется равенством $\mathbf{P}_\alpha(\mathbf{x}) = \mathbf{x}_\alpha$, где $\mathbf{x}_\alpha$ — ортогональная проекция вектора $\mathbf{x}$ на плоскость α. Имеем

$$\mathbf{P}_\alpha(\mathbf{x}) = \mathbf{x} - \mathbf{x}_n = \mathbf{x} - \text{пр}_n\mathbf{x}\cdot\frac{\mathbf{n}}{|\mathbf{n}|} = \mathbf{x} - \frac{(\mathbf{n},\mathbf{x})}{|\mathbf{n}|^2}\cdot\mathbf{n},$$

где $\mathbf{n}$ — нормальный вектор плоскости α. В данном случае $\mathbf{n} = \mathbf{i} + \mathbf{j} + \mathbf{k}$, $|\mathbf{n}|^2 = (\mathbf{n}, \mathbf{n}) = 1 + 1 + 1 = 3$, $(\mathbf{n}, \mathbf{i}) = (\mathbf{n}, \mathbf{j}) = (\mathbf{n}, \mathbf{k}) = 1$, и, следовательно,

$$\mathbf{P}_\alpha(\mathbf{i}) = \mathbf{i} - \frac{(\mathbf{n},\mathbf{i})}{|\mathbf{n}|^2}\cdot\mathbf{n} = \mathbf{i} - \frac{1}{3}\mathbf{n} = \frac{2}{3}\mathbf{i} - \frac{1}{3}\mathbf{j} - \frac{1}{3}\mathbf{k},$$

$$\mathbf{P}_\alpha(\mathbf{j}) = \mathbf{j} - \frac{(\mathbf{n},\mathbf{j})}{|\mathbf{n}|^2}\cdot\mathbf{n} = \mathbf{j} - \frac{1}{3}\mathbf{n} = -\frac{1}{3}\mathbf{i} + \frac{2}{3}\mathbf{j} - \frac{1}{3}\mathbf{k},$$

$$\mathbf{P}_\alpha(\mathbf{k}) = \mathbf{k} - \frac{(\mathbf{n},\mathbf{k})}{|\mathbf{n}|^2}\cdot\mathbf{n} = \mathbf{k} - \frac{1}{3}\mathbf{n} = -\frac{1}{3}\mathbf{i} - \frac{1}{3}\mathbf{j} + \frac{2}{3}\mathbf{k},$$

откуда

$$P_\alpha = \begin{pmatrix} 2/3 & -1/3 & -1/3 \\ -1/3 & 2/3 & -1/3 \\ -1/3 & -1/3 & 2/3 \end{pmatrix}. ►$$

В задачах 2.140–2.146 установить, какие из заданных отображений пространства $\mathcal{V}_3$ в себя являются линейными операторами. Записать их матрицы в прямоугольном базисе $\mathfrak{B} = \{\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}\}$.

2.140. $\mathbf{A}(\mathbf{x}) = \lambda\mathbf{x}$, λ — заданное число. **2.141.** $\mathbf{A}(\mathbf{x}) = \lambda\mathbf{x} + \mathbf{a}$, λ и $\mathbf{a}$ заданы.

2.142. $\mathbf{A}(\mathbf{x}) = (\mathbf{x}, \mathbf{e})\mathbf{e}$, где $\mathbf{e}$ — заданный единичный вектор. Выяснить геометрический смысл этого отображения.

2.143. $\mathbf{A}(\mathbf{x}) = [\mathbf{a}, \mathbf{x}]$, где $\mathbf{a}$ — заданный вектор.

2.144. $\mathbf{A}(\mathbf{x}) = (\mathbf{a}, \mathbf{x})\mathbf{x}$, где $\mathbf{a}$ — заданный вектор.

2.145. $\mathbf{A} = \mathbf{U}(\mathbf{e}, \varphi)$ — отображение, состоящее в повороте на угол φ вокруг оси, заданной вектором $\mathbf{e}$.

2.146. Если $\mathbf{x} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}$, то $\mathbf{A}(\mathbf{x}) = (y + z)\mathbf{i} + (2x + z)\mathbf{j} + (3x - y + z)\mathbf{k}$.

В задачах 2.147–2.151 установить, какие из заданных отображений пространства арифметических векторов $\mathbb{R}^n$ в себя являются линейными операторами. Записать их матрицы в каноническом базисе.

2.147. $\mathbf{A}(\mathbf{x}) = (x_2 + x_3, -2x_1 + 2x_3, 4x_1 - x_2 + 5x_3)$.

2.148. $\mathbf{A}(\mathbf{x}) = (x_1 + x_3, x_2 + x_3, x_3 + 1)$.
2.149. $\mathbf{A}(\mathbf{x}) = (0, x_2 - x_3, 0)$.
2.150. $\mathbf{A}(\mathbf{x}) = (-x_1 + x_3 + 1, 2x_2 + x_3 + 1, -x_2 + x_3 + 1)$.
2.151. $\mathbf{A}(\mathbf{x}) = (x_1 - x_2, x_1 - x_2 - x_3, -x_1 + x_2 + 2x_3)$.

Над линейными операторами, действующими в линейном пространстве $\mathcal{L}$, вводятся следующие операции:
а) *сложение операторов*: $(\mathbf{A} + \mathbf{B})(\mathbf{x}) = \mathbf{A}(\mathbf{x}) + \mathbf{B}(\mathbf{x})$; при этом $[\mathbf{A} + \mathbf{B}] = [\mathbf{A}] + [\mathbf{B}]$;
б) *умножение оператора на число*: $(\lambda\mathbf{A})(\mathbf{x}) = \lambda(\mathbf{A}(\mathbf{x}))$; при этом $[\lambda\mathbf{A}] = \lambda[\mathbf{A}]$;
в) *умножение операторов*: $(\mathbf{AB})(\mathbf{x}) = \mathbf{A}(\mathbf{B}(\mathbf{x}))$; при этом $[\mathbf{AB}] = [\mathbf{A}] \cdot [\mathbf{B}]$.
Обратным к оператору $\mathbf{A}$ называется оператор $\mathbf{A}^{-1}$ такой, что $\mathbf{AA}^{-1} = \mathbf{A}^{-1}\mathbf{A} = \mathbf{E}$, где $\mathbf{E}$ — *единичный* оператор, реализующий тождественное отображение. Оператор $\mathbf{A}$ имеет обратный (и в этом случае называется *невырожденным*) в том и только том случае, когда его матрица A невырождена (в любом базисе). В этом случае $[\mathbf{A}^{-1}] = A^{-1}$.

В задачах 2.152–2.154 установить, какие из линейных операторов в $\mathbb{R}^3$ являются невырожденными, и найти явный вид обратных операторов.
2.152. $\mathbf{A}(\mathbf{x}) = (x_1 - x_2 + x_3, x_3, x_2)$. **2.153.** $\mathbf{A}(\mathbf{x}) = (x_2 + x_3, -x_2, 2x_2 - x_3)$.
2.154. $\mathbf{A}(\mathbf{x}) = (x_1 + 2x_2 + 2x_3, 2x_1 + x_2 - 2x_3, 2x_1 - 2x_2 + x_3)$.

ПРИМЕР 2.20. В пространстве $\mathbb{R}^3$ заданы два линейных оператора $\mathbf{A}$ и $\mathbf{B}$. Найти матрицу $[\mathbf{C}]$ линейного оператора $\mathbf{C} = \mathbf{AB} - \mathbf{BA}$ и его явный вид в каноническом базисе $\mathbb{R}^3$:

$$\mathbf{A}(\mathbf{x}) = (2x_2, -2x_1 + 3x_2 + 2x_3, 4x_1 - x_2 + 5x_3),$$
$$\mathbf{B}(\mathbf{x}) = (-3x_1 + x_3, 2x_2 + x_3, -x_2 + 3x_3).$$

◀ Так как $\mathbf{A}(\mathbf{e}_1) = (0, -2, 4)$, $\mathbf{A}(\mathbf{e}_2) = (2, 3, -1)$, $\mathbf{A}(\mathbf{e}_3) = (0, 2, 5)$ и $\mathbf{B}(\mathbf{e}_1) = (-3, 0, 0)$, $\mathbf{B}(\mathbf{e}_2) = (0, 2, -1)$, $\mathbf{B}(\mathbf{e}_3) = (1, 1, 3)$, то

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 \\ -2 & 3 & 2 \\ 4 & -1 & 5 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} -3 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & 3 \end{pmatrix}.$$

Далее,

$$AB = \begin{pmatrix} 0 & 4 & 2 \\ 6 & 4 & 7 \\ -12 & -7 & 18 \end{pmatrix}, \quad BA = \begin{pmatrix} 4 & -7 & 5 \\ 0 & 5 & 9 \\ 14 & -6 & 13 \end{pmatrix}.$$

Поэтому

$$[\mathbf{C}] = AB - BA = \begin{pmatrix} -4 & 11 & -3 \\ 6 & -1 & -2 \\ -26 & -1 & 5 \end{pmatrix}.$$

По определению матрицы линейного оператора в каноническом базисе $\mathbb{R}^n$ ее столбцы являются наборами компонент образов базисных векторов, т. е.

$$\mathbf{C}(\mathbf{e}_1) = (-4, 6, -26), \quad \mathbf{C}(\mathbf{e}_2) = (11, -1, -1), \quad \mathbf{C}(\mathbf{e}_3) = (-3, -2, 5).$$

Отсюда находим

$$\mathbf{C}(\mathbf{x}) = \mathbf{C}(x_1\mathbf{e}_1 + x_2\mathbf{e}_2 + x_3\mathbf{e}_3) = x_1\mathbf{C}(\mathbf{e}_1) + x_2\mathbf{C}(\mathbf{e}_2) + x_3\mathbf{C}(\mathbf{e}_3) =$$
$$= (-4x_1 + 11x_2 - 3x_3, 6x_1 - x_2 - 2x_3, -26x_1 - x_2 + 5x_3). \blacktriangleright$$

В задачах 2.155–2.157 для заданных в пространстве $\mathbb{R}^3$ линейных операторов **A** и **B** найти матрицу **[C]** линейного оператора $\mathbf{C} = \mathbf{AB} - \mathbf{BA}$ и его явный вид в каноническом базисе $\mathbb{R}^3$.

2.155. $\mathbf{A}(\mathbf{x}) = (7x_1 + 4x_3,\ 4x_2 - 9x_3,\ 3x_1 + x_2)$,
$\mathbf{B}(\mathbf{x}) = (x_2 - 6x_3,\ 3x_1 + 7x_3,\ x_1 + x_2 - x_3)$.

2.156. $\mathbf{A}(\mathbf{x}) = (2x_1 - x_2 + 5x_3,\ x_1 + 4x_2 - x_3,\ 3x_1 - 5x_2 + 2x_3)$,
$\mathbf{B}(\mathbf{x}) = (x_1 + 4x_2 + 3x_3,\ 2x_1 + x_3,\ 3x_2 - x_3)$.

2.157. $\mathbf{A}(\mathbf{x}) = (3x_1 + x_2 - 2x_3,\ 3x_1 - 2x_2 + 4x_3,\ -3x_1 + 5x_2 - x_3)$,
$\mathbf{B}(\mathbf{x}) = (2x_1 + x_2,\ x_1 + x_2 + 2x_3,\ -x_1 + 2x_2 + x_3)$.

В задачах 2.158, 2.159 для заданного матрицей A в базисе $\mathfrak{B} = \{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$ в трехмерном линейном пространстве линейного оператора найти в этом базисе **A(a)**.

2.158. $\mathbf{a} = 2\mathbf{e}_1 - 3\mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_3$ и $A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & -3 \\ 0 & -4 & 1 \end{pmatrix}$.

2.159. $\mathbf{a} = \mathbf{e}_1 - 4\mathbf{e}_2 + 3\mathbf{e}_3$ и $A = \begin{pmatrix} -2 & 2 & -1 \\ 1 & 5 & 2 \\ 0 & -1 & 3 \end{pmatrix}$.

Пусть A и A' — матрицы оператора **A** в базисах $\mathfrak{B}$ и $\mathfrak{B}'$, а $T = T_{\mathfrak{B}\to\mathfrak{B}'}$ — матрица перехода от базиса $\mathfrak{B}$ к базису $\mathfrak{B}'$. Тогда формула преобразования матрицы оператора при преобразовании базиса имеет вид

$$A' = T^{-1}AT. \tag{2.26}$$

2.160. В базисе $\mathfrak{B} = \{\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}\}$ найти матрицу линейного оператора, переводящего векторы $\mathbf{a}_1 = (2, 0, 3)$, $\mathbf{a}_2 = (4, 1, 5)$, $\mathbf{a}_3 = (3, 1, 2)$ соответственно в векторы $\mathbf{b}_1 = (1, 2, -1)$, $\mathbf{b}_2 = (4, 5, -2)$, $\mathbf{b}_3 = (1, -1, 1)$.

2.161. Найти матрицу линейного оператора в базисе $\mathfrak{B}' = \{\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2\}$, где $\mathbf{b}_1 = (1, -2)$, $\mathbf{b}_2 = (3, -1)$, если в базисе $\mathfrak{B} = \{\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2\}$, где $\mathbf{a}_1 = (1, 2)$, $\mathbf{a}_2 = (-1, 1)$, его матрица имеет вид $\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -1 & -3 \end{pmatrix}$.

2.162. В $\mathcal{L}_4$ задан линейный оператор **A**, матрица которого в некотором базисе $\mathfrak{B} = \{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3, \mathbf{e}_4\}$ равна $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 \\ 3 & 0 & -1 & 2 \\ 2 & 5 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$. Найти матрицу этого оператора в базисах:

а) $\mathfrak{B}' = \{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_3, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_4\}$; б) $\mathfrak{B}' = \{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_3, \mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_3 + \mathbf{e}_4\}$.

2.163. В пространстве $\mathcal{L}_2$ линейный оператор **A** в базисе $\mathfrak{B}'$:

$$\mathbf{e}_1' = \mathbf{e}_1 + 2\mathbf{e}_2,\ \mathbf{e}_2' = 2\mathbf{e}_1 + 3\mathbf{e}_2$$

имеет матрицу $\begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}$. Оператор $\mathbf{B}$ в базисе $\mathfrak{B}''$: $\mathbf{e}_1'' = 3\mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2$, $\mathbf{e}_2'' = 4\mathbf{e}_1 + 2\mathbf{e}_2$ имеет матрицу $\begin{pmatrix} 4 & 6 \\ 6 & 9 \end{pmatrix}$. Найти матрицу оператора $\mathbf{A} + \mathbf{B}$ в базисе $\mathfrak{B}''$.

2.164. В пространстве $\mathcal{P}_n$ задан линейный оператор дифференцирования $D = \dfrac{d}{dt}$. Найти матрицу этого оператора в базисе:

а) $1, t, t^2, \ldots, t^{n-1}$; б) $1, (t - t_0), \dfrac{(t-t_0)^2}{2!}, \ldots, \dfrac{(t-t_0)^{n-1}}{(n-1)!}$, $t_0 \in \mathbb{R}$.

5. Собственные числа и собственные векторы линейного оператора

Пусть число λ и вектор $\mathbf{x} \in \mathcal{L}$, $\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$, таковы, что

$$\mathbf{A}(\mathbf{x}) = \lambda\mathbf{x}. \tag{2.27}$$

Тогда число λ называется *собственным числом* линейного оператора $\mathbf{A}$, а вектор $\mathbf{x}$ — *собственным вектором*, соответствующим собственному числу λ.

В конечномерном пространстве $\mathcal{L}_n$ векторное равенство (2.27) эквивалентно матричному равенству

$$(A - \lambda E)X = O, \quad X \neq O. \tag{2.28}$$

Отсюда следует, что число λ есть собственное число оператора $\mathbf{A}$ в том и только том случае, когда $\det(A - \lambda E) = 0$, т. е. число λ есть корень многочлена $p(\lambda) = \det(A - \lambda E)$, называемого *характеристическим многочленом* оператора $\mathbf{A}$. Столбец координат X любого собственного вектора, соответствующего собственному числу λ, есть некоторое нетривиальное решение однородной системы (2.28).

В некоторых случаях собственные числа и собственные векторы линейного оператора можно найти из геометрических соображений.

ПРИМЕР 2.21. Найти собственные числа и собственные векторы оператора $\mathbf{P}_{Oxy}$ проектирования на плоскость Oxy в пространстве $\mathcal{V}_3$.

◀ Равенство $\mathbf{P}_{Oxy}(\mathbf{x}) = \lambda\mathbf{x}$, $\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$, означает, что ортогональная проекция вектора $\mathbf{x}$ на плоскость Oxy коллинеарна самому вектору $\mathbf{x}$. Но это возможно лишь в двух случаях.

1) Вектор $\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$ компланарен плоскости Oxy. Для всех таких векторов $\mathbf{P}_{Oxy}(\mathbf{x}) = \mathbf{x}$, т. е. все они являются собственными векторами оператора $\mathbf{P}_{Oxy}$, соответствующими собственному числу $\lambda_1 = 1$.

2) Вектор $\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$ ортогонален плоскости Oxy. Для всех таких векторов $\mathbf{P}_{Oxy}(\mathbf{x}) = \mathbf{0} = 0 \cdot \mathbf{x}$, т. е. все они являются собственными векторами оператора $\mathbf{P}_{Oxy}$, соответствующими собственному числу $\lambda_2 = 0$.

В результате получаем, что оператор $\mathbf{P}_{Oxy}$ имеет два собственных числа: $\lambda_1 = 1$ и $\lambda_2 = 0$. Соответствующие им собственные векторы:

$$\lambda_1 = 1: \mathbf{x}^{(\lambda_1)} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j},\ \mathbf{x}^{(\lambda_1)} \neq \mathbf{0}, \text{ и } \lambda_2 = 0: \mathbf{x}^{(\lambda_2)} = z\mathbf{k},\ \mathbf{x}^{(\lambda_2)} \neq \mathbf{0}. \blacktriangleright$$

В задачах 2.165–2.168 найти собственные числа и собственные векторы операторов в $\mathcal{V}_3$.

2.165. $\mathbf{A}(\mathbf{x}) = a\mathbf{x}$, a — заданное число.

2.166. $\mathbf{A}(\mathbf{x}) = (\mathbf{x}, \mathbf{i})\mathbf{i}$ — оператор проектирования на ось Ox.

2.167. $\mathbf{A}(\mathbf{x}) = [\mathbf{i}, \mathbf{x}]$.

2.168. $\mathbf{A}(\mathbf{x}) = \mathbf{x} - 2(\mathbf{x}, \mathbf{e})\mathbf{e}$ — оператор зеркального отражения относительно плоскости с нормальным вектором $\mathbf{e}$.

ПРИМЕР 2.22. Найти собственные числа и собственные векторы линейного оператора, заданного в некотором базисе матрицей $A = \begin{pmatrix} 7 & -12 & 6 \\ 10 & -19 & 10 \\ 12 & -24 & 13 \end{pmatrix}$.

◄ Составляем характеристическое уравнение и находим его корни:

$$|A - \lambda E| = \begin{vmatrix} 7-\lambda & -12 & 6 \\ 10 & -19-\lambda & 10 \\ 12 & -24 & 13-\lambda \end{vmatrix} =$$

$$= (7-\lambda)\begin{vmatrix} -19-\lambda & 10 \\ -24 & 13-\lambda \end{vmatrix} - (-12)\begin{vmatrix} 10 & 10 \\ 12 & 13-\lambda \end{vmatrix} + 6\begin{vmatrix} 10 & -19-\lambda \\ 12 & -24 \end{vmatrix} =$$

$$= (7-\lambda)(\lambda^2 + 6\lambda - 7) + 120(1-\lambda) + 72(\lambda - 1) = -(\lambda-1)^2(\lambda+1).$$

Отсюда получаем, что собственными числами оператора являются $\lambda_1 = 1$ и $\lambda_2 = -1$.

Найдем собственные векторы, соответствующие собственному числу $\lambda_1 = 1$. При $\lambda = 1$ система (2.28) принимает вид

$$(A - \lambda E)X = \begin{pmatrix} 6 & -12 & 6 \\ 10 & -20 & 10 \\ 12 & -24 & 12 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Фундаментальная система решений имеет вид $E_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ и $E_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, а общее решение — $\alpha_1 E_1 + \alpha_2 E_2 = \alpha_1 \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \alpha_2 \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, где $\alpha_1^2 + \alpha_2^2 \neq 0$.

Получаем, что собственные векторы, соответствующие собственному числу $\lambda_1 = 1$, имеют вид $\mathbf{x}^{(\lambda_1)} = \alpha_1(2,1,0) + \alpha_2(-1,0,1)$, где $\alpha_1^2 + \alpha_2^2 \neq 0$.

Аналогично, рассматривая случай $\lambda_2 = -1$, получаем $\mathbf{x}^{(\lambda_2)} = \alpha(3,5,6)$, где $\alpha \neq 0$. ►

В задачах 2.169–2.174 найти собственные числа и собственные векторы линейных операторов, заданных в некотором базисе указанными матрицами.

2.169. $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 5 & 4 \end{pmatrix}$. **2.170.** $\begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 5 & -3 & 3 \\ -1 & 0 & -2 \end{pmatrix}$. **2.171.** $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -4 & 4 & 0 \\ -2 & 1 & 2 \end{pmatrix}$.

2.172. $\begin{pmatrix} 4 & -5 & 2 \\ 5 & -7 & 3 \\ 6 & -9 & 4 \end{pmatrix}$. **2.173.** $\begin{pmatrix} 1 & -3 & 4 \\ 4 & -7 & 8 \\ 6 & -7 & 7 \end{pmatrix}$. **2.174.** $\begin{pmatrix} 1 & -3 & 1 \\ 3 & -3 & -1 \\ 3 & -5 & 1 \end{pmatrix}$.

2.175. Доказать, что собственные векторы линейного оператора, соответствующие различным собственным числам, линейно независимы.

6. Линейные операторы в пространстве со скалярным произведением

Пусть **A** — линейный оператор, действующий в линейном пространстве $\mathcal{L}$ со скалярным произведением $(\mathbf{x}, \mathbf{y})$. Линейный оператор $\mathbf{A}^*$ называется *сопряженным к оператору* **A**, если для любых векторов **x**, **y** выполняется равенство

$$(\mathbf{A}(\mathbf{x}), \mathbf{y}) = (\mathbf{x}, \mathbf{A}^*(\mathbf{y})).$$

Для всякого оператора **A** сопряженный оператор $\mathbf{A}^*$ существует и единственен.

Если оператор **A** в ортонормированном базисе имеет матрицу $A = \|a_{ij}\|$, то сопряженный оператор $\mathbf{A}^*$ в том же базисе имеет матрицу $A^* = \|a_{ij}^*\|$, где $a_{ij}^* = \overline{a}_{ji}$ (матрица A^* называется сопряженной к матрице A). В частном случае евклидового пространства $A^* = A^{\mathrm{T}}$.

Пусть $[\mathbf{A}]_{\mathfrak{B}}$ и $[\mathbf{A}]_{\mathfrak{B}'}$ — матрицы оператора **A** в базисах $\mathfrak{B} = \{\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n\}$ и $\mathfrak{B}' = \{\mathbf{e}_1', \ldots, \mathbf{e}_n'\}$ соответственно, а $T = T_{\mathfrak{B}\to\mathfrak{B}'}$ — матрица перехода от базиса $\mathfrak{B}$ к базису $\mathfrak{B}'$. Тогда

$$[\mathbf{A}^*]_{\mathfrak{B}'} = T_{\mathfrak{B}\to\mathfrak{B}'}^{-1} \cdot [\mathbf{A}^*]_{\mathfrak{B}} \cdot T_{\mathfrak{B}\to\mathfrak{B}'}.$$

ПРИМЕР 2.23. Доказать формулу $(\mathbf{A}^*)^* = \mathbf{A}$.

◄ Запишем цепочку равенств, верных для любых векторов **x** и **y**:

$$(\mathbf{A}(\mathbf{x}), \mathbf{y}) = (\mathbf{x}, \mathbf{A}^*(\mathbf{y})) = \overline{(\mathbf{A}^*(\mathbf{y}), \mathbf{x})} = \overline{(\mathbf{y}, (\mathbf{A}^*)^*(\mathbf{x}))} = \overline{\overline{((\mathbf{A}^*)^*(\mathbf{x}), \mathbf{y})}} = ((\mathbf{A}^*)^*(\mathbf{x}), \mathbf{y}).$$

Отсюда $(\mathbf{A}(\mathbf{x}) - (\mathbf{A}^*)^*(\mathbf{x}), \mathbf{y}) = 0$ для любого **y**. Отсюда, в силу произвольности векторов **x** и **y**, получаем $\mathbf{A} = (\mathbf{A}^*)^*$. ►

В задачах 2.176–2.178 доказать справедливость формул.

2.176. $(\mathbf{A} + \mathbf{B})^* = \mathbf{A}^* + \mathbf{B}^*$. **2.177.** $(\mathbf{AB})^* = \mathbf{B}^*\mathbf{A}^*$.

2.178. $(\mathbf{A}^{-1})^* = (\mathbf{A}^*)^{-1}$, если **A** невырожденный.

Линейный оператор **A** в базисе $\mathfrak{B}' = \{\mathbf{e}_1', \ldots, \mathbf{e}_n'\}$ имеет матрицу A. В задачах 2.179, 2.180 найти матрицу сопряженного оператора $\mathbf{A}^*$ в том же базисе $\mathfrak{B}'$, если векторы $\mathbf{e}_1', \ldots, \mathbf{e}_n'$ заданы столбцами своих координат в некотором ортонормированном базисе $\mathfrak{B} = \{\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n\}$.

2.179. $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$, $E_1' = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $E_2' = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

2.180. $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 0 & 5 & -1 \\ 2 & 7 & -3 \end{pmatrix}$, $E_1' = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$, $E_2' = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$, $E_3' = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$.

2.181. Найти матрицу линейного оператора $\mathbf{A}^*$ в ортонормированном базисе $\mathfrak{B} = \{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$, если оператор **A** переводит векторы $\mathbf{a}_1 = (0, 0, 1)$, $\mathbf{a}_2 = (0, 1, 1)$, $\mathbf{a}_3 = (1, 1, 1)$ в векторы $\mathbf{b}_1 = (1, 2, 1)$, $\mathbf{b}_2 = (3, 1, 2)$, $\mathbf{b}_3 = (7, -1, 4)$ соответственно, считая, что координаты всех векторов даны в базисе $\mathfrak{B}$.

2.182. Найти сопряженный оператор для поворота евклидовой плоскости на угол φ вокруг начала координат против часовой стрелки.

Линейный оператор **H** в пространстве со скалярным произведением называется *самосопряженным*, если $\mathbf{H} = \mathbf{H}^*$. Самосопряженный оператор в евклидовом пространстве называется также *симметричным*. Для того чтобы оператор **A** был симметричным, необходимо и достаточно, чтобы в любом ортонормированном базисе его матрица $A = \|a_{ij}\|$ удовлетворяла соотношениям $a_{ij} = a_{ji}$. Такие матрицы называются *симметричными*.

В задачах 2.183, 2.184 доказать свойства самосопряженного оператора.

2.183. Собственные числа действительны.

2.184. Собственные векторы, соответствующие различным собственным числам, ортогональны.

2.185. Показать, что в пространстве $\mathcal{V}_3$ следующие операторы являются симметричными:

а) $\mathbf{A}(\mathbf{x}) = \lambda\mathbf{x}$, λ — фиксированное число;

б) $\mathbf{A}(\mathbf{x}) = (\mathbf{x}, \mathbf{e})\mathbf{e}$, $|\mathbf{e}| = 1$;

в) $\mathbf{A}(\mathbf{x}) = \mathbf{x} - (\mathbf{x}, \mathbf{e})\mathbf{e}$, $|\mathbf{e}| = 1$.

7. Приведение матрицы линейного оператора к диагональному виду

Если оператор $\mathbf{A}$, действующий в пространстве $\mathcal{L}_n$, имеет n линейно независимых векторов $\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n$, соответствующих собственным числам $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$, то в базисе из этих векторов матрица оператора $\mathbf{A}$ имеет диагональный вид

$$\begin{pmatrix} \lambda_1 & & & 0 \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & \lambda_n \end{pmatrix}. \tag{2.29}$$

Матрица A самосопряженного оператора всегда приводится к диагональному виду. При этом ее можно представить в виде

$$A = UDU^{-1},$$

где U — матрица оператора, осуществляющего переход от исходного базиса к базису из собственных векторов оператора $\mathbf{A}$, а D — диагональная матрица вида (2.29).

В задачах 2.186–2.188 найти ортонормированный базис из собственных векторов и матрицу в этом базисе для линейного оператора, заданного в некотором ортонормированном базисе матрицей A (искомый базис определен неоднозначно).

2.186. $A = \begin{pmatrix} 11 & 2 & -8 \\ 2 & 2 & 10 \\ -8 & 10 & 5 \end{pmatrix}$. **2.187.** $A = \begin{pmatrix} 17 & -8 & 4 \\ -8 & 17 & -4 \\ 4 & -4 & 11 \end{pmatrix}$. **2.188.** $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 4 \end{pmatrix}$.

В задачах 2.189–2.191 найти собственные векторы линейного оператора $\mathbf{A}$, заданного в некотором базисе матрицей A. Построить базис из собственных векторов и матрицу данного оператора в этом базисе.

2.189. $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 5 & 4 \end{pmatrix}$. **2.190.** $A = \begin{pmatrix} -1 & 3 & -1 \\ -3 & 5 & -1 \\ -3 & 3 & 1 \end{pmatrix}$. **2.191.** $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$.

§ 2.4.
БИЛИНЕЙНЫЕ И КВАДРАТИЧНЫЕ ФОРМЫ

1. Линейные формы

Говорят, что в действительном линейном пространстве $\mathcal{L}$ задана *линейная форма*, если каждому вектору $\mathbf{x} \in \mathcal{L}$ поставлено в соответствие число $f(\mathbf{x})$, причем выполнены условия

$$f(\mathbf{x} + \mathbf{y}) = f(\mathbf{x}) + f(\mathbf{y}),\ \mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathcal{L},$$
$$f(\lambda\mathbf{x}) = \lambda f(\mathbf{x}),\ \mathbf{x} \in \mathcal{L}, \lambda \in \mathbb{R}.$$

В задачах 2.192–2.195 доказать, что в пространстве $\mathcal{L}$ заданная функция $f(\mathbf{x})$, $\mathbf{x} \in \mathcal{L}$, является линейной формой.

2.192. $f(\mathbf{x}) = \int\limits_a^b x(t)dt$, $\mathcal{L} = C_{[a,\, b]}$, $\mathbf{x} = x(t)$.

2.193. $f(\mathbf{x}) = x(t_0)$, $\mathcal{L} = C_{[a,\, b]}$, $\mathbf{x} = x(t)$, $t_0 \in [a, b]$.

2.194. $f(\mathbf{x}) = (\mathbf{x}, \mathbf{a})$, $\mathcal{L} = \mathcal{V}_3$, $\mathbf{a} \in \mathcal{V}_3$ — фиксированный вектор.

2.195. $f(\mathbf{x}) = \mathbf{abx}$, $\mathcal{L} = \mathcal{V}_3$, $\mathbf{a}, \mathbf{b} \in \mathcal{V}_3$ — фиксированные векторы.

2.196. Пусть в пространстве $\mathcal{L}$ фиксирован базис $\mathfrak{B} = \{\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n\}$. Пусть, далее, $f(\mathbf{e}_i) = a_i$, $i = 1, 2, \ldots, n$, где $f(\mathbf{x})$ — линейная форма в $\mathcal{L}$.

а) Доказать, что $f(\mathbf{x}) = a_1x_1 + \ldots + a_nx_n$, где $x_1, \ldots, x_n$ — координаты вектора $\mathbf{x}$ в базисе $\mathfrak{B}$.

б) Обозначим $\mathcal{L}^*$ множество линейных форм $f(\mathbf{x})$, в котором введены операции сложения и умножения на число следующим образом:

$$g = f_1 + f_2,\quad \forall \mathbf{x} \in \mathcal{L}\ (g(\mathbf{x}) = f_1(\mathbf{x}) + f_2(\mathbf{x}));$$
$$h = \lambda f,\quad \forall \mathbf{x} \in \mathcal{L}\ (h(\mathbf{x}) = \lambda f(\mathbf{x})).$$

Доказать, что $\mathcal{L}^*$ — линейное пространство.

в) Доказать что $\dim\mathcal{L}^* = n$ (пространство $\mathcal{L}^*$ называют *сопряженным* к пространству $\mathcal{L}$).

2.197. Доказать, что:

а) если $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$, $\mathbf{x} = (x_1, \ldots, x_n)$, то формула $f(\mathbf{x}) = x_1$ определяет линейную форму;

б) всякую не равную тождественно нулю линейную форму $f(\mathbf{x})$, $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$, надлежащим выбором базиса можно привести к виду $f(\mathbf{x}) = x_1$, где x_1 — первая координата вектора $\mathbf{x}$ в этом базисе.

2. Билинейные формы

Числовая функция $A(\mathbf{x}, \mathbf{y})$: $\mathcal{L} \times \mathcal{L} \to \mathbb{R}$, заданная на действительном линейном пространстве $\mathcal{L}$, называется *билинейной формой*, если при любом фиксированном $\mathbf{y}$ она является линейной формой по $\mathbf{x}$, а при любом фиксированном $\mathbf{x}$ — линейной формой по $\mathbf{y}$. Билинейная форма называется *симметрической*, если $A(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = A(\mathbf{y}, \mathbf{x})$, $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathcal{L}$. Если в действительном линейном пространстве $\mathcal{L}_n$ задан некоторый базис $\mathfrak{B} = \{\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n\}$, то матрица $A = \|a_{ij}\|$, $a_{ij} = A(\mathbf{e}_i, \mathbf{e}_j)$, называется *матрицей билинейной формы* $A(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ в базисе $\mathfrak{B}$.

В задачах 2.198, 2.199 доказать, что в действительном линейном пространстве $\mathcal{L}$ функции $A(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ являются билинейными формами.

2.198. $A(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = f_1(\mathbf{x}) f_2(\mathbf{y})$, где $f_1(\mathbf{x})$, $f_2(\mathbf{y})$ — линейные формы в $\mathcal{L}$.

2.199. $A(\mathbf{x},\mathbf{y}) = \sum\limits_{i=1}^{n}\sum\limits_{j=1}^{n} a_{ij}x_i y_j$, где $\mathcal{L} = \mathbb{R}^n$, $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$, $A = \|a_{ij}\|$ — некоторая матрица.

2.200. Пусть в действительном линейном пространстве $\mathcal{L}_n$ задан базис $\mathfrak{B} = \{\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n\}$, $A(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ — билинейная форма в $\mathcal{L}_n$ и $A(\mathbf{e}_i, \mathbf{e}_j) = a_{ij}$. Доказать, что:

а) $A(\mathbf{x},\mathbf{y}) = \sum\limits_{i=1}^{n}\sum\limits_{j=1}^{n} a_{ij}x_i y_j$, где x_i, y_j $(i, j = 1, 2, \ldots, n)$ — координаты векторов $\mathbf{x}$ и $\mathbf{y}$ в базисе $\mathfrak{B}$;

б) если $A' = \|a'_{ij}\|$ — матрица билинейной формы $A(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ в базисе $\mathfrak{B}' = \{\mathbf{e}'_1, \ldots, \mathbf{e}'_n\}$, то $A' = T^{\mathrm{T}}AT$, где $T = T_{\mathfrak{B}\to\mathfrak{B}'}$ — матрица перехода от базиса $\mathfrak{B}$ к базису $\mathfrak{B}'$.

Пусть в пространстве $\mathbb{R}^3$ задана билинейная форма $A(\mathbf{x}, \mathbf{y})$. В задачах 2.201, 2.202 найти ее матрицу в базисе $\mathfrak{B} = \{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$.

2.201. $A(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = x_1y_1 + 2x_2y_2 + 3x_3y_3$, $\mathbf{e}_1 = (1, 1, 1)$, $\mathbf{e}_2 = (1, 1, -1)$, $\mathbf{e}_3 = (1, -1, -1)$.

2.202. $A(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = x_1y_2 + x_2y_3 + x_3y_1$, $\mathbf{e}_1 = (1, 0, 0)$, $\mathbf{e}_2 = (1, 1, 0)$, $\mathbf{e}_3 = (1, 1, 1)$.

Пусть в пространстве $\mathbb{R}^n$ задана билинейная форма $A(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ в базисе $\mathfrak{B}$. В задачах 2.203, 2.204 найти ее матрицу в базисе $\mathfrak{B}'$.

2.203. $n = 4$, $A(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = x_1y_2 + x_2y_3 + x_3y_4$, $T_{\mathfrak{B}\to\mathfrak{B}'} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$.

2.204. $n = 2$, $A(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = x_1y_1 + x_1y_2 + x_2y_1 - x_2y_2$, $T_{\mathfrak{B}\to\mathfrak{B}'} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$.

2.205. Доказать, что скалярное произведение $(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ в евклидовом пространстве $\mathcal{E}$ является билинейной формой.

3. Квадратичные формы

Пусть $A(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ — симметрическая билинейная форма. Форма $A(\mathbf{x}, \mathbf{x})$, которая получается из $A(\mathbf{x}, \mathbf{y})$, если положить $\mathbf{x} = \mathbf{y}$, называется *квадратичной*. При этом $A(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ называется билинейной формой, полярной к квадратичной форме $A(\mathbf{x}, \mathbf{x})$.

Если в действительном линейном пространстве $\mathcal{L}_n$ фиксирован некоторый базис $\mathfrak{B} = \{\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n\}$, то квадратичная форма $A(\mathbf{x}, \mathbf{x})$ в этом базисе имеет вид

$$A(\mathbf{x},\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_i x_j, \tag{2.30}$$

где $A = \|a_{ij}\|$ — матрица квадратичной формы и $\mathbf{x} = x_1\mathbf{e}_1 + \ldots + x_n\mathbf{e}_n$.

Пусть в некотором базисе выражение (2.30) квадратичной формы не содержит произведений $x_i x_j$ $(i \neq j)$, т. е.

$$A(\mathbf{x}, \mathbf{x}) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i^2. \tag{2.31}$$

Тогда выражение (2.31) называется каноническим видом квадратичной формы. В частности, если $\lambda_i \in \{-1, 0, 1\}$, $i = 1, 2, \ldots, n$, то получаем *нормальный вид* квадратичной формы $A(\mathbf{x}, \mathbf{x})$.

Для всякой квадратичной формы существует такой базис $\mathfrak{B}'$, в котором она имеет канонический (и даже нормальный) вид.

Линейным преобразованием неизвестных называется такой переход от системы n неизвестных $x_1, x_2, \ldots, x_n$ к системе n неизвестных $x_1', x_2', \ldots, x_n'$, при котором старые неизвестные линейно выражаются через новые:

$$\begin{cases} x_1 = q_{11}x_1' + q_{12}x_2' + \ldots + q_{1n}x_n', \\ x_2 = q_{21}x_1' + q_{22}x_2' + \ldots + q_{2n}x_n', \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ x_n = q_{n1}x_1' + q_{n2}x_2' + \ldots + q_{nn}x_n'. \end{cases} \tag{2.32}$$

Линейное преобразование (2.32) однозначно определяется матрицей $Q = \|q_{ij}\|$, $i, j = 1, 2, \ldots, n$. Систему равенств можно записать в матричном виде

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ \ldots \\ x_n \end{pmatrix} = Q \begin{pmatrix} x_1' \\ \ldots \\ x_n' \end{pmatrix}. \tag{2.33}$$

Если Q — невырожденная матрица, то линейное преобразование неизвестных называется *невырожденным*.

Квадратичная форма от n неизвестных с матрицей A после выполнения линейного преобразования неизвестных с матрицей Q превращается в квадратичную форму от новых неизвестных с матрицей $Q^T A Q$.

Метод Лагранжа выделения полных квадратов. Пусть квадратичная форма $A(\mathbf{x}, \mathbf{x})$ в базисе $\mathfrak{B}$ имеет вид (2.30). Если все коэффициенты a_{ii} (при квадратах x_i^2), $i = 1, 2, \ldots, n$, равны нулю и в то же время форма не равна тождественно нулю, то отлично от нуля хотя бы одно произведение, например $2a_{12}x_1x_2$. Выполним преобразование базиса, при котором координаты вектора в старом и новом базисах связаны формулами

$$x_1 = x_1' + x_2',$$
$$x_2 = x_1' - x_2',$$
$$x_i = x_i', \ i = 3, \ldots, n.$$

Тогда $2a_{12}x_1x_2 = 2a_{12}(x_1' - x_2')(x_1' + x_2') = 2a_{12}x_1'^2 - 2a_{12}x_2'^2$, и так как, по предположению, $a_{11} = a_{22} = 0$, то коэффициент при $x_1'^2$ отличен от нуля.

Таким образом, всегда найдется такой базис $\mathfrak{B}$, в котором в записи (2.30) хотя бы один коэффициент при квадрате отличен от нуля.

В дальнейшем считаем $a_{11} \neq 0$ (если $a_{11} = 0$, то отличен от нуля коэффициент при квадрате какой-нибудь другой координаты, и к рассматриваемому случаю можно прийти, иначе занумеровав векторы $\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n$, что также является некоторым преобразованием базиса).

Рассмотрим часть квадратичной формы, содержащую x_1, т. е.

$$\sigma_1 = a_{11}x_1^2 + 2a_{12}x_1x_2 + \ldots + 2a_{1n}x_1x_n.$$

Дополним эту сумму до полного квадрата:

$$\sigma_1 = \frac{1}{a_{11}}(a_{11}x_1 + \ldots + a_{1n}x_n)^2 - \gamma,$$

где γ есть алгебраическая сумма членов, не зависящих от x_1. Если теперь сделать замену

$$x_1' = a_{11}x_1 + \ldots + a_{1n}x_n,$$
$$x_i = x_i',\ i = 2, \ldots, n,$$

то квадратичная форма в новом базисе примет вид

$$A(\mathbf{x}, \mathbf{x}) = \frac{1}{a_{11}}x_1'^2 + \sum_{i=2}^{n}\sum_{j=2}^{n} a_{ij}' x_i' x_j' = \frac{1}{a_{11}}x_1'^2 + A_1.$$

В полученной форме выделено слагаемое $\frac{1}{a_{11}}x_1'^2$, а оставшаяся часть A_1 является квадратичной формой в $\mathcal{L}_{n-1}$. Далее рассуждения повторяются для квадратичной формы $A_1(\mathbf{x}, \mathbf{x})$ и т. д.

ПРИМЕР 2.24. Методом Лагранжа привести к каноническому виду квадратичную форму

$$A(\mathbf{x}, \mathbf{x}) = 4x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 - 4x_1x_2 + 4x_1x_3 - 3x_2x_3.$$

Найти линейное преобразование, приводящее данную квадратичную форму к каноническому виду.

◄ Так как коэффициент при x_1^2 отличен от нуля, то, выделяя полный квадрат, получим

$$A(\mathbf{x}, \mathbf{x}) = 4(x_1^2 - x_1x_2 + x_1x_3) + x_2^2 + x_3^2 - 3x_2x_3 =$$
$$= 4\left(x_1 - \frac{x_2}{2} + \frac{x_3}{2}\right)^2 - x_2^2 - x_3^2 + 2x_2x_3 + x_2^2 + x_3^2 - 3x_2x_3 = 4\left(x_1 - \frac{x_2}{2} + \frac{x_3}{2}\right)^2 - x_2x_3.$$

Теперь последовательно выполним два линейных преобразования переменных.

1-е преобразование: $x_1' = x_1 - \frac{x_2}{2} + \frac{x_3}{2}$, $x_2' = x_2$, $x_3' = x_3$. Получаем $A = 4x_1'^2 - x_2'x_3'$.

2-е преобразование: $x_1' = x_1''$, $x_2' = x_2'' - x_3''$, $x_3' = x_2'' + x_3''$. Получаем $A = 4x_1''^2 - x_2''^2 + x_3''^2$.

Для 1-го преобразования находим $x_1 = x_1' + \frac{x_2'}{2} - \frac{x_3'}{2}$, $x_2 = x_2'$, $x_3 = x_3'$, т. е.

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1/2 & -1/2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1' \\ x_2' \\ x_3' \end{pmatrix}.$$

Для 2-го преобразования $x_1' = x_1''$, $x_2' = x_2'' - x_3''$, $x_3' = x_2'' + x_3''$ получаем

$$\begin{pmatrix} x_1' \\ x_2' \\ x_3' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1'' \\ x_2'' \\ x_3'' \end{pmatrix}.$$

Последовательное выполнение линейных преобразований дает

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1/2 & -1/2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1' \\ x_2' \\ x_3' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1/2 & -1/2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1'' \\ x_2'' \\ x_3'' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1'' \\ x_2'' \\ x_3'' \end{pmatrix}.$$

Линейное преобразование $x_1 = x_1'' - x_3''$, $x_2 = x_2'' - x_3''$, $x_3 = x_2'' + x_3''$ неизвестных приводит квадратичную форму к каноническому виду $A = 4x_1''^2 - x_2''^2 + x_3''^2$. ►

Метод собственных векторов. Будем рассматривать квадратичную форму (2.30) в евклидовом пространстве $\mathbb{R}^n$. Так как ее матрица $A = \|a_{ij}\|$ симметрична, то она может быть представлена в виде $A = UDU^{\mathrm{T}}$, где D — диагональная матрица, на диагонали которой стоят собственные числа матрицы A, а U — ортогональная матрица. Столбцы матрицы U являются координатами некоторого ортонормированного базиса $\mathfrak{B}' = \{\mathbf{e}_1', \ldots, \mathbf{e}_n'\}$, в котором матрица A имеет диагональный вид D, и, следовательно, квадратичная форма — искомый канонический вид. Соответствующее преобразование координат определяется соотношением

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ \ldots \\ x_n \end{pmatrix} = U \begin{pmatrix} x_1' \\ \ldots \\ x_n' \end{pmatrix}.$$

ПРИМЕР 2.25. Найти ортогональное преобразование, приводящее квадратичную форму $A(\mathbf{x}, \mathbf{x}) = 5x_1^2 + 4x_1x_2 + 2x_2^2$, заданную в евклидовом пространстве $\mathbb{R}^2$, к каноническому виду. Написать этот канонический вид.

◄ Матрица A квадратичной формы имеет вид $A = \begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$.

Характеристическое уравнение $|A - \lambda E| = \begin{vmatrix} 5-\lambda & 2 \\ 2 & 2-\lambda \end{vmatrix} = 0$ приводится к виду $\lambda^2 - 7\lambda + 6 = 0$. Корни квадратного уравнения $\lambda_1 = 6$, $\lambda_2 = 1$. Соответствующие ортонормированные собственные векторы $\mathbf{e}_1' = \frac{1}{\sqrt{5}}\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\mathbf{e}_2' = \frac{1}{\sqrt{5}}\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix}$, и, следовательно, $U = \frac{1}{\sqrt{5}}\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$, $U^{\mathrm{T}} = \frac{1}{\sqrt{5}}\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$.

В базисе $\mathfrak{B}' = \{\mathbf{e}_1', \mathbf{e}_2'\}$ заданная квадратичная форма имеет вид $A = 6x_1'^2 + x_2'^2$, а соответствующее преобразование координат

$$\begin{cases} x_1 = \dfrac{2}{\sqrt{5}}x_1' - \dfrac{1}{\sqrt{5}}x_2', \\ x_2 = \dfrac{1}{\sqrt{5}}x_1' + \dfrac{2}{\sqrt{5}}x_2'. \end{cases} \quad ►$$

Квадратичная форма $A(\mathbf{x}, \mathbf{x})$, определенная в действительном линейном пространстве $\mathcal{L}_n$, называется *положительно* (*отрицательно*) *определенной*, если для всякого $\mathbf{x} \in \mathcal{L}_n$ $(\mathbf{x} \neq \mathbf{0})$

$$A(\mathbf{x}, \mathbf{x}) > 0 \ (< 0).$$

Пусть $A = \|a_{ij}\|$ — матрица квадратичной формы $A(\mathbf{x}, \mathbf{x})$ и

$$D_1 = a_{11},\ D_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix},\ \ldots,\ D_n = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

— последовательность главных миноров матрицы A.

Критерием положительной определенности квадратичной формы является следующий критерий Сильвестра: *для того чтобы квадратичная форма $A(\mathbf{x}, \mathbf{x})$ была положительно определенной, необходимо и достаточно, чтобы все главные миноры ее матрицы $A = \|a_{ij}\|$ были положительны, т. е. $D_k > 0$, $k = 1, 2, \ldots, n$.*

ПРИМЕР 2.26. Определить, является ли положительно определенной квадратичная форма $A(\mathbf{x},\mathbf{x}) = x_1^2 + 2x_2^2 + x_3^2 + 2x_1x_2 + 4x_1x_3 + 2x_2x_3$.

◀ Составим матрицу квадратичной формы $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

Главные миноры формы: $D_1 = 1 > 0$, $D_2 = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 1 > 0$, $D_3 = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \end{vmatrix} = -1 < 0$, поэтому согласно критерию Сильвестра форма не является положительно определенной. ▶

В задачах 2.206–2.212 определить, какие квадратичные формы являются положительно либо отрицательно определенными, а какие нет.

2.206. $x_1^2 + 26x_2^2 + 10x_1x_2$.

2.207. $-x_1^2 + 26x_2^2 + 10x_1x_2$.

2.208. $x_1^2 - 15x_2^2 + 4x_1x_2 - 2x_1x_3 + 6x_2x_3$.

2.209. $12x_1x_2 - 12x_1x_3 + 6x_2x_3 - 11x_1^2 + 6x_2^2 - 6x_3^2$.

2.210. $9x_1^2 + 6x_2^2 + 6x_3^2 + 12x_1x_2 - 10x_1x_3 - 2x_2x_3$.

2.211. $2x_4^2 + x_1x_2 + x_1x_3 - 2x_2x_3 + 2x_2x_4$.

2.212. $x_1^2 + 4x_2^2 + 4x_3^2 + 8x_4^2 + 8x_2x_4$.

4. Кривые и поверхности второго порядка. Приведение к каноническому виду

Гиперповерхностью второго порядка в евклидовом пространстве $\mathbb{R}^n$ называется множество точек, координаты которых удовлетворяют уравнению

$$A(\mathbf{x},\mathbf{x}) + 2(\mathbf{b},\mathbf{x}) + c = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_ix_j + 2\sum_{k=1}^{n} b_kx_k + c = 0, \tag{2.34}$$

где в левой части стоит многочлен второй степени от n переменных $x_1, \ldots, x_n$.

Задача классификации гиперповерхностей второго порядка состоит в нахождении такого базиса в $\mathbb{R}^n$, в котором левая часть уравнения в новых переменных $x_1', \ldots, x_n'$

имеет наиболее простой вид. Для этого сначала ищется такое ортогональное преобразование, что в новых переменных квадратичная форма $A(\mathbf{x},\mathbf{x})=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}a_{ij}x_i x_j$ имеет канонический вид. В новом базисе уравнение (2.34) записывается следующим образом:

$$\sum_{k=1}^{n}\lambda_k x_k'^2+2\sum_{k=1}^{n}b_k' x_k'+c=0,$$

причем не все λ_k, $k=1, 2, \ldots, n$, равны нулю. Если $\lambda_k\neq 0$, то переносом начала координат можно уничтожить линейный член:

$$\lambda_k x_k'^2+2b_k' x_k'=\lambda_k\left(x_k'+\frac{b_k'}{\lambda_k}\right)^2-\frac{b_k'^2}{\lambda_k}=\lambda_k x_k''^2-\frac{b_k'^2}{\lambda_k}.$$

После таких преобразований получаем (изменяя нумерацию переменных, если это необходимо)

$$\lambda_1 x_1''^2+\ldots+\lambda_s x_s''^2+b_{s+1}'' x_{s+1}''+\ldots+b_n'' x_n''+c''=0. \tag{2.35}$$

Уравнение (2.13) называется *каноническим уравнением* гиперповерхности второго порядка.

Множество точек плоскости $\mathbb{R}^2$, удовлетворяющих уравнению (2.34), называется *кривой второго порядка*. В этом случае каноническое уравнение (2.35) может принимать один из следующих видов (в переменных x, y):

1) $\lambda_1 x^2+\lambda_2 y^2+c=0$ $(\lambda_1\lambda_2\neq 0)$;
2) $\lambda_1 x^2+by=0$ $(\lambda_1\neq 0)$;
3) $\lambda_1 x^2+c=0$ $(\lambda_1\neq 0)$.

ПРИМЕР 2.27. Написать каноническое уравнение кривой второго порядка

$$5x^2+4xy+2y^2+2\sqrt{5}x+8\sqrt{5}y+1=0,$$

определить ее тип и найти каноническую систему координат.

◄ Матрица квадратичной части многочлена второй степени равна $\begin{pmatrix}5 & 2\\ 2 & 2\end{pmatrix}$. Ее собственные числа: $\lambda_1=6$ и $\lambda_2=1$; собственные векторы: $\mathbf{e}_1=\left(\frac{2}{\sqrt{5}},-\frac{1}{\sqrt{5}}\right)$, $\mathbf{e}_2=\left(\frac{1}{\sqrt{5}},\frac{2}{\sqrt{5}}\right)$.

После выполнения преобразования, соответствующего повороту на угол $\varphi=\operatorname{arctg}\frac{1}{2}$ относительно начала координат:

$$x=\frac{2}{\sqrt{5}}x'-\frac{1}{\sqrt{5}}y',\quad y=\frac{1}{\sqrt{5}}x'+\frac{2}{\sqrt{5}}y',$$

уравнение кривой приведется к виду

$$6x'^2+y'^2+2\sqrt{5}\left(\frac{2}{\sqrt{5}}x'-\frac{1}{\sqrt{5}}y'\right)+8\sqrt{5}\left(\frac{1}{\sqrt{5}}x'+\frac{2}{\sqrt{5}}y'\right)+1=0.$$

Так как λ_1 и λ_2 отличны от нуля, то по каждой из новых переменных x' и y' можно выделить полный квадрат:

$$6(x'^2+2x'+1)-6+(y'^2+14y'+49)-49+1=0,$$

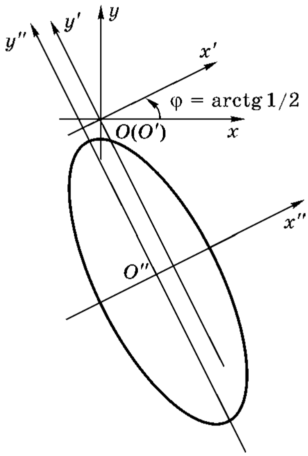


Рис. 2.1

или

$6(x' + 1)^2 + (y' + 7)^2 = 54.$

Заменой переменных $x' = x'' - 1$, $y' = y'' - 7$, соответствующей сдвигу по каждой из координатных осей, получаем $\frac{x''^2}{9} + \frac{y''^2}{54} = 1.$

Последнее уравнение — уравнение эллипса (рис. 2.1). Результирующее преобразование имеет вид

$$x = \frac{2}{\sqrt{5}}x'' - \frac{1}{\sqrt{5}}y'' + \sqrt{5},\ \ y = \frac{1}{\sqrt{5}}x'' + \frac{2}{\sqrt{5}}y'' - 3\sqrt{5},$$

а каноническая система координат — $\langle O'', \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2 \rangle$, где

$O'' = (\sqrt{5}, -3\sqrt{5})$, $\mathbf{e}_1 = \frac{2}{\sqrt{5}}\mathbf{i} - \frac{1}{\sqrt{5}}\mathbf{j}$, $\mathbf{e}_2 = \frac{1}{\sqrt{5}}\mathbf{i} + \frac{2}{\sqrt{5}}\mathbf{j}$. ►

В задачах 2.213–2.218 написать каноническое уравнение кривой второго порядка, определить ее тип и найти каноническую систему координат.

2.213. $9x^2 - 4xy + 6y^2 + 16x - 8y - 2 = 0.$

2.214. $x^2 - 2xy + y^2 - 10x - 6y + 25 = 0.$

2.215. $5x^2 + 12xy - 22x - 12y - 19 = 0.$

2.216. $4x^2 - 4xy + y^2 - 6x + 3y - 4 = 0.$

2.217. $2x^2 + 4xy + 5y^2 - 6x - 8y - 1 = 0.$

2.218. $x^2 - 4xy + 4y^2 - 4x - 3y - 7 = 0.$

Множество точек евклидова пространства $\mathbb{R}^3$, удовлетворяющих уравнению (2.34), называется *поверхностью второго порядка*. В этом случае каноническое уравнение (2.35) может принимать один из следующих видов (в переменных x, y, z):

1) $\lambda_1 x^2 + \lambda_2 y^2 + \lambda_3 z^2 + c = 0$ $(\lambda_1\lambda_2\lambda_3 \neq 0)$;

2) $\lambda_1 x^2 + \lambda_2 y^2 + bz = 0$ $(\lambda_1\lambda_2 \neq 0)$;

3) $\lambda_1 x^2 + \lambda_2 y^2 + c = 0$ $(\lambda_1\lambda_2 \neq 0)$;

4) $\lambda_1 x^2 + by = 0$ $(\lambda_1 \neq 0)$;

5) $\lambda_1 x^2 + c = 0$ $(\lambda_1 \neq 0)$.

Поверхности типов 3)–5) являются цилиндрами (эллиптическими, гиперболическими и т. д. в зависимости от типа кривой в сечении плоскостью $z = 0$).

ПРИМЕР 2.28. Написать каноническое уравнение поверхности второго порядка

$$4x^2 + 4y^2 - 8z^2 - 10xy + 4yz + 4zx - 16x - 16y - 8z + 72 = 0,$$

определить ее тип и найти каноническую систему координат.

◄ Матрица квадратичной части многочлена второй степени равна $\begin{pmatrix} 4 & -5 & 2 \\ -5 & 4 & 2 \\ 2 & 2 & -8 \end{pmatrix}$.

Ее собственные числа: $\lambda_1 = 9$, $\lambda_2 = -9$, $\lambda_3 = 0$, а соответствующие им собственные векторы: $\mathbf{e}_1 = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}, 0\right)$, $\mathbf{e}_2 = \left(\frac{1}{3\sqrt{2}}, \frac{1}{3\sqrt{2}}, -\frac{4}{3\sqrt{2}}\right)$, $\mathbf{e}_3 = \left(\frac{2}{3}, \frac{2}{3}, \frac{1}{3}\right)$.

После выполнения линейного преобразования

$$x = \frac{1}{3\sqrt{2}}(3x' + y' + 2\sqrt{2}z'),$$
$$y = \frac{1}{3\sqrt{2}}(-3x' + y' + 2\sqrt{2}z'),$$
$$z = \frac{1}{3\sqrt{2}}(-4y' + \sqrt{2}z')$$

получим

$$9x'^2 - 9y'^2 - 72z' + 72 = 0.$$

Преобразование сдвига необходимо выполнить лишь по переменной z':

$$-72z' + 72 = -72(z' - 1) = -72z''.$$

Второе преобразование координат имеет вид $x'' = x'$, $y'' = y'$, $z'' = z' - 1$.

Отсюда окончательно получаем каноническое уравнение гиперболического параболоида

$$\frac{x''^2}{8} - \frac{y''^2}{8} = z''.$$

Результирующее преобразование координат таково:

$$x = \frac{1}{3\sqrt{2}}(3x'' + y'' + 2\sqrt{2}z'') + \frac{2}{3},$$
$$y = \frac{1}{3\sqrt{2}}(-3x'' + y'' + 2\sqrt{2}z'') + \frac{2}{3},$$
$$z = \frac{1}{3\sqrt{2}}(-4y'' + \sqrt{2}z'') + \frac{1}{3},$$

а каноническая система координат – $\langle O', \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\rangle$, где

$$O' = \left(\frac{2}{3}, \frac{2}{3}, \frac{1}{3}\right), \mathbf{e}_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}\mathbf{i} - \frac{1}{\sqrt{2}}\mathbf{j},\ \mathbf{e}_2 = \frac{1}{3\sqrt{2}}\mathbf{i} + \frac{1}{3\sqrt{2}}\mathbf{j} - \frac{4}{3\sqrt{2}}\mathbf{k},\ \mathbf{e}_3 = \frac{2}{3}\mathbf{i} + \frac{2}{3}\mathbf{j} + \frac{1}{3}\mathbf{k}. \blacktriangleright$$

В задачах 2.219–2.225 написать каноническое уравнение поверхности второго порядка, определить ее тип и найти каноническую систему координат.

2.219. $7x^2 + 6y^2 + 5z^2 - 4xy - 4yz - 6x - 24y + 18z + 30 = 0.$

2.220. $2x^2 + 2y^2 - 5z^2 + 2xy - 2x - 4y - 4z + 2 = 0.$

2.221. $2x^2 + 2y^2 + 3z^2 + 4xy + 2yz + 2zx - 4x + 6y - 2z + 3 = 0.$

2.222. $4x^2 + y^2 + 4z^2 - 4xy + 4yz - 8zx - 28x + 2y + 16z + 45 = 0.$

2.223. $2x^2 + 5y^2 + 2z^2 - 2xy - 4xz + 2yz + 2x - 10y - 2z - 1 = 0.$

2.224. $x^2 + 5y^2 + z^2 + 2xy + 2yz + 6zx - 2x + 6y + 2z = 0.$

2.225. $x^2 - 2y^2 + z^2 + 4xy + 4yz - 10zx + 2x + 4y - 10z - 1 = 0.$

ГЛАВА 3

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ ФУНКЦИЙ ОДНОЙ ПЕРЕМЕННОЙ

§ 3.1. ПОНЯТИЕ ФУНКЦИИ. ЭЛЕМЕНТАРНЫЕ ФУНКЦИИ, ИХ СВОЙСТВА И ГРАФИКИ

1. Понятие функции

Пусть D — заданное множество действительных чисел. Если каждому числу $x \in D$ поставлено в соответствие некоторое действительное число y, то говорят, что на множестве D задана *функция* (более полно — числовая функция одной переменной). Переменную x называют аргументом или независимой переменной, а y — зависимой переменной или функцией. Если правило соответствия обозначить через f, то пишут $y = f(x)$. Считая x произвольным из D, эту запись понимают также как обозначение функции. Множество D называется *областью определения* функции, а множество всех чисел y, которые принимает функция, когда переменная x пробегает все значения из D, называют *множеством* (*или областью*) *значений* функции f. Часто его обозначают $E(f)$. Запись $f\colon X \to Y$ означает, что область определения функции f есть множество X, а значения функции принадлежат множеству Y.

Если функция задана формулой и область определения не указана, то за область определения (*естественная область определения*) функции принимают множество всех значений переменной, при которых формула имеет смысл. Нахождение области значений функций является чаще всего более сложной задачей, чем нахождение области определения функции.

ПРИМЕР 3.1. Найти область определения и множество значений функции $f(x) = \sqrt{1-x^2}$.

◀ Функция $f(x) = \sqrt{1-x^2}$ определена для тех значений x, для которых подкоренное выражение неотрицательно, т. е. $1 - x^2 \geq 0$. Решениями этого неравенства являются точки отрезка $[-1; 1]$. Следовательно, $D(f) = [-1; 1]$.

Для нахождения множества значений, выясним, при каких a уравнение $\sqrt{1-x^2} = a$ имеет решение. Очевидно, что a должно быть неотрицательно и $1 - x^2 = a^2$, или $x^2 = 1 - a^2$. Последнее уравнение имеет решения, если $1 - a^2 \geq 0$, т. е. $|a| \leq 1$. Так как $a \geq 0$, то получаем, что $E(f) = [0; 1]$. Другой способ нахождения области значений, основанный на вычислении наибольшего и наименьшего значений дифференцируемой функции, см. ниже (§ 3.7, п. 1). ▶

3.1. Найти функциональную зависимость радиуса R основания конуса от его объема V при постоянной величине высоты конуса $H = 1$. Найти область определения этой функции.

3.2. Найти функциональную зависимость площади равнобедренного треугольника S с заданным основанием $a = 2$ от величины угла α при основании треугольника. Найти область определения этой функции.

3.3. Найти зависимость площади поверхности шара S от величины объема шара V.

3.4. Написать выражение для объема V конуса как функции от его боковой поверхности S при заданной длине образующей $l = 2$.

3.5. Две точки движутся по перпендикулярным прямым со скоростью v км/ч каждая к точке пересечения прямых. Написать формулу зависимости расстояния S между точками от времени движения t, если в начальный момент времени они находились на расстояниях a км и b км от точки пересечения прямых.

3.6. Первую часть пути тело проходит со скоростью v км/ч, а оставшуюся часть со скоростью $2v$ км/ч. Написать формулу зависимости средней скорости прохождения пути длиной S от величины l км первой части пути.

3.7. Для функции $f(x) = \lg^2 x$ найти $f(1)$, $f(0{,}1)$, $f(100)$, $f(0{,}001)$.

3.8. Для функции $f(x)=\sqrt{1-x^2}$ найти $f(0)$, $f(0{,}6)$, $f(1)$, $f(0{,}5)$.

3.9. Найти $f(-1)$, $f(0)$, $f(0{,}5)$, $f(1)$, $f(2)$, если

$$f(x)=\begin{cases}2^{-x}, & -\infty<x<0,\\ 1+x, & 0\le x<1,\\ 5-x, & 1\le x<+\infty.\end{cases}$$

3.10. Найти $f(0)$, $f(\pi)$, $f(2\pi)$, $f(7)$, если

$$f(x)=\begin{cases}\sin x, & -\infty<x\le\pi,\\ 2\pi-x, & \pi<x<2\pi,\\ (x-2\pi)^2, & 2\pi\le x<+\infty.\end{cases}$$

3.11. Дана функция $y(x) = x^2$. Найти:
а) $y(-x)$; б) $y(x-1)$; в) $y(x)-1$; г) $y(1/x)$; д) $1/y(x)$; е) $y(2x)$; ж) $2y(x)$.

3.12. Дана функция $y(x) = 1/x$. Найти:
а) $y(3x)$; б) $y(3(x+2))$; в) $4y(3(x+2))$; г) $2-4y(3(x+2))$.

В задачах 3.13–3.24 найти естественные области определения функций.

3.13. $y=\sqrt{3-4x}$. **3.14.** $y=\ln(x^2-1)$. **3.15.** $y=\arccos\dfrac{2x-3}{3}$.

3.16. $y=\dfrac{x^2+4x+3}{x^2-6x+5}$. **3.17.** $y=\sqrt{x}+\sqrt{1-x}$. **3.18.** $y=\sqrt{-x}+\dfrac{1}{3+x}$.

3.19. $y=\sqrt{\dfrac{2+x}{1-x}}$. **3.20.** $y=\sqrt[3]{\dfrac{x^2-1}{x-2}}$. **3.21.** $y=\sqrt{\sin x}$.

3.22. $y=\lg(2\cos x-1)$. **3.23.** $y=\arcsin\dfrac{1+x}{1-x}$. **3.24.** $y=\sqrt{\sin\sqrt{x}}$.

В задачах 3.25–3.30 найти области определения и множества значений функций.

3.25. $y = x^2 + 2x + 3$. **3.26.** $y = \sqrt{5 - x^2 + 2x}$. **3.27.** $y = \dfrac{1}{x^2 + 4x + 5}$.

3.28. $y = \log_2(x^2 - 4)$. **3.29.** $y = \log_{0,5}(16 - x^2)$. **3.30.** $y = \sin x + \cos x$.

Пусть заданы функции f: $X \to Y$ и g: $Y \to Z$. Их *композицией* (или *сложной функцией*), полученной последовательным применением сначала f, а затем g, называется функция $h = g \circ f$: $X \to Z$, определенная равенством $h(x) = g(f(x))$, $x \in D(f)$.

ПРИМЕР 3.2. Пусть $g(x) = x^4 - 1$ и $f(x) = \sqrt{x}$. Найти сложные функции $h_1(x) = f(g(x))$ и $h_2(x) = g(f(x))$ и их области определения.

◄ Найдем области определения и множества значений заданных функций: $D(g) = \mathbb{R}$, $E(g) = [-1; +\infty)$ и $D(f) = [0; +\infty)$, $E(f) = [0; +\infty)$.

Функция $h_1(x) = f(g(x))$ определена при тех значениях $x \in D(g)$, при которых значения функции $g(x) \in D(f)$, т. е. при $x^4 - 1 \geq 0$. Отсюда $x \in (-\infty; -1] \cup [1; +\infty)$. Получаем $h_1(x) = \sqrt{x^4 - 1}$ и $D(h_1) = (-\infty; -1] \cup [1; +\infty)$.

Так как $D(g) = \mathbb{R}$, то для всех $x \in D(f)$ выполняется $f(x) \in D(g)$. Следовательно, область определения функции $h_2(x) = g(f(x))$ совпадает с областью определения функции f. Таким образом, $h_2(x) = (\sqrt{x})^4 - 1 = x^2 - 1$, $D(h_2) = [0; +\infty)$. ►

ПРИМЕР 3.3. Найти функцию $h(x) = f(g(x))$, если $g(x) = \arcsin x$, $f(x) = \sqrt{x}$.

◄ Найдем области определения функций f и g, а также множество значений $g(x)$: $D(f) = [0; +\infty)$, $D(g) = [-1; 1]$, $E(g) = \left[-\dfrac{\pi}{2}; \dfrac{\pi}{2}\right]$. Функция $h(x) = f(g(x))$ определена при тех значениях $x \in D(g)$, при которых $g(x) \in D(f)$, т. е. если $g(x) \geq 0$. Последнее неравенство выполняется для $x \in [0; 1]$. Получаем $h(x) = \sqrt{\arcsin x}$, $D(h) = [0; 1]$. ►

В задачах 3.31, 3.32 найти $f(g(x))$, $f(f(x))$, $g(f(x))$, $g(g(x))$.

3.31. $f(x) = 2x - 1$, $g(x) = x^3$. **3.32.** $f(x) = (x + 1)^2$, $g(x) = \sqrt{x}$.

Функция $f(x)$называется *четной* (*нечетной*), если ее область определения симметрична относительно точки $x = 0$ и $f(-x) = f(x)$ ($f(-x) = -f(x)$) для любого $x \in D(f)$.

Какие из нижеследующих функций являются четными, какие нечетными, а какие не являются ни четными, ни нечетными?

3.33. $f(x) = x^4 - 2x^2$. **3.34.** $f(x) = \sin x \cdot \cos x$. **3.35.** $f(x) = \sin x + \cos x$.

3.36. $f(x) = (x + 1)^2$. **3.37.** $f(x) = \lg \dfrac{1 + x}{1 - x}$. **3.38.** $f(x) = \dfrac{e^x + 1}{e^x - 1}$.

Функция $f(x)$называется *периодической*, если существует положительное число $T > 0$ (*период функции*) такое, что $f(x + T) = f(x)$ для любого $x \in D(f)$.

В задачах 3.39–3.44 определить, какие из указанных функций являются периодическими, и найти их наименьшие периоды.

3.39. $f(x) = 4\sin 3x$. **3.40.** $f(x) = \sin^2 x$. **3.41.** $f(x) = \operatorname{tg} 2x - \operatorname{tg} 3x$.

3.42. $f(x) = \sin^3 x$. **3.43.** $f(x) = \cos x + \cos(\sqrt{2}x)$. **3.44.** $f(x) = \sin x^2$.

Пусть функция f такова, что для любых $x_1, x_2 \in D(f)$ из условия $x_1 \neq x_2$ следует $f(x_1) \neq f(x_2)$. В этом случае для каждого $y \in E(f)$ существует единственное $x \in D(f)$ такое, что $y = f(x)$. Тем самым на множестве $E(f)$ определена новая функция, отображающая множество E на D. Ее называют *обратной* к функции f и обозначают f^{-1}. При этом для всякого $x \in D$ выполняется равенство $f^{-1}(f(x)) = x$, а для всякого $y \in E$ — равенство $f(f^{-1}(y)) = y$. Исходная функция f является обратной к f^{-1}.

ПРИМЕР 3.4. Найти обратную функцию для $f(x)=\dfrac{2x}{x-1}$.

◀ Областью определения функции $f(x)=\dfrac{2x}{x-1}=2+\dfrac{2}{x-1}$ является множество $D(f) = (-\infty; 1) \bigcup (1; +\infty)$, а множеством значений — $E(f) = (-\infty; 2) \bigcup (2; +\infty)$.

Для нахождения обратной функции решим уравнение $y=\dfrac{2x}{x-1}$ относительно x. Если для любого $y \in E(f)$ это уравнение имеет единственное относительно x решение, то условие существования обратной функции $f(x_1) \neq f(x_2)$ для $x_1, x_2 \in D(f)$, $x_1 \neq x_2$, будет выполнено. Из уравнения находим $2x = xy - y$ или $x(2 - y) = -y$. Так как $y = 2$ не принадлежит $E(f)$, то последнее уравнение для любого $y \in E(f)$ имеет единственное решение $x=\dfrac{y}{y-2}$. Таким образом, $f^{-1}(y)=\dfrac{y}{y-2}$. Обозначая независимую переменную и для обратной функции через x, окончательно получаем $f^{-1}(x)=\dfrac{x}{x-2}$. Записав ее в виде $f^{-1}(x)=1+\dfrac{2}{x-2}$, находим, что $E(f^{-1}) = (-\infty; 1) \bigcup (1; +\infty) = D(f)$. ▶

В задачах 3.45–3.53 для заданных функций $f(x)$ найти обратные функции $f^{-1}(x)$ и области их определения.

3.45. $f(x)=\sqrt[3]{2x+7}$. **3.46.** $f(x)=\sqrt[3]{10-3x}$. **3.47.** $f(x)=\dfrac{x-2}{3x+5}$.

3.48. $f(x)=\dfrac{2x+3}{x-1}$. **3.49.** $f(x)=\sqrt{3-2x}+1$. **3.50.** $f(x)=\sqrt{3x-5}-1$.

3.51. $f(x)=2^{x-2}$. **3.52.** $f(x)=\log_{0,5}(5-x)$. **3.53.** $f(x)=\begin{cases} x^3, & -\infty<x<0, \\ x^2+1, & 0 \le x < +\infty. \end{cases}$

В задачах 3.54–3.57 найти обратную функцию и область ее определения, если исходная функция задана на указанном промежутке.

3.54. $y = x^2 - 1$: а) $x \in (-\infty; 0]$; б) $x \in [0; +\infty)$.

3.55. $y = -x^2 - 2x + 3$: а) $x \in (-\infty; -1]$; б) $x \in [-1; +\infty)$.

3.56. $y = \cos x$: а) $x \in [0; \pi]$; б) $x \in [\pi; 2\pi]$.

3.57. $y = \operatorname{tg} x$: а) $x \in (-\pi/2; \pi/2)$; б) $x \in (\pi/2; 3\pi/2)$.

2. Элементарные функции и их графики

Следующие функции называются *основными (простейшими) элементарными*.

1. *Степенная* функция: $y = x^a$, $a \in \mathbb{R}$. (В общем случае степенную функцию считают определенной при $x > 0$. Но в ряде случаев область определения расширяют. Например, если a — натуральное число, то степенную функцию считают определенной на $\mathbb{R}$; если же a — целое отрицательное число, то для всех $x \neq 0$.)

2. *Показательная* функция: $y = a^x$, $a > 0$, $a \neq 1$, $x \in \mathbb{R}$.

3. *Логарифмическая* функция: $y = \log_a x$, $a > 0$, $a \neq 1$, $x > 0$.

4. *Тригонометрические* функции: $y = \sin x$, $x \in \mathbb{R}$; $y = \cos x$, $x \in \mathbb{R}$; $y = \operatorname{tg} x$, $x \in \mathbb{R}$, $x \neq \dfrac{\pi}{2} + \pi k$, $k \in \mathbb{Z}$; $y = \operatorname{ctg} x$, $x \in \mathbb{R}$, $x \neq \pi k$, $k \in \mathbb{Z}$.

5. *Обратные тригонометрические* функции: $y = \arcsin x$, $x \in [-1; 1]$; $y = \arccos x$, $x \in [-1; 1]$; $y = \operatorname{arctg} x$, $x \in \mathbb{R}$; $y = \operatorname{arcctg} x$, $x \in \mathbb{R}$.

Элементарной называется функция, которая может быть получена из основных элементарных с помощью применения конечного числа арифметических действий и операций композиции.

Графиком функции $f(x)$ в декартовой прямоугольной системе координат Oxy называется множество точек плоскости с координатами $(x; f(x))$, $x \in D(f)$.

При построении графиков функций часто используют следующие простые преобразования графиков. Пусть график функции $y = f(x)$ уже построен. Тогда:

1. График функции $y = f(x + a)$ получается параллельным переносом вдоль оси Ox графика функции $y = f(x)$ на a единиц влево, если $a > 0$, и на $(-a)$ вправо, если $a < 0$.

2. График функции $y = f(x) + a$ получается параллельным переносом вдоль оси Oy графика функции $y = f(x)$ на a единиц вверх при $a > 0$ и на $(-a)$ вниз при $a < 0$.

3. График функции $y = -f(x)$ получается зеркальным отражением относительно оси Ox графика функции $y = f(x)$.

4. График функции $y = f(-x)$ получается зеркальным отражением относительно оси Oy графика функции $y = f(x)$.

5. График функции $y = af(x)$, $a > 0$, получается из графика функции $y = f(x)$ растяжением в a раз при $a > 1$ или сжатием в $1/a$ раз при $0 < a < 1$ вдоль оси Oy.

6. График функции $y = f(ax)$ получается из графика функции $y = f(x)$ сжатием в a раз при $a > 1$ или растяжением в $1/a$ раз при $0 < a < 1$ вдоль оси Ox.

ПРИМЕР 3.5. Построить график функции $f(x) = 4\cos^2 x$.

◀ Преобразуем функцию к виду $f(x) = 4\cos^2 x = 2 + 2\cos 2x$ и получим ее график из графика основной элементарной функции $\cos x$. Запишем цепочку преобразований

$$\cos x \xrightarrow{(1)} \cos 2x \xrightarrow{(2)} 2\cos 2x \xrightarrow{(3)} 2 + 2\cos 2x.$$

Первое преобразование означает сжатие графика функции $\cos x$ вдоль оси Ox в два раза, второе — растяжение полученного графика вдоль оси Oy в два раза, третье — сдвиг вдоль оси Oy на две единицы вверх (рис. 3.1). ▶

В некоторых случаях при построении графика функции целесообразно разбить ее область определения на несколько непересекающихся промежутков и последовательно строить график на каждом из них.

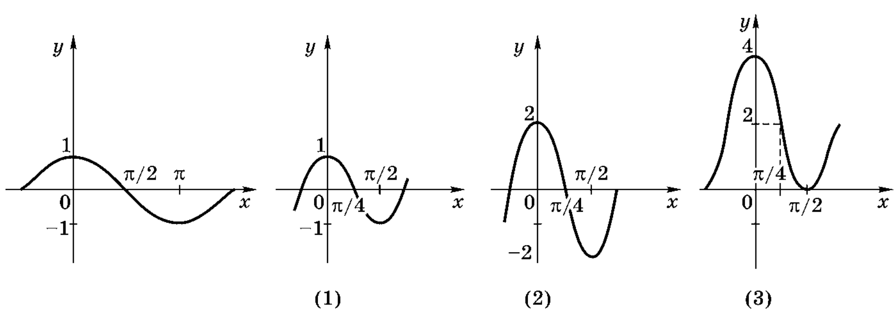


Рис. 3.1

ПРИМЕР 3.6. Построить график функции $f(x) = |2x - 3| + x^2$.

◀ Так как $|2x-3| = \begin{cases} 3-2x, & x < \dfrac{3}{2}, \\ 2x-3, & x \ge \dfrac{3}{2}, \end{cases}$ то $f(x) = \begin{cases} x^2-2x+3, & x < \dfrac{3}{2}, \\ x^2+2x-3, & x \ge \dfrac{3}{2}. \end{cases}$ Таким образом, для построения графика функции $f(x)$ достаточно построить графики квадратичных функций $f_1(x) = x^2 - 2x + 3$ и $f_2(x) = x^2 + 2x - 3$, а затем выделить их части на промежутках $\left(-\infty, \dfrac{3}{2}\right)$ и $\left[\dfrac{3}{2}, +\infty\right)$ соответственно. Выделяя полные квадраты, функции f_1 и f_2 представим в виде $f_1(x) = (x - 1)^2 + 2$ и $f_2(x) = (x + 1)^2 - 4$. Графики каждой из них можно построить, преобразуя график основной элементарной функции x^2 в соответствии с цепочками преобразований

$$x^2 \to (x-1)^2 \to (x-1)^2 + 2$$
$$\text{и} \quad x^2 \to (x+1)^2 \to (x+1)^2 - 4.$$

Окончательный вид графика показан на рис. 3.2. ▶

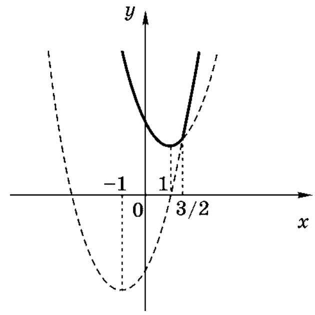


Рис. 3.2

В задачах 3.58–3.61 записать элементарные функции в виде композиции основных элементарных функций.

3.58. $f(x) = \sin^3 x$. **3.59.** $f(x) = |\sin x|$.

3.60. $f(x) = 2^{\sin x^2}$. **3.61.** $f(x) = \sin^2 2^x$.

В задачах 3.62–3.88, преобразуя графики основных элементарных функций, построить графики указанных функций.

3.62. $f(x) = -1 + 2(x + 1)^2$. **3.63.** $f(x) = 1 - 0{,}5(x - 1)^2$.

3.64. $f(x) = -3x^2 + 12x - 9$. **3.65.** $f(x) = 2x^2 + 8x + 9$.

3.66. $f(x) = -1 + \dfrac{2}{x-1}$. **3.67.** $f(x) = 2 - \dfrac{3}{x+3}$.

3.68. $f(x) = \dfrac{2x+3}{x-2}$. **3.69.** $f(x) = \dfrac{65-3x}{9x-6}$.

3.70. $f(x) = 2\sin(0{,}5x + \pi/4) + 2$. **3.71.** $f(x) = -0{,}5\cos(2x + \pi/3) - 1$.

3.72. $f(x) = 2^{3x+1} - 1$. **3.73.** $f(x) = \log_{1/2}(4x + 8)$.

3.74. $f(x) = -2\arcsin(3x + 3)$. **3.75.** $f(x) = 0{,}5\arccos(2x - 2)$.

3.76. $f(x) = -3\operatorname{arctg}(4x + 2)$. **3.77.** $f(x) = 2\operatorname{arcctg}(2 - 2x)$.

3.78. $f(x) = |2-2x| + \sqrt{(2+x)^2}$. **3.79.** $f(x) = |x^2 - 2x - 3|$.

3.80. $f(x) = \sin|x|$. **3.81.** $f(x) = \left|\dfrac{2x-3}{x+2}\right|$.

3.82. $f(x) = \log_2(|x| - 2)$. **3.83.** $f(x) = |\log_{0,5}(x - 1)|$.

3.84. $f(x) = [x]$, где $[x]$ — целая часть x, то есть наибольшее целое число, не превосходящее x.

3.85. $f(x) = \{x\}$, где $\{x\} = x - [x]$ — дробная часть x.

3.86. $\operatorname{sgn} x = \begin{cases} -1, & x < 0, \\ 0, & x = 0, \\ 1, & x > 0. \end{cases}$ **3.87.** $f(x) = x \cdot \operatorname{sgn} x$. **3.88.** $f(x) = \operatorname{sgn}(\cos x)$.

На плоскости Oxy изобразить множество точек, координаты которых удовлетворяют условию:

3.89. $x^2 - y^2 = 0$. **3.90.** $x^2 + 6x + y^2 = 0$. **3.91.** $|x| + |y| = 1$.
3.92. $|y| = |x^2 - 2x - 3|$. **3.93.** $x^2 + 4x + y^2 - 6y - 4 = 0$. **3.94.** $||x| - |y|| = 1$.

§ 3.2. ПРЕДЕЛ

1. Предел последовательности

Если каждому натуральному числу $n \in \mathbb{N}$ поставлено в соответствие некоторое действительное число $f(n)$, то говорят, что задана *последовательность* действительных чисел. Число $f(n)$ называется n-м членом последовательности и обозначается символом x_n, а формула $x_n = f(n)$ называется *формулой общего члена* последовательности $\{x_n\}$.

В задачах 3.95–3.98 написать первые пять членов последовательности.

3.95. $x_n = \dfrac{2n-1}{3n+2}$. **3.96.** $x_n = 1 + \dfrac{(-1)^n}{n}$.

3.97. $x_n = \sin\dfrac{\pi n}{4}$. **3.98.** $x_n = n(1-(-1)^n)$.

В задачах 3.99–3.104 найти формулу общего члена последовательности.

3.99. $-\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, -\frac{1}{4}, \frac{1}{5}, \ldots$ **3.100.** $0, \frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \ldots$ **3.101.** $2, \frac{4}{3}, \frac{6}{5}, \frac{8}{7}, \ldots$

3.102. $0, 2, 0, 2, \ldots$ **3.103.** $1, 0, -3, 0, 5, 0, -7, \ldots$ **3.104.** $1, 2, \frac{1}{3}, 4, \frac{1}{5}, 6, \ldots$

Число a называется *пределом последовательности* $\{x_n\}$, если для любого $\varepsilon > 0$ найдется такой номер $N(\varepsilon)$, что для всех $n > N(\varepsilon)$ выполняется неравенство $|x_n - a| < \varepsilon$. Обозначение: $a = \lim\limits_{n\to\infty} x_n$. Последовательность, имеющая предел, называется *сходящейся*.

ПРИМЕР 3.7. Пользуясь определением предела последовательности, доказать, что $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{2n+1}{3n+4} = \dfrac{2}{3}$. Начиная с какого n выполняется неравенство $|x_n - 2/3| < 0{,}01$?

◄ Зададим произвольное $\varepsilon > 0$. Нужно найти номер $N(\varepsilon)$ такой, что для любого натурального $n > N(\varepsilon)$ выполняется неравенство $\left|\dfrac{2n+1}{3n+4} - \dfrac{2}{3}\right| < \varepsilon$. Для этого решим это неравенство относительно n. Последовательно находим

$$\left|\frac{2n+1}{3n+4} - \frac{2}{3}\right| < \varepsilon \Leftrightarrow \left|\frac{-5}{3(3n+4)}\right| < \varepsilon \Leftrightarrow \frac{5}{3(3n+4)} < \varepsilon.$$

Отсюда, учитывая, что $3n + 4 > 0$, получим

$$\frac{5}{3(3n+4)} < \varepsilon \Leftrightarrow \frac{5}{3\varepsilon} < 3n+4 \Leftrightarrow n > \frac{1}{3}\cdot\left(\frac{5}{3\varepsilon}-4\right).$$

Полагаем $N(\varepsilon)=\left[\frac{1}{3}\cdot\left(\frac{5}{3\varepsilon}-4\right)\right]$ (здесь $\left[\frac{1}{3}\cdot\left(\frac{5}{3\varepsilon}-4\right)\right]$ — целая часть числа $\frac{1}{3}\cdot\left(\frac{5}{3\varepsilon}-4\right)$), причем считаем, что $N(\varepsilon) = 1$, если $\frac{1}{3}\cdot\left(\frac{5}{3\varepsilon}-4\right)<1$. Тогда для каждого натурального $n > N(\varepsilon)$ будет выполняться неравенство $\left|\frac{2n+1}{3n+4}-\frac{2}{3}\right|<\varepsilon$, что и требовалось доказать. В частности, для $\varepsilon = 0{,}01$ номер $N(\varepsilon)=\left[\frac{1}{3}\cdot\left(\frac{5}{3\cdot 0{,}01}-4\right)\right]=\left[54\frac{2}{9}\right]=54$. Следовательно, неравенство $|x_n - 2/3| < 0{,}01$ выполняется, начиная с номера $n = 55$. ►

ПРИМЕР 3.8. Пользуясь определением предела последовательности, доказать, что $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n^2+3}{2n^2+3n+1}=\frac{1}{2}$.

◄ Как и в примере 3.7, возьмем произвольное $\varepsilon > 0$ и найдем номер $N(\varepsilon)$ такой, что для любого натурального $n > N(\varepsilon)$ выполняется неравенство $\left|\frac{n^2+3}{2n^2+3n+1}-\frac{1}{2}\right|<\varepsilon$. Преобразуем последнее неравенство к виду

$$\frac{|5-3n|}{2(2n^2+3n+1)}<\varepsilon.$$

Заметим, что в определении предела последовательности не требуется нахождение наименьшего номера $N(\varepsilon)$ такого, чтобы для любого $n > N(\varepsilon)$ выполнялось неравенство $|x_n - a| < \varepsilon$. Поэтому заменим полученное неравенство более сильным (но более простым). Учитывая, что $|5 - 3n| < 3n$, а $2n^2 + 3n + 1 > 2n^2$, получим

$$\frac{|5-3n|}{2(2n^2+3n+1)}<\varepsilon \Leftarrow \frac{3n}{4n^2}<\varepsilon \Leftrightarrow \frac{3}{4\varepsilon}<n.$$

Отсюда, полагая $N(\varepsilon)=\left[\frac{3}{4\varepsilon}\right]$, заключаем, что для любого натурального $n > N(\varepsilon)$ выполняется неравенство $\left|\frac{n^2+3}{2n^2+3n+1}-\frac{1}{2}\right|<\varepsilon$, что и требовалось доказать. ►

В задачах 3.105–3.110, используя определение предела последовательности, доказать, что $a=\lim\limits_{n\to\infty}x_n$.

3.105. $x_n=\frac{3n+1}{2n-1}$, $a=\frac{3}{2}$. **3.106.** $x_n=\frac{9n^2+1}{3n^2-1}$, $a=3$.

3.107. $x_n=\frac{\sin n^2}{n}$, $a=0$. **3.108.** $x_n=\frac{n\cos n}{n^2+1}$, $a=0$.

3.109. $x_n=\frac{2n^3-n+1}{n^3-n^2+2}$, $a=2$. **3.110.** $x_n=\frac{n^4+n+2}{3n^4-n^3-1}$, $a=\frac{1}{3}$.

3.111. Доказать, что число $a = 1$ не является пределом последовательности $x_n = \dfrac{3n+1}{2n-1}$.

3.112. Доказать, что последовательность

$$x_n = \begin{cases} \dfrac{1}{k}, & n = 2k, \\ \dfrac{k-1}{k}, & n = 2k-1, \end{cases}$$

где $k \in \mathbb{N}$, не имеет предела.

При вычислении пределов последовательностей используются *арифметические свойства сходящихся последовательностей: если*

$$\lim_{n\to\infty} x_n = a,\ \lim_{n\to\infty} y_n = b,\ \text{то}$$

$$\lim_{n\to\infty}(x_n \pm y_n) = a \pm b,\ \lim_{n\to\infty} x_n y_n = ab,\ \lim_{n\to\infty}\frac{x_n}{y_n} = \frac{a}{b},\ b \neq 0.$$

ПРИМЕР 3.9. Вычислить предел $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n^2-\sqrt{n}}{3n^2-2}$.

◄ Последовательности $\{n^2-\sqrt{n}\}$ и $\{3n^2-2\}$ не являются сходящимися. Поэтому сразу применить свойство о пределе частного нельзя. Преобразуем дробь, вынося за скобки в числителе и, соответственно, в знаменателе старшую степень n:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n^2-\sqrt{n}}{3n^2-2} = \lim_{n\to\infty}\frac{n^2\left(1-\sqrt{\dfrac{1}{n^3}}\right)}{n^2\left(3-\dfrac{2}{n^2}\right)} = \lim_{n\to\infty}\frac{1-\sqrt{\dfrac{1}{n^3}}}{3-\dfrac{2}{n^2}}.$$

Используя определение предела последовательности, легко доказать, что $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{n^\alpha} = 0$, если $\alpha > 0$. Тогда, на основании арифметических свойств предела, получаем $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1-\sqrt{\dfrac{1}{n^3}}\right) = \lim\limits_{n\to\infty}1 - \lim\limits_{n\to\infty}\sqrt{\dfrac{1}{n^3}} = 1$ и, аналогично, $\lim\limits_{n\to\infty}\left(3-\dfrac{2}{n^2}\right) = 3 \neq 0$. Теперь, в силу свойства о пределе частного последовательностей, окончательно находим

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1-\sqrt{\dfrac{1}{n^3}}}{3-\dfrac{2}{n^2}} = \frac{\lim\limits_{n\to\infty}\left(1-\sqrt{\dfrac{1}{n^3}}\right)}{\lim\limits_{n\to\infty}\left(3-\dfrac{2}{n^2}\right)} = \frac{1}{3}. \ ►$$

В задачах 3.113–3.118 вычислить пределы.

3.113. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(n+1)^2-(n-1)^2}{3n-2}$.

3.114. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\sqrt[3]{n^2+n-1}+\sqrt{n+1}}{\sqrt[3]{n^2-1}-1}$.

3.115. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{5n+\sqrt{n}}{2n-\sqrt{n}}$.

3.116. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\sqrt{n^3+3}}{\sqrt{n^3-2n+5}+1}$.

3.117. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(3n-\dfrac{3n^2+1}{n-3}\right)$.

3.118. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{3n^2+n}{2n-1}-\dfrac{3n^3-n^2}{2n^2+3}\right)$.

При вычислении пределов выражений, содержащих разности радикалов, полезным является прием перевода иррациональности из числителя в знаменатель (или наоборот) путем умножения числителя и знаменателя на выражение, содержащее сумму радикалов (часто называемое сопряженным к исходному выражению).

ПРИМЕР 3.10. Вычислить предел $\lim\limits_{n\to\infty}(\sqrt[3]{n^3+2n^2}-n)$.

◀ Так как последовательности $\{\sqrt[3]{n^3+2n^2}\}$ и $\{n\}$ расходятся, то применить правило о пределе разности нельзя. Преобразуем выражение под знаком предела, умножив и разделив его на сопряженное выражение $\sqrt[3]{(n^3+2n^2)^2}+n\cdot\sqrt[3]{n^3+2n^2}+n^2$. Получим

$$\lim_{n\to\infty}(\sqrt[3]{n^3+2n^2}-n)=\lim_{n\to\infty}\frac{(\sqrt[3]{n^3+2n^2}-n)(\sqrt[3]{(n^3+2n^2)^2}+n\cdot\sqrt[3]{n^3+2n^2}+n^2)}{\sqrt[3]{(n^3+2n^2)^2}+n\cdot\sqrt[3]{n^3+2n^2}+n^2}=$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{n^3+2n^2-n^3}{\sqrt[3]{(n^3+2n^2)^2}+n\cdot\sqrt[3]{n^3+2n^2}+n^2}=\lim_{n\to\infty}\frac{2n^2}{n^2\left(\sqrt[3]{\left(1+\frac{2}{n}\right)^2}+\sqrt[3]{1+\frac{2}{n}}+1\right)}=$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{2}{\sqrt[3]{\left(1+\frac{2}{n}\right)^2}+\sqrt[3]{1+\frac{2}{n}}+1}=\frac{2}{3}. \blacktriangleright$$

В задачах 3.119–3.124 вычислить пределы.

3.119. $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt{n}(\sqrt{n+2}-\sqrt{n})$. **3.120.** $\lim\limits_{n\to\infty}(\sqrt{n^2+2n-3}-\sqrt{n^2-3n-5})$.

3.121. $\lim\limits_{n\to\infty}n^{2/3}(\sqrt[3]{n-1}-\sqrt[3]{n+7})$. **3.122.** $\lim\limits_{n\to\infty}(\sqrt[3]{n^3+n^2+1}-\sqrt[3]{n^3-2n^2-3})$.

3.123. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\sqrt[3]{8n^3+3n}-2n}{\sqrt{n^2+2n}-n}$. **3.124.** $\lim\limits_{n\to\infty}(\sqrt[3]{n^3-n^2}-\sqrt{n^2+n})$.

Последовательность $\{\alpha_n\}$ называется *бесконечно малой*, если $\lim\limits_{n\to\infty}\alpha_n=0$.

Последовательность $\{\beta_n\}$ называется *бесконечно большой* (сходящейся к бесконечности), что записывается $\lim\limits_{n\to\infty}\beta_n=\infty$, если для любого числа $E>0$ существует номер $N(E)$ такой, что при $n>N(E)$ выполняется неравенство $|\beta_n|>E$. Если для $n>N(E)$ выполняется неравенство $x_n>E$ $(x_n<-E)$, то пишут $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=+\infty$ $(\lim\limits_{n\to\infty}x_n=-\infty)$ и говорят, что последовательность сходится к $+\infty$ $(-\infty)$.

В задачах 3.125–3.130 установить, какие из последовательностей являются бесконечно большими.

3.125. $x_n=2^n$. **3.126.** $x_n=(-1)^n n^2$. **3.127.** $x_n=n\cos\dfrac{\pi n}{2}$.

3.128. $x_n=n^{(-1)^n}$. **3.129.** $x_n=n+\sin n$. **3.130.** $x_n=n+n\cos\pi n$.

При вычислении пределов полезны следующие утверждения относительно бесконечно малых и бесконечно больших последовательностей:

1) если $\{\alpha_n\}$ бесконечно малая последовательность, то $\{1/\alpha_n\}$ является бесконечно большой последовательностью;

2) если $\{\beta_n\}$ бесконечно большая последовательность, то $\{1/\beta_n\}$ является бесконечно малой последовательностью;

3) если последовательность $\{y_n\}$ ограниченная, а $\{\alpha_n\}$ бесконечно малая последовательность, то последовательность $\{\alpha_n \cdot y_n\}$ является бесконечно малой;

4) если последовательность $|y_n| \geq a > 0$, а $\{\beta_n\}$ бесконечно большая последовательность, то последовательность $\{y_n \cdot \beta_n\}$ является бесконечно большой.

ПРИМЕР 3.11. Вычислить $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{2+\sin n}{n}$.

◀ Запишем общий член последовательности в виде произведения:

$$\frac{2+\sin n}{n} = \frac{1}{n}(2+\sin n).$$

Так как $1 \leq 2 + \sin n \leq 3$ при любом n, то последовательность $\{2 + \sin n\}$ ограничена. Поскольку $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1}{n} = 0$, то последовательность $\left\{\dfrac{1}{n}\cdot(2+\sin n)\right\}$ бесконечно малая. Следовательно, $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{2+\sin n}{n} = 0$. ▶

В задачах 3.131–3.136 вычислить пределы.

3.131. $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\sin(2n+1)}{\sqrt{n}}$.

3.132. $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{(n^2+1)(\sin n+\cos n)}{n^3}$.

3.133. $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt{2+\cos n}(\sqrt{n^2+3}-1)$.

3.134. $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\dfrac{3n-1}{2n+3} - \dfrac{3n^2+1}{2n^2-3}\right)$.

3.135. $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{2n^4+n^3}{n^3-n^2+2}$.

3.136. $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\sqrt[3]{n^4+2n^3+1}+n}{\sqrt[4]{n}\cdot\sqrt{n^2+2n+2}-2n}$.

2. Предел функции

Пусть функция $f(x)$ определена в некоторой окрестности точки x_0 за исключением, быть может, самой точки x_0 (т. е. в *проколотой* окрестности точки x_0). Число A называют *пределом функции* $f(x)$ *в точке* x_0 и пишут $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = A$, если для всякого числа $\varepsilon > 0$ найдется число $\delta(\varepsilon) > 0$ такое, что для любого x из этой окрестности, удовлетворяющего условиям $|x - x_0| < \delta(\varepsilon)$, $x \neq x_0$, выполняется неравенство $|f(x) - A| < \varepsilon$ (*определение предела по Коши*).

Определение предела функции можно сформулировать также следующим образом: число A называется пределом функции $f(x)$ в точке x_0, если для любой последовательности $x_n \to x_0$, $x_n \neq x_0$, соответствующая последовательность значений функции $f(x_n) \to A$ (*определение предела по Гейне*). Определение предела функции по Гейне позволяет использовать свойства предела последовательности для вычисления пределов функции.

ПРИМЕР 3.12. Доказать, пользуясь определениями предела функции, что

$$\lim_{x\to 1} \frac{x^2+2x-3}{2x-2} = 2.$$

◀ 1) В соответствии с определением предела по Коши, нужно для каждого $\varepsilon > 0$ найти число $\delta(\varepsilon) > 0$ такое, что для всех x, удовлетворяющих условиям $|x-1| < \delta(\varepsilon)$, $x \neq 1$, выполняется неравенство $\left|\frac{x^2+2x-3}{2x-2}-2\right|<\varepsilon$. При $x \neq 1$ находим

$$\left|\frac{x^2+2x-3}{2x-2}-2\right|<\varepsilon \Leftrightarrow \left|\frac{(x-1)(x+3)}{2(x-1)}-2\right|<\varepsilon \Leftrightarrow \frac{|x-1|}{2}<\varepsilon \Leftrightarrow |x-1|<2\varepsilon.$$

Таким образом, если положить $\delta(\varepsilon) = 2\varepsilon$, то для всех x, удовлетворяющих условиям $|x-1| < \delta(\varepsilon)$, $x \neq 1$, выполняется неравенство $\left|\frac{x^2+2x-3}{2x-2}-2\right|<\varepsilon$, что и требовалось доказать.

2) Возьмем произвольную последовательность $x_n \to 1$, $x_n \neq 1$. Докажем, что $\frac{x_n^2+2x_n-3}{2x_n-2} \to 2$. Если $x_n \neq 1$, то $\frac{x_n^2+2x_n-3}{2x_n-2}=\frac{x_n+3}{2}$. Поэтому, учитывая арифметические свойства сходящихся последовательностей, получим $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{x_n+3}{2}=2$. Следовательно, в силу произвольности выбора последовательности x_n и определения предела по Гейне, заключаем, что $\lim\limits_{x\to 1}\frac{x^2+2x-3}{2x-2}=2$. ▶

В задачах 3.137–3.140, пользуясь определениями предела функции, доказать, что $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=A$.

3.137. $f(x)=x^3$, $x_0=2$, $A=8$. **3.138.** $f(x)=x^2$, $x_0=-3$, $A=9$.

3.139. $f(x)=\sqrt{x}$, $x_0=27$, $A=3$. **3.140.** $f(x)=\frac{1}{x}$, $x_0=\frac{1}{3}$, $A=3$.

Число A называют *пределом функции $f(x)$ при x, стремящемся к бесконечности* (пишут $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=A$), если для любого числа $\varepsilon > 0$ найдется число $\delta(\varepsilon) > 0$ такое, что для всех x, удовлетворяющих неравенству $|x| > \delta(\varepsilon)$, выполняется неравенство $|f(x) - A| < \varepsilon$.

В терминах последовательностей данное определение формулируется следующим образом: число A называют *пределом функции $f(x)$ при x, стремящемся к бесконечности*, если для любой последовательности $x_n \to \infty$ последовательность значений функции $f(x_n) \to A$. Аналогично определяются и обозначаются пределы функции при $x \to +\infty$ и $x \to -\infty$.

Функция $\alpha(x)$ называется *бесконечно малой* при $x \to x_0$, если $\lim\limits_{x\to x_0}\alpha(x)=0$. Функция $\beta(x)$ называется *бесконечно большой* при $x \to x_0$ (x_0 — конечное число), пишут $\lim\limits_{x\to x_0}\beta(x)=\infty$, если для любого числа $\text{E} > 0$ найдется число $\delta(\text{E}) > 0$ такое, что для всех $x \neq x_0$, удовлетворяющих неравенству $|x - x_0| < \delta$, выполняется неравенство $|\beta(x)| > \text{E}$. Функция $\beta(x)$ называется *бесконечно большой* при $x \to \infty$, пишут $\lim\limits_{x\to\infty}\beta(x)=\infty$, если для любого числа $\text{E} > 0$ найдется число $\delta(\text{E}) > 0$ такое, что для всех x, удовлетворяющих неравенству $|x| > \delta$, выполняется неравенство $|\beta(x)| > \text{E}$.

В задачах 3.141–3.146 сформулировать определения указанных пределов.

3.141. $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=A.$ **3.142.** $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=-1.$ **3.143.** $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=5.$

3.144. $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=-\infty.$ **3.145.** $\lim\limits_{x\to 3} f(x)=+\infty.$ **3.146.** $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=\infty.$

В задачах 3.147–3.149, пользуясь определением предела функции, доказать равенства.

3.147. $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{2x+1}{x+3}=2.$ **3.148.** $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{3x+4}{6x-1}=\dfrac{1}{2}.$ **3.149.** $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{4x^2+1}{x^2-1}=4.$

Для исследования функций используют также понятие *одностороннего* предела. Число A называют *пределом функции* $f(x)$ *в точке* x_0 *справа* (*слева*) и пишут $\lim\limits_{x\to x_0+0} f(x)=A$ ($\lim\limits_{x\to x_0-0} f(x)=A$), если для любого числа $\varepsilon>0$ найдется число $\delta(\varepsilon)>0$ такое, что для всех x, удовлетворяющих неравенству $0<x-x_0<\delta(\varepsilon)$ ($-\delta(\varepsilon)<x-x_0<0$), выполняется неравенство $|f(x)-A|<\varepsilon$.

В задачах 3.150–3.153 сформулировать определения указанных пределов.

3.150. $\lim\limits_{x\to1-0} f(x)=2.$ **3.151.** $\lim\limits_{x\to2+0} f(x)=3.$

3.152. $\lim\limits_{x\to-1+0} f(x)=-\infty.$ **3.153.** $\lim\limits_{x\to4-0} f(x)=\infty.$

При вычислении пределов функций, как и в случае последовательностей, применяются свойства предела суммы, разности, произведения и частного двух функций, свойства бесконечно малых и бесконечно больших функций.

ПРИМЕР 3.13. Вычислить предел $\lim\limits_{x\to2}\dfrac{x^3-27}{x^2+4x-21}$.

◄ Применяя свойства о пределе произведения и суммы (разности) функций, находим $\lim\limits_{x\to2}(x^3-27)=8-27=-19$ и $\lim\limits_{x\to2}(x^2+4x-21)=-9$. Следовательно, в силу свойства о пределе частного двух функций, получаем $\lim\limits_{x\to2}\dfrac{x^3-27}{x^2+4x-21}=\dfrac{19}{9}$. ►

ПРИМЕР 3.14. Вычислить предел $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^3-27}{x^2+4x-21}$.

◄ Числитель и знаменатель дроби стремятся к бесконечности при $x\to\infty$. Поэтому сначала преобразуем выражение $\dfrac{x^3-27}{x^2+4x-21}$ к виду

$$\frac{x^3-27}{x^2+4x-21}=\frac{x^3(1-27/x^3)}{x^2(1+4/x-21/x^2)}=\frac{x(1-27/x^3)}{1+4/x-21/x^2}=x\cdot\frac{1-27/x^3}{1+4/x-21/x^2}.$$

В силу свойств бесконечно больших функций и арифметических свойств предела функции $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{1-27/x^3}{1+4/x-21/x^2}=1$. Произведение бесконечно большой функции при

$x \to x_0$ на функцию, предел которой отличен от нуля при $x \to x_0$, также является бесконечно большой функцией при $x \to x_0$. Отсюда окончательно находим

$$\lim_{x\to\infty} \frac{x^3-27}{x^2+4x-21} = \infty. \blacktriangleright$$

В задачах 3.154–3.159 вычислить пределы.

3.154. $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x^2+2x-3}{x^3+3x-5}$. **3.155.** $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{4x^3+6x+7}{3x^3+2x-8}$. **3.156.** $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{2x^7+3x^3+4}{3x^6+x^4+3x^2-2}$.

3.157. $\lim\limits_{x\to 0+} (2+x)^{1/x}$. **3.158.** $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{\sin x + 2\cos x}{x^3+2x+1}$. **3.159.** $\lim\limits_{x\to 6} \dfrac{\sqrt{1+8x}-6}{\sqrt[3]{3+4x}}$.

3. Пределы рациональных дробей и иррациональных выражений

Рациональной дробью называется отношение двух алгебраических многочленов. Если знаменатель рациональной дроби $\dfrac{P_m(x)}{Q_k(x)}$ отличен от нуля при $x = x_0$, то из арифметических свойств предела функции следует $\lim\limits_{x\to x_0} \dfrac{P_m(x)}{Q_k(x)} = \dfrac{P_m(x_0)}{Q_k(x_0)}$. Если $P_m(x_0) \neq 0$, $Q_k(x_0) = 0$, то из свойств бесконечно малых функций вытекает $\lim\limits_{x\to x_0} \dfrac{P_m(x)}{Q_k(x)} = \infty$. Если же числитель и знаменатель рациональной дроби $\dfrac{P_m(x)}{Q_k(x)}$ при $x = x_0$ обращаются в 0, то для вычисления $\lim\limits_{x\to x_0} \dfrac{P_m(x)}{Q_k(x)}$ сначала представляют многочлены $P_m(x)$, $Q_k(x)$ в виде $P_m(x) = (x - x_0)P_{m-1}(x)$, $Q_k(x) = (x - x_0)Q_{k-1}(x)$, получающуюся дробь сокращают на $x - x_0$ и переходят к вычислению $\lim\limits_{x\to x_0} \dfrac{P_{m-1}(x)}{Q_{k-1}(x)}$.

ПРИМЕР 3.15. Вычислить предел $\lim\limits_{x\to 3} \dfrac{x^3-27}{x^2+4x-21}$.

◀ Числитель и знаменатель дроби обращаются в ноль при $x = 3$. Разложим их на множители: $x^3 - 27 = (x-3)(x^2+3x+9)$ и $x^2+4x-21 = (x-3)(x+7)$. Тогда

$$\lim_{x\to 3} \frac{x^3-27}{x^2+4x-21} = \lim_{x\to 3} \frac{(x-3)(x^2+3x+9)}{(x-3)(x+7)} = \lim_{x\to 3} \frac{x^2+3x+9}{x+7} = \frac{27}{10}. \blacktriangleright$$

В задачах 3.160–3.177 вычислить пределы рациональных выражений.

3.160. $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{3x^2-24}{x^3+x-6}$. **3.161.** $\lim\limits_{x\to -1} \dfrac{x^2-1}{x^2+1}$.

3.162. $\lim\limits_{x\to 5} \dfrac{x^2-x+10}{x^2-2x-15}$. **3.163.** $\lim\limits_{x\to 4} \dfrac{x^2-6x+8}{x^2-3x-4}$.

3.164. $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{(1+x)(1+2x)(1+3x)-105}{x-2}$. **3.165.** $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{(1+x)^2-(1+5x)}{x+x^5}$.

3.166. $\lim\limits_{x\to 1}\left(\dfrac{6}{1-x^6}-\dfrac{4}{1-x^4}\right).$

3.167. $\lim\limits_{x\to 1}\left(\dfrac{3}{1-x^3}-\dfrac{2}{1-x^2}\right).$

3.168. $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{x^3+3x+4}{x^4-4x-5}.$

3.169. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^4-3x+2}{x^5-4x+3}.$

3.170. $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{x^5+1}{x^7+1}.$

3.171. $\lim\limits_{x\to \sqrt{2}}\dfrac{x^2-2}{x^4+x^2-6}.$

3.172. $\lim\limits_{x\to \infty}\dfrac{3x^4-5x}{x^4+8x^2+1}.$

3.173. $\lim\limits_{x\to \infty}\dfrac{(x-1)(x-2)(x-3)(x-4)}{3x^4+8x+1}.$

3.174. $\lim\limits_{x\to \infty}\dfrac{x^5+2x+3}{x^3+2x-1}.$

3.175. $\lim\limits_{x\to \infty}\dfrac{x^8+1}{10x^9+3x^2+2}.$

3.176. $\lim\limits_{x\to 1}\left(\dfrac{x+2}{x^2-5x+4}+\dfrac{x-4}{3(x^2-3x+2)}\right).$

3.177. $\lim\limits_{x\to \infty}\left(\dfrac{x^3+x}{2x^2+3}-\dfrac{2x^2+1}{4x+3}\right).$

При вычислении пределов иррациональных выражений часто используются следующие приемы:

а) введение новой переменной для избавления от иррациональности;

б) умножение и деление иррационального выражения на выражение, сопряженное к числителю или знаменателю.

ПРИМЕР 3.16. Вычислить предел $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{x^2+4}-2}{\sqrt{x^2+9}-3}.$

◄ Умножив числитель и знаменатель на $(\sqrt{x^2+4}+2)(\sqrt{x^2+9}+3)$, получим

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{x^2+4}-2}{\sqrt{x^2+9}-3}=\lim_{x\to 0}\frac{(\sqrt{x^2+4}-2)(\sqrt{x^2+4}+2)(\sqrt{x^2+9}+3)}{(\sqrt{x^2+9}-3)(\sqrt{x^2+4}+2)(\sqrt{x^2+9}+3)}=$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{x^2(\sqrt{x^2+9}+3)}{x^2(\sqrt{x^2+4}+2)}=\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{x^2+9}+3}{\sqrt{x^2+4}+2}=\frac{6}{4}=\frac{3}{2}. \blacktriangleright$$

ПРИМЕР 3.17. Вычислить предел $\lim\limits_{x\to 64}\dfrac{\sqrt{x}-8}{\sqrt[3]{x}-4}.$

◄ Сделаем замену $x = t^6$, $t \to 2$. Получим

$$\lim_{x\to 64}\frac{\sqrt{x}-8}{\sqrt[3]{x}-4}=\lim_{t\to 2}\frac{t^3-8}{t^2-4}=\lim_{t\to 2}\frac{(t-2)(t^2+2t+4)}{(t-2)(t+2)}=\lim_{t\to 2}\frac{t^2+2t+4}{t+2}=3. \blacktriangleright$$

В задачах 3.178–3.189 вычислить пределы иррациональных выражений.

3.178. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{x^2+1}-1}{3x}.$

3.179. $\lim\limits_{x\to 5}\dfrac{\sqrt{x-1}-2}{x-5}.$

3.180. $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{\sqrt[3]{x+25}-3}{x^3-8}.$

3.181. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sqrt[3]{7+x^3}-2}{x-1}.$

3.182. $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{\sqrt{5x+1}-4}{\sqrt[3]{8x+3}-3}.$

3.183. $\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{\sqrt{x}-\sqrt[3]{x+4}}{x-4}.$

3.184. $\lim\limits_{x\to \infty}(\sqrt{4x^2+2x-3}-2x).$

3.185. $\lim\limits_{x\to \infty}(\sqrt{x^2+2x}-\sqrt{x^2+x}).$

3.186. $\lim\limits_{x\to\infty}(\sqrt[3]{x^3+x+1}-\sqrt[3]{x^3-x+1})$. **3.187.** $\lim\limits_{x\to\infty}\sqrt[3]{x}\left(\sqrt[3]{(x+1)^2}-\sqrt[3]{(x-1)^2}\right)$.

3.188. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\sqrt{x^2+3x}+\sqrt{x}}{\sqrt[4]{x^4+2x+1}+2x}$. **3.189.** $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\sqrt[3]{x^2+8\sqrt{x}}}{\sqrt[4]{16x^3+3}+\sqrt[5]{x^4+1}}$.

4. Замечательные пределы

Первым замечательным пределом называется равенство $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sin x}{x}=1$. Из этого равенства следует, что $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{\sin\alpha(x)}{\alpha(x)}=1$, если $\alpha(x)\to0$ при $x\to x_0$, $\alpha(x)\neq0$ в некоторой проколотой окрестности точки x_0. Именно в такой форме первый замечательный предел часто используется при вычислении пределов тригонометрических выражений.

ПРИМЕР 3.18. Вычислить $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sin5x}{x}$.

◀ Так как $5x\to0$ при $x\to0$ и $5x\neq0$, если $x\neq0$, то $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sin5x}{5x}=1$. Следовательно,

$$\lim_{x\to0}\frac{\sin5x}{x}=\lim_{x\to0}\frac{5\sin5x}{5x}=5. \blacktriangleright$$

ПРИМЕР 3.19. Вычислить $\lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt{8x+1}\sin\dfrac{1}{\sqrt{2x}}$.

◀ Так как $1/\sqrt{2x}\to0$ при $x\to+\infty$ и $1/\sqrt{2x}\neq0$, то $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\sin(1/\sqrt{2x})}{1/\sqrt{2x}}=1$. Следовательно,

$$\lim_{x\to+\infty}\sqrt{8x+1}\sin\frac{1}{\sqrt{2x}}=\lim_{x\to+\infty}\sqrt{8x+1}\frac{\sin(1/\sqrt{2x})}{\sqrt{2x}\cdot(1/\sqrt{2x})}=$$
$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{\sin(1/\sqrt{2x})}{1/\sqrt{2x}}\cdot\lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{8x+1}}{\sqrt{2x}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{x}\cdot\sqrt{8+1/x}}{\sqrt{x}\cdot\sqrt{2}}=2. \blacktriangleright$$

В задачах 3.190–3.204 вычислить пределы, используя первый замечательный предел.

3.190. $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\operatorname{tg}x}{x}$. **3.191.** $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{1-\cos x}{x^2}$. **3.192.** $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\arcsin4x}{x}$.

3.193. $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\operatorname{arctg}3x}{8x}$. **3.194.** $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{3x}{\sin5x}$. **3.195.** $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\operatorname{tg}3x}{\sin5x}$.

3.196. $\lim\limits_{x\to\pi}\dfrac{\sin3x}{x-\pi}$. **3.197.** $\lim\limits_{x\to\pi/2}\dfrac{\operatorname{ctg}x}{\sin6x}$. **3.198.** $\lim\limits_{x\to2\pi}(x-2\pi)\operatorname{ctg}3x$.

3.199. $\lim\limits_{x\to\pi/3}\dfrac{2\cos x-1}{x-\pi/3}$. **3.200.** $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sin5x-\sin3x}{\sin x}$. **3.201.** $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\cos x-\cos3x}{x^2}$.

3.202. $\lim\limits_{x\to0}\left(\operatorname{ctg}x-\dfrac{1}{\sin x}\right)$. **3.203.** $\lim\limits_{x\to\pi/2}\left(\dfrac{\pi}{\cos x}-2x\operatorname{tg}x\right)$.

3.204. $\lim\limits_{x\to\infty}(\sin\sqrt{x+1}-\sin\sqrt{x})$.

Вторым замечательным пределом называют равенство $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^x=e$ или равенство $\lim\limits_{x\to 0}(1+x)^{1/x}=e$. Отсюда следует, что $\lim\limits_{x\to x_0}\left(1+\dfrac{1}{\beta(x)}\right)^{\beta(x)}=e$, если $\beta(x)$ является бесконечно большой функцией при $x\to x_0$, и $\lim\limits_{x\to x_0}(1+\alpha(x))^{1/\alpha(x)}=e$, если $\alpha(x)\neq 0$ — бесконечно малая функция при $x\to x_0$. Данные соотношения применяются при вычислении пределов вида $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)^{g(x)}$, где $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=1$, $\lim\limits_{x\to x_0} g(x)=\infty$.

ПРИМЕР 3.20. Вычислить предел $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x+4}{x+2}\right)^{2x}$.

◀ Здесь $f(x)=\dfrac{x+4}{x+2}\to 1$ и $g(x)=2x\to\infty$ при $x\to\infty$. Запишем $f(x)$ в виде $1+\dfrac{1}{\beta(x)}$, где $\beta(x)\to\infty$ при $x\to\infty$. Имеем $\dfrac{x+4}{x+2}=1+\dfrac{x+4}{x+2}-1=1+\dfrac{2}{x+2}$. Получили $\beta(x)=\dfrac{x+2}{2}\to\infty$. Так как $\lim\limits_{x\to x_0}(u(x))^{t(x)}=\left(\lim\limits_{x\to x_0} u(x)\right)^{\lim\limits_{x\to x_0} t(x)}=A^B$, если $\lim\limits_{x\to x_0} u(x)=A>0$, $A\neq 1$, и $\lim\limits_{x\to x_0} t(x)=B<\infty$, то в силу второго замечательного предела

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x+4}{x+2}\right)^{2x}=\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{2}{x+2}\right)^{2x}=\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{2}{x+2}\right)^{\frac{x+2}{2}\cdot\frac{2}{x+2}\cdot 2x}=$$

$$=\lim_{x\to\infty}\left(\left(1+\frac{2}{x+2}\right)^{\frac{x+2}{2}}\right)^{\frac{4x}{x+2}}=\left(\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{2}{x+2}\right)^{\frac{x+2}{2}}\right)^{\lim\limits_{x\to\infty}\frac{4x}{x+2}}=e^4. ▶$$

ПРИМЕР 3.21. Вычислить предел $\lim\limits_{x\to\pi/2}(1+\cos x)^{\frac{1}{\cos 5x}}$.

◀ Используя второй замечательный предел в виде $\lim\limits_{x\to x_0}(1+\alpha(x))^{1/\alpha(x)}=e$, где $\alpha(x)\neq 0$ — бесконечно малая функция при $x\to x_0$, получаем

$$\lim_{x\to\pi/2}(1+\cos x)^{\frac{1}{\cos 5x}}=\lim_{x\to\pi/2}\left((1+\cos x)^{\frac{1}{\cos x}}\right)^{\frac{\cos x}{\cos 5x}}=$$

$$=\left(\lim_{x\to\pi/2}(1+\cos x)^{\frac{1}{\cos x}}\right)^{\lim\limits_{x\to\pi/2}\frac{\cos x}{\cos 5x}}=e^{\lim\limits_{x\to\pi/2}\frac{\cos x}{\cos 5x}}.$$

Так как $\lim\limits_{x\to\pi/2}\dfrac{\cos x}{\cos 5x}=\lim\limits_{t\to 0}\dfrac{\cos\left(\dfrac{\pi}{2}-t\right)}{\cos\left(\dfrac{5\pi}{2}-5t\right)}=\lim\limits_{t\to 0}\dfrac{\sin t}{\sin 5t}=\dfrac{1}{5}$, то окончательно выводим $\lim\limits_{x\to\pi/2}(1+\cos x)^{\frac{1}{\cos 5x}}=\sqrt[5]{e}$. ▶

В задачах 3.205–3.208 доказать следствия из второго замечательного предела.

3.205. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1+x)}{x}=1$. **3.206.** $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\log_a(1+x)}{x}=\dfrac{1}{\ln a}$.

3.207. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{a^x-1}{x}=\ln a$. **3.208.** $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(1+x)^\alpha-1}{x}=\alpha$.

В задачах 3.209–3.229, используя второй замечательный предел, а также следствия из него (задачи 3.205–3.208), вычислить пределы.

3.209. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{2x+3}{2x-5}\right)^{4x+8}$.

3.210. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{5x+7}{5x-10}\right)^{4x-15}$.

3.211. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x^2+2x}{x^2-3x-2}\right)^{4x}$.

3.212. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x^2-3x+3}{x^2+4x-2}\right)^{2x+3}$.

3.213. $\lim\limits_{x\to 0}(1+x^2)^{\operatorname{ctg}^2\pi x}$.

3.214. $\lim\limits_{x\to 0}(1+\sin x)^{1/\sin 3x}$.

3.215. $\lim\limits_{x\to\pi}(1+\sin x)^{1/(x-\pi)}$.

3.216. $\lim\limits_{x\to\pi/4}(\operatorname{tg}x)^{\operatorname{tg}2x}$.

3.217. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\cos\dfrac{1}{x}\right)^{x^2}$.

3.218. $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{3^x+2^x}{3^x-2^x}\right)^{3^x}$.

3.219. $\lim\limits_{x\to+\infty}x(\ln(2+x)-\ln x)$.

3.220. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1}{x}\ln\sqrt{\dfrac{1+x}{1-x}}$.

3.221. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{ax}-e^{bx}}{x}$.

3.222. $\lim\limits_{x\to b}\dfrac{a^x-a^b}{x-b}$.

3.223. $\lim\limits_{x\to 10}\dfrac{\lg x-1}{x-10}$.

3.224. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln\cos x}{x^2}$.

3.225. $\lim\limits_{x\to\infty}x(a^{1/x}-1)$.

3.226. $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{\sin x}{x}\right)^{\frac{\sin x}{x-\sin x}}$.

3.227. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt[10]{1+\sin x}-1}{\sin x}$.

3.228. $\lim\limits_{x\to\infty}\sqrt{x^7}\left(\sqrt[8]{x^4+x-1}-\sqrt[8]{x^4+x}\right)$.

3.229. $\lim\limits_{x\to 0}(\ln(e+x))^{\operatorname{ctg}x}$.

ПРИМЕР 3.22. Найти односторонние пределы $\lim\limits_{x\to\pm 0}2^{1/x}$.

◀ Если $x\to -0$, то $1/x\to-\infty$ и, в силу свойств показательной функции, $\lim\limits_{x\to -0}2^{1/x}=0$. Если $x\to +0$, то $1/x\to+\infty$ и $\lim\limits_{x\to +0}2^{1/x}=+\infty$. ▶

В задачах 3.230–3.235 найти односторонние пределы.

3.230. $\lim\limits_{x\to 3\pm 0}\dfrac{|x-3|}{x-3}$. **3.231.** $\lim\limits_{x\to 2\pm 0}\dfrac{2+x}{4-x^2}$. **3.232.** $\lim\limits_{x\to -1\pm 0}7^{\frac{x}{x^2-1}}$.

3.233. $\lim\limits_{x\to\pi/4\pm 0}\dfrac{|\operatorname{tg}(4x-\pi)|}{2x-\pi/2}$. **3.234.** $\lim\limits_{x\to\pm 0}\operatorname{sgn}(\sin x)$. **3.235.** $\lim\limits_{x\to 1\pm 0}\operatorname{arctg}\dfrac{1}{1-x}$.

5. Сравнение функций

Бесконечно малые функции $\alpha(x)$ и $\beta(x)$ называются *сравнимыми при* $x \to x_0$, если существует хотя бы один из пределов $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{\alpha(x)}{\beta(x)}$ или $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{\beta(x)}{\alpha(x)}$.

Пусть $\alpha(x)$ и $\beta(x)$ — сравнимые бесконечно малые при $x \to x_0$ и пусть, для определенности, существует $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{\alpha(x)}{\beta(x)}=C$. Тогда:

а) Если $C \neq 0$, то $\alpha(x)$ и $\beta(x)$ называют бесконечно малыми *одного порядка*. В частности, если $C = 1$, то бесконечно малые $\alpha(x)$ и $\beta(x)$ называют *эквивалентными* и пишут $\alpha(x) \sim \beta(x)$, $x \to x_0$.

б) Если $C = 0$, то $\alpha(x)$ называют бесконечно малой *более высокого порядка*, *чем* $\beta(x)$. В этом случае используют обозначение $\alpha(x) = o(\beta(x))$, $x \to x_0$, и говорят, что $\alpha(x)$ есть *о-малое* относительно $\beta(x)$ при $x \to x_0$.

Если существует действительное число $r > 0$ такое, что $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{\alpha(x)}{(\beta(x))^r}=C\neq 0$, то $\alpha(x)$ называют бесконечно малой *порядка r* относительно $\beta(x)$, $x \to x_0$.

ПРИМЕР 3.23. Найти порядок малости $\alpha(x)=\dfrac{3x\cdot\sqrt[3]{x-1}}{4+x}$ относительно $\beta(x) = x - 1$ при $x \to 1$.

◄ По определению, нужно найти такое $r > 0$, чтобы $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\alpha(x)}{(x-1)^r}$ был конечен и отличен от нуля:

$$\lim_{x\to 1}\frac{3x\cdot\sqrt[3]{x-1}}{(4+x)(x-1)^r}=\lim_{x\to 1}\frac{3x}{4+x}\cdot\lim_{x\to 1}\frac{\sqrt[3]{x-1}}{(x-1)^r}=\frac{3}{5}\lim_{x\to 1}(x-1)^{\frac{1}{3}-r}=\frac{3}{5},$$

если $r = 1/3$. При других значениях r предел равен нулю или бесконечности. Следовательно, порядок малости $r = 1/3$. ►

В задачах 3.236–3.247 определить порядок малости $\alpha(x)$ относительно $\beta(x) = x - x_0$ при $x \to x_0$.

3.236. $\alpha(x)=\dfrac{\sin^2 3x}{\cos x}$, $x_0 = 0$. **3.237.** $\alpha(x) = \cos x - 1$, $x_0 = 0$.

3.238. $\alpha(x)=\dfrac{\ln(1+2\sqrt{x})}{1-x}$, $x_0 = 0$. **3.239.** $\alpha(x)=4^{\sqrt{3x}}-1$, $x_0 = 0$.

3.240. $\alpha(x)=\dfrac{\sqrt{1+x^3}-1}{x}$, $x_0 = 0$. **3.241.** $\alpha(x)=\sqrt{5x-1}-\sqrt{4x+1}$, $x_0 = 2$.

3.242. $\alpha(x)=\dfrac{\sqrt{x-1}}{\sin x}$, $x_0 = 1$. **3.243.** $\alpha(x)=\sqrt[3]{x^2}-\sqrt{x^3}$, $x_0 = 0$.

3.244. $\alpha(x) = \mathrm{tg}^3 x - \sin^2 x$, $x_0 = 0$. **3.245.** $\alpha(x) = e^x - \cos x$, $x_0 = 0$.

3.246. $\alpha(x) = \mathrm{tg}\, x - \sin x$, $x_0 = \pi$. **3.247.** $\alpha(x) = \mathrm{tg}\, x - \sin x$, $x_0 = 2\pi$.

В задачах 3.248–3.251 доказать, что разность $\alpha(x) - \beta(x)$ имеет 2-й порядок малости относительно x при $x \to 0$.

3.248. $\alpha(x) = 1/(1 + x)$, $\beta(x) = 1 - x$.

3.249. $\alpha(x) = \sqrt{a^2 + x}$, $\beta(x) = a + \dfrac{x}{2a}$ $(a \neq 0)$.

3.250. $\alpha(x) = \sqrt[3]{a^3 + x}$, $\beta(x) = a + \dfrac{x}{3a^2}$ $(a \neq 0)$.

3.251. $\alpha(x) = (1 + x)^n$, $\beta(x) = 1 + nx$ $(n \in \mathbb{N})$.

В задачах 3.252–3.257, используя результаты задач 3.248–3.251, приближенно вычислить выражения и сравнить полученные значения с результатами вычислений на калькуляторе.

3.252. 1/1,02. **3.253.** 1/0,95. **3.254.** $\sqrt{24}$.

3.255. $\sqrt[3]{67}$. **3.256.** $1{,}04^5$. **3.257.** $0{,}99^8$.

Понятие эквивалентности бесконечно малых применяется при вычислении пределов. Если $\alpha(x) \sim \alpha_1(x)$ и $\beta(x) \sim \beta_1(x)$ при $x \to x_0$, то пределы $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{\alpha(x)}{\beta(x)}$ и $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{\alpha_1(x)}{\beta_1(x)}$ существуют одновременно и

$$\lim_{x\to x_0}\frac{\alpha(x)}{\beta(x)} = \lim_{x\to x_0}\frac{\alpha_1(x)}{\beta_1(x)}.$$

Часто используют следующие эквивалентности при $x \to 0$:

$$\sin x \sim x,\ 1-\cos x \sim \frac{x^2}{2},\ \operatorname{tg} x \sim x,\ a^x - 1 \sim x\ln a,\ \log_a(1+x) \sim \frac{x}{\ln a},$$
$$(1+x)^\alpha - 1 \sim \alpha x,\ \operatorname{arctg} x \sim x.$$

ПРИМЕР 3.24. Вычислить $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1+\sin 2x^2)}{1-\cos\operatorname{tg} x}$.

◀ Так как $\sin 2x^2 \to 0$ и $\operatorname{tg} x \to 0$ при $x \to 0$, то $\ln(1 + \sin 2x^2) \sim \sin 2x^2$ и $1-\cos\operatorname{tg} x \sim \dfrac{\operatorname{tg}^2 x}{2}$. Далее, $\sin 2x^2 \sim 2x^2$ и $\operatorname{tg} x \sim x$ при $x \to 0$. Следовательно,

$$\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+\sin 2x^2)}{1-\cos\operatorname{tg} x} = \lim_{x\to 0}\frac{2\sin 2x^2}{\operatorname{tg}^2 x} = \lim_{x\to 0}\frac{4x^2}{x^2} = 4. ▶$$

В задачах 3.258–3.265 вычислить пределы, используя понятие эквивалентности.

3.258. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos^3 x}{4x^2}$. **3.259.** $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos 2x}{\cos 7x-\cos 3x}$.

3.260. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{4x}-1}{\operatorname{tg} 3x}$. **3.261.** $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{x^2}-e^{-x^2}}{\sqrt{1+4x^2}-1}$.

3.262. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\operatorname{tg} x-\sin x}{\sin^6\sqrt{x}}$. **3.263.** $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1+\sin 2x}-\sqrt{1-\sin 2x}}{\operatorname{tg} x}$.

3.264. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1+\operatorname{arctg} 5x)}{\sqrt[4]{x+81}-3}$. **3.265.** $\lim\limits_{x\to 10}\dfrac{\lg x-1}{\sqrt{x-9}-1}$.

Аналогично сравнению бесконечно малых функций можно сравнивать бесконечно большие функции. Если $A(x)$ и $B(x)$ — бесконечно большие функции при $x \to x_0$ и существует действительное число $r > 0$ такое, что $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{A(x)}{(B(x))^r} = C \neq 0$, то говорят, что $A(x)$ имеет r-й порядок роста относительно $B(x)$, $x \to x_0$.

В задачах 3.266–3.271 определить порядок роста бесконечно большой $A(x)$ относительно $B(x) = x$ при $x \to \infty$.

3.266. $A(x) = x^3 + 10x^2 + 100x$. **3.267.** $A(x) = \sqrt{x^4 - x^2 + 3} + x$.

3.268. $A(x) = \sqrt{x + x\sqrt{x}}$. **3.269.** $A(x) = x\left(\sqrt[3]{x^3 + x^2 + 2} - \sqrt[3]{x^3 + 1}\right)$.

3.270. $A(x) = \dfrac{4x^3 - 3x^2 - 2}{5x + 1}$. **3.271.** $A(x) = \dfrac{\sqrt[3]{x^5} + 1}{\sqrt[5]{x^3} + 1}$.

6. Дополнительные задачи

Справедливы следующие важные утверждения:

1) ТЕОРЕМА СУЩЕСТВОВАНИЯ ПРЕДЕЛА У МОНОТОННОЙ ОГРАНИЧЕННОЙ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТИ. *Если последовательность x_n не убывает (не возрастает) и ограничена сверху (снизу) числом $M(m)$, то она имеет предел, причем $x_k \le \lim\limits_{n \to \infty} x_n \le M$ $(x_k \ge \lim\limits_{n \to \infty} x_n \ge m)$ для любого номера k.*

2) КРИТЕРИЙ КОШИ СУЩЕСТВОВАНИЯ ПРЕДЕЛА ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТИ. *Последовательность x_n сходится тогда и только тогда, когда она является фундаментальной, то есть для любого числа $\varepsilon > 0$ существует номер $N(\varepsilon)$ такой, что для всех $n > N(\varepsilon)$ неравенство $|x_{n+p} - x_n| < \varepsilon$ выполняется при любом $p \in \mathbb{N}$.*

В задачах 3.272–3.275 доказать, что указанные последовательности имеют предел, и вычислить его.

3.272. $x_n = \dfrac{n}{2^n}$. **3.273.** $x_n = \dfrac{2^n}{n!}$.

3.274. $x_1 = \sqrt{2}$, $x_{n+1} = \sqrt{2 + x_n}$, $n \ge 1$. **3.275.** $x_1 > 0$, $x_{n+1} = \dfrac{1}{2}\left(x_n + \dfrac{a}{x_n}\right)$, $n \ge 1$.

В задачах 3.276–3.279 выяснить, является ли заданная последовательность фундаментальной.

3.276. $x_n = \sum\limits_{k=1}^{n} \dfrac{1}{k^2}$. **3.277.** $x_n = \sum\limits_{k=1}^{n} \dfrac{1}{k}$. **3.278.** $x_n = \sin n$. **3.279.** $x_n = \sum\limits_{k=1}^{n} \dfrac{\cos k}{k^2}$.

В задачах 3.280, 3.281 вычислить пределы.

3.280. $\lim\limits_{n \to \infty} \left(\dfrac{1}{n^2} + \dfrac{2}{n^2} + \ldots + \dfrac{n-1}{n^2}\right)$. **3.281.** $\lim\limits_{n \to \infty} \left(\dfrac{1}{1 \cdot 2} + \dfrac{1}{2 \cdot 3} + \ldots + \dfrac{1}{n(n+1)}\right)$.

В задачах 3.282, 3.283 доказать утверждения.

3.282. $\lim\limits_{n \to \infty} \sqrt[n]{a} = 1$, $a > 0$. **3.283.** $\lim\limits_{n \to \infty} \sqrt[n]{n} = 1$.

§ 3.3.
НЕПРЕРЫВНОСТЬ

1. Непрерывность функции в точке

Функция $f(x)$ называется *непрерывной* в точке x_0, если:

1) функция $f(x)$ определена в точке x_0; 2) существует $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$; 3) $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=f(x_0)$.

Если $\lim\limits_{x\to x_0+0} f(x)=f(x_0)$ ($\lim\limits_{x\to x_0-0} f(x)=f(x_0)$), то функция $f(x)$ называется *непрерывной справа* (*слева*) в точке x_0.

Элементарные функции непрерывны в каждой точке области определения.

Так как предел функции $f(x)$ в точке x_0 существует тогда и только тогда, когда существуют в этой точке односторонние пределы функции и они равны, то для того, чтобы функция $f(x)$ была непрерывной в точке x_0, необходимо и достаточно, чтобы выполнялись равенства $\lim\limits_{x\to x_0-0} f(x)=\lim\limits_{x\to x_0+0} f(x)=f(x_0)$.

ПРИМЕР 3.25. При каком выборе параметра a функция $f(x)$ будет непрерывна?

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{1-\cos 2x}{x^2}, & x\neq 0,\\ a, & x=0.\end{cases}$$

◀ Нетрудно видеть, что функция непрерывна в любой точке $x\neq 0$. Исследуем функцию на непрерывность в точке $x = 0$. Найдем предел $f(x)$ при $x\to 0$. Используя первый замечательный предел, получаем $\lim\limits_{x\to 0} f(x)=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos 2x}{x^2}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2\sin^2 x}{x^2}=2$. Так как по определению непрерывности функции в точке предел функции в точке и значение ее в этой точке должны совпадать, то заключаем, что функция $f(x)$ будет непрерывной при $a = 2$. ▶

В задачах 3.284–3.287 найти значения параметра a, при которых функция $f(x)$ непрерывна.

3.284. $f(x)=\begin{cases}\dfrac{x^2-4}{x-2}, & x\neq 2,\\ a, & x=2.\end{cases}$

3.285. $f(x)=\begin{cases}\dfrac{\sqrt{1+x}-1}{x}, & x\neq 0,\\ a, & x=0.\end{cases}$

3.286. $f(x)=\begin{cases}2x, & x<3,\\ a(2-x), & x\geq 3.\end{cases}$

3.287. $f(x)=\begin{cases}x\sin\dfrac{1}{x}, & x\neq 0,\\ a, & x=0.\end{cases}$

Функция $f(x)$ называется *непрерывной на интервале* (a, b), если она непрерывна в каждой точке этого интервала. Функция $f(x)$ называется *непрерывной на отрезке* $[a, b]$, если она непрерывна на интервале (a, b) и непрерывна в точке a справа, в точке b слева.

Функция $f(x)$ называется *равномерно непрерывной* на множестве D, если для любого $\varepsilon > 0$ найдется $\delta(\varepsilon) > 0$ такое, что для любых двух точек x' и $x'' \in D$ из неравенства $|x' - x''| < \delta$ следует неравенство $|f(x') - f(x'')| < \varepsilon$.

ТЕОРЕМА КАНТОРА. *Если функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a, b]$, то она равномерно непрерывна на этом отрезке.*

В задачах 3.288–3.291 доказать, что функции равномерно непрерывны на заданных множествах.

3.288. $f(x)=\dfrac{x}{4-x^2}$, $D=[-1,1]$. **3.289.** $f(x)=\begin{cases}\dfrac{\sin x}{x}, & 0<x\le\pi,\\ 1, & x=0.\end{cases}$

3.290. $f(x)=\sqrt{x}$, $D=[1,+\infty)$. **3.291.** $f(x)=\dfrac{1}{1+x^2}$, $D=(-\infty,+\infty)$.

3.292. Сформулировать на языке «ε–δ» утверждение: функция $f(x)$ не является равномерно непрерывной на множестве D.

В задачах 3.293, 3.294 доказать, что каждая из указанных функций не является равномерно непрерывной на заданном множестве.

3.293. $f(x)=\sin\dfrac{1}{x}$, $D=(0,1]$. **3.294.** $f(x)=\dfrac{1}{x^2}$, $D=(0,+\infty)$.

2. Точки разрыва и их классификация

Если хотя бы одно из условий 1)–3) в определении непрерывности нарушено (см. п. 1), то x_0 называется *точкой разрыва* функции $f(x)$. При этом различают следующие случаи:

а) Если $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$ существует, но функция не определена в точке x_0 или определена, но $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)\ne f(x_0)$, то точка x_0 называется точкой *устранимого разрыва*.

б) Если $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$ не существует, но существуют односторонние пределы, причем $\lim\limits_{x\to x_0-0} f(x)\ne \lim\limits_{x\to x_0+0} f(x)$, то x_0 называется точкой *разрыва первого рода*.

в) Во всех остальных случаях x_0 называется точкой *разрыва второго рода*.

ПРИМЕР 3.26. Найти и классифицировать точки разрыва следующих функций:

$$\text{а) } f(x)=\frac{\sin x}{x^2-x};\quad \text{б) } f(x)=\frac{|x-2|}{x-2}.$$

◄ а) Функция $\dfrac{\sin x}{x^2-x}$ является элементарной и не определена в точках $x=0$ и $x=1$. Поэтому эти точки будут ее точками разрыва. Для определения характера точек разрыва найдем пределы функции в точках $x=0$ и $x=1$. В точке $x=0$ имеем $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x^2-x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x(x-1)}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x}\cdot\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1}{x-1}=-1.$ Поэтому данная точка является устранимой точкой разрыва. При $x\to 1$ числитель $\sin x\to\sin 1\ne 0$, а знаменатель $x^2-x\to 0$. Следовательно, $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x^2-x}=\infty.$ Поэтому точка $x=1$ является точкой разрыва второго рода.

б) Функция не определена при $x = 2$. Найдем односторонние пределы:

$$\lim_{x\to 2-0}\frac{|x-2|}{x-2}=\lim_{x\to 2-0}\frac{2-x}{x-2}=-1;\quad \lim_{x\to 2+0}\frac{|x-2|}{x-2}=\lim_{x\to 2+0}\frac{x-2}{x-2}=1.$$

Так как в точке $x = 2$ односторонние пределы существуют, но не равны, то точка $x_0 = 2$ является точкой разрыва первого рода. ►

В задачах 3.295–3.304 найти и классифицировать точки разрыва функций.

3.295. $f(x)=\dfrac{1}{x^2(x-1)}$.

3.296. $f(x)=\dfrac{x^2+3x-4}{x^2+2x-3}$.

3.297. $f(x)=\dfrac{1-\cos 2x}{x}$.

3.298. $f(x)=\dfrac{\ln(1+2x^2)}{x^2(x-1)}$.

3.299. $f(x)=3^{x/(4-x^2)}$.

3.300. $f(x)=e^{-1/x^2}$.

3.301. $f(x)=\operatorname{arctg}\dfrac{1}{x}$.

3.302. $f(x)=\dfrac{1}{x}\ln\dfrac{1+x}{1-x}$.

3.303. $f(x)=\begin{cases}2^x, & x<2,\\ x+2, & x>2,\\ 3, & x=2.\end{cases}$

3.304. $f(x)=\operatorname{sgn}(\cos x)$.

§ 3.4. ПРОИЗВОДНАЯ И ДИФФЕРЕНЦИАЛ

1. Понятие производной

Пусть функция $y = f(x)$ определена в некоторой окрестности точки x_0. Величину $\Delta y = \Delta f(x_0) = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)$ называют приращением функции в точке x_0 (соответствующим приращению аргумента Δx). *Производной* функции $y = f(x)$ в точке x_0 (первой производной или производной 1-го порядка) называется предел

$$f'(x_0)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta f(x_0)}{\Delta x}.$$

Производную также обозначают $\dfrac{dy}{dx}$. Числа $f'_-(x_0)=\lim\limits_{\Delta x\to -0}\dfrac{\Delta f(x_0)}{\Delta x}$ и $f'_+(x_0)=\lim\limits_{\Delta x\to +0}\dfrac{\Delta f(x_0)}{\Delta x}$ называют соответственно *левой и правой* (*односторонними*) *производными* функции $f(x)$ в точке x_0. Для существования производной функции в точке необходимо и достаточно, чтобы ее левая и правая производные в этой точке существовали и были равны.

Процесс нахождения производных называют *дифференцированием*.

ПРИМЕР 3.27. Вычислить $f'(2)$, если $f(x)=\dfrac{1}{x}$.

◄ Найдем приращение заданной функции:

$$\Delta f(2)=f(2+\Delta x)-f(2)=\frac{1}{2+\Delta x}-\frac{1}{2}=\frac{2-2-\Delta x}{2(2+\Delta x)}=\frac{-\Delta x}{2(2+\Delta x)}.$$

Следовательно, по определению производной:

$$f'(2)=\lim_{\Delta x\to 0}\left(\frac{-\Delta x}{2(2+\Delta x)}:\Delta x\right)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{-1}{2(2+\Delta x)}=-\frac{1}{4}.\ ►$$

ПРИМЕР 3.28. Вычислить $f'_-(0)$ и $f'_+(0)$, если $f(x)=\begin{cases}2x+1, & x\le 0,\\ x^2+1, & x>0.\end{cases}$

◀ Имеем по определению

$$f'_-(0)=\lim_{\Delta x\to -0}\frac{2(0+\Delta x)+1-1}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to -0}\frac{2\Delta x}{\Delta x}=-2$$

и

$$f'_+(x_0)=\lim_{\Delta x\to +0}\frac{(0+\Delta x)^2+1-1}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to +0}\frac{(\Delta x)^2}{\Delta x}=0.$$

Заметим, что заданная функция не имеет производной в нуле, так как

$$-2=f'_-(0)\ne f'_+(0)=0. \blacktriangleright$$

В задачах 3.305–3.314, пользуясь определением производной, вычислить $f'(x)$.

3.305. $f(x) = x^2$. **3.306.** $f(x) = x^3$.

3.307. $f(x)=\sqrt{x}$. **3.308.** $f(x)=\sqrt[3]{x}$.

3.309. $f(x) = \cos x$. **3.310.** $f(x) = \operatorname{tg} x$.

3.311. $f(x) = 2^x + 2x$. **3.312.** $f(x) = 3^x + 3x$.

3.313. $f(x) = \log_2 x$. **3.314.** $f(x) = \lg x$.

В задачах 3.315–3.318 найти $f'_-(x_0)$ и $f'_+(x_0)$.

3.315. $f(x) = |x - 1|,\ x_0 = 1$. **3.316.** $f(x)=\begin{cases}x, & x\le 1,\\ -x^2+2x, & x>1,\end{cases}$ $x_0 = 1$.

3.317. $f(x)=\begin{cases}x^3, & x\le 0,\\ -x^2, & x>0,\end{cases}$ $x_0 = 0$. **3.318.** $f(x) = x\operatorname{sgn} x,\ x_0 = 0$.

3.319. Найти производную функции

$$f(x)=\begin{cases}x^2\sin\dfrac{1}{x}, & x\ne 0,\\ 0, & x=0,\end{cases}$$

в точке $x = 0$.

3.320. Показать, что функция

$$f(x)=\begin{cases}x\sin\dfrac{1}{x}, & x\ne 0,\\ 0, & x=0,\end{cases}$$

непрерывна в точке $x = 0$, но не имеет в этой точке ни правой, ни левой производной.

2. Вычисление производных

Таблица производных основных элементарных функций.

1. $(x^a)' = ax^{a-1}$.

2. $(a^x)' = a^x\ln a,\ a > 0$; $(e^x)' = e^x$. 3. $(\log_a x)'=\dfrac{1}{x\ln a},\ a>0,\ a\ne 1$; $(\ln x)'=\dfrac{1}{x}$.

4. $(\sin x)' = \cos x$. 5. $(\cos x)' = -\sin x$.

6. $(\operatorname{tg} x)' = \dfrac{1}{\cos^2 x}$. 7. $(\operatorname{ctg} x)' = -\dfrac{1}{\sin^2 x}$.

8. $(\arcsin x)' = -(\arccos x)' = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$. 9. $(\operatorname{arctg} x)' = -(\operatorname{arcctg} x)' = \dfrac{1}{1+x^2}$.

Правила дифференцирования функций.

I. Пусть C — постоянная, $f(x)$ и $g(x)$ — функции, имеющие производные. Тогда:

1. $(C)' = 0$. 2. $(Cf)' = Cf'$.

3. $(f \pm g)' = f' \pm g'$. 4. $(fg)' = f'g + g'f$.

5. $\left(\dfrac{f}{g}\right)' = \dfrac{f'g - g'f}{g^2}$ при $g \neq 0$.

II. Пусть функция $f(t)$ имеет производную в точке t_0, а функция $t = g(x)$ имеет производную в точке x_0, причем $t_0 = g(x_0)$. Тогда сложная функция $h(x) = f(g(x))$ имеет производную в точке x_0, равную

$$h'(x_0) = f'(t_0)g'(x_0)$$

(*правило дифференцирования сложной функции*).

ПРИМЕР 3.29. Найти производную функции $h(x) = \sin \ln x$.

◄ Рассмотрим $h(x)$ как сложную функцию: $h(x) = f(g(x))$, где $f(t) = \sin t$, а $t = g(x) = \ln x$. Тогда по правилу дифференцирования сложной функции

$$h'(x) = f'(t) \cdot g'(x) = \cos t \cdot \frac{1}{x}.$$

Заменяя в этом равенстве справа t на $\ln x$, окончательно получаем $(\sin \ln x)' = \dfrac{\cos \ln x}{x}$. ►

ПРИМЕР 3.30. Найти производную функции $h(x) = \sin \ln(x^2 + e^x)$.

◄ Как и в примере 3.29, рассмотрим $h(x)$ как сложную функцию: $h(x) = f(g(p(x)))$, где $f(t) = \sin t$, $t = g(z) = \ln z$ и $z = p(x) = x^2 + e^x$. Тогда по правилу дифференцирования сложной функции

$$h'(x) = f'(t) \cdot g'(z) \cdot p'(x) = \cos t \cdot \frac{1}{z} \cdot (2x + e^x).$$

Заменяя в этом равенстве справа t на $\ln z$, а затем z на $x^2 + e^x$, окончательно получаем

$(\sin \ln(x^2 + e^x))' = \dfrac{(2x + e^x)\cos \ln(x^2 + e^x)}{x^2 + e^x}$. ►

В задачах 3.321–3.362 найти производные указанных функций.

3.321. $y = 3 - 2x + x^3$.

3.322. $y = 2\sqrt{x} + \dfrac{1}{x}$.

3.323. $y = \sqrt{x} + \dfrac{2}{\sqrt{x}} - \dfrac{1}{3\sqrt{x^3}}$.

3.324. $y = \dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{x^2} + \dfrac{1}{3x^3}$.

3.325. $y = x \cos x$.

3.326. $y = \sqrt[3]{x^5} \cdot \operatorname{tg} x$.

3.327. $y = \dfrac{\sqrt[3]{x}}{\sin x}$.

3.328. $y = \dfrac{\operatorname{arctg} x}{1 + x^2}$.

3.329. $y = \dfrac{1}{x^3 + 3x - 1}$.

3.330. $y = \dfrac{1}{\arcsin x}$.

3.331. $y = \dfrac{x^2 + 1}{x^3 - x}$.

3.332. $y = \dfrac{2 + \sqrt{x}}{2 - \sqrt{x}}$.

3.333. $y = x^3 \ln x + 2^x$.
3.334. $y = \frac{3}{4}\sqrt[3]{x^4}\log_3 x - \frac{e^x}{\sqrt[4]{x}}$.

3.335. $y = (a + 4^x)\operatorname{ctg} x$.
3.336. $y = \frac{\arccos x}{\lg x}$.

3.337. $y = (2x+1)^{10}$.
3.338. $y = \sqrt{(1-3x)^3}$.

3.339. $y = \arcsin 2^x$.
3.340. $y = \operatorname{arcctg}\frac{1}{x}$.

3.341. $y = \sqrt{\frac{1-x^2}{1+x^2}}$.
3.342. $y = \sqrt{1-\cos x}$.

3.343. $y = \arccos\sqrt{x+1}$.
3.344. $y = \operatorname{arctg}\sqrt{x^3}$.

3.345. $y = x\cos^3 x$.
3.346. $y = \frac{x^3}{\sin x^2}$.

3.347. $y = 2^{x/\ln x}$.
3.348. $y = 3^{\sqrt{\sin^3 x}}$.

3.349. $y = \sqrt{\operatorname{arcctg}\sqrt{x}}$.
3.350. $y = \sqrt{\log_3 \ln x}$.

3.351. $y = \sqrt{\log_3 \operatorname{tg}^3 \ln x}$.
3.352. $y = e^{-x^2}$.

3.353. $y = \ln \operatorname{tg}\left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{4}\right)$.
3.354. $y = \sin^4 \ln(2^{x^2} + x)$.

3.355. $y = \ln(x + \sqrt{a^2 + x^2})$.
3.356. $y = \ln\frac{1+x}{1-x}$.

3.357. $f(x) = \frac{\arcsin x}{\sqrt{1-x^2}} + \ln\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}$.

3.358. $f(x) = \frac{3-x}{2}\sqrt{3-2x-x^2} + 2\arcsin\frac{1+x}{2}$.

3.359. $y = \operatorname{sgn}(x^2 - 4x + 3)$.
3.360. $y = |x^2 - 4x + 3|$.

3.361. $y = \ln|x|$.
3.362. $y = \ln\left|\frac{1+x}{1-x}\right|$.

В задачах 3.363–3.366 найти производные *гиперболических* функций.

3.363. $\operatorname{sh} x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$ (*гиперболический синус*).

3.364. $\operatorname{ch} x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$ (*гиперболический косинус*).

3.365. $\operatorname{th} x = \frac{\operatorname{sh} x}{\operatorname{ch} x}$ (*гиперболический тангенс*).

3.366. $\operatorname{cth} x = \frac{\operatorname{ch} x}{\operatorname{sh} x}$ (*гиперболический котангенс*).

Логарифмической производной функции $y = f(x)$ называется производная от логарифма этой функции, т. е.:

$$(\ln y)' = \frac{y'}{y}.$$

Предварительное логарифмирование применяется для вычисления производных *степенно-показательных* функций $y = u(x)^{v(x)}$, а также иногда упрощает вычисление производной произведения либо частного.

ПРИМЕР 3.31. Найти производную функции $y = x^x$.

◀ Функция определена при $x > 0$. Логарифмируя, получим

$$\ln y = x \ln x.$$

Дифференцируя обе части этого равенства, причем левую — как сложную функцию, находим

$$(\ln y)' = \frac{y'}{y} = \ln x + 1.$$

Следовательно,

$$y' = y \cdot (\ln y)' = x^x(\ln x + 1).$$

Отметим, что производную данной функции можно было вычислить, представив ее с помощью основного логарифмического тождества в виде $x^x = (e^{\ln x})^x = e^{x\ln x}$. ▶

В задачах 3.367–3.372, используя предварительное логарифмирование, найти производные заданных функций.

3.367. $y = (\sin x)^x$.

3.368. $y = x^{2^x}$.

3.369. $y = \sqrt{x^{\sqrt[3]{x}}}$.

3.370. $y = (\ln x)^{1/x}$.

3.371. $y = \sqrt[3]{\dfrac{x(x^2+1)}{(x^2-1)^2}}$.

3.372. $y = \sqrt[3]{\dfrac{(x+2)(x-1)^2}{x^5}}$.

Зависимость переменной y от x называют заданной *параметрически*, если она выражена через параметр t:

$$\begin{cases} x = \varphi(t), \\ y = \psi(t), \end{cases} \quad t \in (\alpha, \beta).$$

Производная переменной y как функции от x находится по формуле

$$y'_x = \frac{y'_t}{x'_t}.$$

Здесь и ниже в обозначении y'_x нижний индекс указывает, по какой переменной ведется дифференцирование.

ПРИМЕР 3.32. Найти производную параметрически заданной функции

$$\begin{cases} x = t - \sin t, \\ y = 1 - \cos t, \end{cases} \quad t \in (0, 2\pi).$$

◀ Так как $y'_t = \sin t,\ x'_t = 1 - \cos t$, то $y'_x = \dfrac{y'_t}{x'_t} = \dfrac{1-\cos t}{\sin t} = \dfrac{2\sin^2\frac{t}{2}}{2\sin\frac{t}{2}\cdot\cos\frac{t}{2}} = \operatorname{ctg}\dfrac{t}{2}$. ▶

В задачах 3.373–3.378 найти y'_x для функций, заданных параметрически.

3.373. $\begin{cases} x = 2t^3, \\ y = 3t^2 - 2t, \end{cases}$ $t \in (-\infty, +\infty)$.

3.374. $\begin{cases} x = t^3 + 2, \\ y = 0{,}5t^2, \end{cases}$ $t \in (-\infty, +\infty)$.

3.375. $\begin{cases} x = a\cos\varphi, \\ y = b\sin\varphi, \end{cases}$ $\varphi \in (0, 2\pi)$.

3.376. $\begin{cases} x = \operatorname{tg} t, \\ y = \sin 2t + 2\cos 2t, \end{cases}$ $t \in (-\pi/2, \pi/2)$.

3.377. $\begin{cases} x = \arccos\dfrac{1}{\sqrt{1+t^2}}, \\ y = \arcsin\dfrac{t}{\sqrt{1+t^2}}, \end{cases}$ $t \in (0, +\infty)$.

3.378. $\begin{cases} x = a\operatorname{sh} t, \\ y = b\operatorname{ch} t, \end{cases}$ $t \in (0, +\infty)$.

В задачах 3.379–3.384 найти y'_x в указанных точках.

3.379. $\begin{cases} x = \cos\varphi, \\ y = \sin\varphi, \end{cases}$ $\varphi = 3\pi/4$.

3.380. $\begin{cases} x = \dfrac{1}{t+1}, \\ y = \left(\dfrac{t}{t+1}\right)^2, \end{cases}$ $t = 1$.

3.381. $\begin{cases} x = t\ln t, \\ y = \dfrac{\ln t}{t}, \end{cases}$ $t = 1$.

3.382. $\begin{cases} x = t(t\cos t - 2\sin t), \\ y = t(t\sin t + 2\cos t), \end{cases}$ $t = \pi/4$.

3.383. $\begin{cases} x = e^t\cos t, \\ y = e^t\sin t, \end{cases}$ $t = \pi/6$.

3.384. $\begin{cases} x = \dfrac{3at}{\sqrt{1+t^2}}, \\ y = \dfrac{3at^2}{\sqrt{1+t^2}}, \end{cases}$ $t = 2$.

Функцию $y = f(x)$, $x \in (a, b)$, называют заданной *неявно* уравнением $F(x, y) = 0$, если на (a, b) выполняется тождество

$$F(x, f(x)) \equiv 0.$$

Условия, при которых уравнение $F(x, y) = 0$ определяет однозначную дифференцируемую функцию, будут рассмотрены позже в главе 5. В этом параграфе считаем их выполненными. Тогда для нахождения производной функции $y = f(x)$ можно продифференцировать тождество $F(x, f(x)) \equiv 0$, рассматривая его левую часть как сложную функцию переменной x, а затем полученное уравнение разрешить относительно y'.

ПРИМЕР 3.33. Найти y'_x для функции, заданной неявно уравнением $\cos(xy) + x^2y = 0$.

◄ Дифференцируя по x тождество

$$\cos(xy(x)) + x^2y(x) = 0,$$

получим

$$-\sin(xy(x)) \cdot (y(x) + xy'(x)) + 2xy(x) + x^2y'(x) = 0.$$

Отсюда

$$y'(x) = \frac{2xy(x) - y(x)\sin(xy(x))}{x\sin(xy(x)) - x^2},$$

или

$$y'_x = \frac{2xy - y\sin(xy)}{x\sin(xy) - x^2}. \blacktriangleright$$

3.385. Найти значение y'_x в точке $x = 1$, если

$$x^3 - 2x^2y^2 + 5x + y - 5 = 0, \ \ y(1) = 1.$$

3.386. Найти значение y'_x в точке $x = 0$, если

$$e^{xy} + y^2 + xy - 5 = 0, \ \ y(0) = -2.$$

В задачах 3.387–3.394 найти y'_x для функций, заданных неявно.

3.387. $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1.$

3.388. $x^4 + y^4 = 6x^2y^2.$

3.389. $\sqrt{x}+\sqrt{y}=\sqrt{a}, \ \ a > 0.$

3.390. $2y \ln y = x.$

3.391. $e^x \sin y - e^y \cos x = 0.$

3.392. $2^x + 2^y = 2^{x+y}.$

3.393. $\operatorname{arctg}\dfrac{x}{y}=\ln\sqrt{x^2+y^2}.$

3.394. $x^y = y^x.$

3. Производные высших порядков

Производной 2-го порядка функции $y = f(x)$ называется производная от ее первой производной, т. е. $f''(x) = (f'(x))'$. *Производной n-го порядка* или *n-й производной* (обозначается $f^{(n)}(x)$) называется производная от производной $(n - 1)$-го порядка, т. е. $f^{(n)}(x) = (f^{(n-1)}(x))'$, $n = 2, 3, \ldots$ Для производной n-го порядка используется также обозначение $\dfrac{d^ny}{dx^n}$.

ПРИМЕР 3.34. Найти y'', если $y=\sqrt{1+x^2}$.

◄ Находим $y'=\dfrac{x}{\sqrt{1+x^2}}$. Следовательно, $y''=\left(\dfrac{x}{\sqrt{1+x^2}}\right)'=\dfrac{1}{\sqrt{(1+x^2)^3}}$. ►

В задачах 3.395–3.400 найти производные второго порядка заданных функций.

3.395. $y=\cos^2 x.$ **3.396.** $y=\operatorname{arctg} x^2.$ **3.397.** $y=\log_2 \sqrt[3]{1-x^2}.$

3.398. $y=e^{-x^2}.$ **3.399.** $y=\dfrac{\arcsin x}{\sqrt{1-x^2}}.$ **3.400.** $y=x^{\sqrt{x}}.$

В задачах 3.401–3.406 найти формулу для n-й производной указанной функции.

3.401. $y = e^{ax}.$ **3.402.** $y = \cos x.$ **3.403.** $y = \sin x.$

3.404. $y = \ln(1 + x).$ **3.405.** $y = (1 + x)^m, \ m \in \mathbb{N}.$ **3.406.** $y = \cos^2 x.$

Если функции $u(x)$ и $v(x)$ имеют производные до n-го порядка включительно, то для вычисления n-й производной их произведения полезно использовать *формулу Лейбница*

$$(uv)^{(n)}=u^{(n)}v+nu^{(n-1)}v'+\frac{n(n-1)}{2}u^{(n-2)}v''+\ldots+uv^{(n)}=\sum_{k=0}^{n}C_n^k u^{(n-k)}v^{(k)},$$

где $u^{(0)} = u$, $v^{(0)} = v$ и $C_n^k=\dfrac{n!}{k!(n-k)!}$ — биномиальные коэффициенты (по определению $0! = 1$).

ПРИМЕР 3.35. Найти $y^{(20)}$, если $y = x^2e^{2x}$.

◀ Применяя формулу Лейбница, получим $(e^{2x}\cdot x^2)^{(20)} = \sum_{k=0}^{20} C_{20}^k (e^{2x})^{(20-k)}(x^2)^{(k)}$.

Так как $(x^2)' = 2x$, $(x^2)'' = 2$, $(x^2)^{(k)} = 0$ при $k \ge 3$ и $(e^{2x})^{(l)} = 2^l e^{2x}$, то

$$(e^{2x}\cdot x^2)^{(20)} = (e^{2x})^{(20)}\cdot x^2 + 20\cdot(e^{2x})^{(19)}\cdot(x^2)' + \frac{20\cdot 19}{2}\cdot(e^{2x})^{(18)}\cdot(x^2)'' =$$
$$= 2^{20}x^2e^{2x} + 20\cdot 2^{20}xe^{2x} + 20\cdot 19\cdot 2^{18}e^{2x} = 2^{20}e^{2x}(x^2+20x+95). \blacktriangleright$$

В задачах 3.407–3.410, применяя формулу Лейбница, найти производные указанных порядков заданных функций.

3.407. $y = (x^2 + x + 1)\sin x$, найти $y^{(15)}$.

3.408. $y = (x^2 - x)e^x$, найти $y^{(20)}$.

3.409. $y = e^{-x}\sin x$, найти $y^{(5)}$.

3.410. $y = x\ln x$, найти $y^{(10)}$.

ПРИМЕР 3.36. Найти y''_{xx} функции, заданной неявно: $\sqrt{x^2+y^2} = e^{\operatorname{arctg}\frac{y}{x}}$.

◀ Продифференцируем уравнение, считая y функцией от переменной x:

$$\frac{x+yy'}{\sqrt{x^2+y^2}} = e^{\operatorname{arctg}\frac{y}{x}}\frac{1}{1+(y/x)^2}\cdot\frac{y'x-y}{x^2} = e^{\operatorname{arctg}\frac{y}{x}}\cdot\frac{y'x-y}{x^2+y^2}.$$

Заменяя справа $e^{\operatorname{arctg}\frac{y}{x}}$ на $\sqrt{x^2+y^2}$, получим $\dfrac{x+yy'}{\sqrt{x^2+y^2}} = \dfrac{y'x-y}{\sqrt{x^2+y^2}}$. Отсюда

$$y' = \frac{x+y}{x-y}. \tag{3.1}$$

Для нахождения второй производной дифференцируем полученное равенство по x:

$$y'' = \left(\frac{x+y}{x-y}\right)' = \frac{(1+y')(x-y)-(x+y)(1-y')}{(x-y)^2} = \frac{2xy'-2y}{(x-y)^2}.$$

Подставляя на место y' правую часть равенства (3.1), окончательно находим

$$y'' = \frac{2(x^2+y^2)}{(x-y)^3}. \blacktriangleright$$

В задачах 3.411–3.414 найти производные 2-го порядка функций, заданных неявно.

3.411. $y^2 = 2px$. **3.412.** $y = 1 + xe^y$. **3.413.** $y = \operatorname{tg}(x+y)$. **3.414.** $e^{x-y} = xy$.

ПРИМЕР 3.37. Найти y''_{xx} функции, заданной параметрически: $\begin{cases} x = e^{-t}\cos t, \\ y = e^{-t}\sin t. \end{cases}$

◀ Найдем первую производную: $y'_x = \dfrac{y'_t}{x'_t} = \dfrac{e^{-t}(-\sin t+\cos t)}{e^{-t}(-\cos t-\sin t)} = \dfrac{\sin t-\cos t}{\cos t+\sin t}$.

Первая производная также является параметрически заданной функцией

$$\begin{cases} x = e^{-t}\cos t, \\ y'_x = \dfrac{\sin t - \cos t}{\cos t + \sin t}. \end{cases}$$

Следовательно,

$$y''(x) = \frac{(y'_x)'_t}{x'_t} = \frac{(\cos t + \sin t)^2 + (\cos t - \sin t)^2}{-e^{-t}(\cos t + \sin t)^3} = -\frac{2e^t}{(\cos t + \sin t)^3}. \blacktriangleright$$

В задачах 3.415–3.418 найти производные 2-го порядка функций, заданных параметрически.

3.415. $\begin{cases} x = \sec t, \\ y = \operatorname{tg} t, \end{cases}$ $t \in (0, \pi/2)$.

3.416. $\begin{cases} x = \arcsin t, \\ y = \ln(1 - t^2), \end{cases}$ $t \in (-1, 1)$.

3.417. $\begin{cases} x = \operatorname{arctg} t, \\ y = \ln(1 + t^2), \end{cases}$ $t \in (-\infty, +\infty)$.

3.418. $\begin{cases} x = a\cos^3 t, \\ y = a\sin^3 t, \end{cases}$ $t \in (0, 2\pi)$.

3.419. Показать, что функция $y = e^{2x}\sin x$ удовлетворяет дифференциальному уравнению $y'' - 4y' + 5y = 0$.

3.420. Показать, что функция $y = ae^{3x} + be^{-x} - x^2$ удовлетворяет дифференциальному уравнению $y'' - 2y' - 3y = 3x^2 + 4x - 2$.

3.421. Показать, что функция $y = \arcsin x$ удовлетворяет дифференциальному уравнению $(1 - x^2)y'' = xy'$.

3.422. Показать, что функция $(y - 1)^2 = 4x$ удовлетворяет дифференциальному уравнению $xy'^2 + 2xy' - y = 0$.

4. Геометрические и механические приложения производной

Геометрический смысл производной. Значение производной $f'(x)$ функции $f(x)$ в точке x_0 равно угловому коэффициенту $k = \operatorname{tg}\alpha$ *касательной* KK' к графику этой функции в прямоугольной системе координат, проведенной через точку $M_0(x_0, y_0)$, где $y_0 = f(x_0)$ (рис. 3.3). Уравнение касательной KK' к графику функции $f(x)$ в его точке $M_0(x_0, y_0)$ имеет вид

$$y - y_0 = f'(x_0)(x - x_0).$$

Прямая NN', проходящая через точку касания M_0 перпендикулярно к касательной, называется *нормалью* к графику функции $f(x)$ в этой точке. Уравнение нормали имеет вид

$$x - x_0 + f'(x_0)(y - y_0) = 0.$$

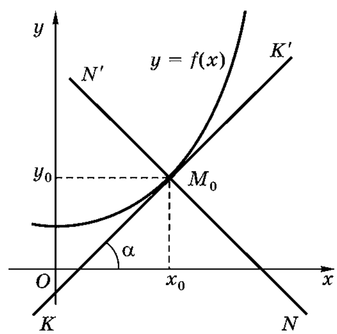


Рис. 3.3

ПРИМЕР 3.38. Написать уравнения касательной и нормали к графику функции $f(x) = x^3 - 3x - 1$ в точке $x_0 = 2$.

◀ Находим производную: $f'(x) = 3x^2 - 3$, и вычисляем значения функции и производной в точке $x_0 = 2$: $y_0 = f(2) = 1$, $f'(2) = 9$. Отсюда уравнение касательной — $y - 1 = 9(x - 2)$, или $y = 9x - 17$; уравнение нормали — $x - 2 + 9(y - 1) = 0$, или $x + 9y - 11 = 0$. ▶

В задачах 3.423–3.428 написать уравнения касательной и нормали к графику функции $f(x)$ в данной точке.

3.423. $f(x) = x^2 + x - 2,\ x_0 = 2.$ **3.424.** $f(x) = x^3 - 3x,\ x_0 = 0.$

3.425. $f(x)=\sqrt{5-x^2},\ x_0 = 1.$ **3.426.** $f(x) = \operatorname{arctg} 2x,\ x_0 = 0.$

3.427. $f(x) = \ln x,\ x_0 = e.$ **3.428.** $f(x)=e^{1-x^2},\ x_0 = -1.$

3.429. Написать уравнения касательной и нормали к кривой $\begin{cases} x = 2t - t^2, \\ y = 3t - t^3 \end{cases}$ в точке $M_0(1, 2)$.

3.430. Написать уравнения касательной и нормали к кривой $\begin{cases} x = \dfrac{1+t}{t^3}, \\ y = \dfrac{3}{2t^2} + \dfrac{1}{2t} \end{cases}$ в точке $M_0(2, 2)$.

3.431. Написать уравнения касательной к кривой $\begin{cases} x = t\cos t, \\ y = t\sin t \end{cases}$ в начале координат и в точке $t = \pi/4$.

3.432. Написать уравнения касательной и нормали к кривой $x^3 + y^2 + 2x - 6 = 0$ в точке с ординатой $y_0 = 3$.

3.433. Написать уравнения касательной и нормали к кривой $x^5 + y^5 - 2xy = 0$ в точке $M_0(1, 1)$.

3.434. Найти уравнение касательной к графику функции $f(x) = 2 + x - x^2$, параллельной прямой $x - y + 7 = 0$.

3.435. Найти уравнение касательной к графику функции $f(x) = x^2 - 3x + 7$, параллельной прямой $3x - y + 2 = 0$.

3.436. Найти уравнение касательной к графику функции $f(x) = x^2 - x + 1$, перпендикулярной прямой $3x - y + 8 = 0$.

3.437. Найти уравнение касательной к графику функции $f(x) = 2x^2 + 3x - 7$, перпендикулярной прямой $x + y + 8 = 0$.

3.438. Показать, что касательные к гиперболе $y=\dfrac{x-4}{x-2}$ в точках ее пересечения с осями координат параллельны между собой.

Углом ω *между кривыми* $y = f_1(x)$ и $y = f_2(x)$ в их точке пересечения $M_0(x_0, y_0)$ называется угол между касательными к этим кривым в точке M_0. Тангенс этого угла вычисляется по формуле $\operatorname{tg}\omega=\dfrac{f_2'(x_0)-f_1'(x_0)}{1+f_1'(x_0)f_2'(x_0)}$. Если $1+f_1'(x_0)f_2'(x_0)=0$, то касательные перпендикулярны.

В задачах 3.439, 3.440 найти углы, под которыми пересекаются указанные кривые.

3.439. $y = x^2$ и $y = x^3$. **3.440.** $y = \sin x$ и $y = \cos x$, $0 < x < \pi$.

3.441. Под каким углом пересекает ось абсцисс кривая $y = \ln x$?

3.442. Под какими углами пересекает ось абсцисс и ось ординат кривая $y = -x^2 + 3x - 2$?

3.443. В какой точке кривой $y^2 = 2x^3$ касательная перпендикулярна к прямой $4x - 3y + 2 = 0$?

3.444. Найти уравнение параболы $y = ax^2 + bx + 1$, касающейся прямой $y = x$ в точке $(1, 1)$.

Если $x = x(t)$ — функция, описывающая закон движения материальной точки, то первая производная $x'(t)$ есть скорость, а вторая производная $x''(t)$ — ускорение этой точки в момент времени t (*механический смысл первой и второй производных*).

3.445. Закон движения материальной точки по прямой имеет вид $x = t^4/4 - 4t^3 + 16t^2$.

а) В какие моменты времени точка находится в начале координат?

б) Чему равна скорость и ускорение точки в момент времени $t = 1$?

в) В какие моменты времени направление ее движения совпадает с положительным направлением оси Ox?

г) В какие моменты времени ее ускорение равно 0?

3.446. Тело массой 4 движется прямолинейно по закону $x = t^2 + t + 1$. Определить кинетическую энергию тела в момент времени $t = 5$.

3.447. Найти скорость гармонического колебания с амплитудой a, частотой ω и начальной фазой $\varphi = 0$.

3.448. Сторона квадрата растет с постоянной скоростью 1 м/с. С какой скоростью растут площадь и диагональ квадрата, когда его сторона становится равной 5 м?

3.449. Радиус шара изменяется со скоростью v см/с. С какой скоростью изменяются объем и площадь поверхности шара, когда его радиус станет равным 10 см?

3.450. Две точки начинают движение из начала координат. Одна точка движется по оси Ox по закону $x(t) = t$, а другая — по оси Oy по закону $y(t) = t^2$. С какой скоростью изменяется расстояние между точками?

3.451. Неоднородный стержень AB имеет длину 10 см. Масса его части AC растет пропорционально квадрату расстояния от текущей точки C до точки A и равна 10 г при $AC = 1$ см. Найти массу и линейную плотность стержня на концах и в середине.

3.452. Точка движется по окружности $x^2 + y^2 = r^2$ с постоянной угловой скоростью $\varphi = \omega t$. Найти скорость изменения абсциссы и ординаты точки.

5. Дифференциалы первого и высших порядков

Функция $f(x)$ называется дифференцируемой в точке x_0, если ее приращение в данной точке представимо в виде

$$\Delta f(x_0) = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) = A\Delta x + o(\Delta x),\ \Delta x \to 0,$$

где число A не зависит от Δx. Главная линейная часть $A\Delta x$ приращения $\Delta f(x_0)$ называется *дифференциалом* (*дифференциалом первого порядка*) этой функции в точке x_0, соответствующим приращению Δx, и обозначается символом $df(x_0)$.

Для того чтобы функция $f(x)$ была дифференцируемой в точке x_0, необходимо и достаточно, чтобы существовала производная $f'(x_0)$, при этом справедливо равенство

$A = f'(x_0)$. Следовательно, выражение для дифференциала имеет вид $df(x_0) = f'(x_0)\Delta x$. Отсюда следует, что для функции $f(x) = x$ дифференциал функции совпадает с приращением независимой переменной. Поэтому, полагая для независимой переменной $dx = \Delta x$, дифференциал функции часто записывают в следующей форме:

$$df(x) = f'(x)dx. \tag{3.2}$$

Из формулы (3.2) и правил нахождения производных (см. п. 2) вытекают следующие правила для вычисления дифференциалов:

а) $d(C) = 0$, где C — константа;

б) $d(C_1u + C_2v) = C_1du + C_2dv$;

в) $d(uv) = udv + vdu$;

г) $d\left(\dfrac{u}{v}\right) = \dfrac{vdu - udv}{v^2}$ при $v \neq 0$.

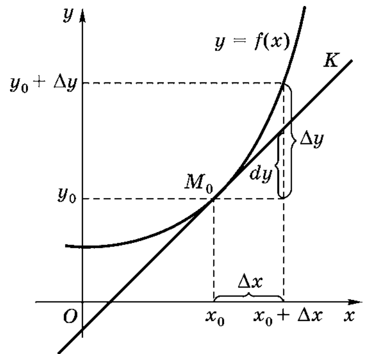


Рис. 3.4

Форма (3.2) для дифференциала остается верной и в случае, когда x является функцией от некоторого аргумента (*инвариантность формы первого дифференциала*). Это следует из правила дифференцирования сложной функции. Инвариантность формы дифференциала показывает, что производная y'_x есть отношение дифференциала dy к дифференциалу dx в любом случае: и когда x — это независимая переменная, и если x является функцией некоторого аргумента.

Из геометрического смысла производной (см. п. 4) и формулы для нахождения дифференциала вытекает *геометрический смысл* дифференциала: дифференциал $df(x_0)$ равен приращению ординаты касательной M_0K к графику функции $f(x)$ в точке M_0 при приращении независимого аргумента, равном Δx (рис. 3.4).

В задачах 3.453–3.458 найти дифференциалы функций.

3.453. $f(x) = x\sqrt{a^2 - x^2}$.

3.454. $f(x) = \operatorname{ch}^2 x$.

3.455. $f(x) = x \operatorname{arctg} x - \ln\sqrt{1 + x^2}$.

3.456. $f(x) = \dfrac{e^{\sin x}}{x^2}$.

3.457. $x^4 + y^4 = x^2y^2$.

3.458. $y = \cos(x + y)$.

3.459. Пусть $S(x)$ есть значение площади квадрата со стороной x. Найти и сравнить приращение ΔS и дифференциал dS, соответствующие приращению Δx стороны квадрата. С помощью рисунка геометрически истолковать ΔS, dS и разность $\Delta S - dS$.

3.460. Пусть $s(t) = at^2$ — путь, пройденный точкой, движущейся прямолинейно, за промежуток времени от 0 до t. Найти скорость и ускорение точки в момент времени t_0 и дать механическое истолкование дифференциала $ds(t_0)$.

Если $f'(x_0) \neq 0$, то при $\Delta x \to 0$ дифференциал функции и ее приращение являются эквивалентными бесконечно малыми, что можно записать в виде приближенного равенства

$$\Delta f(x_0) = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) \approx df(x_0) = f'(x_0)\Delta x. \tag{3.3}$$

Эту формулу применяют для вычисления приближенных значений величин и оценки погрешности их вычисления.

ПРИМЕР 3.39. Найти приближенное значение S площади круга радиуса $r = 1{,}03$ м.

◀ Площадь круга радиуса r равна $S(r) = \pi r^2$. Требуется приближенно вычислить $S(1{,}03) = S(r_0 + \Delta r) = S(r_0) + \Delta S(r_0)$, где $r_0 = 1$ и $\Delta r = 0{,}03$. По формуле (3.3) $\Delta S(r_0) \approx dS(r_0)$. Так как $S'(r) = 2\pi r$, то $dS(r_0) = S'(r_0)\Delta r = 2\pi \cdot 0{,}03 = 0{,}06\pi$. Следовательно,

$$S(1{,}03) \approx S(r_0) + dS(r_0) = \pi + 0{,}06\pi \approx 3{,}33 \text{ (м}^2\text{)}. \text{ ▶}$$

ПРИМЕР 3.40. Измеряя сторону кубического бака, получили значение 2 м. Погрешность измерения не более 1 см. Найти максимально возможную погрешность вычисления объема бака и ее оценку с помощью дифференциала.

◀ Объем бака со стороной x равен $V(x) = x^3$. Максимально возможная погрешность вычисления объема $\Delta V(2) = V(2{,}01) - V(2) = 2{,}01^3 - 2^3 = 0{,}120601$. Оценка $\Delta V(2)$ дифференциалом функции $V(x)$ в точке $x_0 = 2$ при приращении аргумента, не большем $\Delta x = 0{,}01$, равна $dV(x_0) = V'(x_0)\Delta x = 12 \cdot 0{,}01 = 0{,}12$. ▶

3.461. Ребра куба увеличили на 1 см. При этом дифференциал dV объема V оказался равным 12 см^3. Найти первоначальную длину ребра.

3.462. Радиус шара увеличили на 1 см. При этом дифференциал dS площади поверхности шара S оказался равным 80π см^2. Найти первоначальный радиус шара.

3.463. Обосновать приближенную формулу

$$\sqrt[3]{x + \Delta x} \approx \sqrt[3]{x} + \frac{\Delta x}{3 \cdot \sqrt[3]{x^2}}$$

и вычислить приближенно $\sqrt[3]{25}$.

3.464. Основываясь на законе Ома $I = \dfrac{U}{R}$, оцените при постоянном напряжении погрешность вычисления силы тока, если сопротивление измерено с погрешностью ΔR.

В задачах 3.465–3.470 вычислить приближенно с помощью дифференциала значения выражений.

3.465. $\sin 0{,}05$. **3.466.** $\ln 0{,}98$. **3.467.** $\sqrt{8{,}9}$.

3.468. $\operatorname{arctg} 0{,}01$. **3.469.** $\cos 0{,}02$. **3.470.** $\sqrt[4]{15{,}6}$.

Дифференциалом второго порядка $d^2f(x)$ функции $f(x)$ называется дифференциал от дифференциала первого порядка $df(x) = f'(x)\Delta x$, рассматриваемого как функция от переменной x при фиксированном приращении Δx. Если функция имеет вторую производную и x — независимая переменная, то

$$d^2f(x) = f''(x)\Delta x^2 = f''(x)dx^2.$$

Аналогичным образом определяются дифференциалы более высоких порядков:

$$d^3f(x) = d(d^2f(x)) = f'''(x)dx^3,$$

$$\ldots$$

$$d^nf(x) = d(d^{n-1}f(x)) = f^{(n)}(x)dx^n.$$

В задачах 3.471–3.476 найти дифференциалы второго порядка заданных функций.

3.471. $f(x) = a\sin(bx + c)$. **3.472.** $f(x) = 3^{-x^2}$.

3.473. $f(x) = \dfrac{\sin x}{x}$. **3.474.** $y = \dfrac{x}{1 + x^2}$.

3.475. $f(x) = \dfrac{1}{x^2 - 3x + 2}$. **3.476.** $y = \sqrt{1 - x^2}$.

§ 3.5. ТЕОРЕМЫ О СРЕДНЕМ. ПРАВИЛО ЛОПИТАЛЯ

1. Теоремы о среднем

ТЕОРЕМА РОЛЛЯ. *Если функция* $f(x)$ *непрерывна на отрезке* $[a, b]$, *дифференцируема на интервале* (a, b) *и* $f(a) = f(b)$, *то существует точка* $\gamma \in (a, b)$ *такая, что* $f'(\gamma) = 0$.

ТЕОРЕМА ЛАГРАНЖА. *Если функция* $f(x)$ *непрерывна на отрезке* $[a, b]$, *дифференцируема на интервале* (a, b), *то существует точка* $\gamma \in (a, b)$ *такая, что*

$$f(b) - f(a) = f'(\gamma)(b - a) \quad (\textit{формула Лагранжа}).$$

ТЕОРЕМА КОШИ. *Если функции* $f(x)$ *и* $g(x)$ *непрерывны на отрезке* $[a, b]$, *дифференцируемы на интервале* (a, b), *причем* $g'(x) \neq 0$ *на* (a, b), *то существует точка* $\gamma \in (a, b)$ *такая, что*

$$\frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \frac{f'(\gamma)}{g'(\gamma)} \quad (\textit{формула Коши}).$$

3.477. Проверить справедливость теоремы Ролля для функции $f(x) = x^2 - 4x + 3$ на промежутке $[1, 3]$.

3.478. Доказать, что если функция дифференцируема на отрезке и имеет внутри него три корня, то ее производная имеет не менее двух корней.

3.479. Найти значение γ в формуле Лагранжа для функции $f(x) = x^3$ на отрезке $[-1, 1]$.

3.480. Записав формулу Коши для функций $f(x) = x^3 + x$ и $g(x) = x^2 + 2x$ на отрезке $[0, 1]$, найти значение γ.

3.481. Докажите, что если $|f'(x)| \le c$ на $(-\infty, +\infty)$, где c — константа, то функция $f(x)$ равномерно непрерывна на $(-\infty, +\infty)$.

2. Неопределенности $\frac{0}{0}$ и $\frac{\infty}{\infty}$

Пусть при $x \to a$ функции $f(x)$ и $g(x)$ бесконечно малы. Предел их отношения при $x \to a$ не может быть вычислен непосредственно как предел частного двух функций. Поэтому в этом случае говорят, что отношение $\dfrac{f(x)}{g(x)}$ представляет собой *неопределенность типа* $\dfrac{0}{0}$. Аналогично определяется неопределенность $\dfrac{\infty}{\infty}$. Нахождение пределов таких выражений на основании дополнительных сведений о поведении функций называется *раскрытием неопределенности*.

Для раскрытия неопределенностей $\frac{0}{0}$ и $\frac{\infty}{\infty}$ часто применяется *правило Лопиталя*. Пусть в некоторой окрестности U точки a функции $f(x)$ и $g(x)$ дифференцируемы всюду, кроме, может быть, самой точки a, и $g'(x) \neq 0$ при $x \in U$, $x \neq a$. Если функции $f(x)$ и $g(x)$ являются одновременно либо обе бесконечно малыми, либо обе бесконечно большими при $x \to a$ и при этом существует предел отношения $\frac{f'(x)}{g'(x)}$ их производных при $x \to a$, то тогда существует предел отношения $\frac{f(x)}{g(x)}$ самих функций и выполняется равенство

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to a} \frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

ПРИМЕР 3.41. Вычислить предел $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{\ln x}{x}$.

◄ Функции $f(x) = \ln x$ и $g(x) = x$ стремятся к бесконечности при $x \to +\infty$, т. е. имеем неопределенность $\frac{\infty}{\infty}$. Применяя правило Лопиталя, получаем

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{\ln x}{x} = \lim_{x \to +\infty} \frac{(\ln x)'}{(x)'} = \lim_{x \to +\infty} \frac{1/x}{1} = 0. \blacktriangleright$$

В некоторых случаях для раскрытия неопределенности возможно неоднократное применение правила Лопиталя.

ПРИМЕР 3.42. Вычислить предел $\lim\limits_{x \to 0} \frac{e^{x^2} - \cos x}{\sin^2 x}$.

◄ В данном случае имеем неопределенность $\frac{0}{0}$. Применяя правило Лопиталя, получаем

$$\lim_{x \to 0} \frac{e^{x^2} - \cos x}{\sin^2 x} = \lim_{x \to 0} \frac{(e^{x^2} - \cos x)'}{(\sin^2 x)'} = \lim_{x \to 0} \frac{2xe^{x^2} + \sin x}{\sin 2x}.$$

Последнее выражение также является неопределенностью $\frac{0}{0}$. Используя правило Лопиталя еще раз, находим

$$\lim_{x \to 0} \frac{2xe^{x^2} + \sin x}{\sin 2x} = \lim_{x \to 0} \frac{2e^{x^2} + 4x^2 e^{x^2} + \cos x}{2\cos 2x} = \frac{3}{2}.$$

Таким образом, $\lim\limits_{x \to 0} \frac{e^{x^2} - \cos x}{\sin^2 x} = \frac{3}{2}$. ►

Чтобы упростить дифференцирование при использовании правила Лопиталя, полезно его комбинировать с другими приемами вычисления пределов.

ПРИМЕР 3.43. Вычислить предел $\lim\limits_{x \to 0} \frac{x - \sin x}{\sqrt{1+x}\cos x \ln(1+x^3)}$ (неопределенность $\frac{0}{0}$).

◄ Прежде чем применять правило Лопиталя, заметим, что $\sqrt{1+x} \to 1$ и $\cos x \to 1$ при $x \to 0$. Кроме того, $\ln(1 + x^3) \sim x^3$, $x \to 0$. Следовательно, в силу теоремы о пределе произведения и свойств эквивалентных функций,

$$\lim_{x \to 0} \frac{x - \sin x}{\sqrt{1+x}\cos x \ln(1+x^3)} = \lim_{x \to 0} \frac{1}{\sqrt{1+x}\cos x} \cdot \lim_{x \to 0} \frac{x - \sin x}{\ln(1+x^3)} = \lim_{x \to 0} \frac{x - \sin x}{x^3}.$$

Применяя к последнему выражению дважды правило Лопиталя и используя первый замечательный предел, получаем

$$\lim_{x\to 0}\frac{x-\sin x}{\sqrt{1+x}\cos x\ln(1+x^3)}=\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{3x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{6x}=\frac{1}{6}. \blacktriangleright$$

В задачах 3.482–3.491 раскрыть неопределенности типа $\frac{0}{0}$ или $\frac{\infty}{\infty}$.

3.482. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\ln\cos 2x}{\sin 2x}$.

3.483. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{x-\operatorname{arctg} x}{x^3}$.

3.484. $\lim\limits_{x\to 1}\frac{x^m-1}{x^n-1}$.

3.485. $\lim\limits_{x\to +\infty}\frac{e^x}{x^3+2x^2+4x+8}$.

3.486. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{x-\ln(1+x)}{1-\cos 2x}$.

3.487. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{a^x-b^x}{c^x-d^x}$, $a\ne b$, $c\ne d$.

3.488. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^x-e^{-x}-2x}{x-\sin x}$.

3.489. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{x-\arcsin x}{x-\sin x}$.

3.490. $\lim\limits_{x\to +\infty}\frac{\pi-2\operatorname{arctg} x}{e^{3/x}-1}$.

3.491. $\lim\limits_{x\to \pi/4}\frac{\operatorname{ctg} x-1}{\sin 4x}$.

3. Неопределенности $0\cdot\infty$ и $\infty-\infty$

Для вычисления $\lim\limits_{x\to a}f(x)g(x)$, где $f(x)\to 0$, а $g(x)\to\infty$ при $x\to a$ (раскрытие неопределенности типа $0\cdot\infty$), с применением правила Лопиталя произведение $f(x)g(x)$ приводят алгебраическими преобразованиями к неопределенности $\frac{0}{0}$ или $\frac{\infty}{\infty}$. Например, записав $f(x)g(x)$ в виде $\frac{f(x)}{1/g(x)}$, получим неопределенность типа $\frac{0}{0}$, а в виде $\frac{g(x)}{1/f(x)}$ — неопределенность типа $\frac{\infty}{\infty}$.

ПРИМЕР 3.44. Вычислить $\lim\limits_{x\to 1}\sin(x-1)\cdot\operatorname{tg}\frac{\pi x}{2}$.

◀ Имеем неопределенность $0\cdot\infty$. Записав произведение $\sin(x-1)\cdot\operatorname{tg}\frac{\pi x}{2}$ в виде дроби $\frac{\sin(x-1)\cdot\sin\pi x/2}{\cos\pi x/2}$, получим неопределенность типа $\frac{0}{0}$. Учитывая, что $\lim\limits_{x\to 1}\sin\pi x/2=1$, и применяя правило Лопиталя, найдем

$$\lim_{x\to 1}\sin(x-1)\cdot\operatorname{tg}\frac{\pi x}{2}=\lim_{x\to 1}\sin\pi x/2\cdot\lim_{x\to 1}\frac{\sin(x-1)}{\cos\pi x/2}=\lim_{x\to 1}\frac{\cos(x-1)}{-\pi/2\cdot\sin\pi x/2}=-\frac{2}{\pi}. \blacktriangleright$$

В задачах 3.492–3.497 раскрыть неопределенности типа $0\cdot\infty$.

3.492. $\lim\limits_{x\to 0+}\sqrt{x}\ln^2 x$.

3.493. $\lim\limits_{x\to\infty}x(e^{1/x}-1)$.

3.494. $\lim\limits_{x\to 1+0}\ln x\cdot\ln(x-1)$.

3.495. $\lim\limits_{x\to\infty}x(\ln(x+1)-\ln(x-1))$.

3.496. $\lim\limits_{x\to +\infty}x^3e^{-x}$.

3.497. $\lim\limits_{x\to 0}x^3e^{1/x^2}$.

Для вычисления $\lim\limits_{x\to a}(f(x)-g(x))$, где $f(x)$ и $g(x)$ — бесконечно большие при $x\to a$ (раскрытие неопределенности типа $\infty-\infty$), можно преобразовать выражение к виду $f(x)\left(1-\dfrac{g(x)}{f(x)}\right)$, а затем раскрыть неопределенность $\dfrac{g(x)}{f(x)}$ типа $\dfrac{\infty}{\infty}$. Если $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{g(x)}{f(x)}\neq 1$, то $\lim\limits_{x\to a}(f(x)-g(x))=\infty$. Если $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{g(x)}{f(x)}=1$, то имеем неопределенность типа $0\cdot\infty$, рассмотренную выше.

ПРИМЕР 3.45. Вычислить предел $\lim\limits_{x\to+\infty}(\sqrt[5]{x}-\ln x)$.

◀ Имеем неопределенность вида $\infty-\infty$. Преобразуем:

$$\lim_{x\to+\infty}(\sqrt[5]{x}-\ln x)=\lim_{x\to+\infty}\sqrt[5]{x}\left(1-\frac{\ln x}{\sqrt[5]{x}}\right).$$

Так как

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln x}{\sqrt[5]{x}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{1/x}{1/5\cdot x^{-4/5}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{5}{\sqrt[5]{x}}=0,$$

то

$$\lim_{x\to+\infty}(\sqrt[5]{x}-\ln x)=+\infty. \blacktriangleright$$

В задачах 3.498–3.503 раскрыть неопределенности типа $\infty-\infty$.

3.498. $\lim\limits_{x\to0}\left(\operatorname{ctg}x-\dfrac{1}{x}\right)$.

3.499. $\lim\limits_{x\to1+0}\left(\dfrac{1}{\ln x}-\dfrac{x}{\ln x}\right)$.

3.500. $\lim\limits_{x\to0}\left(\dfrac{1}{\operatorname{arctg}x}-\dfrac{1}{x}\right)$.

3.501. $\lim\limits_{x\to\pi/2}\left(\dfrac{x}{\operatorname{ctg}x}-\dfrac{\pi}{2\cos x}\right)$.

3.502. $\lim\limits_{x\to+\infty}(e^x-x^2)$.

3.503. $\lim\limits_{x\to0}\left(\dfrac{1}{2x^2}-\dfrac{1}{1-\cos2x}\right)$.

4. Неопределенности 0^0, ∞^0, 1^∞

Во всех трех случаях имеется в виду вычисление предела выражения $(f(x))^{g(x)}$, где $f(x)$ стремится к нулю, бесконечности или единице, а $g(x)$ — к нулю (первые два случая) или бесконечности (третий случай). Логарифмируя выражение $y=(f(x))^{g(x)}$ (или используя основное логарифмическое тождество), получаем $\ln y=g(x)\ln f(x)$ (или $y=e^{g(x)\ln f(x)}$). Правая часть последнего выражения (показатель степени) является неопределенностью $0\cdot\infty$, метод раскрытия которой рассмотрен выше. Найдя предел $g(x)\ln f(x)$, затем находим предел y.

ПРИМЕР 3.46. Вычислить предел $\lim\limits_{x\to+0}x^x$.

◀ Выражение x^x представляет собой неопределенность типа 0^0 при $x\to+0$. Запишем его в виде $x^x=e^{x\ln x}$. Выражение $x\ln x$ является неопределенностью вида $0\cdot\infty$, предел которого найдем с помощью правила Лопиталя:

$$\lim_{x\to+0}x\ln x=\lim_{x\to+0}\frac{\ln x}{1/x}=\lim_{x\to+0}\frac{1/x}{-1/x^2}=-\lim_{x\to+0}x=0.$$

Следовательно,

$$\lim_{x\to+0}x^x=\lim_{x\to+0}e^{x\ln x}=e^0=1. \blacktriangleright$$

В задачах 3.504–3.512 раскрыть неопределенности типа 0^0, ∞^0, 1^∞.

3.504. $\lim\limits_{x\to+0} x^{\sin x}$. **3.505.** $\lim\limits_{x\to+0} (\arcsin x)^{\operatorname{tg} x}$. **3.506.** $\lim\limits_{x\to+\infty} x^{1/x}$.

3.507. $\lim\limits_{x\to+0} x^{1/\ln(e^x-1)}$. **3.508.** $\lim\limits_{x\to+\infty} (x+2^x)^{1/x}$. **3.509.** $\lim\limits_{x\to 0} (x+e^x)^{1/x}$.

3.510. $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{\sin x}{x}\right)^{1/x^2}$. **3.511.** $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{(1+x)^{1/x}}{e}\right)^{1/x}$. **3.512.** $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(1+x)^{1/x}-e}{x}$.

§ 3.6. ФОРМУЛА ТЕЙЛОРА

Пусть функция $f(x)$ имеет производные до n-го порядка включительно в точке a. Равенство

$$f(x)=f(a)+\frac{f'(a)}{1!}(x-a)+\frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2+\ldots+\frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n+R_n(x) \tag{3.4}$$

называют *формулой Тейлора* (порядка n). При этом функцию $R_n(x)$ называют *остаточным членом* формулы Тейлора, многочлен

$$Q_n(x)=f(a)+\frac{f'(a)}{1!}(x-a)+\frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2+\ldots+\frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n$$

— *многочленом Тейлора* (порядка n) функции $f(x)$. Формулу (3.4) называют также разложением функции $f(x)$ по степеням $x-a$ до порядка n.

Остаточный член может быть записан в виде

$$R_n(x)=o((x-a)^n),\ x\to a \quad \text{(остаточный член в \textit{форме Пеано})}. \tag{3.5}$$

Если функция имеет производные до $(n+1)$-го порядка включительно в некоторой окрестности $U(a)$, то для $x\in U(a)$ остаточный член может быть записан в виде

$$R_n(x)=\frac{f^{(n+1)}(\gamma)}{(n+1)!}(x-a)^{n+1} \quad \text{(остаточный член в \textit{форме Лагранжа})}, \tag{3.6}$$

где γ лежит между a и x.

При $a=0$ формула Тейлора называется *формулой Маклорена*:

$$f(x)=f(0)+\frac{f'(0)}{1!}x+\frac{f''(0)}{2!}x^2+\ldots+\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n+R_n(x). \tag{3.7}$$

В частности, справедливы следующие разложения по степеням x:

$$e^x=1+x+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\ldots+\frac{x^n}{n!}+R_n(x), \tag{3.8}$$

$$\cos x=1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}-\ldots+(-1)^n\frac{x^{2n}}{(2n)!}+R_{2n+1}(x), \tag{3.9}$$

$$\sin x=x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}-\ldots+(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}+R_{2n+2}(x), \tag{3.10}$$

$$\ln(1+x)=x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\ldots+(-1)^{n+1}\frac{x^n}{n}+R_n(x), \tag{3.11}$$

$$(1+x)^\alpha=1+\alpha x+\frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}x^2+\ldots+\frac{\alpha(\alpha-1)\ldots(\alpha-n+1)}{n!}x^n+R_n(x). \tag{3.12}$$

Для случая $\alpha = -1$ из формулы (3.12) получаем

$$\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - \ldots + (-1)^n x^n + R_n(x). \tag{3.13}$$

ПРИМЕР 3.47. Разложить функцию $f(x) = \operatorname{arctg} x$ по степеням x до члена, содержащего x^3.

◀ Находим производные $\operatorname{arctg} x$ до 3-го порядка включительно:

$$f'(x) = \frac{1}{1+x^2},\ \ f''(x) = -\frac{2x}{(1+x^2)^2},\ \ f'''(x) = \frac{6x^2-2}{(1+x^2)^3}.$$

Следовательно, $f(0) = 0$, $f'(0) = 1$, $f''(0) = 0$, $f'''(0) = -2$, и по формуле (3.7) получаем

$$\operatorname{arctg} x = x - \frac{x^3}{3} + R_3(x). \ ▶$$

3.513. Многочлен $2x^3 - 3x^2 + 5x + 1$ разложить по степеням $x + 1$.

3.514. Для многочлена $x^4 + 4x^2 - x + 3$ написать многочлены Тейлора 3-го и 4-го порядков по степеням $x + 2$.

3.515. Функцию $f(x) = \ln x$ разложить по степеням $x - 1$ до члена с $(x - 1)^2$. Построить и сравнить графики функции $\ln x$ и многочленов Тейлора 1-го и 2-го порядков.

3.516. Функцию $f(x) = \sqrt{x}$ разложить по степеням $x - 1$ до члена с $(x - 1)^2$. Вычислить (на калькуляторе) значения функции для а) $x = 1{,}21$; б) $x = 1{,}1$ и сравнить их со значениями многочлена Тейлора 2-го порядка при указанных x.

Используя формулы (3.8)–(3.13), можно получать разложения по степеням x или $x - a$ многих функций без непосредственного вычисления производных.

ПРИМЕР 3.48. Записать разложение функции $f(x) = \dfrac{1}{4+x^2}$ по формуле Маклорена до n-го порядка с остаточным членом в форме Пеано.

◀ Преобразуем функцию: $f(x) = \dfrac{1}{4+x^2} = \dfrac{1}{4}\cdot\dfrac{1}{1+x^2/4}$.

Для функции $f(x) = \dfrac{1}{1+x}$ имеет место следующее разложение по формуле Маклорена (см. формулу (3.13)) с остаточным членом в форме Пеано:

$$\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - \ldots + (-1)^n x^n + o(x^n),\ \ x \to 0.$$

Заменяя в этом разложении слева и справа x на $x^2/4$, получим, что справедливо разложение

$$\frac{1}{1+x^2/4} = 1 - \frac{x^2}{4} + \frac{x^4}{16} - \ldots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{4^n} + o\left(\frac{x^{2n}}{4^n}\right),\ \ x \to 0.$$

Следовательно,

$$f(x) = \frac{1}{4}\cdot\frac{1}{1+x^2/4} = 1 - \frac{x^2}{16} + \frac{x^4}{64} - \ldots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{4^{n+1}} + o\left(\frac{x^{2n}}{4^{n+1}}\right),\ \ x \to 0.$$

Отметим, что в окончательной записи остаточного члена в форме Пеано вместо $o\left(\dfrac{x^{2n}}{4^{n+1}}\right)$ при $x \to 0$ обычно пишут $o(x^{2n})$, опуская множители, не зависящие от x. ▶

ПРИМЕР 3.49. Написать разложение функции $f(x) = e^x$ по степеням $x - 1$ с остаточным членом в форме Лагранжа.

◀ Так как $(e^x)^{(n)} = e^x$ для любого натурального n, то из формул (3.6) и (3.7) находим

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \ldots + \frac{x^n}{n!} + \frac{e^{\gamma} x^{n+1}}{(n+1)!}, \tag{3.14}$$

где γ лежит между 0 и x. Запишем e^x в виде $e^{1+x-1} = e \cdot e^{x-1}$. Заменив в (3.14) x на $x - 1$, получим

$$e^x = e + e(x-1) + \frac{e(x-1)^2}{2!} + \frac{e(x-1)^3}{3!} + \ldots + \frac{e(x-1)^n}{n!} + \frac{e^{\gamma_1}(x-1)^{n+1}}{(n+1)!},$$

где $\gamma_1 = 1 + \gamma$ лежит между 1 и x. ▶

В задачах 3.517–3.522, используя разложения (3.8)–(3.13), записать первые n членов формулы Маклорена (без остаточного члена) указанных функций.

3.517. $f(x) = e^{2x}$. **3.518.** $f(x) = \ln(1 + 2x^2)$. **3.519.** $f(x) = \dfrac{1}{x+2}$.

3.520. $f(x) = \ln(4 + x)$. **3.521.** $f(x) = \sin^2 x$. **3.522.** $f(x) = \sqrt{4+x}$.

Заменяя функцию ее многочленом Тейлора порядка m, получаем приближенное равенство

$$f(x) \approx f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \ldots + \frac{f^{(m)}(a)}{n!}(x-a)^m. \tag{3.15}$$

Соотношение (3.15) широко используется для вычисления приближенных значений функции, если известны значения функции и ее производных в точке a. Погрешность вычисления значения функции равна остаточному члену $R_m(x)$. Если абсолютная погрешность вычисления значения функции не должна превосходить ε, то находят номер m (желательно наименьший) такой, что $|R_m(x)| < \varepsilon$.

ПРИМЕР 3.50. Вычислить приближенное значение $\ln 1{,}3$ с помощью многочлена Тейлора третьего порядка и оценить погрешность вычисления.

◀ Рассмотрим функцию $f(x) = \ln(1 + x)$. Положим в формуле Тейлора $a = 0$, $x = 0{,}3$. Найдем производные заданной функции до 4-го порядка включительно:

$$f'(x) = \frac{1}{1+x},\quad f''(x) = -\frac{1}{(1+x)^2},\quad f'''(x) = \frac{2!}{(1+x)^3},\quad f^{(4)}(x) = -\frac{3!}{(1+x)^4}. \tag{3.16}$$

При $a = 0$ получаем $f(0) = 0$, $f'(0) = 1$, $f''(0) = -1$, $f'''(0) = 2$. Следовательно, по формуле Тейлора с остаточным членом в форме Лагранжа

$$\ln 1{,}3 = f(0{,}3) = 0 + 0{,}3 - \frac{0{,}3^2}{2} + \frac{0{,}3^3}{3} + R_3(0{,}3),$$

где $R_3(0{,}3) = \dfrac{f^{(4)}(\gamma)}{4!}0{,}3^4 = -\dfrac{0{,}3^4}{4(1+\gamma)^4}$, $0 < \gamma < 0{,}3$. Точное значение числа γ неизвестно.

Поэтому оценим модуль остаточного члена сверху. Так как $\gamma > 0$, то

$$|R_3(0{,}3)| = \frac{0{,}3^4}{4(1+\gamma)^4} < \frac{0{,}3^4}{4(1+0)^4} = 0{,}002025.$$

Таким образом, $\ln 1{,}3 \approx 0 + 0{,}3 - \frac{0{,}3^2}{2} + \frac{0{,}3^3}{3} = 0{,}264.$ Абсолютная погрешность вычисления не превосходит 0,002025. ►

ПРИМЕР 3.51. Вычислить ln 1,3 с абсолютной погрешностью, не превосходящей 0,001.

◄ Положим $f(x) = \ln(1 + x)$. Нетрудно видеть (см. (3.16)), что

$$f^{(m)}(x) = (-1)^{m+1}\frac{(m-1)!}{(1+x)^m}.$$

Применяя формулу Маклорена с остаточным членом в форме Лагранжа к функции $f(x) = \ln(1 + x)$, получаем

$$\ln 1{,}3 = f(0{,}3) = 0{,}3 - \frac{0{,}3^2}{2} + \frac{0{,}3^3}{3} - \ldots + (-1)^{m+1}\frac{0{,}3^m}{m} + R_m(0{,}3),$$

где $R_m(0{,}3) = \frac{f^{(m+1)}(\gamma)}{(m+1)!}0{,}3^{m+1} = (-1)^{m+2}\frac{0{,}3^{m+1}}{(m+1)(1+\gamma)^{m+1}},$ $0 < \gamma < 0{,}3$. Отсюда

$$|R_m(0{,}3)| = \frac{0{,}3^{m+1}}{(m+1)(1+\gamma)^{m+1}} < \frac{0{,}3^{m+1}}{m+1}.$$

Наименьшее значение m, удовлетворяющее условию $\frac{0{,}3^{m+1}}{m+1} < 0{,}001,$ равно 4. Таким образом, $\ln 1{,}3 \approx 0 + 0{,}3 - \frac{0{,}3^2}{2} + \frac{0{,}3^3}{3} - \frac{0{,}3^4}{4} = 0{,}261975$ с абсолютной погрешностью, не превосходящей 0,001. Полученный результат округлим до трех цифр после запятой в соответствии с заданной точностью вычисления. То есть полагаем $\ln 1{,}3 \approx 0{,}262$. ►

В задачах 3.523–3.526 найти приближения заданных чисел с помощью многочлена Тейлора третьего порядка и оценить абсолютную погрешность вычисления ε.

3.523. $\sin 1$. **3.524.** $\sqrt{e}$. **3.525.** $\ln 1{,}6$. **3.526.** $\sqrt{5}$.

В задачах 3.527–3.530 вычислить с абсолютной погрешностью, не превосходящей 0,001.

3.527. $\cos 0{,}5$. **3.528.** e. **3.529.** $\ln 0{,}9$. **3.530.** $\sqrt{0{,}8}$.

Формула Тейлора с остаточным членом в форме Пеано используется при вычислении пределов.

ПРИМЕР 3.52. Вычислить предел $\lim\limits_{x\to 0}\frac{2\sin x - 2\ln(1+x) - x^2}{x^3}$.

◄ Находим разложения по формуле Маклорена функций $\sin x$ и $\ln(1 + x)$:

$$\sin x = x - \frac{x^3}{6} + o_1(x^4), \quad \ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + o_2(x^3).$$

Следовательно,

$$\lim_{x\to 0}\frac{2\sin x-2\ln(1+x)-x^2}{x^3}=\lim_{x\to 0}\frac{2x-\frac{x^3}{3}+2o_1(x^4)-2x+x^2-\frac{2x^3}{3}-2o_2(x^3)-x^2}{x^3}=$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{-x^3+2o_1(x^4)-2o_2(x^3)}{x^3}=-1. ▶$$

В задачах 3.531–3.534 вычислить пределы, используя разложения по формуле Тейлора.

3.531. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2\sqrt{1+x}-\ln(1+x)-2}{5x^2+7x^3}$. **3.532.** $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt[5]{1+2x}-\sqrt[7]{1+x}}{x}$.

3.533. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\operatorname{ch}x^2}{x^4+x^5}$. **3.534.** $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x-\operatorname{sh}x}{x^3+x^4}$.

§ 3.7. ИССЛЕДОВАНИЕ ФУНКЦИЙ И ПОСТРОЕНИЕ ГРАФИКОВ

1. Возрастание и убывание функции. Экстремумы

Функция $f(x)$ называется *возрастающей* (*убывающей*) на интервале (a, b), если для любых $x_1, x_2 \in (a, b)$ из неравенства $x_1 < x_2$ следует неравенство $f(x_1) < f(x_2)$ (соответственно $f(x_1) > f(x_2)$).

Если функция $f(x)$ дифференцируема на интервале (a, b) и $f'(x) > 0$ ($f'(x) < 0$) на (a, b), то функция $f(x)$ возрастает (убывает) на (a, b) (*достаточное условие возрастания* (*убывания*) *функции*).

Точка x_0 называется *точкой максимума* (*минимума*) функции $f(x)$, а число $f(x_0)$ — *максимумом* (*минимумом*) функции, если существует окрестность точки x_0 такая, что для всякой точки x из этой окрестности выполняется неравенство $f(x) \le f(x_0)$ ($f(x) \ge f(x_0)$). Точки максимума и минимума функции называются ее *точками экстремума*.

Необходимое условие экстремума. Если точка x_0 является точкой экстремума функции $f(x)$, дифференцируемой в этой точке, то $f'(x_0) = 0$. Обратное, вообще говоря, неверно. Точки, в которых производная равна нулю, называют *стационарными точками* функции. Экстремум может также достигаться в точках, где производная не существует. Точки, в которых функция определена, а производная равна нулю или не существует, называются *критическими*.

Достаточные условия экстремума непрерывной функции.

1) Пусть функция $f(x)$ дифференцируема в некоторой окрестности $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ критической точки x_0, за исключением, быть может, самой точки x_0. Если на интервалах $(x_0 - \delta, x_0)$ и $(x_0, x_0 + \delta)$ производная $f'(x)$ имеет противоположные знаки, то x_0 — точка экстремума. Если $f'(x) > 0$ при $x \in (x_0 - \delta, x_0)$ и $f'(x) < 0$ при $x \in (x_0, x_0 + \delta)$, то x_0 — точка максимума. Если $f'(x) < 0$ на $(x_0 - \delta, x_0)$ и $f'(x) > 0$ на $x \in (x_0, x_0 + \delta)$, то x_0 — точка минимума.

2) Пусть функция $f(x)$ дважды дифференцируема в стационарной точке x_0. Если $f''(x_0) > 0$, то x_0 — точка минимума функции $f(x)$, если $f''(x_0) < 0$, то x_0 — точка максимума.

ПРИМЕР 3.53. Найти промежутки монотонности и точки экстремума функции $f(x) = \dfrac{\ln x}{x}$.

◄ Функция определена и непрерывна при $x > 0$. Находим производную:

$$f'(x) = \frac{1 - \ln x}{x^2}.$$

Производная равна нулю, если $\ln x = 1$, то есть $x = e$. Таким образом, точка $x = e$ является критической точкой. Она разбивает область определения на два интервала: $(0, e)$ и $(e, +\infty)$. Так как $f'(x) > 0$ на интервале $(0, e)$, то функция $f(x)$ возрастает на $(0, e)$. На интервале $(e, +\infty)$ производная $f'(x) < 0$ и, следовательно, функция $f(x)$ убывает на нем. Так как производная меняет знак с плюса на минус при переходе через точку $x = e$, то $x = e$ — точка максимума. Максимум равен $f(e) = 1/e$. ►

В задачах 3.535–3.540 найти промежутки монотонности и точки экстремума функций.

3.535. $f(x) = x\sqrt{1 - x^2}$.

3.536. $f(x) = \dfrac{2x^2 - 1}{x^4}$.

3.537. $f(x) = \dfrac{x}{\ln x}$.

3.538. $f(x) = x - 2\sin x$.

3.539. $f(x) = x - 2\ln x$.

3.540. $f(x) = xe^{-x^2}$.

Наибольшего (наименьшего) значения на отрезке $[a, b]$ непрерывная на нем функция достигает или в критических точках, принадлежащих отрезку, или на концах этого отрезка.

В задачах 3.541–3.546 найти наибольшее и наименьшее значения функций на указанных отрезках.

3.541. $f(x) = -3x^4 + 6x^2$, $[-2, 2]$.

3.542. $y = x + 2\sqrt{x}$, $[0, 4]$.

3.543. $f(x) = \dfrac{x - 1}{x + 1}$, $[0, 4]$.

3.544. $f(x) = \dfrac{1 - x + x^2}{1 + x - x^2}$, $[0, 1]$.

3.545. $f(x) = \sqrt[3]{x + 1} - \sqrt[3]{x - 1}$, $[-7, 7]$.

3.546. $f(x) = \operatorname{arctg}\dfrac{1 - x}{1 + x}$, $[0, 1]$.

3.547. Два тела движутся с постоянными скоростями v_1 м/с и v_2 м/с по двум перпендикулярным прямым по направлению к точке пересечения этих прямых, от которой в начале движения первое тело находилось на расстоянии a м, второе — на расстоянии b м. Через сколько секунд после начала движения расстояние между телами будет наименьшим?

3.548. Окно имеет форму прямоугольника, завершенного полукругом. Периметр фигуры равен p. При каких размерах прямоугольника окно будет пропускать наибольшее количество света?

3.549. Из трех досок одинаковой ширины сколачивается желоб для подачи воды. При каком угле наклона боковых стенок к днищу желоба площадь его поперечного сечения будет наибольшей?

3.550. Банка данного объема V имеет форму цилиндра. Найти соотношение высоты и диаметра основания банки, чтобы на ее изготовление пошло наименьшее количество материала.

3.551. В равнобедренный треугольник с основанием a и высотой h вписан прямоугольник, две вершины которого лежат на основании треугольника, а две — на боковых сторонах. Найти наибольшую площадь прямоугольника.

3.552. Периметр осевого сечения цилиндра равен $6a$. Найти наибольший объем такого цилиндра.

3.553. Цилиндр вписан в конус с высотой h и радиусом основания r. Найти наибольший объем цилиндра.

3.554. Найти наименьший объем конуса, описанного около шара радиуса r.

2. Выпуклость графика функции. Точки перегиба

График дифференцируемой функции $f(x)$ называется *выпуклым вниз* (*вверх*) на интервале (a, b), если график на этом промежутке расположен не ниже (не выше) касательной, проведенной к нему в любой точке с абсциссой $x \in (a, b)$ (на рис. 3.5 график функции $f(x)$ является выпуклым вниз на интервале (a, x_0), выпуклым вверх на интервале (x_0, b)).

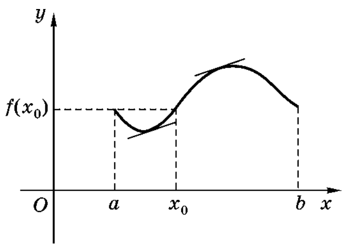


Рис. 3.5

Если функция $f(x)$ дважды дифференцируема на интервале (a, b) и $f''(x) > 0$ ($f''(x) < 0$) при всех $x \in (a, b)$, то ее график является выпуклым вниз (вверх) на этом интервале (*достаточное условие выпуклости*).

В простых случаях область определения функции $f(x)$ можно разбить на конечное число интервалов с постоянным направлением выпуклости. Точка $(x_0, f(x_0))$, в которой меняется направление выпуклости, называется *точкой перегиба* (см. рис. 3.5). В точке перегиба (точнее, в абсциссе точки перегиба) $f''(x) = 0$ или не существует (*необходимое условие точки перегиба*).

Достаточное условие точки перегиба. Пусть функция $f(x)$ дважды дифференцируема в некоторой окрестности $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ точки x_0, за исключением, быть может, самой точки x_0. Если на интервалах $(x_0 - \delta, x_0)$ и $(x_0, x_0 + \delta)$ вторая производная $f''(x)$ имеет разные знаки, то x_0 — точка перегиба.

ПРИМЕР 3.54. Найти интервалы выпуклости и точки перегиба функции $f(x) = \dfrac{\ln x}{x}$.

◀ Найдем вторую производную: $f''(x) = \dfrac{2\ln x - 3}{x^3}$.

Вторая производная равна нулю, если $2\ln x = 3$, то есть $x = \sqrt{e^3}$. Точка $x = \sqrt{e^3}$ разбивает область определения функции на два интервала: $(0, \sqrt{e^3})$ и $(\sqrt{e^3}, +\infty)$. Так как $f''(x) < 0$ на $(0, \sqrt{e^3})$, то график функции $f(x)$ является выпуклым вверх на нем. На интервале $(\sqrt{e^3}, +\infty)$ вторая производная $f''(x) > 0$ и, следовательно, функция $f(x)$ является выпуклой вниз на $(\sqrt{e^3}, +\infty)$, а точка $x = \sqrt{e^3}$ является точкой перегиба. ▶

В задачах 3.555–3.562 найти интервалы выпуклости, точки перегиба и угловые коэффициенты касательных в точках перегиба графиков указанных функций.

3.555. $f(x) = x^3 - x + 2$. **3.556.** $f(x) = x^4 + 6x^2$.
3.557. $f(x) = \sin x$. **3.558.** $f(x) = \operatorname{arctg} x$.
3.559. $f(x) = \sqrt[3]{x+1} - \sqrt[3]{x-1}$. **3.560.** $f(x) = xe^{2x} + 1$.
3.561. $f(x) = x\ln|x|$. **3.562.** $f(x) = e^{-x^2}$.

3. Асимптоты

Пусть для функции $f(x)$ существует такая прямая, что расстояние от точки $M(x, f(x))$ графика функции до нее стремится к 0 при бесконечном удалении точки M от начала координат. Тогда эта прямая называется *асимптотой* графика функции.

Если при этом абсцисса x точки M стремится к конечному числу a, то прямая $x = a$ является *вертикальной асимптотой*. Для существования вертикальной асимптоты $x = a$ необходимо и достаточно, чтобы хотя бы один из пределов $\lim\limits_{x \to a \pm 0} f(x)$ был равен бесконечности.

Непрерывные на всей числовой прямой функции не имеют вертикальных асимптот.

Если же абсцисса x точки M стремится к $+\infty$ $(-\infty)$, то график функции имеет *правую* (*левую*) *наклонную асимптоту* $y = kx + b$. Для того чтобы прямая $y = kx + b$ была правой наклонной асимптотой графика функции $f(x)$, необходимо и достаточно, чтобы

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x} = k \quad \text{и} \quad \lim_{x \to +\infty} (f(x) - kx) = b.$$

Аналогичное утверждение верно для левой асимптоты.

ПРИМЕР 3.55. Найти асимптоты графика функции $f(x) = \dfrac{x^2+1}{x-1}$.

◀ Функция непрерывна на всей числовой оси, кроме точки $x = 1$. Поэтому только прямая $x = 1$ может быть вертикальной асимптотой. Так как $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{x^2+1}{x-1} = \infty$, то прямая $x = 1$ действительно является вертикальной асимптотой.

Найдем наклонные асимптоты. Так как $\lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{f(x)}{x} = \lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{x^2+1}{(x-1)x} = 1$, то $k = 1$ и

$$b = \lim_{x \to \infty} (f(x) - kx) = \lim_{x \to \infty} \left(\frac{x^2+1}{x-1} - 1 \cdot x \right) = \lim_{x \to \infty} \frac{x+1}{x-1} = 1.$$

Следовательно, прямая $y = x + 1$ является наклонной асимптотой. ▶

В задачах 3.563–3.572 найти асимптоты графиков заданных функций.

3.563. $f(x) = \dfrac{x^2}{x+1}$. **3.564.** $f(x) = \dfrac{3x^3 + 2x^2 + 1}{x^2 + 3}$.

3.565. $f(x) = 2x + \dfrac{\sin x}{x}$. **3.566.** $f(x) = 3x + \operatorname{arctg} 5x$.

3.567. $f(x) = \sqrt{x^2 + 2x + 3}$. **3.568.** $f(x) = e^{\frac{1}{x-1}}$.

3.569. $f(x) = \dfrac{\ln(x+1)}{x^2} + x$. **3.570.** $f(x) = \sqrt[3]{x^3 - x^2}$.

3.571. $f(x) = \dfrac{\sqrt{x^2-3}}{x}$. **3.572.** $f(x) = x\ln\left(e + \dfrac{1}{x}\right)$.

4. Построение графиков функций

При построении графика функции $f(x)$, имеющей непрерывную вторую производную всюду в области определения, за исключением, быть может, конечного числа точек, сначала проводят элементарное исследование. Выясняют особенности функции (если они имеются): четность, нечетность, периодичность, нули и промежутки постоянства знака, точки пересечения с осью Oy, промежутки непрерывности, точки разрыва и их характер, асимптоты. Затем с использованием первой и второй производной находятся промежутки монотонности и точки экстремума, промежутки выпуклости и точки перегиба.

ПРИМЕР 3.56. Построить график функции $f(x)=\dfrac{x^4}{x^3-1}$.

◀ Функция определена и непрерывна всюду, кроме $x = 1$, равна 0 при $x = 0$, положительна при $x > 1$, отрицательна при $x < 1$. Так как область определения функции не симметрична относительно начала координат, то функция не может быть четной или нечетной. Она не является также периодической.

Точка $x = 1$ является точкой разрыва второго рода, потому что $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^4}{x^3-1}=\infty$.

Следовательно, прямая $x = 1$ является вертикальной асимптотой графика функции. Для построения графика функции полезно найти односторонние пределы в точке $x = 1$. Имеем

$$\lim_{x\to 1-0}\frac{x^4}{x^3-1}=-\infty \quad\text{и}\quad \lim_{x\to 1+0}\frac{x^4}{x^3-1}=+\infty.$$

Найдем наклонные асимптоты. Так как

$$\lim_{x\to\pm\infty}\frac{x^4}{(x^3-1)x}=1=k \quad\text{и}\quad \lim_{x\to\pm\infty}\left(\frac{x^4}{x^3-1}-1\cdot x\right)=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{x}{x^3-1}=0=b,$$

то прямая $y = x$ является одновременно и правой и левой наклонной асимптотой.

Интервалы возрастания и убывания, а также экстремумы функции находим с помощью первой производной:

$$f'(x)=\frac{4x^3(x^3-1)-3x^6}{(x^3-1)^2}=\frac{x^6-4x^3}{(x^3-1)^2}=\frac{x^3(x^3-4)}{(x^3-1)^2}.$$

Точки $x_1 = 0$, $x_2 = 1$, $x_3=\sqrt[3]{4}$ разбивают область определения функции на четыре промежутка монотонности. При $x\in(-\infty,0)\cup(\sqrt[3]{4},+\infty)$ производная $f'(x) > 0$, функция возрастает на интервалах $(-\infty, 0)$ и $(\sqrt[3]{4},+\infty)$. При $x\in(0,1)\cup(1,\sqrt[3]{4})$ производная $f'(x) < 0$, функция убывает на интервалах $(0, 1)$ и $(1,\sqrt[3]{4})$. Так как производная меняет знак при переходе через точки $x = 0$ и $x=\sqrt[3]{4}$, то это точки экстремумов, а именно: $x_1 = 0$ — точка максимума, $x_3=\sqrt[3]{4}$ — точка минимума. Значения функции в точках экстремума: $f(0)=0$, $f(\sqrt[3]{4})=\dfrac{4\cdot\sqrt[3]{4}}{3}$.

Интервалы выпуклости, точки перегиба находим с помощью второй производной:

$$f''(x)=\frac{(6x^5-12x^2)\cdot(x^3-1)^2-6x^2(x^3-1)\cdot(x^6-4x^3)}{(x^3-1)^4}=$$

$$=\frac{6x^2(x^3-1)((x^3-2)\cdot(x^3-1)-x^6+4x^3))}{(x^3-1)^4}=\frac{6x^2(x^3+2)}{(x^3-1)^3}.$$

Точки $x_1 = 0$, $x_2 = 1$, $x_4 = -\sqrt[3]{2}$ разбивают область определения функции на четыре промежутка выпуклости. При $x \in (-\infty, -\sqrt[3]{2}) \cup (1, +\infty)$ вторая производная $f'' > 0$, график функции является выпуклым вниз на интервалах $(-\infty, -\sqrt[3]{2})$ и $(1, +\infty)$. При $x \in (-\sqrt[3]{2}, 0) \cup (0, 1)$ вторая производная $f'' < 0$, график функции является выпуклым вверх на интервалах $(-\sqrt[3]{2}, 0)$ и $(0, 1)$. При переходе через точку $x_4 = -\sqrt[3]{2}$ вторая производная меняет знак, поэтому $x_4 = -\sqrt[3]{2}$ — точка перегиба. При переходе через точку $x_1 = 0$ вторая производная знака не меняет, и эта точка не является точкой перегиба. Значения функции и первой производной в точке перегиба:

$$f(-\sqrt[3]{2}) = -\frac{2\sqrt[3]{2}}{3}, \; f'(-\sqrt[3]{2}) = \frac{4}{3}.$$

Результаты проведенных исследований сведены в таблицу 3.1.

Таблица 3.1

x	$(-\infty, -\sqrt[3]{2})$	$-\sqrt[3]{2}$	$(-\sqrt[3]{2}, 0)$	0	(0, 1)	$(1, \sqrt[3]{4})$	$\sqrt[3]{4}$	$(\sqrt[3]{4}, +\infty)$
f'	>0			0	<0	<0	0	>0
f''	>0	0	<0			>0		
f	↗	$-\frac{2\sqrt[3]{2}}{3}$	↗	0	↘	↘	$\frac{4\sqrt[3]{4}}{3}$	↗
	вып. вниз		вып. вверх			вып. вниз		

График функции приведен на рис. 3.6. ▶

В задачах 3.573–3.590 построить графики функций.

3.573. $f(x) = x^3 - 3x$. **3.574.** $f(x) = x^4 - 2x^2$.

3.575. $f(x) = \dfrac{x}{x^3 + 2}$. **3.576.** $f(x) = \dfrac{x^3}{2(x-1)^2}$.

3.577. $f(x) = \dfrac{x^3 - 3x}{x^2 - 1}$. **3.578.** $f(x) = \dfrac{x^2 - 1}{x^2 + 1}$.

3.579. $f(x) = \sqrt[3]{x^2 - 2x}$. **3.580.** $f(x) = \sqrt[3]{(x+1)^2} + \sqrt[3]{(x-1)^2}$.

3.581. $f(x) = \dfrac{x}{\sqrt{x^2 + 1}}$. **3.582.** $f(x) = \dfrac{x^3}{\sqrt{x^4 + 1}}$.

3.583. $f(x) = x \operatorname{arctg} x$. **3.584.** $f(x) = \dfrac{x}{2} + \operatorname{arcctg} x$.

3.585. $f(x) = e^{2x - x^2}$. **3.586.** $f(x) = xe^{-x^2/2}$.

3.587. $f(x) = \dfrac{1}{x \ln x}$. **3.588.** $f(x) = x^2 \ln x$.

3.589. $f(x) = \cos x + \sin x$. **3.590.** $f(x) = x^x$, $x > 0$.

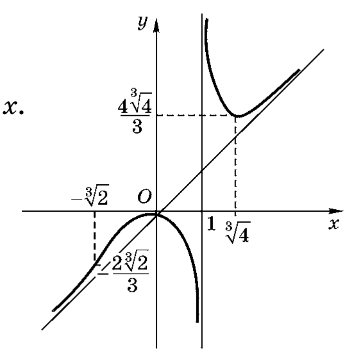


Рис. 3.6

Г Л А В А 4

ИНТЕГРАЛЬНОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ ФУНКЦИИ ОДНОЙ ПЕРЕМЕННОЙ

§ 4.1. НЕОПРЕДЕЛЕННЫЙ ИНТЕГРАЛ

1. Непосредственное интегрирование

Функция $F(x)$ называется *первообразной* функции $f(x)$ на некотором промежутке, если для всех x из этого промежутка $F'(x) = f(x)$. Если $F(x)$ является первообразной функции $f(x)$, то функции вида $F(x) + C$, где C — произвольная константа, и только они являются первообразными функции $f(x)$.

Неопределенным интегралом $\int f(x)dx$ функции $f(x)$ называется произвольная ее первообразная. Если функция $F(x)$ — некоторая первообразная функции $f(x)$, то $\int f(x)dx = F(x) + C$.

Свойства неопределенного интеграла. Пусть функции $f(x)$ и $g(x)$ имеют первообразные. Тогда (если в равенстве слева и справа есть знак неопределенного интеграла, то константу обычно не пишут):

1. $d\left(\int f(x)dx\right) = f(x)dx$.

2. $\int df(x) = f(x) + C$.

3. $\int (f(x) \pm g(x))dx = \int f(x)dx \pm \int g(x)dx$.

4. $\int \alpha f(x)dx = \alpha \int f(x)dx$.

5. Если $\int f(x)dx = F(x) + C$, то $\int f(ax+b)dx = \dfrac{1}{a}F(ax+b) + C$, $a \neq 0$.

Непосредственным интегрированием называют вычисление заданного интеграла через представление его в виде линейной комбинации основных неопределенных интегралов с помощью тождественных преобразований подынтегральной функции и применения свойств 2–5.

ПРИМЕР 4.1. Вычислить $\int \dfrac{5x^2 + 3\sqrt{x}\cdot\sin x - 2}{\sqrt{x}}dx$.

◄ Последовательно находим

$$\int \frac{5x^2 + 3\sqrt{x}\cdot\sin x - 2}{\sqrt{x}}dx = \int\left(\frac{5x^2}{\sqrt{x}} + \frac{3\sqrt{x}\cdot\sin x}{\sqrt{x}} - \frac{2}{\sqrt{x}}\right)dx =$$

$$= \int 5x^{3/2}dx + \int 3\sin x\,dx - \int 2x^{-1/2}dx = 5\int x^{3/2}dx + 3\int \sin x\,dx - 2\int x^{-1/2}dx =$$

$$= 2x^{5/2} - 3\cos x - 4x^{1/2} + C = 2x^2\sqrt{x} - 3\cos x - 4\sqrt{x} + C. \blacktriangleright$$

Таблица основных неопределенных интегралов

1. $\int x^\alpha dx = \dfrac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C,\ \alpha \neq -1.$	2. $\int \dfrac{dx}{x} = \ln\lvert x\rvert + C.$
3. $\int a^x dx = \dfrac{a^x}{\ln a} + C,\ a > 0,\ a \neq 1.$	4. $\int e^x dx = e^x + C.$
5. $\int \cos x dx = \sin x + C.$	6. $\int \sin x dx = -\cos x + C.$
7. $\int \dfrac{dx}{\cos^2 x} = \operatorname{tg} x + C.$	8. $\int \dfrac{dx}{\sin^2 x} = -\operatorname{ctg} x + C.$
9. $\int \operatorname{ch} x\, dx = \operatorname{sh} x + C.$	10. $\int \operatorname{sh} x\, dx = \operatorname{ch} x + C.$
11. $\int \dfrac{dx}{\operatorname{ch}^2 x} = \operatorname{th} x + C.$	12. $\int \dfrac{dx}{\operatorname{sh}^2 x} = -\operatorname{cth} x + C.$
13. $\int \dfrac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = \arcsin \dfrac{x}{a} + C,\ a > 0.$	14. $\int \dfrac{dx}{a^2 + x^2} = \dfrac{1}{a} \cdot \operatorname{arctg} \dfrac{x}{a} + C,\ a \neq 0.$
15. $\int \dfrac{dx}{x^2 - a^2} = \dfrac{1}{2a} \cdot \ln\left\lvert \dfrac{x-a}{x+a} \right\rvert + C,\ a \neq 0.$	16. $\int \dfrac{dx}{\sqrt{x^2 \pm a^2}} = \ln\lvert x + \sqrt{x^2 \pm a^2}\rvert + C,\ a \neq 0.$
17. $\int \dfrac{dx}{\sin x} = \ln\left\lvert \operatorname{tg} \dfrac{x}{2} \right\rvert + C.$	18. $\int \dfrac{dx}{\cos x} = \ln\left\lvert \operatorname{tg}\left(\dfrac{x}{2} + \dfrac{\pi}{4}\right) \right\rvert + C.$

ПРИМЕР 4.2. Вычислить $\int (3x+10)^{10} dx.$

◄ Так как $\int x^{10} dx = \dfrac{x^{11}}{11} + C,$ то в силу свойства 5 имеем

$$\int (3x+10)^{10} dx = \frac{(3x+10)^{11}}{33} + C. \blacktriangleright$$

В задачах 4.1–4.30 вычислить непосредственным интегрированием.

4.1. $\int \left(4x^3 + 3x^2 + \dfrac{1}{x^2}\right) dx.$ **4.2.** $\int (x^2+1)^2 dx.$ **4.3.** $\int \dfrac{x^2+x+1}{\sqrt[3]{x^5}} dx.$

4.4. $\int \dfrac{x^2}{x^2+1} dx.$ **4.5.** $\int (2x-5)^7 dx.$ **4.6.** $\int \dfrac{dx}{\sqrt[5]{(5x+1)^6}}.$

4.7. $\int \dfrac{4x+5}{2x-1} dx.$ **4.8.** $\int \dfrac{x+1}{3x+1} dx.$ **4.9.** $\int \dfrac{x^3+1}{x+1} dx.$

4.10. $\int \dfrac{3x^3+x+1}{x-1} dx.$ **4.11.** $\int \cos \dfrac{x-2}{3} dx.$ **4.12.** $\int \sin(3x+1) dx.$

4.13. $\int \cos x \cdot \sin 3x\, dx.$ **4.14.** $\int \cos 2x \cdot \cos 3x\, dx.$ **4.15.** $\int \operatorname{tg}^2 x\, dx.$

4.16. $\int \operatorname{cth}^2 x\, dx.$ **4.17.** $\int \dfrac{3dx}{\sqrt{4-x^2}}.$ **4.18.** $\int \dfrac{3dx}{\sqrt{5-4x^2}}.$

4.19. $\int \dfrac{dx}{\sqrt{16+x^2}}.$ **4.20.** $\int \dfrac{dx}{\sqrt{1+16x^2}}.$

4.21. $\int \frac{dx}{x^2+25}$. **4.22.** $\int \frac{2}{16x^2+5}dx$.

4.23. $\int \frac{dx}{x^2-8}$. **4.24.** $\int \frac{dx}{4x^2-9}$.

4.25. $\int \frac{\sqrt{1-x^2}+\sqrt{1+x^2}}{\sqrt{1-x^4}}dx$. **4.26.** $\int (\sin x-\cos x)^2dx$.

4.27. $\int (2^x+3^x)^2dx$. **4.28.** $\int 2^x(4^x+3^{-x}+x^2 2^{-x})dx$.

4.29. $\int \frac{dx}{\sin^2(4x+1)}$. **4.30.** $\int \cos^2 x\,dx$.

2. Метод замены

Если $\int f(x)dx = F(x)+C$ и $x = \varphi(t)$, то справедлива *формула замены переменной*

$$\int f(\varphi(t))d\varphi(t) = \int f(\varphi(t))\varphi'(t)dt = F(\varphi(t))+C.$$

В этой формуле предполагается, что $f(x)$ есть непрерывная функция на некотором интервале (a, b), а $x = \varphi(t)$ — непрерывно дифференцируемая функция на интервале (c, d) таком, что область значений функции φ принадлежит (a, b).

В несложных случаях формула замены переменной может применяться в ином варианте, называемом *методом подведения под знак дифференциала*. Пусть найдены непрерывная функция $g(u)$ и непрерывно дифференцируемая функция $u = \varphi(x)$ такие, что подынтегральное выражение $f(x)dx$ может быть записано в виде

$$f(x)dx = g(\varphi(x))\varphi'(x)dx = g(\varphi(x))d\varphi(x)$$

и, кроме того, известно, что $\int g(u)du = G(u)+C$. Тогда $\int f(x)dx = G(\varphi(x))+C$.

ПРИМЕР 4.3. Вычислить интеграл $\int x^2\sqrt{1+x^3}\,dx$.

◀ 1-й способ. Сделаем замену $x=\sqrt[3]{t}$. Тогда $dx=\frac{1}{3\sqrt[3]{t^2}}dt$ и

$$\int x^2\sqrt{1+x^3}\,dx = \int (\sqrt[3]{t})^2\sqrt{1+(\sqrt[3]{t})^3}\,\frac{1}{3\sqrt[3]{t^2}}dt = \frac{1}{3}\int\sqrt{1+t}\,dt = \frac{2}{9}\sqrt{(1+t)^3}+C.$$

Выполнив обратную замену $t = x^3$, окончательно получим

$$\int x^2\sqrt{1+x^3}\,dx = \frac{2}{9}\sqrt{(1+x^3)^3}+C.$$

2-й способ. Внесем x^2 под знак дифференциала:

$$\int x^2\sqrt{1+x^3}\,dx = \frac{1}{3}\int\sqrt{1+x^3}\,d(x^3+1) = \frac{1}{3}\int\sqrt{u}\,du = \frac{2}{9}\sqrt{u^3}\Big|_{u=x^3+1} = \frac{2}{9}\sqrt{(1+x^3)^3}+C. ▶$$

ПРИМЕР 4.4. Вычислить $\int \frac{\operatorname{arctg} x}{1+x^2}dx$.

◀ Заметим, что $(\operatorname{arctg} x)' = \frac{1}{1+x^2}$. Следовательно, подводя под знак дифференциала, получаем

$$\int \frac{\operatorname{arctg} x}{1+x^2}dx = \int \operatorname{arctg} x\,d(\operatorname{arctg} x) = \int u\,du = \frac{u^2}{2}+C = \frac{\operatorname{arctg}^2 x}{2}+C. ▶$$

В задачах 4.31–4.54 вычислить интегралы.

4.31. $\int x^3(x^4-1)^2dx$. **4.32.** $\int x^2\sqrt{3x^3+2}\,dx$.

4.33. $\int\frac{x\,dx}{\sqrt{2x^2-1}}$. **4.34.** $\int\frac{(2x+3)dx}{\sqrt{x^2+3x+2}}$.

4.35. $\int\cos x\,e^{\sin x}dx$. **4.36.** $\int(3x^2+1)\sin(x^3+x-5)dx$.

4.37. $\int\frac{e^{\sqrt{x}}dx}{\sqrt{x}}$. **4.38.** $\int\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}\arcsin x}$.

4.39. $\int\frac{x^3dx}{\sqrt{1-x^8}}$. **4.40.** $\int\frac{dx}{\cos^2x\sqrt{\operatorname{tg}x+3}}$.

4.41. $\int\frac{\ln x\,dx}{x}$. **4.42.** $\int\frac{dx}{x\sqrt[5]{\ln x}}$.

4.43. $\int\frac{2^x dx}{1+4^x}$. **4.44.** $\int\frac{dx}{e^x+1}$.

4.45. $\int\cos^3x\sin x\,dx$. **4.46.** $\int\operatorname{ctg}3x\,dx$.

4.47. $\int\operatorname{sh}x\operatorname{ch}^3x\,dx$. **4.48.** $\int\frac{\operatorname{ch}x\,dx}{\operatorname{sh}^3x}$.

4.49. $\int\frac{dx}{x+2\sqrt{x}}$. **4.50.** $\int x\sqrt{x-1}\,dx$.

4.51. $\int x(3x+1)^9dx$. **4.52.** $\int\sqrt{1-x^2}\,dx$.

4.53. $\int\sqrt{1+x^2}\,dx$. **4.54.** $\int\sqrt{x^2-1}\,dx$.

3. Интегрирование по частям

Пусть $u(x)$ и $v(x)$ — непрерывно дифференцируемые функции. Тогда верна *формула интегрирования по частям*

$$\int u(x)\cdot v'(x)dx=u(x)\cdot v(x)-\int u'(x)v(x)dx,$$

или, в краткой форме,

$$\int udv=uv-\int vdu.$$

Для применения формулы интегрирования по частям при вычислении $\int f(x)dx$ необходимо представить подынтегральное выражение $f(x)dx$ в виде произведения $u(x)\cdot v'(x)dx=u(x)dv(x)$. За функцию $u(x)$ часто (но не всегда!) принимают множитель, который упрощается при дифференцировании. В частности, если под знаком интеграла стоит произведение алгебраического многочлена на тригонометрическую или показательную функцию, то за $u(x)$ выбирают многочлен. При этом формула интегрирования по частям может применяться неоднократно.

ПРИМЕР 4.5. Вычислить $\int(x^2+3)\sin(2x+1)dx$.

$$◄\ \int(x^2+3)\sin(2x+1)dx=\left|\begin{array}{ll} u=x^2+3 & du=2xdx \\ dv=\sin(2x+1)dx & v=-\frac{1}{2}\cos(2x+1)\end{array}\right|=$$

$$=-\frac{1}{2}(x^2+3)\cos(2x+1)+\int x\cos(2x+1)dx.$$

Для вычисления полученного интеграла справа снова применим интегрирование по частям, полагая $u = x$, $dv = \cos(2x + 1)dx$. Тогда $du = dx$, $v = \frac{1}{2}\sin(2x+1)$ и

$$\int(x^2+3)\sin(2x+1)dx = -\frac{1}{2}(x^2+3)\cos(2x+1) + \int x\cos(2x+1)dx =$$
$$= -\frac{1}{2}(x^2+3)\cos(2x+1) + \frac{1}{2}x\sin(2x+1) - \frac{1}{2}\int\sin(2x+1)dx =$$
$$= -\frac{1}{2}(x^2+3)\cos(2x+1) + \frac{1}{2}x\sin(2x+1) + \frac{1}{4}\cos(2x+1) + C =$$
$$= \frac{1}{4}((-2x^2-5)\cos(2x+1) + 2x\sin(2x+1)) + C. \blacktriangleright$$

ПРИМЕР 4.6. Вычислить интеграл $\int(5x^4+2x)\ln x\,dx$.

◀ Здесь за $u(x)$ удобнее взять $\ln x$, а не многочлен $5x^4 + 2x$. Получим

$$\int(5x^4+2x)\ln x\,dx = \left|\begin{matrix} u=\ln x & du=\dfrac{dx}{x} \\ dv=(5x^4+2x)dx & v=x^5+x^2 \end{matrix}\right| = (x^5+x^2)\ln x - \int\frac{x^5+x^2}{x}dx =$$
$$= (x^5+x^2)\ln x - \int(x^4+x)dx = (x^5+x^2)\ln x - \frac{x^5}{5} - \frac{x^2}{2} + C. \blacktriangleright$$

В задачах 4.55–4.66, применяя формулу интегрирования по частям, вычислить интегралы.

4.55. $\int x\sin x\,dx$. **4.56.** $\int x\cos 2x\,dx$.

4.57. $\int(x^2+2x)\cos 3x\,dx$. **4.58.** $\int x^2\sin 2x\,dx$.

4.59. $\int xe^x dx$. **4.60.** $\int(x^2-1)2^x dx$.

4.61. $\int\ln x\,dx$. **4.62.** $\int\frac{\ln x}{\sqrt{x}}dx$.

4.63. $\int\ln^2 x\,dx$. **4.64.** $\int\operatorname{arctg} x\,dx$.

4.65. $\int\arcsin x\,dx$. **4.66.** $\int x\operatorname{arctg} x\,dx$.

Иногда после применения формулы интегрирования по частям в правой части получается выражение, содержащее исходный интеграл, то есть получается уравнение, где неизвестным является искомый интеграл.

ПРИМЕР 4.7. Вычислить $\int\sqrt{1+x^2}\,dx$.

$$\blacktriangleleft\ \int\sqrt{1+x^2}\,dx = \left|\begin{matrix} u=\sqrt{1+x^2} & du=\dfrac{x}{\sqrt{1+x^2}}dx \\ dv=dx & v=x \end{matrix}\right| = x\sqrt{1+x^2} - \int\frac{x^2}{\sqrt{1+x^2}}dx =$$
$$= x\sqrt{1+x^2} - \int\frac{x^2+1-1}{\sqrt{1+x^2}}dx = x\sqrt{1+x^2} + \int\frac{dx}{\sqrt{1+x^2}} - \int\sqrt{1+x^2}dx =$$
$$= x\sqrt{1+x^2} + \ln\left|x+\sqrt{1+x^2}\right| - \int\sqrt{1+x^2}dx.$$

Отсюда $2\int\sqrt{1+x^2}\,dx = x\sqrt{1+x^2} + \ln\left|x+\sqrt{1+x^2}\right| + C_1$ и, окончательно,

$$\int\sqrt{1+x^2}\,dx = \frac{x}{2}\sqrt{1+x^2} + \frac{1}{2}\ln\left|x+\sqrt{1+x^2}\right| + C. \blacktriangleright$$

В задачах 4.67–4.70 вычислить интегралы.

4.67. $\int e^{3x}\sin x\,dx$. **4.68.** $\int e^{2x}\cos 3x\,dx$.

4.69. $\int \sqrt{x^2-1}\,dx$. **4.70.** $\int \sqrt{1-x^2}\,dx$.

4.71. Вывести рекуррентную формулу для вычисления интеграла

$$I_n = \int \frac{dx}{(x^2+1)^n}.$$

Найти I_2, зная, что $I_1 = \int \frac{dx}{x^2+1} = \operatorname{arctg} x + C$.

§ 4.2. ИНТЕГРИРОВАНИЕ ОСНОВНЫХ КЛАССОВ ЭЛЕМЕНТАРНЫХ ФУНКЦИЙ

1. Интегрирование рациональных дробей

Рассмотрим сначала интегрирование так называемых *простейших* рациональных дробей. Простейшими называют дроби следующих четырех типов:

$$1.\ \frac{A}{x-a}. \qquad 2.\ \frac{A}{(x-a)^n},\ n=2,3,\dots\ .$$

$$3.\ \frac{Ax+B}{x^2+px+q}. \qquad 4.\ \frac{Ax+B}{(x^2+px+q)^n},\ n=2,3,\dots\ .$$

При этом считаем, что квадратные трехчлены в знаменателях дробей 3-го и 4-го типов не имеют действительных корней (иначе их можно было бы представить в виде суммы дробей 1-го и 2-го типов). Интегрирование дробей 1-го и 2-го типов не вызывает трудностей. Методы интегрирования дробей 3-го и 4-го типов показаны ниже на примерах.

ПРИМЕР 4.8. Вычислить: а) $\int \frac{8x+4}{4x^2+4x+5}dx$; б) $\int \frac{dx}{4x^2+4x+5}$; в) $\int \frac{x+2}{4x^2+4x+5}dx$.

◀ а) Заметим, что числитель подынтегральной дроби равен производной знаменателя дроби. Следовательно, внося $8x+4$ под знак дифференциала, получим

$$\int \frac{8x+4}{4x^2+4x+5}dx = \int \frac{d(4x^2+4x+5)}{4x^2+4x+5} = \ln(4x^2+4x+5)+C.$$

б) Выделяя полный квадрат в квадратном трехчлене в знаменателе, получим

$$\int \frac{dx}{4x^2+4x+5} = \int \frac{dx}{(2x+1)^2+4} = \frac{1}{2}\int \frac{d(2x+1)}{(2x+1)^2+4} = \frac{1}{4}\operatorname{arctg}\frac{2x+1}{2}+C.$$

в) Сведем данный интеграл к линейной комбинации предыдущих интегралов. Для этого выделим в числителе производную знаменателя и затем разобьем интеграл на сумму двух интегралов:

$$\int \frac{x+2}{4x^2+4x+5}dx = \int \frac{\frac{1}{8}(8x+4)+\frac{3}{2}}{4x^2+4x+5}dx = \frac{1}{8}\int \frac{(8x+4)dx}{4x^2+4x+5}+\frac{3}{2}\int \frac{dx}{4x^2+4x+5}.$$

Следовательно,

$$\int \frac{x+2}{4x^2+4x+5}dx = \frac{1}{8}\ln(4x^2+4x+5)+\frac{3}{8}\operatorname{arctg}\frac{2x+1}{2}+C. \blacktriangleright$$

ПРИМЕР 4.9. Вычислить $\int \frac{x\,dx}{(x^2+2x+5)^2}$.

◀ Преобразуем интеграл, выделив в числителе производную знаменателя:

$$\int \frac{x\,dx}{(x^2+2x+5)^2} = \frac{1}{2}\int \frac{(2x+2)-2}{(x^2+2x+5)^2}dx = \frac{1}{2}\int \frac{(x^2+2x+5)'}{(x^2+2x+5)^2}dx - \int \frac{dx}{(x^2+2x+5)^2} =$$
$$= -\frac{1}{2(x^2+2x+5)} - \int \frac{dx}{(x^2+2x+5)^2}.$$

Для вычисления оставшегося интеграла выделим в знаменателе дроби полный квадрат:

$$\int \frac{dx}{(x^2+2x+5)^2} = \int \frac{dx}{((x+1)^2+2^2)^2} = \frac{1}{8}\int \frac{d\left(\frac{x+1}{2}\right)}{\left(\left(\frac{x+1}{2}\right)^2+1\right)^2} = \frac{1}{8}\int \frac{dt}{(t^2+1)^2}\bigg|_{t=\frac{x+1}{2}}.$$

Воспользуемся формулой интегрирования по частям:

$$\int \frac{dt}{(t^2+1)^2} = \int \frac{t^2+1-t^2}{(t^2+1)^2}dt = \int \frac{dt}{t^2+1} - \int \frac{t^2}{(t^2+1)^2}dt = \operatorname{arctg} t + \frac{1}{2}\int t\, d\left(\frac{1}{t^2+1}\right) =$$
$$= \operatorname{arctg} t + \frac{t}{2(t^2+1)} - \frac{1}{2}\int \frac{dt}{t^2+1} = \frac{1}{2}\operatorname{arctg} t + \frac{t}{2(t^2+1)} + C.$$

В итоге получаем

$$\int \frac{x\,dx}{(x^2+2x+5)^2} = -\frac{1}{2(x^2+2x+5)} - \frac{x+1}{8(x^2+2x+5)} - \frac{1}{16}\operatorname{arctg}\frac{x+1}{2} + C =$$
$$= -\frac{x+5}{8(x^2+2x+5)} - \frac{1}{16}\operatorname{arctg}\frac{x+1}{2} + C. \ ▶$$

В общем случае $n > 2$ приведенный способ позволяет свести вычисление интеграла $\int \frac{dz}{(z^2+1)^n}$ к вычислению интеграла $\int \frac{dz}{(z^2+1)^{n-1}}$ (см. задачу 4.71).

В задачах 4.72–4.79 вычислить интегралы.

4.72. $\int \frac{dx}{2x^2-4x+5}$. **4.73.** $\int \frac{dx}{4x^2-4x+7}$.

4.74. $\int \frac{x-1}{x^2+4x+9}dx$. **4.75.** $\int \frac{x\,dx}{x^2-6x+13}$.

4.76. $\int \frac{3x+1}{x^2+2x+10}dx$. **4.77.** $\int \frac{x+3}{9x^2+12x+5}dx$.

4.78. $\int \frac{x\,dx}{x^2-3x+3}$. **4.79.** $\int \frac{(x+1)dx}{x^2-4x+8}$.

Интегрирование произвольной рациональной дроби

$$\frac{P_m(x)}{Q_n(x)} = \frac{a_m x^m + a_{m-1}x^{m-1} + \ldots + a_1 x + a_0}{b_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + b_1 x + b_0}$$

с действительными коэффициентами осуществляется следующим образом.

Если $m \geq n$ (тогда дробь называется *неправильной*), то следует предварительно выделить в этой дроби *целую часть*, т. е. представить ее в виде

$$\frac{P_m(x)}{Q_n(x)} = T_{m-n}(x) + \frac{R_r(x)}{Q_n(x)},$$

где $T_{m-n}(x)$ и $R_r(x)$ — многочлены степеней $m - n$ и r соответственно, причем $r < n$, т. е. дробь $\frac{R_r(x)}{Q_n(x)}$ *правильная*. Выделение целой части из неправильной дроби можно выполнить делением числителя на знаменатель «уголком».

ПРИМЕР 4.10. Выделить целую часть дроби $\frac{(x^3+1)^2}{x(x^2-2x+2)}$.

◀ Дробь неправильная, так как степень числителя $m = 6$, а степень знаменателя $n = 3$. Запишем многочлены в каноническом виде (по степеням x):

$$(x^3 + 1)^2 = x^6 + 2x^3 + 1, \;\; x(x^2 - 2x + 2) = x^3 - 2x^2 + 2x.$$

Разделив многочлен $x^6 + 2x^3 + 1$ на многочлен $x^3 - 2x^2 + 2x$ «уголком», получим

$$\frac{(x^3+1)^2}{x(x^2-2x+2)} = \frac{x^6+2x^3+1}{x^3-2x^2+2x} = x^3+2x^2+2x+2+\frac{-4x+1}{x(x^2-2x+2)}. \;\blacktriangleright$$

Выделение целой части сводит задачу интегрирования рациональной дроби к интегрированию многочлена, которое не вызывает сложностей, и интегрированию правильной рациональной дроби $\frac{P_m(x)}{Q_n(x)}$. Для интегрирования правильной дроби ее разлагают в сумму простейших дробей *методом неопределенных коэффициентов*. Сначала разлагают знаменатель в произведение линейных и квадратичных множителей. В ряде случаев это можно сделать с использованием формул сокращенного умножения и искусственных приемов. Общий способ состоит в том, что находят действительные и комплексные корни многочлена $Q_n(x)$. Следует учесть, что комплексные корни многочлена с действительными коэффициентами всегда попарно сопряжены. Пусть многочлен $Q_n(x)$ имеет действительные корни $a_1, a_2, \ldots, a_l$ кратностей $k_1, k_2, \ldots, k_l$ и комплексно сопряженные пары корней $\beta_1 = \alpha_1 + i\beta_1$, $\overline{\beta}_1 = \alpha_1 - i\beta_1$, $\beta_2 = \alpha_2 + i\beta_2$, $\overline{\beta}_2 = \alpha_2 - i\beta_2$, $\ldots$, $\beta_t = \alpha_t + i\beta_t$, $\overline{\beta}_t = \alpha_t - i\beta_t$ кратностей $s_1, s_2, \ldots, s_t$ соответственно (отметим, что обязательно выполняется равенство $k_1 + k_2 + \ldots + k_l + 2(s_1 + s_2 + \ldots + s_t) = n$). Тогда разложение многочлена $Q_n(x)$ имеет вид

$$Q_n(x) = (x-a_1)^{k_1}(x-a_2)^{k_2}(x-a_l)^{k_l}(x^2+p_1x+q_1)^{s_1}\ldots(x^2+p_tx+q_t)^{s_t},$$

где $x^2 + p_jx + q_j = (x - \beta_j)(x - \overline{\beta}_j)$, $j = 1, 2, \ldots, t$.

На основании разложения знаменателя определяется представление дроби $\frac{P_m(x)}{Q_n(x)}$ в виде суммы простейших:

$$\frac{P_m(x)}{Q_n(x)} = \frac{A_1^{(1)}}{x-a_1} + \frac{A_2^{(1)}}{(x-a_1)^2} + \ldots + \frac{A_{k_1}^{(1)}}{(x-a_1)^{k_1}} + \ldots + \frac{A_1^{(l)}}{x-a_l} + \ldots + \frac{A_{k_l}^{(l)}}{(x-a_l)^{k_l}} +$$
$$+ \frac{B_1^{(1)}x + C_1^{(1)}}{x^2+p_1x+q_1} + \ldots + \frac{B_{s_1}^{(1)}x + C_{s_1}^{(1)}}{(x^2+p_1x+q_1)^{s_1}} + \ldots + \frac{B_1^{(t)}x + C_1^{(t)}}{x^2+p_tx+q_t} + \ldots + \frac{B_{s_t}^{(t)}x + C_{s_t}^{(t)}}{(x^2+p_tx+q_t)^{s_t}}. \qquad (4.1)$$

Подчеркнем, что каждый множитель в разложении знаменателя порождает в представлении (4.1) сумму простейших дробей, число слагаемых которой равно кратности множителя.

Неизвестные коэффициенты $A_i^{(j)}, B_i^{(j)}, C_i^{(j)}$ находят, используя следующий алгоритм:

1) Приводят правую часть равенства (4.1) к общему знаменателю.

2) Составляют систему линейных уравнений относительно неизвестных $A_i^{(j)}, B_i^{(j)}, C_i^{(j)}$, приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях x многочлена $P_m(x)$ и многочлена, который получился в числителе правой части.

3) Решают получившуюся систему линейных уравнений.

Если многочлен $Q_n(x)$ имеет действительные корни, то вычисление коэффициентов разложения можно упростить, выбирая значения x, равные действительным корням $Q_n(x)$.

Интегрируя простейшие дроби в правой части (4.1), находят интеграл от левой части.

ПРИМЕР 4.11. Вычислить $\int\frac{2x^2+1}{x^4+2x^3}dx$.

◄ Представим дробь $\frac{2x^2+1}{x^4+2x^3}$ в виде суммы простейших:

$$\frac{2x^2+1}{x^4+2x^3}=\frac{2x^2+1}{x^3(x+2)}=\frac{A}{x^3}+\frac{B}{x^2}+\frac{C}{x}+\frac{D}{x+2}.$$

Приведя правую часть к общему знаменателю и приравняв числители, получаем

$$2x^2+1=A(x+2)+Bx(x+2)+Cx^2(x+2)+Dx^3. \tag{4.2}$$

Приравнивание коэффициентов при одинаковых степенях x дает систему линейных уравнений

$$C+D=0,\quad B+2C=2,\quad A+2B=0,\quad 2A=1.$$

Решая ее, находим $A=1/2$, $B=-1/4$, $C=9/8$, $D=-9/8$. Отметим, что коэффициент A можно было найти, подставив $x=0$ в равенство (4.2), а коэффициент D — $x=-2$. Итак,

$$\frac{2x^2+1}{x^4+2x^3}=\frac{1}{2x^3}-\frac{1}{4x^2}+\frac{9}{8x}-\frac{9}{8(x+2)}$$

и

$$\int\frac{2x^2+1}{x^4+2x^3}dx=\int\left(\frac{1}{2x^3}-\frac{1}{4x^2}+\frac{9}{8x}-\frac{9}{8(x+2)}\right)dx=-\frac{1}{4x^2}+\frac{1}{4x}+\frac{9}{8}\ln\left|\frac{x}{x+2}\right|+C. \blacktriangleright$$

В задачах 4.80–4.95 вычислить интегралы.

4.80. $\int\frac{dx}{x^2+4x-5}$.

4.81. $\int\frac{x\,dx}{x^2-5x+4}$.

4.82. $\int\frac{dx}{x(x^2+2)}$.

4.83. $\int\frac{x^2+3}{(x-1)(x^2+1)}dx$.

4.84. $\int\frac{2x^2-1}{x^3-5x^2+6x}dx$.

4.85. $\int\frac{2x^2-3x-1}{x^3-3x^2-x+3}dx$.

4.86. $\int\frac{x^3-x^2-2x-8}{x^3-4x^2}dx$.

4.87. $\int\frac{x^4+3x^3+3x^2-5}{x^3+3x^2+3x+1}dx$.

4.88. $\int\frac{x^5-3x^4+5x^3-2x^2+2x+1}{(x-1)^2(x^2+1)}dx$.

4.89. $\int\frac{3x^2+5x}{(x+1)(x^2-1)}dx$.

4.90. $\int \frac{x\,dx}{x^4+6x^2+13}$. **4.91.** $\int \frac{2^x\,dx}{4^x-6\cdot 2^x+8}$.

4.92. $\int \frac{dx}{x^4+1}$. **4.93.** $\int \frac{x^3-6}{x^4+6x^2+8}dx$.

4.94. $\int \frac{dx}{x(x^2+4)^2}$. **4.95.** $\int \frac{dx}{(x^2+9)^3}$.

2. Интегрирование тригонометрических и гиперболических функций

Интегралы вида

$$\int R(\cos x, \sin x)dx,$$

где $R(u, v)$ — рациональная функция двух переменных (т. е. над u и v совершаются только арифметические действия), сводятся к интегралам от рациональной функции новой переменной t с помощью *универсальной тригонометрической подстановки* $t=\operatorname{tg}\frac{x}{2}$. При этом используются формулы

$$\cos x=\frac{1-t^2}{1+t^2},\ \sin x=\frac{2t}{1+t^2},\ dx=\frac{2dt}{1+t^2}.$$

ПРИМЕР 4.12. Вычислить $\int \frac{dx}{2+\sin x}$.

◀ Сделав подстановку $t=\operatorname{tg}\frac{x}{2}$, получим

$$\int \frac{dx}{2+\sin x}=\int \frac{1}{2+\frac{2t}{1+t^2}}\cdot\frac{2dt}{1+t^2}=\int \frac{dt}{t^2+t+1}=\int \frac{dt}{\left(t+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}}=\int \frac{d\left(t+\frac{1}{2}\right)}{\left(t+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}}=$$

$$=\frac{2}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\frac{2t+1}{\sqrt{3}}+C=\frac{2}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\frac{2\operatorname{tg}\frac{x}{2}+1}{\sqrt{3}}+C. ▶$$

В задачах 4.96–4.99 вычислить интегралы.

4.96. $\int \frac{dx}{3\cos x+2}$. **4.97.** $\int \frac{dx}{2-\sin x}$.

4.98. $\int \frac{dx}{3-3\sin x+\cos x}$. **4.99.** $\int \frac{dx}{2\sin x-\cos x-1}$.

Универсальная тригонометрическая подстановка может приводить к рациональным дробям большой степени относительно новой переменной t. В ряде случаев можно упростить вычисления, используя различные формулы тригонометрии и формулы для производных тригонометрических функций.

В частности, без применения универсальной подстановки вычисляются интегралы вида $\int \sin^n x\cdot\cos^m x\,dx$, если:

1) $n = 2k + 1$ — нечетное. Представляя $\sin^n x$ в виде

$$\sin^{2k+1}x = \sin^{2k}x \cdot \sin x = \sin^{2k}x \cdot (\cos x)' = (1 - \cos^2 x)^k \cdot (\cos x)'$$

и выполняя замену $\cos x = y$ (или внося $\cos x$ под знак дифференциала), вычисление интеграла сводим к интегрированию многочлена. Аналогичным образом поступают, когда m — нечетное, применяя замену $\sin x = y$.

2) $n = 2k$, $m = 2l$ — четные. Можно воспользоваться формулами понижения степени $\cos^2 x = \dfrac{1+\cos 2x}{2}$, $\sin^2 x = \dfrac{1-\cos 2x}{2}$ и представить подынтегральное выражение в виде $\sin^{2k}x\cdot\cos^{2l}x = \left(\dfrac{1-\cos 2x}{2}\right)^k\left(\dfrac{1+\cos 2x}{2}\right)^l$, затем раскрыть скобки и получить несколько интегралов исходного вида, но уже с меньшими степенями. Возможно, что формулами понижения степени придется воспользоваться несколько раз.

3) $m + n = -2k$, $k \in \mathbb{N}$. Целесообразно воспользоваться подстановкой $\operatorname{tg} x = t$ или $\operatorname{ctg} x = t$.

ПРИМЕР 4.13. Вычислить $\int \sin^3 x\cdot\cos^2 x\,dx$.

◀ Так как $\sin^3 x = \sin^2 x \cdot \sin x = -\sin^2 x\,(\cos x)'$, то

$$\int \sin^3 x\cdot\cos^2 x\,dx = -\int \sin^2 x\cdot\cos^2 x\,d(\cos x) = -\int (1-\cos^2 x)\cos^2 x\,d(\cos x) =$$

$$= -\int \cos^2 x\,d(\cos x) + \int \cos^4 x\,d(\cos x) = -\frac{\cos^3 x}{3} + \frac{\cos^5 x}{5} + C. \blacktriangleright$$

ПРИМЕР 4.14. Вычислить $\int \sin^4 2x\cdot\cos^2 2x\,dx$.

$$\blacktriangleleft \int \sin^4 2x\cdot\cos^2 2x\,dx = \int \left(\frac{1-\cos 4x}{2}\right)^2\cdot\frac{1+\cos 4x}{2}dx = \frac{1}{8}\int (1-\cos 4x)(1-\cos^2 4x)\,dx =$$

$$= \frac{1}{8}\int (1-\cos 4x)\cdot\sin^2 4x\,dx = \frac{1}{8}\int \sin^2 4x\,dx - \frac{1}{8}\int \sin^2 4x\cos 4x\,dx =$$

$$= \frac{1}{16}\int (1-\cos 8x)\,dx - \frac{1}{32}\int \sin^2 4x\,d(\sin 4x) = \frac{x}{16} - \frac{1}{128}\sin 8x - \frac{1}{96}\sin^3 4x + C. \blacktriangleright$$

ПРИМЕР 4.15. Вычислить интеграл $\int \sin^{1/3}x\cdot\cos^{-13/3}x\,dx$.

◀ Так как $1/3 - 13/3 = -4$, то с помощью подстановки $\operatorname{tg} x = t$ задача сводится к интегрированию степеней тангенса:

$$\int \sin^{1/3}x\cdot\cos^{-13/3}x\,dx = \int \operatorname{tg}^{1/3}x\cdot\frac{1}{\cos^2 x}\cdot\frac{dx}{\cos^2 x} = \int \operatorname{tg}^{1/3}x\,(1+\operatorname{tg}^2 x)\,d(\operatorname{tg} x) =$$

$$= \frac{3\operatorname{tg}^{4/3}x}{4} + \frac{3\operatorname{tg}^{10/3}x}{10} + C. \blacktriangleright$$

В задачах 4.100–4.113 вычислить интегралы.

4.100. $\int \sin^3 x\,dx$. **4.101.** $\int \cos^5 x\,dx$. **4.102.** $\int \cos^4 \dfrac{x}{2}\,dx$.

4.103. $\int \sin^2 2x\,dx$. **4.104.** $\int \sin^3 x\cos^4 x\,dx$. **4.105.** $\int \sin^2 x\cos^5 x\,dx$.

4.106. $\int \dfrac{\sin^3 x\,dx}{\sqrt{\cos x}}$. **4.107.** $\int \dfrac{\cos^5 x\,dx}{\sqrt{\sin^5 x}}$. **4.108.** $\int \dfrac{\sin^3 x\,dx}{\cos^8 x}$.

4.109. $\int \dfrac{dx}{\sin^3 x\cos^5 x}$. **4.110.** $\int \dfrac{\sin^2 x\,dx}{\cos^6 x}$. **4.111.** $\int \dfrac{dx}{\cos^4 x}$.

4.112. $\int \dfrac{dx}{\sin^3 x}$. **4.113.** $\int \dfrac{dx}{\cos^3 x}$.

Интегралы вида $\int \sin ax \cdot \cos bx\, dx$, $\int \sin ax \cdot \sin bx\, dx$, $\int \cos ax \cdot \cos bx\, dx$ вычисляются преобразованием произведений тригонометрических функций в сумму с помощью формул

$$\cos ax \sin bx = \frac{1}{2}(\sin(a+b)x - \sin(a-b)x),$$

$$\sin ax \sin bx = \frac{1}{2}(\cos(a-b)x - \cos(a+b)x),$$

$$\cos ax \cos bx = \frac{1}{2}(\cos(a-b)x + \cos(a+b)x).$$

ПРИМЕР 4.16. Вычислить $\int \cos 3x \cdot \sin\frac{x}{2}\, dx$.

◄ $\int \cos 3x \cdot \sin\frac{x}{2}\, dx = \frac{1}{2}\left(\int \sin\frac{7x}{2}\, dx + \int \sin\frac{5x}{2}\, dx\right) = -\frac{1}{7}\cos\frac{7x}{2} - \frac{1}{5}\cos\frac{5x}{2} + C.$ ►

В задачах 4.114–4.119 вычислить интегралы.

4.114. $\int \sin 3x \cos 7x\, dx$. **4.115.** $\int \sin 10x \sin 6x\, dx$.

4.116. $\int \cos\frac{x}{2} \cos\frac{x}{3}\, dx$. **4.117.** $\int \sin\frac{2x}{3} \cos\frac{4x}{3}\, dx$.

4.118. $\int \cos x \sin^2 3x\, dx$. **4.119.** $\int \sin x \sin 2x \sin 3x\, dx$.

Интегрирование гиперболических функций производится аналогично интегрированию тригонометрических. При этом используются следующие формулы:

$$\mathrm{ch}^2 x - \mathrm{sh}^2 x = 1, \qquad \mathrm{sh}\, 2x = 2\,\mathrm{sh}\, x\, \mathrm{ch}\, x,$$
$$\mathrm{ch}\, 2x + 1 = 2\,\mathrm{ch}^2 x, \qquad \mathrm{ch}\, 2x - 1 = 2\,\mathrm{sh}^2 x,$$
$$1 - \mathrm{th}^2 x = \frac{1}{\mathrm{ch}^2 x}, \qquad \mathrm{cth}^2 x - 1 = \frac{1}{\mathrm{sh}^2 x}.$$

В задачах 4.120–4.125 вычислить интегралы.

4.120. $\int \mathrm{ch}^2 3x\, dx$. **4.121.** $\int \mathrm{sh}^3 2x\, dx$.

4.122. $\int \mathrm{sh}^2 x\, \mathrm{ch}^2 x\, dx$. **4.123.** $\int \mathrm{ch}^4 x\, dx$.

4.124. $\int \mathrm{th}^4 x\, dx$. **4.125.** $\int \frac{dx}{\mathrm{sh}^2 x\, \mathrm{ch}^2 x}$.

3. Интегрирование иррациональных функций

Интегралы вида

$$\int R\left(x, \sqrt[m]{\frac{ax+b}{cx+d}}\right) dx,$$

где $R(u, v)$ — рациональная функция двух переменных, m — натуральное число, сводятся к интегралам от рациональных дробей с помощью замены $t^m = \frac{ax+b}{cx+d}$. Интеграл вида $\int R\left(x, \sqrt[m]{\frac{ax+b}{cx+d}}, \sqrt[n]{\frac{ax+b}{cx+d}}\right) dx$, m, n — натуральные числа, сводится к интегралу от рациональной дроби с помощью замены $t^k = \dfrac{ax+b}{cx+d}$, где k — наименьшее общее кратное чисел m, n. Аналогичную замену выполняют в подобных случаях при большем количестве радикалов.

ПРИМЕР 4.17. Вычислить $\displaystyle\int \frac{1}{\sqrt{2x-1}+\sqrt[3]{2x-1}}\,dx.$

◀ Сделаем подстановку $t^6 = 2x - 1$. Тогда $x = \dfrac{1}{2}(t^6+1)$ и $dx = 3t^5dt$. Следовательно,

$$\int \frac{1}{\sqrt{2x-1}+\sqrt[3]{2x-1}}\,dx = \int \frac{3t^5}{t^3+t^2}\,dt = 3\int \frac{t^3}{t+1}\,dt = 3\int\left(t^2-t+1-\frac{1}{t+1}\right)dt =$$

$$= t^3 - \frac{3t^2}{2} + 3t - \frac{3}{2}\ln|t+1| + C = \sqrt{2x-1} - \frac{3\sqrt[3]{2x-1}}{2} + 3\sqrt[6]{2x-1} - \frac{3}{2}\ln\left|\sqrt[6]{2x-1}+1\right| + C. \ ▶$$

В задачах 4.126–4.133 вычислить интегралы.

4.126. $\displaystyle\int \frac{dx}{(5+x)\sqrt{1+x}}.$ **4.127.** $\displaystyle\int \frac{x\,dx}{\sqrt[3]{2x-3}}.$

4.128. $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{x}-\sqrt[3]{x}}.$ **4.129.** $\displaystyle\int \frac{(\sqrt[6]{x+2}-1)dx}{(x+2)(1+\sqrt[3]{x+2})}.$

4.130. $\displaystyle\int \frac{1}{(x-1)^3}\sqrt[3]{\frac{x+1}{x-1}}\,dx.$ **4.131.** $\displaystyle\int \sqrt{\frac{x-1}{x+1}}\cdot\frac{dx}{x}.$

4.132. $\displaystyle\int \frac{x\,dx}{(3x-1)\sqrt{3x-1}}.$ **4.133.** $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt[3]{x}(1+\sqrt{x})}.$

Интегралы вида

$$\int R(x, \sqrt{ax^2+bx+c})\,dx, \tag{4.3}$$

где R — рациональная функция двух аргументов, могут быть вычислены с помощью тригонометрических или гиперболических подстановок следующим образом. Выделяя полный квадрат под знаком радикала и сделав замену $u = x + \dfrac{b}{2a}$, исходный интеграл приводим к одному из следующих трех типов:

$$1)\ \int R(u, \sqrt{l^2-u^2})\,du,\ \ 2)\ \int R(u, \sqrt{l^2+u^2})\,du,\ \ 3)\ \int R(u, \sqrt{u^2-l^2})\,du.$$

Теперь, выполняя замену $u = l\sin t$ или $u = l\,\mathrm{th}\,t$ в первом интеграле, $u = l\,\mathrm{tg}\,t$ или $u = l\,\mathrm{sh}\,t$ — во втором и $u = l\sec t$ или $u = l\,\mathrm{ch}\,t$ — в третьем, каждый из них сводим к $\int R(\cos t, \sin t)\,dt$ или $\int R(\mathrm{ch}\,t, \mathrm{sh}\,t)\,dt$.

ПРИМЕР 4.18. Вычислить $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{(x^2+4)^3}}.$

$$◀ \int \frac{dx}{\sqrt{(x^2+4)^3}} = \left| \begin{array}{l} x = 2\,\mathrm{tg}\,t,\ \sqrt{(x^2+4)^3} = \dfrac{8}{\cos^3 t}, \\ dx = \dfrac{2dt}{\cos^2 t} \end{array} \right| = \int \frac{2\cos^3 t\,dt}{8\cos^2 t} = \frac{1}{4}\int \cos t\,dt = \frac{\sin t}{4} + C.$$

Сделаем обратную замену переменных, для чего выразим $\operatorname{tg} t$ через x: $\operatorname{tg} t = \dfrac{x}{2}$. Тогда $\sin t = \operatorname{tg} t \cdot \cos t = \dfrac{\operatorname{tg} t}{\sqrt{1+\operatorname{tg}^2 t}} = \dfrac{x}{\sqrt{x^2+4}}$. Итак, $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{(x^2+4)^3}} = \frac{x}{4\sqrt{x^2+4}} + C.$ ►

При вычислении интегралов вида $\displaystyle\int \frac{mx+n}{\sqrt{ax^2+bx+c}}dx$ нет необходимости производить указанные подстановки, так как выделение в числителе производной подкоренного выражения и полного квадрата под знаком радикала приводит к табличным интегралам.

ПРИМЕР 4.19. Вычислить $\displaystyle\int \frac{2x+3}{\sqrt{3-2x-x^2}}dx.$

◄ Выделим в числителе производную подкоренного выражения, равную $(3 - 2x - x^2)' = -2x - 2$. Тогда

$$\int \frac{2x+3}{\sqrt{3-2x-x^2}}dx = \int \frac{-(-2x-2)+1}{\sqrt{3-2x-x^2}}dx = -\int \frac{d(3-2x-x^2)}{\sqrt{3-2x-x^2}} + \int \frac{dx}{\sqrt{3-2x-x^2}} =$$
$$= -2\sqrt{3-2x-x^2} + \int \frac{dx}{\sqrt{3-2x-x^2}}.$$

В интеграле $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{3-2x-x^2}}$ выделим в подкоренном выражении полный квадрат:

$$\int \frac{dx}{\sqrt{3-2x-x^2}} = \int \frac{dx}{\sqrt{4-(1+2x+x^2)}} = \int \frac{dx}{\sqrt{4-(x+1)^2}} = \int \frac{d(x+1)}{\sqrt{4-(x+1)^2}} = \arcsin\frac{x+1}{2} + C.$$

Окончательно получаем

$$\int \frac{2x+3}{\sqrt{3-2x-x^2}}dx = -2\sqrt{3-2x-x^2} + \arcsin\frac{x+1}{2} + C. \text{ ►}$$

В задачах 4.134–4.147 вычислить интегралы.

4.134. $\displaystyle\int \sqrt{1-2x-x^2}\,dx.$

4.135. $\displaystyle\int \sqrt{(3-2x-x^2)^3}\,dx.$

4.136. $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{5-4x-x^2}}.$

4.137. $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+2x+7}}.$

4.138. $\displaystyle\int \frac{x-3}{\sqrt{x^2-6x+1}}dx.$

4.139. $\displaystyle\int \frac{x+4}{\sqrt{2-x-x^2}}dx.$

4.140. $\displaystyle\int \sqrt{x^2-2x+10}\,dx.$

4.141. $\displaystyle\int \sqrt{8+4x+x^2}\,dx.$

4.142. $\displaystyle\int \frac{dx}{(x^2-3)\sqrt{4-x^2}}.$

4.143. $\displaystyle\int \frac{dx}{(x^2+1)(x+\sqrt{x^2+1})}.$

4.144. $\displaystyle\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2+8x+1}}.$

4.145. $\displaystyle\int \frac{dx}{x^2\sqrt{2x^2-x+1}}.$

4.146. $\displaystyle\int \frac{dx}{(x-1)\sqrt{6x-x^2-5}}.$

4.147. $\displaystyle\int \frac{dx}{(x+2)^2\sqrt{x^2+5}}.$

§ 4.3. ОПРЕДЕЛЕННЫЙ ИНТЕГРАЛ

1. Определение

Пусть на отрезке $[a, b]$ задана функция $f(x)$. *Разбиением* отрезка $[a, b]$ называется множество точек $T = \{x_0, x_1, \ldots, x_n\}$, принадлежащих отрезку, таких, что $a = x_0 < x_1 < \ldots < x_{n-1} < x_n = b$. Выберем произвольно на каждом отрезке $[x_{k-1}, x_k]$, $k = 1, 2, \ldots, n$, точку ξ_k. *Интегральной суммой* функции $f(x)$ на $[a, b]$ называется сумма

$$\sigma_T(f) = \sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)\Delta x_k,$$

где $\Delta x_k = x_k - x_{k-1}$ — длины отрезков $[x_{k-1}, x_k]$. Интегральная сумма зависит от выбора точек разбиения и выбора точек ξ_k. Величину $\lambda(T) = \max\limits_{1\le k\le n} \Delta x_k$ называют *мелкостью* (*диаметром*) разбиения.

Число I называют *определенным интегралом* функции $f(x)$ на отрезке $[a, b]$ и обозначают $\int\limits_a^b f(x)dx$, если для любого $\varepsilon > 0$ существует число $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ такое, что для любого разбиения T, мелкость которого $\lambda(T) < \delta$, и при любом выборе точек ξ_k выполняется неравенство

$$\left|\sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)\Delta x_k - I\right| < \varepsilon.$$

Кратко данное определение записывают следующим образом:

$$\int\limits_a^b f(x)dx = \lim_{\lambda(T)\to 0} \sigma_T(f).$$

Функцию $f(x)$, для которой существует указанный предел интегральных сумм, называют *интегрируемой* на отрезке $[a, b]$. Справедливо фундаментальное утверждение: *всякая непрерывная на отрезке функция интегрируема на нем.*

Пусть функция $f(x) \ge 0$ на $[a, b]$ и интегрируема. Так как произведение $f(\xi_k)\Delta x_k$ геометрически означает площадь прямоугольника с основанием $[x_{k-1}, x_k]$ и высотой $f(\xi_k)$, то интегральная сумма $\sigma_T(f)$ геометрически означает площадь ступенчатой фигуры, состоящей из таких прямоугольников (заштрихованная фигура на рис. 4.1). Следовательно, при мелкости разбиения, стремящейся к нулю, площадь ступенчатой фигуры стремится к площади криволинейной трапеции, ограниченной сверху графиком функции $f(x)$, снизу — осью абсцисс, а с боков — прямыми $x = a$ и $x = b$.

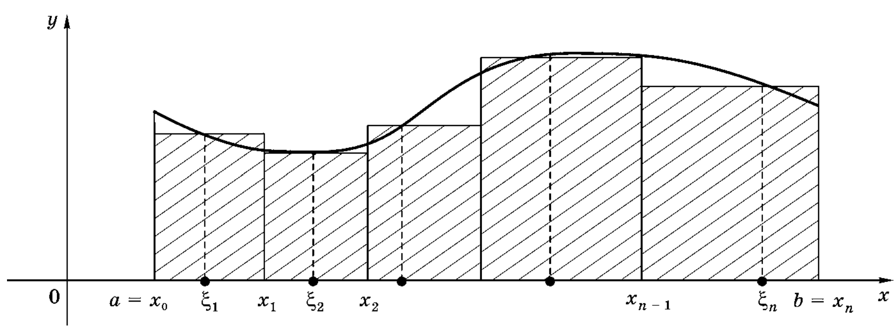


Рис. 4.1

Таким образом, геометрически определенный интеграл означает площадь криволинейной трапеции.

ПРИМЕР 4.20. Вычислить площадь криволинейного треугольника, ограниченного параболой $y = x^2$, осью абсцисс и прямой $x = 1$.

◀ Разобьем отрезок [0, 1] на n равных частей точками $x_k = k/n$, $k = 0, 1, 2, \ldots, n$. Тогда длина каждого отрезка $\Delta x_k = 1/n$ и мелкость разбиения $\lambda(T) = 1/n \to 0$, если $n \to \infty$. Положим $\xi_k = x_k = k/n$, $k = 1, 2, \ldots, n$ (т. е. ξ_k совпадает с правым концом отрезка $[x_{k-1}, x_k]$). В точках ξ_k значения функции $f(\xi_k) = \dfrac{k^2}{n^2}$. Следовательно, интегральная сумма, выражающая площадь ступенчатой фигуры (рис. 4.2), равна

$$\sigma_T(f) = \sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)\Delta x_k = \sum_{k=1}^{n} \frac{k^2}{n^2}\cdot\frac{1}{n} = \frac{1}{n^3}\sum_{k=1}^{n} k^2.$$

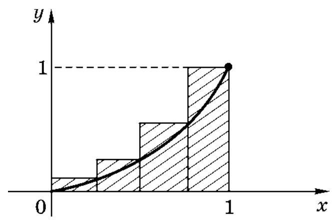


Рис. 4.2

Используя формулу для суммы квадратов натуральных чисел

$$1^2 + 2^2 + \ldots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6},$$

преобразуем интегральную сумму к виду $\sigma_T(f) = \dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6n^3}$. Переходя к пределу при $n \to \infty$, получим, что площадь криволинейного треугольника

$$S = \lim_{n\to\infty} \sigma_T(f) = \lim_{n\to\infty} \frac{n(n+1)(2n+1)}{6n^3} = \frac{1}{3}.$$

Отметим, что из вышеприведенных рассуждений вытекает, что $\int_0^1 x^2 dx = \dfrac{1}{3}$. ▶

В задачах 4.148–4.151 вычислить определенные интегралы, рассматривая их как пределы соответствующих интегральных сумм.

4.148. $\int_0^2 x\,dx$. **4.149.** $\int_0^1 (1+x)\,dx$. **4.150.** $\int_0^2 2^x\,dx$. **4.151.** $\int_0^{\pi/2} \cos x\,dx$.

2. Свойства определенного интеграла

1) Если функции $f(x)$ и $g(x)$ интегрируемы на отрезке $[a, b]$, то

$$\int_a^b (\alpha f(x) + \beta g(x))dx = \alpha\int_a^b f(x)dx + \beta\int_a^b g(x)dx.$$

2) Если функции $f(x)$ и $g(x)$ интегрируемы на отрезке $[a, b]$ и $f(x) \geq g(x)$ на $[a, b]$, то

$$\int_a^b f(x)\,dx \geq \int_a^b g(x)\,dx.$$

3) Если функция $f(x)$ интегрируема на отрезке $[a, b]$, то функция $|f(x)|$ также интегрируема на этом отрезке и выполняется неравенство

$$\left|\int_a^b f(x)dx\right| \leq \int_a^b |f(x)|dx.$$

В задачах 4.152, 4.153 выяснить, не вычисляя интегралов, какой из интегралов больше.

4.152. $\int\limits_1^2 \frac{dx}{x^2}$ или $\int\limits_1^2 \frac{dx}{x^3}$. **4.153.** $\int\limits_0^1 \frac{dx}{1+x^5}$ или $\int\limits_0^1 \frac{dx}{1+x^4}$.

В задачах 4.154, 4.155 доказать неравенства.

4.154. $0 < \int\limits_0^1 \frac{x^6 dx}{1+x^8} < \frac{1}{7}$. **4.155.** $0 < \int\limits_0^1 e^{x^2} dx < e$.

4.156. Оценить абсолютную величину интеграла $I = \int\limits_{10}^{20} \frac{\sin x\, dx}{x^4}$.

4) Если функция $f(x)$ интегрируема на $[a, b]$, то для любого числа c, $a < c < b$,

$$\int\limits_a^b f(x)\, dx = \int\limits_a^c f(x)\, dx + \int\limits_c^b f(x)\, dx.$$

5) Если функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a, b]$, то существует точка $c \in (a, b)$ такая, что

$$\int\limits_a^b f(x)\, dx = f(c)(b-a).$$

Число $\mu = \frac{1}{b-a}\int\limits_a^b f(x)\, dx$ называют *средним значением функции* $f(x)$ на отрезке $[a, b]$.

В задачах 4.157, 4.158 найти среднее значение функции на заданном отрезке.

4.157. x^3, $0 \le x \le 1$. **4.158.** $\cos x$, $0 \le x \le \pi$.

4.159. Сила переменного тока меняется по закону $I = I_0 \sin\left(\frac{2\pi}{T} t + \varphi\right)$, где T — период. Найти среднее значение силы тока за полупериод.

4.160. Тело падает на землю из состояния покоя. Найти зависимость между скоростью тела, приобретенной им в конце вертикального пути длиной s, и средней скоростью на этом пути.

6) Если функция $f(x)$ четная, то $\int\limits_{-a}^a f(x)\, dx = 2\int\limits_0^a f(x)\, dx$. Если функция $f(x)$ нечетная, то

$$\int\limits_{-a}^a f(x)\, dx = 0.$$

В задачах 4.161–4.164 вычислить интегралы.

4.161. $\int\limits_{-1}^1 \frac{x^3}{1+x^4} dx$. **4.162.** $\int\limits_{-4}^4 \frac{x^3+2x}{1+x^2} dx$.

4.163. $\int\limits_{-\pi}^{\pi} \frac{x^2 \sin 2x}{1+x^4} dx$. **4.164.** $\int\limits_{-2}^2 (x^4 \sin x + x^3 \cos x + 1)\, dx$.

7) Если функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a, b]$, то *интеграл с переменным верхним пределом* $F(x)=\int\limits_a^x f(t)\,dt$ является первообразной функции $f(x)$ на отрезке $[a, b]$, т. е.

$$F'(x)=\left(\int\limits_a^x f(t)\,dt\right)'=f(x),\quad x\in[a,b].$$

В задачах 4.165–4.168 найти производные заданных функций.

4.165. $F(x)=\int\limits_0^x \frac{t}{1+t^2}\,dt.$ **4.166.** $F(x)=\int\limits_1^x \frac{\ln t\,dt}{t}.$

4.167. $F(x)=\int\limits_0^x \frac{\sin t}{t}\,dt.$ **4.168.** $F(x)=\int\limits_e^x \frac{t\,dt}{\ln t}.$

3. Формула Ньютона–Лейбница

Если функция $f(x)$ *непрерывна на отрезке* $[a, b]$ *и* $F(x)$ *— какая-либо из ее первообразных, то*

$$\int\limits_a^b f(x)\,dx=F(x)\Big|_a^b=F(b)-F(a).$$

В задачах 4.169–4.177, используя формулу Ньютона–Лейбница, вычислить интегралы.

4.169. $\int\limits_1^2 (3x^2-2x+1)\,dx.$ **4.170.** $\int\limits_0^1 \left(\sqrt{x}+\frac{1}{\sqrt[3]{x^2}}\right)dx.$ **4.171.** $\int\limits_1^{\sqrt{3}} \frac{1}{1+x^2}\,dx.$

4.172. $\int\limits_{-\pi/8}^0 \frac{dx}{\cos^2 2x}.$ **4.173.** $\int\limits_0^3 2^x\,dx.$ **4.174.** $\int\limits_1^3 \frac{dx}{2x+1}.$

4.175. $\int\limits_0^1 \frac{dx}{4x^2+4x+5}.$ **4.176.** $\int\limits_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x^2+2x+2}}.$ **4.177.** $\int\limits_0^1 \frac{dx}{\sqrt{3-x^2-2x}}.$

В задачах 4.178–4.181 с помощью определенных интегралов найти пределы сумм.

4.178. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{n}{n^2+1^2}+\frac{n}{n^2+2^2}+\ldots+\frac{n}{n^2+n^2}\right).$

4.179. $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\pi}{2n}\left(1+\cos\frac{\pi}{2n}+\cos\frac{2\pi}{2n}+\ldots+\cos\frac{(n-1)\pi}{2n}\right).$

4.180. $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}\left(\sqrt{1+\frac{1}{n}}+\sqrt{1+\frac{2}{n}}+\ldots+\sqrt{1+\frac{n}{n}}\right).$

4.181. $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1^a+2^a+\ldots+n^a}{n^{a+1}},\ a>0.$

4. Замена переменной в определенном интеграле

Пусть функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a, b]$, а функция $x = \varphi(t)$ непрерывно дифференцируема на $[c, d]$, причем $\varphi(c) = a$, $\varphi(d) = b$. Тогда

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_c^d f(\varphi(t))\varphi'(t)\,dt.$$

Отметим, что обычно выполняется такая замена, что значения $\varphi(t) \in [a, b]$, когда $t \in [c, d]$. Если же значения $\varphi(t)$ принадлежат более широкому отрезку $[A, B] \supset [a, b]$, то предполагается, что $f(x)$ непрерывна на $[A, B]$.

ПРИМЕР 4.21. Вычислить $\int_1^4 \frac{e^{1/x}}{x^2}dx$.

◀ Сделаем замену $x = 1/t$. Тогда $dx = -\frac{1}{t^2}dt$, $t = 1/x$. Находим новые пределы интегрирования: если $x = 1$, то $t = 1$, если $x = 4$, то $t = 1/4$. Следовательно,

$$\int_1^4 \frac{e^{1/x}}{x^2}dx = -\int_1^{1/4} t^2 e^t \frac{dt}{t^2} = \int_{1/4}^1 e^t dt = e^t\Big|_{1/4}^1 = e - \sqrt[4]{e}. \blacktriangleright$$

В задачах 4.182–4.187 вычислить интегралы с помощью указанных подстановок.

4.182. $\int_1^{13} \frac{dx}{2x-1+\sqrt{2x-1}}$, $2x-1=t^2$.

4.183. $\int_{\ln 3}^{\ln 8} \frac{dx}{\sqrt{e^x+1}}$, $e^x+1=t^2$.

4.184. $\int_0^{\operatorname{ch}1} \sqrt{x^2-1}\,dx$, $x=\operatorname{ch}t$.

4.185. $\int_0^{\pi/2} \frac{dx}{3+2\cos x}$, $\operatorname{tg}\frac{x}{2}=t$.

4.186. $\int_1^2 \frac{dx}{x\sqrt{1+x^2}}$, $x=1/t$.

4.187. $\int_{-1}^1 \sqrt{3-2x-x^2}\,dx$, $x+1=2\sin t$.

В задачах 4.188–4.193 вычислить интегралы с помощью подходящей замены переменной.

4.188. $\int_{2/\sqrt{3}}^2 \frac{dx}{x\sqrt{x^2-1}}$.

4.189. $\int_{-2}^0 \frac{dx}{\sqrt{x+3}+\sqrt{(x+3)^3}}$.

4.190. $\int_2^{4/\sqrt{3}} \frac{\sqrt{x^2-4}}{x}dx$.

4.191. $\int_0^3 x^2\sqrt{9-x^2}\,dx$.

4.192. $\int_{\pi/3}^{\pi/2} \frac{dx}{2\sin x-\cos x-1}$.

4.193. $\int_1^e \frac{\cos(\ln x)}{x}dx$.

5. Интегрирование по частям

Пусть функции $u(x)$ и $v(x)$ непрерывно дифференцируемы на отрезке $[a; b]$. Тогда справедлива формула *интегрирования по частям*

$$\int_a^b u(x)\,dv(x) = u(x)v(x)\Big|_a^b - \int_a^b v(x)\,du(x).$$

ПРИМЕР 4.22. Вычислить $\int\limits_0^1 \operatorname{arctg} x\,dx$.

◀ Полагаем $u = \operatorname{arctg} x$, $dv = dx$. Находим $du = \dfrac{dx}{1+x^2}$, $v = x$. Следовательно,

$$\int\limits_0^1 \operatorname{arctg} x\,dx = x\operatorname{arctg} x\Big|_0^1 - \int\limits_0^1 \frac{x}{1+x^2}dx = \frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}\int\limits_0^1 \frac{d(1+x^2)}{1+x^2} = \frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}\ln(1+x^2)\Big|_0^1 = \frac{\pi}{4} - \frac{\ln 2}{2}.$$ ▶

В задачах 4.194–4.203 вычислить интегралы методом интегрирования по частям.

4.194. $\int\limits_0^1 xe^x dx$.

4.195. $\int\limits_0^{\pi/4} x^2 \cos 2x\,dx$.

4.196. $\int\limits_1^e x^2 \ln x\,dx$.

4.197. $\int\limits_1^e \ln^2 x\,dx$.

4.198. $\int\limits_0^1 \dfrac{\arcsin x}{\sqrt{1+x}}dx$.

4.199. $\int\limits_{\pi/6}^{\pi/3} \dfrac{x\,dx}{\cos^2 x}$.

4.200. $\int\limits_2^{2\sqrt{3}} \dfrac{\sqrt{x^2+4}\,dx}{x^2}$.

4.201. $\int\limits_0^1 x\operatorname{arctg} x\,dx$.

4.202. $\int\limits_0^{\pi/2} e^x \cos x\,dx$.

4.203. $\int\limits_0^{\pi/4} e^{3x} \sin 4x\,dx$.

§ 4.4. НЕСОБСТВЕННЫЕ ИНТЕГРАЛЫ

1. Несобственные интегралы с бесконечными пределами

Пусть функция $f(x)$ определена на бесконечном промежутке $[a, +\infty)$ и интегрируема на отрезке $[a, b]$ при любом $b > a$. По определению полагают

$$\int\limits_a^{+\infty} f(x)\,dx = \lim_{b\to+\infty}\int\limits_a^b f(x)\,dx. \tag{4.4}$$

Если предел в правой части равенства (4.4) существует и конечен, то несобственный интеграл $\int\limits_a^{+\infty} f(x)\,dx$ называется *сходящимся*, в противном случае — *расходящимся*. В случае $f(x) \ge 0$ несобственный интеграл геометрически означает площадь фигуры, ограниченной графиком функции $f(x)$, прямой $x = a$ и осью Ox.

Если функция $F(x)$ является первообразной функции $f(x)$ на промежутке $[a, +\infty)$, то $\int\limits_a^{+\infty} f(x)\,dx = \lim\limits_{b\to+\infty}\int\limits_a^b f(x)\,dx = \lim\limits_{b\to+\infty} F(b) - F(a)$ и вместо последнего выражения часто используется запись $F(x)\Big|_a^{+\infty}$. Несобственный интеграл будет сходящимся, если $\lim\limits_{b\to+\infty} F(b)$ конечен, и расходящимся, если этот предел не существует или бесконечен.

Интеграл $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx$ называется *сходящимся*, если сходятся оба интеграла

$$\int\limits_{-\infty}^{a} f(x)\,dx \text{ и } \int\limits_{a}^{+\infty} f(x)\,dx,$$

где a — произвольное действительное число. При этом

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx = \int\limits_{-\infty}^{a} f(x)\,dx + \int\limits_{a}^{+\infty} f(x)\,dx$$

и сумма не зависит от выбора числа a.

Для исследования сходимости несобственных интегралов применяют различные признаки сходимости и расходимости. Приведем наиболее простые из них для интегралов вида $\int\limits_{a}^{+\infty} f(x)\,dx$.

1) (*Признак сравнения.*) Пусть $0 \le f(x) \le g(x)$ на $[a, +\infty)$. Если интеграл $\int\limits_{a}^{+\infty} g(x)\,dx$ сходится, то интеграл $\int\limits_{a}^{+\infty} f(x)\,dx$ также сходится. Если интеграл $\int\limits_{a}^{+\infty} f(x)\,dx$ расходится, то расходится и интеграл $\int\limits_{a}^{+\infty} g(x)\,dx$.

2) (*Предельный признак сравнения.*) Пусть $f(x)$, $g(x) > 0$ на $[a, +\infty)$. Если существует конечный предел $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{f(x)}{g(x)} = c > 0$ (т. е. $f(x) \sim cg(x)$, $x \to +\infty$), то интегралы

$$\int\limits_{a}^{+\infty} f(x)\,dx \text{ и } \int\limits_{a}^{+\infty} g(x)\,dx$$

сходятся или расходятся одновременно.

Часто в качестве несобственного интеграла, с которым производится сравнение, выбирают интегралы вида

$$\int\limits_{a}^{+\infty} \frac{1}{x^{\alpha}}\,dx, \quad a > 0, \ \alpha > 0, \tag{4.5}$$

которые сходятся при $\alpha > 1$ и расходятся при $\alpha \le 1$.

ПРИМЕР 4.23. Вычислить $\int\limits_{1}^{+\infty} \dfrac{x\,dx}{x^4+1}$.

◀ Имеем

$$\int\limits_{0}^{+\infty} \frac{x\,dx}{x^4+1} = \lim_{b\to+\infty} \int\limits_{0}^{b} \frac{x\,dx}{x^4+1} = \frac{1}{2} \lim_{b\to+\infty} \int\limits_{0}^{b} \frac{dx^2}{(x^2)^2+1} = \frac{1}{2} \lim_{b\to+\infty} \operatorname{arctg} x^2\Big|_0^b = \frac{1}{2} \lim_{b\to+\infty} \operatorname{arctg} b^2 = \frac{\pi}{4}. \ ▶$$

ПРИМЕР 4.24. Исследовать на сходимость интегралы:

а) $\int\limits_{1}^{+\infty} \dfrac{x+\cos x}{x^2+\sin x}\,dx$; б) $\int\limits_{1}^{+\infty} \dfrac{2\sqrt{x^5}+3x^2-4}{4x^4+100x-5}\,dx$; в) $\int\limits_{1}^{+\infty} \dfrac{e^{-x^3}}{x}\,dx$.

◄ а) Так как $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x+\cos x}{x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(1+\frac{\cos x}{x}\right)=1$, то $x+\cos x\sim x$ при $x\to+\infty$. Аналогично, $x^2+\sin x\sim x^2$ при $x\to+\infty$. Значит, $\frac{x+\cos x}{x^2+\sin x}\sim\frac{1}{x}$, $x\to+\infty$. Интеграл $\int\limits_1^{+\infty}\frac{1}{x}dx$ расходится (см. (4.5), $\alpha=1$). Следовательно, по предельному признаку сравнения интеграл $\int\limits_1^{+\infty}\frac{x+\cos x}{x^2+\sin x}dx$ также расходится.

б) При $x\to+\infty$ имеем $2\sqrt{x^5}+3x^2-4\sim2\sqrt{x^5}$ и $4x^4+100x-5\sim4x^4$. Тогда

$$\frac{2\sqrt{x^5}+3x^2-4}{4x^4+100x-5}\sim\frac{2\sqrt{x^5}}{4x^4}=\frac{1}{2\sqrt{x^3}},\ x\to+\infty.$$

Интеграл $\int\limits_1^{+\infty}\frac{dx}{2x^{3/2}}$ сходится. Значит, исходный интеграл сходится.

в) Функция e^{-t} является убывающей. Так как $x^3\geq x$ на $[1,+\infty)$, то $\frac{e^{-x^3}}{x}\leq\frac{e^{-x}}{x}\leq e^{-x}$ на $[1,+\infty)$. Интеграл

$$\int\limits_1^{+\infty}e^{-x}dx=-e^{-x}\Big|_1^{+\infty}=\frac{1}{e}$$

сходится. Следовательно, интеграл $\int\limits_1^{+\infty}\frac{e^{-x^3}}{x}dx$ также сходится. ►

В задачах 4.204–4.213 вычислить интегралы или установить их расходимость.

4.204. $\int\limits_e^{+\infty}\frac{dx}{x\ln^3x}$. **4.205.** $\int\limits_0^{+\infty}\frac{x\,dx}{x^2+4}$.

4.206. $\int\limits_0^{+\infty}xe^{-x^2}dx$. **4.207.** $\int\limits_0^{+\infty}xe^{-x}dx$.

4.208. $\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{dx}{x^2+6x+11}$. **4.209.** $\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{x+2}{x^2+4x+13}dx$.

4.210. $\int\limits_1^{+\infty}\frac{3x+2}{x^3+x^2}dx$. **4.211.** $\int\limits_1^{+\infty}\frac{x+2}{x(x^2+2x+2)}dx$.

4.212. $\int\limits_0^{+\infty}x\cos x\,dx$. **4.213.** $\int\limits_0^{+\infty}e^{-2x}\cos x\,dx$.

В задачах 4.214–4.222 исследовать на сходимость интегралы.

4.214. $\int\limits_1^{+\infty}\frac{x\,dx}{3+2x+x^4}$. **4.215.** $\int\limits_1^{+\infty}\frac{dx}{\sqrt{x(x+1)(x+2)}}$.

4.216. $\int\limits_1^{+\infty}\frac{3x^2+\sqrt{(x+1)^3}}{2x^3+\sqrt[3]{x^5}+1}dx$. **4.217.** $\int\limits_1^{+\infty}\frac{\sqrt{x^3}+\sqrt[3]{x^2}}{x^3+3x+1}dx$.

4.218. $\int\limits_1^{+\infty} \frac{3+\sin x}{\sqrt[3]{x}}\,dx.$ **4.219.** $\int\limits_1^{+\infty} \frac{\sin(1/x)}{\sqrt[3]{x}}\,dx.$

4.220. $\int\limits_{e^2}^{+\infty} \frac{dx}{x\ln x\cdot\ln\ln x}.$ **4.221.** $\int\limits_e^{+\infty} \frac{dx}{\ln x}.$ **4.222.** $\int\limits_0^{+\infty} e^{-x^2}\,dx.$

2. Интегралы от неограниченных функций

Пусть функция $f(x)$ определена на $[a, b)$, интегрируема на $[a, b']$ при любом $b' < b$ и не ограничена в любой левой окрестности точки b. В этом случае говорят, что она имеет единственную особенность в точке b. По определению полагают

$$\int\limits_a^b f(x)\,dx = \lim_{b'\to b-} \int\limits_a^{b'} f(x)\,dx. \qquad (4.6)$$

Если предел в правой части равенства (4.6) существует и конечен, то несобственный интеграл $\int\limits_a^b f(x)\,dx$ называется *сходящимся*, в противном случае — *расходящимся*.

Если существует непрерывная на отрезке $[a, b]$ функция $F(x)$, являющаяся первообразной для $f(x)$ на промежутке $[a, b)$, то несобственный интеграл $\int\limits_a^b f(x)\,dx$ может быть вычислен по обобщенной формуле Ньютона–Лейбница

$$\int\limits_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a) = F(x)\Big|_a^b. \qquad (4.7)$$

Аналогичным образом определяется несобственный интеграл $\int\limits_a^b f(x)\,dx$ в случае, когда функция имеет единственную особенность в точке a. Если точка $c \in (a, b)$ — единственная точка разрыва второго рода функции $f(x)$ на отрезке $[a, b]$ и $f(x)$ не ограничена в окрестности точки c, то несобственный интеграл $\int\limits_a^b f(x)\,dx$ называется *сходящимся*, если сходятся оба несобственных интеграла с единственными особенностями $\int\limits_a^c f(x)\,dx$ и $\int\limits_c^b f(x)\,dx.$ При этом $\int\limits_a^b f(x)\,dx = \int\limits_a^c f(x)\,dx + \int\limits_c^b f(x)\,dx.$ Если $f(x)$ не ограничена как в правой окрестности точки a, так и левой окрестности точки b, то интеграл $\int\limits_a^b f(x)\,dx$ называется сходящимся, если сходятся интегралы $\int\limits_a^d f(x)\,dx$ и $\int\limits_d^b f(x)\,dx,$ где $a < d < b$. При этом также $\int\limits_a^b f(x)\,dx = \int\limits_a^d f(x)\,dx + \int\limits_d^b f(x)\,dx.$

Признаки сходимости и расходимости несобственных интегралов от неограниченных функций аналогичны признакам из п. 1 для интегралов по бесконечному промежутку.

На практике в качестве интегралов, с которыми производится сравнение, обычно используются интегралы вида

$$\int_a^b \frac{dx}{(x-a)^\alpha}, \quad \int_a^b \frac{dx}{(b-x)^\alpha} \quad (\alpha > 0), \tag{4.8}$$

которые сходятся при $\alpha < 1$ и расходятся при $\alpha \geq 1$.

ПРИМЕР 4.25. Вычислить $\int_1^3 \frac{dx}{\sqrt{4x-x^2-3}}$.

◀ Интеграл $\int_1^3 \frac{dx}{\sqrt{4x-x^2-3}}$ имеет особенности в точках $x = 1$ и $x = 3$, так как $\frac{1}{\sqrt{4x-x^2-3}} \to \infty$ при $x \to 1 + 0$ и при $x \to 3 - 0$. Поэтому рассмотрим два несобственных интеграла $\int_1^2 \frac{dx}{\sqrt{4x-x^2-3}}$ и $\int_2^3 \frac{dx}{\sqrt{4x-x^2-3}}$ с единственными особенностями. По формуле (4.7) находим

$$\int_1^2 \frac{dx}{\sqrt{4x-x^2-3}} = \int_1^2 \frac{dx}{\sqrt{1-(x-2)^2}} = \arcsin(x-2)\Big|_1^2 = \arcsin 0 - \arcsin(-1) = \frac{\pi}{2}.$$

Аналогично,

$$\int_2^3 \frac{dx}{\sqrt{4x-x^2-3}} = \arcsin(x-2)\Big|_2^3 = \arcsin 3 - \arcsin 0 = \frac{\pi}{2}.$$

Таким образом, оба интеграла сходятся и, следовательно, интеграл $\int_1^3 \frac{dx}{\sqrt{4x-x^2-3}}$ сходится и равен $\int_1^2 \frac{dx}{\sqrt{4x-x^2-3}} + \int_2^3 \frac{dx}{\sqrt{4x-x^2-3}} = \pi$. ▶

ПРИМЕР 4.26. Исследовать на сходимость интеграл $\int_0^1 \frac{\cos x}{\sqrt{1-x^3}}\, dx$.

◀ Подынтегральная функция имеет единственную особенность в точке $x = 1$. Так как

$$\frac{\cos x}{\sqrt{1-x^3}} = \frac{\cos x}{\sqrt{(1-x)(1+x+x^2)}} \sim \frac{\cos 1}{\sqrt{3}} \cdot \frac{1}{\sqrt{1-x}}, \quad x \to 1-0,$$

и интеграл $\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x}}$ сходится (см. (4.8)), то сходится интеграл $\int_0^1 \frac{\cos x}{\sqrt{1-x^3}}\, dx$. ▶

В задачах 4.223–4.228 вычислить интегралы или установить их расходимость.

4.223. $\int_0^1 \frac{dx}{x^2+x^4}$. **4.224.** $\int_0^2 \frac{x\,dx}{\sqrt[5]{(x^2-4)^4}}$. **4.225.** $\int_2^4 \frac{dx}{\sqrt{6x-x^2-8}}$.

4.226. $\int_2^3 \frac{dx}{x^2-5x+6}$. **4.227.** $\int_1^e \frac{dx}{x\ln^3 x}$. **4.228.** $\int_0^{\pi^2} \frac{\cos\sqrt{x}\,dx}{\sqrt{x}}$.

В задачах 4.229–4.234 исследовать интегралы на сходимость.

4.229. $\int\limits_0^1 \frac{\cos x + \sin 2x}{\sqrt[3]{x}} dx.$ **4.230.** $\int\limits_0^1 \frac{x^2}{\sqrt{1-x^4}} dx.$ **4.231.** $\int\limits_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x} \cdot \sqrt[3]{1-x}}.$

4.232. $\int\limits_0^1 \frac{e^x - 1}{\ln(1+x^2)} dx.$ **4.233.** $\int\limits_0^1 \frac{dx}{\sqrt[4]{\operatorname{tg} x - \sin x}}.$ **4.234.** $\int\limits_0^1 \frac{1}{\sqrt{e^x - 1 - x}} dx.$

Если сходится интеграл $\int\limits_a^{+\infty} |f(x)|\, dx$, то сходится и $\int\limits_a^{+\infty} f(x)\, dx$. В этом случае $\int\limits_a^{+\infty} f(x)\, dx$ называется *абсолютно сходящимся*. Если интеграл $\int\limits_a^{+\infty} f(x)\, dx$ сходится, а $\int\limits_a^{+\infty} |f(x)|\, dx$ расходится, то интеграл $\int\limits_a^{+\infty} f(x)\, dx$ называют *условно сходящимся*.

В задачах 4.235–4.237 исследовать интегралы на абсолютную и условную сходимость.

4.235. $\int\limits_1^{+\infty} \frac{\cos x + 2\sin 2x}{x^2 + x + 1} dx.$ **4.236.** $\int\limits_0^1 \frac{\cos(1/x)}{\sqrt{1-x^2}} dx.$ **4.237.** $\int\limits_1^{+\infty} \frac{\cos 2x}{x} dx.$

§ 4.5. ГЕОМЕТРИЧЕСКИЕ ПРИЛОЖЕНИЯ ОПРЕДЕЛЕННОГО ИНТЕГРАЛА

1. Площадь плоской фигуры

Пусть функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a, b]$ и неотрицательна на нем. Тогда площадь криволинейной трапеции, ограниченной прямыми $x = a$, $x = b$, осью Ox и графиком функции $f(x)$ (рис. 4.3), вычисляется по формуле $S = \int\limits_a^b f(x)\, dx.$

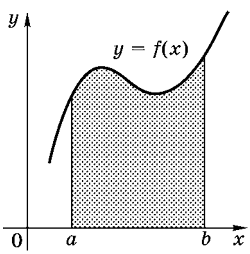


Рис. 4.3

Если фигура ограничена графиками функций $f(x)$, $g(x)$ и прямыми $x = a$, $x = b$, причем $f(x) \geq g(x)$ при $x \in [a, b]$, то площадь этой фигуры

$$S = \int\limits_a^b (f(x) - g(x))\, dx. \tag{4.9}$$

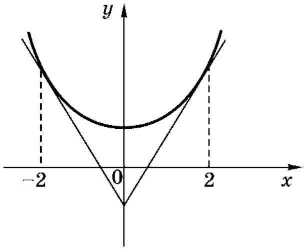


Рис. 4.4

ПРИМЕР 4.27. Вычислить площадь фигуры, ограниченной параболой $y = x^2 + 1$ и касательными к ней, проведенными в точках с абсциссами $x = \pm 2$.

◄ Фигура, площадь которой необходимо найти, симметрична относительно оси Oy (рис. 4.4). Поэтому ее площадь равна удвоенной площади ее части, лежащей в правой полуплоскости. Составим уравнение касательной в точке с абсциссой $x_0 = 2$. Уравнение имеет вид $y=y_0+y_0'(x-x_0)$. В нашем случае $y_0'=(x^2+1)'|_{x=2}=4$, $y_0=5$. Поэтому уравнение касательной $y = 4x - 3$. Следовательно (см. формулу (4.9)), площадь фигуры

$$S=2\int_0^2(x^2+1-(4x-3))\,dx=2\int_0^2(x^2-4x+4)\,dx=2\int_0^2(x-2)^2dx=$$

$$=2\cdot\frac{(x-2)^3}{3}\Bigg|_0^2=\frac{16}{3}=5\frac{1}{3}.\ \blacktriangleright$$

В задачах 4.238–4.247 найти площади фигур, ограниченных указанными линиями.

4.238. Параболой $y = x^2 + 2x$ и прямой $y = x + 2$.

4.239. Кривыми $y = e^x$, $y = e^{-x}$ и прямой $x = 1$.

4.240. Кривой $y = \ln x$ и прямыми $x = e$, $x = e^2$, $y = 0$.

4.241. Кривой $y = \arcsin x$ и прямыми $x = 0$, $y = \pi/2$.

4.242. Локоном Аньези $y=\dfrac{1}{1+x^2}$ и его асимптотой.

4.243. Кривой $y=\dfrac{1}{\sqrt{x}}$, осью Oy и прямой $x = 1$.

4.244. Эллипсом $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$.

4.245. Гиперболой $\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1$ и прямой $x = 2a$.

4.246. Кривой $y = \operatorname{tg} x$, нормалью к ней в точке с абсциссой $x = \pi/4$ и осью Ox.

4.247. Окружностью $x^2 + y^2 = 8$ и параболой $2x = y^2$ (каждой из двух частей).

Площадь полярного сектора (рис. 4.5), ограниченного непрерывной кривой $r = r(\varphi)$ и двумя лучами, выходящими из полюса, $\varphi = \alpha$, $\varphi = \beta$ (r, φ — полярные координаты точки на плоскости), вычисляется по формуле

$$S=\frac{1}{2}\int_\alpha^\beta r^2(\varphi)\,d\varphi.$$

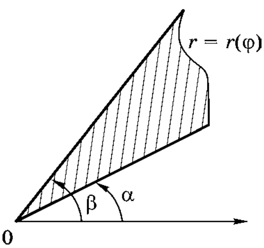


Рис. 4.5

ПРИМЕР 4.28. Вычислить площадь фигуры, ограниченной кривой $r = a\cos 2\varphi$ (рис. 4.6).

◀ В силу симметрии кривой, найдем сначала половину искомой площади:

$$\frac{1}{2}S=\frac{a^2}{2}\int_{-\pi/4}^{\pi/4}\cos^2 2\varphi\,d\varphi=\frac{a^2}{2}\int_{-\pi/4}^{\pi/4}\frac{1+\cos 4\varphi}{2}\,d\varphi=$$

$$=\frac{a^2}{4}\left(\varphi+\frac{\sin 4\varphi}{4}\right)\Bigg|_{-\pi/4}^{\pi/4}=\frac{\pi a^2}{8}.$$

Отсюда $S = \pi a^2/4$. ▶

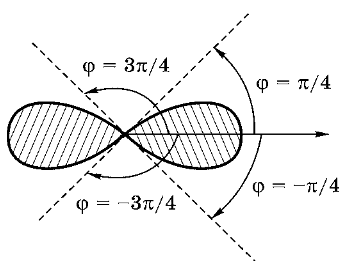


Рис. 4.6

В задачах 4.248–4.252 найти площади фигур, ограниченных указанными кривыми.

4.248. Кривой $r = a(1 + \sin\varphi)$.

4.249. Кривыми $r = 2a\sin\varphi$, $r = 2a\cos\varphi$.

4.250. Кривой $r = 2 + \cos\varphi$.

4.251. Кривыми $r^2 = 2\cos 2\varphi$, $r = 1$ (вне круга).

4.252. Кривой $r = \dfrac{1}{\cos\varphi}$, лучом $\varphi = \pi/3$ и полярной осью.

4.253. Перейдя к полярным координатам, вычислить площадь, заключенную внутри лемнискаты Бернулли $x^4 + y^4 = x^2 + y^2$.

Если плоская фигура ограничена кривой, заданной параметрическими уравнениями $y = y(t) \geq 0$, $x = x(t)$, прямыми $x = a$, $x = b$, $a < b$, и осью абсцисс, то площадь фигуры вычисляется по формуле

$$S = \int_{t_1}^{t_2} y(t)x'(t)\,dt, \tag{4.10}$$

где пределы интегрирования находятся из уравнений $a = x(t_1)$, $b = x(t_2)$.

По формуле (4.10) вычисляется также площадь фигуры, ограниченной замкнутой (т. е. $(x(t_1), y(t_1)) = (x(t_2), y(t_2))$ кривой. При этом изменение параметра t от t_1 до t_2 должно соответствовать обходу кривой по часовой стрелке.

ПРИМЕР 4.29. Вычислить площадь фигуры, ограниченной эллипсом $x = a\cos t$, $y = b\sin t$ $(0 \leq t \leq 2\pi)$.

◄ Чтобы обход эллипса совершался по часовой стрелке, параметр t должен меняться от 2π до 0. Таким образом, по формуле (4.10) находим площадь эллипса:

$$S = ab\int_{2\pi}^{0}\sin t\cdot(-\sin t)\,dt = ab\int_{0}^{2\pi}\sin^2 t\,dt = ab\int_{0}^{2\pi}\frac{1-\cos 2t}{2}\,dt = \frac{ab}{2}\left(t - \frac{\sin 2t}{2}\right)\Bigg|_0^{2\pi} = \pi ab. \text{ ►}$$

В задачах 4.254–4.257 найти площади фигур, ограниченных указанными линиями.

4.254. Астроидой $x = a\cos^3 t$, $y = a\sin^3 t$.

4.255. Одной аркой циклоиды $x = 2(t - \sin t)$, $y = 2(1 - \cos t)$ и осью Ox.

4.256. Кривой $x = a\sin t$, $y = a\sin 2t$, $t \in [0, \pi]$.

4.257. Петлей кривой $x = a(t^2 + 1)$, $y = b(t^3 - 3t)$.

2. Объем тела вращения

Объем тела, образованного вращением вокруг оси Ox или Oy криволинейной трапеции, ограниченной графиком неотрицательной непрерывной на отрезке $[a, b]$ функции $f(x)$, прямыми $x = a$, $x = b$, $y = 0$, вычисляется соответственно по формулам

$$V_x = \pi\int_a^b f^2(x)\,dx \tag{4.11}$$

и

$$V_y = 2\pi\int_a^b x|f(x)|\,dx \quad (a \geq 0). \tag{4.12}$$

ПРИМЕР 4.30. Найти объемы тел, полученных вращением фигуры, ограниченной одной полуволной синусоиды $y = \sin x$ и отрезком $0 \le x \le \pi$ оси Ox, вокруг: а) оси Ox; б) оси Oy.

◀ а) Объем тела вращения вокруг оси Ox находим по формуле (4.11):

$$V_x = \pi\int_0^\pi \sin^2 x\, dx = \frac{\pi}{2}\int_0^\pi (1-\cos 2x)\, dx = \frac{\pi^2}{2}.$$

б) Используя формулу (4.12) и интегрирование по частям, находим объем тела вращения вокруг оси Oy:

$$V_y = 2\pi\int_0^\pi x\sin x\, dx = \begin{vmatrix} u = x & du = dx \\ dv = \sin x dx & v = -\cos x \end{vmatrix} = 2\pi\left(-x\cos x\Big|_0^\pi + \int_0^\pi \cos x\, dx\right) = 2\pi^2. \ ▶$$

4.258. Найти объем тела, образованного вращением параболического сегмента с основанием $2a$ и высотой h вокруг оси симметрии.

4.259. Найти объем эллипсоида, образованного вращением эллипса

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

вокруг оси Ox.

4.260. Фигура, ограниченная параболой $2y = x^2$ и прямой $2x + 2y - 3 = 0$, вращается вокруг оси Ox. Найти объем тела вращения.

4.261. Фигура, ограниченная кривыми $y = 1 - e^{-2x}$, $y = e^{-x} + 1$ и прямой $x = 0$, вращается вокруг оси Ox. Найти объем тела вращения.

4.262. Фигура, ограниченная кривой $y = x + \sin^2 x$ и прямыми $y = x$, $x = 0$ и $x = \pi$, вращается вокруг оси Oy. Найти объем тела вращения.

4.263. Фигура, ограниченная кривой $y = \frac{x^2}{2} + x + 2$ и прямой $y = 2$, вращается вокруг оси Oy. Найти объем тела вращения.

3. Длина дуги кривой

Если кривая задана уравнением $y = f(x)$ и производная $f'(x)$ непрерывна, то длина дуги выражается интегралом

$$l = \int_a^b \sqrt{1 + (f'(x))^2}\, dx,$$

где a и b — абсциссы концов дуги.

Если плоская кривая задана в параметрическом виде $x = x(t)$, $y = y(t)$ и производные $x'(t)$, $y'(t)$ непрерывны, то длина дуги выражается интегралом

$$l = \int_{t_1}^{t_2} \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2}\, dt,$$

где t_1 и t_2 — значения параметра, соответствующие концам дуги ($t_1 < t_2$).

Аналогично вычисляется длина дуги пространственной кривой, заданной параметрическими уравнениями $x = x(t)$, $y = y(t)$, $z = z(t)$, $t_1 \le t \le t_2$:

$$l = \int_{t_1}^{t_2} \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2 + (z'(t))^2}\, dt.$$

Если кривая задана в полярных координатах уравнением $r = r(\varphi)$ и производная $r'(\varphi)$ непрерывна, то длина дуги вычисляется по формуле

$$l = \int_{\alpha}^{\beta} \sqrt{(r(\varphi))^2 + (r'(\varphi))^2}\, d\varphi,$$

где α и β — значения полярного угла φ в концах дуги ($\alpha < \beta$).

ПРИМЕР 4.31. Найти длину дуги параболы $y = x^2$ от точки $O(0, 0)$до точки $B(1, 1)$.

◄ Длина дуги выразится интегралом $l = \int_0^1 \sqrt{1+4x^2}\, dx.$ Неопределенный интеграл (см. пример 4.7):

$$\int \sqrt{1+x^2}\, dx = \frac{x}{2}\sqrt{1+x^2} + \frac{1}{2}\ln\left|x+\sqrt{1+x^2}\right| + C.$$

Следовательно,

$$\int \sqrt{1+4x^2}\, dx = \frac{1}{2}\int \sqrt{1+(2x)^2}\, d(2x) = \frac{x}{2}\sqrt{1+4x^2} + \frac{1}{4}\ln\left|2x+\sqrt{1+4x^2}\right| + C.$$

По формуле Ньютона–Лейбница получим

$$l = \left(\frac{x}{2}\sqrt{1+4x^2} + \frac{1}{4}\ln\left|2x+\sqrt{1+4x^2}\right|\right)\Bigg|_0^1 = \frac{\sqrt{5}}{2} + \frac{1}{4}\ln(2+\sqrt{5}).$$ ►

ПРИМЕР 4.32. Найти длину астроиды $x = a\cos^3 t,\ y = a\sin^3 t$.

◄ В силу симметрии кривой найдем сначала длину ее части, находящейся в первой четверти. Имеем

$$x'(t) = -3a\cos^2 t\sin t,\quad y'(t) = 3a\sin^2 t\cos t.$$

Так как $0 \le t \le \pi/2$, то для подынтегральной функции получаем

$$\sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2} = 3a\sqrt{\cos^4 t\sin^2 t + \cos^2 t\sin^4 t} = 3a\cos t\sin t = \frac{3}{2}a\sin 2t.$$

Следовательно,

$$\frac{1}{4}l = \frac{3a}{2}\int_0^{\pi/2} \sin 2t\, dt = -\frac{3a}{4}\cos 2t\Big|_0^{\pi/2} = \frac{3a}{2}.$$

Таким образом, $l = 6a$. ►

ПРИМЕР 4.33. Найти длину логарифмической спирали $r = e^{a\varphi}$, $a > 0$, находящейся внутри окружности $r = 1$.

◄ Найдем пределы изменения полярного угла. Имеем $e^{a\varphi} \le 1$. Следовательно, $-\infty < \varphi \le 0$. Значит,

$$l = \int_{-\infty}^{0} \sqrt{(r(\varphi))^2 + (r'(\varphi))^2}\, d\varphi = \int_{-\infty}^{0} \sqrt{e^{2a\varphi} + a^2 e^{2a\varphi}}\, d\varphi = \sqrt{1+a^2}\int_{-\infty}^{0} e^{a\varphi}\, d\varphi =$$

$$= \frac{\sqrt{1+a^2}}{a} e^{a\varphi}\Big|_{-\infty}^{0} = \frac{\sqrt{1+a^2}}{a}.$$ ►

В задачах 4.264–4.275 найти длины дуг:

4.264. Кривой $y = \frac{2}{\pi}\ln\sin\frac{\pi x}{2}$ от $x = \frac{1}{2}$ до $x = \frac{3}{2}$.

4.265. Полукубической параболы $y^2 = x^3$ от начала координат до точки (4, 8).

4.266. Кривой $y = \frac{1}{3}(3 - x)\sqrt{x}$ между точками пересечения ее с осью абсцисс.

4.267. Кривой $y = \ln\frac{e^x + 1}{e^x - 1}$ от $x = \ln 2$ до $x = \ln 5$.

4.268. Цепной линии $y = \frac{1}{2}\operatorname{ch} 2x$ от $x = 0$ до $x = 3$.

4.269. Замкнутой кривой $8a^2y^2 = x^2(a^2 - x^2)$.

4.270. Кривой $x = a(3\cos t - \cos 3t)$, $y = a(3\sin t - \sin 3t)$ от $t = 0$ до $t = \pi/2$ $(a > 0)$.

4.271. Кривой $x = e^t \cos t$, $y = e^t \sin t$ от $t = 0$ до $t = 1$.

4.272. Кривой $x = a(\cos t + t\sin t)$, $y = a(\sin t - t\sin t)$ от $t = 0$ до $t = 2\pi$.

4.273. Одной арки циклоиды $x = a(t - \sin t)$, $y = a(1 - \cos t)$.

4.274. Кривой $x = \frac{t^6}{6}, y = 2 - \frac{t^4}{4}$ между точками ее пересечения с осями координат.

4.275. Петли кривой $x = t^2$, $y = \frac{t - 3t^3}{3}$.

В задачах 4.276, 4.277 найти длины дуг пространственных кривых.

4.276. $x = e^t \cos t$, $y = e^t \sin t$, $z = e^t$ между плоскостями $z = 0$ и $z = \ln 3$.

4.277. $x = a\sqrt{t}\cos t$, $y = a\sqrt{t}\sin t$, $z = at$ от $t = 0$ до $t = 4$.

В задачах 4.278–4.281 найти длины дуг кривых, заданных в полярной системе координат:

4.278. Кардиоиды $r = 1 + \cos\varphi$.

4.279. Кардиоиды $r = 2(1 - \cos\varphi)$, находящейся внутри окружности $r = 1$.

4.280. Спирали Архимеда $r = 5\varphi$, находящейся внутри окружности $r = 10\pi$.

4.281. Замкнутой кривой $r = a\cos^3\frac{\varphi}{3}$ $(a > 0)$.

4. Площадь поверхности вращения

Пусть кривая задана уравнением $y = f(x) \geq 0$ и производная $f'(x)$ непрерывна. Площадь поверхности, образованной вращением вокруг оси Ox ее дуги между точками с абсциссами $x = a$, $x = b$ выражается интегралом

$$Q_x = 2\pi\int_a^b f(x)\sqrt{1 + (f'(x))^2}\,dx.$$

Если дугу вращать вокруг оси Oy, то площадь соответствующей поверхности вращения выразится интегралом

$$Q_y = 2\pi\int_a^b x\sqrt{1 + (f'(x))^2}\,dx,\ 0 \leq a < b.$$

Если кривая задана параметрически или в полярных координатах, то формулы для вычисления площади поверхности получаются из приведенных путем соответствующей замены переменных.

ПРИМЕР 4.34. Найти площадь поверхности тора, образованного вращением окружности $x^2 + (y - 2)^2 = 1$ вокруг оси Ox.

◀ Найдем отдельно площади, полученные вращением верхней и нижней половин окружности. Для верхней половины окружности имеем уравнение $y = 2 + \sqrt{1 - x^2}$, $-1 \le x \le 1$. Отсюда $y' = -\dfrac{x}{\sqrt{1 - x^2}}$ и площадь соответствующей части тора равна

$$Q_{1,\,x} = 2\pi \int_{-1}^{1} (2 + \sqrt{1 - x^2}) \sqrt{1 + \frac{x^2}{1 - x^2}}\, dx = 2\pi \int_{-1}^{1} \left(\frac{2}{\sqrt{1 - x^2}} + 1 \right) dx =$$
$$= 4\pi \arcsin x \Big|_{-1}^{1} + 2\pi = 4\pi^2 + 2\pi.$$

Аналогично, площадь поверхности, полученная вращением нижней половины окружности $y = 2 - \sqrt{1 - x^2}$, $-1 \le x \le 1$, равна $Q_{2,\,x} = 4\pi^2 - 2\pi$. Следовательно, площадь поверхности тора: $Q_x = Q_{1,\,x} + Q_{2,\,x} = 8\pi^2$. ▶

4.282. Найти площадь поверхности, образованной вращением дуги кубической параболы $y = \dfrac{1}{3} x^3$, $-1 \le x \le 1$, вокруг оси Ox.

4.283. Найти площадь поверхности, образованной вращением одной полуволны синусоиды $y = \sin x$, $0 \le x \le \pi$, вокруг оси Ox.

4.284. Найти площадь поверхности (называемой катеноидом), образованной вращением дуги цепной линии $y = \dfrac{1}{2} \operatorname{ch} 2x$, $0 \le x \le 3$, вокруг оси Ox.

4.285. Найти площадь поверхности, образованной вращением вокруг оси Ox дуги кривой $y = \dfrac{1}{6} \sqrt{x} (x - 12)$, $0 \le x \le 12$.

4.286. Найти площадь поверхности, образованной вращением кривой $y = \arcsin x$ вокруг оси Oy.

4.287. Найти площадь поверхности параболоида, образованного вращением дуги параболы $y = x^2$, $0 \le x \le 1$, вокруг оси Oy.

4.288. Найти площадь поверхности, образованной вращением одной арки циклоиды $x = a(t - \sin t)$, $y = a(1 - \cos t)$ вокруг оси Ox.

4.289. Найти площадь поверхности эллипсоида, образованной вращением эллипса $x = \cos t$, $y = 2\sin t$ вокруг оси Ox.

4.290. Найти площадь поверхности, образованной вращением кардиоиды $r = 2a(1 + \cos \varphi)$ вокруг полярной оси.

4.291. Найти площадь поверхности, образованной вращением окружности $r = 2a \sin \varphi$ вокруг полярной оси.

§ 4.6. ПРИЛОЖЕНИЯ ОПРЕДЕЛЕННОГО ИНТЕГРАЛА К РЕШЕНИЮ НЕКОТОРЫХ ЗАДАЧ МЕХАНИКИ И ФИЗИКИ

Общую схему применения понятия определенного интеграла к решению физических задач можно описать следующим образом. Пусть нужно вычислить величину, зависящую от промежутка и обладающую свойством аддитивности относительно промежутков, т. е. значение величины на объединении непересекающихся промежутков равно сумме значений величины на каждом промежутке. Тогда, разбивая промежуток на малые части и применяя на каждой части физический закон, справедливый при постоянном значении силы, массы, скорости и т. п., находят приближенное значение искомой величины в виде интегральной суммы (см. § 4.1). Затем, устремляя мелкость промежутков к нулю, выражают нужную величину в виде определенного интеграла. Используют и иное рассуждение: рассматривая искомую величину как функцию от некоторого параметра, находят ее дифференциал. Применяя формулу Ньютона–Лейбница находят величину.

Приведем физические законы, которые могут быть использованы при решении ниже предложенных задач.

1) Статический момент точки массой m относительно некоторой оси есть произведение ml, где l — расстояние от точки до оси.

2) Центром масс фигуры является точка, обладающая свойством: если в ней сосредоточить всю массу фигуры, то статический момент такой точки относительно любой оси совпадает со статическим моментом фигуры относительно этой же оси.

3) Моментом инерции точки массой m относительно оси есть произведение ml^2, где l — расстояние от точки до оси.

4) Кинетическая энергия точки массой m, движущейся со скоростью v, равна $mv^2/2$.

5) Работа A постоянной силы F, перемещающей точку на расстояние s, равна Fs.

6) Сила давления P жидкости на площадку S с глубиной погружения H по закону Паскаля равна $P = \rho gHS$, где ρ — плотность жидкости.

7) Масса кривой длины l с постоянной линейной плотностью ρ равна $m = \rho l$. Аналогично определяется масса плоской фигуры и тела с постоянной плотностью.

В приведенных ниже примерах и задачах считаем, что все данные выражены в одной системе единиц измерения.

ПРИМЕР 4.35. Найти массу дуги $y = \ln\cos x$, $0 \le x \le \pi/4$, если линейная плотность точки кривой с абсциссой x равна $\rho(x) = \sin x$.

◄ Обозначим через $m(x)$ массу дуги, соответствующую промежутку $[0, x]$. Увеличим длину промежутка на dx. На промежутке $[x, x + dx]$ плотность можно считать постоянной, равной $\sin x$, а длину участка кривой равной дифференциалу дуги, т. е.

$$dl = \sqrt{1+(y')^2}\,dx = \sqrt{1+\operatorname{tg}^2 x}\,dx = \frac{1}{\cos x}dx.$$

Поэтому дифференциал массы (часто говорят «элементарная масса»), в соответствии с законом 7) равен

$$dm(x) = \rho(x)dl = \frac{\sin x}{\cos x}dx.$$

Отсюда легко находим массу дуги:

$$m = \int_0^{\pi/4} dm(x) = \int_0^{\pi/4} \frac{\sin x}{\cos x}dx = -\ln\cos x\Big|_0^{\pi/4} = \frac{1}{2}\ln 2. \blacktriangleright$$

ПРИМЕР 4.36. Найти статический момент дуги параболы $y = x^2$, $0 \le x \le 1$, относительно оси Oy, считая линейную плотность постоянной, равной 1.

◄ Обозначим через $M_y(x)$ статический момент относительно оси Oy дуги параболы, соответствующей промежутку $[0, x]$. Увеличим длину промежутка на dx. Находим массу части дуги параболы на промежутке $[x, x + dx]$:

$$dm = \sqrt{1+(y')^2}\,dx = \sqrt{1+4x^2}\,dx.$$

Поскольку все точки рассматриваемого участка параболы можно считать находящимися на одном и том же расстоянии x от оси Oy, то дифференциал (элементарный статический момент) величины $M_y(x)$ в соответствии с законом 1) равен

$$dM_y(x) = x\sqrt{1+4x^2}\,dx.$$

Следовательно, статический момент дуги параболы относительно оси Oy:

$$M_y = \int_0^1 dM_y(x) = \int_0^1 x\sqrt{1+4x^2}dx = \frac{1}{8}\int_0^1 \sqrt{1+4x^2}d(4x^2+1) = \frac{(1+4x^2)^{3/2}}{12}\Bigg|_0^1 = \frac{5\sqrt{5}-1}{12}. \blacktriangleright$$

Пусть дуга кривой задана уравнением $y = f(x)$, $a \le x \le b$ и имеет линейную плотность $\rho = \rho(x)$. В задачах 4.292–4.294 доказать утверждения.

4.292. Статические моменты дуги M_x и M_y относительно координатных осей Ox и Oy соответственно равны

$$M_x = \int_a^b \rho(x)f(x)\sqrt{1+(f'(x))^2}\,dx, \quad M_y = \int_a^b \rho(x)x\sqrt{1+(f'(x))^2}\,dx.$$

4.293. Масса дуги равна $m = \int_a^b \rho(x)\sqrt{1+(f'(x))^2}\,dx.$

4.294. Координаты $\overline{x}$ и $\overline{y}$ центра масс дуги вычисляются по формулам

$$\overline{x} = \frac{1}{m}\int_a^b \rho(x)x\sqrt{1+(f'(x))^2}\,dx, \quad \overline{y} = \frac{1}{m}\int_a^b \rho(x)f(x)\sqrt{1+(f'(x))^2}\,dx,$$

где m — масса дуги.

4.295. Найти статический момент относительно оси Ox синусоиды $y = \sin x$, $0 \le x \le \pi$.

4.296. Найти статический момент и момент инерции относительно оси Ox дуги кривой $y = e^x$, $0 \le x \le 1$.

4.297. Найти кинетическую энергию однородного ($\rho = 1$) кругового конуса с радиусом основания R и высотой H, вращающегося с угловой скоростью ω вокруг своей оси.

4.298. Найти кинетическую энергию однородного ($\rho = 1$) шара радиуса R, вращающегося с угловой скоростью ω вокруг своего диаметра.

4.299. Скорость прямолинейного движения тела выражается формулой $v(t) = 2t + 3t^2$ (м/с). Найти путь, пройденный телом за 5 с от начала движения ($t = 0$).

4.300. Скорость движения точки изменяется по закону $\frac{1}{1+t^2}$ (м/с). Найти путь, пройденный точкой от начала движения ($t = 0$) до полной остановки.

4.301. Вычислить работу, которую надо совершить, чтобы насыпать кучу песка конической формы с радиусом основания R и высотой h. Плотность песка равна ρ.

4.302. Вычислить работу, которую надо совершить при постройке пирамиды с квадратным основанием, если высота пирамиды H, сторона основания a, а плотность материала ρ.

4.303. Найти силу давления жидкости плотности ρ на треугольный затвор плотины с основанием a и высотой h, если основание затвора находится на поверхности.

4.304. Найти силу давления жидкости плотности ρ, заполняющей круговой цилиндр с радиусом основания R и высотой H, на боковую стенку цилиндра.

Г Л А В А 5

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ ФУНКЦИЙ НЕСКОЛЬКИХ ПЕРЕМЕННЫХ

§ 5.1. ПРЕДЕЛ. НЕПРЕРЫВНОСТЬ

1. Понятие функции нескольких переменных

Пусть D — некоторое множество упорядоченных пар (x, y) действительных чисел. Если каждой паре $(x, y) \in D$ поставлено в соответствие некоторое действительное число z, то говорят, что на множестве D задана *функция двух переменных* $z = f(x, y)$. Переменные x, y называют аргументами или независимыми переменными, а z — зависимой переменной или функцией. Множество D называется *областью определения* функции, а множество значений функции, когда пары (x, y) пробегают D, называют *множеством* (или *областью*) *значений* функции f. Если функция задана формулой и область определения не указана, то за область определения функции принимают множество всех пар аргументов, при которых формула имеет смысл (*естественная область определения*). Аналогично определяются функции трех и большего числа переменных.

Упорядоченную пару (x, y) действительных чисел удобно интерпретировать как точку M декартовой плоскости Oxy с координатами x, y, а функцию двух переменных записывать также в виде $z = f(M)$. Множество точек $P(x, y, z)$ трехмерного декартового пространства, где $z = f(x, y)$, $(x, y) \in D$, называют графиком функции f. В простых случаях область определения функции является некоторой фигурой на плоскости, ограниченной одной или несколькими кривыми (называемыми *границей области*), а график функции — некоторой поверхностью. В зависимости от того, входят ли все точки границы фигуры в область определения или нет, область определения называют *замкнутой* или *открытой*.

ПРИМЕР 5.1. Найти область определения функции $f(x, y) = \arcsin(x^2 + y^2 - 3)$.

◀ Функция $\arcsin u$ определена при $-1 \le u \le 1$. Следовательно, область определения функции f задается двойным неравенством $-1 \le x^2 + y^2 - 3 \le 1$, или $2 \le x^2 + y^2 \le 4$. Уравнение $x^2 + y^2 = 2$ есть уравнение окружности радиуса $\sqrt{2}$ с центром в начале координат, а уравнение $x^2 + y^2 = 4$ — уравнение окружности радиуса 2 также с центром в начале координат. Таким образом, область определения функции есть замкнутое кольцо (рис. 5.1). ▶

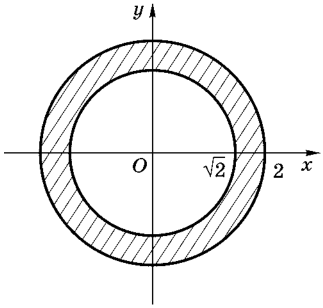


Рис. 5.1

В задачах 5.1–5.10 найти и изобразить области определения функций двух переменных.

5.1. $f(x,y)=\sqrt{9-x^2-y^2}$. **5.2.** $f(x,y)=\sqrt{x^2+y^2-1}$.

5.3. $f(x,y)=\dfrac{1}{\sqrt{4x^2+y^2-1}}$. **5.4.** $f(x,y)=\dfrac{1}{\sqrt{16-x^2-4y^2}}$.

5.5. $f(x,y)=\ln(-x-y-1)$. **5.6.** $f(x,y)=\sqrt{y-x^2-1}$.

5.7. $f(x,y)=\dfrac{2x+3y-1}{x^2-y^2-1}$. **5.8.** $f(x,y)=y\sqrt{\cos x}$.

5.9. $f(x,y)=\sqrt{2x-x^2-y^2}$. **5.10.** $f(x,y)=\sqrt{4-x^2}+\sqrt{9-y^2}$.

В задачах 5.11–5.14 найти области определения функций трех переменных.

5.11. $f(x,y,z)=\sqrt{16-x^2-y^2-z^2}$. **5.12.** $f(x,y,z)=\sqrt{z-x^2-y^2}$.

5.13. $f(x,y,z)=\sqrt{xyz}$. **5.14.** $f(x,y,z)=\ln(1-x^2-y^2+z^2)$.

Линией уровня функции $f(x, y)$ называют множество точек плоскости Oxy, в которых функция принимает одно и то же значение, т. е. $f(x, y) = C$. Так как линию уровня можно считать линией, полученной пересечением поверхности $z = f(x, y)$ плоскостью $z = C$, то по линиям уровня можно представить вид поверхности, являющейся графиком функции.

ПРИМЕР 5.2. Построить линии уровня и определить вид графика функции $f(x, y) = (y - x)^2$.

◀ Линии уровня $(y - x)^2 = C$ есть прямые $y=x\pm\sqrt{C}$, $C\ge 0$ (рис. 5.2). Смещая прямые вдоль оси Oz на соответствующее число C, получим поверхность — график функции. Чтобы лучше представить поверхность, рассечем ее плоскостью $y = -x$. Уравнение сечения $z = 4y^2$ задает параболу. Таким образом, заключаем, что график функции есть цилиндрическая поверхность, вид которой изображен на рис. 5.3. ▶

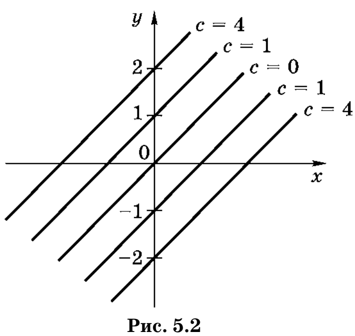


Рис. 5.2

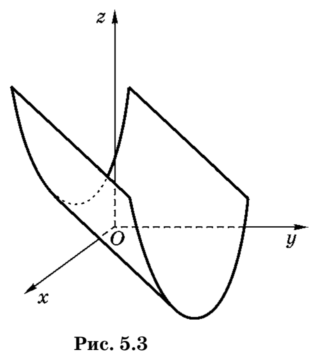


Рис. 5.3

В задачах 5.15–5.18 построить линии уровня и изобразить поверхности, являющиеся графиками заданных функций.

5.15. $f(x,y)=x^2+y^2$. **5.16.** $f(x,y)=\sqrt{x^2+y^2}$.

5.17. $f(x,y)=\sqrt{4-x^2-4y^2}$. **5.18.** $f(x,y)=\ln(x^2+y^2)$.

2. Предел и непрерывность функции

Пусть функция $f(x, y)$ определена в некоторой проколотой окрестности точки $M_0(x_0, y_0)$ (например, в открытом круге радиуса r с центром в точке M_0, за исключением самой точки M_0). Число A называется *пределом* функции $f(M)$ при стремлении точки M к точке M_0, если для любого $\varepsilon > 0$ найдется число $\delta > 0$, зависящее от ε, такое, что при $0 < \rho(M, M_0) < \delta$, где $\rho(M,M_0)=\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2}$ — расстояние между точками M и M_0, выполняется неравенство $|f(M) - A| < \varepsilon$. В этом случае пишут

$$A=\lim_{M\to M_0} f(M)=\lim_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}} f(x,y).$$

ПРИМЕР 5.3. Вычислить предел $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 2}}(1+xy)^{\frac{2}{x^2+xy}}$.

◀ Представим функцию в виде $f(x,y)=((1+xy)^{1/xy})^{\frac{2y}{x+y}}$. Так как $u = xy \to 0$ при $x \to 0$, $y \to 2$, то $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 2}}(1+xy)^{1/xy}=\lim\limits_{u\to 0}(1+u)^{1/u}=e$. Учитывая, что $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 2}}\dfrac{2y}{x+y}=2$, получаем

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 2}}(1+xy)^{\frac{2}{x^2+xy}}=e^2. \blacktriangleright$$

В задачах 5.19–5.22 найти пределы.

5.19. $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\dfrac{x^2+y^2}{3-\sqrt{x^2+y^2+9}}$.

5.20. $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\dfrac{x^3+xy^2}{\sin(x^2+y^2)}$.

5.21. $\lim\limits_{\substack{x\to 2\\ y\to 1}}(x^2+y^2-5)\sin\dfrac{1}{x^2+y^2-5}$.

5.22. $\lim\limits_{\substack{x\to \infty\\ y\to \infty}}\dfrac{\sin(x^2+y^2)}{x^2+y^2}$.

Пусть $\mathbf{e} = \{\cos\alpha,\ \sin\alpha\}$ — произвольный единичный вектор. Точки $M_t = (x_0 + t\cos\alpha,\ y_0 + t\sin\alpha)$ $(t \ge 0)$ образуют луч, выходящий из точки (x_0, y_0) в направлении вектора $\mathbf{e}$. Предел $\lim\limits_{t\to+0} f(M_t)=\lim\limits_{t\to+0} f(x_0+t\cos\alpha, y_0+t\sin\alpha)$ называется *пределом функции $f(x, y)$ в точке (x_0, y_0) по направлению* $\mathbf{e}$.

Если функция имеет предел в точке, то пределы по всем направлениям в этой точке существуют и равны пределу функции. Однако из существования и равенства пределов функции в точке по всем направлениям не следует, что предел функции в точке существует.

ПРИМЕР 5.4. Найти пределы по направлениям функции $f(x,y)=\dfrac{xy}{x^2+y^2}$ в точке $(0, 0)$.

◀ Рассмотрим функцию в точках $M_t = (t\cos\alpha,\ t\sin\alpha)$, $t > 0$, образующих луч, выходящий из точки $(0, 0)$ в направлении $\mathbf{e} = \{\cos\alpha, \sin\alpha\}$. Имеем

$$f(M_t)=\frac{t^2\cos\alpha\sin\alpha}{t^2(\cos^2\alpha+\sin^2\alpha)}=\frac{1}{2}\sin 2\alpha.$$

Следовательно, предел функции f в точке (0, 0) по направлению **e** равен $0{,}5\sin 2\alpha$. Так как пределы по различным направлениям, вообще говоря, не совпадают, то отсюда следует, что предел функции $f(x,y)=\dfrac{xy}{x^2+y^2}$ в точке (0, 0) не существует. ►

5.23. Показать, что предел $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\dfrac{x-y}{x+y}$ не существует.

5.24. Показать, что предел $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\dfrac{x^2-y^2}{x^2+y^2}$ не существует.

5.25. Показать, что функция $f(x,y)=\dfrac{x^3y}{x^6+y^2}$ имеет равные пределы по всем направлениям в точке (0, 0), но предела в ней не имеет.

5.26. Выяснить, имеет ли функция $f(x,y)=\dfrac{x^2+y^4}{x^4+y^2}$ предел при $x\to\infty$, $y\to\infty$.

Функция $f(M)$ называется *непрерывной в точке* M_0, если она определена в некоторой окрестности этой точки и $\lim\limits_{M\to M_0} f(M)=f(M_0)$. Функция называется непрерывной в области, если она непрерывна в каждой точке этой области. Свойства непрерывных функций многих переменных аналогичны свойствам непрерывных функций одной переменной. В частности, справедливы теоремы о сохранении непрерывности при арифметических операциях (в случае частного знаменатель должен быть отличен от нуля), при построении сложной функции. Если условия непрерывности в точке не выполняются, то точку называют *точкой разрыва* функции. Непрерывность может нарушаться как в отдельных точках (*изолированные точки разрыва*), так и в точках, образующих одну или несколько линий (*линии разрыва*).

ПРИМЕР 5.5. Найти точки разрыва функции $f(x,y)=\dfrac{x+y}{x^3-y^3}$.

◄ Функция является непрерывной во всех точках, для которых $x^3-y^3\neq 0$, как частное двух непрерывных функций. В точках линии $x^3-y^3=0$, т. е. прямой $y=x$, функция не определена, и тем самым эта прямая является линией разрыва функции. ►

В задачах 5.27–5.30 найти точки разрыва функций двух переменных.

5.27. $f(x,y)=\dfrac{1}{(x-1)^2+(y+1)^2}$. **5.28.** $f(x,y)=\dfrac{1}{\sin^2\pi x+\sin^2\pi y}$.

5.29. $f(x,y)=\dfrac{x^2+y^2}{x^2-y}$. **5.30.** $f(x,y)=\dfrac{1}{(x^2+y^2-1)(x^2-y^2-1)}$.

В задачах 5.31–5.34 найти точки разрыва функций трех переменных.

5.31. $f(x,y,z)=\dfrac{1}{x^2+y^2+z^2-4}$. **5.32.** $f(x,y,z)=\dfrac{1}{x^2+y^2-z^2}$.

5.33. $f(x,y,z)=\dfrac{1}{x+2y+3z-6}$. **5.34.** $f(x,y,z)=\sin\dfrac{1}{x^2+y^2-z^2-1}$.

§ 5.2.
ЧАСТНЫЕ ПРОИЗВОДНЫЕ. ДИФФЕРЕНЦИАЛЫ

1. Частные производные

Пусть функция $f(x, y)$ определена в некоторой окрестности точки $M(x, y)$. *Частным приращением* функции в точке M по переменной x называют разность

$$\Delta_x f = \Delta_x f(x, y) = f(x + \Delta x, y) - f(x, y),$$

где Δx — приращение переменной x. *Частной производной* (*1-го порядка*) функции $f(x, y)$ по переменной x в точке M называется

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta_x f}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x, y) - f(x, y)}{\Delta x}.$$

Частную производную в точке M обозначают $\dfrac{\partial f(M)}{\partial x} = \dfrac{\partial f(x,y)}{\partial x}$ или $f'_x(M) = f'_x(x, y)$. Аналогично определяется частная производная по переменной y. Частная производная по переменной x (y) вычисляется по обычным правилам дифференцирования, когда другая переменная y (соответственно x) считается константой.

ПРИМЕР 5.6. Найти частные производные функции $f(x, y) = x^y$ $(x > 0)$.

◄ Если считать переменную y константой, то функция f относительно переменной x будет степенной и, значит, $\dfrac{\partial f}{\partial x} = yx^{y-1}$. При вычислении производной по y функцию рассматриваем как показательную и, следовательно, $\dfrac{\partial f}{\partial y} = x^y \ln x$. ►

Частными производными 2-го порядка функции $f(x, y)$ называются частные производные от ее первых производных. Для производных второго порядка применяются обозначения

$$\frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial x^2} = f''_{xx}(x,y) = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f(x,y)}{\partial x}\right),$$

$$\frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial y\, \partial x} = f''_{xy}(x,y) = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f(x,y)}{\partial x}\right)$$

и т. д. Аналогичным образом определяются и обозначаются частные производные порядка выше второго. Частные производные 2-го и более высоких порядков, полученные дифференцированием функции как по переменной x, так и по переменной y, называют смешанными. Если вычисляемые смешанные производные непрерывны, то результат дифференцирования не зависит от порядка дифференцирования.

ПРИМЕР 5.7. Найти частные производные второго порядка функции $f(x, y) = x^y$.

◄ Частные производные первого порядка равны (см. пример 5.6)

$$\frac{\partial f}{\partial x} = yx^{y-1}, \quad \frac{\partial f}{\partial y} = x^y \ln x.$$

Дифференцируем вторично:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x}(yx^{y-1}) = y(y-1)x^{y-2},$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y\, \partial x} = \frac{\partial}{\partial y}(yx^{y-1}) = x^{y-1} + yx^{y-1}\ln x = x^{y-1}(1 + y\ln x),$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x\, \partial y} = \frac{\partial}{\partial x}(x^y \ln x) = yx^{y-1}\ln x + x^y \frac{1}{x} = x^{y-1}(1 + y\ln x),$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = \frac{\partial}{\partial y}(x^y \ln x) = x^y (\ln x)^2.$$

Следовательно, $\frac{\partial^2 u}{\partial y\,\partial x}=\frac{\partial^2 u}{\partial x\,\partial y}$. ►

В задачах 5.35–5.44 найти частные производные 1-го и 2-го порядков заданных функций.

5.35. $f(x,y)=x^5+y^5-5x^3y^3$. **5.36.** $f(x,y)=xy+\frac{y}{x}$.

5.37. $f(x,y)=\frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}}$. **5.38.** $f(x,y)=xe^{-xy}$.

5.39. $f(x,y)=\frac{\cos y^2}{x}$. **5.40.** $f(x,y)=\operatorname{arctg}\frac{y}{x}$.

5.41. $f(x,y)=\ln(x^2+y^2)$. **5.42.** $f(x,y)=\arcsin\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}$.

5.43. $f(x,y,z)=\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$. **5.44.** $f(x,y,z)=\left(\frac{y}{x}\right)^z$.

5.45. Проверить, что $\frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial x\,\partial y}=\frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial y\,\partial x}$, если $f(x,y)=\sin\frac{y}{x}$.

5.46. Проверить, что $\frac{\partial^5 f(x,y)}{\partial x^3\partial y^2}=\frac{\partial^5 f(x,y)}{\partial y^2\partial x^3}$, если $f(x,y)=x^3\sin y+y^2\cos x$.

5.47. Вычислить определитель

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial r} & \frac{\partial x}{\partial \varphi} \\ \frac{\partial y}{\partial r} & \frac{\partial y}{\partial \varphi} \end{vmatrix},$$

если $x=r\cos\varphi$, $y=r\sin\varphi$.

5.48. Вычислить определитель

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial r} & \frac{\partial x}{\partial \varphi} & \frac{\partial x}{\partial \theta} \\ \frac{\partial y}{\partial r} & \frac{\partial y}{\partial \varphi} & \frac{\partial y}{\partial \theta} \\ \frac{\partial z}{\partial r} & \frac{\partial z}{\partial \varphi} & \frac{\partial z}{\partial \theta} \end{vmatrix},$$

если $x=r\cos\theta\cos\varphi$, $y=r\cos\theta\sin\varphi$, $z=r\sin\theta$.

5.49. Показать, что $\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial u}{\partial z}+\frac{\partial u}{\partial t}=0$, если $u=\frac{x-y}{z-t}+\frac{t-x}{y-z}$.

5.50. Показать, что функция $u=a\sin\lambda x\cos a\lambda t$ удовлетворяет *уравнению колебания струны*

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=a^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}.$$

5.51. Показать, что функция $u=\frac{1}{2a\sqrt{\pi t}}e^{-\frac{x^2}{4a^2t}}$ удовлетворяет *уравнению теплопроводности*

$$\frac{\partial u}{\partial t}=a^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}.$$

5.52. Показать, что функция $u=\frac{1}{\sqrt{(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2}}$ удовлетворяет *уравнению Лапласа*

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}=0.$$

2. Дифференциалы

Пусть функция $f(x, y)$ определена в некоторой окрестности точки $M(x, y)$. Ее *полным приращением* в точке M называется разность

$$\Delta f=\Delta f(M)=\Delta f(x, y)=f(x+\Delta x, y+\Delta y)-f(x, y),$$

где Δx, Δy — приращения аргументов x и y соответственно. Величина $\rho=\sqrt{\Delta x^2+\Delta y^2}$ равна расстоянию между точками $M(x, y)$ и $M_1(x+\Delta x, y+\Delta y)$. Функция f называется *дифференцируемой* в точке M, если при $\rho\to 0$ ее полное приращение в точке M представимо в виде

$$\Delta f=A\Delta x+B\Delta y+o(\rho),$$

где числа A и B не зависят от приращений аргументов Δx, Δy.

Дифференциалом (*или дифференциалом 1-го порядка, или первым дифференциалом*) df функции $f(x, y)$ в точке M называется главная, линейная относительно Δx, Δy часть полного приращения функции в точке M, т. е.

$$df=A\Delta x+B\Delta y.$$

Если у функции $f(x, y)$ в точке M существуют непрерывные частные производные, то она заведомо будет дифференцируемой в этой точке, причем $A=\frac{\partial f(M)}{\partial x}, B=\frac{\partial f(M)}{\partial y}$. Полагая, как и в случае функций одной переменной, что дифференциалы независимых переменных равны их приращениям, т. е. $dx=\Delta x$, $dy=\Delta y$, получаем следующую форму для дифференциала:

$$df(M)=\frac{\partial f(M)}{\partial x}dx+\frac{\partial f(M)}{\partial y}dy. \tag{5.1}$$

Если $f(x, y)$ и $g(x, y)$ дифференцируемые функции, то из (5.1) и правил для вычисления частных производных следуют обычные правила дифференцирования

$$d(f\pm g)=df\pm dg,$$
$$d(fg)=gdf+fdg,$$
$$d\left(\frac{f}{g}\right)=\frac{gdf-fdg}{g^2},\ (g\neq 0).$$

Аналогично вводится понятие дифференциала для функции трех и большего числа аргументов. Для функции трех аргументов дифференциал вычисляется по формуле

$$df(x,y,z)=\frac{\partial f(x,y,z)}{\partial x}dx+\frac{\partial f(x,y,z)}{\partial y}dy+\frac{\partial f(x,y,z)}{\partial z}dz.$$

ПРИМЕР 5.8. Найти полное приращение и дифференциал функции $f(x, y) = x^2y + x$ в произвольной точке (x, y).

◀ Имеем

$$\Delta f(x, y) = f(x + \Delta x, y + \Delta y) - f(x, y) = (x + \Delta x)^2(y + \Delta y) + x + \Delta x - (x^2y + x) =$$
$$= (2xy + 1)\Delta x + x^2\Delta y + y\Delta x^2 + 2x\Delta x\Delta y + \Delta x^2\Delta y.$$

Выделяя в правой части слагаемые, линейные относительно Δx, Δy, заключаем, что

$$df(x, y) = (2xy + 1)\Delta x + x^2\Delta y. ▶$$

ПРИМЕР 5.9. Найти дифференциал функции $f(x,y)=\sqrt{x^2+y^3}$ в точке $M_0(3, 3)$.

◀ Вычислим частные производные:

$$f'_x = \frac{x}{\sqrt{x^2+y^3}},\ f'_y = \frac{3y^2}{2\sqrt{x^2+y^3}}.$$

Значения частных производных в точке $M_0(3, 3)$ равны $f'_x(M_0)=1/2, f'_y(M_0)=9/4$. Следовательно,

$$df(M_0) = \frac{1}{2}dx + \frac{9}{4}dy. ▶$$

5.53. Найти полное приращение и дифференциал функции $f(x, y) = x^2 - xy + y$ в точке $M_0(2, 1)$, если $\Delta x = 0{,}1$, $\Delta y = -0{,}2$.

5.54. Найти полное приращение и дифференциал функции $f(x, y) = x^2y$ в точке $M_0(1, 2)$, если $\Delta x = -0{,}1$, $\Delta y = 0{,}3$.

В задачах 5.55–5.58 найти дифференциалы функций.

5.55. $f(x,y)=\ln(y+\sqrt{x^2+y^2})$. **5.56.** $f(x,y)=\operatorname{tg}\dfrac{y^2}{x}$.

5.57. $f(x,y,z)=\dfrac{z}{\sqrt{x^2+y^2}}$. **5.58.** $f(x,y,z)=(xy)^z$.

Дифференциалом 2-го порядка (*или вторым дифференциалом*) d^2f функции $f(x, y)$ называется дифференциал от ее дифференциала 1-го порядка, рассматриваемого как функция переменных x, y при фиксированных значениях dx, dy:

$$d^2f = d(df).$$

Аналогично определяется дифференциал m-го порядка:

$$d^mu = d(d^{m-1}u).$$

Если функция $f(x, y)$, где x, y — независимые переменные, имеет непрерывные частные производные m-го порядка, то ее дифференциал m-го порядка выражается символической формулой

$$d^mf = \left(\frac{\partial}{\partial x}dx + \frac{\partial}{\partial y}dy\right)^m f, \tag{5.2}$$

в которой нужно формально раскрыть скобки, возведя двучлен в степень. В частности, для дифференциалов 2-го и 3-го порядков справедливы формулы

$$d^2f = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}dx^2 + 2\frac{\partial^2 f}{\partial x\,\partial y}dx\,dy + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}dy^2,$$
$$d^3f = \frac{\partial^3 f}{\partial x^3}dx^3 + 3\frac{\partial^3 f}{\partial x^2\partial y}dx^2dy + 3\frac{\partial^3 f}{\partial x\,\partial y^2}dx\,dy^2 + \frac{\partial^3 f}{\partial y^3}dy^3.$$

В случае функции трех переменных формула (5.2) принимает вид

$$d^m f = \left(\frac{\partial}{\partial x}dx + \frac{\partial}{\partial y}dy + \frac{\partial}{\partial z}dz\right)^m f,$$

из которой для вычисления дифференциала второго порядка получаем формулу

$$d^2 f = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}dx^2 + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}dy^2 + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}dz^2 + 2\frac{\partial^2 f}{\partial x\,\partial y}dx\,dy + 2\frac{\partial^2 f}{\partial x\,\partial z}dx\,dz + 2\frac{\partial^2 f}{\partial y\,\partial z}dy\,dz.$$

ПРИМЕР 5.10. Найти дифференциал 2-го порядка функции $f(x, y) = x^2y^3$.

◀ Вычисляем частные производные второго порядка:

$$f''_{xx} = 2y^3,\ f''_{yy} = 6x^2y,\ f''_{xy} = 6xy^2.$$

Следовательно,

$$d^2f = 2y^3dx^2 + 12xy^2dxdy + 6x^2ydy^2. ▶$$

В задачах 5.59–5.64 найти дифференциалы 1-го и 2-го порядков заданных функций.

5.59. $f(x, y) = x^3 + 3x^2y - y^3$. **5.60.** $f(x, y) = \frac{y}{x} - \frac{x}{y}$.

5.61. $f(x, y) = (x + y)e^{xy}$. **5.62.** $f(x, y) = x\ln\frac{y}{x}$.

5.63. $f(x, y, z) = xy + yz + zx$. **5.64.** $f(x, y, z) = e^{xyz}$.

3. Применение дифференциала к приближенным вычислениям

Если приращения аргументов малы, то величина $\rho = \sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2}$ также будет малой и для дифференцируемой функции $f(x, y)$ можно записать приближенное равенство

$$\Delta f \approx df,$$

откуда следует формула для приближенного вычисления значений функции

$$f(x, y) \approx f(x_0, y_0) + df(x_0, y_0) = f(x_0, y_0) + f'_x(x_0, y_0)(x - x_0) + f'_y(x_0, y_0)(y - y_0).$$

ПРИМЕР 5.11. Вычислить приближенно $\sqrt{4{,}05^2 + 3{,}07^2}$.

◀ Рассмотрим искомое число как значение функции $f(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2}$ при $x = x_0 + \Delta x$, $y = y_0 + \Delta y$, где $x_0 = 4$, $y_0 = 3$, $\Delta x = 0{,}05$, $\Delta y = 0{,}07$. Тогда

$$\sqrt{4{,}05^2 + 3{,}07^2} = f(4{,}05, 3{,}07) = f(4, 3) + \Delta f(4, 3) = 5 + \Delta f(4, 3).$$

Приращение функции приближенно равно ее дифференциалу:

$$\Delta f(x, y) \approx df(x, y) = \frac{xdx + ydy}{\sqrt{x^2 + y^2}}.$$

В нашем случае значение дифференциала в точке (4, 3) при приращениях аргументов $\Delta x = 0{,}05$, $\Delta y = 0{,}07$ равно

$$df(4, 3) = \frac{4 \cdot 0{,}05 + 3 \cdot 0{,}07}{5} = 0{,}082.$$

Следовательно,

$$\sqrt{4{,}05^2+3{,}07^2}\approx f(4,3)+df(4,3)=5{,}082. \blacktriangleright$$

В задачах 5.65–5.68 приближенно вычислить выражения.

5.65. $2{,}01^{3{,}03}$. **5.66.** $\sqrt{1{,}02^3+1{,}97^3}$.

5.67. $\dfrac{5{,}03}{2+\sqrt{9{,}06}}$. **5.68.** $\sqrt{3{,}95\cdot 25{,}03}$.

5.69. Цилиндрический бак имеет размеры: радиус основания R = 2 м, высоту H = 4 м. Найти приближенное изменение объема бака, если радиус основания увеличить на 10 см, а высоту уменьшить на 10 см.

5.70. Прямоугольный параллелепипед имеет измерения: a = 2 м, b = 3 м, c = 6 м. Найти приближенное изменение диагонали параллелепипеда, если a увеличить на 2 см, b — на 1 см, а c уменьшить на 3 см.

5.71. При измерении на местности прямоугольного участка были получены следующие данные: длина a = 40 м ± 20 см, ширина b = 20 м ± 10 см. С какой степенью точности будет вычислена площадь участка?

5.72. Показать, что относительная ошибка вычисления произведения чисел приближенно равна сумме относительных ошибок сомножителей.

4. Формула Тейлора

Если функция $f(x, y)$ дифференцируема $m + 1$ раз в окрестности точки M_0, то в этой окрестности справедлива *формула Тейлора*, записанная в дифференциальной форме:

$$\Delta f(M_0)=f(x_0+\Delta x,y_0+\Delta y)-f(x_0,y_0)=df(M_0)+\frac{d^2f(M_0)}{2!}+\ldots+\frac{d^mf(M_0)}{m!}+R_m. \quad (5.3)$$

При вычислении дифференциалов в (5.3) полагают $dx = \Delta x$, $dy = \Delta y$. Остаточный член R_m может быть записан в форме Лагранжа: $R_m=\dfrac{d^{m+1}f(M_\gamma)}{(m+1)!}$, $M_\gamma = (x_0 + \gamma\Delta x,\ y_0 + \gamma\Delta y)$, $0 < \gamma < 1$, или в форме Пеано: $R_m = o(\rho^m)$, где $\rho=\sqrt{\Delta x^2+\Delta y^2}$, $\rho\to 0$.

В дифференциальной форме формула (5.3) верна и для функций большего числа переменных.

При развернутой записи дифференциалов через частные производные формула Тейлора становится громоздкой, особенно с увеличением числа переменных. Например, для функции f двух переменных x и y формула Тейлора второго порядка записывается следующим образом:

$$f(x+\Delta x,y+\Delta y)-f(x_0,y_0)=$$
$$=f'_x(x_0,y_0)\Delta x+f'_y(x_0,y_0)\Delta y+\frac{1}{2!}(f''_{xx}(x_0,y_0)\Delta x^2+2f''_{xy}\Delta x\Delta y+f''_{yy}(x_0,y_0)\Delta y^2)+R_2.$$

В частном случае при $x_0 = y_0 = 0$ формулу (5.3) называют *формулой Маклорена*.

ПРИМЕР 5.12. Функцию $f(x,y)=e^{\frac{x}{y}}$ разложить по формуле Тейлора в окрестности точки $M_0(0, 1)$ до членов второго порядка включительно.

◄ Найдем частные производные до второго порядка:

$$\frac{\partial f}{\partial x}=e^{\frac{x}{y}}\cdot\frac{1}{y},\ \frac{\partial f}{\partial y}=e^{\frac{x}{y}}\cdot\left(-\frac{x}{y^2}\right),$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}=e^{\frac{x}{y}}\cdot\frac{1}{y^2},\ \frac{\partial^2 f}{\partial y\,\partial x}=e^{\frac{x}{y}}\cdot\left(-\frac{x}{y^3}\right)+e^{\frac{x}{y}}\cdot\left(-\frac{1}{y^2}\right),\ \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}=e^{\frac{x}{y}}\cdot\frac{x^2}{y^4}+e^{\frac{x}{y}}\cdot\frac{2x}{y^3}.$$

В точке $M_0(0, 1)$ имеем

$$f(M_0)=1,\ \frac{\partial f}{\partial x}(M_0)=1,\ \frac{\partial f}{\partial y}(M_0)=0,\ \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(M_0)=1,\ \frac{\partial^2 f}{\partial y\,\partial x}(M_0)=-1,\ \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(M_0)=0.$$

Разложение функции в окрестности точки $M_0(0, 1)$, следовательно, имеет вид

$$e^{\frac{x}{y}}=1+x+\frac{1}{2}x^2-x(y-1)+o(x^2+(y-1)^2).\ ►$$

5.73. Функцию $f(x, y) = x^3 - 2y^3 + 3xy$ разложить по формуле Тейлора в окрестности точки $M_0(2, 1)$.

5.74. Разложить по формуле Маклорена до членов 3-го порядка включительно функцию $f(x, y) = e^y \cos x$.

5.75. Разложить по формуле Тейлора в окрестности точки $M_0(1, 1, 0)$ до членов 2-го порядка включительно функцию $f(x, y, z) = \ln(xy + z^2)$.

5.76. Функцию $f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 - 2(xy + xz + yz)$ разложить по формуле Тейлора в окрестности точки $M_0(1, -1, 2)$.

§ 5.3. ДИФФЕРЕНЦИРОВАНИЕ СЛОЖНЫХ ФУНКЦИЙ

Пусть $f(x, y)$ — дифференцируемая функция двух переменных x и y, которые сами являются дифференцируемыми функциями одной независимой переменной t: $x = u(t)$, $y = v(t)$. Тогда производная сложной функции $F(t) = f(u(t), v(t))$ вычисляется по формуле

$$F'(t)=\frac{df}{dt}=\frac{\partial f}{\partial x}\frac{dx}{dt}+\frac{\partial f}{\partial y}\frac{dy}{dt}.$$

Аналогичная формула верна, если функция f зависит от трех или большего числа переменных.

ПРИМЕР 5.13. Найти $\frac{du}{dt}$, если $u = xyz$, где $x = t^2 + 1$, $y = \ln t$, $z = \operatorname{tg} t$.

◄ В случае трех переменных производная сложной функции равна

$$\frac{du}{dt}=\frac{\partial u}{\partial x}\frac{dx}{dt}+\frac{\partial u}{\partial y}\frac{dy}{dt}+\frac{\partial u}{\partial z}\frac{dz}{dt}.$$

Так как

$$\frac{\partial u}{\partial x}=yz,\ \frac{dx}{dt}=2t,$$

$$\frac{\partial u}{\partial y}=xz,\ \frac{dy}{dt}=\frac{1}{t},$$

$$\frac{\partial u}{\partial z}=xy,\ \frac{dz}{dt}=\frac{1}{\cos^2 t},$$

то получаем

$$\frac{du}{dt}=yz\cdot 2t+xz\frac{1}{t}+xy\frac{1}{\cos^2 t}=2t\ln t\,\mathrm{tg}\,t+\frac{(t^2+1)\mathrm{tg}\,t}{t}+\frac{(t^2+1)\ln t}{\cos^2 t}. \blacktriangleright$$

5.77. Найти $\frac{dz}{dt}$, если $z = e^{2x-3y}$, где $x = \mathrm{tg}\, t$, $y = t^2 - t$.

5.78. Найти $\frac{dz}{dt}$, если $z = x^y$, где $x = \ln t$, $y = \sin t$.

5.79. Найти $\frac{dz}{dt}$, если $z=\mathrm{arctg}\frac{y}{x}$, где $x = e^{2t} + 1$, $y = e^{2t} - 1$.

5.80. Найти $\frac{du}{dt}$, если $u=\frac{yz}{x}$, где $x = e^t$, $y = \ln t$, $z = t^2 - 1$.

5.81. Найти $\frac{\partial z}{\partial x}$ и $\frac{dz}{dx}$, если $z = \ln(e^x + e^y)$, где $y=\frac{x^3}{3}+x$.

5.82. Найти $\frac{\partial z}{\partial x}$ и $\frac{dz}{dx}$, если $z=\mathrm{arctg}\frac{x+1}{y}$, где $y=e^{(x+1)^2}$.

Пусть $f(x, y)$ — дифференцируемая функция двух переменных x и y, которые сами являются дифференцируемыми функциями, например, также двух независимых переменных u, v: $x = \varphi(u, v)$, $y = \psi(u, v)$. Тогда частные производные сложной функции

$$F(u, v) = f(\varphi(u, v), \psi(u, v))$$

вычисляются по формуле

$$\frac{\partial F}{\partial u}=\frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial u}+\frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial u},\quad \frac{\partial F}{\partial v}=\frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial v}+\frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial v}.$$

ПРИМЕР 5.14. Найти dz, если $z = u^2v$, $u=\frac{x^2-y^2}{2}$, $v = xy$.

◀ Имеем $dz=z'_u du+z'_v dv=2uvdu+u^2dv$, где $du = xdx - ydy$, $dv = ydx + xdy$. Следовательно,

$$dz = 2uv(xdx - ydy) + u^2(ydx + xdy) = (2uvx + u^2y)dx + (u^2x - 2uvy)dy. \blacktriangleright$$

5.83. Найти $\frac{\partial z}{\partial x}$ и $\frac{\partial z}{\partial y}$, если $z = u^2\ln v$, где $u=\frac{y}{x}$, $v = x^2 + y^2$.

5.84. Найти dz, если $z = u^2v - v^2u$, где $u = x\sin y$, $v = y\cos x$.

5.85. Найти $\frac{\partial z}{\partial x}$ и $\frac{\partial z}{\partial y}$, если $z = f(u, v)$, где $u=\frac{2y}{x+y}$, $v = x^2 - 3y$ и $f(u, v)$ — дифференцируемая функция.

5.86. Найти $\frac{\partial z}{\partial x}$ и $\frac{\partial z}{\partial y}$, если $z = f(u, v)$, где $u = \ln(x^2 - y^2)$, $v = xy^2$ и $f(u, v)$ — дифференцируемая функция.

5.87. Найти d^2u, если $u = f(t)$, где $t = x^2 + y^2 + z^2$ и $f(t)$ — дважды дифференцируемая функция.

5.88. Найти d^2z, если $z = f(u, v)$, где $u = ax$, $v = by$ и $f(u, v)$ — дважды дифференцируемая функция.

§ 5.4. ПРИЛОЖЕНИЯ ЧАСТНЫХ ПРОИЗВОДНЫХ

1. Касательная плоскость и нормаль к поверхности

Касательной плоскостью к поверхности в ее точке $P_0(x_0, y_0, z_0)$ (*точка касания*) называется плоскость, содержащая в себе все касательные к кривым, проведенным на поверхности через эту точку. *Нормалью* к поверхности называется прямая, перпендикулярная касательной плоскости и проходящая через точку касания.

Пусть поверхность задана в явной форме: $z = f(x, y)$. Если функция $f(x, y)$ дифференцируема в точке $M_0(x_0, y_0)$, то в точке $P_0(x_0, y_0, z_0)$, где $z_0 = f(x_0, y_0)$, уравнение касательной имеет вид

$$z - z_0 = f'_x(x_0, y_0)(x - x_0) + f'_y(x_0, y_0)(y - y_0),$$

а уравнения нормали —

$$\frac{x - x_0}{f'_x(x_0, y_0)} = \frac{y - y_0}{f'_x(x_0, y_0)} = \frac{z - z_0}{-1}.$$

ПРИМЕР 5.15. Найти уравнение касательной плоскости и нормали к поверхности $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ в точке $P_0(3, 4, 5)$.

◄ Вычислим частные производные функции $f(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2}$ в точке $M_0(3, 4)$:

$$f'_x(M_0) = \left.\frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}\right|_{M_0} = \frac{3}{5}, \quad f'_y(M_0) = \left.\frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}}\right|_{M_0} = \frac{4}{5}.$$

Следовательно, уравнение касательной плоскости имеет вид

$$z - 5 = \frac{3}{5}(x - 3) + \frac{4}{5}(y - 4), \text{ или } 3x + 4y - 5z = 0,$$

и уравнения нормали —

$$\frac{x - 3}{3} = \frac{y - 4}{4} = \frac{z - 5}{-5}. \blacktriangleright$$

В задачах 5.89–5.92 найти уравнение касательной плоскости и нормали к поверхностям в указанных точках.

5.89. $z = x^2 + y^2$ в точке $P_0(2, 1, 5)$.

5.90. $z = \sqrt{14 - x^2 - y^2}$ в точке $P_0(1, 2, 3)$.

5.91. $z = \sin x \cos y$ в точке $\left(\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}, \frac{1}{2}\right)$.

5.92. $z = e^{x\cos y}$ в точке $\left(1, \pi, \frac{1}{e}\right)$.

2. Экстремумы

Точка M_0 называется *точкой максимума* (*минимума*) функции $f(M)$, если существует окрестность точки M_0 такая, что для всех точек M из этой окрестности выполняется неравенство $f(M_0) \geq f(M)$ $(f(M_0) \leq f(M))$. Точки максимума и минимума функции называются ее *точками экстремума*. Значения функции в точках экстремума называют *экстремумами* функции.

Пусть функция $f(M)$ является дифференцируемой на области определения. Если она имеет экстремум в точке M_0, то в этой точке все частные производные равны 0 (*необходимое условие экстремума*) или $df(M_0) \equiv 0$. Точки, в которых частные производные функции одновременно обращаются в нуль, называют *стационарными* точками функции.

Таким образом, если M_0 — точка экстремума дифференцируемой функции $f(M)$, то она является стационарной. Однако не всякая стационарная точка является точкой экстремума.

Сформулируем *достаточное условие* экстремума в случае функции двух переменных. Пусть $M_0(x_0, y_0)$ — стационарная точка функции $f(x, y)$ и все ее вторые частные производные непрерывны в некоторой окрестности точки M_0. Составим матрицу из вторых частных производных, вычисленных в точке M_0:

$$I = \begin{pmatrix} f''_{xx}(M_0) & f''_{xy}(M_0) \\ f''_{yx}(M_0) & f''_{yy}(M_0) \end{pmatrix}. \qquad (5.4)$$

Отметим, что матрица I симметрическая, так как в силу свойств непрерывных смешанных производных $f''_{xy}(M_0) = f''_{yx}(M_0)$. Пусть

$$\Delta_1 = f''_{xx}(M_0), \ \Delta_2 = \begin{vmatrix} f''_{xx}(M_0) & f''_{xy}(M_0) \\ f''_{yx}(M_0) & f''_{yy}(M_0) \end{vmatrix} \qquad (5.5)$$

— угловые миноры матрицы I. Тогда:

1) если $\Delta_2 > 0$, то функция $f(M)$ имеет в точке $M_0(x_0, y_0)$ экстремум, а именно — максимум при $\Delta_1 < 0$ и минимум при $\Delta_1 > 0$;

2) если $\Delta_2 < 0$, то точка $M_0(x_0, y_0)$ не является точкой экстремума;

3) если $\Delta_2 = 0$, то требуется дополнительное исследование.

ПРИМЕР 5.16. Исследовать на экстремум функцию $f(x, y) = 3x^2y - x^3 - y^4$.

◀ Функция является дифференцируемой на всей плоскости. Вычислим частные производные первого порядка:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 6xy - 3x^2, \ \frac{\partial f}{\partial y} = 3x^2 - 4y^3,$$

и найдем стационарные точки, приравнивая частные производные к нулю:

$$\begin{cases} 6xy - 3x^2 = 0, \\ 3x^2 - 4y^3 = 0. \end{cases}$$

Решая эту систему, находим две стационарные точки: $M_1(0, 0)$ и $M_2(6, 3)$.

Проверим выполнение достаточного условия. Для этого вычислим частные производные второго порядка:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 6y - 6x, \ \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = 6x, \ \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = -12y^2.$$

В точке $M_1(0, 0)$ матрица I (см. (5.4)) имеет вид

$$I = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

и все ее угловые миноры равны нулю. Значит, для точки M_1 необходимо провести дополнительное исследование. Значение функции в этой точке равно нулю: $f(0, 0) = 0$. Теперь заметим, что при $x < 0$, $y = 0$ значения функции $f(x, y) = -x^3 > 0$, а при $x = 0$, $y \neq 0$ имеем $f(x, y) = -y^4 < 0$. Следовательно, в любой окрестности точки $M_1(0, 0)$ функция принимает значения как большие, так и меньшие $f(0, 0)$. Значит, в точке M_1 функция не имеет локального экстремума.

В точке $M_2(6, 3)$ матрица I имеет вид

$$I = \begin{pmatrix} -18 & 36 \\ 36 & -108 \end{pmatrix}.$$

Отсюда (см. (5.5)) $\Delta_2 = 18 \cdot 108 - 36^2 = 648 > 0$ и, следовательно, функция имеет экстремум в точке M_2. Так как $\Delta_1 = -18 < 0$, то точка M_2 является точкой максимума функции. ►

В задачах 5.93–5.100 найти экстремумы функций двух переменных.

5.93. $f(x, y) = x^2 + xy + y^2 - 3x - 6y$.

5.94. $f(x, y) = x^2 + 8xy + y^2 - 4x - 2y$.

5.95. $f(x, y) = 14x - 2x^2 - 2xy - 4y^2$.

5.96. $f(x, y) = 8x^2 + 4xy + y^2 - 4y$.

5.97. $f(x, y) = xy^2(1 - x - y)\,(x > 0, y > 0)$.

5.98. $f(x, y) = 3x^2 - x^3 + 3y^2 + 4y$.

5.99. $f(x, y) = xy + \dfrac{50}{x} + \dfrac{20}{y}$ $(x > 0, y > 0)$.

5.100. $f(x, y) = x^2 + y^2 - 2\ln x - 18\ln y$.

Пусть $f(x, y, z)$ — функция трех переменных и $M_0(x_0, y_0, z_0)$ — ее стационарная точка. Предположим, что все вторые частные производные функции f непрерывны в некоторой окрестности точки M_0. Как и в случае двух переменных, составляем матрицу из вторых частных производных, вычисленных в точке M_0:

$$I = \begin{pmatrix} f''_{xx}(M_0) & f''_{xy}(M_0) & f''_{xz}(M_0) \\ f''_{yx}(M_0) & f''_{yy}(M_0) & f''_{yz}(M_0) \\ f''_{zx}(M_0) & f''_{zy}(M_0) & f''_{zz}(M_0) \end{pmatrix}.$$

Вычисляем значения угловых миноров матрицы:

$$\Delta_1 = f''_{xx}(M_0),\ \ \Delta_2 = \begin{vmatrix} f''_{xx}(M_0) & f''_{xy}(M_0) \\ f''_{yx}(M_0) & f''_{yy}(M_0) \end{vmatrix},\ \ \Delta_3 = \begin{vmatrix} f''_{xx}(M_0) & f''_{xy}(M_0) & f''_{xz}(M_0) \\ f''_{yx}(M_0) & f''_{yy}(M_0) & f''_{yz}(M_0) \\ f''_{zx}(M_0) & f''_{zy}(M_0) & f''_{zz}(M_0) \end{vmatrix}.$$

Тогда (*достаточное условие экстремума*):

1) если $\Delta_1 > 0$, $\Delta_2 > 0$, $\Delta_3 > 0$ (то есть все угловые миноры положительные), то функция $f(x, y, z)$ имеет в точке $M_0(x_0, y_0, z_0)$ минимум;

2) если $\Delta_1 < 0$, $\Delta_2 > 0$, $\Delta_3 < 0$ (то есть угловые миноры последовательно меняют знак, начиная со знака минус), то функция $f(x, y, z)$ имеет в точке $M_0(x_0, y_0, z_0)$ максимум;

3) при любом другом расположении знаков миноров экстремума в точке $M_0(x_0, y_0, z_0)$ нет;

4) если $\Delta_1 \geq 0$, $\Delta_2 \geq 0$, $\Delta_3 \geq 0$ или $\Delta_1 \leq 0$, $\Delta_2 \geq 0$, $\Delta_3 \leq 0$ и хотя бы один из миноров обращается в нуль, то требуется дополнительное исследование.

ПРИМЕР 5.17. Исследовать на экстремум функцию $f(x, y, z) = 4x^2 + y^2 + 2z^2 + 2xy - yz$.

◀ Вычислим частные производные первого порядка:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 8x + 2y,\ \frac{\partial f}{\partial y} = 2y + 2x - z,\ \frac{\partial f}{\partial z} = 4z - y,$$

и найдем стационарные точки, приравняв частные производные к нулю:

$$\begin{cases} 8x + 2y = 0, \\ 2x + 2y - z = 0, \\ -y + 4z = 0. \end{cases}$$

Решая эту систему, находим стационарную точку: $M_0(0, 0, 0)$. Проверим выполнение достаточного условия. Для этого вычислим частные производные второго порядка:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 8,\ \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 2,\ \frac{\partial^2 f}{\partial z^2} = 4,\ \frac{\partial^2 f}{\partial x\,\partial y} = 2,\ \frac{\partial^2 f}{\partial x\,\partial z} = 0,\ \frac{\partial^2 f}{\partial y\,\partial z} = -1.$$

Матрица I в стационарной точке имеет вид

$$I = \begin{pmatrix} 8 & 2 & 0 \\ 2 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 4 \end{pmatrix}.$$

Значения угловых миноров матрицы равны

$$\Delta_1 = 8 > 0,\ \Delta_2 = \begin{vmatrix} 8 & 2 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} = 12 > 0,\ \Delta_3 = \begin{vmatrix} 8 & 2 & 0 \\ 2 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 4 \end{vmatrix} = 40 > 0.$$

Следовательно, функция имеет в точке M_0 минимум. ▶

В задачах 5.101–5.104 найти экстремумы функций трех переменных.

5.101. $f(x, y, z) = x^2 - y^2 + 4z^2 - 4xy$.

5.102. $f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 - 4x + 6y - 2z$.

5.103. $f(x, y, z) = -2x^2 - 3y^2 - z^2 + 4x$.

5.104. $f(x, y, z) = x^2 + 6y^2 + z^2 - 2xz + 2yz$.

3. Наибольшее и наименьшее значения функции

Пусть функция нескольких переменных $f(M)$ дифференцируема в замкнутой ограниченной области. Тогда она достигает своего наибольшего (наименьшего) значения или в стационарной точке, принадлежащей области, или в граничной точке области. Таким образом, чтобы найти наибольшее (наименьшее) значение функции в замкнутой ограниченной области, необходимо сравнить ее значения в стационарных точках со значениями на границе. Для исследования функции $f(M)$ на границе области задания заменяют ее функцией меньшего числа переменных, используя уравнения, задающие границу (всю или отдельные части). Поясним сказанное на примерах функций двух переменных.

ПРИМЕР 5.18. Найти наибольшее и наименьшее значения функции $f(x, y) = x^2 - x + 2y^2 - y$ в замкнутой области G, ограниченной прямыми $x = 0$, $y = 0$, $x + y = 1$.

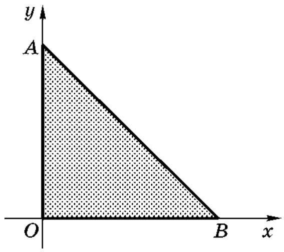


Рис. 5.4

◄ Область G есть треугольник (рис. 5.4). Найдем сначала стационарные точки функции, приравняв к нулю ее частные производные:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial f}{\partial x} = 2x - 1 = 0, \\ \dfrac{\partial f}{\partial y} = 4y - 1 = 0. \end{cases}$$

Точка $M_0\left(\dfrac{1}{2}, \dfrac{1}{4}\right)$ является стационарной и находится внутри области G. Значение функции в этой точке $f(M_0) = -\dfrac{3}{8}$.

Теперь исследуем функцию на границе области G, состоящей из трех отрезков: OA, OB, AB.

а) Отрезок OA задается условиями: $x = 0$, $0 \le y \le 1$. Таким образом, на отрезке OA функция $f(x, y)$ становится функцией одной переменной: $g(y) = f(0, y) = 2y^2 - y$, $0 \le y \le 1$. Найдем значения функции $g(y)$ в стационарных точках и на концах отрезка. Имеем $g'(y) = 4y - 1 = 0$, если $y = \dfrac{1}{4}$. Вычисляем $g\left(\dfrac{1}{4}\right) = f\left(0, \dfrac{1}{4}\right) = -\dfrac{1}{8}$, $g(0) = f(0, 0) = 0$, $g(1) = f(0, 1) = 1$.

б) Отрезок OB задается условиями: $y = 0$, $0 \le x \le 1$, и, значит, на отрезке OB получаем функцию $h(x) = f(x, 0) = x^2 - x$, $0 \le x \le 1$. Производная $h'(x) = 2x - 1 = 0$ при $x = \dfrac{1}{2}$, $h\left(\dfrac{1}{2}\right) = f\left(\dfrac{1}{2}, 0\right) = -\dfrac{1}{4}$, $h(1) = f(1, 0) = 0$. Значение $h(0) = g(0) = f(0, 0) = 0$.

в) Из уравнения $x + y = 1$ следует, что отрезок AB задается условиями: $y = 1 - x$, $0 \le x \le 1$. Следовательно, на этом отрезке получаем функцию $t(x) = f(x, 1 - x) = 3x^2 - 4x + 1$, $0 \le x \le 1$. Ее стационарная точка $x = \dfrac{2}{3}$, значение $t\left(\dfrac{2}{3}\right) = f\left(\dfrac{2}{3}, \dfrac{1}{3}\right) = -\dfrac{1}{3}$. Значения функции $t(x)$ на концах отрезка $[0, 1]$ равны $g(1)$ и $h(1)$ соответственно.

Из всех найденных значений выберем наибольшее и наименьшее. Получаем

$$\max_G f(x, y) = f(0, 1) = 1, \ \min_G f(x, y) = f\left(\frac{2}{3}, \frac{1}{3}\right) = -\frac{1}{3}. ►$$

ПРИМЕР 5.19. Найти наибольшее и наименьшее значения функции $f(x, y) = y + x^2$ в замкнутом круге G: $x^2 + y^2 \le 1$.

◄ Так как $f'_y = 1 \ne 0$, то функция $f(x, y)$ не имеет стационарных точек. Исследуем ее на границе круга: $x^2 + y^2 = 1$. Запишем уравнение окружности в виде: $x = \cos t$, $y = \sin t$, $0 \le t \le 2\pi$. Таким образом, на границе круга получаем функцию одной переменной $g(t) = \sin t + \cos^2 t$, $0 \le t \le 2\pi$. Найдем значения функции $g(t)$ в стационарных точках и на концах отрезка. Имеем $g'(t) = \cos t - 2\sin t \cos t = \cos t\,(1 - 2\sin t) = 0$ при

$$t = \frac{\pi}{6}, \ t = \frac{\pi}{2}, \ t = \frac{5\pi}{6}, \ t = \frac{3\pi}{2}.$$

Соответствующие значения функции g равны

$$g\left(\frac{\pi}{6}\right) = g\left(\frac{5\pi}{6}\right) = \frac{5}{4}, \ g\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1, \ g\left(\frac{3\pi}{2}\right) = -1.$$

На концах отрезка $[0, 2\pi]$: $g(0) = 1$, $g(2\pi) = 1$.

Из найденных значений выберем наибольшее и наименьшее. Получаем

$$\max_G f(x,y) = g\left(\frac{\pi}{6}\right) = g\left(\frac{5\pi}{6}\right) = f\left(\pm\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2}\right) = \frac{5}{4}, \ \min_G f(x,y) = g\left(\frac{3\pi}{2}\right) = f(0,-1) = -1. \blacktriangleright$$

5.105. Найти наибольшее и наименьшее значение функции $f(x, y) = x - 2y + 5$ в области $x \geq 0$, $y \geq 0$, $x + y \leq 1$.

5.106. Найти наибольшее и наименьшее значение функции $f(x, y) = x^2 + y^2 - xy - x - y$ в области $x \geq 0$, $y \geq 0$, $x + y \leq 3$.

5.107. Найти наибольшее и наименьшее значение функции $f(x, y) = xy$ в области $x^2 + y^2 \leq 1$.

5.108. Найти наибольшее и наименьшее значение функции $f(x, y) = xy^2$ в области $x^2 + y^2 \leq 1$.

4. Условный экстремум

Пусть задана функция $f(P) = f(x, y)$ и одно условие (называемое *уравнением связи*)

$$\varphi(P) = \varphi(x, y) = 0$$

на переменные x, y. Точка $P_0(x_0, y_0)$ называется *точкой условного максимума* (*минимума*), если для всех точек $P(x, y)$ из некоторой окрестности точки P_0, удовлетворяющих уравнению связи, выполняется неравенство $f(P_0) \geq f(P)$ ($f(P_0) \leq f(P)$). Значение функции в точке условного максимума (минимума) называют *условным максимумом* (*минимумом*).

Задача нахождения условного экстремума для дифференцируемых функций f и φ сводится к исследованию на обычный экстремум *функции Лагранжа*, которая в случае функции двух переменных и одного уравнения связи имеет вид

$$L(x, y; \lambda) = f(x, y) + \lambda\varphi(x, y),$$

где число λ называется *множителем Лагранжа*.

Если точка (x_0, y_0) является точкой условного экстремума, то существует число λ_0 такое, что тройка (x_0, y_0, λ_0) является решением системы

$$\begin{cases} \dfrac{\partial L(x,y;\lambda)}{\partial x} = 0, \\ \dfrac{\partial L(x,y;\lambda)}{\partial y} = 0, \\ \varphi(x,y) = 0 \end{cases} \tag{5.6}$$

(*необходимые условия* условного экстремума). *Достаточные условия* условного экстремума связаны с изучением знака 2-го дифференциала функции Лагранжа

$$d^2L(x_0, y_0; \lambda_0)$$

для каждого решения системы (5.6) при условии, что дифференциалы dx, dy, не равные нулю одновременно, удовлетворяют уравнению

$$\frac{\partial\varphi(x_0,y_0)}{\partial x}dx + \frac{\partial\varphi(x_0,y_0)}{\partial y}dy = 0. \tag{5.7}$$

А именно, функция $f(P)$ имеет условный максимум в точке $P_0(x_0, y_0)$, если для всевозможных значений dx, dy, удовлетворяющих условиям (5.7) и не равных нулю одновременно, выполняется неравенство

$$d^2L(x_0, y_0; \lambda_0) < 0,$$

и условный минимум, если при этих условиях

$$d^2L(x_0, y_0; \lambda_0) > 0.$$

Аналогично определяется и находится условный экстремум в случае функции трех и большего числа переменных при наличии одного или нескольких уравнений связи (число уравнений связи должно быть меньше числа переменных).

ПРИМЕР 5.20. Найти условный экстремум функции $f(x, y) = x + 2y$ при $x^2 + y^2 = 5$.

◄ Составим функцию Лагранжа:

$$L(x, y; \lambda) = x + 2y + \lambda(x^2 + y^2 - 5),$$

и найдем ее частные производные по x и y:

$$\frac{\partial L}{\partial x} = 1 + 2\lambda x,\ \frac{\partial L}{\partial y} = 2 + 2\lambda y.$$

Система уравнений (5.6) примет вид

$$\begin{cases} 1 + 2\lambda x = 0, \\ 2 + 2\lambda y = 0, \\ x^2 + y^2 = 5. \end{cases}$$

Система имеет два решения: $x_1 = -1$, $y_1 = -2$, $\lambda_1 = \frac{1}{2}$ и $x_2 = 1$, $y_2 = 2$, $\lambda_2 = -\frac{1}{2}$.

Проверим выполнение достаточного условия в точках $P_1(-1, -2)$ и $P_2(1, 2)$. Так как $\frac{\partial^2 L}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 L}{\partial y^2} = 2\lambda$, $\frac{\partial^2 L}{\partial x \partial y} = 0$, то $d^2L = 2\lambda(dx^2 + dy^2)$.

В точке $P_1(-1, -2)$ имеем $\lambda_1 = \frac{1}{2}$ и $d^2L > 0$, если dx и dy не равны нулю одновременно. Поэтому в ней функция имеет условный минимум, равный -5. В точке $P_2(1, 2)$ имеем $\lambda_1 = -\frac{1}{2}$ и $d^2L < 0$, поэтому в ней функция имеет условный максимум, равный 5. ►

ПРИМЕР 5.21. Найти точки условного экстремума функции $f(x, y, z) = x + y + z$ при $x^2 + y^2 + z^2 = 12$.

◄ Функция Лагранжа в случае функции трех переменных и одного уравнения связи имеет вид

$$L(x, y, z; \lambda) = f(x, y, z) + \lambda\varphi(x, y, z) =$$
$$= x + y + z + \lambda(x^2 + y^2 + z^2 - 12).$$

Система уравнений, аналогичная (5.6), примет вид

$$\begin{cases} \frac{\partial L}{\partial x} = 1 + 2\lambda x = 0, \\ \frac{\partial L}{\partial y} = 1 + 2\lambda y = 0, \\ \frac{\partial L}{\partial y} = 1 + 2\lambda z = 0, \\ x^2 + y^2 + z^2 - 12 = 0. \end{cases}$$

Система имеет два решения: $x = y = z = -2$, $\lambda = 1/4$ и $x = y = z = 2$, $\lambda = -1/4$.

Проверим выполнение достаточного условия. Имеем $\frac{\partial^2 L}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 L}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 L}{\partial z^2} = 2\lambda$, и все смешанные производные функции Лагранжа равны нулю. Поэтому

$$d^2L = 2\lambda(dx^2 + dy^2 + dz^2) \neq 0,$$

если dx, dy, dz не равны нулю одновременно и $\lambda \neq 0$. При этом $d^2L > 0$, $\lambda > 0$. Следовательно, в точке $P_1(-2, -2, -2)$ функция имеет условный минимум. Если $\lambda = -1/4$, то $d^2L < 0$ и в точке $P_1(2, 2, 2)$ функция имеет условный максимум. ►

В задачах 5.109–5.114 найти условные экстремумы функций.

5.109. $f(x, y) = x^2 + y^2 - xy + x + y - 4$ при $x + y + 3 = 0$.

5.110. $f(x,y) = \frac{1}{x} + \frac{1}{y}$ при $x + y = 2$.

5.111. $f(x,y) = \frac{x - y - 4}{\sqrt{2}}$ при $x^2 + y^2 = 1$.

5.112. $f(x, y) = 2x + y$ при $x^2 + y^2 = 1$.

5.113. $f(x, y, z) = 2x + y - 2z$ при $x^2 + y^2 + z^2 = 36$.

5.114. $f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$ при $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{9} + \frac{z^2}{4} = 1$.

5.115. Из всех прямоугольных параллелепипедов, сумма ребер которых равна $12a$, найти параллелепипед с наибольшим объемом.

5.116. Найти прямоугольный параллелепипед с длиной диагонали d, имеющий наибольший объем.

5.117. Положительное число a требуется разбить на три положительных слагаемых так, чтобы их произведение было наибольшим.

5.118. Положительное число a представить в виде произведения четырех положительных сомножителей так, чтобы сумма их обратных величин была наименьшей.

§ 5.5. ДИФФЕРЕНЦИРОВАНИЕ НЕЯВНЫХ ФУНКЦИЙ

1. Неявные функции одной и двух независимых переменных

Если уравнение

$$F(x, y) = 0$$

определяет переменную y как *неявную* дифференцируемую функцию независимой переменной x, то производная переменной y как функции переменной x вычисляется по формуле

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{F'_x(x,y)}{F'_y(x,y)}. \tag{5.8}$$

Производные высших порядков вычисляются последовательным дифференцированием формулы (5.8).

ПРИМЕР 5.22. Найти $\frac{dy}{dx}$ и $\frac{d^2y}{dx^2}$, если $x + y - e^{x-y} = 0$.

◀ Имеем $F(x, y) = x + y - e^{x-y}$. По формуле (5.8) находим $\dfrac{dy}{dx} = -\dfrac{1-e^{x-y}}{1+e^{x-y}}$. Так как $e^{x-y} = x + y$, то данное равенство можно записать в виде

$$\frac{dy}{dx} = \frac{x+y-1}{1+x+y}. \tag{5.9}$$

Продифференцируем это равенство по переменной x, учитывая, что переменная y зависит от x:

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{(1+y'_x)(1+x+y)-(x+y-1)(1+y'_x)}{(1+x+y)^2} = (1+y'_x)\cdot\frac{2}{(1+x+y)^2}.$$

Подставляя вместо y'_x правую часть равенства (5.9), получаем

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \left(1+\frac{x+y-1}{1+x+y}\right)\cdot\frac{2}{(1+x+y)^2} = \frac{4(x+y)}{(1+x+y)^3}. ▶$$

5.119. Найти $\dfrac{dy}{dx}$ и $\dfrac{d^2y}{dx^2}$, если $x - y + \operatorname{arctg} y = 0$.

5.120. Найти $\dfrac{dy}{dx}$ и $\dfrac{d^2y}{dx^2}$, если $1 + xy - \ln(e^{xy} + e^{-xy}) = 0$.

Аналогично, если уравнение $F(x, y, z) = 0$, где функция F имеет непрерывные частные производные, определяет переменную z как неявную функцию независимых переменных x и y, то частные производные этой неявной функции могут быть найдены по формулам

$$\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{F'_x(x,y,z)}{F'_z(x,y,z)},\quad \frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{F'_y(x,y,z)}{F'_z(x,y,z)}.$$

ПРИМЕР 5.23. Найти $\dfrac{\partial z}{\partial x}$ и $\dfrac{\partial z}{\partial y}$, если $x^3 + 2y^3 + z^3 - 3xyz - 2y + 3 = 0$.

◀ Обозначим левую часть данного уравнения через $F(x, y, z)$ и найдем частные производные этой функции:

$$F'_x(x,y,z) = 3x^2 - 3yz,$$
$$F'_y(x,y,z) = 6x^2 - 3xz - 2,$$
$$F'_z(x,y,z) = 3z^2 - 3yx.$$

Тогда частные производные $\dfrac{\partial z}{\partial x}$ и $\dfrac{\partial z}{\partial y}$ равны

$$\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{F'_x(x,y,z)}{F'_z(x,y,z)} = -\frac{3x^2-3yz}{3z^2-3yx} = \frac{x^2-yz}{yx-z^2},$$
$$\frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{F'_y(x,y,z)}{F'_z(x,y,z)} = -\frac{6y^2-3xz-2}{3z^2-3yx} = \frac{6y^2-3xz-2}{3(yx-z^2)}. ▶$$

5.121. Найти $\dfrac{\partial z}{\partial x}$ и $\dfrac{\partial z}{\partial y}$ в точке $M_0(1, -2, 2)$, если $z^3 - 4xz + y^2 - 4 = 0$.

5.122. Найти $\dfrac{\partial z}{\partial x}$ и $\dfrac{\partial z}{\partial y}$, если $z\ln(x+z) - \dfrac{xy}{z} = 0$.

5.123. Найти dz, если $yz = \operatorname{arctg}(xz)$.

5.124. Найти dz, если $xz - e^{z/y} + x^3 + y^3 = 0$.

2. Системы неявных функций

Ограничимся рассмотрением функций двух независимых переменных. Пусть переменные u и v заданы неявно как функции независимых переменных x и y системой уравнений

$$\begin{cases} F(x,y,u,v)=0, \\ G(x,y,u,v)=0. \end{cases}$$

Если якобиан

$$\frac{D(F,G)}{D(u,v)}=\begin{vmatrix} \frac{\partial F}{\partial u} & \frac{\partial F}{\partial v} \\ \frac{\partial G}{\partial u} & \frac{\partial G}{\partial v} \end{vmatrix}\neq 0,$$

то дифференциалы неявных функций $u(x, y)$ и $v(x, y)$ (а значит, и их частные производные) можно найти из системы уравнений

$$\begin{cases} \frac{\partial F}{\partial x}dx+\frac{\partial F}{\partial y}dy+\frac{\partial F}{\partial u}du+\frac{\partial F}{\partial v}dv=0, \\ \frac{\partial G}{\partial x}dx+\frac{\partial G}{\partial y}dy+\frac{\partial G}{\partial u}du+\frac{\partial G}{\partial v}dv=0. \end{cases}$$

ПРИМЕР 5.24. Функции u и v независимых переменных x и y заданы неявно системой уравнений

$$u + v = x,\ \ u - yv = 0.$$

Найти du, dv, d^2u, d^2v.

◀ Якобиан системы $\begin{vmatrix} \frac{\partial F}{\partial u} & \frac{\partial F}{\partial v} \\ \frac{\partial G}{\partial u} & \frac{\partial G}{\partial v} \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -y \end{vmatrix}=-y-1$ отличен от 0 при $y\neq -1$. Дифференцированием исходных уравнений находим два уравнения, связывающие дифференциалы всех четырех переменных:

$$du + dv = dx,\ \ du - ydv - vdy = 0. \tag{5.10}$$

Решая эту систему относительно du и dv при $y \neq -1$, получим

$$du=\frac{ydx+vdy}{1+y},\ \ dv=\frac{dx-vdy}{1+y}.$$

Для нахождения d^2u и d^2v продифференцируем уравнения (5.10) еще раз, учитывая, что вторые дифференциалы независимых переменных равны нулю:

$$d^2u + d^2v = 0,\ \ d^2u - dydv - yd^2v - dvdy = 0.$$

Решая эту систему относительно d^2u и d^2v при $y \neq -1$, получим

$$d^2u=\frac{2dvdy}{1+y}=\frac{2(dxdy-vdy^2)}{(1+y)^2},\ \ d^2v=-d^2u=-\frac{2(dxdy-vdy^2)}{(1+y)^2}.$$ ▶

5.125. Функции y и z независимой переменной x заданы системой уравнений

$$7x^2 + y^2 - 3z^2 = -1,\ \ 4x^2 + 2y^2 - 3z^2 = 0.$$

Найти $\frac{dy}{dx}, \frac{dz}{dx}, \frac{d^2y}{dx^2}, \frac{d^2z}{dx^2}$ при $x = 1$, $y = -2$, $z = 2$.

5.126. Функции y и z независимой переменной x заданы системой уравнений $x^2 + y^2 - z^2 = 0$, $x^2 + 2y^2 + 3z^2 = 1$. Найти dy, dz, d^2y, d^2z.

5.127. Функции u и v независимых переменных x и y заданы системой уравнений $xu + yv = 1$, $x + y + u + v = 0$. Найти du, dv, d^2u, d^2v.

5.128. Функции u и v независимых переменных x, y и z заданы системой уравнений $uv = 3x - 2y + z$, $v^2 = x^2 + y^2 + z^2$. Показать, что

$$x\frac{\partial u}{\partial x} + y\frac{\partial u}{\partial y} + z\frac{\partial u}{\partial z} = 0.$$

3. Касательная плоскость и нормаль к поверхности, заданной в неявном виде

Пусть поверхность S задана уравнением $F(x, y, z) = 0$ и точка $M_0(x_0, y_0, z_0) \in S$. Если функция $F(x, y, z)$ имеет в окрестности точки $M_0(x_0, y_0, z_0)$ непрерывные частные производные, одновременно не равные нулю, то уравнение касательной плоскости к S в точке $M_0(x_0, y_0, z_0)$ записывается следующим образом:

$$F'_x(x_0, y_0, z_0)(x - x_0) + F'_y(x_0, y_0, z_0)(y - y_0) + F'_z(x_0, y_0, z_0)(z - z_0) = 0,$$

а уравнения нормали к S в точке $M_0(x_0, y_0, z_0)$ — следующим образом:

$$\frac{x - x_0}{F'_x(x_0, y_0, z_0)} = \frac{y - y_0}{F'_y(x_0, y_0, z_0)} = \frac{z - z_0}{F'_z(x_0, y_0, z_0)}.$$

ПРИМЕР 5.25. Найти уравнение касательной плоскости и нормали к поверхности $x^2 + 2y^2 - 3z^2 + xy + yz - 2xz + 16 = 0$ в точке $M(1, 2, 3)$.

◄ Обозначив через $F(x, y, z)$ функцию, стоящую в левой части уравнения, найдем ее частные производные и их значения в точке M:

$$\begin{aligned} &F'_x(x, y, z) = 2x + y - 2z, \quad &F'_x(1, 2, 3) = -2;\\ &F'_y(x, y, z) = 4y + x + z, \quad &F'_y(1, 2, 3) = 12;\\ &F'_z(x, y, z) = -6z + y - 2x, \quad &F'_z(1, 2, 3) = -18. \end{aligned}$$

Следовательно, уравнение касательной плоскости:

$$-2(x - 1) + 12(y - 2) - 18(z - 3) = 0, \text{ или } x - 6y + 9z - 16 = 0,$$

а уравнения нормали:

$$\frac{x-1}{-2} = \frac{y-2}{12} = \frac{z-3}{-18}, \text{ или } \frac{x-1}{1} = \frac{y-2}{-6} = \frac{z-3}{9}. ►$$

В задачах 5.129, 5.130 найти уравнение касательной плоскости и нормали к поверхности в указанной точке.

5.129. $x(y + z)(xy - z) + 8 = 0$ в точке $(2, 1, 3)$.

5.130. $2^{x/z} + 2^{y/z} = 8$ в точке $(2, 2, 1)$.

5.131. В каких точках эллипсоида $\dfrac{x^2}{1} + \dfrac{y^2}{4} + \dfrac{z^2}{4} = 1$ нормаль к нему образует равные углы с осями координат?

5.132. К поверхности $x^2 + 2y^2 + 3z^2 = 1$ провести касательные плоскости, параллельные плоскости $x + 4y + 6z = 0$.

Г Л А В А 6

КРАТНЫЕ ИНТЕГРАЛЫ

§ 6.1. ДВОЙНОЙ ИНТЕГРАЛ

1. Понятие двойного интеграла и его вычисление в декартовых прямоугольных координатах

Пусть функция $f(x, y)$ непрерывна в замкнутой области G, содержащейся в некотором прямоугольнике $[a, b] \times [c, d]$ плоскости Oxy. Разобьем отрезки $[a, b]$, $[c, d]$ на части: $a = x_0 < x_1 < \ldots < x_n = b$, $c = y_0 < y_1 < \ldots < y_m = d$. Прямые $x = x_i$, $i = 0, 1, \ldots, n$, и $y = y_k$, $k = 0, 1, \ldots, m$ разобьют весь прямоугольник на прямоугольники $[x_i, x_{i+1}] \times [y_k, y_{k+1}]$, $i = 0, 1, \ldots, n - 1$, $k = 0, 1, \ldots, m - 1$. *Двумерной интегральной суммой* функции f по области G называется величина

$$S_{n,m} = \sum_{i,k} f(x_i, y_k)\Delta x_i \Delta y_k,$$

где $\Delta x_i = x_{i+1} - x_i$, $\Delta y_k = y_{k+1} - y_k$ и суммирование распространяется на все значения i и k, для которых точки (x_i, y_k) принадлежат области G. *Двойным интегралом* функции $f(x, y)$ по области G называется число

$$I = \lim_{\substack{\max\Delta x_i \to 0 \\ \max\Delta y_k \to 0}} \sum_{i,k} f(x_i, y_k)\Delta x_i \Delta y_k.$$

Обозначается двойной интеграл $\iint\limits_G f(x, y)\,dx\,dy.$

Двойной интеграл обладает свойствами линейности и аддитивности, как и определенный интеграл:

1) линейность:

$$\iint\limits_G (\alpha f(x,y) + \beta g(x,y))\,dx\,dy = \alpha \iint\limits_G f(x,y)\,dx\,dy + \beta \iint\limits_G g(x,y)\,dx\,dy, \quad \alpha, \beta \in \mathbb{R};$$

2) аддитивность: если $G = G_1 \cup G_2$, то

$$\iint\limits_G f(x,y)\,dx\,dy = \iint\limits_{G_1} f(x,y)\,dx\,dy + \iint\limits_{G_2} f(x,y)\,dx\,dy.$$

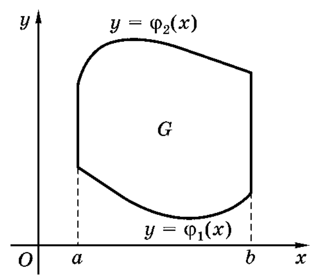


Рис. 6.1

Вычисление двойного интеграла сводится к вычислению *повторных интегралов* следующим образом. Пусть область G ограничена линиями $y = \varphi_1(x)$, $y = \varphi_2(x)$, $x = a$, $x = b$ (рис. 6.1), причем функции $\varphi_1(x)$ и $\varphi_2(x)$ непрерывны на $[a, b]$ и $\varphi_1(x) \le \varphi_2(x)$. Тогда

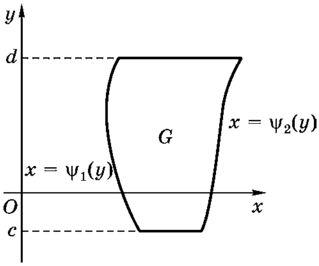


Рис. 6.2

$$\iint_G f(x,y)\,dx\,dy = \int_a^b dx \int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x,y)\,dy, \tag{6.1}$$

при этом сначала вычисляется внутренний интеграл по переменной y (x — параметр), а полученный результат интегрируется по x.

Аналогично, если область G ограничена линиями $x = \psi_1(y)$, $x = \psi_2(y)$, $y = c$, $y = d$ (рис. 6.2), а функции $\psi_1(y)$ и $\psi_2(y)$ непрерывны на $[c, d]$ и $\psi_1(y) \le \psi_2(y)$, то справедливо равенство

$$\iint_G f(x,y)\,dx\,dy = \int_c^d dy \int_{\psi_1(y)}^{\psi_2(y)} f(x,y)\,dx.$$

ПРИМЕР 6.1. Вычислить $\iint_G (x^2 + xy)\,dx\,dy$, если область G ограничена прямыми $y = x$, $y = 4 - x$, $x = 0$, $x = 1$.

◀ Замечая, что при $0 \le x \le 1$ выполняется неравенство $x < 4 - x$, и используя формулу (6.1), записываем двойной интеграл в виде повторного:

$$\iint_G (x^2 + xy)\,dx\,dy = \int_0^1 dx \int_x^{4-x} (x^2 + xy)\,dy.$$

Вычисляем внутренний интеграл по переменной y, считая x параметром:

$$\int_x^{4-x} (x^2 + xy)\,dy = \left(x^2 y + x\frac{y^2}{2}\right)\Bigg|_x^{4-x} = 8x - 2x^3.$$

Теперь вычисляем внешний интеграл: $\int_0^1 (8x - 2x^3)\,dx = \left(4x^2 - \frac{1}{2}x^4\right)\Big|_0^1 = 3{,}5.$ ▶

В задачах 6.1–6.4 вычислить повторные интегралы.

6.1. $\int_0^1 dx \int_0^2 (x^2 + y)\,dy.$ **6.2.** $\int_1^3 dy \int_2^5 \frac{dx}{(x + 2y)^2}.$

6.3. $\int_0^{\pi/2} dx \int_{a\cos x}^{a(1+\cos x)} y\,dy.$ **6.4.** $\int_{-\pi/2}^{\pi/2} dx \int_0^{2\cos x} y^3\,dy.$

В задачах 6.5–6.12 вычислить двойные интегралы.

6.5. $\iint_G \frac{y}{x}\,dx\,dy$, если область G ограничена прямыми $y = x$, $y = 2x$, $x = 1$, $x = 4$.

6.6. $\iint_G xy\,dx\,dy$, если область G ограничена линиями $y = 0$, $y = \sqrt{1 - x^2}$, $x = -1$, $x = 1$.

6.7. $\iint\limits_G e^x dxdy$, если область G ограничена линиями $x=0$, $x=\ln y$, $y=1$, $y=2$.

6.8. $\iint\limits_G xy^2 dxdy$, если область G ограничена кривыми $x=y$, $x=\sqrt{y}$.

ПРИМЕР 6.2. Вычислить $\iint\limits_G ydxdy$, если область G есть пересечение областей: $y \ge x^2$, $x^2+y^2 \le 2$.

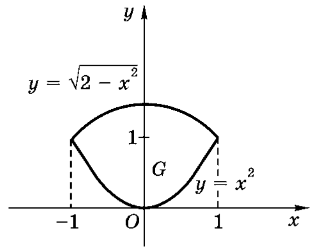


Рис. 6.3

◄ Область изображена на рис. 6.3. Окружность $x^2+y^2=2$ и парабола $y=x^2$ пересекаются в точках $(-1, 1)$ и $(1, 1)$. Уравнение линии, ограничивающей область сверху, $y=\sqrt{2-x^2}$, уравнение линии, ограничивающей область снизу, $y=x^2$. Следовательно,

$$\iint\limits_G ydxdy = \int\limits_{-1}^{1} dx \int\limits_{x^2}^{\sqrt{2-x^2}} ydy = \int\limits_{-1}^{1}\left(\left.\frac{y^2}{2}\right|_{x^2}^{\sqrt{2-x^2}}\right)dx = \frac{1}{2}\int\limits_{-1}^{1}(2-x^2-x^4)dx = 1\frac{7}{15}. ►$$

6.9. $\iint\limits_G \frac{1}{(x+y+1)^2}dxdy$, если область G — квадрат $0 \le x \le 1$, $0 \le y \le 1$.

6.10. $\iint\limits_G (x-2y)dxdy$, если область G — прямоугольник $0 \le x \le 2$, $1 \le y \le 4$.

6.11. $\iint\limits_G xdxdy$, если область G ограничена линиями $y=x^2-3$, $y=-2x$.

6.12. $\iint\limits_G x^2ydxdy$, если область G ограничена линиями $y=x$, $y=2x$, $x=2$.

Если одна из линий, ограничивающих область G, задается разными аналитическими выражениями, например,

$$\varphi_1(x) = \begin{cases} \varphi_1^{(1)}(x) & \text{при } a \le x \le c, \\ \varphi_1^{(2)}(x) & \text{при } c < x \le b, \end{cases}$$

то, учитывая свойство аддитивности, двойной интеграл записывается в виде суммы двух интегралов

$$\iint\limits_G f(x,y)dxdy = \int\limits_a^c dx \int\limits_{\varphi_1^{(1)}(x)}^{\varphi_2(x)} f(x,y)dy + \int\limits_c^b dx \int\limits_{\varphi_1^{(2)}(x)}^{\varphi_2(x)} f(x,y)dy. \qquad (6.2)$$

ПРИМЕР 6.3. Расставить пределы интегрирования двумя способами и вычислить интеграл $\iint\limits_G \frac{x^2}{y^2}dxdy$, если область интегрирования G ограничена линиями $y=x$, $y=\frac{1}{x}$, $x=2$.

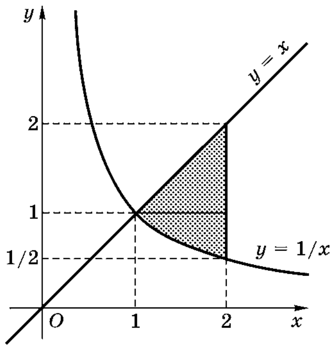


Рис. 6.4

◀ Абсцисса точки пересечения кривых $y = x$ и $y = \dfrac{1}{x}$ равна $a = 1$ (рис. 6.4). Для $x \in [1, 2]$ выполняется неравенство $\dfrac{1}{x} \le x$. Следовательно, по формуле (6.1) двойной интеграл сводится к следующему повторному:

$$\iint\limits_G \frac{x^2}{y^2}\,dx\,dy = \int\limits_1^2 dx \int\limits_{1/x}^{x} \frac{x^2}{y^2}\,dy.$$

Вычисляя его, получаем

$$\int\limits_1^2 dx \int\limits_{1/x}^{x} \frac{x^2}{y^2}\,dy = \int\limits_1^2 x^2 dx \int\limits_{1/x}^{x} \frac{dy}{y^2} = \int\limits_1^2 x^2 \left(-\frac{1}{y}\right)\Bigg|_{1/x}^{x} dx = \int\limits_1^2 x^2 \left(x - \frac{1}{x}\right) dx = \left(\frac{x^4}{4} - \frac{x^2}{2}\right)\Bigg|_1^2 = 2\frac{1}{4}.$$

Если же внешнее интегрирование производить по переменной y, то промежуток $\left[\dfrac{1}{2}, 2\right]$ изменения переменной y следует разбить на два: $\left[\dfrac{1}{2}, 1\right]$ и $[1, 2]$, так как промежутки изменения переменной x задаются различными уравнениями: $\dfrac{1}{y} \le x \le 2$, если $y \in \left[\dfrac{1}{2}, 1\right]$, и $y \le x \le 2$, если $y \in [1, 2]$. Тогда (см. формулу (6.2))

$$\iint\limits_G \frac{x^2}{y^2}\,dx\,dy = \int\limits_{0,5}^{1} dy \int\limits_{1/y}^{2} \frac{x^2}{y^2}\,dx + \int\limits_1^2 dy \int\limits_y^2 \frac{x^2}{y^2}\,dx.$$

Последовательно вычисляя каждый из повторных интегралов, получаем

$$\int\limits_{0,5}^{1} dy \int\limits_{1/y}^{2} \frac{x^2}{y^2}\,dx + \int\limits_1^2 dy \int\limits_y^2 \frac{x^2}{y^2}\,dx = 2\frac{1}{4}.$$

Очевидно, что в данном случае первый способ вычисления интеграла удобнее второго. ▶

В задачах 6.13–6.16 для указанных областей G записать двойной интеграл

$$\iint\limits_G f(x, y)\,dx\,dy$$

в виде повторных, взятых в различных порядках.

6.13. G — прямоугольник с вершинами $A(1, 2)$, $B(5, 2)$, $C(5, 4)$, $D(1, 4)$.

6.14. G — параллелограмм, ограниченный прямыми $y = x$, $y = x - 3$, $y = 2$, $y = 4$.

6.15. G — область, ограниченная кривыми $x = 1 - y^2$, $x = y^2 - 1$.

6.16. G — область, ограниченная линиями $x^2 + y^2 = 4$, $x^2 + y^2 = 4x$, $y = 0$ $(x \ge 0, y \ge 0)$.

В задачах 6.17–6.20 вычислить двойные интегралы.

6.17. $\iint\limits_G (x^2+y^2)\,dx\,dy$, где область G ограничена прямыми $y = x$, $x + y = 2a$, $x = 0$ $(a > 0)$.

6.18. $\iint\limits_G \sqrt{xy-y^2}\,dx\,dy$, где область G — трапеция с вершинами $A(1, 1)$, $B(5, 1)$, $C(10, 2)$, $D(2, 2)$.

6.19. $\iint\limits_G xy\,dx\,dy$, где область G ограничена линиями $x + y = 2$, $x^2 + y^2 = 2y$, $y = 0$.

6.20. $\iint\limits_G (4-y)\,dx\,dy$, где область G ограничена линиями $x^2 = 4y$, $y = 1$, $x = 0$ $(x \geq 0)$.

2. Вычисление двойного интеграла в полярных координатах

Пусть (x, y) — прямоугольные координаты точки плоскости, а (r, φ) — ее полярные координаты, то есть

$$x = r\cos\varphi, \quad y = r\sin\varphi.$$

Если области G, заданной в прямоугольных координатах (x, y), взаимно-однозначно соответствует область D изменения полярных координат (r, φ), то

$$\iint\limits_G f(x,y)\,dx\,dy = \iint\limits_D f(r\cos\varphi, r\sin\varphi)\,r\,dr\,d\varphi. \tag{6.3}$$

ПРИМЕР 6.4. Перейдя к полярным координатам, вычислить интеграл

$$\iint\limits_G (x^2+y^2)\,dx\,dy,$$

где область G — часть круга $x^2 + y^2 \leq 4$, лежащая во второй четверти.

◀ Положим $x = r\cos\varphi$, $y = r\sin\varphi$ и применим формулу (6.3). Так как $x^2 + y^2 = r^2$, то

$$\iint\limits_G (x^2+y^2)\,dx\,dy = \iint\limits_D r^3\,dr\,d\varphi.$$

Область G в полярных координатах задается условиями: $r^2 \leq 4$, $\pi/2 \leq \varphi \leq \pi$, т. е. область D изменения полярных координат есть прямоугольник $0 \leq r \leq 2$, $\pi/2 \leq \varphi \leq \pi$. Следовательно,

$$\iint\limits_D r^3\,dr\,d\varphi = \int\limits_{\pi/2}^{\pi} d\varphi \int\limits_0^2 r^3\,dr = \int\limits_{\pi/2}^{\pi} \left.\frac{r^4}{4}\right|_0^2 d\varphi = \int\limits_{\pi/2}^{\pi} 4\,d\varphi = 2\pi. \text{ ▶}$$

В задачах 6.21–6.24 вычислить интегралы, перейдя к полярным координатам.

6.21. $\iint\limits_G \sqrt{x^2+y^2-9}\,dx\,dy$, где область G — кольцо между окружностями $x^2 + y^2 = 9$ и $x^2 + y^2 = 25$.

6.22. $\iint\limits_G \sqrt{1-x^2-y^2}\,dxdy$, где область G — круг радиуса $R = 1$ с центром в начале координат.

6.23. $\iint\limits_G (x^2+y^2)dxdy$, где область G ограничена линиями $x^2 + y^2 = ax$, $x^2 + y^2 = 2ax$, $y = 0$ $(y \geq 0)$.

6.24. $\iint\limits_G x\sqrt{x^2+y^2}\,dxdy$, где область G — круговой сектор $x^2 + y^2 \leq 16$, $x \leq y \leq x\sqrt{3}$.

3. Общий случай замены переменных в двойном интеграле

Пусть функции

$$x = \varphi(u, v) \quad \text{и} \quad y = \psi(u, v) \tag{6.4}$$

осуществляют взаимно-однозначное непрерывно дифференцируемое отображение области D плоскости $O'uv$ на область G плоскости Oxy. Тогда существует обратное непрерывно дифференцируемое отображение $u = \eta(x, y)$ и $v = \chi(x, y)$ области G на область D, в области D *якобиан* преобразования

$$I(u,v) = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial\varphi}{\partial u} & \dfrac{\partial\varphi}{\partial v} \\ \dfrac{\partial\psi}{\partial u} & \dfrac{\partial\psi}{\partial v} \end{vmatrix} \neq 0, \ (u,v) \in D,$$

и справедлива следующая формула замены переменных в двойном интеграле:

$$\iint\limits_G f(x,y)dxdy = \iint\limits_D f(\varphi(u,v), \psi(u,v))|I(u,v)|dudv. \tag{6.5}$$

В частности, при переходе к полярным координатам якобиан

$$I(r,\varphi) = \begin{vmatrix} \cos\varphi & -r\sin\varphi \\ \sin\varphi & r\cos\varphi \end{vmatrix} = r.$$

Поэтому формула (6.3) есть частный случай формулы (6.5).

Если в формулах (6.4) зафиксировать переменную u (v), то уравнения (6.4) будут задавать некоторую кривую на плоскости. Поэтому упорядоченную пару (u, v) называют *криволинейными* координатами точки на декартовой плоскости.

Криволинейные координаты, т. е. функции $\varphi(u, v)$ и $\psi(u, v)$, часто выбирают так, чтобы область D изменения переменных u и v была значительно проще области G.

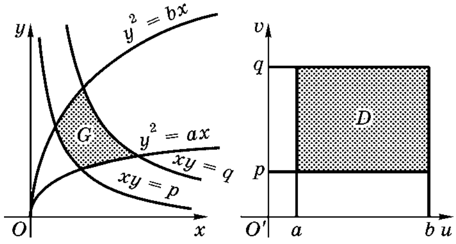


Рис. 6.5

ПРИМЕР 6.5. Вычислить двойной интеграл $\iint\limits_G \sqrt{xy}\,dxdy$, где область G ограничена параболами $y^2 = ax$, $y^2 = bx$ и гиперболами $xy = p$, $xy = q$ $(0 < a < b,\ 0 < p < q)$.

◄ В декартовых координатах область G изображена на рис. 6.5 слева. Изменяя в уравнении $y^2 = ux$ параметр u от a до b, получим семейство парабол, заключенных между параболами $y^2 = ax$, $y^2 = bx$. Аналогично, изменяя в уравнении $xy = v$ параметр v от p до q, получим семейство гипербол, заключенных между гиперболами $xy = p$, $xy = q$. Поэтому новыми переменными выберем параметры u и v. Решая систему уравнений $y^2 = ux$, $xy = v$, находим $x = u^{-1/3}v^{2/3}$, $y = u^{1/3}v^{1/3}$. Отсюда

$$\frac{\partial x}{\partial u} = -\frac{1}{3}u^{-4/3}v^{2/3}, \quad \frac{\partial x}{\partial v} = \frac{2}{3}u^{-1/3}v^{-1/3},$$
$$\frac{\partial y}{\partial u} = \frac{1}{3}u^{-2/3}v^{1/3}, \quad \frac{\partial y}{\partial v} = \frac{1}{3}u^{1/3}v^{-2/3}$$

и якобиан преобразования

$$I(u,v) = \begin{vmatrix} -\frac{1}{3}u^{-4/3}v^{2/3} & \frac{2}{3}u^{-1/3}v^{-1/3} \\ \frac{1}{3}u^{-2/3}v^{1/3} & \frac{1}{3}u^{1/3}v^{-2/3} \end{vmatrix} = -\frac{1}{3u}.$$

Поэтому $|I(u, v)| = \frac{1}{3u}$ при $u > 0$.

Уравнения линий, ограничивающих область D переменных u и v имеют вид $u = a$, $u = b$, $v = p$, $v = q$, то есть область G плоскости Oxy преобразуется в прямоугольную область D плоскости $O'uv$ (рис. 6.5). Учитывая, что в новых координатах подынтегральная функция $\sqrt{xy} = \sqrt{v}$, то по формуле (6.5) получаем

$$\iint\limits_G \sqrt{xy}\,dx\,dy = \iint\limits_D \frac{\sqrt{v}\,du\,dv}{3u} = \frac{1}{3}\int_a^b \frac{du}{u}\int_p^q \sqrt{v}\,dv = \frac{1}{3}\ln u\Big|_a^b \cdot \frac{2}{3}v^{3/2}\Big|_p^q = \frac{2}{9}(q^{3/2} - p^{3/2})\ln\frac{b}{a}. \ \blacktriangleright$$

В задачах 6.25–6.28 перейти к новым переменным u и v и расставить пределы интегрирования в указанных интегралах.

6.25. $\iint\limits_G f(x,y)\,dx\,dy$, где область G ограничена кривыми $x^2 = ay$, $x^2 = by$, $y^2 = px$, $y^2 = qx$ $(0 < a < b,\ 0 < p < q)$. Положить $u = x^2/y$, $v = y^2/x$.

6.26. $\iint\limits_G f(x,y)\,dx\,dy$, где область G ограничена линиями $y = 1 - x$, $y = 3 - x$, $x = 0$, $x = 3$. Положить $u = x + y$, $v = x$.

6.27. $\iint\limits_G f(x,y)\,dx\,dy$, где область G ограничена линиями $xy = p$, $xy = q$, $y = ax$, $y = bx$ $(0 < a < b,\ 0 < p < q)$. Положить $u = xy$, $v = y/x$.

6.28. $\iint\limits_G f(x,y)\,dx\,dy$, где область G ограничена кривыми $y = ax^3$, $y = bx^3$, $y^2 = px$, $y^2 = qx$ $(0 < a < b,\ 0 < p < q)$. Положить $u = y/x^3$, $v = y^2/x$.

4. Приложения двойных интегралов

Площадь S части G декартовой плоскости выражается формулой

$$S = \iint\limits_G dx\,dy. \tag{6.6}$$

Выполняя замену переменных, можно получить формулы для вычисления площади в криволинейных координатах.

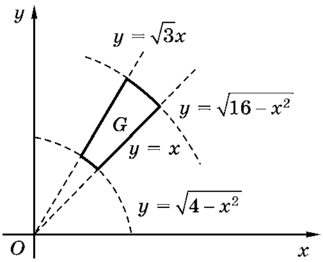


Рис. 6.6

ПРИМЕР 6.6. Найти площадь криволинейного «четырехугольника»: $4 \le x^2 + y^2 \le 16$, $x \le y \le x\sqrt{3}$ (рис. 6.6)

◄ Здесь удобно перейти к полярным координатам. В полярных координатах «четырехугольник» задается ограничениями $4 \le r^2 \le 16$, т. е. $2 \le r \le 4$, и $\pi/4 \le \varphi \le \pi/3$. Следовательно, выполняя замену переменных $x = r\cos\varphi$, $y = r\sin\varphi$ в формуле (6.6), получаем

$$S = \iint\limits_G dx\,dy = \iint\limits_D r\,dr\,d\varphi = \int\limits_2^4 r\,dr \int\limits_{\pi/4}^{\pi/3} d\varphi = \frac{\pi}{2}. \text{ ►}$$

6.29. Найти площадь фигуры, ограниченной линиями $xy = 4$ и $x + y = 5$.

6.30. Найти площадь фигуры, ограниченной линиями $y^2 = 4x + 4$ и $x + y = 2$.

6.31. Найти площадь фигуры, ограниченной линиями $x^2 + y^2 = 2x$, $x^2 + y^2 = 4x$, $y = x$, $y = 0$.

6.32. Найти площадь фигуры, ограниченную кардиоидой $r = 1 + \cos\varphi$.

Если гладкая поверхность задана уравнением $z = f(x, y)$, то *площадь* части этой *поверхности*, проекция которой на плоскость Oxy есть область G, равна

$$Q = \iint\limits_G \sqrt{1 + \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2}\, dx\,dy. \tag{6.7}$$

ПРИМЕР 6.7. Найти площадь части сферы $x^2 + y^2 + z^2 = 2$, заключенной внутри цилиндра $x^2 + y^2 = 1$ $(z > 0)$.

◄ Так как $z > 0$, то уравнение поверхности — $z = \sqrt{2 - x^2 - y^2}$. Область G, в которую проектируется часть сферы, вырезанная цилиндром, есть круг $x^2 + y^2 \le 1$. Частные производные функции $z = \sqrt{2 - x^2 - y^2}$ равны

$$z'_x = -\frac{x}{\sqrt{2 - x^2 - y^2}}, \quad z'_y = -\frac{y}{\sqrt{2 - x^2 - y^2}}.$$

Следовательно, подынтегральное выражение в формуле (6.7) равно $\dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{2 - x^2 - y^2}}$. Таким образом, искомая площадь выражается двойным интегралом:

$$Q = \iint\limits_G \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2 - x^2 - y^2}} dx\,dy, \quad G: x^2 + y^2 \le 1.$$

Переходя к полярным координатам, получаем

$$Q = \iint\limits_G \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2 - x^2 - y^2}} dx\,dy = \iint\limits_D \frac{\sqrt{2}r}{\sqrt{2 - r^2}} dr\,d\varphi = \int\limits_0^{2\pi} d\varphi \int\limits_0^1 \frac{\sqrt{2}r}{\sqrt{2 - r^2}} dr.$$

Интеграл:

$$\int\limits_0^1 \frac{\sqrt{2}r}{\sqrt{2 - r^2}} dr = -\frac{\sqrt{2}}{2} \int\limits_0^1 \frac{d(2 - r^2)}{\sqrt{2 - r^2}} = -\sqrt{2} \cdot \sqrt{2 - r^2}\,\Big|_0^1 = 2 - \sqrt{2},$$

площадь поверхности: $Q = (4 - 2\sqrt{2})\pi$. ►

6.33. Найти площадь части плоскости $x + y + z = 6$, вырезаемой цилиндром $x^2 + y^2 = 4$.

6.34. Найти площадь части плоскости $x + y + z = a$, заключенной между координатными плоскостями ($a > 0$).

6.35. Найти площадь части поверхности конуса $z=\sqrt{x^2+y^2}$, вырезаемой цилиндрами $y = x^2 - 1$, $y = 1 - x^2$.

6.36. Найти площадь части сферы $x^2 + y^2 + z^2 = 2a^2$, заключенной внутри конуса $z=\sqrt{x^2+y^2}$.

Объем V цилиндра, ограниченного сверху непрерывной поверхностью $z = f(x, y)$, снизу плоскостью $z = 0$ и с боков прямой цилиндрической поверхностью, вырезающей на плоскости Oxy область G, выражается интегралом

$$V=\iint\limits_G f(x,y)\,dx\,dy.$$

ПРИМЕР 6.8. Найти объем тела, ограниченного поверхностями $y=\sqrt{x}$, $y=2\sqrt{x}$, $x + z = 4$, $z = 0$.

◄ Данное тело ограничено сверху плоскостью $z = 4 - x$, параллельной оси Oy, снизу — плоскостью $z = 0$, с боков — цилиндрическими поверхностями $y=\sqrt{x}$, $y=2\sqrt{x}$ (рис. 6.7*а*). Область интегрирования G изображена на рис. 6.7*б*.

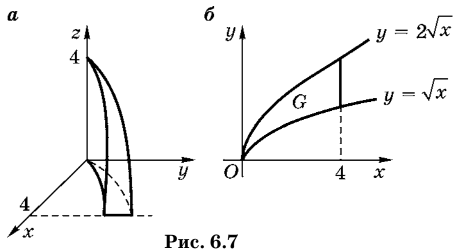


Рис. 6.7

Таким образом,

$$V=\iint\limits_G (4-x)\,dx\,dy=\int\limits_0^4 dx\int\limits_{\sqrt{x}}^{2\sqrt{x}}(4-x)\,dy=\int\limits_0^4 (4-x)(2\sqrt{x}-\sqrt{x})\,dx=$$

$$=\int\limits_0^4 (4\sqrt{x}-x^{3/2})\,dx=\left(\frac{8x^{3/2}}{3}-\frac{2x^{5/2}}{5}\right)\Bigg|_0^4=\frac{128}{15}.$$ ►

6.37. Найти объем тела, ограниченного параболоидом $z = x^2 + y^2$ и плоскостью $z = 4$.

6.38. Найти объем тела, ограниченного параболоидом $z = x^2 + y^2$, координатными плоскостями и плоскостью $x + y = 1$.

6.39. Найти объем тела, ограниченного параболоидом $z = x^2 + y^2$, цилиндром $y = x^2$ и плоскостями $y = 1$, $z = 0$.

6.40. Найти объем тела, ограниченного сферой $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ и конусом $z^2 = x^2 + y^2$ (внутри конуса).

Механические приложения. Если пластина занимает область G плоскости Oxy и имеет переменную поверхностную плотность $\gamma = \gamma(x, y)$, то ее *масса* выражается интегралом

$$m=\iint\limits_G \gamma(x,y)\,dx\,dy,$$

а *статические моменты* M_x и M_y относительно осей Ox и Oy соответственно — интегралами

$$M_x = \iint_G y\gamma(x,y)dxdy,\quad M_y = \iint_G x\gamma(x,y)dxdy.$$

Координаты *центра масс* $\bar{x}$ и $\bar{y}$ пластины определяются следующим образом:

$$\bar{x} = \frac{M_y}{m} = \frac{\iint_G x\gamma(x,y)dxdy}{\iint_G \gamma(x,y)dxdy},\quad \bar{y} = \frac{M_x}{m} = \frac{\iint_G y\gamma(x,y)dxdy}{\iint_G \gamma(x,y)dxdy}.$$

Моменты инерции пластины I_x и I_y относительно осей Ox и Oy соответственно равны

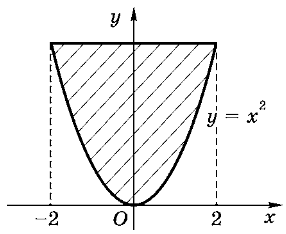


Рис. 6.8

$$I_x = \iint_G y^2\gamma(x,y)dxdy,\quad I_y = \iint_G x^2\gamma(x,y)dxdy. \tag{6.8}$$

Если пластина однородна и плотность ее не указана, условимся считать $\gamma(x, y) \equiv 1$.

ПРИМЕР 6.9. Найти моменты инерции однородной фигуры, ограниченной параболой $y = x^2$ и прямой $y = 4$ (рис. 6.8), относительно осей Ox, Oy.

◄ Используя формулы (6.8) для вычисления моментов инерции плоских фигур, получаем

$$I_x = \iint_G y^2dxdy = \int_{-2}^{2}dx\int_{x^2}^{4}y^2dy = \frac{1}{3}\int_{-2}^{2}(64-x^6)dx = \frac{512}{7},$$

$$I_y = \iint_G x^2dxdy = \int_{-2}^{2}x^2dx\int_{x^2}^{4}dy = \int_{-2}^{2}(4x^2-x^4)dx = \frac{128}{15}. ►$$

6.41. Найти массу круглой пластины радиуса R, если ее плотность в каждой точке пропорциональна расстоянию от точки до центра и равна δ на краю пластины.

6.42. Найти массу пластины, имеющей форму прямоугольного треугольника с катетами $OB = a$ и $OA = b$, если ее плотность в точке равна расстоянию от точки до катета OA.

6.43. Найти статические моменты относительно осей Ox и Oy однородной фигуры, ограниченной синусоидой $y = \sin x$ и прямой, проходящей через начало координат и точку синусоиды $A(\pi/2, 1)$ $(x \ge 0)$.

6.44. Найти статические моменты относительно осей Ox и Oy однородной фигуры, ограниченной кардиоидой $r = a(1 + \cos\varphi)$, $0 \le \varphi \le \pi$, и полярной осью.

6.45. Найти координаты центра масс однородной фигуры, ограниченной параболой $y = x^2$ и прямой $x + y = 2$.

6.46. Найти координаты центра масс однородной фигуры, ограниченной параболой $x = y^2$ и прямой $y = x$.

6.47. Найти моменты инерции однородного треугольника, ограниченного прямыми $x + y = 1$, $x + 2y = 2$, $y = 0$, относительно осей Ox и Oy.

6.48. Найти момент инерции однородного круга радиуса R относительно диаметра.

§ 6.2. ТРОЙНОЙ ИНТЕГРАЛ

1. Понятие тройного интеграла и его вычисление в декартовых прямоугольных координатах

Если функция $f(x, y, z)$ непрерывна в замкнутой области G, содержащейся в некотором прямоугольном параллелепипеде $[a, b] \times [c, d] \times [u, v]$ декартового пространства $Oxyz$, то, аналогично определению двойного интеграла, *тройным интегралом* называется предел трехкратной интегральной суммы

$$\iiint\limits_G f(x,y,z)\,dx\,dy\,dz = \lim_{\substack{\max\Delta x_i \to 0 \\ \max\Delta y_k \to 0 \\ \max\Delta z_l \to 0}} \sum_{i,k,l} f(x_i, y_k, z_l)\Delta x_i\,\Delta y_k\,\Delta z_l.$$

Тройной интеграл также обладает свойствами линейности и аддитивности.

Вычисление тройного интеграла сводится к последовательному вычислению трех однократных интегралов или к вычислению одного однократного и одного двойного интеграла. Например, пусть область интегрирования G ограничена снизу поверхностью $z = \varphi_1(x, y)$, сверху — поверхностью $z = \varphi_2(x, y)$ $(\varphi_1(x, y) \le \varphi_2(x, y))$ и с боков — прямым цилиндром, и пусть проекция области G на плоскость Oxy есть область D. Тогда тройной интеграл вычисляется по формуле

$$\iiint\limits_G f(x,y,z)\,dx\,dy\,dz = \iint\limits_D dx\,dy \int\limits_{\varphi_1(x,y)}^{\varphi_2(x,y)} f(x,y,z)\,dz.$$

Записывая двойной интеграл по плоской области D через один из повторных, получаем

$$\iiint\limits_G f(x,y,z)\,dx\,dy\,dz = \int\limits_a^b dx \int\limits_{y_1(x)}^{y_2(x)} dy \int\limits_{\varphi_1(x,y)}^{\varphi_2(x,y)} f(x,y,z)\,dz = \int\limits_c^d dy \int\limits_{x_1(y)}^{x_2(y)} dx \int\limits_{\varphi_1(x,y)}^{\varphi_2(x,y)} f(x,y,z)\,dz.$$

ПРИМЕР 6.10. Вычислить тройной интеграл $\iiint\limits_G z\,dx\,dy\,dz$, если область G ограничена плоскостями $x + y + z = 1$, $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$.

◄ Проекцией области G на плоскость Oxy является треугольник D, ограниченный прямыми $x + y = 1$, $x = 0$, $y = 0$ (рис. 6.9). Сверху область G ограничена плоскостью $z = 1 - x - y$, снизу — плоскостью $z = 0$. Следовательно,

$$I = \iiint\limits_G z\,dx\,dy\,dz = \iint\limits_D dx\,dy \int\limits_0^{1-x-y} z\,dz.$$

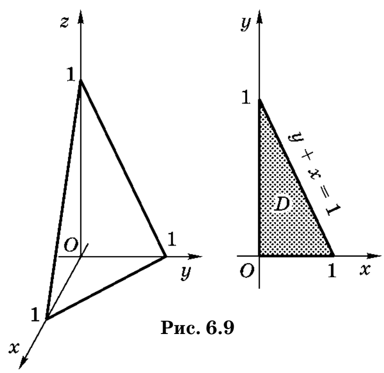


Рис. 6.9

Переходя от двойного интеграла по области D к повторному, получаем

$$I = \int\limits_0^1 dx \int\limits_0^{1-x} dy \int\limits_0^{1-x-y} z\,dz = \frac{1}{2}\int\limits_0^1 dx \int\limits_0^{1-x} (1-x-y)^2 dy = -\frac{1}{6}\int\limits_0^1 (1-x-y)^3\Big|_0^{1-x} dx =$$

$$= \frac{1}{6}\int\limits_0^1 (1-x)^3 dx = -\frac{1}{24}(1-x)^4\Big|_0^1 = \frac{1}{24}. ►$$

В задачах 6.49–6.52 для указанных областей G записать тройной интеграл $\iiint\limits_G f(x,y,z)\,dx\,dy\,dz$ в виде повторного.

6.49. G — тетраэдр, ограниченный плоскостями $2x + 3y + 4z = 12$, $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$.

6.50. G — шар $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$.

6.51. G — область, ограниченная поверхностями $4z = x^2 + y^2$, $z = 4$.

6.52. G — область, ограниченная поверхностями $z^2 = x^2 + y^2$, $z = 1$.

В задачах 6.53–6.56 вычислить интегралы.

6.53. $\int\limits_0^1 dx \int\limits_0^x dy \int\limits_0^{\sqrt{x^2+y^2}} z\,dz.$ **6.54.** $\int\limits_0^3 dx \int\limits_0^{2x} dy \int\limits_0^{\sqrt{xy}} z\,dz.$

6.55. $\iiint\limits_G (x+y+z)\,dx\,dy\,dz$, где G — тетраэдр, ограниченный плоскостями $x + y + z = a$, $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$.

6.56. $\iiint\limits_G xyz\,dx\,dy\,dz$, где G — область, ограниченная цилиндрической поверхностью $y = x^2$ и плоскостями $y = 1$, $z = 4$, $z = 0$.

2. Замена переменных в тройном интеграле

Если в тройном интеграле $\iiint\limits_G f(x,y,z)\,dx\,dy\,dz$ производится замена переменных по формулам $x = x(u, v, w)$, $y = y(u, v, w)$, $z = z(u, v, w)$, причем функции $x(u, v, w)$, $y(u, v, w)$, $z(u, v, w)$ осуществляют взаимно однозначное непрерывно дифференцируемое отображение области D пространства $O'uvw$ на область G пространства $Oxyz$ и в области D отличен от нуля *якобиан* преобразования:

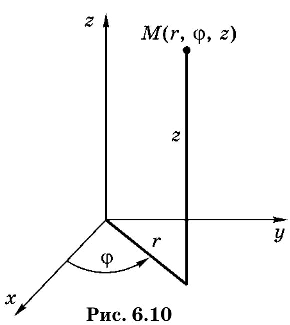


Рис. 6.10

$$I = I(u,v,w) = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial x}{\partial u} & \dfrac{\partial x}{\partial v} & \dfrac{\partial x}{\partial w} \\ \dfrac{\partial y}{\partial u} & \dfrac{\partial y}{\partial v} & \dfrac{\partial y}{\partial w} \\ \dfrac{\partial z}{\partial u} & \dfrac{\partial z}{\partial v} & \dfrac{\partial z}{\partial w} \end{vmatrix} \neq 0,$$

то справедлива формула

$$\iiint\limits_G f(x,y,z)\,dx\,dy\,dz = \iiint\limits_D f(x(u,v,w), y(u,v,w), z(u,v,w))\,|I|\,du\,dv\,dw. \qquad (6.9)$$

Наиболее часто используются *цилиндрические* и *сферические* координаты. Формулы перехода к цилиндрическим координатам имеют вид $x = r\cos\varphi$, $y = r\sin\varphi$, $z = z$ (рис. 6.10). Якобиан преобразования $I = r$. Следовательно, формула (6.9) в случае цилиндрических координат имеет вид

$$\iiint\limits_G f(x,y,z)\,dx\,dy\,dz = \iiint\limits_D f(r\cos\varphi, r\sin\varphi, z)\,r\,dr\,d\varphi\,dz. \qquad (6.10)$$

ПРИМЕР 6.11. Перейдя к цилиндрическим координатам, вычислить интеграл

$$\iiint\limits_G z\sqrt{x^2+y^2}\,dxdydz,$$

где область G задана неравенствами $0 \le x \le$ ≤ 2, $0 \le y \le \sqrt{2x-x^2}$, $0 \le z \le a$ (рис. 6.11*а*).

◀ Проекция области G на плоскость Oxy имеет вид, изображенный на рис. 6.11*б*. В цилиндрических координатах уравнение $y=\sqrt{2x-x^2}$ преобразуется к виду $r = 2\cos\varphi$, $0 \le \varphi \le \pi/2$. Поэтому, применяя формулу (6.10) и учитывая, что $x^2 + y^2 = r^2$, получаем

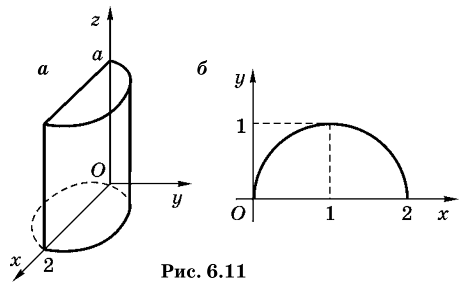


Рис. 6.11

$$\iiint\limits_G z\sqrt{x^2+y^2}\,dxdydz = \iiint\limits_D zr^2 dr\,d\varphi\,dz =$$

$$= \int\limits_0^{\pi/2} d\varphi \int\limits_0^{2\cos\varphi} r^2 dr \int\limits_0^{a} z\,dz = \frac{a^2}{2}\int\limits_0^{\pi/2} d\varphi \int\limits_0^{2\cos\varphi} r^2 dr = \frac{4a^2}{3}\int\limits_0^{\pi/2} \cos^3\varphi\, d\varphi = \frac{8}{9}a^2. \ ▶$$

В задачах 6.57–6.60 вычислить интегралы, перейдя к цилиндрическим координатам.

6.57. $\iiint\limits_G z\,dxdydz$, где область G ограничена поверхностями $x^2 + y^2 = a^2$, $z = 0$, $z = h$.

6.58. $\iiint\limits_G \sqrt{x^2+y^2}\,dxdydz$, где область G ограничена поверхностями $z^2 =$ $= x^2 + y^2$, $z = a$ $(a > 0)$.

6.59. $\iiint\limits_G (x^2+y^2)\,dxdydz$, где G — область, ограниченная параболоидом $z = x^2 + y^2$, цилиндром $x^2 + y^2 = 4$ и плоскостью $z = 0$.

6.60. $\iiint\limits_G \sqrt{x^2+y^2}\,dxdydz$, где область G задана неравенствами

$$x^2+y^2 \le z \le \sqrt{x^2+y^2}.$$

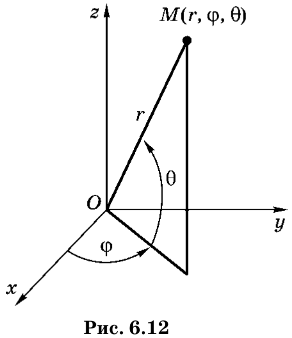


Рис. 6.12

Формулы перехода к сферическим координатам имеют вид $x = r\cos\varphi\cos\theta$, $y = r\sin\varphi\cos\theta$, $z = r\sin\theta$ (рис. 6.12), якобиан которых $I = r^2\cos\theta$. Формула (6.9) принимает вид

$$\iiint\limits_G f(x,y,z)\,dxdydz =$$

$$= \iiint\limits_D f(r\cos\varphi\cos\theta, r\sin\varphi\cos\theta, r\sin\theta)\,r^2\cos\theta\,dr\,d\varphi\,d\theta. \qquad (6.11)$$

ПРИМЕР 6.12. Перейдя к сферическим координатам, вычислить интеграл

$$\iiint\limits_G (x^2+y^2)\,dxdydz,$$

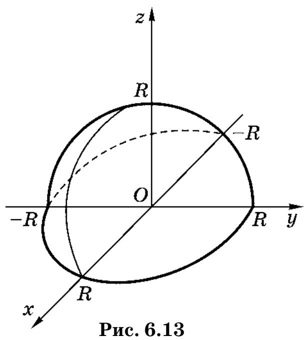


Рис. 6.13

где область G есть полушар, заданный неравенствами $x^2 + y^2 + z^2 \le R^2$, $z \ge 0$ (рис. 6.13).

◀ Полушар радиуса R задается следующими пределами изменения сферических координат: $0 \le r \le R$, $0 \le \varphi \le 2\pi$, $0 \le \theta \le \pi/2$. Следовательно, по формуле (6.11),

$$\iiint\limits_G (x^2+y^2)\,dx\,dy\,dz = \iiint\limits_D r^2\cos\theta\, r^2\cos\theta\, dr\,d\varphi\,d\theta =$$
$$= \int\limits_0^{2\pi} d\varphi \int\limits_0^{\pi/2} \cos^3\theta\, d\theta \int\limits_0^R r^4 dr = \frac{4}{15}\pi R^5. \ ▶$$

В задачах 6.61–6.62 вычислить интегралы, перейдя к сферическим координатам.

6.61. $\iiint\limits_G xyz^2\,dx\,dy\,dz$, где область G есть часть шара $x^2 + y^2 + z^2 \le 1$, принадлежащая первому октанту.

6.62. $\iiint\limits_G \dfrac{dx\,dy\,dz}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$, где область G — сферический слой между сферами $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$, $x^2 + y^2 + z^2 = 4a^2$.

3. Приложения тройных интегралов

Объем V пространственной области G равен

$$V = \iiint\limits_G dx\,dy\,dz.$$

Масса m тела с переменной плотностью $\gamma = \gamma(x, y, z)$, занимающего пространственную область G, равна

$$m = \iiint\limits_G \gamma(x,y,z)\,dx\,dy\,dz.$$

Статические моменты относительно координатных плоскостей:

$$M_{yz} = \iiint\limits_G x\gamma(x,y,z)\,dx\,dy\,dz,$$
$$M_{xz} = \iiint\limits_G y\gamma(x,y,z)\,dx\,dy\,dz,$$
$$M_{xy} = \iiint\limits_G z\gamma(x,y,z)\,dx\,dy\,dz.$$

Координаты центра масс тела: $\bar{x} = \dfrac{M_{yz}}{m}$, $\bar{y} = \dfrac{M_{xz}}{m}$, $\bar{z} = \dfrac{M_{xy}}{m}$.

Моменты инерции тела относительно координатных осей:

$$I_x = \iiint\limits_G (y^2+z^2)\gamma(x,y,z)\,dx\,dy\,dz,$$
$$I_y = \iiint\limits_G (x^2+z^2)\gamma(x,y,z)\,dx\,dy\,dz,$$
$$I_z = \iiint\limits_G (x^2+y^2)\gamma(x,y,z)\,dx\,dy\,dz,$$

а момент инерции относительно начала координат (*полярный момент*) равен

$$I_O = \iint\limits_G (x^2+y^2+z^2)\gamma(x,y,z)dxdy.$$

Если тело однородно и плотность его не указана, условимся считать $\gamma(x, y, z) \equiv 1$.

ПРИМЕР 6.13. Найти массу и полярный момент инерции полушара $x^2 + y^2 + z^2 \le R^2$, $z \ge 0$, если плотность в каждой точке пропорциональна расстоянию от точки до центра шара.

◀ Имеем $\gamma(x,y,z) = k\sqrt{x^2+y^2+z^2}$. Переходя к сферическим координатам, находим массу полушара:

$$m = \iiint\limits_G k\sqrt{x^2+y^2+z^2}\,dxdydz = k\iiint\limits_G r^3\cos\theta\,dr\,d\varphi d\theta =$$
$$= k\int\limits_0^{2\pi} d\varphi \int\limits_0^{\pi/2} \cos\theta\,d\theta \int\limits_0^R r^3 dr = k\frac{\pi R^4}{2},$$

и полярный момент инерции

$$I_O = \iiint\limits_G k(x^2+y^2+z^2)^{3/2}dxdydz = k\iiint\limits_G r^5\cos\theta\,dr\,d\varphi d\theta =$$
$$= k\int\limits_0^{2\pi} d\varphi \int\limits_0^{\pi/2} \cos\theta\,d\theta \int\limits_0^R r^5 dr = k\frac{\pi R^6}{3}. \blacktriangleright$$

6.63. Найти объем тела, ограниченного сферой $x^2 + y^2 + z^2 = 8$ и конусом $z = \sqrt{x^2+y^2}$ (внутри конуса).

6.64. Найти объем тела, ограниченного параболоидом $z = 1 - x^2 - y^2$ и плоскостями $z = 0$, $y = 0$, $y = x$ $(x \ge 0)$.

6.65. Найти объем тела, ограниченного параболоидом $4z = x^2 + y^2$ и конусом $z = \sqrt{x^2+y^2}$.

6.66. Найти объем тела, ограниченного сферой $x^2 + y^2 + z^2 = 9$ и конусами $z = \sqrt{x^2+y^2}$, $z = \sqrt{3(x^2+y^2)}$.

6.67. Найти массу и среднюю плотность кругового конуса с радиусом основания R и высотой H, если плотность в каждой точке пропорциональна квадрату расстояния от точки до плоскости, проходящей через вершину конуса параллельно основанию, а в центре основания равна γ_0.

6.68. Найти массу и среднюю плотность сферического слоя между сферами $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$, $x^2 + y^2 + z^2 = 4a^2$, если плотность в каждой точке пропорциональна квадрату расстояния от точки до начала координат, а наибольшее значение плотности равно γ_0.

6.69. Найти координаты центра масс однородного тела, ограниченного параболоидом $z = \frac{H}{R^2}(x^2+y^2)$ и плоскостью $z = H$.

6.70. Найти координаты центра масс однородного тела, ограниченного конусом $z = \frac{H}{R}\sqrt{x^2+y^2}$ и плоскостью $z = H$.

6.71. Найти момент инерции однородного сегмента параболоида вращения с радиусом основания R и высотой H относительно его оси вращения.

6.72. Найти момент инерции однородного шара радиуса R относительно его диаметра, если плотность в каждой точке пропорциональна расстоянию от точки до центра шара, а на поверхности шара равна γ_0.

4. Несобственные кратные интегралы по неограниченной области

Пусть неотрицательная функция $f(x, y)$ непрерывна в неограниченной области G, тогда полагают

$$\iint\limits_G f(x,y)dxdy = \lim_{R\to+\infty}\iint\limits_{G_R} f(x,y)dxdy, \tag{6.12}$$

где G_R — ограниченная область, являющаяся пересечением области G и круга радиуса R с центром в начале координат. Если предел слева существует и конечен, то *несобственный интеграл* $\iint\limits_G f(x,y)dxdy$ называется *сходящимся*, в противном случае — *расходящимся*.

Вместо кругов радиуса R могут быть взяты расширяющиеся прямоугольники $|x| \le a$, $|y| \le b$, $a, b \to +\infty$ или другая система ограниченных расширяющихся областей. При этом сходимость или расходимость и значение несобственного кратного интеграла не зависят от выбора системы областей. Аналогично определяется тройной интеграл по неограниченной пространственной области.

ПРИМЕР 6.14. Вычислить несобственный интеграл $\iint\limits_G \frac{dxdy}{x^4+y^2}$, где G — область, определяемая неравенствами $x \ge 1$, $y \ge x^2$.

◀ Здесь удобно взять систему расширяющихся прямоугольников $0 \le x \le a$, $0 \le y \le b$, причем $b \ge a^2$, $a \to +\infty$, $b \to +\infty$ (рис. 6.14). Тогда

$$\iint\limits_G \frac{dxdy}{x^4+y^2} = \lim_{\substack{a\to+\infty\\ b\to+\infty}} \int_1^a dx \int_{x^2}^b \frac{dy}{x^4+y^2} = \lim_{\substack{a\to+\infty\\ b\to+\infty}} \int_1^a \left(\frac{1}{x^2}\operatorname{arctg}\frac{y}{x^2}\Big|_{x^2}^b\right)dx =$$

$$= \lim_{a\to+\infty}\int_1^a \frac{1}{x^2}\left(\lim_{b\to+\infty}\left(\operatorname{arctg}\frac{b}{x^2}-\frac{\pi}{4}\right)\right)dx = \frac{\pi}{4}\lim_{a\to+\infty}\int_1^a \frac{1}{x^2}dx = \frac{\pi}{4}\lim_{a\to+\infty}\left(-\frac{1}{x}\Big|_1^a\right) = \frac{\pi}{4}. ▶$$

В задачах 6.73–6.76 вычислить несобственные интегралы.

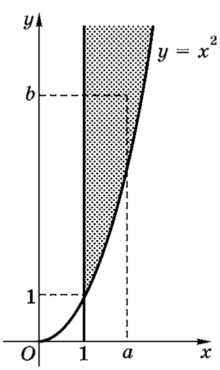


Рис. 6.14

6.73. $\iint\limits_G \frac{dxdy}{x^5y^3}$, где G — плоская область, определяемая неравенствами $x \ge 1$, $xy \ge 1$.

6.74. $\iiint\limits_G \frac{dxdydz}{(x^2+y^2+z^2)^3}$, где G — плоская область, определяемая неравенством $x^2 + y^2 \ge 1$ (внешность круга).

6.75. $\iiint\limits_G \frac{dxdydz}{(x^2+y^2+z^2)^2}$, где G — пространственная область, определяемая неравенством $x^2 + y^2 + z^2 \ge 1$ (внешность шара).

6.76. $\iiint\limits_G e^{-(x+y+z)}dxdydz$, где G — пространственная область, определяемая неравенствами $x \ge 0$, $y \ge 0$, $z \ge 0$.

ГЛАВА 7

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ

§ 7.1. ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ 1-ГО ПОРЯДКА

1. Основные понятия

Функциональное уравнение вида

$$F(x, y, y') = 0 \tag{7.1}$$

или

$$y' = f(x, y), \tag{7.2}$$

связывающее независимую переменную x, искомую функцию $y(x)$ и ее производную $y'(x)$, называется *обыкновенным дифференциальным уравнением 1-го порядка*. Часто встречается и такая форма записи дифференциального уравнения первого порядка:

$$M(x, y)dx + N(x, y)dy = 0, \tag{7.3}$$

где $M(x, y)$ и $N(x, y)$ — заданные функции переменных x и y.

Решением (*частным решением*) уравнения (7.1), (7.2) или (7.3) на интервале (a, b) называется любая дифференцируемая функция $y = \varphi(x)$, удовлетворяющая этому уравнению, т. е. обращающая его в тождество относительно $x \in (a, b)$. Уравнение $\Phi(x, y) = 0$, определяющее это решение как неявную функцию, называется *интегралом* (*частным решением*) дифференциального уравнения. На плоскости с фиксированной декартовой прямоугольной системой координат уравнение $\Phi(x, y) = 0$ определяет некоторую кривую, которая называется *интегральной кривой* дифференциального уравнения.

Функция $y = \varphi(x, C)$ называется *общим решением* уравнения (7.1), (7.2) или (7.3), если при любом допустимом значении параметра C она является частным решением этого уравнения и, кроме того, любое его частное решение может быть представлено в виде $y = \varphi(x, C_0)$ при некотором значении C_0 параметра C. Уравнение $\Phi(x, y, C) = 0$, определяющее общее решение как неявную функцию, называется *общим интегралом* дифференциального уравнения.

ПРИМЕР 7.1. Проверить подстановкой, что функция $y(x) = e^x - x - 1$ является решением дифференциального уравнения $y' = x + y$.

◄ Имеем $y = e^x - x - 1$, $y' = e^x - 1$ при всех $x \in \mathbb{R}$. Подставив в левую и правую части данного дифференциального уравнения полученные выражения, получим $e^x - 1 = \cancel{x} + (e^x - \cancel{x} - 1)$, т. е. тождество $y' \equiv x + y$, справедливое при всех $x \in \mathbb{R}$. ►

ПРИМЕР 7.2. Показать, что функция $y = \frac{1}{2}\sin x - \frac{1}{2}\cos x + Ce^{-x}$, $C \in \mathbb{R}$, является решением дифференциального уравнения $y' + y = \sin x$. Найти частное решение, удовлетворяющее условию $y(0) = 1$. (Найти интегральную кривую, проходящую через точку $M = (0, 1)$.)

◄ Найдя $y' = \frac{1}{2}\cos x + \frac{1}{2}\sin x - Ce^{-x}$ и подставив выражения для y и y' в данное уравнение, при любом значении C получим тождество

$$\frac{1}{2}\cos x + \frac{1}{2}\sin x - Ce^{-x} + \frac{1}{2}\sin x - \frac{1}{2}\cos x + Ce^{-x} \equiv \sin x.$$

Это означает, что функция $y = \frac{1}{2}\sin x - \frac{1}{2}\cos x + Ce^{-x}$, $C \in \mathbb{R}$, является решением данного дифференциального уравнения. Положив $x = 0$, $y = 1$, из уравнения $y(0) = 1$ найдем значение параметра $C = 3/2$ и, таким образом, получим частное решение $y = \frac{1}{2}\sin x - \frac{1}{2}\cos x + \frac{3}{2}e^{-x}$. Это означает, что частное решение определяет интегральную кривую, проходящую через точку $M = (0, 1)$. ►

ПРИМЕР 7.3. Показать, что $(x^2 - 1)(y^2 - 1) = C$ для любого фиксированного $C \in \mathbb{R}$ является интегралом дифференциального уравнения $x(y^2 - 1) + y(x^2 - 1)y' = 0$.

◄ Обозначим $\Phi(x, y, C) = (x^2 - 1)(y^2 - 1) - C = 0$. Дифференцируя по x левую и правую части равенства $(x^2 - 1)(y^2 - 1) - C = 0$ и учитывая, что C — постоянная, получим $((x^2 - 1)(y^2 - 1))' - C' = 0$ или $(x^2 - 1)'(y^2 - 1) + (x^2 - 1)(y^2 - 1)' = 0$. Отсюда следует $2x(y^2 - 1) + 2y(x^2 - 1)y' = 0$ или $x(y^2 - 1) + y(x^2 - 1)y' = 0$. ►

В задачах 7.1–7.4 показать, что при любом действительном значении параметра C заданные выражения определяют решения соответствующих дифференциальных уравнений.

7.1. $y = x\sqrt{1 - x^2}$, $yy' = x - 2x^3$.

7.2. $y = \dfrac{\sin x}{x}$, $xy' + y = \cos x$.

7.3. $y = 2 + C\sqrt{1 - x^2}$, $(1 - x^2)y' + xy = 2x$.

7.4. $e^{-y} - Cx = 1$, $y' = \dfrac{e^y - 1}{x}$.

В задачах 7.5–7.9 в заданном семействе выделить уравнение кривой, удовлетворяющей приведенному начальному условию.

7.5. $y(\ln|x^2 - 1| + C) = 1$, $y(0) = 1$.

7.6. $y(1 - Cx) = 1$, $y(1) = 0{,}5$.

7.7. $y = 2 + C\cos x$, $y(0) = -1$.

7.8. $x = y \cdot e^{Cy+1}$, $y(-1) = -1$.

7.9. $x = y\ln Cy$, $y(0) = 2$.

Пусть задано уравнение $\Phi(x, y, C) = 0$, определяющее на плоскости некоторое семейство кривых, зависящих от значений параметра C. Если составить систему двух уравнений $\begin{cases}\Phi(x, y, C) = 0,\\ \Phi'_x(x, y, C) = 0,\end{cases}$ то, исключив из этой системы параметр C, получим, вообще говоря, дифференциальное уравнение заданного семейства кривых.

ПРИМЕР 7.4. Найти дифференциальное уравнение для семейства кривых, заданного уравнением $x^2 + y^2 = Cx$.

◄ Обозначим $\Phi(x, y, C) = x^2 + y^2 - Cx$, тогда $\Phi'_x(x, y, C) = 2x + 2yy' - C$. Составляем систему уравнений $\begin{cases}x^2 + y^2 - Cx = 0,\\ 2x + 2yy' - C = 0.\end{cases}$ Исключая из нее параметр C, получим $x^2 + y^2 - (2x + 2yy')x = 0$ или $y^2 - x^2 - 2xyy' = 0$. Это и есть искомое дифференциальное уравнение. ►

В задачах 7.10–7.16 вывести дифференциальные уравнения данных семейств кривых:

7.10. Парабол $y = x^2 + 2Cx$.

7.11. Гипербол $y = C/x$.

7.12. Цепных линий $y = C\,\mathrm{ch}\,x$.

7.13. Гипербол $x^2 - y^2 = 2Cx$.

7.14. Парабол $y = C(x - C)^2$.

7.15. $y = Cx - C - C^2$.

7.16. $y = \sin(x + C)$.

Задачей Коши для дифференциального уравнения $y' = f(x, y)$ называется задача об отыскании частного решения этого уравнения, удовлетворяющего заданному начальному условию $y(x_0) = y_0$.

Если функция $f(x, y)$ уравнения (7.2) задана в некоторой области D плоскости Oxy и имеет в этой области ограниченную частную производную $f'_y(x,y)$, то существует единственное решение задачи Коши для уравнения (7.2). Точки области D, в которых нарушается единственность решения задачи Коши, называются *особыми точками* дифференциального уравнения.

Решение (интегральная кривая) уравнения в области D, в каждой точке которого нарушается единственность решения задачи Коши, называется *особым решением* (*особой интегральной кривой*) этого уравнения. Особое решение не может быть получено из общего ни при каких значениях C (включая и $C = \pm\infty$).

Огибающая семейства интегральных кривых, определяемых общим решением $y = \varphi(x, C)$ или общим интегралом $\Phi(x, y, C) = 0$, является особой интегральной кривой. Она находится путем исключения, если это возможно, параметра C из системы двух уравнений

$$\begin{cases} y = \varphi(x,C), \\ 0 = \varphi'_C(x,C) \end{cases} \quad \text{или} \quad \begin{cases} \Phi(x,y,C) = 0, \\ \Phi'_C(x,y,C) = 0. \end{cases}$$

Найденную таким путем функцию следует подставить в данное дифференциальное уравнение и убедиться, что она является решением.

ПРИМЕР 7.5. Найти особые решения уравнения $y' = \sqrt{1 - y^2}$, зная его общее решение $y = \sin(x + C)$, $|x + C| \le \frac{\pi}{2}$.

◄ Составим систему уравнений

$$\begin{cases} y = \sin(x + C), \\ 0 = \cos(x + C), \end{cases} \quad |x + C| \le \frac{\pi}{2}.$$

Исключая C, найдем две функции $y = \pm 1$, которые, очевидно, являются решениями данного уравнения и не получаются из общего решения ни при каких значениях C. Следовательно, $y = \pm 1$ — особые решения. ►

В задачах 7.17–7.20 найти особые решения дифференциальных уравнения, зная их общие решения.

7.17. $y' = 4x\sqrt{y - 1}$, $y = (x^2 + C)^2 + 1$.

7.18. $xy'^2 + 2xy' - y = 0$, $(y - C)^2 = 4Cx$.

7.19. $y = y'^2 - xy' + \dfrac{x^2}{2}$, $y = \dfrac{x^2}{2} + Cx + C^2$.

7.20. $y'^3 = 4y(xy' - 2y)$, $y = C(x - C)^2$.

2. Аналитический метод решения уравнений 1-го порядка

Аналитический метод решения уравнения 1-го порядка (7.1), (7.2) или (7.3) предусматривает приведение его к виду уравнения с разделенными переменными:

$$g(y)dy = f(x)dx. \tag{7.4}$$

Уравнение (7.3) можно рассматривать как тождество, так как его левая часть зависит только от y, а правая — только от x. Следовательно, интегрируя обе части (7.4), получаем

$$\int g(y)dy = \int f(x)dx + C, \quad C \in \mathbb{R}.$$

ПРИМЕР 7.6. Найти общее решение уравнения $ydy + dx = xdx + dy$.

◀ Приведя уравнение к виду $(y - 1)dy = (x - 1)dx$ и проинтегрировав обе его части, находим

$$\int (y-1)dy = \int (x-1)dx + C, \text{ где } C \in \mathbb{R}, \text{ или } \frac{y^2}{2} - y = \frac{x^2}{2} - x + C, \ C \in \mathbb{R}.$$

Отсюда получаем $(y - 1)^2 - (x - 1)^2 = C_1$, где $C_1 = 2C$ так же, как и C, есть произвольная постоянная. Следовательно, общий интеграл исходного уравнения имеет вид

$$(y^2 - 1) - (x^2 - 1) = C, \quad C \in \mathbb{R}. \ ►$$

В задачах 7.21–7.26 найти общие решения дифференциальных уравнений.

7.21. $(y^2 + 1)dy + dx = (2x - x^2)dx + 2ydy.$

7.22. $\dfrac{dy}{1+y^2} + \dfrac{dx}{1+x^2} = 0.$

7.23. $ydy - \dfrac{e^x}{1+e^x}dx = 0.$

7.24. $\dfrac{ydy}{\sqrt{1+y^2}} = \dfrac{xdx}{\sqrt{1+4x^2}}.$

7.25. $2(ydy - xdx) = \dfrac{1}{y^2}dy - \dfrac{1}{x^2}dx.$

7.26. $\dfrac{dy}{y\ln y} - \dfrac{dx}{\sin x} = 0.$

В задачах 7.27–7.30 найти частные решения дифференциальных уравнений, удовлетворяющие заданным начальным условиям.

7.27. $\dfrac{dy}{y} = \dfrac{dx}{\cos x}, \ y(0) = 1.$

7.28. $e^{1-2x+x^2}(1-x)dx + \operatorname{ctg} y\,dy = 0, \ y(1) = \dfrac{\pi}{2}.$

7.29. $y^2dy - \dfrac{e^x dx}{1+e^{2x}} = 0, \ y(0) = 0.$

7.30. $dx - \dfrac{\ln y}{y}dy = 0, \ y(2) = 1.$

Ниже, в пунктах 3–8 приведены простейшие типы дифференциальных уравнений 1-го порядка, каждый из которых может быть представлен в виде уравнения с разделенными переменными (7.4) и, следовательно, проинтегрирован или сведен к нему.

3. Уравнения с разделяющимися переменными

Пусть в уравнении (7.2) функция $f(x, y)$ может быть разложена на множители, каждый из которых зависит только от одной переменной, т. е.

$$\frac{dy}{dx} = f_1(x)f_2(y),$$

или в уравнении (7.3) коэффициенты при dx и dy могут быть представлены в виде $M(x, y) = M_1(x)M_2(y)$, $N(x, y) = N_1(x)N_2(y)$, т. е.

$$M_1(x)M_2(y)dx + N_1(x)N_2(y)dy = 0.$$

Тогда первое уравнение делением обеих его частей на $f_2(y)$, а второе — делением на $N_1(x)M_2(y)$ соответственно приводятся к виду (7.3) уравнения с разделенными переменными:

$$\frac{1}{f_2(y)}dy = f_1(x)dx,\ \ \frac{N_2(y)}{M_2(y)}dy = -\frac{M_1(x)}{N_1(x)}dx,$$

и называются уравнениями с *разделяющимися переменными*. Интегрируя левые части этих уравнений по y, а правые по x, приходим в каждом из них к общему интегралу исходного дифференциального уравнения.

Приведение исходного дифференциального уравнения 1-го порядка к виду (7.3) с разделенными переменными не всегда осуществимо эквивалентными преобразованиями. Поэтому необходимо следить за возможной потерей конкретных решений.

Если в уравнении с разделяющимися переменными $y' = f_1(x)f_2(y)$ функция $f_2(y)$ имеет действительный корень y_0, т. е. $f_2(y_0) = 0$, то функция $y(x) = y_0$ является решением уравнения (в чем легко убедиться непосредственной подстановкой). При делении обеих частей уравнения на $f_2(y)$ решение $y(x) = y_0$ может быть потеряно.

Аналогично, при интегрировании уравнения $M_1(x)M_2(y)dx + N_1(x)N_2(y)dy = 0$ могут быть потеряны интегральные кривые $x = x_0$ и $y(x) = y_0$, где x_0 — действительный корень уравнения $N_1(x) = 0$, а y_0 — действительный корень уравнения $M_2(y) = 0$.

Поэтому, получив указанным выше методом разделения переменных общий интеграл уравнения, необходимо проверить, входят ли в его состав (при подходящих числовых значениях параметра C) упомянутые решения. Если входят, то потери решений нет. Если не входят, то в окончательном ответе кроме общего интеграла следует указать и эти решения.

ПРИМЕР 7.7. Найти общее решение уравнения $y' = y$.

◄ Данное уравнение $\frac{dy}{dx} = y$ при условии, что $y \neq 0$, преобразуем к виду $\frac{dy}{y} = dx$.

Интегрируя левую и правую части полученного уравнения, имеем $\ln|y| = x + C$. Отсюда следует, что

$$|y| = e^{x+C} = e^C e^x, \text{ где } C \in \mathbb{R}, \text{ или } |y| = C_1 e^x, \text{ где } C_1 = e^C,\ C_1 > 0.$$

Освобождаясь от модуля, получим $y = \pm C_1 e^x$ или $y = C_2 e^x$, где $C_2 = \mathbb{R}\backslash\{0\}$.

Проверкой убеждаемся, что $y = 0$ также является решением. Следовательно, решением уравнения являются функции $y = C_2 e^x$, где $C_2 = \mathbb{R}\backslash\{0\}$, и $y = 0$. Заметим, что решение $y = 0$ получается из формулы общего решения, если снять ограничение $C_2 \neq 0$. Значит, решением данного уравнения будут все функции вида $y = Ce^x$, где $C \in \mathbb{R}$. ►

ПРИМЕР 7.8. Найти общее решение уравнения $x(y^2 - 1)dx + y(x^2 - 1)dy = 0$.

◄ Разделив данное уравнение на $(x^2 - 1)(y^2 - 1) \neq 0$, получим $\frac{xdx}{x^2-1} + \frac{ydy}{y^2-1} = 0$ или

$\frac{ydy}{y^2-1} = -\frac{xdx}{x^2-1}$. Интегрируем:

$$\int\frac{ydy}{y^2-1} = \int\left(-\frac{x}{x^2-1}\right)dx + C, \text{ где } C \in \mathbb{R}, \text{ или } \frac{1}{2}\ln|y^2-1| = -\frac{1}{2}\ln|x^2-1| + C,\ C \in \mathbb{R}.$$

Отсюда получаем $y^2-1=\pm\dfrac{e^{2C}}{x^2-1}$, $C\in\mathbb{R}$, или $(x^2-1)(y^2-1)=C_1$, $C_1\in\mathbb{R}\backslash\{0\}$.

Дополнительные решения $x=\pm1$, $y=\pm1$, определяемые из условия $(x^2-1)(y^2-1)=0$, получаются из общего интеграла при $C_1=0$. Следовательно, общий интеграл данного уравнения имеет вид $(x^2-1)(y^2-1)=C$, $C\in\mathbb{R}$. ►

В задачах 7.31–7.42 найти общие решения дифференциальных уравнений.

7.31. $y'=\dfrac{x}{y}$.

7.32. $yy'+x=0$.

7.33. $y'=e^{x+y}$.

7.34. $y'=e^{x+y}+e^{x-y}$.

7.35. $y'=\operatorname{tg}x\cdot\operatorname{tg}y$.

7.36. $xy\,dx+\sqrt{1-x^2}\,dy=0$.

7.37. $\dfrac{\operatorname{tg}y}{\cos^2x}dx+\dfrac{\operatorname{tg}x}{\cos^2y}dy=0$.

7.38. $(1+x)y\,dx+(1-y)x\,dy=0$.

7.39. $(\sqrt{xy}-\sqrt{x})dx+(\sqrt{xy}+\sqrt{y})dy=0$.

7.40. $y'+\sin(x+y)=\sin(x-y)$.

7.41. $y'=\sqrt{\dfrac{a^2-y^2}{a^2-x^2}}$.

7.42. $x^2(1-y)y'+y^2+xy^2=0$.

В задачах 7.43–7.46 для заданных уравнений найти частные решения, удовлетворяющие указанным условиям.

7.43. $y'\cos x=\dfrac{y}{\ln y}$, $y(0)=1$.

7.44. $(1+x^2)dy+y\,dx=0$, $y(1)=1$.

7.45. $x\sqrt{1+y^2}+y\sqrt{1+x^2}\dfrac{dy}{dx}=0$, $y(0)=1$.

7.46. $\dfrac{xy}{y'}=\ln y$, $y(2)=1$.

4. Однородные уравнения

Дифференциальное уравнение 1-го порядка называется однородным, если его можно привести к виду

$$y'=f\left(\frac{y}{x}\right) \tag{7.5}$$

или к виду

$$M(x,y)dx+N(x,y)dy=0, \tag{7.6}$$

где $M(x,y)$ и $N(x,y)$ — однородные функции одного порядка, т. е. существует такое $k\in\mathbb{Z}$, что $M(tx,ty)=t^kM(x,y)$ и $N(tx,ty)=t^kN(x,y)$ тождественно относительно x, y и $t\neq0$.

С помощью подстановки $\dfrac{y}{x}=u(x)$ однородные уравнения (7.5) и (7.6) преобразуются в уравнения с разделяющимися переменными.

ПРИМЕР 7.9. Решить уравнение $(y-x)dx+(y+x)dy=0$.

◄ Данное уравнение — уравнение вида (7.6), где функции $M(x,y)=y-x$ и $N(x,y)=y+x$ — однородные функции одного порядка. Поделив слагаемые уравнения на $y+x\neq0$ (предварительно проверив, что функция $y=-x$ не является решением), приведем уравнение к виду $\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{x-y}{x+y}$. Делаем замену $y=ux$, тогда $y'=\dfrac{du}{dx}x+u$.

Подставляя y и y' в уравнение, получим $x\dfrac{du}{dx}+u=\dfrac{x-ux}{x+ux}$, или $x\dfrac{du}{dx}=\dfrac{1-u}{1+u}-u$. Разделяем переменные: $\dfrac{dx}{x}=\dfrac{(1+u)du}{1-2u-u^2}$, и, интегрируя при $1-2u-u^2\neq 0$, имеем

$$\ln|Cx|=-\frac{1}{2}\ln|1-2u-u^2|,$$

где $C\in\mathbb{R}\setminus\{0\}$. Следовательно, $Cx=\dfrac{1}{\sqrt{|1-2u-u^2|}}$, $C\in\mathbb{R}\setminus\{0\}$.

Это решение можно преобразовать к виду $x^2|1-2u-u^2|=C_0$, $C_0\in(0,+\infty)$, или с учетом потерянных решений, которые получаются из уравнения $1-2u-u^2=0$, запишем общий интеграл $x^2(1-2u-u^2)=C_1$, $C_1\in\mathbb{R}$. Выполнив обратную замену, имеем $x^2-2xy-y^2=C$, $C\in\mathbb{R}$. ▶

Дифференциальные уравнения вида

$$\frac{dy}{dx}=f\left(\frac{ax+by+c}{a_1x+b_1y+c_1}\right) \tag{7.7}$$

в случае $\begin{vmatrix} a & b \\ a_1 & b_1 \end{vmatrix}\neq 0$ приводятся к однородным (или непосредственно к уравнениям с разделяющимися переменными) уравнениям с помощью замены переменных $x=u+m$, $y=v+n$, где m и n находятся из системы уравнений $\begin{cases} am+bn+c=0, \\ a_1m+b_1n+c_1=0. \end{cases}$

Так как $dx=du$, $dy=dv$, то уравнение (7.7) преобразуется к виду (7.5) относительно функции $v(u)$:

$$\frac{dv}{du}=f\left(\frac{au+bv+\overbrace{am+bn+c}^{=0}}{a_1u+b_1v+\underbrace{a_1m+b_1n+c_1}_{=0}}\right)=f\left(\frac{au+bv}{a_1u+b_1v}\right)=f\left(\frac{a+b\dfrac{v}{u}}{a_1+b_1\dfrac{v}{u}}\right)=\varphi\left(\frac{v}{u}\right).$$

Если определитель $\begin{vmatrix} a & b \\ a_1 & b_1 \end{vmatrix}=0$, то элементы его строк пропорциональны: $a_1=ka$, $b_1=kb$. Тогда, применяя подстановку $ax+by=z$, получаем $a_1x+b_1y=kz$. Таким образом, приходим к уравнению с разделяющимися переменными: $\dfrac{dz}{dx}=bf\left(\dfrac{z+c}{kz+c_1}\right)+a$.

В задачах 7.47–7.65 найти общие решения дифференциальных уравнений.

7.47. $y'=\dfrac{y}{x}+\dfrac{x}{y}$.

7.48. $y'=\dfrac{y}{x}+\cos\dfrac{y}{x}$.

7.49. $y'=\dfrac{x+y}{x-y}$.

7.50. $y'=\dfrac{y^2+xy-x^2}{y^2}$.

7.51. $y'=\dfrac{2xy}{x^2+y^2}$.

7.52. $y'=\dfrac{y(1+\ln y-\ln x)}{x}$.

7.53. $xy'-y=\dfrac{x}{\operatorname{arctg}(y/x)}$.

7.54. $xy'\ln\dfrac{y}{x}=x+y\ln\dfrac{y}{x}$.

7.55. $xyy' = y^2 + 2x^2$.

7.56. $(x+y)dx + xdy = 0$.

7.57. $xdy - ydx = \sqrt{x^2+y^2}\,dx$.

7.58. $(x^2+y^2)dx - 2xydy = 0$.

7.59. $(2\sqrt{yx} - y)dx + xdy = 0$.

7.60. $xy'\sin\dfrac{y}{x} + x = y\sin\dfrac{y}{x}$.

7.61. $3y\sin\dfrac{3x}{y}dx + \left(y - 3x\sin\dfrac{3x}{y}\right)dy = 0$.

7.62. $(8y+10x)dx + (5y+7x)dy = 0$.

7.63. $(2x - y + 1)dx + (2y - x - 1)dy = 0$.

7.64. $(x + y + 1)dx + (2x + 2y - 1)dy = 0$.

7.65. $x - y - 1 + (y - x + 2)y' = 0$.

В задачах 7.66–7.69 для заданных уравнений найти частные решения, удовлетворяющие указанным условиям.

7.66. $(y^2 - 3x^2)dy + 2xydx = 0,\ y(1) = -2$.

7.67. $xy' - y = x\,\mathrm{tg}\dfrac{y}{x},\ y(1) = \dfrac{\pi}{2}$.

7.68. $y' = 4 + \dfrac{y}{x} + \left(\dfrac{y}{x}\right)^2,\ y(1) = 2$.

7.69. $xy' = x \cdot e^{y/x} + y,\ y(1) = 0$.

5. Линейные уравнения

Дифференциальное уравнение $y' = f(x, y)$, разрешенное относительно производной, называется *линейным*, если его правая часть линейна относительно y:

$$y' = P(x)y + Q(x), \tag{7.8}$$

где $P(x)$ и $Q(x)$ — заданные функции. Если $Q(x) \equiv 0$, то уравнение (7.8) принимает вид $y' = P(x)y$, называется *линейным однородным* и является уравнением с разделяющимися переменными, и общее его решение имеет вид

$$y = Ce^{\int P(x)dx}, \tag{7.9}$$

где C — произвольная постоянная, а $\int P(x)dx$ — одна из первообразных функции $P(x)$.

Интегрирование линейного неоднородного уравнения (7.8) можно проводить *методом вариации постоянной*. В этом случае общее решение уравнения (7.8) ищется в виде

$$y = C(x)e^{\int P(x)dx}, \tag{7.10}$$

который получается из (7.9) заменой постоянной C функцией $C(x)$. Дифференцируя выражение (7.10) и подставляя в уравнение (7.8), получим для неизвестной функции $C(x)$ уравнение с разделяющимися переменными:

$$C'(x) = Q(x)e^{-\int P(x)dx}.$$

Его общее решение:

$$C(x) = \int Q(x)e^{-\int P(x)dx}dx + C,$$

где C — произвольная постоянная, а $\int Q(x)e^{-\int P(x)dx}dx$ — одна из первообразных функции $Q(x)e^{-\int P(x)dx}$. Подставляя найденное выражение для $C(x)$ в формулу (7.10), получаем общее решение линейного уравнения (7.8):

$$y = e^{\int P(x)dx}\left(\int Q(x)e^{-\int P(x)dx} + C\right). \tag{7.11}$$

ПРИМЕР 7.10. Решить уравнение $y'\cos x - y\sin x = \cos^2 x$.

◄ Перепишем уравнение в виде $\frac{dy}{dx} - y\,\mathrm{tg}\,x = \cos x$. Это уравнение является линейным неоднородным. Находим общее решение соответствующего ему однородного уравнения $\frac{dy}{dx} - y\,\mathrm{tg}\,x = 0$. Для этого приводим его к виду $\frac{dy}{y} = \mathrm{tg}\,x\,dx$ и интегрируем. В итоге получаем $y = \frac{C}{\cos x}$, $C \in \mathbb{R}$.

Теперь ищем общее решение исходного уравнения в виде $y = \frac{C(x)}{\cos x}$. Находим производную:

$$y' = \frac{C'(x)\cos x + C(x)\sin x}{\cos^2 x},$$

и, подставляя в уравнение $\frac{dC}{dx}\cdot\frac{1}{\cos x} + C\frac{\sin x}{\cos^2 x} - \frac{C}{\cos x}\cdot\mathrm{tg}\,x = \cos x$, получаем $\frac{dC}{dx} = \cos^2 x$.

Отсюда $C = \int \cos^2 x\,dx + C_1 = \frac{1}{2}x + \frac{\sin 2x}{4} + C_1$, $C_1 \in \mathbb{R}$, и, следовательно, искомое решение имеет вид $y = \frac{1}{\cos x}\left(\frac{1}{2}x + \frac{\sin 2x}{4} + C\right)$, $C \in \mathbb{R}$. ►

В задачах 7.70–7.81 найти общие решения дифференциальных уравнений.

7.70. $y'\cos x + y\sin x = 1.$

7.71. $y' + \frac{2}{x}y = x^2.$

7.72. $y'x - x^2 - y = 0.$

7.73. $y' - \frac{2y}{x+1} = (x+1)^3.$

7.74. $y' + y\cos x = \frac{1}{2}\sin 2x.$

7.75. $(x - y^2)dx + 2xy\,dy = 0.$

7.76. $xy' - x^2 - y = 0.$

7.77. $y' + \frac{1-2x}{x^2}y = 1.$

7.78. $y' = 2xy - x^3 + x.$

7.79. $y' - \frac{n}{x}y = e^x x^n.$

7.80. $(x - 2xy - y^2)dy + y^2 dx = 0.$

7.81. $e^{x^2}(y' + 2xy) = 2x.$

Дифференциальное уравнение 1-го порядка вида

$$y' = P(x)y + Q(x)y^m, \tag{7.12}$$

где $m \neq 0$, $m \neq 1$ (при $m = 0$ уравнение (7.12) — линейное, а при $m = 1$ — уравнение с разделяющимися переменными) называется *уравнением Бернулли*. Его можно проинтегрировать с помощью подстановки $y(x) = u(x)v(x)$ или свести к линейному подстановкой $z = y^{1-m}$. Следует учесть, что при $m > 1$ может быть потеряно решение $y = 0$.

ПРИМЕР 7.11. Решить уравнение $y'=\frac{y}{2x}-\frac{1}{2y}$.

◀ Это уравнение Бернулли с $m = -1$. Полагаем $z = y^2$ и получаем линейное уравнение $z'=\frac{z}{x}-1$. Решая соответствующее однородное уравнение $z'=\frac{z}{x}$, находим $z = Cx$. Отсюда методом вариации постоянной, т. е. полагая $z = C(x)x$, получаем общее решение линейного уравнения в виде $z=x\ln\frac{C}{x}$, $C \in \mathbb{R}$, или, окончательно,

$$y^2=x\ln\frac{C}{x},\ C\in\mathbb{R}. ▶$$

В задачах 7.82–7.89 найти общие решения дифференциальных уравнений.

7.82. $y'-\frac{y}{x}=x^2y^2$.

7.83. $y'+y=xy^3$.

7.84. $3y\cos^2 x\,dx+\sin x\,dy=y^2\sin^2 x\,dx$.

7.85. $y'+\frac{y}{x+1}+y^2=0$.

7.86. $xy'-4y=x^2\sqrt{y}$.

7.87. $y'+xy=x^3y^3$.

7.88. $x^3y'-x^2y-y^2=0$.

7.89. $x^2(x-1)y'-x(x-2)y=y^2$.

6. Уравнение в полных дифференциалах

Дифференциальное уравнение 1-го порядка вида

$$M(x,\,y)dx + N(x,\,y)dy = 0 \tag{7.13}$$

называется *уравнением в полных дифференциалах*, если левая часть этого уравнения представляет полный дифференциал некоторой функции $U(x, y)$, т. е.

$$M(x,y)=\frac{\partial U(x,y)}{\partial x},\ \ N(x,y)=\frac{\partial U(x,y)}{\partial y}. \tag{7.14}$$

Для того чтобы уравнение (7.13) было уравнением в полных дифференциалах, необходимо и достаточно, чтобы выполнялось условие

$$\frac{\partial M(x,y)}{\partial y}=\frac{\partial N(x,y)}{\partial x}. \tag{7.15}$$

Если уравнение (7.13) было уравнением в полных дифференциалах, то оно может быть записано в виде $dU(x, y) = 0$. Общий интеграл этого уравнения: $U(x, y) = C$.

Функция $U = U(x, y)$ может быть найдена следующим образом. Интегрируя равенство $\frac{\partial U}{\partial x}=M(x,y)$ по x при фиксированном y и замечая, что произвольная постоянная в этом случае может зависеть от y, имеем

$$U(x,y)=\int M(x,y)dx+\varphi(y). \tag{7.16}$$

Затем из равенства

$$\frac{\partial}{\partial y}\int M(x,y)dx+\varphi'(y)=N(x,y)$$

находим функцию $\varphi(y)$, подставив которую в (7.16), получим $U(x, y)$.

Очевидно, что искомая функция $U(x, y)$ определена с точностью до произвольной аддитивной постоянной. Для записи общего интеграла исходного уравнения достаточно выбрать одну из функций получаемого семейства.

ПРИМЕР 7.12. Решить уравнение $(y^3 - x)dy - y\,dx = 0$, предварительно убедившись, что это есть уравнение в полных дифференциалах.

◀ Проверяем условие (7.15):

$$\frac{\partial N(x,y)}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}(y^3 - x) = -1, \quad \frac{\partial M(x,y)}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y}(-y) = -1.$$

Условие (7.15) выполнено, следовательно, заданное уравнение есть уравнение в полных дифференциалах. Найдем функцию $U(x, y)$. Интегрируем по x при постоянном y равенство $\frac{\partial U}{\partial x} = M(x,y) = -y$, получим

$$U(x,y) = \int(-y)dx + \varphi(y) = -xy + \varphi(y).$$

Подставляя полученное значение в равенство $\frac{\partial U}{\partial y} = N(x,y) = y^3 - x$, имеем $-x + \varphi'(y) = y^3 - x$, откуда $\varphi(y) = \int y^3 dy = \frac{y^4}{4} + C_1$. Положив, например, $C_1 = 0$, находим $U(x,y) = \frac{y^4}{4} - xy$. Следовательно, общий интеграл заданного уравнения имеет вид $\frac{y^4}{4} - xy = C,\ C \in \mathbb{R}$. ▶

В задачах 7.90–7.101 решить дифференциальные уравнения, предварительно убедившись, что это есть уравнения в полных дифференциалах.

7.90. $(2x - y)dx + (2y - x)dy = 0$.

7.91. $(y - 3x^2)dx = (4y - x)dy$.

7.92. $2(3xy^2 + 2x^3)dx + 3(2x^2y + y^2)dy = 0$.

7.93. $\dfrac{x\,dx + (2x + y)dy}{(x + y)^2} = 0$.

7.94. $\left(\dfrac{1}{x^2} + \dfrac{3y^2}{x^4}\right)dx = \dfrac{2y\,dy}{x^3}$.

7.95. $x\,dx + y\,dy = \dfrac{y\,dx - x\,dy}{x^2 + y^2}$.

7.96. $\dfrac{2x}{y^3}dx + \dfrac{y^2 - 3x^2}{y^4}dy = 0$.

7.97. $xy'\cos y + \sin y = 0$.

7.98. $(x\cos y + \cos x)y' - y\sin x + \sin y = 0$.

7.99. $(x \cdot e^y + e^x)y' = -e^y - ye^x$.

7.100. $(2x - ye^{-x})dx + e^{-x}dy = 0$.

7.101. $\dfrac{x\,dx + y\,dy}{\sqrt{1 + x^2 + y^2}} + \dfrac{y\,dx - x\,dy}{x^2 - y^2} = 0$.

Для решения некоторых уравнений можно применять метод выделения полных дифференциалов, используя известные формулы

$$d(xy) = y\,dx + x\,dy, \quad d(y^2) = 2y\,dy,$$

$$d\left(\frac{x}{y}\right)=\frac{y\,dx-x\,dy}{y^2},\quad d(\ln y)=\frac{dy}{y},\quad \text{и т. д.}$$

ПРИМЕР 7.13. Решить уравнение $y\,dx-(4x^2y+x)dy=0$.

◀ Преобразуем уравнение к виду $y\,dx-x\,dy=4x^2y\,dy$. Заметим, что

$$y\,dx-x\,dy=-x^2d\left(\frac{y}{x}\right).$$

Тогда деля уравнение на $-x^2$, получим

$$\frac{x\,dy-y\,dx}{x^2}=-4y\,dy,\ \text{ или }\ d\left(\frac{y}{x}\right)=d(-2y^2).$$

Это — уравнение в полных дифференциалах. Интегрируя непосредственно, получаем общий интеграл уравнения $\frac{y}{x}+2y^2=C$.

Кроме того, при делении на x^2 было потеряно решение $x=0$. ▶

В задачах 7.102–7.106 решить дифференциальные уравнения, выделяя в них полные дифференциалы.

7.102. $\frac{x\,dx+y\,dy}{\sqrt{x^2+y^2}}+\frac{x\,dy-y\,dx}{x^2}=0.$

7.103. $(2x^2y^2+y)dx+(x^3y-x)dy=0$.

7.104. $(2x^2y^3-1)y\,dx+(4x^2y^3-1)x\,dy=0$.

7.105. $(y^2+x^2-a)x\,dx+(y^2+x^2+a)y\,dy=0$.

7.106. $(2x^3y^2-y)dx+(2x^2y^3-x)dy=0$.

7. Уравнения, не разрешенные относительно производной

Дифференциальные уравнения вида $F(x, y, y')=0$ можно решать следующими методами.

а) Разрешить уравнение относительно y', т. е. из уравнения $F(x, y, y')=0$ выразить y' через x и y. Получится одно или несколько уравнений вида $y'=f(x, y)$. Каждое из них далее нужно решить.

б) В некоторых случаях применим *метод введения параметра*. Пусть дифференциальное уравнение $F(x, y, y')=0$ можно разрешить относительно y, т. е. записать в виде $y=f(x, y')$. Введя параметр

$$p=\frac{dy}{dx}=y',\tag{7.17}$$

получим

$$y=f(x, p).\tag{7.18}$$

Взяв полный дифференциал от обеих частей равенства (7.18) и заменив dy на pdx (в силу (7.17)), получим уравнение вида

$$M(x, p)dx+N(x, p)dp=0.$$

Если решение этого уравнения найдено в виде $x=\varphi(p)$, то, воспользовавшись равенством (7.18), получим решение исходного уравнения в параметрической записи: $x=\varphi(p)$, $y=f(\varphi(p), p)$.

Уравнения вида $x = f(y, y')$ решаются тем же методом.

ПРИМЕР 7.14. Решить уравнение $y'^2 + x = 2y$.

◀ Разрешив уравнение относительно y, получим $y=\frac{x+y'^2}{2}$. Вводим параметр $p = y'$:

$$y=\frac{x}{2}+\frac{p^2}{2}. \tag{7.19}$$

Берем полный дифференциал от обеих частей равенства и заменяем dy на $p\,dx$ (в силу (7.17)): $dy=\frac{1}{2}dx+pdp$, $pdx=\frac{1}{2}dx+pdp$. Решаем полученное уравнение. Переносим члены с dx влево, с dp вправо: $dx\left(p-\frac{1}{2}\right)=pdp$.

Если $p\neq\frac{1}{2}$, то сокращаем в уравнении на $p-\frac{1}{2}$:

$$dx=\frac{2p}{2p-1}dp,\ \ x=p+\frac{1}{2}\ln|2p-1|+C.$$

Подставляя это выражение в (7.19), получаем решение в параметрической форме:

$$x=p+\frac{1}{2}\ln|2p-1|+C,\ \ y=\frac{p^2}{2}+\frac{p}{2}+\frac{1}{4}\ln|2p-1|+\frac{C}{2}.$$

Если $p = 1/2$, то, подставляя это значение в (7.19), получаем еще решение $8y = 4x + 1$. ▶

В задачах 7.107–7.114 решить дифференциальные уравнения.

7.107. $y=y'^2+4y'^3$.

7.108. $y=y'\sqrt{1+y'^2}$.

7.109. $y=(y'-1)e^{y'}$.

7.110. $y=\frac{y'^2}{2}+2xy'+x^2$.

7.111. $x=\frac{y}{y'}+\frac{1}{y'^2}$.

7.112. $x=y'^3-y'+2$.

7.113. $x = y'\cos y'$.

7.114. $y' = e^{xy'/y}$.

Частным случаем уравнений вида (7.18) является так называемое *уравнение Лагранжа*:

$$y = x\cdot f(y') + \varphi(y'). \tag{7.20}$$

Действительно, заменой $p = y'$ уравнение (7.20) приводится к виду $y = x\cdot f(p) + \varphi(p)$.

8. Геометрические задачи, приводящие к появлению дифференциальных уравнений 1-го порядка

В задачах геометрии, в которых требуется найти уравнение кривой по заданному свойству ее касательной, нормали и площади криволинейной трапеции, используется геометрическое истолкование производной (угловой коэффициент касательной) и интеграла с переменным пределом (площадь криволинейной трапеции с подвижной ограничивающей ординатой), а также следующие формулы для определения длин отрезков касательной t, нормали n, подкасательной s_t и поднормали s_n (см. рис. 7.1):

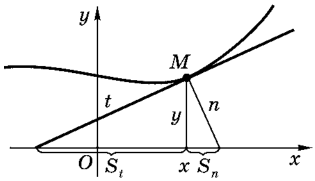


Рис. 7.1

$$t=\left|\frac{y}{y'}\sqrt{1+y'^2}\right|,\ n=\left|y\sqrt{1+y'^2}\right|,\ s_t=\left|\frac{y}{y'}\right|,\ s_n=|yy'|.$$

ПРИМЕР 7.15. Найти уравнение кривой, проходящей через начало координат, если в каждой ее точке $M = (x, y)$ подкасательная s_t в k раз меньше поднормали s_n.

◀ Пусть $y = f(x)$ — уравнение искомой кривой. Используя выражения подкасательной s_t и поднормали s_n, сразу получаем дифференциальное уравнение

$$|yy'|=k\left|\frac{y}{y'}\right|,\ \text{или}\ \ y'^2=k.$$

Интегрируя это уравнение и учитывая начальное условие $y(0) = 0$, получаем искомые уравнения

$$y=\pm\sqrt{k}\cdot x$$

(две прямые). ▶

ПРИМЕР 7.16. Найти уравнение кривой, проходящей через точку с координатами (1, 1), если для любого отрезка $[1, x]$ площадь криволинейной трапеции, ограниченной соответствующей дугой этой кривой, на 2 больше удвоенного произведения координат точки $M = (x, y)$ кривой ($x > 0$, $y > 0$).

◀ Согласно условию задачи имеем $\int\limits_1^x y(t)dt+2=2xy(x)$. Дифференцируя это равенство по x, получаем дифференциальное уравнение $y = 2(y + xy')$, или $y'=-\dfrac{y}{2x}$. Интегрируя это уравнение и учитывая начальное условие $y(1) = 1$, находим уравнение искомой кривой: $y=\dfrac{1}{\sqrt{x}}$. ▶

7.115. Найти уравнение кривой, проходящей через точку с координатами $(\sqrt{2},0)$, если сумма длин ее касательной и подкасательной равна произведению координат точки касания.

7.116. Найти уравнение кривой, проходящей через точку с координатами (1, 2), если ее подкасательная вдвое больше абсциссы точки касания.

7.117. Найти уравнение кривой, проходящей через точку с координатами (0, 5, −1), если длина отрезка полуоси абсцисс, отсекаемого ее касательной, равна квадрату абсциссы точки касания.

7.118. Найти уравнения кривых, у которых длина отрезка нормали постоянна и равна a.

7.119. Найти уравнения кривых, у которых поднормаль имеет постоянную длину a.

7.120. Найти уравнение кривой, проходящей через точку с координатами (0, 2), если площадь криволинейной трапеции, ограниченной дугой этой кривой, в два раза больше длины соответствующей дуги.

7.121. Найти уравнение кривой, проходящей через точку с координатами (1, 0), если длина отрезка оси абсцисс, отсекаемого ее нормалью, на 2 больше абсциссы точки касания.

7.122. Найти уравнение кривой, проходящей через точку с координатами (1, 1), если длина отрезка оси абсцисс, отсекаемого любой ее касательной, равна длине этой касательной.

7.123. Найти уравнение кривой, проходящей через точку с координатами (3, 1), если длина отрезка, отсекаемого любой ее касательной на оси ординат, равна поднормали.

7.124. Найти уравнение кривой, проходящей через начало координат, если середина отрезка ее нормали от любой точки кривой до оси Ox лежит на параболе $2y^2 = x$.

7.125. Найти уравнение кривой, проходящей через точку с координатами (1, 0), если площадь трапеции, образованной касательной, осями координат и ординатой точки касания, постоянна и равна 1,5.

7.126. Найти уравнение кривой, проходящей через точку с координатами (1, 2), если произведение абсциссы точки касания на абсциссу точки пересечения нормали с осью Ox равна удвоенному квадрату расстояния от начала координат до точки касания.

При составлении дифференциальных уравнений 1-го порядка в физических задачах часто применяется *метод дифференциалов*, по которому приближенные соотношения между малыми приращениями величин заменяются соотношениями между их дифференциалами. Такая замена не отражается на результатах, так как дело сводится к отбрасыванию бесконечно малых высших порядков. Другим методом составления дифференциальных уравнений является использование физического смысла производной как скорости протекания процесса.

ПРИМЕР 7.17. В резервуаре первоначально содержится A кг вещества, растворенного в B литрах воды. Затем каждую минуту в резервуар поступает M литров воды и вытекает N литров раствора ($M \geq N$), причем однородность раствора достигается путем перемешивания. Найти массу вещества в резервуаре через T минут после начала процесса.

◄ Обозначим через $x(t)$ массу вещества в резервуаре в момент времени t и через $x + \Delta x$ — в момент времени $t + \Delta t$ (время измеряется в минутах, момент времени $t = 0$ соответствует началу процесса). Заметим, что $\Delta x < 0$ при $\Delta t > 0$ (т. е. раствор «обедняется»).

Пусть $V(t)$ — объем смеси в момент времени t: $V(t) = B + Mt - Nt$.

Концентрация вещества в t равняется, очевидно, $\frac{x}{V}$. За бесконечно малый отрезок времени $[t, t + \Delta t]$ масса вещества изменяется на бесконечно малую величину Δx, для которой справедливо приближенное равенство

$$\Delta x \approx -\frac{x}{V} N \Delta t = -\frac{Nx}{B+(M-N)t}\Delta t.$$

Заменяя приращения Δx и Δt дифференциалами dx и dt, получаем дифференциальное уравнение

$$dx = -\frac{Nx}{B+(M-N)t}dt.$$

Интегрируя это уравнение с разделяющимися переменными и считая $M > N$, найдем общее решение:

$$x(t) = \frac{C}{(B+(M-N)t)^{N/(M-N)}}.$$

Используя начальное условие $x = A$ при $t = 0$, найдем частное решение:

$$x(t) = A \cdot \left(\frac{B}{B+(M-N)t}\right)^{N/(M-N)}.$$

Полагая $t = T$, получим ответ: $x(t) = A \cdot \left(\frac{B}{B+(M-N)T}\right)^{N/(M-N)}$. Случай $M = N$ требует отдельного рассмотрения. ►

7.127. Дно резервуара, вместимость которого 300 л, покрыто солью. Допуская, что скорость растворения соли пропорциональна разности между концентрацией в данный момент и концентрацией насыщенного раствора (1 кг соли на 3 л воды) и что данное количество чистой воды растворяет 1/3 кг соли в одну минуту, найти, сколько соли будет содержать раствор по истечении 1 часа.

7.128. Некоторое количество нерастворимого вещества содержит в своих порах 10 кг соли. Подвергая его действию 90 л воды, нашли, что в течение 1 часа растворилась половина содержавшейся в нем соли. Сколько соли растворилось бы в течение того же времени, если бы количество воды было удвоено? Скорость растворения пропорциональна количеству нерастворенной соли и разности между концентрацией раствора в данный момент и концентрацией насыщенного раствора (1 кг на 3 л).

7.129. Скорость распада радия пропорциональна наличному его количеству. В течение года из каждого грамма радия распадается 0,44 мг. Через сколько лет распадется половина имеющегося количества радия?

7.130. Материальная точка массой в 0,001 кг движется прямолинейно под действием силы, прямо пропорциональной времени, отсчитываемому от момента $t = 0$ и обратно пропорциональной скорости движения точки. В момент $t = 10$ с скорость равнялась 0,5 м/с, а сила — $4\cdot 10^{-5}$ Н. Какова будет скорость спустя минуту после начала движения?

7.131. Пуля входит в доску толщиной $h = 10$ см со скоростью $v_0 = 200$ м/с, а вылетает из доски, пробив ее, со скоростью $v_1 = 80$ м/с. Считая, что сила сопротивления доски движению пули пропорциональна квадрату скорости движения, найти время движения пули через доску.

7.132. Корабль замедляет свое движение под действием силы сопротивления воды, которая пропорциональна скорости корабля. Начальная скорость корабля 10 м/с, скорость его через 5 с станет 8 м/с. Когда скорость уменьшится до 1 м/с?

7.133. По закону Ньютона, скорость охлаждения какого-либо тела в воздухе пропорциональна разности между температурой T тела и температурой воздуха T_0. Если температура воздуха равна 20°С и тело в течение 20 мин охлаждается от 100°С до 60°С, то через сколько времени его температура понизится до 30°С?

7.134. Скорость истечения воды из сосуда через малое отверстие определяется формулой $v = 0{,}6\sqrt{2gh}$, где h — высота уровня воды над отверстием, g — ускорение свободного падения (принять $g = 10$ м/с^2). За какое время вытечет вся вода из цилиндрического бака диаметром $2R = 1$ м и высотой $H = 1{,}5$ м через отверстие в дне диаметром $2r = 0{,}05$ м?

7.135. Некоторое количество вещества, содержащее 3 кг влаги, было помещено в комнате вместимостью 100 м^3, воздух которой первоначально имел влажность 25%. Насыщенный воздух при той же температуре содержит 0,12 кг влаги на 1 м^3. Определить, сколько влаги осталось в веществе по истечении вторых суток, если известно, что в течение первых суток оно потеряло половину своей влаги.

7.136. Некоторое количество нерастворимого вещества, содержащее в своих порах 2 кг соли, подвергается действию 30 л воды. Через 5 мин 1 кг соли растворяется. Определить, через сколько времени растворится 99% первоначального количества соли.

7.137. Кирпичная стена имеет 30 см толщины. Найти зависимость температуры от расстояния точки от наружного края стены, если температура равна 20°C на внутренней и 0°C на внешней поверхности стены. Найти также количество тепла, которое стена (на 1 м^2) отдает наружу в течение суток.

§ 7.2. ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ ВЫСШИХ ПОРЯДКОВ

1. Основные понятия. Теорема Коши

Дифференциальное уравнение n-го порядка имеет вид

$$F(x, y, y', \ldots, y^{(n)}) = 0 \tag{7.21}$$

или

$$y^{(n)} = f(x, y, y', \ldots, y^{(n-1)}). \tag{7.22}$$

Задачей Коши для дифференциального уравнения (7.22) называется задача отыскания решения $y(x)$, удовлетворяющего заданным начальным условиям

$$y(x_0) = y_0,\ \ y'(x_0) = y_0',\ \ \ldots,\ \ y^{(n-1)}(x_0) = y_0^{(n-1)}. \tag{7.23}$$

Общим решением уравнения (7.21) или (7.22) называется такая функция $y = \varphi(x, C_1, \ldots, C_n)$, которая при любых допустимых значениях параметров $C_1, \ldots, C_n$ является решением этого дифференциального уравнения и для любой задачи Коши с условием (7.23) найдутся постоянные $C_1, \ldots, C_n$, определяемые из системы уравнений

$$\begin{cases} y_0 = \varphi(x_0, C_1, \ldots, C_n), \\ y_0' = \varphi'(x_0, C_1, \ldots, C_n), \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ y_0^{(n-1)} = \varphi^{(n-1)}(x_0, C_1, \ldots, C_n). \end{cases}$$

Уравнение

$$\Phi(x, y, C_1, \ldots, C_n) = 0, \tag{7.24}$$

определяющее общее решение как неявную функцию, называется *общим интегралом* дифференциального уравнения.

ТЕОРЕМА (существования и единственности решения задачи Коши). *Если дифференциальное уравнение* (7.22) *таково, что функция $f(x, y, y', \ldots, y^{(n-1)})$ в некоторой области D изменения своих аргументов непрерывна и имеет непрерывные частные* *производные* $\frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial y'}, \ldots, \frac{\partial f}{\partial y^{(n-1)}}$, *то для любой точки* $(x_0, y_0, y_0', \ldots, y_0^{(n-1)}) \in D$ *существует такой отрезок* $x_0 - h \le x \le x_0 + h$, *на котором существует и притом единственное решение этого уравнения, удовлетворяющее начальным условиям* (7.23).

ПРИМЕР 7.18. Показать, что функция $y = C_1 e^{C_2 x}$, $C_1, C_2 \in \mathbb{R}$, является решением дифференциального уравнения $yy'' = y'^2$.

◀ Находим производные функции $y' = C_1 C_2 e^{C_2 x}$, $y'' = C_1 C_2^2 e^{C_2 x}$. Подставив выражения y, y' и y'' в данное уравнение, получаем тождество

$$C_1 e^{C_2 x} \cdot C_1 C_2^2 e^{C_2 x} \equiv (C_1 C_2 e^{C_2 x})^2.$$

Следовательно, функция $y = C_1 e^{C_2 x}$ есть решение данного уравнения. ▶

ПРИМЕР 7.19. Определить, при каких начальных условиях существует единственное решение уравнения

$$y'' = \frac{y\sqrt{y'}}{x}.$$

◀ Функция $f(x, y, y') = \frac{y\sqrt{y'}}{x}$ и ее частная производная $\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\sqrt{y'}}{x}$ непрерывны при $x \ne 0$, $y' \ge 0$; частная производная $\frac{\partial f}{\partial y'} = \frac{y}{2x\sqrt{y'}}$ непрерывна при $x \ne 0$, $y' > 0$.

Следовательно, данное уравнение имеет единственное решение при $x_0 \ne 0$, $y'(x_0) > 0$. ▶

В задачах 7.138–7.141 определить, при каких начальных условиях существует единственное решение заданных уравнений.

7.138. $y'' = x + \sqrt{x^2 - y}$. **7.139.** $y'' = y' \ln y'$.

7.140. $y'' = \operatorname{tg} y + \sqrt[3]{x}$. **7.141.** $y'' - yy''' = \sqrt[5]{y' - x}$.

В задачах 7.142–7.144 показать, что данные выражения при любых действительных значениях входящих в них параметров определяют решения соответствующих дифференциальных уравнений.

7.142. $y = x^2 \ln x + C_1 x^2 + C_2 x + C_3$; $xy''' = 2$.

7.143. $e^y \sin^2(C_1 x + C_2) = 2C_1^2$; $y'' = e^y$.

7.144. $C_1 y = \sin(C_1 x + C_2)$; $yy'' + 1 = y'^2$.

В задачах 7.145, 7.146 показать, что данные функции являются частными решениями соответствующих дифференциальных уравнений.

7.145. $y = \frac{x^2 + 1}{2}$; $y'^2 + 1 = 2yy''$. **7.146.** $y = e^x$; $y^2 + y'^2 = 2yy''$.

2. Дифференциальные уравнения, допускающие понижение порядка

Ниже приводятся некоторые виды дифференциальных уравнений n-го порядка, допускающих понижение порядка.

а) *Уравнения вида* $y^{(n)} = f(x)$. Общее решение получается путем n-кратного интегрирования:

$$y=\int\left(\int\left(\ldots\int\left(\int f(x)dx\right)dx\ldots\right)dx\right)dx+P_{n-1}(x),$$

где $P_{n-1}(x) = C_1x^{n-1} + C_2x^{n-2} + \ldots + C_{n-1}x + C_n$, или по формуле

$$y=\frac{1}{(n-1)!}\int_{x_0}^{x}f(t)(x-t)^{n-1}dt+P_{n-1}(x).$$

ПРИМЕР 7.20. Найти общее решение уравнения $y''' = x^2 + \cos x$ и его частное решение, удовлетворяющее начальным условиям $y(0) = 1$, $y'(0) = -1$, $y''(0) = 0$.

◀ Интегрируя первый раз, получаем

$$y''=\frac{x^3}{3}+\sin x+C_1;$$

второй раз — $y'=\frac{x^4}{12}-\cos x+C_1x+C_2$; третий раз — $y=\frac{x^5}{60}-\sin x+C_1x^2+C_2x+C_3$, C_1, C_2, $C_3 \in \mathbb{R}$. Это и есть общее решение. Подставив теперь в полученное решение и в выражение для производных значения $x = 0$, $y = 1$, $y' = -1$, $y'' = 0$, получим систему уравнений $\begin{cases}C_3=1,\\-1+C_2=-1,\\C_1=0,\end{cases}$ из которой следует, что $C_1 = 0$, $C_2 = 0$, $C_3 = 1$. Тогда искомое частное решение имеет вид $y=\frac{x^5}{60}-\sin x+1$. ▶

б) *Уравнения вида* $F(x, y^{(k)}, \ldots, y^{(n)}) = 0$, т. е. уравнения не содержат искомой функции и ее производных до порядка $k-1$ включительно. С помощью замены $y^{(k)}(x) = z(x)$ порядок этого уравнения понижается на k единиц: $F(x, z, \ldots, z^{(n-k)}) = 0$. Предположим, что для полученного уравнения мы можем найти общее решение $z = \varphi(x, C_1, \ldots, C_{n-k})$. Тогда искомая функция получается путем k-кратного интегрирования функции $\varphi(x, C_1, \ldots, C_{n-k})$.

ПРИМЕР 7.21. Найти общее решение уравнения $xy^{(5)} - y^{(4)} = 0$.

◀ Уравнение не содержит y и ее производных до третьего порядка включительно. Положим $z(x) = y^{(4)}$, тогда $y^{(5)}=\frac{dz}{dx}$ и уравнение принимает вид $xz' - z = 0$. После деления на z (в этом случае теряется решение $z = 0$) получаем $\frac{dz}{z}=\frac{dx}{x}$. Отсюда $\ln|z| = \ln|x| + \ln|C_0|$, где $C_0 \neq 0$, или, с учетом решения $z = 0$, получаем общее решение $z = C_0x$, $C_0 \in \mathbb{R}$. Проинтегрировав 4 раза функцию $z = C_0x$, находим общее решение исходного уравнения: $y = C_1x^5 + C_2x^3 + C_3x^2 + C_4x + C_5$, где $C_1, C_2, C_3, C_4, C_5 \in \mathbb{R}$. ▶

в) *Уравнения вида* $F(y, y', \ldots, y^{(n)}) = 0$, т. е. уравнения не содержат независимой переменной x. В этом случае подстановкой $y' = p(y)$, $y''=\frac{dy'}{dx}=\frac{dp(y)}{dx}=\frac{dp}{dy}\cdot\frac{dy}{dx}=p\frac{dp}{dy}$, $y'''=\frac{dy''}{dx}=p\left(\frac{dp}{dy}\right)^2+p^2\frac{d^2p}{dy^2}$ и т. д. порядок уравнения понижается на единицу.

ПРИМЕР 7.22. Найти общий интеграл уравнения $y'y''' - 3y''^2 = 0$.

◀ Положим $y' = p(y)$, $y''=p\frac{dp}{dy}$, $y'''=p\left(\frac{dp}{dy}\right)^2+p^2\frac{d^2p}{dy^2}$. Тогда уравнение примет вид

$$p\left(p\left(\frac{dp}{dy}\right)^2+p^2\frac{d^2p}{dy^2}\right)-3\left(p\frac{dp}{dy}\right)^2=0.$$

Приведя подобные члены и сократив на p^2 (при этом мы теряем решение $p = 0$, т. е. $y = C$, $C \in \mathbb{R}$), получим

$$p\frac{d^2p}{dy^2} - 2\left(\frac{dp}{dy}\right)^2 = 0.$$

Положив здесь $\frac{dp}{dy} = z$, $\frac{d^2p}{dy^2} = z\frac{dz}{dp}$, придем к уравнению

$$pz\frac{dz}{dp} - 2z^2 = 0.$$

Сократив на z (при этом возможна потеря решения $z = \frac{dp}{dy} = 0$, т. е. $p = C_1$, и $y = C_1x + C_2$, где C_1, $C_2 \in \mathbb{R}$, в состав которого входит прежнее потерянное решение), получим $\frac{dz}{z} = 2\frac{dp}{p}$. Отсюда $\ln|z| = \ln p^2 + \ln|C_1|$, или $z = \frac{dp}{dy} = C_1p^2$. Интегрируя последнее уравнение, находим

$$-\frac{1}{p} = C_1y + C_2, \text{ или } -\frac{dx}{dy} = C_1y + C_2, \; C_1, C_2 \in \mathbb{R}.$$

Окончательно получим общий интеграл

$$x = \tilde{C}_1y^2 + \tilde{C}_2y + C_3,$$

где $x = \tilde{C}_1y^2 + \tilde{C}_2y + C_3$, $\tilde{C}_1 = -\frac{C_1}{2}$, $\tilde{C}_2 = -C_2$, C_1, C_2, $C_3 \in \mathbb{R}$, т. е. семейство парабол. Заметим, что последняя запись содержит в себе и решения $y = C_1x + C_2$ (только при $C_1 \neq 0$). ►

г) *Уравнения вида* $\frac{d}{dx}G(x, y, y', \ldots, y^{(n-1)}) = 0$, т. е. такие уравнения, в которых левая часть может быть представлена как полная производная по x от некоторой функции $G(x, y, y', \ldots, y^{(n-1)})$. Интегрируя по x, получим новое уравнение, порядок которого на единицу ниже исходного уравнения.

ПРИМЕР 7.23. Решить уравнение $y'y''' = 2y''^2$.

◄ Переписываем уравнение в виде $\frac{y'''}{y''} = 2\frac{y''}{y'}$. Замечаем, что $\frac{y'''}{y''} = (\ln y'')'$, а

$$2\frac{y''}{y'} = (2\ln y')'.$$

Тогда полученное уравнение можно записать как равенство полных производных: $(\ln y'')' = (2\ln y')'$. Отсюда $\ln y'' = 2\ln y' + \ln C_1$, $C_1 > 0$. Потенцируем последнее равенство: $y'' = C_1y'^2$. Порядок уравнения понижен.

Аналогично предыдущему, переписывая последнее уравнение в виде $\frac{y''}{y'} = C_1y'$, получаем $(\ln y')' = (C_1y)'$. Отсюда $\ln y' = C_1y + C_2$, или, после потенцирования, $y' = e^{C_1y}e^{C_2}$. Обозначив $e^{C_2} = C_3$, где $C_3 > 0$ — любое действительное число, находим $y' = C_3e^{C_1y}$, или $\frac{dy}{e^{C_1y}} = C_3\,dx$.

Интегрируя последнее уравнение, получаем $-\frac{1}{C_1}e^{-C_1y} = C_3x + C_4$, или

$$e^{-C_1y} = (-C_1)(C_3x + C_4), \text{ или } e^{C_5y} = (C_6x + C_7),$$

где $-C_1 = C_5$, $-C_1C_3 = C_6$, $-C_1C_4 = C_7$, $C_5 < 0$, $C_6 < 0$, C_7 — любое действительное число. Логарифмируя полученное выражение, находим $C_5y = \ln|C_6x + C_7|$.

В ходе решения в результате деления на y'' и y' возможны потери решений. При $y'' = 0$ получаем $y' = C_8$. Отсюда $y = C_8x + C_9$, C_8, $C_9 \in \mathbb{R}$. Заметим, что уравнение $y' = 0$ — частный случай уравнения $y' = C_8$ при $C_8 = 0$, а его решение $y = C$ входит в семейство решений $y = C_8x + C_9$. ▶

д) В *уравнении вида* $F(x, y, y', \ldots, y^{(n)}) = 0$, где функция F является *однородной относительно функции y и ее производных*, т. е.

$$F(x, ty, ty', \ldots, ty^{(n)}) = t^kF(x, y, y', \ldots, y^{(n)}),\ t \neq 0,$$

подстановка $y'(x) = y(x)z(x)$ позволяет понизить его порядок на единицу.

ПРИМЕР 7.24. Решить уравнение $yy'' - (y')^2 = 6xy^2$.

◀ Проверим, что данное дифференциальное уравнение однородно. Перепишем его в виде $yy'' - (y')^2 - 6xy^2 = 0$. Имеем $F(x, y, y', y'') = yy'' - (y')^2 - 6xy^2$. Тогда

$$F(x, ty, ty', ty'') = ty \cdot ty'' - (ty')^2 - 6x(ty)^2 = t^2(yy'' - (y')^2 - 6xy^2) = t^2F(x, y, y', y''),$$

т. е. функция F — однородная порядка $k = 2$.

Положим $y' = yz$. Тогда $y'' = y'z + yz' = y(z^2 + z')$ и уравнение принимает вид

$$y^2(z^2 + z') - (yz)^2 - 6xy^2 = 0.$$

Сокращая на y^2 (при этом возможна потеря решения $y = 0$) и приводя подобные, получаем $z' - 6x = 0$. Отсюда $z = 3x^2 + C_1$, $C_1 \in \mathbb{R}$.

Возвращаясь к прежним переменным, получаем уравнение $y' = y(3x^2 + C_1)$, или

$\dfrac{dy}{y} = 3x^2 + C_1$, откуда $\ln|y| = x^3 + C_1x + \ln|C_2|$, $C_2 \neq 0$, или $y = C_2e^{x^3 + C_1x}, C_2 \neq 0$.

При $C_2 = 0$ эта формула дает потерянное решение $y = 0$. Следовательно, общее решение исходного уравнения можно записать в виде $y = Ce^{x^3 + C_1x}$, $C, C_1 \in \mathbb{R}$. ▶

В некоторых случаях найти решение в виде явной или неявной функции затруднительно, однако удается получить решение в параметрической форме.

ПРИМЕР 7.25. Найти общее решение уравнения $y''(1 + 2\ln y') = 1$.

◀ Положим $y' = p$, $y'' = \dfrac{dp}{dx}$. Уравнение примет вид

$$\frac{dp}{dx}(1 + 2\ln p) = 1,$$

или $dx = (1 + 2\ln p)dp$, откуда $x = -p + 2p\ln p + C_1$, $C_1 \in \mathbb{R}$. Так как $dy = p\,dx$, то находим $dy = p(1 + 2\ln p)dp$, откуда $y = p^2\ln p + C_2$, $C_2 \in \mathbb{R}$.

Общее решение получаем в параметрическом виде $x = p(-1 + 2\ln p) + C_1$, $y = p^2\ln p + C_2$, C_1, $C_2 \in \mathbb{R}$. ▶

В задачах 7.147–7.164 найти общие решения дифференциальных уравнений, используя методы понижения порядка.

7.147. $y'' = \dfrac{1}{1 + x^2}$. **7.148.** $y''' = x + \cos x$. **7.149.** $y''' = \dfrac{2\cos x}{\sin^3 x}$. **7.150.** $y^{\mathrm{IV}} = \dfrac{1}{x}$.

7.151. $x^2y'' = y'^2$. **7.152.** $xy''' = 2$. **7.153.** $y''' = 2(y'' - 1)\operatorname{ctg} x$.

7.154. $(1 + e^x)y'' + y' = 0$. **7.155.** $x^2y''' = y''^2$.

7.156. $y'' + y' \cdot \operatorname{tg} x = \sin 2x$.

7.157. $xy'' = y' \ln \dfrac{y'}{x}$.

7.158. $x^4 y''' + 2x^3 y'' = 1$.

7.159. $yy'' = y'^2$.

7.160. $x^2 yy'' = (y - xy')^2$.

7.161. $xyy'' + xy'^2 - yy' = 0$.

7.162. $2yy'' = y'^2 + 1$.

7.163. $yy'' - y'^2 + y'^3 = 0$.

7.164. $y'' = \dfrac{1}{2y'}$.

В задачах 7.165–7.168 найти все частные решения уравнений, удовлетворяющие заданным начальным условиям.

7.165. $xy'' - y' = x^2 e^x$; $y(0) = -1$.

7.166. $y'''(x - 1) - y'' = 0$; $y(2) = 2$, $y'(2) = y''(2) = 1$.

7.167. $y'^2 + 1 = 2yy''$; $y(1) = y'(1) = 1$.

7.168. $y'' + y'^2 = y'^3$; $y(0) = y'(0) = 1$.

3. Линейные однородные уравнения

Уравнение вида

$$y^{(n)} + a_1(x) y^{(n-1)} + \ldots + a_{n-1}(x) y' + a_n(x) y = 0 \tag{7.25}$$

называется *линейным однородным* дифференциальным уравнением порядка n. Если известно какое-либо частное решение $y_1(x)$ уравнения (7.25), то подстановка $y(x) = y_1(x) z(x)$ приводит это уравнение к линейному уравнению относительно $z(x)$, не содержащему явно эту функцию. Поэтому полагая $z'(x) = u(x)$, получим линейное однородное уравнение порядка $n - 1$ относительно функции $u(x)$.

ПРИМЕР 7.26. Найти общее решение уравнения $(x^2 + 1)y'' - 2xy' + 2y = 0$, убедившись в том, что функция $y_1(x) = x$ есть одно из его частных решений.

◀ Так как $y_1'(x) = 1$, а $y_1''(x) = 0$, то, подставив $y_1(x)$, $y_1'(x)$ и $y_1''(x)$ в данное уравнение, убеждаемся в том, что функция $y_1(x) = x$ действительно является его частным решением. Положим $y = y_1 z = xz$, найдем $y' = xz' + z$, $y'' = xz'' + 2z'$ и подставим выражения y, y' и y'' в уравнение. Получим

$$(x^2 + 1)(xz'' + 2z') - 2x(xz' + z) + 2xz = 0, \quad \text{или} \quad x(x^2 + 1)z'' + 2z' = 0.$$

Теперь, полагая $z' = u$, $z'' = u'$, приходим к уравнению первого порядка относительно u:

$$x(x^2 + 1)u' + 2u = 0.$$

Это уравнение с разделяющимися переменными. Его общее решение имеет вид $u = C_1 \dfrac{x^2 + 1}{x^2}$, откуда, учитывая $u = z'$, получаем уравнение первого порядка относительно z: $dz = C_1 \left(1 + \dfrac{1}{x^2}\right) dx$.

Интегрируя последнее уравнение, находим $z = C_1 \left(x - \dfrac{1}{x}\right) + C_2$, а так как $y = zx$, то окончательно получаем общее решение исходного уравнения $y = C_1(x^2 - 1) + C_2 x$, C_1, $C_2 \in \mathbb{R}$. ▶

Изложенный выше метод обобщается на случай, когда известно k частных линейно независимых решений уравнения (7.25). В этом случае путем надлежащих подстановок порядок уравнения может быть понижен на k единиц.

ТЕОРЕМА. *Если $y_1(x)$ есть частное решение линейного однородного уравнения $y'' + p(x)y' + q(x)y = 0$, то функция $y_2(x) = y_1(x)\int \frac{e^{-\int p(x)dx}}{y_1^2(x)}dx$ тоже является решением этого уравнения, а функция $y = y_1(x)\left(C_1 + C_2\int \frac{e^{-\int p(x)dx}}{y_1^2(x)}dx\right)$ есть его общее решение.*

В задачах 7.169–7.172 найти общее решение данного уравнения, если функция $y_1(x)$ есть его частное решение.

7.169. $y'' - 6y' + 5y = 0$; $y_1 = e^x$. **7.170.** $y'' - 2y' - 3y = 0$; $y_1 = e^{-x}$.

7.171. $xy'' + 2y' + xy = 0$; $y_1 = \frac{\sin x}{x}$. **7.172.** $(1 - x^2)y'' - 2xy' + 2y = 0$; $y_1 = x$.

7.173. Найти общее решение уравнения $x^3y''' + 5x^2y'' + 2xy' - 2y = 0$, если известны два частных решения $y_1 = x$ и $y_2 = 1/x$.

Определителем Вронского (или *вронскианом*) системы функций $y_1(x)$, $y_2(x)$, ..., $y_n(x)$ называется определитель

$$W(x) = \begin{vmatrix} y_1(x) & y_2(x) & \dots & y_n(x) \\ y_1'(x) & y_2'(x) & \dots & y_n'(x) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ y_1^{(n-1)}(x) & y_2^{(n-1)}(x) & \dots & y_n^{(n-1)}(x) \end{vmatrix}.$$

Если система функций $y_1(x)$, $y_2(x)$, ..., $y_n(x)$ линейно зависима на интервале (a, b), то ее вронскиан равен нулю всюду на этом интервале. Если же хотя бы в одной точке $x_0 \in (a, b)$ значение $W(x_0) \neq 0$, то система функций $y_1(x)$, $y_2(x)$, ..., $y_n(x)$ линейно независима на (a, b).

Всякая система из n линейно независимых решений $y_1(x)$, $y_2(x)$, ..., $y_n(x)$ уравнения (7.25) называется *фундаментальной системой решений* этого уравнения. Вронскиан фундаментальной системы решений отличен от нуля на всем интервале, где эти решения определены. Если известна фундаментальная система решений уравнения (7.25), то общее решение этого уравнения имеет вид

$$y(x) = C_1y_1(x) + \dots + C_ny_n(x), \tag{7.26}$$

где C_1, ..., C_n — произвольные постоянные.

ПРИМЕР 7.27. Дана система функций x, $\cos x$, $\sin x$. Найти вронскиан этой системы $W(x)$ и убедиться в том, что на некотором интервале система линейно независима. Составить линейное однородное дифференциальное уравнение, для которого эта система функций является фундаментальной системой решений, и записать общее решение уравнения.

◀ Составим вронскиан

$$W(x) = \begin{vmatrix} x & \cos x & \sin x \\ 1 & -\sin x & \cos x \\ 0 & -\cos x & -\sin x \end{vmatrix} = x.$$

Так как $W(x) = x$, то система функций линейно независима на всей оси Ox, за исключением точки $x = 0$, и, следовательно, образует фундаментальную систему решений некоторого линейного однородного дифференциального уравнения 3-го порядка в области $\mathbb{R}\backslash\{0\}$, общим решением которого является функция $y = C_1x + C_2\cos x + C_3\sin x$. Для составления дифференциального уравнения найдем производные y', y'', y''' и исключим произвольные постоянные из выражений для y, y', y'', y'''. Имеем

$$\begin{cases} y = C_1x + C_2\cos x + C_3\sin x, \\ y' = C_1 - C_2\sin x + C_3\cos x, \\ y'' = \quad -C_2\cos x - C_3\sin x, \\ y''' = \quad +C_2\sin x - C_3\cos x. \end{cases}$$

Заметим, что, умножив первое и третье равенство на -1, а второе и четвертое — на x и сложив все четыре равенства, получим

$$xy''' - y'' + xy' - y = 0.$$

Полученное уравнение и является искомым линейным однородным дифференциальным уравнением. ►

В задачах 7.174–7.180, зная фундаментальную систему решений линейного однородного дифференциального уравнения, составить это уравнение.

7.174. $1, e^{-x}$. **7.175.** $e^{2x}\sin x, e^{2x}\cos x$. **7.176.** x^3, x^4.

7.177. $1, x, e^x$. **7.178.** $\cos x, \sin x, 1$. **7.179.** $e^{2x}, \sin x, \cos x$.

7.180. e^{3x}, e^{5x}.

7.181. Зная, что функции $y_1(x) = \cos x$ и $y_2(x) = \sin x$ образуют фундаментальную систему решений линейного однородного дифференциального уравнения, найти его частное решение, удовлетворяющее начальным условиям $y(\pi) = 1, y'(\pi) = -1$.

7.182. Зная фундаментальную систему решений e^x, $\sin x$, $\cos x$ линейного однородного дифференциального уравнения, найти его частное решение, удовлетворяющее начальным условиям $y(0) = 3$, $y'(0) = 4$, $y''(0) = -1$.

7.183. Зная фундаментальную систему решений e^x, e^{2x}, e^{3x} линейного однородного дифференциального уравнения, найти его частное решение, удовлетворяющее начальным условиям $y(0) = 6$, $y'(0) = 14$, $y''(0) = 36$.

4. Линейные неоднородные уравнения

Уравнение вида

$$y^{(n)} + a_1(x)y^{(n-1)} + \ldots + a_{n-1}(x)y' + a_n(x)y = f(x), \tag{7.27}$$

в котором $f(x) \not\equiv 0$, называется *линейным неоднородным* дифференциальным уравнением n-го порядка. Общее решение уравнения (7.27) определяется формулой

$$y(x) = y_0(x) + \tilde{y}(x), \tag{7.28}$$

где $y_0(x)$ — общее решение соответствующего однородного уравнения (7.25), а $\tilde{y}(x)$ — некоторое частное решение неоднородного уравнения (7.27).

ПРИМЕР 7.28. Найти общее решение линейного неоднородного дифференциального уравнения $xy''' - y'' + xy' - y = 2x^3$, если известно, что функция x^3 есть его частное решение.

◄ Согласно формуле (7.28) общее решение линейного неоднородного уравнения составляется как сумма общего решения $y_0(x)$ соответствующего однородного уравнения и частного решения $\tilde{y}(x)$ неоднородного уравнения. В данном примере (см. пример 7.27) $y_0(x) = C_1x + C_2\cos x + C_3\sin x$, а $\tilde{y}(x) = x^3$. Следовательно, искомое общее решение есть

$$y = C_1x + C_2\cos x + C_3\sin x + x^3. \blacktriangleright$$

Если известно общее решение $y_0(x) = C_1y_1(x) + \ldots + C_ny_n(x)$ соответствующего уравнению (7.27) однородного уравнения (7.25), то для определения частного решения $\tilde{y}(x)$ уравнения (7.27) можно воспользоваться методом вариации произвольных постоянных.

Для этого будем искать частное решение неоднородного уравнения (7.27) в виде

$$\tilde{y}(x) = C_1(x)y_1(x) + \ldots + C_n(x)y_n(x),$$

где от функций $C_1(x), \ldots, C_n(x)$ дополнительно потребуем, чтобы они удовлетворяли условиям $x = \frac{\pi}{2}, \sum_{m=1}^{n} y_m^{(k)} \frac{dC_m(x)}{dx} = 0$ для всех $k = 0, 1, \ldots, n-2$ (где $y_m^{(0)} = y_m$). Тогда для функций $C_m(x)$, $m = 1, 2, \ldots, n$, получим систему уравнений

$$\begin{cases} y_1C_1' + y_2C_2' + \ldots + y_nC_n' = 0, \\ y_1'C_1' + y_2'C_2' + \ldots + y_n'C_n' = 0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ y_1^{(n-1)}C_1' + y_2^{(n-1)}C_2' + \ldots + y_n^{(n-1)}C_n' = f(x). \end{cases} \tag{7.29}$$

Определитель этой системы есть отличный от нуля вронскиан фундаментальной системы решений $y_1(x), y_2(x), \ldots, y_n(x)$, поэтому система имеет единственное решение относительно $\frac{dC_m(x)}{dx}$, $m = 1, 2, \ldots, n$.

ПРИМЕР 7.29. Зная, что функции $y_1(x) = \cos x$ и $y_2(x) = \sin x$ образуют фундаментальную систему решений уравнения $y'' + y = 0$, найти общее решение уравнения $y'' + y = \frac{1}{\cos x}$.

◀ Общее решение соответствующего однородного уравнения записывается в виде $y_0(x) = C_1\cos x + C_2\sin x$. Считая C_1 и C_2 функциями x, для определения частного решения однородного уравнения составим систему вида (7.29):

$$\begin{cases} C_1'(x)\cos x + C_2'(x)\sin x = 0, \\ -C_1'(x)\sin x + C_2'(x)\cos x = \dfrac{1}{\cos x}. \end{cases}$$

Решая полученную систему уравнений относительно $C_1'(x)$ и $C_2'(x)$, получаем

$$C_2'(x) = 1,$$

отсюда $C_2(x) = x + C_3$, и $C_1(x) = -\int \frac{\sin x}{\cos x} dx = \ln|\cos x| + C_4$.

Взяв, например, $C_3 = C_4 = 0$, получаем частное решение $\tilde{y}(x) = \ln|\cos x| \cdot \cos x + x\sin x$. Следовательно, общее решение данного неоднородного уравнения имеет вид

$$y(x) = y_0(x) + \tilde{y}(x) = C_1\cos x + C_2\sin x + \ln|\cos x| \cdot \cos x + x\sin x. \blacktriangleright$$

Если правая часть линейного неоднородного уравнения (7.27) есть сумма нескольких функций $f(x) = f_1(x) + f_2(x) + \ldots + f_r(x)$ и $\tilde{y}_i(x)$ $(i = 1, 2, \ldots, r)$ — некоторые частные решения уравнений $y^{(n)} + a_1(x)y^{(n-1)} + \ldots + a_{n-1}(x)y' + a_n(x)y = f_i(x)$ $(i = 1, 2, \ldots, r)$ соответственно, то сумма

$$\tilde{y}(x) = \tilde{y}_1(x) + \tilde{y}_2(x) + \ldots + \tilde{y}_r(x)$$

есть некоторое частное решение уравнения (7.27) (*принцип суперпозиции решений*).

ПРИМЕР 7.30. Проверив, что функция $\tilde{y}_1 = -\frac{1}{4}e^x$ является частным решением уравнения $y'' - 2y' - 3y = e^x$, а функция $\tilde{y}_2 = -\frac{1}{3}e^{2x}$ — частным решением уравнения $y'' - 2y' - 3y = e^{2x}$, найти общее решение уравнения $y'' - 2y' - 3y = e^x + e^{2x}$.

◀ Согласно принципу суперпозиции частным решением последнего уравнения является функция $\tilde{y} = -\frac{1}{4}e^x - \frac{1}{3}e^{2x}$. Общее решение соответствующего линейного однородного уравнения есть функция $y_0 = C_1e^{3x} + C_2e^{-x}$ (см. задачу 7.170). По формуле (7.28) общее решение данного уравнения имеет вид $y_0 = C_1e^{3x} + C_2e^{-x} - \frac{1}{4}e^x - \frac{1}{3}e^{2x}$, C_1, $C_2 \in \mathbb{R}$. ▶

В задачах 7.184–7.187 решить уравнения методом вариации произвольных постоянных.

7.184. $y'' - 2y' + y = \dfrac{e^x}{x}$. **7.185.** $y'' + 3y' + 2y = \dfrac{1}{e^x + 1}$.

7.186. $y'' + 4y = 2\operatorname{tg} x$. **7.187.** $y'' + y = \dfrac{1}{\sin x}$.

§ 7.3. ЛИНЕЙНЫЕ УРАВНЕНИЯ С ПОСТОЯННЫМИ КОЭФФИЦИЕНТАМИ

1. Линейные однородные уравнения с постоянными коэффициентами

Общий вид линейного однородного дифференциального уравнения n-го порядка с постоянными коэффициентами

$$y^{(n)} + a_1y^{(n-1)} + \ldots + a_{n-1}y' + a_ny = 0, \tag{7.30}$$

где a_i $(i = 0, 1, \ldots, n)$ — действительные постоянные.

Уравнение

$$\lambda^n + a_1\lambda^{n-1} + \ldots + a_{n-1}\lambda + a_n = 0, \tag{7.31}$$

полученное заменой $y^{(k)}$ $(k = 0, 1, \ldots, n)$ искомой функции степенями λ^k, называется *характеристическим уравнением* для уравнения (7.30). Каждому действительному корню уравнения (7.31) кратности r соответствует r линейно независимых решений уравнения (7.30):

$$e^{\lambda x}, \quad xe^{\lambda x}, \quad \ldots, \quad x^{r-1}e^{\lambda x},$$

а каждой паре комплексных корней $\lambda = \alpha \pm i\beta$ кратности s соответствует s пар линейно независимых решений уравнения (7.30):

$$\begin{gathered} e^{\alpha x}\cos\beta x, \quad xe^{\alpha x}\cos\beta x, \quad \ldots, \quad x^{s-1}e^{\alpha x}\cos\beta x, \\ e^{\alpha x}\sin\beta x, \quad xe^{\alpha x}\sin\beta x, \quad \ldots, \quad x^{s-1}e^{\alpha x}\sin\beta x. \end{gathered}$$

Таким образом, если характеристическое уравнение имеет k действительных корней $\lambda_1, \ldots, \lambda_k$ кратностей $r_1, \ldots, r_k$ и l пар комплексно-сопряженных корней $\alpha_1 + i\beta_1$, $\alpha_1 - i\beta_1, \ldots, \alpha_l + i\beta_l, \alpha_l - i\beta_l$ кратностей $s_1, \ldots, s_l$ $(r_1 + \ldots + r_k + 2s_1 + \ldots + 2s_l = n)$, то общее решение уравнения (7.30) запишется в виде

$$\begin{aligned} y(x) = P_1(x)e^{\lambda_1 x} + \ldots + P_k(x)e^{\lambda_k x} + (Q_1(x)\cos\beta_1 x + R_1(x)\sin\beta_1 x)e^{\alpha_1 x} + \ldots \\ \ldots + (Q_l(x)\cos\beta_l x + R_l(x)\sin\beta_l x)e^{\alpha_l x}, \end{aligned} \tag{7.32}$$

где $P_m(x) = C_1x^{r_m-1} + \ldots + C_{r_m-1}x + C_{r_m}$ — произвольный многочлен степени $r_m - 1$, $m = 1, \ldots, k$, в котором коэффициенты $C_1, \ldots, C_{r_m}$ — произвольные константы, а $Q_p(x)$ и $R_p(x)$ — произвольные многочлены степени $s_p - 1$, $p = 1, \ldots, l$.

ПРИМЕР 7.31. Найти общее решение уравнения $y''' - 6y'' + 11y' - 6y = 0$.

◀ Характеристическое уравнение $\lambda^3 - 6\lambda^2 + 11\lambda - 6 = 0$, или $(\lambda - 1)(\lambda - 2)(\lambda - 3) = 0$, имеет корни $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = 2$, $\lambda_3 = 3$. Фундаментальная система решений данного дифференциального уравнения состоит из функций $y_1 = e^x$, $y_2 = e^{2x}$, $y_3 = e^{3x}$. Следовательно, общее решение уравнения имеет вид $y = C_1e^x + C_2e^{2x} + C_3e^{3x}$, $C_1, C_2, C_3 \in \mathbb{R}$. ▶

ПРИМЕР 7.32. Найти общее решение уравнения $y''' - 3y'' + 3y' - y = 0$.

◀ Характеристическое уравнение $\lambda^3 - 3\lambda^2 + 3\lambda - 1 = 0$, или $(\lambda - 1)^3 = 0$, имеет один корень $\lambda = 1$ кратности 3. Фундаментальная система решений данного дифференциального уравнения состоит из функций $y_1 = e^x$, $y_2 = xe^x$, $y_3 = x^2e^x$. Следовательно, общее решение уравнения имеет вид

$$y = C_1e^x + C_2xe^x + C_3x^2e^x, \ C_1, C_2, C_3 \in \mathbb{R}. \ ▶$$

ПРИМЕР 7.33. Найти общее решение уравнения $y'' - 2y' + 2y = 0$.

◀ Характеристическое уравнение $\lambda^2 - 2\lambda + 2 = 0$ имеет корни $\lambda_1 = 1 + i$, $\lambda_2 = 1 - i$. Фундаментальная система решений состоит из функций $y_1 = e^x\cos x$ и $y_2 = e^x\sin x$. Следовательно, общее решение уравнения имеет вид $y = e^x(C_1\cos x + C_2\sin x)$, $C_1, C_2 \in \mathbb{R}$. ▶

ПРИМЕР 7.34 Составить однородное дифференциальное уравнение с постоянными коэффициентами, для которого данное множество функций является фундаментальной системой решений:

$$\text{а) } e^{2x}, \ e^{-5x}; \quad \text{б) } e^{2x}, \ xe^{2x}, \ x^2e^{2x}; \quad \text{в) } e^{-2x}\cos x, \ e^{-2x}\sin x.$$

◀ а) Корни характеристического уравнения: $\lambda_1 = 2$, $\lambda_2 = -5$. Следовательно, характеристическое уравнение имеет вид $(\lambda - 2)(\lambda + 5) = 0$, или $\lambda^2 + 3\lambda - 10 = 0$. Значит, дифференциальное уравнение выглядит так: $y'' + 3y' - 10y = 0$.

б) Здесь $\lambda = 2$ — корень порядка 3, поэтому характеристическое уравнение имеет вид $(\lambda - 2)^3 = 0$, или $\lambda^3 - 6\lambda^2 + 12\lambda - 8 = 0$. Следовательно, дифференциальное уравнение имеет вид $y''' - 6y'' + 12y' - 8y = 0$.

в) Здесь $\lambda_{1,2} = -2 \pm i$, поэтому характеристическое уравнение имеет вид $(\lambda - (-2 + i))(\lambda - (-2 - i)) = 0$, т. е. $\lambda^2 + 4\lambda + 5 = 0$. Заменяя степени λ на производные, получим дифференциальное уравнение $y'' + 4y' + 5y = 0$. ▶

ПРИМЕР 7.35. Найти частное решение уравнения $y'' - 2y' + y = 0$, удовлетворяющее заданным начальным условиям $y(0) = 1$, $y'(0) = 2$.

◀ Составим характеристическое уравнение: $\lambda^2 - 2\lambda + 1 = 0$. Его корни: $\lambda_{1,2} = 1$. Общее решение уравнения: $y_{\text{общ}} = C_1e^x + C_2xe^x$. Подставим в эту формулу $x = 0$:

$1 = C_1 + 0$. Найдем производную: $y' = C_1e^x + C_2e^x + C_2xe^x$. Так как $y'(0) = 2$, то мы получаем $2 = C_1 + C_2$. Следовательно, $C_1 = C_2 = 1$. Отсюда $y = e^x + xe^x$. ▶

ПРИМЕР 7.36. Найти частное решение уравнения $y'' + 4y = 0$, удовлетворяющее заданным начальным условиям $y(0) = 0$, $y'(0) = -1$.

◀ Характеристическое уравнение $\lambda^2 + 4 = 0$ имеет корни $\lambda = \pm 2i$. Общее решение уравнения имеет вид

$$y = C_1 \cos 2x + C_2 \sin 2x.$$

Так как $y(0) = 0$, то $C_1 = 0$. Значит, $y = C_2 \sin 2x$. Дифференцируем: $y' = 2C_2 \cos 2x$. Подставим начальное условие: $-1 = y'(0) = 2C_2$. Таким образом, $C_2 = -\frac{1}{2}$. Значит, $y = -\frac{1}{2}\sin 2x$. ▶

В задачах 7.188–7.205 найти общие решения дифференциальных уравнений.

7.188. $y'' + 2y' - 8y = 0$. **7.189.** $y'' - 8y' + 15y = 0$.
7.190. $y'' - 8y' + 16y = 0$. **7.191.** $8y''' + 12y'' + 6y' + y = 0$.
7.192. $y'' - 6y' + 13y = 0$. **7.193.** $4y'' + y = 0$.
7.194. $y'' + 2y' + 10y = 0$. **7.195.** $y''' - 3y' + 2y = 0$.
7.196. $y''' - y'' - 5y' - 3y = 0$. **7.197.** $y''' + 27y = 0$.
7.198. $y^{\mathrm{IV}} - 4y = 0$. **7.199.** $y^{\mathrm{IV}} + 4y = 0$.
7.200. $y''' + y' - 10y = 0$. **7.201.** $y''' + 7y'' + 17y' + 15y = 0$.
7.202. $y^{\mathrm{IV}} + 2y'' + y = 0$. **7.203.** $y^{\mathrm{V}} - 6y^{\mathrm{IV}} + 9y''' = 0$.
7.204. $y^{\mathrm{V}} + 8y''' + 16y' = 0$. **7.205.** $y^{\mathrm{VI}} + 2y^{\mathrm{V}} + y^{\mathrm{IV}} = 0$.

В задачах 7.206–7.211 по данным корням характеристического уравнения линейного однородного дифференциального уравнения с постоянными коэффициентами составить дифференциальное уравнение и написать его общее решение.

7.206. $\lambda_1 = -2,\ \lambda_2 = 5$. **7.207.** $\lambda_1 = -2,\ \lambda_2 = \lambda_3 = 5$.
7.208. $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = -1$. **7.209.** $\lambda_{1,\,2} = -2 + 3i$.
7.210. $\lambda_1 = 3,\ \lambda_{2,\,3} = \pm 3i$. **7.211.** $\lambda_{1,\,2} = \pm i,\ \lambda_{2,\,3} = 2 \pm 2i$.

В задачах 7.212–7.215 составить однородное дифференциальное уравнение с постоянными коэффициентами, для которого данное множество функций является фундаментальной системой решений.

7.212. $e^{2x},\ e^{-x}$. **7.213.** $e^{-3x},\ e^{2x},\ xe^{2x}$.
7.214. $e^x,\ e^{-x}\cos 3x,\ e^{-x}\sin 3x$. **7.215.** $e^{-2x},\ xe^{-2x},\ x^2e^{-2x}$.

В задачах 7.216, 7.217 найти решение уравнения, удовлетворяющее заданному начальному условию.

7.216. $y'' - 2y' + y = 0;\ y(2) = 1,\ y'(2) = -2$.
7.217. $y''' - y' = 0;\ y(0) = 3,\ y'(0) = -1,\ y''(0) = 1$.

2. Линейные неоднородные уравнения с постоянными коэффициентами

Рассмотрим линейное неоднородное дифференциальное уравнение с постоянными коэффициентами, т. е. уравнение вида

$$y^{(n)} + a_1y^{(n-1)} + \ldots + a_{n-1}y' + a_ny = f(x), \qquad (7.33)$$

где a_i $(i = 1, 2, \ldots, n)$ — действительные постоянные числа, а $f(x) \not\equiv 0$.

Согласно формуле (7.28) общее решение уравнения (7.33) записывается в виде $y(x) = y_0(x) + \tilde{y}(x)$, где $y_0(x)$ — общее решение соответствующего однородного уравнения, а $\tilde{y}(x)$ — любое частное решение неоднородного уравнения (7.33).

Общее решение $y_0(x)$ задается формулой (7.32). Для отыскания $\tilde{y}(x)$ в общем случае можно воспользоваться методом вариации произвольных постоянных (см. п. 4 § 7.2).

ПРИМЕР 7.37. Найти общее решение уравнения $y''' + y' = \operatorname{tg} x$.

◀ Общее решение соответствующего однородного уравнения $y''' + y' = 0$ имеет вид $y_0 = C_1 + C_2\cos x + C_3\sin x$, так как функции $y_1 = 1$, $y_2 = \cos x$ и $y_3 = \sin x$ образуют его фундаментальную систему решений. Система (7.29) в этом случае принимает вид

$$\begin{cases} C_1' + C_2'\cos x + C_3'\sin x = 0, \\ -C_2'\sin x + C_3'\cos x = 0, \\ -C_2'\cos x - C_3\sin x = \operatorname{tg} x. \end{cases}$$

Сложив обе части первого и третьего уравнений, найдем $C_1' = \operatorname{tg} x$. Умножив обе части второго уравнения на $\sin x$, третьего — на $\cos x$ и сложив, получим $C_2' = -\sin x$.

Тогда из второго уравнения следует $C_3' = -\dfrac{\sin^2 x}{\cos x}$. Интегрирование дает

$$C_1 = -\ln|\cos x| + \tilde{C}_1,\ \ C_2 = \cos x + \tilde{C}_2,\ \ C_3 = \sin x - \ln\left|\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4} + \frac{x}{2}\right)\right| + \tilde{C}_3.$$

Следовательно, искомое общее решение неоднородного уравнения имеет вид

$$y = \tilde{C}_1 + \tilde{C}_2\cos x + \tilde{C}_3\sin x - \ln|\cos x| - \ln\left|\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4} + \frac{x}{2}\right)\right|. \ ▶$$

В частных случаях, когда функция $f(x)$ в уравнении имеет вид

$$f_1(x) = (d_0x^m + \ldots + d_m)e^{\lambda x}$$

или $$f_2(x) = \left((b_0x^{m_1} + \ldots + b_{m_1})\cos\beta x + (c_0x^{m_2} + \ldots + c_{m_2})\sin\beta x\right)e^{\alpha x},$$

частное решение $\tilde{y}(x)$ можно найти методом неопределенных коэффициентов. Именно, если λ или $\alpha + i\beta$ не совпадают ни с одним из действительных или соответственно комплексных корней характеристического уравнения (7.31), то $\tilde{y}(x)$ ищется в виде

$$\tilde{y}(x) = (D_0x^m + D_1x^{m-1} + \ldots + D_m)e^{\lambda x} \tag{7.34}$$

для $f(x) = f_1(x)$ или в виде

$$\tilde{y}(x) = ((B_0x^{m_3} + \ldots + B_{m_3})\cos\beta x + (C_0x^{m_3} + \ldots + C_{m_3})\sin\beta x)e^{\alpha x} \tag{7.35}$$

для $f(x) = f_2(x)$. Здесь D_i, B_i, C_i — неопределенные коэффициенты, $m_3 = \max\{m_1, m_2\}$.

Если же λ или $\alpha + i\beta$ совпадают с некоторым корнем уравнения (7.31) кратности r (случай *резонанса*), то выражения в правой части (7.34) или (7.35) следует домножить на x^r, т. е. искать решение соответственно в виде

$$\tilde{y}(x) = x^r(D_0x^m + D_1x^{m-1} + \ldots + D_m)e^{\lambda x} \tag{7.36}$$

для $f(x) = f_1(x)$ или в виде

$$\tilde{y}(x) = x^r((B_0x^{m_3} + \ldots + B_{m_3})\cos\beta x + (C_0x^{m_3} + \ldots + C_{m_3})\sin\beta x)e^{\alpha x}, \tag{7.37}$$

для $f(x) = f_2(x)$.

ПРИМЕР 7.38. Найти общее решение уравнения $y'' - 3y' + 2y = 2x + 1$.

◀ Сначала решим однородное уравнение. Его характеристическое уравнение: $\lambda^2 - 3\lambda + 2 = 0$. Корни: $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = 2$. Поэтому $y_0(x) = C_1e^x + C_2e^{2x}$, $C_1, C_2 \in \mathbb{R}$. Имеем

$f(x)(2x+1)\cdot e^{\mu x}$, поэтому $P(x)=2x+1$, $\mu=0$. Далее, $m=1$ (степень многочлена P), $r=0$ (так как $\mu=0$ не является корнем характеристического уравнения). Поэтому частное решение неоднородного уравнения следует искать в виде $\tilde{y}(x)=(Ax+B)\cdot e^{0x}$, т. е. $y=Ax+B$. Продифференцируем эту функцию: $y'=A$, $y''=0$. Подставим в исходное уравнение: $0-3A+2(Ax+B)=2x+1$. Приравняв коэффициенты при x и свободные члены в левой и правой частях равенства, получим $-3A+2B=1$, $2A=2$. Отсюда $A=1$, $B=2$. Таким образом, частное решение неоднородного уравнения: $\tilde{y}(x)=x+2$. Прибавив к этому решению все решения однородного уравнения, получим ответ:

$$y(x)=x+2+C_1e^x+C_2e^{2x},\ C_1, C_2\in\mathbb{R}. ►$$

ПРИМЕР 7.39. Найти общее решение уравнения $y''+y=1+\sin x+xe^{2x}$.

◄ Найдем общее решение однородного уравнения. Характеристическое уравнение: $\lambda^2+1=0$. Его корни: $\lambda=\pm i$. Значит, $y_0(x)=C_1\cos x+C_2\sin x$, $C_1, C_2\in\mathbb{R}$.

Будем искать частные решения уравнений

$$(\alpha)\ y''+y=1,\quad (\beta)\ y''+y=\sin x,\quad (\gamma)\ y''+y=xe^{2x}. \tag{7.38}$$

Пусть сначала $y''+y=1$. Тогда $m=0$, $\mu=0$, $r=0$. Значит, $\tilde{y}_1(x)=A$. Подставим в уравнение (α): $0+A=1$. Следовательно, $\tilde{y}_1(x)=1$.

Пусть теперь $y''+y=\sin x$. Тогда $m=0$, $\mu=\pm i$, поэтому $r=1$. Отсюда следует вид частного решения уравнения: $\tilde{y}_2(x)=x(A\cos x+B\sin x)$. Имеем

$$y'=A\cos x+B\sin x+x(-A\sin x+B\cos x),$$
$$y''=-A\sin x+B\cos x-A\sin x+B\cos x-Ax\cos x-Bx\sin x.$$

Подставим в уравнение (β):

$$-2A\sin x+2B\cos x-Ax\cos x-Bx\sin x+Ax\cos x+Bx\sin x=\sin x.$$

Отсюда $A=-0{,}5$, $B=0$. Таким образом, $\tilde{y}_2(x)=-\dfrac{x}{2}\sin x$.

Наконец, рассмотрим уравнение (γ): $y''+y=xe^{2x}$. Здесь $m=1$, $\mu=2$, $r=0$, поэтому $y_3=(Ax+B)e^{2x}$. Имеем $y'=Ae^{2x}+2(Ax+B)e^{2x}$, $y''=2Ae^{2x}+2Ae^{2x}+4(Ax+B)e^{2x}$. Подставим в уравнение (γ): $4Ae^{2x}+4(Ax+B)e^{2x}+(Ax+B)e^{2x}=xe^{2x}$. Отсюда получаем систему

$$\begin{cases}4A+5B=0,\\ 5A=1.\end{cases}$$

Решение системы: $A=\dfrac{1}{5}, B=-\dfrac{4}{25}$. Следовательно, $\tilde{y}_3(x)=\left(\dfrac{1}{5}x-\dfrac{4}{25}\right)e^{2x}$.

Так как $y(x)=\tilde{y}_1(x)+\tilde{y}_2(x)+\tilde{y}_3(x)+y_0(x)$, то окончательный ответ выглядит так:

$$y(x)=1-\frac{x}{2}\sin x+\left(\frac{x}{5}-\frac{4}{25}\right)e^{2x}+C_1\cos x+C_2\sin x,\ C_1,C_2\in\mathbb{R}. ►$$

ПРИМЕР 7.40. Найти общие решение уравнения $y''-2y'+y=x^2+2\sin x-\cos x$.

◄ Решаем однородное уравнение $y''-2y'+y=0$. Его характеристическое уравнение $\lambda^2-2\lambda+1=0$ имеет корни $\lambda_{1,2}=1$. Поэтому $y_0(x)=C_1e^x+C_2xe^x$. Неоднородное уравнение разобьем на два: (α) $y''-2y'+y=x^2$ и (β) $y''-2y'+y=2\sin x-\cos x$.

Для уравнения (α) имеем $m=2$, $\mu=0$, $r=0$, поэтому $\tilde{y}_1(x)=Ax^2+Bx+C$. Продифференцируем: $y'=2Ax+B$, $y''=2A$. Подставим в уравнение (α): $2A-2(2Ax+B)+$ $+(Ax^2+Bx+C)=x^2$. Приравнивая коэффициенты при 1, x, x^2, получим систему

$$\begin{cases} 2A-2B+C=0, \\ -4A+B=0, \\ A=1. \end{cases}$$

Ее решение: $A = 1$, $B = 4$, $C = 6$. Следовательно, $\tilde{y}_1(x)=x^2+4x+6$.

Для уравнения (β) $m = 0$, $\mu = \pm i$, $r = 0$. Поэтому $\tilde{y}_2(x)=A\cos x+B\sin x$.
Дифференцируем: $y' = -A\sin x + B\cos x$, $y'' = -A\cos x - B\sin x$.
Подставляем в уравнение (β):

$$(-A\cos x - B\sin x) - 2(-A\sin x + B\cos x) + (A\cos x + B\sin x) = 2\sin x - \cos x.$$

Упростим: $2A\sin x - 2B\cos x = 2\sin x - \cos x$. Отсюда $A = 1$, $B=\frac{1}{2}$. Следовательно, $\tilde{y}_2(x)=\cos x+\frac{1}{2}\sin x$. Прибавив к сумме $\tilde{y}_1(x)+\tilde{y}_2(x)$ общее решение однородного уравнения, получим ответ:

$$y(x)=x^2+4x+6+\cos x+\frac{1}{2}\sin x+C_1e^x+C_2xe^x,\ C_1,C_2\in\mathbb{R}.\ \blacktriangleright$$

ПРИМЕР 7.41. Найти общее решение уравнения $y'' + 2y' + y = e^x\sin 2x$.

◀ Решим однородное уравнение $y'' + 2y' + y = 0$. Его характеристическое уравнение $\lambda^2 + 2\lambda + 1 = 0$ имеет корни $\lambda_{1,\,2} = -1$. Следовательно, $y_0(x) = C_1e^{-x} + C_2xe^{-x}$. Здесь $P(x) = 1$, поэтому $m = 0$. Так как $e^x\sin 2x=\frac{e^{(1+2i)x}-e^{(1-2i)x}}{2i}$, то $\mu = 1 \pm 2i$. Так как μ не является корнем характеристического уравнения, то $r = 0$. Таким образом, частное решение неоднородного уравнения следует искать в виде $\tilde{y}(x)=Ae^x\cos 2x+Be^x\sin 2x$.
Дифференцируем:

$$y' = Ae^x\cos 2x - 2Ae^x\sin 2x + Be^x\sin 2x + 2Be^x\cos 2x,$$
$$y'' = -3Ae^x\cos 2x - 4Ae^x\sin 2x - 3Be^x\sin 2x + 4Be^x\cos 2x.$$

Подставим в исходное уравнение:

$$-3Ae^x\cos 2x - 4Ae^x\sin 2x - 3Be^x\sin 2x + 4Be^x\cos 2x + 2(Ae^x\cos 2x -$$
$$- 2Ae^x\sin 2x + Be^x\sin 2x + 2Be^x\cos 2x) + (Ae^x\cos 2x + Be^x\sin 2x) = e^x\sin 2x.$$

После упрощения получим $-8A\sin 2x + 8B\cos 2x = e^x\sin 2x$. Отсюда $A=-\frac{1}{8}$, $B = 0$. Таким образом, $\tilde{y}(x)=-\frac{1}{8}e^x\cos 2x$. Прибавив к этой функции общее решение однородного уравнения, получим ответ: $y(x)=-\frac{1}{8}e^x\cos 2x+C_1e^{-x}+C_2xe^{-x}$, $C_1,C_2\in\mathbb{R}$. ▶

В задачах 7.218–7.225 найти общие решения заданных уравнений.

7.218. $y'' - 2y' - 3y = e^{4x}$.
7.219. $y'' + y = 4xe^x$.
7.220. $y'' - y = 2e^x - x^2$.
7.221. $y'' + y' - 2y = 3xe^x$.
7.222. $y'' + 3y' - 4y = e^{-4x} + xe^{-x}$.
7.223. $\ddot{x}+2\dot{x}-3x=t^2e^t$.
7.224. $\ddot{x}-9x=e^{3t}\cos t$.
7.225. $y''' + 2y'' - 3y' - 10y = 50x^2$.

ПРИМЕР 7.42. Написать вид частного решения неоднородного уравнения с неопределенными коэффициентами, при этом коэффициенты не находить:

а) $y'' + 2y' - 3y = 3x - 1 + x^2e^x + \sin 3x$;
б) $y'' + 4y = x\sin 2x$; в) $y''' + 8y = x^2 + e^x\cos 3x$.

◄ а) Характеристическое уравнение однородного уравнения $\lambda^2 + 2\lambda - 3 = 0$ имеет корни $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = -3$. В правой части уравнения стоят функции $f_1(x) = 3x - 1$, $f_2(x) = x^2e^x$, $f_3(x) = \sin 3x$.

Для функции $f_1(x)$ имеем $m = 1$, $\mu = 0$, $r = 0$. Поэтому $\tilde{y}_1(x) = Ax + B$.

Для функции $f_2(x)$ имеем $m = 2$, $\mu = 1$, $r = 1$. Поэтому $\tilde{y}_2(x) = x(Ax^2 + Bx + C)e^x$.

Для функции $f_3(x)$ имеем $m = 0$, $\mu = \pm 3i$, $r = 0$. Поэтому $\tilde{y}_3(x) = A\cos 3x + B\sin 3x$.

Таким образом, $\tilde{y}(x) = Ax + B + (Cx^3 + Dx^2 + Ex)e^x + F\cos 3x + G\sin 3x$.

б) Характеристическое уравнение однородного уравнения имеет вид $\lambda^2 + 4 = 0$, откуда $\lambda = \pm 2i$. Имеем $m = 1$, $\mu = \pm 2i$, $r = 1$. Следовательно,

$$\tilde{y}(x) = x(Ax + B)\cos 2x + x(A_1x + B_1)\sin 2x.$$

в) Характеристическое уравнение однородного уравнения: $\lambda^3 + 8 = 0$, или $(\lambda + 2)(\lambda^2 - 2\lambda + 4) = 0$. Его корни: $\lambda_1 = -2$, $\lambda_{2,3} = 1 \pm i\sqrt{3}$.

Для уравнения $y''' + 8y = x^2$ имеем $m = 2$, $\mu = 0$, $r = 0$, поэтому $\tilde{y}_1(x) = Ax^2 + Bx + C$.

Для уравнения $y''' + 8y = ex\cos 3x$ имеем $m = 0$, $\mu = 1 \pm 3i$, $r = 0$, поэтому

$$\tilde{y}_2(x) = Ae^x\cos 3x + Be^x\sin 3x.$$

Таким образом,

$$\tilde{y}(x) = Ax^2 + Bx + C + De^x\cos 3x + Ee^x\sin 3x. \blacktriangleright$$

В задачах 7.226–7.231 для заданных уравнений написать вид частных решений с неопределенными коэффициентами, сами коэффициенты не находить.

7.226. $y'' - 4y' + 3y = e^{3x}\sin x + x^2 - 3x$.

7.227. $y'' + 2y' + 26y = xe^{-x}\cos 5x$.

7.228. $y'' - 2y' - 8y = xe^{4x} + 1$.

7.229. $y'' - 2y' - 8y = e^{-2x}\cos 3x$.

7.230. $y'' - 2y' + y = xe^x\cos 5x + (x^2 - 1)e^{-x}$.

7.231. $y^{\mathrm{IV}} - y = e^x\sin x + x^2e^{-x}$.

§ 7.4. СИСТЕМЫ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

1. Основные понятия. Связь с дифференциальными уравнениями *n*-го порядка

Если система k дифференциальных уравнений, связывающая независимую переменную x и k функций $y_1(x), \ldots, y_k(x)$, разрешена относительно старших производных этих функций $y_1^{(p_1)}(x), \ldots, y_k^{(p_k)}(x)$, т. е. имеет вид

$$\begin{cases} y_1^{(p_1)}(x) = f_1(x, y_1, \ldots, y_1^{(p_1-1)}(x), \ldots, y_k, \ldots, y_k^{(p_k-1)}(x)), \\ y_2^{(p_2)}(x) = f_2(x, y_1, \ldots, y_1^{(p_1-1)}(x), \ldots, y_k, \ldots, y_k^{(p_k-1)}(x)), \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ y_k^{(p_k)}(x) = f_n(x, y_1, \ldots, y_1^{(p_1-1)}(x), \ldots, y_k, \ldots, y_k^{(p_k-1)}(x)), \end{cases} \tag{7.39}$$

то она называется *канонической*, причем число $n = p_1 + p_2 + \ldots + p_k$ называется *порядком* системы. Каноническая система (7.39) при $p_1 = p_2 = \ldots = p_k = 1$, т. е. система дифференциальных уравнений 1-го порядка

$$\begin{cases} y_1'(x) = f_1(x, y_1, y_2, \ldots, y_n), \\ y_2'(x) = f_2(x, y_1, y_2, \ldots, y_n), \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ y_n'(x) = f_n(x, y_1, y_2, \ldots, y_n) \end{cases} \tag{7.40}$$

называется *нормальной* системой *порядка n*.

Решением системы (7.40) на интервале $a < x < b$ называется совокупность функций $y_1 = \varphi_1(x)$, ..., $y_n = \varphi_n(x)$, непрерывно дифференцируемых на (a, b) и обращающих уравнения системы (7.40) в тождество относительно $x \in (a, b)$.

Интегралом нормальной системы (7.40) называется функция $\Phi(x, y_1, \ldots, y_n)$, определенная и непрерывная вместе с частными производными $\frac{\partial \Phi}{\partial x}, \frac{\partial \Phi}{\partial y_1}, \ldots, \frac{\partial \Phi}{\partial y_n}$ в некоторой области D изменения переменных и принимающая при любых $x \in (a, b)$ постоянное значение при подстановке в нее произвольных решений системы.

Равенство

$$\Phi(x, y_1, \ldots, y_n) = C,$$

где $\Phi(x, y_1, \ldots, y_n)$ — интеграл нормальной системы, а C — произвольная постоянная, называется *первым интегралом* системы (7.40).

Дифференциальное уравнение n-го порядка

$$y^{(n)} = f(x, y, y', \ldots, y^{(n-1)})$$

можно свести к нормальной системе (7.40). Обратно, системы (7.39) и (7.40) в большинстве случаев сводятся к дифференциальному уравнению n-го порядка, решая которое можно найти и решение исходной системы.

ПРИМЕР 7.43. Привести систему дифференциальных уравнений $\begin{cases} y_1'' = 2y_1 - 3y_2, \\ y_2'' = y_1 - 2y_2 \end{cases}$ к нормальному виду.

◀ Положим $\frac{dy_1}{dx} = y_3$ и $\frac{dy_2}{dx} = y_4$. Тогда данную систему можно записать в виде

$$\begin{cases} y_1' = y_3, \\ y_2' = y_4, \\ y_3' = 2y_1 - 3y_2, \\ y_4' = y_1 - 2y_2, \end{cases}$$

которая и является нормальной системой 4-го порядка. ▶

ПРИМЕР 7.44. Привести к нормальной системе дифференциальное уравнение $y'' - 5y' + 6y = 0$.

◀ Положим $y_1 = y$, $y_2 = y'$. Тогда $y_2' = y''$ и $y'' = 5y' - 6y = 5y_2 - 6y_1$. Значит, уравнение эквивалентно нормальной системе

$$\begin{cases} y_1' = y_2, \\ y_2' = -6y_1 + 5y_2. \end{cases} \blacktriangleright$$

ПРИМЕР 7.45. Решить систему уравнений $\begin{cases} y_1' = 4y_1 - y_2, \\ y_2' = -6y_1 + 3y_2, \end{cases}$ сведя ее к одному уравнению второго порядка.

◄ Выразим y_2 из первого уравнения: $y_2 = 4y_1 - y_1'$. Подставим это выражение во второе уравнение: $(4y_1 - y_1')' = -6y_1 + 3(4y_1 - y_1')$, откуда получаем для функции y_1 уравнение второго порядка $y_1'' - 7y_1' + 6y_1 = 0$. Его характеристическое уравнение имеет корни $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = 6$. Следовательно, $y_1 = C_1e^x + C_2e^{6x}$. Теперь находим функцию y_2:

$$y_2 = 4(C_1e^x + C_2e^{6x}) - C_1e^x - 6C_2e^{6x} = 3C_1e^x - 2C_2e^{6x}.$$

Таким образом, общее решение системы имеет вид

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = C_1\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}e^x + C_2\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}e^{6x},$$

где $C_1, C_2 \in \mathbb{R}$. ►

Задача Коши для системы (7.40) ставится следующим образом: найти решение $y_1(x), \ldots, y_n(x)$ системы (7.40), удовлетворяющее начальным условиям

$$y_1(x_0) = y_1^0,\ y_2(x_0) = y_2^0,\ \ldots,\ y_n(x_0) = y_n^0, \tag{7.41}$$

где $y_1^0, y_2^0, \ldots, y_n^0$ — заданные числа.

ТЕОРЕМА КОШИ. *Пусть правые части* $f_1, f_2, \ldots, f_n$ *нормальной системы* (7.40) *определены в* $(n + 1)$*-мерной области* D *изменения переменных* $x, y_1, y_2, \ldots, y_n$. *Если в некоторой окрестности* Δ *точки* $M_0 = (x_0, y_1^0, y_2^0, \ldots, y_n^0) \in D$ *функции* f_k, $k = 1, 2, \ldots, n$, *непрерывны и имеют непрерывные частные производные* $\dfrac{df_k}{dy_j}$ *по переменным* $y_1, y_2, \ldots, y_n$, *то существует отрезок* $x_0 - h \le x \le x_0 + h$ *изменения переменной* x, *в которой существует, и притом единственное, решение системы* (7.40), *удовлетворяющее начальным условиям* (7.41).

Общим решением системы (7.40) называется совокупность функций

$$y_k(x, C_1, C_2, \ldots, C_n),\quad k = 1, 2, \ldots, n, \tag{7.42}$$

зависящих от n произвольных постоянных, которые при любых допустимых значениях постоянных $C_1, C_2, \ldots, C_n$ обращают уравнения системы (7.40) в тождества, и в области, в которой выполнены условия теоремы Коши, из совокупности функции (7.42) можно получить решение любой задачи Коши.

В задачах 7.232, 7.233 путем исключения параметров a и b найти систему дифференциальных уравнений, определяющих заданные семейства линий в пространстве.

7.232. $\begin{cases} y = ax + b, \\ x^2 + y^2 = z^2 - 2bz. \end{cases}$ **7.233.** $\begin{cases} ax + z = b, \\ x^2 + y^2 = b^2. \end{cases}$

В задачах 7.234–7.238 дифференциальные уравнения или системы заменить нормальными системами дифференциальных уравнений (x — независимая переменная).

7.234. $y''' - xyy' + y'^3 = 0.$ **7.235.** $y^{\mathrm{IV}} - y^2 = 0.$

7.236. $\begin{cases} y'' = y' + z', \\ z'' = z' + u', \\ u'' = u' + y'. \end{cases}$ **7.237.** $\begin{cases} z'' + z - 2y = 0, \\ y''' + z - y = x. \end{cases}$

7.238. $\begin{cases} y'' - z - u = 0, \\ z' + uz = x^2, \\ u''' = -xy. \end{cases}$

В задачах 7.239, 7.240 проверить, что функции $y(x)$ и $z(x)$ являются решениями указанных систем.

7.239. $\begin{cases} y' = -\dfrac{1}{z}, \\ z' = \dfrac{1}{y}; \end{cases}$ $y = e^{-x/2},\ z = 2e^{x/2}.$

7.240. $\begin{cases} y' = 1 - \dfrac{2y}{x}, \\ z' = y + z + \dfrac{2y}{x} - 1; \end{cases}$ $y = \dfrac{x}{3} + \dfrac{1}{x^2},\ z = e^x - \dfrac{x}{3} - \dfrac{1}{x^2}.$

В задачах 7.241–7.243 проверить, что функции $\Phi(x)$ являются интегралами данных нормальных систем.

7.241. $\Phi(x, y, z) = x + y + z;$ $\begin{cases} y' = \dfrac{z}{y - z}, \\ z' = \dfrac{y}{z - y}. \end{cases}$

7.242. $\Phi(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2;$ $\begin{cases} y' = \dfrac{3x - 4z}{2z - 3y}, \\ z' = \dfrac{4y - 2x}{2z - 3y}. \end{cases}$

7.243. $\Phi(x, y, z) = \dfrac{1}{y} - \dfrac{1}{z};$ $\begin{cases} y' = \dfrac{y}{z}, \\ z' = \dfrac{z}{y}. \end{cases}$

2. Методы интегрирования нормальных систем

Одним из методов решения систем дифференциальных уравнений является *метод исключения неизвестных*, который сводит систему уравнений к одному или нескольким дифференциальным уравнениям с одной неизвестной функцией в каждом. Поясним это на примерах.

ПРИМЕР 7.46. Найти общее решение системы дифференциальных уравнений

$$\begin{cases} \dfrac{dy}{dx} = 2z - y, \\ \dfrac{dz}{dx} = 3z - 2y \end{cases}$$

и частное решение, удовлетворяющее начальным условиям $y(1) = 1$, $z(1) = -1$.

◀ Выражаем z из первого уравнения системы: $z=\frac{1}{2}\left(\frac{dy}{dx}+y\right)$, и подставляем во второе уравнение: $\frac{d}{dx}\left(\frac{1}{2}\left(\frac{dy}{dx}+y\right)\right)=3\left(\frac{1}{2}\left(\frac{dy}{dx}+y\right)\right)-2y$. Дифференцируя по x выражения, стоящие в скобках, получаем $\frac{1}{2}\frac{d^2y}{dx^2}+\frac{1}{2}\frac{dy}{dx}=\frac{3}{2}\frac{dy}{dx}+\frac{3}{2}y-2y$, или $y'' - 2y' + y = 0$ — линейное однородное уравнение второго порядка с постоянными коэффициентами. Его характеристическое уравнение $\lambda^2 - 2\lambda + 1 = 0$ имеет корни $\lambda_1 = \lambda_2 = 1$. Записываем общее решение $y(x) = C_1e^x + C_2xe^x$, $C_1, C_2 \in \mathbb{R}$. Тогда $z(x)=\left(C_1+\frac{C_2}{2}\right)e^x+C_2xe^x$.

Система функций $y(x) = C_1e^x + C_2xe^x$, $z(x)=\left(C_1+\frac{C_2}{2}\right)e^x+C_2xe^x$ образует общее решение заданной системы дифференциальных уравнений.

Для нахождения частного решения используем начальные условия $y(1) = 1$, $z(1) = -1$. Получаем $1 = C_1e + C_2e$, $-1=C_1e+\frac{3}{2}C_2e$. Отсюда $C_1=\frac{5}{e}$ и $C_2=-\frac{4}{e}$. Итак, система функций

$$y(x)=(5-4x)e^{x-1},\ z(x)=(3-4x)e^{x-1}$$

и есть искомое частное решение. ▶

Не всякую систему дифференциальных уравнений можно свести к одному уравнению. Так, например, нельзя свести к одному уравнению систему дифференциальных уравнений

$$\begin{cases} y'=xy, \\ z'+y'=z+xy, \end{cases}$$

поскольку после подстановки во второе уравнение вместо y' его значения xy, получим два не связанных между собой дифференциальных уравнения, каждое из которых содержит только одну функцию:

$$y' = xy,\ z' = z.$$

Другим методом интегрирования систем дифференциальных уравнений является метод выделения интегрируемых комбинаций, т. е. получение из системы (7.40) такого уравнения, которое можно проинтегрировать и получить первый интеграл. Если найдены n независимых первых интегралов системы (7.40), то их совокупность дает общий интеграл.

ПРИМЕР 7.47. Найти общий интеграл системы дифференциальных уравнений

$$\begin{cases} \frac{dy}{dx}=\frac{z+e^y}{z+e^x}, \\ \frac{dz}{dx}=\frac{z^2-e^{x+y}}{z+e^x}. \end{cases}$$

◀ Умножим обе части второго уравнения системы на e^{-x} и сложим их с соответствующими частями первого уравнения и с тождеством $-e^{-x}z \equiv -e^{-x}z$, получим $(e^{-x}z)' + y' = 0$, откуда $e^{-x}z + y = C_1$. Это первый интеграл системы.

Теперь умножим обе части второго уравнения системы на e^{-y} и сложим с равенствами $-e^{-y}zy' = -e^{-y}z\dfrac{z+e^y}{z+e^x}$ и $x' = 1$, получим $(e^{-y}z)' + x' = 0$, откуда $e^{-y}z + x = C_2$. Это тоже первый интеграл системы. Так как якобиан системы

$$\begin{cases} e^{-x}z + y = C_1, \\ e^{-y}z + x = C_2 \end{cases}$$

отличен от нуля (проверьте!), то оба первых интеграла независимы между собой, поэтому их совокупность неявно определяет общее решение заданной системы уравнений. ►

В задачах 7.244–7.251 найти общие решения систем дифференциальных уравнений.

7.244. $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = \dfrac{1}{y}, \\ \dfrac{dy}{dt} = \dfrac{1}{x}. \end{cases}$ **7.245.** $\dfrac{dt}{xy} = \dfrac{dx}{ty} = \dfrac{dy}{tx}.$

7.246. $\begin{cases} \dfrac{dy}{dx} = \dfrac{z}{(z-y)^2}, \\ \dfrac{dz}{dx} = \dfrac{y}{(z-y)^2}. \end{cases}$ **7.247.** $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = \dfrac{x-y}{z-t}, \\ \dfrac{dy}{dt} = \dfrac{x-y}{z-t}, \\ \dfrac{dz}{dt} = x - y + 1. \end{cases}$

7.248. $\begin{cases} \dfrac{dy}{dx} = \dfrac{2xy}{x^2 - y^2 - z^2}, \\ \dfrac{dz}{dx} = \dfrac{2xz}{x^2 - y^2 - z^2}. \end{cases}$ **7.249.** $\dfrac{dt}{xt} = \dfrac{dx}{x^2} = \dfrac{dy}{txy - 2t^2}.$

7.250. $\dfrac{dx}{1+\sqrt{z-x-y}} = \dfrac{dy}{1} = \dfrac{dz}{2}.$ **7.251.** $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = \dfrac{y^2}{x}, \\ \dfrac{dy}{dt} = \dfrac{x^2}{y}. \end{cases}$

В задачах 7.252, 7.253 найти общее решение системы дифференциальных уравнений, а также частное решение, удовлетворяющее заданным начальным условиям.

7.252. $\begin{cases} \dfrac{dy}{dx} = \dfrac{z-1}{z}, \\ \dfrac{dz}{dx} = \dfrac{1}{y-x}; \end{cases}$ $y(0) = -1,\ z(0) = 1.$ **7.253.** $\begin{cases} \dfrac{dy}{dx} = \dfrac{x}{yz}, \\ \dfrac{dz}{dx} = \dfrac{x}{y^2}; \end{cases}$ $y(0) = z(0) = 1.$

ГЛАВА 8

ДИСКРЕТНАЯ МАТЕМАТИКА

§ 8.1. ФУНКЦИИ АЛГЕБРЫ ЛОГИКИ

1. Основные понятия, связанные с булевым кубом

Упорядоченный набор чисел $(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$, где $\alpha_i \in E_2 = \{0, 1\}$, $i = 1, 2, \ldots, n$, называется *булевым* или *двоичным набором*; он обозначается $\tilde{\alpha}$ или $\tilde{\alpha}^n$. Элементы набора $\tilde{\alpha}^n$ называются его *компонентами* или *координатами*, а число n называют *длиной набора*. С каждым двоичным набором $\tilde{\alpha}^n$ связаны две характеристики: *вес* (или *норма*) набора $\|\tilde{\alpha}^n\| = \sum\limits_{i=1}^{n} \alpha_i$ — число его координат, равных единице, и *номер* набора $\nu(\tilde{\alpha}) = \sum\limits_{k=1}^{n} \alpha_k 2^{n-k}$. Множество B^n всех булевых векторов $\tilde{\alpha}^n$ длины n называется *n-мерным кубом* $B^n = \underbrace{E_2 \times \ldots \times E_2}_{n \text{ раз}}$, а сами наборы – его *вершинами*.

На рис. 8.1 изображены проекции 1-, 2-, 3- и 4-мерного кубов на плоскость.

Пусть $\sigma_{i_1}, \sigma_{i_2}, \ldots, \sigma_{i_k}$ — фиксированный набор чисел из 0 и 1 ($1 \le i_1 < \ldots < i_k \le n$). Множество всех вершин $(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ куба B^n таких, что $\alpha_{i_1} = \sigma_{i_1}, \alpha_{i_2} = \sigma_{i_2}, \ldots, \alpha_{i_k} = \sigma_{i_k}$, называется $(n - k)$*-мерной гранью*. Каждая $(n - k)$-мерная грань сама является $(n - k)$-мерным подкубом куба B^n.

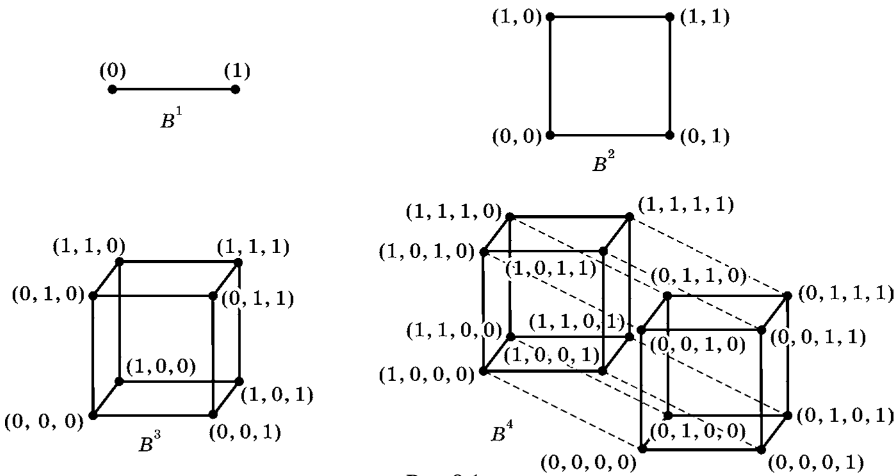


Рис. 8.1

Расстоянием Хемминга между вершинами $\tilde{\alpha}$ и $\tilde{\beta}$ куба B^n называется число $\rho(\tilde{\alpha},\tilde{\beta})=\sum_{i=1}^{n}|\alpha_i-\beta_i|$. Вершины $\tilde{\alpha}$ и $\tilde{\beta}$ куба B^n — *соседние*, если $\rho(\tilde{\alpha},\tilde{\beta})=1$, и *противоположные*, если $\rho(\tilde{\alpha},\tilde{\beta})=n$.

Говорят, что набор $\tilde{\alpha}$ *предшествует* (*строго предшествует* при $\tilde{\alpha}\neq\tilde{\beta}$) набору $\tilde{\beta}$, и пишут $\tilde{\alpha}\preceq\tilde{\beta}$ ($\tilde{\alpha}\prec\tilde{\beta}$), если $\alpha_i\le\beta_i$ для всех $i = 1, \ldots, n$. Наборы $\tilde{\alpha}$ и $\tilde{\beta}$ называют *сравнимыми*, если либо $\tilde{\alpha}\preceq\tilde{\beta}$, либо $\tilde{\beta}\preceq\tilde{\alpha}$.

ПРИМЕР 8.1. Найти: а) номер $\nu(\tilde{\alpha})$ двоичного набора $\tilde{\alpha}=(1101100)$; б) двоичный набор $\tilde{\alpha}$ минимальной длины с номером 123.

◀ а) Используя формулу $\nu(\tilde{\alpha})=\sum_{i=1}^{n}\alpha_i 2^{n-i}$, где α_i — i-я координата набора $\tilde{\alpha}$, получаем

$$\nu(\tilde{\alpha})=\sum_{i=1}^{n}\alpha_i 2^{n-i}=2^6+2^5+2^3+2^2=64+32+8+4=108.$$

б) Для нахождения набора $\tilde{\alpha}$, имеющего номер $\nu(\tilde{\alpha})$, необходимо этот номер записать в двоичной системе счисления. Для этого применяем процедуру последовательного деления с остатком на число 2:

$$\begin{aligned}123 &= 64 + 59 = \ldots = 64 + 32 + 16 + 8 + 2 + 1 =\\ &= 1\cdot 2^6 + 1\cdot 2^5 + 1\cdot 2^4 + 1\cdot 2^3 + 0\cdot 2^2 + 1\cdot 2^1 + 1\cdot 2^0,\end{aligned}$$

т. е. $\alpha_1 = 1, \alpha_2 = 1, \alpha_3 = 1, \alpha_4 = 1, \alpha_5 = 0, \alpha_6 = 1, \alpha_7 = 1$. Отсюда получаем $\tilde{\alpha}=(1111011)$. ▶

В задачах 8.1–8.6 найти номера $\nu(\tilde{\alpha})$ указанных двоичных наборов.

8.1. (1010). **8.2.** (1001001).

8.3. (0011001110). **8.4.** $(1\underbrace{0\ldots0}_{k\text{ раз}}1)$, $k\ge1$.

8.5. $(\underbrace{1\ldots1}_{m\text{ раз}}\underbrace{0\ldots0}_{k\text{ раз}})$, $m,k\ge1$. **8.6.** $(1\underbrace{0\ldots0}_{k\text{ раз}}\underbrace{1\ldots1}_{k\text{ раз}}\underbrace{0\ldots0}_{k\text{ раз}}1)$, $k\ge1$.

В задачах 8.7–8.10 найти двоичный набор $\tilde{\alpha}$ длины k с номером n.

8.7. $k = 6$, $n = 54$. **8.8.** $k = 11$, $n = 2000$.

8.9. $k = m + 1$, $n = 2^m + 1$, $m \ge 1$. **8.10.** $k = m$, $n = 3\cdot 2^{m-2} - 1$, $m \ge 2$.

В задачах 8.11–8.12 для сравнимых наборов множества A из B^n выписать их в порядке предшествования ($\preceq$). Выяснить, имеются ли в множестве A соседние и противоположные наборы, и, если они имеются, выписать их.

8.11. A = {(001), (010), (101), (100), (110), (111)}.

8.12. A = {(00111), (01011), (00110), (10110), (11010), (01010), (11100), (11011)}.

В задачах 8.13–8.17 в множестве наборов B^n найти число:

8.13. Наборов $\tilde{\alpha}^n$, имеющих вес k ($n \ge k \ge 0$, $n \ge 1$).

8.14. Наборов $\tilde{\alpha}^n$, удовлетворяющих условию $2^{n-1}\le\nu(\tilde{\alpha}^n)<2^n$ ($n \ge 1$).

8.15. Упорядоченных пар соседних наборов при $n \ge 1$.

8.16. Число упорядоченных пар $(\tilde{\alpha}^n,\tilde{\beta}^n)$ наборов таких, что $\rho(\tilde{\alpha}^n,\tilde{\beta}^n)=k$ ($n \ge k \ge 1$).

8.17. Число наборов $\tilde{\alpha}^n$ веса k, у которых между любыми единичными компонентами находится не менее r нулевых компонент ($n - 2 \geq r \geq 0$, $n \geq k \geq 2$).

В задачах 8.18–8.21 доказать справедливость утверждений.

8.18. Два различных набора в B^n, имеющих одинаковый вес, несравнимы.

8.19. В B^n существуют только два сравнимых противоположных набора.

8.20. Всякое подмножество наборов в B^n, содержащее не менее $n + 2$ наборов, содержит пару несравнимых наборов ($n \geq 2$).

8.21. Число наборов в B^n, не сравнимых с фиксированным набором $\tilde{\alpha}^n$, имеющим вес k, равно $2^n - 2^{n-k} - 2^k + 1$ ($n \geq k \geq 0$, $n \geq 1$).

Функция $f(\tilde{x}^n) = f(x_1, \ldots, x_n)$ такая, что $f\colon B^n \to E_2$, называется *булевой* функцией (или *функцией алгебры логики*) от n переменных. Множество булевых функций от n переменных обозначают символом $P_2(n)$, а множество всех булевых функций — P_2.

Таблица 8.1

x_1	x_2	...	x_{n-1}	x_n	$f(\tilde{x}^n)$
0	0	...	0	0	$f(0, 0, ..., 0, 0)$
0	0	...	0	1	$f(0, 0, ..., 0, 1)$
0	0	...	1	0	$f(0, 0, ..., 1, 0)$
0	0	...	1	1	$f(0, 0, ..., 1, 1)$
...	...	...	...	...	...
1	1	...	1	1	$f(1, 1, ..., 1, 1))$

Для задания булевой функции $f(\tilde{x}^n)$ требуется указать ее значения на каждом наборе из B^n. Эти значения функции удобно располагать в виде таблицы T_f, называемой *таблицей истинности* функции, в которой наборы $\tilde{\sigma} = (\sigma_1, \ldots, \sigma_n)$ выписываются сверху вниз в порядке возрастания их номеров (табл. 8.1).

При стандартном расположении наборов (в соответствии с увеличением их номера) функцию $f(\tilde{x}^n)$ можно задавать *вектором значений* $\tilde{\alpha}_f = (\alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_{2^n-1})$ (или $\tilde{\alpha}_f^{2^n}$), в котором координата α_i равна значению функции $f(\tilde{x}^n)$ в i-й строке таблицы ($i = 0, 1, \ldots, 2^n - 1$), т. е. на наборе переменных $\tilde{\sigma}_i$.

Переменная x_i функции $f(x_1, \ldots, x_n)$ называется *существенной*, если существуют такие значения $\sigma_1, \ldots, \sigma_{i-1}, \sigma_{i+1}, \ldots, \sigma_n$ переменных $x_1, \ldots, x_{i-1}, x_{i+1}, \ldots, x_n$, что

$$f(\sigma_1, \ldots, \sigma_{i-1}, 0, \sigma_{i+1}, \ldots, \sigma_n) \neq f(\sigma_1, \ldots, \sigma_{i-1}, 1, \sigma_{i+1}, \ldots, \sigma_n).$$

В противном случае переменная x_i — *фиктивная*, т. е. функция f не зависит от x_i.

Процедура удаления (*введения*) фиктивных переменных состоит в следующем. Пусть переменная x_i для функции $f(\tilde{x}^n)$ — фиктивная. Тогда для ее удаления вычеркиваем все строки таблицы 8.1, в которых $x_i = 1$, и столбец переменной x_i. В итоге получается функция от $n - 1$ переменной. Чтобы ввести фиктивную переменную x и получить функцию $f(x_1, \ldots, x_{i-1}, x, x_i, \ldots, x_n)$ от $n + 1$ переменной, необходимо построить новую таблицу с $n + 1$ столбцом для переменных и с 2^{n+1} строкой для их значений и заполнить столбец значений функции следующим образом. Для каждой пары наборов значений переменных $(\sigma_1, \ldots, \sigma_{i-1}, 0, \sigma_i, \ldots, \sigma_n)$ и $(\sigma_1, \ldots, \sigma_{i-1}, 1, \sigma_i, \ldots, \sigma_n)$ продублировать значения функции $f(\sigma_1, \ldots, \sigma_{i-1}, \sigma_i, \ldots, \sigma_n)$ из исходной таблицы.

Таблица 8.2

x_1	x_2	x_3	$f(\tilde{x}^3)$
0	0	0	1
0	0	1	1
0	1	0	0
0	1	1	0
1	0	0	1
1	0	1	1
1	1	0	0
1	1	1	0

Две функции f_1 и f_2 от разного количества переменных называются *равными*, если одна получается из другой путем удаления или введения фиктивных переменных. В дальнейшем всякую рассматриваемую конечную совокупность булевых функций будем считать зависящей от одного и того же числа переменных, являющегося объединением множеств переменных всех функций совокупности.

ПРИМЕР 8.2. Определить фиктивные переменные функции $f(\tilde{x}^3)$, заданной таблицей 8.2.

◀ Рассмотрев все пары наборов $(\sigma_1, \sigma_2, 0)$ и $(\sigma_1, \sigma_2, 1)$ в таблице 8.2, убеждаемся в том, что переменная x_3 для функции $f(\tilde{x}^3)$ является фиктивной. Удалив ее, вычеркивая все строки таблицы, в которых $x_3 = 1$, а также столбец переменной x_3, получаем функцию двух переменных f (табл. 8.3). Затем убеждаемся, что переменная x_1 также является фиктивной. В результате получаем $f(\tilde{x}^3) = x_2$ (табл. 8.4). ▶

Таблица 8.3

x_1	x_2	f
0	0	1
0	1	0
1	0	1
1	1	0

Таблица 8.4

x_2	f
0	1
1	0

В задачах 8.22–8.28 указать фиктивные переменные заданных функций f.

8.22. $f(\tilde{x}^3) = (10101010)$.

8.23. $f(\tilde{x}^4) = (1011010110110101)$.

8.24. $f(\tilde{x}^4) = (0101111101011111)$.

8.25. $f(\tilde{x}^4) = (1100110000110011)$.

Обозначим символом $P_2^c(n)$ множество всех булевых функций, зависящих от переменных $x_1, x_2, \ldots, x_n$ и притом от каждой из них существенным образом.

8.26. Выписать все функции множества $P_2^c(2)$.

8.27. Найти число элементов множества $P_2^c(3)$.

8.28. Доказать, что число элементов множества $P_2^c(n)$ равно

$$\sum_{k=0}^{n} (-1)^k C_n^k 2^{2^{n-k}}.$$

Таблица 8.5

x_1	f_0	f_1	f_2	f_3
0	0	0	1	1
1	0	1	0	1

В таблице 8.5 представлены все булевы функции одной переменной. Функции f_0 и f_3 называются соответственно (*тождественным*) *нулем* и (*тождественной*) *единицей*. Функция f_1 называется *тождественной функцией* и обозначается x. Функция f_2 называется *отрицанием* (или *инверсией*) x, обозначается $\bar{x}$ или $\neg x$ и читается «не x».

В таблице 8.6 представлены все булевы функции от двух переменных. Некоторые из этих функций имеют определенные названия:

1. *Конъюнкция* (x_1 и x_2) $f_1 = x_1 \,\&\, x_2$, или $x_1 x_2$, или $x_1 \wedge x_2$, читается «x_1 и x_2».
2. *Сумма по модулю* 2 (x_1 и x_2) $f_6 = x_1 \oplus x_2$, читается «x_1 плюс x_2».
3. *Дизъюнкция* (x_1 и x_2) $f_7 = x_1 \vee x_2$, читается «x_1 или x_2».
4. *Стрелка Пирса* (x_1 и x_2) $f_8 = x_1 \downarrow x_2$, читается «ни x_1 и ни x_2».
5. *Эквиваленция* (x_1 и x_2) $f_9 = x_1 \sim x_2$ или $x_1 \leftrightarrow x_2$, читается «x_1 эквивалентно x_2».
6. *Импликация* (x_1 и x_2) $f_{13} = x_1 \to x_2$, читается «из x_1 следует x_2».

Таблица 8.6

x_1	x_2	f_0	f_1	f_2	f_3	f_4	f_5	f_6	f_7	f_8	f_9	f_{10}	f_{11}	f_{12}	f_{13}	f_{14}	f_{15}
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1	1	1	1	1	1	1
0	1	0	0	0	0	1	1	1	1	0	0	0	0	1	1	1	1
1	0	0	0	1	1	0	0	1	1	0	0	1	1	0	0	1	1
1	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1

7. *Штрих Шеффера* (x_1 и x_2) $f_{14} = x_1 \mid x_2$, читается «не x_1 или не x_2».

Символы из множества $\mathfrak{B} = \{\neg, \&, \vee, \oplus, \sim, \to, \downarrow, \mid\}$, участвующие в алгебре логики в обозначениях элементарных функций, называют *логическими связками*.

Основные свойства связок:

1. Коммутативность: $x \circ y = y \circ x$, где $\circ \in \{\&, \vee, \oplus, \sim, \downarrow, \mid\}$.
2. Ассоциативность: $(x \circ y) \circ z = x \circ (y \circ z)$, где $\circ \in \{\&, \vee, \oplus, \sim\}$.
3. Дистрибутивность: $(x \vee y)z = xz \vee yz$, $(xy) \vee z = (x \vee y)(y \vee z)$, $(x \oplus y)z = xz \oplus yz$.
4. Законы де Моргана: а) $\overline{xy} = \bar{x} \vee \bar{y}$; б) $\overline{x \vee y} = \bar{x} \cdot \bar{y}$.
5. Закон двойного отрицания: $\bar{\bar{x}} = x$.

8.29. Доказать, что $|P_2(n)| = 2^{2^n}$.

В задачах 8.30–8.33 найти число функций в $P_2(n)$, удовлетворяющих заданным условиям.

8.30. На данных k наборах значения функции фиксированы, а на остальных произвольные ($2^n - 1 \geq k \geq 1$, $n \geq 1$).

8.31. На противоположных наборах функция принимает одинаковые значения ($n \geq 1$).

8.32. На каждой паре соседних наборов функция принимает противоположные значения ($n \geq 1$).

8.33. Функция равна 0 не менее чем на половине наборов ($n \geq 1$).

8.34. Булева функция $f(\tilde{x}^4)$ задается следующим образом: она равна нулю только на таких наборах $\tilde{\alpha} = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4)$, для которых справедливо неравенство $2\alpha_1 + \alpha_2 > \alpha_3 + 2\alpha_4$; на остальных наборах она обращается в 1. Построить таблицу T_f этой функции и выписать наборы множества

$$N_f = \{\tilde{\alpha} \mid f(\tilde{\alpha}) = 1\}.$$

8.35. На аварийном пульте системы расположены четыре сигнальные лампочки L_1, L_2, L_3, L_4. Система выключается в случае, когда выполняется хотя бы одно из следующих условий: а) загорелась лампочка L_1, но не загорелась лампочка L_2; б) загорелись лампочки L_2 и L_3, но не загорелась лампочка L_4; в) загорелась лампочка L_4 и не горит лампочка L_1. Построить вектор значений $\tilde{\alpha}_f$ булевой функции $f(\tilde{x}^4)$, характеризующей условия выключения системы, т. е. $f(\tilde{x}^4) = 1$ тогда и только тогда, когда справедливо хотя бы одно из условий а), б), в); при этом предполагается, что $x_i = 1$, если лампочка L_i горит, и $x_i = 0$, если лампочка L_i не горит.

8.36. Четырем членам C_1, C_2, C_3, C_4 некоторой комиссии сформулированы следующие условия посещения заседаний (хотя бы одно из них они должны выполнить): а) в заседании не участвует ни C_1, ни C_2, но должен быть C_3; б) в заседании принимают участие C_2 и C_4, но отсутствует C_3; в) на заседании должны присутствовать C_1 и C_4. Обязан ли присутствовать на заседании член C_3, если в нем не участвует C_2?

8.37. Проект принимается, если большинство из шести экспертов C_1, ..., C_6 высказались в его пользу. Кроме того, проект все же принимается, если указанное условие не выполнено, но за принятие проекта высказались: а) либо эксперты C_1, C_2, C_3; б) либо эксперты C_2, C_4, C_5; в) либо эксперты C_1, C_5, C_6. Записать в виде булевой функции $f(\tilde{x}^6)$ условие принятия проекта, считая, что $x_i = 1$ в том случае, когда i-й эксперт высказывается за принятие проекта, и $x_i = 0$ в противном случае. Выяснить, будет ли обязательно принят проект, если известно, что за его принятие высказались ровно трое из экспертов C_1, C_3, C_4 и C_6, а кто-то один из экспертов C_2 и C_5 высказался против.

2. Реализация булевых функций с помощью формул

Для функций $f(\tilde{x}^k)$ и $f_1(\tilde{x}^n),\ldots,f_k(\tilde{x}^n)$ функция $\varphi(x_1, \ldots, x_n) = f(f_1(x_1, \ldots, x_n), \ldots, f_k(x_1, \ldots, x_n))$ называется их *суперпозицией*. Выражение U, описывающее результат этой подстановки, называется *формулой*, задающей функцию f.

Пусть $U = U(g_1, \ldots, g_k)$ и $V = V(f_1, \ldots, f_k)$ — две формулы. Говорят, что формулы U и V имеют *одинаковое строение*, если формула U может быть получена из формулы V заменой каждого функционального символа g_i на символ f_i ($i = 1, \ldots, k$).

Пусть $\mathfrak{B} = \{\neg x,\ x \,\&\, y,\ x \vee y,\ x \to y,\ x \sim y,\ x \oplus y,\ x \downarrow y,\ x \mid y\}$ — множество связок. *Формулой над* $\mathfrak{B}$ является всякое (и только такое) выражение вида:

1) x_i, где x_i — любая переменная из множества $\{x_1, \ldots, x_n\}$.

2) $\neg U$, $U \,\&\, V$, $U \vee V$, $U \to V$, $U \sim V$, $U \oplus V$, $U \downarrow V$, $U \mid V$, где U и V — ранее построенные формулы над $\mathfrak{B}$.

Обычно принимаются следующие соглашения для сокращения записи формул над множеством связок $\mathfrak{B}$:

а) внешние скобки у формул опускаются;

б) формула $U \,\&\, V$ записывается в виде $U \cdot V$ или UV;

в) считается, что в формуле вида $\neg U \circ V$, где $\circ \in \mathfrak{B}$, связка $\neg$ имеет приоритет над любой другой связкой и выполняется в первую очередь;

г) формула $\neg U$ записывается в виде $\overline{U}$, а внешние скобки в формулах, над которыми стоит знак отрицания, можно опускать;

д) связка & имеет приоритет над любой другой двухместной связкой из множества $\mathfrak{B}$, поэтому формулы вида $(UV) \circ W$ можно записывать без скобок, т. е. $UV \circ W$.

В задачах 8.38–8.43 построить таблицы истинности функций, заданных указанными формулами.

8.38. $f(\tilde{x}^2) = \overline{x_1 x_2} \oplus (x_1 \to x_2)$.

8.39. $f(\tilde{x}^2) = x_1 x_2 \mid (x_1 \to \overline{x_1 \vee x_2})$.

8.40. $f(\tilde{x}^3) = x_1 x_2 \downarrow (x_3 \to \overline{x}_1)$.

8.41. $f(\tilde{x}^3) = \overline{x_1 \downarrow x_2} \to \overline{x_3 \oplus x_1}$.

8.42. $f(\tilde{x}^4) = x_1 x_2 \vee x_2 x_3 \vee x_3 x_4 \vee x_4 x_1$.

8.43. $f(\tilde{x}^4) = \overline{x_1 \sim x_2} \to (x_3 \oplus \overline{x_4 \mid x_1})$.

Две формулы U и V *эквивалентны*, если заданные ими функции f_U и f_V равны. В эквивалентности формул часто можно убедиться, построив таблицы соответствующих им функций.

ПРИМЕР 8.3. Построив таблицы истинности функций, выяснить, эквивалентны ли формулы

$$U = (\overline{x}_1 \to x_2) \oplus (x_3 \vee x_2) \quad \text{и} \quad V = (x_1 \oplus x_3)\overline{x}_2.$$

◄ Чтобы найти на каждом наборе переменных в таблице истинности значение функции f_U, нужно найти значение $\overline{x}_1$ для вычисления $\overline{x}_1 \to x_2$, затем $x_3 \vee x_2$. Построив их столбцы значений (см. табл. 8.7), строим столбец значений функций f_U, складывая по модулю 2 в каждой строке значения $\overline{x}_1 \to x_2$ и $x_3 \vee x_2$. Аналогично, для

Таблица 8.7

x_1	x_2	x_3	$\overline{x}_1$	$\overline{x}_1 \to x_2$	$x_3 \vee x_2$	f_U	$x_1 \oplus x_3$	$\overline{x}_2$	f_V
0	0	0	1	0	0	**0**	0	1	**0**
0	0	1	1	0	1	**1**	1	1	**1**
0	1	0	1	1	1	**0**	0	0	**0**
0	1	1	1	1	1	**0**	1	0	**0**
1	0	0	0	1	0	**1**	1	1	**1**
1	0	1	0	1	1	**0**	0	1	**0**
1	1	0	0	1	1	**0**	1	0	**0**
1	1	1	0	1	1	**0**	0	0	**0**

построения столбца значений функций f_V строим столбцы значений функций $\overline{x}_2$ и $x_1 \oplus x_3$ (табл. 8.7).

Из таблицы 8.7 видно, что $f_U = f_V$. Следовательно, формулы U и V эквивалентны. ►

В задачах 8.44–8.51, используя таблицу истинности, доказать равенства.

8.44. $x \vee xy = x$ и $x(x \vee y) = x$ (*законы поглощения*).

8.45. $x \,\&\, \overline{x} = x \,\&\, 0 = x \oplus x = 0$.

8.46. $x \vee \overline{x} = x \vee 1 = x \sim x = x \to x = x \oplus \overline{x} = 1$.

8.47. $x \vee x = x \,\&\, x = x \,\&\, 1 = x \vee 0 = x \oplus 0 = x$.

8.48. $x \oplus 1 = x \to 0 = x \sim 0 = x \downarrow x = x \mid x = \overline{x}$.

8.49. $x \vee \overline{x}y = x \vee y$.

8.50. $x \mid y = \overline{xy} = \overline{x} \vee \overline{y}$.

8.51. $x \downarrow y = \overline{x \vee y} = \overline{x} \cdot \overline{y}$.

В задачах 8.52–8.55, построив таблицы истинности соответствующих функций, убедиться в справедливости равенств.

8.52. $x \vee y = (x \to y) \to y$. **8.53.** $x \sim y = (x \to y) \cdot (y \to x)$.

8.54. $xy \vee x\overline{y} = x$ (*склеивание*).

8.55. $xz \vee y\overline{z} \vee xy = xz \vee y\overline{z}$ (*обобщенное склеивание*).

В задачах 8.56–8.59, построив таблицы истинности соответствующих функций, выяснить, эквивалентны ли формулы U и V.

8.56. $U = (\overline{x} \to y) \oplus ((y \to \overline{z}) \to xy)$ и $V = \overline{yz \to x}$.

8.57. $U = (x \vee \overline{y}) \downarrow (\overline{x} \to (y \to z))$ и $V = \overline{y \to (x \vee z)}$.

8.58. $U = \overline{(x \downarrow y) \vee (x \sim z)} \mid (x \oplus yz)$ и $V = \overline{x}yz \vee \overline{x \to z}$.

8.59. $U = (((x \mid y) \downarrow \overline{z}) \mid y) \downarrow (\overline{y} \to z)$ и $V = ((x \mid y) \downarrow (y \mid \overline{z})) \,\&\, (x \to (y \to z))$.

В задачах 8.60–8.62 доказать эквивалентность формул U и V, используя свойства элементарных функций.

8.60. $U = (\overline{x} \to y) \to (\overline{x}y \sim (x \oplus y))$ и $V = (\overline{xy} \to x) \to y$.

8.61. $U = (xy \vee (\overline{x} \to yz)) \sim ((\overline{x} \to \overline{y}) \to z)$ и $V = (x \to y) \oplus (y \oplus z)$.

8.62. $U = (x \oplus yz) \to (\overline{x} \to (y \to z))$ и $V = x \to ((y \to z) \to x)$.

Функция $f^*(x_1,\dots,x_n)=\overline{f(\overline{x_1},\dots,\overline{x_n})}$ называется *двойственной к функции* $f(x_1, \dots, x_n)$.

Чтобы получить из таблицы функции $f(x_1, \dots, x_n)$ таблицу двойственной функции, нужно *инвертировать* столбец значений функции f (т. е. заменить нули единицами, а единицы нулями) и перевернуть его, т. е. записать в обратном порядке (табл. 8.8).

Таблица 8.8

x_1	x_2	x_3	$f(\tilde{x}^3)$	$f^*(\tilde{x}^3)$
0	0	0	1	1
0	0	1	0	0
0	1	0	1	0
0	1	1	0	0
1	0	0	1	1
1	0	1	1	0
1	1	0	1	1
1	1	1	0	0

Из определения двойственности следует, что

$$f^{**}=(f^*)^*=f,$$

т. е. функция f является двойственной к функции f^* (*свойство взаимности*).

Функция $f(\tilde{x}^n)$ называется *самодвойственной*, если $f(\tilde{x}^n)=f^*(\tilde{x}^n)$. Например, самодвойственными являются функции $x, \overline{x}$ и $x_1 \oplus x_2 \oplus x_3$.

Принцип двойственности: если формула $U=U(f_1,\dots, f_m)$ реализует функцию $f(x_1,\dots, x_n)$, то формула $U(f_1^*,\dots,f_m^*)$ реализует функцию $f^*(x_1, \dots, x_n)$. Эту формулу называют *формулой, двойственной* к U, и обозначают U^*.

В задачах 8.63, 8.64 найти пары двойственных функций и все самодвойственные функции в данном множестве.

8.63. $f_1=x\vee y$, $f_2=x\,\&\,y$, $f_3=x\to y$, $f_4=x\sim y$, $f_5=x\oplus y$, $f_6=x\downarrow y$, $f_7=x\,|\,y$.

8.64. $f_1=x\to y$, $f_2=(\overline{x}\to\overline{y})\to(y\to x)$, $f_3=x\oplus y\oplus z$, $f_4=xy\oplus xz\oplus yz$, $f_5=xy\vee xz\vee yz$, $f_6=(x\to y)\cdot(\overline{y}\to\overline{x})$, $f_7=\overline{x}\cdot y$.

В задачах 8.65–8.67 доказать, что функция g является двойственной к функции f.

8.65. $f=x\cdot 1\vee y(z\vee 0)\vee\overline{x}\,\overline{y}\,\overline{z}$ и $g=x\cdot(y\oplus z)$.

8.66. $f=(\overline{x}\vee\overline{y}\vee(y\overline{z}\oplus 1))\downarrow z$ и $g=x\vee y\vee\overline{z}$.

8.67. $f=xy\vee y\overline{z}\vee\overline{y}z$ и $g=x\overline{y}\,\overline{z}\vee yz$.

Функция $f(\tilde{x}^n)$ называется *симметрической*, если $f(x_1,\dots,x_n)=f(x_{i_1},\dots,x_{i_n})$, где $(i_1, \dots, i_n)$ — произвольная перестановка чисел 1, 2, …, n.

8.68. Записать все симметрические функции от двух переменных.

8.69. Определить число симметрических функций от n переменных.

3. Специальные представления булевых функций

Введем обозначение

$$x^\sigma=\begin{cases} x & \text{при } \sigma=1,\\ \overline{x} & \text{при } \sigma=0.\end{cases} \tag{8.1}$$

Пусть $\tilde{\sigma}=(\sigma_1,\dots,\sigma_n)$ — какой-либо двоичный набор. Выражения $x_1^{\sigma_1}\dots x_n^{\sigma_n}$ и $x_1^{\sigma_1}\vee\dots\vee x_n^{\sigma_n}$, причем среди переменных x_i могут быть совпадающие, называются соответственно *элементарной конъюнкцией* и *элементарной дизъюнкцией*. Выражения вида $x_i^{\sigma_i}$ называют *буквами*. Число букв в элементарной конъюнкции (дизъюнкции) называют ее *рангом*.

Формулы вида

$$D = \bigvee_{i=1}^{m} K_i \text{ и } K = \mathop{\&}_{i=1}^{m} D_i,$$

где K_i и D_i — соответственно попарно различные элементарные конъюнкции и дизъюнкции, называются *дизъюнктивной нормальной формой* (сокращенно д. н. ф.) и *конъюнктивной нормальной формой* (сокращенно к. н. ф.). Число m называется их *длиной*.

ТЕОРЕМА. *Любую булеву функцию* $f(\tilde{x}^n)$ *можно единственным образом представить в виде*

$$f(x_1,\dots,x_n) = \bigvee_{\substack{(\sigma_1,\dots,\sigma_n)\\ f(\sigma_1,\dots,\sigma_n)=1}} x_1^{\sigma_1}\dots x_n^{\sigma_n}, \tag{8.2}$$

если $f(\tilde{x}^n) \not\equiv 0$, *и*

$$f(\tilde{x}^n) = \mathop{\&}_{\substack{(\sigma_1,\dots,\sigma_n)\\ f(\sigma_1,\dots,\sigma_n)=0}} (x_1^{\overline{\sigma_1}} \vee \dots \vee x_n^{\overline{\sigma_n}}), \tag{8.3}$$

если $f(\tilde{x}^n) \not\equiv 1$.

Разложение (8.2) называется *совершенной дизъюнктивной нормальной формой* (СДНФ), а (8.3) — *совершенной конъюнктивной нормальной формой* (СКНФ) булевой функции $f(\tilde{x}^n)$.

Таблица 8.9

x_1	x_2	x_3	$f(\tilde{x})$
0	0	0	0
0	0	1	1
0	1	0	0
0	1	1	0
1	0	0	1
1	0	1	0
1	1	0	0
1	1	1	0

ПРИМЕР 8.4. Найти СДНФ функции $f(\tilde{x}^3) = (\bar{x}_1 \to x_2) \oplus (x_3 \vee x_2)$.

◀ Из таблицы истинности 8.9 заданной функции видим, что значение функции равно 1 только на двух наборах (0, 0, 1) и (1, 0, 0). Следовательно, СДНФ функции имеет вид

$$f(\tilde{x}) = x_1^0 x_2^0 x_3^1 \vee x_1 x_2^0 x_3^0 = \bar{x}_1\bar{x}_2 x_3 \vee x_1\bar{x}_2\bar{x}_3. \ ▶$$

ПРИМЕР 8.5. Построить СДНФ и СКНФ функции $f(\tilde{x}^2) = x_1 \to x_2$.

◀ Из таблицы истинности 8.10 данной функции видим, что $f(x_1, x_2) = 1$ на наборах (0, 0), (0, 1), (1, 1). Поэтому СДНФ функции имеет вид

$$x_1 \to x_2 = x_1^0 x_2^0 \vee x_1^0 x_2^1 \vee x_1^1 x_2^1 = \bar{x}_1\bar{x}_2 \vee \bar{x}_1 x_2 \vee x_1 x_2.$$

Соответственно, $f(x_1, x_2) = 0$ на одном наборе (1, 0). Поэтому СКНФ функции имеет вид

$$x_1 \to x_2 = x_1^{\bar{1}} \vee x_2^{\bar{0}} = x_1^0 \vee x_2^1 = \bar{x}_1 \vee x_2. \ ▶$$

Таблица 8.10

x_1	x_2	$x_1 \to x_2$
0	0	1
0	1	1
1	0	0
1	1	1

В задачах 8.70–8.73 функции, заданные вектором значений, представить в виде СДНФ.

8.70. $\tilde{\alpha}_f = (01010001)$. **8.71.** $\tilde{\alpha}_f = (11010100)$.

8.72. $\tilde{\alpha}_f = (0101000100010001)$. **8.73.** $\tilde{\alpha}_f = (1001000010010010)$.

В задачах 8.74–8.76 представить в виде СКНФ функции, заданные вектором значений.

8.74. а) $\tilde{\alpha}_f = (11010011)$; б) $\tilde{\alpha}_f = (01010111)$.

8.75. $\tilde{\alpha}_f = (0111000111110111)$. **8.76.** $\tilde{\alpha}_f = (1101101101110111)$.

В задачах 8.77–8.82 найти число функций $f(\tilde{x}^n)$, удовлетворяющих указанным условиям.

8.77. СДНФ функции содержит не более двух элементарных конъюнкций.

8.78. СДНФ функции не содержит элементарных конъюнкций, в которых число букв с отрицаниями равно числу букв без отрицаний.

8.79. В СДНФ функции каждая элементарная конъюнкция содержит хотя бы две буквы с отрицаниями ($n \geq 2$).

8.80. СДНФ функции не содержит элементарных конъюнкций, содержащих нечетное число букв с отрицаниями.

8.81. В СДНФ функции в каждой элементарной конъюнкции число букв с отрицаниями не больше числа букв без отрицаний.

8.82. СКНФ функции является одновременно и д. н. ф.

В задачах 8.83–8.85 найти длину СДНФ функции $f(\tilde{x}^n)$.

8.83. $f(\tilde{x}^n) = \bigvee\limits_{1 \leq i < j \leq n} x_i x_j$. **8.84.** $f(\tilde{x}^n) = \mathop{\&}\limits_{1 \leq i < j \leq n} (x_i \to x_j)$.

8.85. $f(\tilde{x}^n) = \Big(\big(\ldots\big((x_1 \mid x_2) \mid x_3\big) \mid \ldots\big) \mid x_{n-1}\Big) \mid x_n$.

Пусть X_0 — некоторое подмножество булевого куба B^n, $\tilde{\alpha} = (\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)$ — произвольный набор из X_0 и $i_1, i_2, \ldots, i_k$ — номера отличных от нуля его компонент ($1 \leq i_1 < i_2 < \ldots < i_k \leq n$). Формула вида

$$P(\tilde{x}^n) = a_0 \oplus \left(\bigoplus_{\tilde{\alpha} \in X_0} a_{\nu(\tilde{\alpha})} x_{i_1} x_{i_2} \ldots x_{i_k} \right), \tag{8.4}$$

где суммирование ведется по модулю два, $a_0, a_{\nu(\tilde{\alpha})} \in \{0,1\}$, $\nu(\tilde{\alpha})$ — номер набора $\tilde{\alpha}$, называется *полиномом Жегалкина* от n переменных.

Пусть $X_0 = B^n$. Если суммирование в формуле (8.4) ведется по всем булевым наборам длины n и слагаемые идут в порядке возрастания номеров булевых наборов, то говорят, что полином Жегалкина записан в *канонической форме*. Например, общий вид канонической формы полинома Жегалкина от трех переменных: $a_0 \oplus a_1 x_3 \oplus$ $\oplus\, a_2 x_2 \oplus a_3 x_2 x_3 \oplus a_4 x_1 \oplus a_5 x_1 x_3 \oplus a_6 x_1 x_2 \oplus a_7 x_1 x_2 x_3$.

Наибольший из рангов элементарных конъюнкций, входящих в полином (8.4), называется *степенью* этого полинома. Число ненулевых слагаемых в формуле полинома Жегалкина называется его *длиной*. Каждая из множества P_2 всех булевых функций представляется единственным образом в виде полинома Жегалкина.

Приведем два основных методы построения полиномов Жегалкина заданной функции.

Метод неопределенных коэффициентов. Пусть $P(\tilde{x}^n)$ — искомый полином Жегалкина, реализующий заданную функцию $f(\tilde{x}^n)$. Запишем искомый полином в виде

$$P(\tilde{x}^n) = a_0 \oplus a_1 x_1 \oplus \ldots \oplus a_{2^{n-1}} x_n \oplus \ldots \oplus a_{2^n - 1} x_1 \ldots x_n.$$

Вектор $\tilde{a}_p = (a_0, a_1, \ldots, a_{2^n-1})$ длины 2^n называют *вектором коэффициентов полинома* $P(\tilde{x}^n)$. Для его нахождения переменным $x_1, \ldots, x_n$ поочередно для каждой строки таблицы истинности функции f придают их значения $\sigma_1, \ldots, \sigma_n$, вычисляют значение $P(\sigma_1, \sigma_2, ..., \sigma_n)$ и приравнивают его к $f(\sigma_1, \sigma_2, ..., \sigma_n)$. В итоге получают систему из 2^n уравнений с 2^n неизвестными $a_0, a_1, \ldots, a_{2^n-1}$, имеющую единственное решение:

$$\begin{cases} f(0,\ldots,0,0) = a_0 \oplus a_1 \cdot 0 \oplus \ldots \oplus a_{2^{n-1}} \cdot 0 \oplus \ldots \oplus a_{2^n-1} \cdot 0 \cdot \ldots \cdot 0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ f(\sigma_1,\sigma_2,\ldots,\sigma_n) = a_0 \oplus a_1\sigma_1 \oplus \ldots \oplus a_{2^{n-1}}\sigma_n \oplus \ldots \oplus a_{2^n-1}\sigma_1\ldots\sigma_n, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ f(1,\ldots,1,1) = a_0 \oplus a_1 \cdot 1 \oplus \ldots \oplus a_{2^{n-1}} \cdot 1 \oplus \ldots \oplus a_{2^n-1} \cdot 1 \cdot \ldots \cdot 1. \end{cases} \tag{8.5}$$

Решив (8.5), находят коэффициенты полинома $P(\tilde{x}^n)$.

Метод, основанный на преобразовании формул над множеством связок $\{\&, \neg\}$. В этом случае строят некоторую формулу U над множеством связок $\{\&, \neg\}$, реализующую данную функцию $f(\tilde{x}^n)$. Затем отрицания $\overline{A}$ заменяют на $A \oplus 1$, раскрывают скобки, пользуясь дистрибутивным законом $A(B \oplus C) = AB \oplus AC$, и применяют эквивалентности $A \cdot A = A$, $A \cdot 1 = A$, $A \oplus A = 0$, $A \oplus 0 = A$.

ПРИМЕР 8.6. Построить полином Жегалкина функции $f(x_1, x_2) = x_1 \to x_2$.

Таблица 8.11

x_1	x_2	$x_1 \to x_2$
0	0	1
0	1	1
1	0	0
1	1	1

◄ Воспользуемся сначала методом неопределенных коэффициентов. Построим таблицу истинности данной функции и запишем искомый полином в виде $P(x_1, x_2) = a_0 \oplus a_1x_1 \oplus a_2x_2 \oplus a_3x_1x_2$. Тогда, используя табл. 8.11, получим

$$f(0, 0) = a_0 \oplus a_1 \cdot 0 \oplus a_2 \cdot 0 \oplus a_3 \cdot 0 = 1,$$
$$f(0, 1) = a_0 \oplus a_1 \cdot 1 \oplus a_2 \cdot 0 \oplus a_3 \cdot 0 = 1,$$
$$f(1, 0) = a_0 \oplus a_1 \cdot 1 \oplus a_2 \cdot 0 \oplus a_3 \cdot 0 = 0,$$
$$f(1, 1) = a_0 \oplus a_1 \cdot 1 \oplus a_2 \cdot 1 \oplus a_3 \cdot 1 = 1.$$

Отсюда получаем систему уравнений $\begin{cases} a_0 = 1, \\ a_0 \oplus a_2 = 1, \\ a_0 \oplus a_1 = 0, \\ a_0 \oplus a_1 \oplus a_2 \oplus a_3 = 1, \end{cases}$

решая которую, находим $a_0 = 1$, $a_1 = 1$, $a_2 = 0$, $a_3 = 1$. Следовательно, $x_1 \to x_2 = 1 \oplus$ $\oplus\, x_1 \oplus x_1x_2$.

Теперь применим метод преобразования формул. Тогда получаем

$$x_1 \to x_2 = \overline{x}_1 \vee x_2 = \overline{x_1 \cdot \overline{x}_2} = (x_1 \cdot (x_2 \oplus 1)) \oplus 1 = 1 \oplus x_1 \oplus x_1x_2. \blacktriangleright$$

В задачах 8.86–8.91 найти полиномы Жегалкина для функций, заданных вектором своих значений, методом неопределенных коэффициентов.

8.86. $\tilde{\alpha}_f = (0110)$. **8.87.** $\tilde{\alpha}_f = (1101)$.

8.88. $\tilde{\alpha}_f = (01010001)$. **8.89.** $\tilde{\alpha}_f = (11010100)$.

8.90. $\tilde{\alpha}_f = (0101000101010001)$. **8.91.** $\tilde{\alpha}_f = (1101010011010100)$.

В задачах 8.92–8.95 для заданных функций найти полиномы Жегалкина, используя метод, основанный на преобразовании формул над множеством связок $\{\&, \neg\}$.

8.92. $f(\tilde{x}^3) = x_1(x_2 \vee \overline{x_3})$. **8.93.** $f(\tilde{x}^3) = x_1 \to (x_2 \to x_3)$.

8.94. $f(\tilde{x}^3) = (x_1 \downarrow x_2) \mid (x_2 \downarrow x_3)$. **8.95.** $f(\tilde{x}^4) = x_1 \vee (x_2 \to ((x_3 \to x_2) \to x_4))$.

8.96. Найти число полиномов Жегалкина над множеством переменных $X^n = \{x_1, \ldots, x_n\}$ $(0 \le k \le n)$: а) степени k; б) длины k.

В задачах 8.97, 8.98 найти число полиномов Жегалкина над множеством переменных $X^n = \{x_1, \ldots, x_n\}$:

8.97. Степени k, где $1 \le k \le n$, обращающихся в 1 на наборе $\tilde{1} = (1, 1, \ldots, 1)$.

8.98. Длины k, где $1 \le k \le n$, не содержащих одновременно (в качестве слагаемых) конъюнкции одинакового ранга.

В задачах 8.99, 8.100 выяснить, на скольких наборах из множества B^n данный полином $P(\tilde{x}^n)$ обращается в единицу.

8.99. $P(\tilde{x}^n) = \bigoplus\limits_{i=2}^{n} x_1 x_i$ $(n \ge 2)$. **8.100.** $P(\tilde{x}^n) = x_1 x_2 \oplus \left(\bigoplus\limits_{i=3}^{n} x_i\right)$ $(n \ge 3)$.

4. Классы Поста

Множество булевых функций $\Psi = \{f_1, \ldots, f_k, \ldots\}$ называется (*функционально*) *полным классом*, если любая функция из P_2 может быть представлена в виде формулы над Ψ, т. е. получается в результате применения конечного числа операций суперпозиций функций из класса Ψ. Класс Ψ может быть конечным или бесконечным.

Примеры полных классов: а) $\Psi = P_2$; б) $\Psi = \{\bar{x}, x_1 \,\&\, x_2, x_1 \vee x_2\}$ — любую булеву функцию можно представить в виде суперпозиции конъюнкции, дизъюнкции и инверсии; в) $\Psi = \{0, 1, x_1 \,\&\, x_2, x_1 \oplus x_2\}$ — любую булеву функцию можно представить в виде полинома Жегалкина.

Пусть K — некоторый класс булевых функций. *Замыканием* K называется множество всех булевых функций, получающихся в виде формул над K (обозначается $[K]$).

Свойства замыкания: 1. $K_1 \subseteq K_2 \Rightarrow [K_1] \subseteq [K_2]$. 2. $K \subseteq [K]$. 3. $[[K]] = [K]$.

Класс K называется *замкнутым*, если $[K] = K$; *полным*, если $[K] = P_2$; *предполным*, если K не полный, но для любой функции $f \notin K$ класс $K_1 = K \cup \{f\}$ — полный.

Введем следующие пять замкнутых классов функций (*классы Поста*):

$T_0 = \{f \mid f(0, \ldots, 0) = 0\}$ — множество функций от n переменных, сохраняющих 0;

$T_1 = \{f \mid f(1, \ldots, 1) = 1\}$ — множество всех булевых функций, сохраняющих 1;

$S = \{f \mid f = f^*\}$ — класс *самодвойственных* функций;

$M = \{f \mid \forall \tilde{\alpha}, \tilde{\beta} : \tilde{\alpha} \preceq \tilde{\beta} \Rightarrow f(\tilde{\alpha}) \le f(\tilde{\beta})\}$ — класс *монотонных* функций;

$L = \{f \mid f(x_1, \ldots, x_n) = \alpha_0 \oplus \alpha_1 x_1 \oplus \ldots \oplus \alpha_n x_n\}$ — класс *линейных* функций.

ТЕОРЕМА (Поста). *Для того чтобы система функций Φ была полной, необходимо и достаточно, чтобы она не содержалась целиком ни в одном из пяти замкнутых классов T_0, T_1, S, M, L.*

ПРИМЕР 8.7. Доказать, что классы Поста T_0, T_1, S, M, L попарно различны.

◄ Для доказательства приведем функции, лежащие в классах, но так, чтобы классы взаимно не поглощались. Рассмотрим функции $0, 1, \bar{x}$ и построим таблицу 8.12 принадлежности классам. В таблице стоит «+», если функция принадлежит классу, и «−» — в противном случае. Если бы какие-нибудь два класса совпадали, то совпадали бы и соответствующие столбцы таблицы. Так как они не совпадают, делаем вывод о попарном различии классов. ►

Таблица 8.12

	T_0	T_1	S	M	L
0	+	−	−	+	+
1	−	+	−	+	+
$\bar{x}$	−	−	+	−	+

ПРИМЕР 8.8. Определить количество функций классов T_0 и T_1, зависящих от переменных $x_1, \ldots, x_n$.

◀ Вектор значений функции $f \in T_0$ имеет вид $\tilde{\alpha}_f = (0, \alpha_1, \ldots, \alpha_{2^n-1})$, т. е. определено значение только на нулевом наборе переменных, свободных же $2^n - 1$. Следовательно, $|T_0| = 2^{2^n-1}$. Аналогично вычисляется, что $|T_1| = 2^{2^n-1}$. ▶

В задачах 8.101, 8.102 выяснить, принадлежит ли множеству $T_0 \backslash T_1$ функция $f(\tilde{x}^n)$.

8.101. $f(\tilde{x}^3) = (x_1 \to x_2)(x_2 \to x_3)(x_3 \to x_1)$. **8.102.** $f(\tilde{x}^3) = x_1x_2x_3 \vee \bar{x}_1x_2 \vee x_1$.

В задачах 8.103, 8.104 выяснить, при каких n функция $f(\tilde{x}^n) \in T_0 \setminus T_1$.

8.103. $f(\tilde{x}^n) = x_1 \oplus x_2 \oplus \ldots \oplus x_n$. **8.104.** $f(\tilde{x}^n) = \bigvee\limits_{1 \le i < j \le n} x_i x_j$.

В задачах 8.105–8.108 выяснить, полна ли система функций A.

8.105. $A = \{f_1 = (0110), f_2 = (11000011), f_3 = (10010110)\}$.

8.106. $A = \{f_1 = (0111), f_2 = (01011010), f_3 = (01111110)\}$.

8.107. $A = \{xy, x \vee y, x \oplus y, xy \vee yz \vee zx\}$.

8.108. $A = \{xy, x \vee y, x \oplus y \oplus z \oplus 1\}$.

8.109. Перечислить все самодвойственные функции от двух переменных.

В задачах 8.110–8.113 выяснить, является ли самодвойственной функция f.

8.110. $f = x_1x_2 \vee x_2x_3 \vee x_3x_1$.

8.111. $f = x_1 \oplus x_2 \oplus x_3 \oplus 1$.

8.112. $f = (x_1 \vee \bar{x}_2 \vee x_3)x_4 \vee x_1\bar{x}_2x_3$.

8.113. $f = (x_1 \to x_2) \oplus (x_2 \to x_3) \oplus (x_3 \to x_1)$.

В задачах 8.114–8.117 выяснить, является ли функция f, заданная вектором своих значений, самодвойственной.

8.114. $\tilde{\alpha}_f = (1010)$. **8.115.** $\tilde{\alpha}_f = (10010110)$.

8.116. $\tilde{\alpha}_f = (10110101)$. **8.117.** $\tilde{\alpha}_f = (1100100101101100)$.

8.118. Определить количество самодвойственных функций, зависящих от n переменных.

Для проверки на монотонность функции $f(\tilde{x}^n)$, заданной своим вектором значений $\tilde{\alpha}_f$, нужно сначала разделить его на две равные части $\tilde{\alpha}_{f0} = (\alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_{2^{n-1}-1})$ и $\tilde{\alpha}_{f1} = (\alpha_{2^{n-1}}, \ldots, \alpha_{2^n-1})$. Если соотношение $\tilde{\alpha}_{f0} \preceq \tilde{\alpha}_{f1}$ не выполнено, то $f(\tilde{x}^n)$ немонотонная. В противном случае нужно разделить каждый из полученных векторов опять пополам: $\tilde{\alpha}_{f0,0}, \tilde{\alpha}_{f0,1}$ и $\tilde{\alpha}_{f1,0}, \tilde{\alpha}_{f1,1}$. Далее проверить сначала первую пару на выполнение соотношения $\tilde{\alpha}_{f0,0} \preceq \tilde{\alpha}_{f0,1}$, и в случае положительного результата — вторую. Если хотя бы для одной пары соотношение не выполняется, то функция немонотонная. В противном случае этот алгоритм продолжается.

8.119. Определить все монотонные функции от двух переменных.

В задачах 8.120–8.124 выяснить, является ли монотонной заданная функция f.

8.120. $f = (x \oplus y) \cdot (x \sim y)$. **8.121.** $f = xy \oplus xz \oplus zy$.

8.122. $f = x_1 \to (x_2 \to x_3)$. **8.123.** $f = x_1 \oplus (x_2 \to x_3) \oplus x_4$.

В задачах 8.124–8.127 для заданного $\tilde{\alpha}_f$ выяснить, является ли монотонной функция f.

8.124. $\tilde{\alpha}_f = (0110)$. **8.125.** $\tilde{\alpha}_f = (10110111)$.
8.126. $\tilde{\alpha}_f = (00010111)$. **8.127.** $\tilde{\alpha}_f = (0010001110111111)$.

В задачах 8.128–8.130 для немонотонной функции $f(\tilde{x}^n)$ указать два соседних набора $\tilde{\alpha}$ и $\tilde{\beta}$ значений переменных таких, что $\tilde{\alpha} \prec \tilde{\beta}$ и $f(\tilde{\alpha}) > f(\tilde{\beta})$.

8.128. $f(\tilde{x}^3) = x_1x_2x_3 \vee \bar{x}_1x_2$. **8.129.** $f(\tilde{x}^3) = x_1 \oplus x_2 \oplus x_3$.
8.130. $f(\tilde{x}^4) = x_1x_3 \oplus x_2x_4$.

8.131. Определить количество линейных функций, зависящих от переменных $x_1, \ldots, x_n$, и перечислить все линейные функции от двух переменных.

В задачах 8.132–8.135, представив функцию f полиномом, выяснить, является ли она линейной.

8.132. $f = \overline{x \to y} \oplus \bar{x}y$. **8.133.** $f = xy \vee \bar{x} \cdot \bar{y} \vee z$.
8.134. $f = (x \to y) \cdot (y \to x)) \sim z$.
8.135. $f = (xy \vee \bar{x} \cdot \bar{y})z \vee \bar{z}(x\bar{y} \vee \bar{x}y)$.

В задачах 8.136–8.139 выяснить, является ли линейной функция f, заданная вектором своих значений.

8.136. $\tilde{\alpha}_f = (1001)$. **8.137.** $\tilde{\alpha}_f = (1101)$.
8.138. $\tilde{\alpha}_f = (10110101)$. **8.139.** $\tilde{\alpha}_f = (0110100101101001)$.

§ 8.2. ГРАФЫ

1. Основные определения

Пусть V — конечное непустое множество, V^2 — множество всех его двухэлементных подмножеств, т. е. множество неупорядоченных пар $\{u, v\}$, где $u, v \in V$, и, наконец, E — произвольное подмножество V^2. Пара $G = (V, E)$ называется *неориентированным графом*. Элементы множества V называются *вершинами* графа, а элементы E — *ребрами*. Множества вершин и ребер графа G обозначаются символами $V(G)$ и $E(G)$ соответственно. Число вершин называется *порядком* графа и обозначается через $|G|$. Если граф G содержит n вершин и m ребер, то его называют (n, m)-графом. Например, граф G, изображенный на рис. 8.2, — (5, 6)-граф.

Говорят, что две вершины графа u и v *смежны*, если множество $\{u, v\}$ является ребром, и *не смежны* в противном случае. Если $e = \{u, v\}$ — ребро, то вершины u и v называют его *концами*. В этом случае также говорят, что ребро *e соединяет* вершины u и v, и его обозначают символом uv. В дальнейшем будем считать (если это не оговорено), что граф не содержит петель, т. е. ребер вида uu, и кратных ребер, т. е. нескольких ребер uv, т. е. является *простым*.

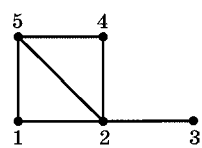


Рис. 8.2

Два ребра называются *смежными*, если они имеют общий конец. Вершина v и ребро e называются *инцидентными*, если v является концом ребра e. *Степенью* $\deg(v)$ *вершины v* называется число ребер, инцидентных этой вершине. Вершина графа, имеющая степень 0, называется *изолированной*, а вершина, имеющая степень 1, — *висячей* (или *концевой*). Ребро, инцидентное концевой вершине, называется *концевым*. Вершина графа, смежная с каждой другой его вершиной, называется *доминирующей*. Максимальная и минимальная степени вершин графа G обозначаются символами $\Delta(G)$ и $\delta(G)$ соответственно. Таким образом,

$$\Delta(G)=\max_{v\in V(G)}\deg v,\ \delta(G)=\min_{v\in V(G)}\deg v.$$

ПРИМЕР 8.9. Для графа G, изображенного на рис. 8.2, перечислить: а) $V(G)$, $E(G)$; б) смежные вершины; в) вершины, не смежные с вершиной 1; г) степени вершин и определить числа $\Delta(G)$ и $\delta(G)$; д) висячие и доминирующие вершины; е) ребра, не смежные с ребром $\{2, 4\}$ и не инцидентные с ним вершины.

◀ а) $V(G)=\{1, 2, 3, 4, 5\}$, $E(G)=\{\{1, 2\}, \{1, 5\}, \{2, 3\}, \{2, 4\}, \{2, 5\}, \{4, 5\}\}$; б) вершина 1 соединена ребрами с вершинами 5 и 2, следовательно, смежна с ними; вершина 5 — с 1, 2 и 4; 4 — с 5 и 2; 2 — с 1, 5, 4 и 3; 3 — только с 2; в) с вершинами 4 и 3; г) вершины этого графа имеют следующие степени: $\deg(3)=1$, $\deg(1)=\deg(4)=2$, $\deg(5)=3$, $\deg(2)=4$; $\Delta(G)=4$, $\delta(G)=1$; д) вершина 3 — висячая, 2 — доминирующая; е) ребро $\{2, 4\}$ не имеет общих вершин только с ребром $\{1, 5\}$, поэтому не смежно с ним; только вершина 5 не инцидентна ребру $\{2, 4\}$, так как не является его концом. ▶

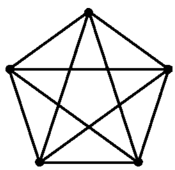


Рис. 8.3

Граф называется *пустым*, если в нем нет ребер. Пустой граф порядка n обозначается O_n. Граф G называется *полным*, если любые две его вершины смежны. Полный граф порядка n обозначается символом K_n, в нем $\frac{n(n-1)}{2}$ ребер. На рис. 8.3 изображен граф K_5.

8.140. Доказать, что: а) $|E(K_n)|=\frac{n(n-1)}{2}$; б) для любого графа $|E(G)|\le C^2_{|G|}$.

8.141. Существует ли граф со следующими наборами степеней вершин:
а) 1, 1, 1, 3, 3, 4, 4; б) 1, 1, 2, 2, 2, 3, 3, 4?

8.142. Построить граф с данным набором степеней вершин:
а) 1, 1, 2, 2, 2; б) 1, 2, 2, 2, 3, 4.

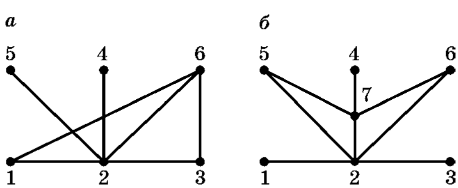


Рис. 8.4

В задачах 8.143–8.144 для данного графа G перечислить: 1) множество $V(G)$; 2) множество $E(G)$; 3) смежные вершины; 4) вершины, не смежные с вершиной 2; 5) степени вершин и определить числа $\Delta(G)$ и $\delta(G)$; 6) висячие и доминирующие вершины; 7) ребра, не смежные с ребром $\{1, 2\}$ и не инцидентные с ним вершины.

8.143. Граф G изображен на рис. 8.4*а*.

8.144. Граф G изображен на рис. 8.4*б*.

8.145. Найти $|V(B^n)|$, $|E(B^n)|$ и степени вершин графа n-мерного куба B^n.

8.146. Существует ли граф с шестью вершинами, у которого степени всех вершин равны 3?

Граф $\overline{G}$ называется *дополнительным графу* G (или *дополнением* G), если $V(\overline{G})=V(G)$ и две несовпадающие вершины смежны в $\overline{G}$ тогда и только тогда, когда они не смежны в G. Из определения следует, что $E(\overline{G})=V^2\setminus E(G)$. Очевидно, $\overline{\overline{G}}=G$.

ПРИМЕР 8.10. Построить граф $\bar{G}$, дополнительный к графу, изображенному на рис. 8.2.

◀ Множество вершин графа $\bar{G}$ остается таким же. Количество ребер $\bar{G}$ можно вычислить по формуле (дополнить до полного и удалить ребра графа G)

$$|E(\bar{G})| = |E(K_5)| - |E(G)| = \frac{5(5-1)}{2} - 6 = 10 - 6 = 4.$$

Вершина 1 в графе $\bar{G}$ будет смежна с вершинами 3 и 4. Следовательно, рисуем ребра $\{1, 4\}$ и $\{1, 3\}$. Вершина 2 будет изолированной, так как в G она была смежна всем вершинам. Вершина 3 в графе $\bar{G}$, кроме вершины 1, будет еще смежна с вершинами 4 и 5. Рисуем ребра $\{3, 4\}$ и $\{3, 5\}$. Результат изображен на рис. 8.5. ▶

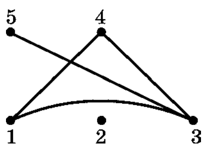


Рис. 8.5

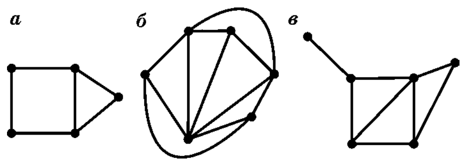


Рис. 8.6

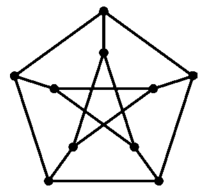


Рис. 8.7

В задачах 8.147–8.149 построить дополнения указанных графов и определить для них $|E(\bar{G})|$ и степени всех вершин.

8.147. Граф G изображен: а) на рис. 8.4*а*; б) на рис. 8.4*б*.

8.148. Граф G изображен: а) на рис. 8.6*а*; б) на рис. 8.6*б*; в) на рис. 8.6*в*.

8.149. Граф G изображен на рис. 8.7 (*граф Петерсена*).

В задачах 8.150–8.152 доказать утверждения.

8.150. Сумма степеней всех вершин графа равна удвоенному числу ребер:

$$\sum_{v \in V(G)} \deg v = 2|E(G)|.$$

8.151. В любом графе число вершин нечетной степени четно.

8.152. Не существует графа, степени всех вершин которого попарно различны.

Граф $G_1 = (V_1, E_1)$ называется *частью* графа $G = (V, E)$, если множество V_1 есть подмножество V, а E_1 — подмножество E, т. е. $V_1 \subseteq V$, а $E_1 \subseteq E$.

Говорят, что $G_1 = (V_1, E_1)$ — *подграф* графа $G = (V, E)$, если $V_1 \subseteq V$ и $E_1(G_1) = \{uv \in E \mid u, v \in V_1\}$. Подграф H называется *остовным подграфом*, если $V_1 = V$. Таким образом, остовной подграф G_1 получается из исходного графа G удалением некоторых ребер. На рис. 8.8 изображены граф G и три его подграфа H_1, H_2 и H_3, среди которых H_3 является остовным.

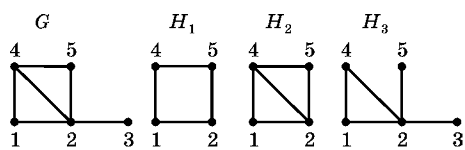


Рис. 8.8

8.153. Сколько всего имеет различных остовных подграфов:

а) граф G, изображенный на рис. 8.8;

б) (n, m)-граф с пронумерованными вершинами?

8.154. Нарисовать все подграфы порядка 5 графа G, изображенного на рис. 8.4*а*.

8.155. Дан граф $G = (V, E)$, где $V(G) = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ и $E(G) = \{14, 15, 16, 24, 25, 34, 35, 36\}$.

а) Начертить этот граф на плоскости так, чтобы его ребра изображались непересекающимися прямолинейными отрезками.

б) Полагая $V_1 = \{1, 2, 3, 4\}$, найти множество ребер соответствующего подграфа и изобразить его на плоскости.

в) Выяснить, какие из следующих пар подмножеств определяют часть графа G, а какие нет: $V_1 = \{1, 5, 6\}$ и $E_1 = \{15, 56\}$; $V_2 = \{1, 3, 5, 6\}$ и $E_2 = \{15, 25, 16, 56\}$; $V_3 = \{1, 3, 6\}$ и $E_3 = \{16, 36\}$. Какие из выявленных частей являются подграфами?

г) Для графа G определить число различных безреберных подграфов.

8.156. Сколько существует различных остовных подграфов у полного графа порядка n с пронумерованным множеством вершин?

Граф называется *двудольным*, если существует разбиение множества всех его вершин на такие две части (*доли*), что концы каждого ребра принадлежат разным частям. Если при этом любые две вершины, входящие в разные доли, смежны, то граф называется *полным двудольным*. Полный двудольный граф, доли которого состоят из p и q вершин, обозначается символом $K_{p,\,q}$, при $p = 1$ получаем *звезду* $K_{1,\,q}$. На рис. 8.9 изображены звезда $K_{1,\,5}$ (рис. 8.9*а*) и полный двудольный граф $K_{3,\,3}$ (рис. 8.9*б*).

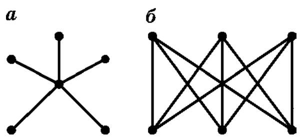


Рис. 8.9

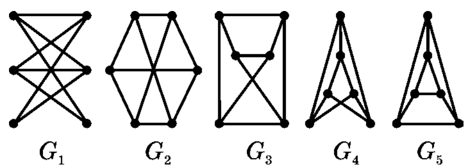


Рис. 8.10

8.157. Среди графов, представленных на рис. 8.10, укажите двудольные графы и приведите вариант разбиения вершин на две доли. Какие из них являются полными двудольными графами?

8.158. Выяснить, является ли граф Петерсена (см. рис. 8.7) двудольным?

8.159. Определить количество ребер у следующих графов и их дополнений: а) $K_{1,\,q}$; б) $K_{p,\,q}$.

Множество вершин графа назовем *независимым*, если никакие две вершины из этого множества не смежны. Подмножество V_1 вершин графа назовем *доминирующим*, если каждая вершина из множества $V(G)\setminus V_1$ смежна с некоторой вершиной из V_1.

Говорят, что *вершина и ребро графа покрывают друг друга*, если они инцидентны. Подмножество $V' \subseteq V$ называют *вершинным покрытием* графа, если каждое ребро из $E(G)$ инцидентно хотя бы одной вершине из V'.

В задачах 8.160–8.163 найти наибольшее (т. е. содержащее максимальное число вершин) независимое множество и наименьшее (т. е. содержащее минимальное число вершин) вершинное покрытие в графе.

8.160. K_n. **8.161.** $K_{1,q}$. **8.162.** $K_{p,q}$. **8.163.** Граф Петерсена.

Пусть G и H — графы, а $\varphi\colon V(G) \to V(H)$ — взаимно однозначное отображение. Если для любых вершин u и v графа G их образы $\varphi(u)$ и $\varphi(v)$ смежны в H тогда и только тогда, когда u и v смежны в G, то отображение φ называется *изоморфизмом графа G на граф H*. В этом случае говорят, что графы G и H *изоморфны*, и пишут $G \cong H$. Изоморфные графы получаются один из другого изменением нумерации вершин. Класс изоморфных графов принято называть *абстрактным графом*.

Граф, изоморфный своему дополнению: $G \cong \overline{G}$, называется *самодополнительным*.

ПРИМЕР 8.11. Найти все неизоморфные графы четвертого порядка.

◀ У графа четвертого порядка число ребер может быть от 0 в пустом графе O_4 до 6 в полном графе K_4. Рассмотрим каждый из вариантов отдельно.

Пусть $|E(G)| = 0$, то получаем единственный граф O_4. Если $|E(G)| = 1$, то также получаем единственный граф с двумя изолированными вершинами и двумя вершинами, смежными друг другу.

При $|E(G)| = 2$ получаем два графа: в одном из них ребра смежные, а в другом — нет.

При $|E(G)| = 3$ имеем $\sum_{i=1}^{4} \deg(v_i) = 2|E(G)| = 6$. Если изолированных вершин нет, то возможные наборы степеней вершин: 1, 1, 2, 2 и 1, 1, 1, 3. Если изолированная вершина одна, то нет вершины со степенью 3, и возможный набор степеней вершин — 0, 2, 2, 2. Двух изолированных вершин быть не может.

Если $|E(G)| = 4$, получаем, что из полного графа удалены два ребра: либо смежные, либо нет. Получаем два графа.

Если $|E(G)| = 5$, то получаем единственный граф удалением из полного графа одного ребра.

При $|E(G)| = 6$ существует единственный граф, который является полным. ▶

8.164. Доказать, что графы, представленные на рис. 8.11, неизоморфны.

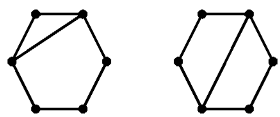


Рис. 8.11

8.165. Нарисовать все неизоморфные графы порядка 4 и определить их общее число (см. пример 8.11).

8.166. Какие из графов, представленных на рис. 8.11, изоморфны? В случае изоморфизма укажите какую-либо соответствующую изоморфизму нумерацию вершин.

8.167. Какие из пар графов, изображенных на рис. 8.12, изоморфны?

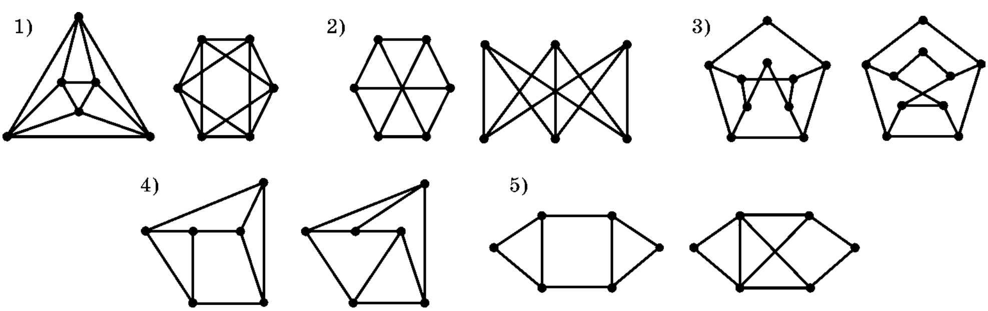


Рис. 8.12

8.168. Найти количество неизоморфных графов, имеющих 7 вершин и 20 ребер.

8.169. Найти количество неизоморфных графов, имеющих 10 вершин и 43 ребра.

8.170. Найти все попарно неизоморфные графы пятого порядка.

8.171. Доказать, что если порядок самодополнительного графа равен n, то число вершин такого графа имеет вид $n = 4k$ или $n = 4k + 1$, где k — некоторое натуральное число.

8.172. Найти самодополнительный граф с минимальным, отличным от 1, числом вершин.

Отношение изоморфизма графов является *отношением эквивалентности*, т. е. удовлетворяет трем условиям: $G \cong G$ (*рефлексивность*); если $G \cong H$, то $H \cong G$ (*симметричность*); если $G \cong H$ и $H \cong Q$, то $G \cong Q$ (*транзитивность*). Это означает, что всякое множество графов однозначно разбивается на попарно непересекающиеся классы изоморфных.

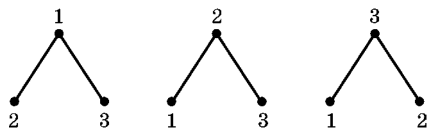


Рис. 8.13

В некоторых случаях приходится различать изоморфные графы. Граф порядка n называется *помеченным*, если его вершинам присвоены некоторые метки, например номера 1, 2, ..., n. Отождествив каждую из вершин графа с ее номером (а следовательно, множество вершин — с множеством чисел $\{1, 2, \ldots, n\}$), считаем, что графы G и H одного и того же порядка *равны*, если $E(G) = E(H)$. На рис. 8.13 изображены три разных помеченных графа.

8.173. Найти число различных помеченных графов, имеющих n вершин и m ребер.

8.174. Найти общее число различных помеченных графов, имеющих n вершин.

Определим некоторые операции, с помощью которых из имеющихся графов можно получать другие.

Операция удаления вершины. Пусть v — вершина графа G. Граф $G_v = G - v$ получается из графа G в результате удаления вершины v и всех инцидентных ей ребер.

Операция стягивания ребра. Стягивание ребра uv в графе G означает отождествление в нем смежных вершин v и u. При этом порядок графа уменьшается на 1, а сам граф обозначают $G - uv$.

Операция разделения ребра. Разделение ребра uv графа G состоит в добавлении к множеству $V(G)$ вершины w и замены ребра uv на два: uw и wv. Полученный граф обозначают G_{uwv}.

Операция расщепления вершины. Пусть v — вершина графа G. Разобьем множество смежных с ней вершин на две части M и N. Удалим вершину v вместе с инцидентными ей ребрами и добавим новые вершины u и w и соединяющее их ребро uw, вершину u соединим ребром с каждой вершиной множества M, а вершину w — с каждой вершиной множества N. Полученный в результате граф обозначим $\tilde{G}$.

Пусть $G_i = (V_i, E_i)$ $(i = 1, 2)$ — два графа.

Объединением (или *наложением*) $G_1 \cup G_2 = H$ называется граф, для которого $V(H) = V(G_1) \cup V(G_2)$ и $E(H) = E(G_1) \cup E(G_2)$. В дальнейшем будем считать, что объединение является *дизъюнктным*, т. е. $V(G_1) \cap V(G_2) = \varnothing$.

Произведением $G_1 \times G_2 = G$ называется граф, для которого $V(G) = V(G_1) \times V(G_2)$ — декартово произведение множеств вершин исходных графов, а $E(G)$ определяется следующим образом: вершины (u_1, u_2) и (v_1, v_2) в графе G смежны тогда и только тогда, когда или $u_1 = v_1$, а u_2 и v_2 смежны в G_2, или $u_2 = v_2$, а u_2 и v_2 смежны в G_1. Очевидно, что $|V(G_1 \times G_2)| = |V(G_1)| \cdot |V(G_2)|$ и $|E(G_1 \times G_2)| = |V(G_1)| \cdot |E(G_2)| + |E(G_1)| \cdot |V(G_2)|$.

ПРИМЕР 8.12. Пусть графы G_1 и G_2 заданы следующим образом: $V(G_1) = \{u_1, u_2\}$ и $E(G_1) = \{u_1u_2\}$; $V(G_2) = \{v_1, v_2, v_3\}$ и $E(G_2) = \{v_1v_2, v_2v_3\}$. Получить графы:

а) $H = G_1 \bigcup G_2$; б) $G = G_1 \times G_2$.

◀ а) В соответствии с определением получаем граф 5-го порядка, в котором

$$V(H) = V(G_1) \bigcup V(G_2) = \{u_1, u_2, v_1, v_2, v_3\}$$
$$\text{и } E(H) = E(G_1) \bigcup E(G_2) = \{u_1u_2, v_1v_2, v_2v_3\}.$$

б) В соответствии с определением получаем граф 6-го порядка, в котором $V(H) = V(G_1) \times V(G_2) = \{\{u_1, v_1\}, \{u_1, v_2\}, \{u_1, v_3\}, \{u_2, v_1\}, \{u_2, v_2\}, \{u_2, v_3\}\}$ и множество $E(H)$ содержит семь ребер, из которых три ребра вида $\{\{u_1, v_j\}, \{u_2, v_j\}\}$ $(j = 1, 2, 3)$ и четыре ребра вида $\{\{u_i, v_j\}, \{u_i, v_{j+1}\}\}$ $(i, j = 1, 2)$ (рис. 8.14). ▶

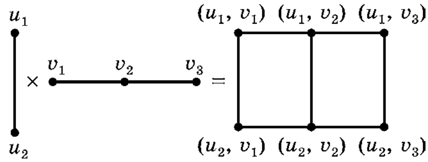


Рис. 8.14

8.175. Для графа G, изображенного на рис. 8.2, нарисовать все графы G_v, $v \in \{1, 2, 3, 4, 5\}$.

8.176. Сколько ребер будет содержать граф, полученный из полного графа порядка n удалением k вершин?

8.177. Показать, что, используя операцию стягивания ребра, из графа Петерсена (рис. 8.7) можно получить граф K_5 и, стало быть, любой граф K_n, $n < 5$.

8.178. Используя определение операции расщепления вершины для вершины 2 (рис. 8.5*б*), построить графы $\tilde{G}$, если: а) $M = \{1\}$ и $N = \{3, 5, 6, 7\}$; б) $M = \{1, 5\}$ и $N = \{3, 6, 7\}$; в) $M = \{1, 5, 7\}$ и $N = \{3, 6\}$; г) $M = \{1, 5, 6, 7\}$ и $N = \{3\}$. Определить значения $|\tilde{G}|$ и $|E(\tilde{G})|$.

8.179. Определим с помощью операции произведения графов n-мерный куб B^n рекуррентно: $B^1 = K_2$, $B^n = K_2 \times B^{n-1}$, $n > 1$. Используя определение операции произведения графов, получить и изобразить графы: а) B^2; б) B^3; в) B^4.

8.180. Изобразить графы $H = G_1 \bigcup G_2$ и $G = G_1 \times G_2$; графы G_1 и G_2 представлены на рис. 8.15.

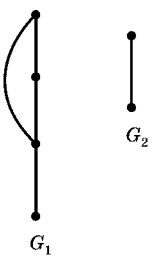


Рис. 8.15

2. Пути и метрические характеристики в графах

Чередующаяся последовательность

$$v_1,\ e_1,\ v_2,\ e_2,\ \ldots,\ v_l,\ e_l,\ v_{l+1} \tag{8.6}$$

вершин и ребер графа, такая что $e_i = v_iv_{i+1}$ $(i = 1, 2, \ldots, l)$, называется *маршрутом, соединяющим вершины* v_1 и v_{l+1} (или (v_1, v_{l+1})-*путем*). Число l ребер в пути (8.6) называется его *длиной*. Очевидно, что маршрут можно задать также последовательностью $v_1, v_2, \ldots, v_l, v_{l+1}$ его вершин либо последовательностью его ребер $e_1, e_2, \ldots, e_l$.

Маршрут (путь) называется *простым*, если все его вершины, кроме, может быть, крайних, различны; *цепью*, если все его ребра различны; *простой цепью*, если все его вершины различны; *циклическим*, если $v_1 = v_{l+1}$. Циклическая цепь называется *циклом*, а циклическая простая цепь — *простым циклом*. Простую цепь, имеющую n вершин, обозначают C_n, а простой цикл — Z_n.

ПРИМЕР 8.13. В графе G на рис. 8.8 привести примеры маршрутов, являющихся цепью, простой цепью, циклическим путем, не являющимся циклом, и циклом.

◄ Примерами могут служить следующие маршруты: (1, 4, 5, 2, 4) — цепь, так как все ребра различны; (1, 4, 5, 2, 3) — простая цепь, так как различны все ребра и вершины; (1, 4, 5, 2, 4, 1) — циклический путь, не являющийся циклом, так как совпадают начальная и конечная вершины, но через вершину 4 путь проходит дважды; соответственно (4, 3, 2, 4) — цикл. ►

Граф называется *связным*, если любые две несовпадающие вершины в нем соединены маршрутом. Всякий максимальный (т. е. не содержащийся в связном подграфе с большим числом элементов) связный подграф графа G называется *связной компонентой* (или просто компонентой) графа G. Общее число связных компонент графа обозначают символом $k(G)$.

ПРИМЕР 8.14. Доказать, что если число ребер графа порядка n ($n > 2$) больше, чем C_{n-1}^2, то он связен.

◄ Предположим, что он не связен. Тогда существуют две вершины u и v, не связанные между собой. Обозначим через V_1 множество вершин, достижимых из u, а через V_2 — множество вершин, достижимых из v. Тогда ни одна вершина из V_2 не связана ни с какой вершиной из V_1. Пусть $|V_1| = k < n$, $k > 0$. Тогда $|V_2| = n - k > 0$. Если $k = 1$, то $|V_2| = n - 1$ и наибольшее значение $|E|$ равно C_{n-1}^2 (в случае, если подграф, порожденный V_2, полный), что противоречит условию $|E| > C_{n-1}^2$. Следовательно, вершина u смежна какой-то вершине из V_2, которая, в свою очередь, достижима из v.

При $k \geq 2$ наибольшее число ребер у графа будет в случае, если подграфы, порожденные V_1 и V_2, полные. Тогда $|E_1| = \dfrac{k(k-1)}{2}$, $|E_2| = \dfrac{(n-k)(n-k-1)}{2}$, и для всего графа имеем

$$|E| = |E_1| + |E_2| = \frac{k(k-1)}{2} + \frac{(n-k)(n-k-1)}{2} = \frac{n^2 - 2nk + 2k^2 - n}{2} =$$
$$= \frac{(n-1)(n-2) + 2(n-1-nk+k^2)}{2} = C_{n-1}^2 - \underbrace{(n-1)(k-1)}_{>0} < C_{n-1}^2,$$

что противоречит условию, следовательно, исходный граф связен. ►

ПРИМЕР 8.15. Доказать, что в связном графе любые две простые цепи, содержащие наибольшее число ребер, имеют общую вершину.

◄ Предположим, что у двух простых цепей $u_1, u_2, \ldots, u_k$ и $v_1, v_2, \ldots, v_k$ максимальной длины нет общих вершин. Возьмем произвольно по одной вершине из каждой цепи u_i и v_j. Так как граф связный, то существует путь из u_i в v_j. Выберем из отрезков цепей от u_1 до u_i и от u_i до u_k тот, длина которого не меньше $k/2$. Аналогично для v_j. Составим новую простую цепь из этих отрезков и простой цепи, соединяющей u_i и v_j, ее длина больше k, что противоречит тому, что исходные цепи максимальны. ►

8.181. Доказать, что любой путь, соединяющий вершины u и v, содержит простую цепь, соединяющую те же вершины.

8.182. Привести пример цикла, не являющегося простым.

8.183. Сколько существует путей длины 3 из вершины (0, 0, 0) в (1, 1, 1) в графе B^3?

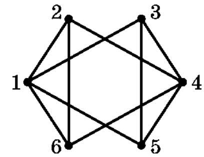


Рис. 8.16

8.184. В графе G на рис. 8.16 привести примеры маршрутов, являющихся цепью, простой цепью, циклическим путем, не являющимся циклом, и пример цикла. Указать такие маршруты максимальной длины.

8.185. Какой минимальной и максимальной длины существует маршрут, соединяющий две противоположные вершины графа B^n, являющийся: простым, цепью, простой цепью, при: а) $n = 3$; б) $n = 4$?

8.186. Какое минимальное число ребер требуется удалить, чтобы данный граф перестал быть связным, если этот граф: а) $K_{3,3}$; б) граф Петерсена?

Пусть G — связный граф, а u и v — две его несовпадающие вершины. Длина кратчайшего (u, v)-маршрута называется *расстоянием* между вершинами u и v и обозначается через $d(u, v)$. Считают, что $d(u, u) = 0$.

Для фиксированной вершины u величина $e(u) = \max\limits_{v \in V(G)} d(u, v)$ называется *эксцентриситетом* вершины u. Число $r(G) = \min\limits_{u \in V(G)} e(u)$ называется *радиусом* графа. Вершина v называется *центральной*, если $e(v) = r(G)$. Множество всех центральных вершин графа называется его *центром*. Число $d(G) = \max\limits_{u \in V(G)} e(u)$ называется *диаметром* графа G. Простая цепь длины $d(G)$, расстояние между концами которой равно $d(G)$, называется *диаметральной цепью*.

Вершина v называется *периферийной*, если $e(v) = d(G)$.

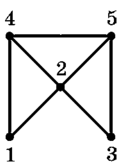


Рис. 8.17

ПРИМЕР 8.16. Для графа на рис. 8.17 указать периферийные и центральные вершины, а также определить $d(G)$ и указать какую-нибудь диаметральную цепь.

◄ Для графа, представленного на рис. 8.17, $d(1, 2) = d(1, 4) = 1$, $d(1, 5) = d(1, 3) = 2$; $e(2) = 1$, $e(1) = e(3) = e(4) = e(5) = 2$. Следовательно, $r(G) = 2$ и $d(G) = 2$. Все вершины, кроме центральной вершины 2, являются периферийными. Например, цепь (1, 2, 3) — диаметральная цепь. ►

Введенное выше расстояние между вершинами графа удовлетворяет *аксиомам метрики*:

1. $d(u, v) \geq 0$. 2. $d(u, u) = 0 \Leftrightarrow u = v$.

3. $d(u, v) = d(v, u)$. 4. $d(u, v) + d(v, w) \geq d(u, w)$ (*неравенство треугольника*).

8.187. Доказать, что вершина w принадлежит кратчайшей простой цепи между u и v тогда и только тогда, когда $d(u, w) + d(w, v) = d(u, v)$.

8.188. Изобразить граф, центр которого: а) состоит ровно из одной вершины; б) состоит ровно из трех вершин и не совпадает с множеством всех вершин; в) совпадает с множеством всех вершин.

8.189. Изобразить графы, для которых: а) $d(G) = 2$, $d(G) = 3$; б) $r(G) = 2$, $r(G) = 3$; в) $r(G) = d(G)$.

8.190. Определить радиусы и диаметры для графов правильных многогранников (см. рис. 8.18).

8.191. Доказать, что

а) $1 \leq d(G) \leq n - 1$, и привести примеры выполнения равенств в нижней и верхней оценках;

б) $2r(G) \geq d(G)$, и привести пример выполнения равенства.

8.192. Пусть G_n — граф, множество вершин которого совпадает с отрезком натурального ряда $\{1, 2, \ldots, n\}$, а множество ребер определяются следующим условием: вершины u и v смежны тогда, когда числа u и v взаимно просты.

а) Изобразите графы G_5 и G_8.

б) Какой из графов является связным: G_n или $G_n - 1$, полученный из G_n удалением вершины 1?

Число $\nu(G) = E(G) - V(G) + k(G)$ называется *цикломатическим числом* графа.

В задачах 8.193–8.195 доказать утверждения.

8.193. Если G — связный граф, то $V(G) \leq E(G) + 1$.

8.194. Для любого графа G выполняется неравенство $\nu(G) \geq 0$.

8.195. Если граф G состоит из нескольких компонент связности $G_1, \ldots, G_k$, то справедливо равенство $\nu(G) = \nu(G_1) + \ldots + \nu(G_k)$.

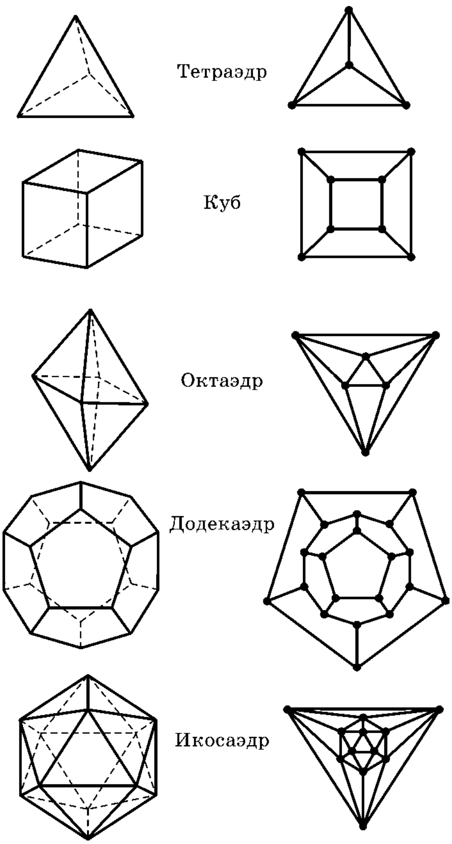


Рис. 8.18

ПРИМЕР 8.17. Чему может равняться число ребер графа, имеющего 20 вершин и 4 компоненты связности?

◄ Так как $\nu(G) \geq 0$, имеем $\nu(G) = E(G) - V(G) + k(G) \geq 0$ (см. задачу 8.194), следовательно, $E(G) \geq 16$. Покажем, что найдется граф, для которого $E(G) = 16$, $V(G) = 20$, $k(G) = 4$. Пусть 3 компоненты связности — изолированные вершины, четвертая — простая цепь C_{17} с 16 ребрами. Таким образом, минимальное число ребер равно 16. Выясним, каким может быть максимальное число ребер.

Докажем, что наибольшее количество ребер у графа, три компоненты связности которого представляют собой изолированные вершины, четвертая — полный граф K_{17} с числом ребер, равным 136. Действительно, рассмотрим граф с 20 вершинами, имеющий 4 компоненты связности (подграфы G_1, G_2, G_3, G_4), из которых по крайней мере два содержат не менее двух вершин. Предположим, что $V_1 \geq V_2 \geq 1$. Возьмем произвольно вершину из V_2, удалим все ребра, инцидентные ей, и соединим ее ребрами со всеми вершинами из V_1. Новый граф будет иметь то же количество вершин и компонент связности, но больше ребер. Таким образом, количество ребер может быть от 16 до 136. ►

ПРИМЕР 8.18. Чему может равняться число компонент связности графа, имеющего 12 вершин и 27 ребер?

◄ Так как простая цепь C_{12} имеет 11 ребер, а полный граф K_{12} — 66 ребер, то существует связный граф, имеющий 12 вершин и 27 ребер. Минимальное число компонент связности равно 1. Для того чтобы определить максимально возможное число компонент связности, найдем наименьший полный граф, число ребер которого не меньше 27: $n(n-1)/2 \geq 27$, $n = 8$. Рассмотрим граф, 4 компоненты связности которого представляют собой изолированные вершины, а пятая имеет 8 вершин и 27 ребер. Докажем, что 6 компонент связности быть уже не может. Действительно, по предыдущей задаче, граф, имеющий 12 вершин и 6 компонент связности, может иметь не более 21 ребра. Таким образом, количество компонент связности может быть от 1 до 5. ►

8.196. Сколько компонент связности имеет граф со следующим набором степеней вершин: 1, 1, 1, 2, 2, 2, 2, 3?

В задачах 8.197–8.200 определить, какие значения может принимать $k(G)$ или $E(G)$ для заданных графов.

8.197. $k(G)$ графа G, имеющего 15 вершин и 35 ребер.

8.198. $k(G)$ графа G, имеющего 12 вершин и 20 ребер.

8.199. $E(G)$ графа G, имеющего 10 вершин и 3 компоненты связности.

8.200. $E(G)$ связного графа G, имеющего 12 вершин.

В графе G путь из вершины u в вершину v называется *эйлеровым*, если он содержит все ребра графа, причем каждое по одному разу. *Эйлеров цикл* — путь из u в u, который содержит все ребра графа, каждое по одному разу. *Гамильтонов путь* — путь, обходящий все вершины графа по одному разу. *Гамильтонов цикл* — путь из вершины u в u, обходящий все вершины графа, кроме u, по одному разу.

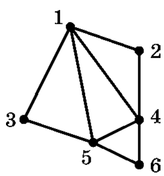


Рис. 8.19

В связном графе эйлеров путь существует тогда и только тогда, когда две вершины графа имеют нечетную степень, а все остальные — четную, а эйлеров цикл существует тогда и только тогда, когда все вершины графа имеют четную степень.

Если $|G| = n \geq 3$ и для любой вершины v графа G выполняется неравенство $\deg v \geq n/2$, то G — гамильтонов граф.

ПРИМЕР 8.19. Существует ли эйлеров цикл у графа, изображенного на рис. 8.19? Если существует, то построить его.

◄ Так как степени всех вершин четны, то эйлеров цикл существует. Возьмем произвольный цикл, например (1, 5, 3, 1). Этот цикл не содержит все ребра графа. Рассмотрим граф, полученный из исходного удалением этого цикла. Удаленный граф и оставшийся, в силу связности исходного графа, всегда имеют общую вершину, в данном случае — 5. Рассмотрим теперь произвольный цикл нового графа, начинающийся в вершине 5, например (5, 4, 6, 5). Присоединим его к первому циклу: (1, 5, 4, 6, 5, 3, 1). Остается единственный цикл (4, 1, 2, 4), присоединив который, получим эйлеров цикл (1, 5, 4, 1, 2, 4, 6, 5, 3, 1). ►

8.201. У каких из графов, изображенных на рис. 8.20, существует эйлеров путь или эйлеров цикл? Если существует, то построить его.

8.202. Для каких m и n следующие графы являются эйлеровыми: а) $K_{m,n}$; б) K_n; в) графы правильных многогранников (рис. 8.18), n — порядок графа; в эйлеровых графах найдите эйлеровы цепи.

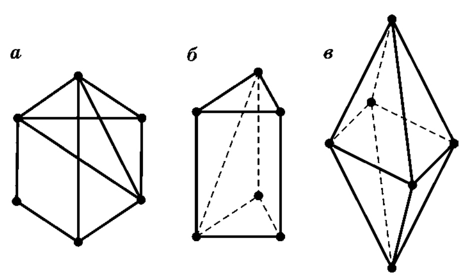


Рис. 8.20

8.203. Для каких m и n следующие графы являются гамильтоновыми: а) $K_{m,\,n}$; б) K_n. Опишите гамильтоновы циклы в каждом из тех случаев, когда они существуют. Покажите, что все графы правильных многогранников (рис. 8.18) являются гамильтоновыми, и найдите в каждом из них гамильтоновы циклы.

3. Способы задания графов

Наряду с графическим представлением графа, а также заданием перечислением его вершин и ребер, существуют способы задания графов с помощью матриц.

Пусть G — помеченный граф порядка n. Определим матрицу $A = A(G) = (a_{ij})$ размера $n{\times}n$ следующим образом:

$$a_{ij} = \begin{cases} 1, \text{ если вершины } v_i \text{ и } v_j \text{ смежны,} \\ 0, \text{ в противном случае.} \end{cases}$$

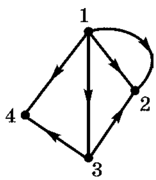


Рис. 8.21

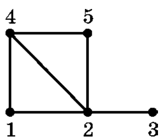


Рис. 8.22

$A(G)$ называется *матрицей смежности* графа G. Число единиц в строке равно степени соответствующей вершины. Если в графе G допускаются кратные ребра, то a_{ij} равно количеству ребер, соединяющих вершины v_i и v_j.

Рангом графа $\operatorname{rank} G$ называется ранг его матрицы смежности.

Ориентированный граф — это пара (V, A), где V — множество вершин, A — множество *ориентированных ребер* (или *дуг*) — упорядоченных пар (u, v), где $u, v \in V$. При этом u называется *началом* дуги, v — *концом* (рис. 8.21). Граф, полученный из направленного путем отмены направлений ребер, называется *нижним* графом.

ПРИМЕР 8.20. Для графа, изображенного на рис. 8.22, построить матрицу смежности.

◄ Граф, изображенный на рис. 8.22, имеет пять вершин. Следовательно, его матрица смежности имеет размерность 5×5. При заданной нумерации вершин графа матрицу формируем следующим образом. Строим таблицу 8.13.

Таблица 8.13

v_1	v_2	v_3	v_4	v_5	
0	1	0	1	0	v_1
1	0	1	1	1	v_2
0	1	0	0	0	v_3
0	1	0	0	1	v_4
0	1	0	1	0	v_5

Теперь построенную таблицу записываем в виде матрицы:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Это и есть искомая матрица смежности графа. ►

Графы изоморфны тогда и только тогда, когда их матрицы смежности получаются друг из друга перестановками строк и столбцов. Матрицы смежности изоморфных графов подобны, поэтому характеристические многочлены этих матриц совпадают. Характеристический многочлен матрицы смежности графа называется *характеристическим многочленом графа*. Совокупность корней характеристического многочлена с учетом их кратности, называется *спектром графа*. Следует заметить, что из совпадения характеристических многочленов графов не следует их изоморфизма.

Пусть G — неориентированный (n, m)-граф, $V(G) = \{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$, $E(G) = \{e_1, e_2, \ldots, e_m\}$. Определим матрицу $I = I(G)$ размера $n{\times}m$, называемую *матрицей инцидентно-*

сти графа G, в которой на пересечении i-й строки и j-го столбца стоит 1, если вершина v_i и ребро e_j инцидентны, и 0 в противном случае.

Если же G — ориентированный граф, то его матрица инцидентности $I(G)$ определяется следующим образом: на пересечении i-й строки и j-го столбца стоит 1, если вершина v_i является началом ребра e_j; -1, если вершина v_i является концом ребра e_j; 0, если вершина v_i и ребро e_j не инцидентны.

ПРИМЕР 8.21. Построить матрицу инцидентности графа, изображенного на рис. 8.23.

◀ Зададим нумерацию вершин и ребер, как показано на рис. 8.24, и построим матрицу инцидентности графа. Для этого заметим, что вершина 1 инцидентна ребрам e_1, e_2, e_3, 2 — e_1, e_4, e_5, 3 — e_2, e_3 и 4 — e_3, e_5. В соответствии с этим заполняем матрицу $I(G)$:

$$I(G)=\begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} e_1 & e_2 & e_3 & e_4 & e_5 \end{array} \\ \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \end{array} \begin{array}{c} \\ v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ v_4 \end{array}. \blacktriangleright$$

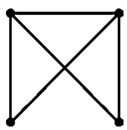


Рис. 8.23

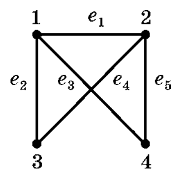


Рис. 8.24

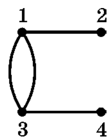


Рис. 8.25

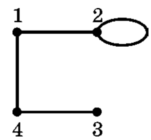


Рис. 8.26

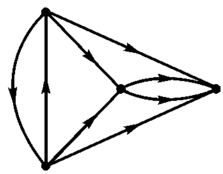


Рис. 8.27

8.204. Для графов, изображенных на рис. 8.21, 8.25 и 8.26 построить матрицы смежности.

8.205. Составить матрицы смежности и инцидентности для полного графа порядка n.

8.206. Составить матрицы смежности и инцидентности для графа, изображенного на рис. 8.27.

8.207. Для графов, изображенных на рис. 8.28, построить матрицы смежности и найти характеристические многочлены.

8.208. Составить матрицы смежности и инцидентности для графов, изображенных на рис. 8.29.

8.209. Пусть $A(G)$ и $I(G)$ — соответственно матрицы смежности и инцидентности графа G. Какую информацию для каждой из матриц содержит в себе сумма ее членов: а) в каждой строке; б) в каждом столбце?

8.210. Возвести матрицу смежности графа K_4 в квадрат. Какую информацию содержат в себе элементы получившейся матрицы?

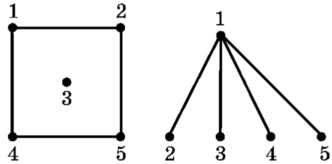


Рис. 8.28

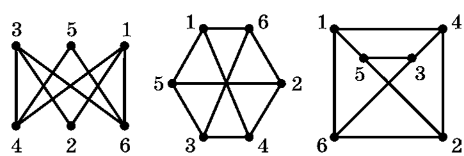


Рис. 8.29

8.211. Пусть $B = (A(G))^m$. Доказать, что значение каждого элемента b_{ij} матрицы B равно количеству маршрутов длины m из вершины v_i в вершину v_j.

8.212. Построить матрицу смежности и матрицу инцидентности, найти ранг графа: а) C_4; б) $K_{2,\,2}$.

8.213. Изобразить графы, имеющие следующие матрицы смежности; для графа из задания а) найти диаметр, ранг, указать центр, периферийные, доминирующие и концевые вершины:

$$\text{а) } A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}; \quad \text{б) } A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix};$$

$$\text{в) } A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}; \quad \text{г) } A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

8.214. Изобразить графы, имеющие следующие матрицы инцидентности, для графа из задания а) найти диаметр, ранг, указать центр, периферийные, доминирующие и концевые вершины:

$$\text{а) } I(G) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix};$$

$$\text{б) } I(G) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

4. Деревья

Связный граф T без циклов называется *деревом*. Любой граф без циклов называется *ациклическим* (или *лесом*).

Деревом покрытия связного графа G называют подграф, который является деревом и множество вершин которого совпадает с $V(G)$.

8.215. Сколько существует неизоморфных деревьев порядка: а) три; б) четыре; в) пять; г) шесть. В случаях а)–г) изобразите все неизоморфные деревья.

8.216. Изобразить какие-либо деревья покрытия для графов: а) $K_{3,\,3}$; б) графа Петерсена; в) графов правильных многогранников (см. рис. 8.18).

В задачах 8.217–8.221 доказать утверждения.

8.217. Связный граф является деревом тогда и только тогда, когда число его вершин на единицу больше числа его ребер: $|V(G)| = |E(G)| + 1$.

8.218. Дерево, содержащее по крайней мере одно ребро, является двудольным.

8.219. Каждый связный граф содержит в себе покрывающее дерево.

8.220. Любые две вершины дерева можно соединить путем. Если это простой путь, то он единственный.

8.221. Любое дерево, имеющее не менее двух вершин, содержит не менее двух висячих вершин.

Для задания деревьев обычно используют кодирование.

Первый способ кодирования. Пусть T — дерево, тогда $n = |E(T)| = |V(T)| - 1$. Поставим в соответствие дереву T с n ребрами слово, состоящее из нулей и единиц длиной $2n$ следующим образом. Выберем произвольно вершину и начнем обход дерева по произвольному ребру так, чтобы ребра все время оставались справа, поворачивая в висячих вершинах. Если ребро встретилось в первый раз, записываем 0, во второй — 1. Обход заканчивается при

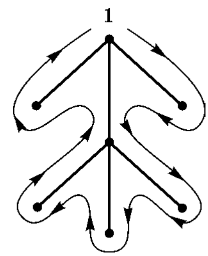


Рис. 8.30

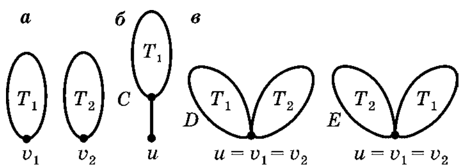


Рис. 8.31

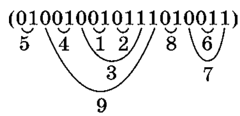


Рис. 8.32

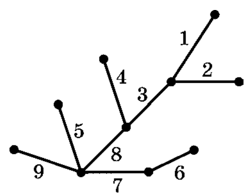


Рис. 8.33

возвращении в исходную вершину. Код дерева, представленного на рис. 8.30, имеет вид (010010101101) (обход начат с вершины 1).

Дереву с одним ребром соответствует код (01). Если деревьям T_1 и T_2 (рис. 8.31*а*) сопоставлены коды $\tilde{\alpha}$ и $\tilde{\beta}$ соответственно, то дереву C (рис. 8.31*б*) сопоставляется код $(0\tilde{\alpha}1)$, а деревьям D и E (рис. 8.31*в*) — коды $\tilde{\alpha}\tilde{\beta}$ и $\tilde{\beta}\tilde{\alpha}$.

Алгоритм восстановления дерева по коду. Разбиваем код на пары из нулей и единиц, соответствующие одному ребру, следующим образом. Первая единица, присутствующая в коде, образует пару с предшествующим нулем. Каждая следующая образует пару с ближайшим слева неиспользованным нулем. Помечаем получившиеся пары снизу дугами, соответствующими ребрам графа, и нумеруем их по порядку начиная с середины так, чтобы между ними сохранялось отношение смежности.

ПРИМЕР 8.22. Восстановить дерево по его коду (010010010111010011).

◀ Поступаем в соответствии с алгоритмом (рис. 8.32). Дерево, соответствующее этому коду, изображено на рис. 8.33. ▶

Второй способ кодирования. Занумеруем вершины дерева произвольным образом (см. рис. 8.34). Найдем висячую вершину с наименьшим номером. Запишем номер единственной смежной с ней вершины и удалим висячую вершину вместе с ребром.

Для получившегося дерева снова найдем висячую вершину с наименьшим номером и т. д., пока не останется одно ребро. Длина кода при этом равна $|E| - 1 = |V| - 2$.

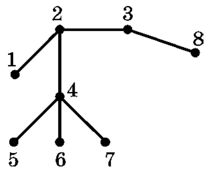


Рис. 8.34

ПРИМЕР 8.23. Построить код дерева, изображенного на рис. 8.34.

◄ Висячая вершина с наименьшим номером — 1, смежная с ней имеет номер 2. Удаляем вершину 1 вместе с ребром и записываем в код 2. В оставшемся дереве висячая вершина с наименьшим номером — 5, смежная с ней — 4. Удаляем вершину 5 вместе с ребром и записываем в код 4. В оставшемся дереве висячая вершина с наименьшим номером — 6, смежная с ней — 4. Удаляем вершину 6 вместе с ребром и снова записываем в код 4. В оставшемся дереве висячая вершина с наименьшим номером — 7, смежная с ней — 4. Удаляем вершину 7 вместе с ребром и снова записываем в код 4. В оставшемся дереве висячая вершина с наименьшим номером — 4, смежная с ней — 2. Удаляем вершину 4 вместе с ребром и записываем в код 2. В оставшемся дереве висячая вершина с наименьшим номером — 2, смежная с ней — 3. Удаляем вершину 2 вместе с ребром и записываем в код 3. Осталось одно ребро. Получили код дерева [244423]. ►

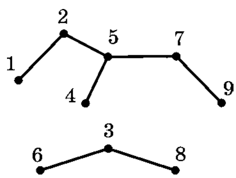


Рис. 8.35

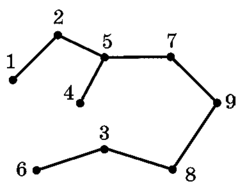


Рис. 8.36

Восстановление дерева по коду рассмотрим на примере.

ПРИМЕР 8.24. Восстановить дерево по его коду [2557389].

◄ Вместо первого числа в коде пишем наименьшее, не встречающееся в коде: 1557389. Вместо второго числа в новой последовательности пишем наименьшее, не встречающееся в ней: 1257389 и т. д. Получаем последовательность 1245637. Расположив ее под кодом, получим список ребер: (2, 1), (5, 2), (5, 4), (7, 5), (3, 6), (8, 3), (9, 7). Строим сначала граф по этому списку ребер (рис. 8.35). В последовательности 1245637 отсутствуют числа 8 и 9. Соединяем вершины 8 и 9 ребром и получаем граф (рис. 8.36). ►

8.222. Построить коды деревьев (два для каждого дерева), изображенных на рис. 8.37.

8.223. Сформулировать необходимое и достаточное условие того, что последовательность из n единиц и n нулей является кодом дерева.

8.224. Построить дерево по коду (00101001011101).

8.225. Построить дерево по коду (00101011001101).

8.226. Построить дерево по коду [5345566].

8.227. Построить дерево по коду [4445477].

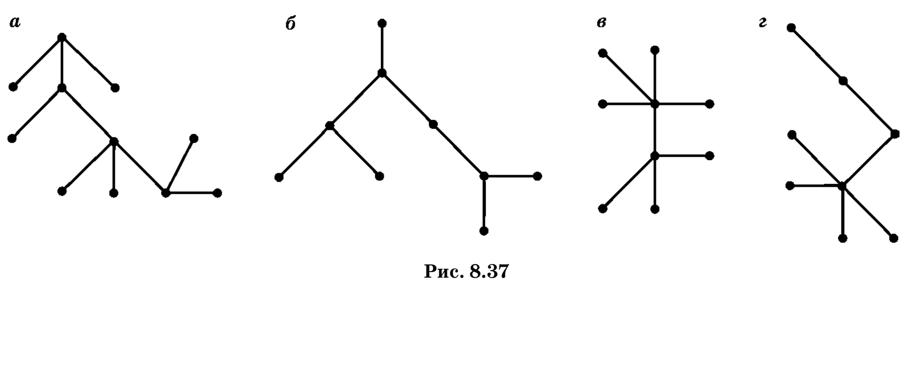


Рис. 8.37

5. Планарность. Раскраски графов

Граф G называется *планарным*, если его можно изобразить на плоскости без пересечения ребер.

Пусть G — планарный связный граф. Тогда любой простой цикл в нем определяет некоторую область на плоскости. Эта область называется *гранью*. У графа есть ровно одна неограниченная внешняя грань. Например, граф K_3 разбивает плоскость на 2 грани, одна из которых, внешняя, является неограниченной. *Граница грани* — множество вершин и ребер, принадлежащих этой грани.

ТЕОРЕМА (Эйлера). *В любом планарном связном графе* В + Г = Р + 2, *где* В — *количество вершин*, Г — *граней*, Р — *ребер*.

ПРИМЕР 8.25. Доказать, что полный граф K_5 не является планарным.

◀ Для графа K_5 имеем В = 5, Р = 10. Если бы он был планарный, то выполнялось бы равенство В + Г = Р + 2, т. е. Г = 7. Двуугольные грани у графа K_5, очевидно, отсутствуют. Имеем $n_2 = 0$, $n_3 + n_4 + \ldots = 7$. Кроме того, $3n_3 + 4n_4 + \ldots = 2\text{Р} = 20$. Умножим первое равенство на 3 и вычтем из второго. Получим $n_4 + 2n_5 + \ldots = -1$. Получили противоречие, следовательно, граф K_5 не планарный. ▶

Пусть G — планарный граф. Граф без висячих вершин будем называть *замкнутым*. Далее рассматриваются планарные графы без петель, но в которых могут быть кратные ребра.

Графы G_1 и G_2 называются *гомеоморфными*, если существуют изоморфные графы G_1' и G_2', полученные из графов G_1 и G_2 применением один или несколько раз операции разделения ребер (рис. 8.38). Например, графы, изображенные на рис. 8.39, не изоморфны, но гомеоморфны.

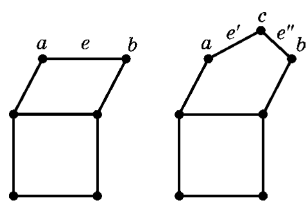


Рис. 8.38

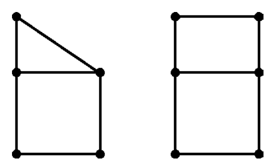


Рис. 8.39

ТЕОРЕМА (критерий планарности А. С. Понтрягина — К. Куратовского). *Граф G планарный тогда и только тогда, когда у него нет подграфов, гомеоморфных K_5 или $K_{3,3}$.*

ПРИМЕР 8.26. Доказать, что граф B^4 не планарен.

◀ Рассмотрим подграф графа B^4, образованный вершинами K_1, K_2, K_3, D_1, D_2, D_3, X_1, X_2, X_3, X_4, X_5, X_6 и ребрами (D_1, K_1), (D_1, K_2), (D_1, K_3), (D_1, X_1), (D_2, K_1), (D_2, K_2), (D_2, K_3), (X_1, X_2), (X_2, K_2), (D_3, K_2), (D_3, K_3), (D_3, X_3), (X_3, X_4), (X_4, X_5), (X_5, X_6), (X_6, K_1) (рис. 8.40*а*). Этот подграф гомеоморфен $K_{3,3}$ (рис. 8.40*б*). Следовательно, граф B^4 не планарен. ▶

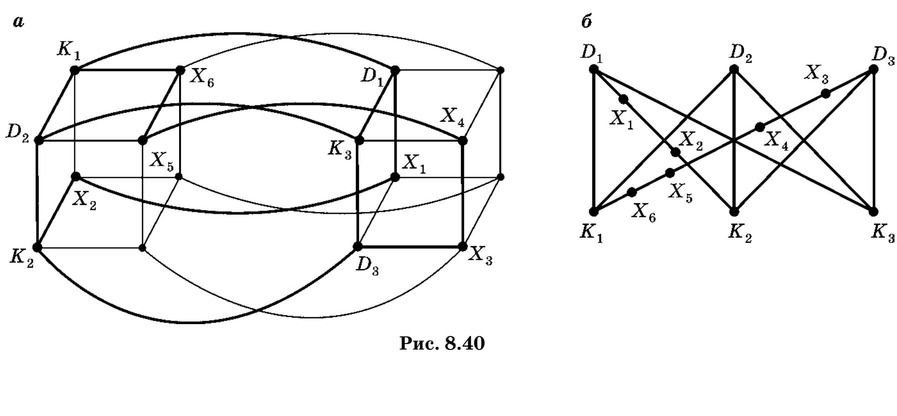


Рис. 8.40

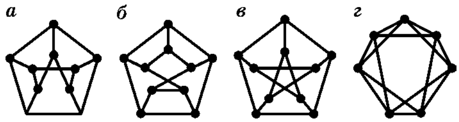


Рис. 8.41

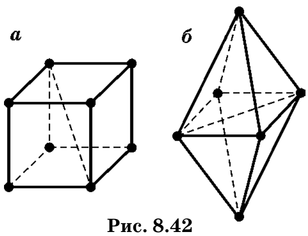


Рис. 8.42

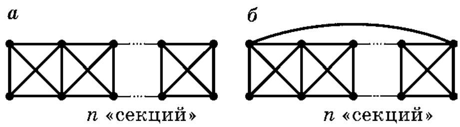


Рис. 8.43

8.228. Является ли планарным граф K_5, из которого удалено одно ребро?

8.229. Доказать, что граф, у которого $d(v_i) = 0$ для любой вершины v_i, имеет грань, в которой не больше 5 ребер.

8.230. Доказать, что двудольный граф $K_{3,\,3}$ не планарный.

8.231. Являются ли планарными графы, изображенные на рис. 8.41?

8.232. Является ли планарным граф, получающийся из B^3 добавлением ребра, соединяющего противоположные вершины (рис. 8.42*а*)?

8.233. В октаэдре соединены две противоположные вершины (рис. 8.42*б*). Является ли получившийся граф планарным?

8.234. Планарен ли граф $C_3 \times \mathbb{Z}_5$?

8.235. При каких значениях $n \geq 2$ являются планарными графы, изображенные на рис. 8.43*а*, *б*?

8.236. Какое минимальное число ребер нужно удалить из графа B^4, чтобы полученный граф стал планарным?

8.237. Какое минимальное число вершин нужно удалить из графа B^4, чтобы полученный граф стал планарным?

Пусть задано несколько красок $k_1, k_2, \ldots, k_s$. *Раскраской графа G* называется правило, по которому каждой вершине графа присваивается номер $1 \leq i \leq s$, соответствующий краске, причем смежные вершины имеют разные номера.

Хроматическим числом $\chi(G)$ *графа G* называется наименьшее число красок, требуемое для раскраски данного графа. Для полного графа $\chi(K_n) = n$.

Граф называется *бихроматичным*, если для его раскраски требуется две краски ($\chi(G) = 2$).

ТЕОРЕМА (критерий бихроматичности). *Для любого графа G эквивалентны условия*:

1) *граф G бихроматичен*;

2) *граф G двудольный*;

3) *в графе G нет циклов нечетной длины*.

Реберным хроматическим числом $\chi_p(G)$ *графа G* называется наименьшее количество красок, необходимых для раскраски ребер графа таким образом, чтобы смежные ребра имели разные цвета. Для полных графов $\chi_p(K_n) = \begin{cases} n, \text{ если } n \text{ нечетно,} \\ n-1, \text{ если } n \text{ четно.} \end{cases}$

ТЕОРЕМА (Визинга). $\Delta(G) \leq \chi_p(G) \leq \Delta(G) + 1$.

ТЕОРЕМА (о пяти красках). *Хроматическое число планарного графа не превосходит* 5.

8.238. Доказать, что если планарный граф G содержит висячие ребра, то добавление произвольных ребер так, чтобы висячих не осталось, не уменьшает хроматического числа $\chi(G)$.

8.239. Найти хроматическое число графа B^4.

8.240. Найти реберное хроматическое число графа B^3.

8.241. Найти хроматическое число графа T_n (дерево с n вершинами).

8.242. Привести пример плоского графа с хроматическим числом, равным 3.

8.243. Найти реберное хроматическое число графа $K_{3,5}$.

8.244. Найти хроматическое число и реберное хроматическое число графа $C_2 \times \mathbb{Z}_3$.

8.245. Найти хроматическое число и реберное хроматическое число графа $C_3 \times \mathbb{Z}_3$.

§ 8.3. ОСНОВЫ ТЕОРИИ АВТОМАТОВ

1. Основные определения. Способы задания автоматов

Конечным автоматом (*автоматом Мили*) называется система $V = (A, Q, B, \varphi, \psi)$, где A, B, Q — конечные множества: $A = \{a_1, \ldots, a_m\}$ — *входной алфавит*, $B = \{b_1, \ldots, b_k\}$ — *выходной алфавит*, $Q = \{q_1, \ldots, q_n\}$ — *множество состояний* автомата, а φ, ψ — отображения: φ: $Q \times A \to Q$ — *функция переходов*, ψ: $Q \times A \to B$ — *функция выходов*. В дискретный момент времени $t \in \{0, 1, 2, \ldots\}$ автомат принимает входной символ $a(i) = a \in A$, изменяет (или сохраняет) свое состояние $q(i) = q \in Q$, и выдает символ $b(i) = b \in B$ (рис. 8.44).

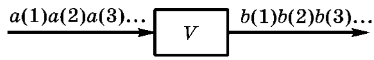


Рис. 8.44

Работа автомата описывается системой *канонических уравнений*

$$\begin{cases} q(t+1) = \varphi(q(t), a(t)), \\ b(t) = \psi(q(t), a(t)), \end{cases} \qquad (8.7)$$

которая должна быть дополнена *начальным условием* $q(0) = q_0 \in Q$ — *начальное*, или *инициальное*, состояние.

Говорят, что автоматы $V = (A, B, Q, \varphi, \psi)$ и $V' = (A, B, Q', \varphi', \psi')$ работают одинаково, если при подаче на вход этих автоматов любых одинаковых последовательностей символов последовательности символов на выходе также совпадают.

Автоматом Мура или *автоматом без выхода* называется система $V = (A, Q, \varphi)$, где конечные множества A и Q — соответственно входной алфавит и множество состояний, а φ: $Q \times A \to Q$ — отображение. Равенство $\varphi(q, a) = q'$ означает, что если автомат находится в состоянии q и принимает символ a, то должен осуществиться его переход в состояние q'.

Наряду с каноническими уравнениями (8.7) работа автомата $V = (A, Q, B, \varphi, \psi)$ может быть описана с помощью диаграммы Мура или канонической таблицы.

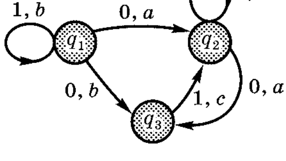


Рис. 8.45

Диаграммой Мура автомата V называется ориентированный граф, вершинами которого являются состояния $q \in Q$ и для каждого равенства вида $\varphi(q, a) = q'$ граф имеет ребро, идущее из q в q', на котором стоит двойная метка a, b, где $b = \psi(q, a)$. Например, на рис. 8.45 изображена диаграмма Мура автомата, у которого $A = \{0, 1\}$, $B = \{a, b, c\}$, $Q = \{q_1, q_2, q_3\}$, $\varphi(q_1, 0) = q_2, \ldots, \varphi(q_3, 1) = q_2$, $\psi(q_1, 0) = a, \ldots, \psi(q_3, 1) = c$.

Канонической таблицей автомата V называется прямоугольная таблица с $n = |Q|$ строками и $m = |A|$ столбцами, в которой в клетке, стоящей на пересечении i-й строки и j-го столбца, написаны символы $\varphi(q_i, a_j)$ и $\psi(q_i, a_j)$. В таблице 8.14 изображена таблица автомата, представленного на рис. 8.45.

Таблица 8.14

	0	1
q_1	q_2 / a	q_1 / b
q_2	q_3 / a	q_2 / c
q_3	q_1 / b	q_2 / c

Чтобы полностью определить автомат с помощью диаграммы Мура и канонической таблицы, необходимо указать начальное состояние автомата.

Автомат без памяти — автомат, в котором множество состояний Q состоит в точности из одного элемента. В этом случае функция φ отсутствует, а функция ψ зависит только от пришедшего на вход автомата символа входного алфавита (рис. 8.46). Канонические уравнения автомата принимают вид

$$b(t) = \psi(a(t)).$$

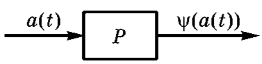


Рис. 8.46

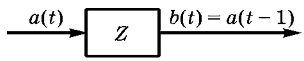


Рис. 8.47

Элементом задержки называется автомат, у которого входной и выходной алфавиты совпадают: $A = B$, а выходной символ представляет собой задержанный на один такт (на единицу времени) входной символ. Таким образом, $b(t + 1) = a(t)$ при всех $t \geq 0$. При задании этого автомата, учитывая, что $A = B = Q$, $\varphi(q, a) = a$, $\psi(q, a) = q$, получаем систему канонических уравнений:

$$\begin{cases} b(t) = q(t-1), \\ q(t) = a(t). \end{cases}$$

Таблица 8.15

$Q \backslash A$	0	1
0	0 / 0	1 / 0
1	0 / 1	1 / 1

ПРИМЕР 8.27. Для элемента задержки в случае $A = B = \{0, 1\}$ построить его каноническую таблицу и диаграмму Мура.

◄ Множество состояний автомата состоит из 2-х элементов $q_1 = 0$ и $q_2 = 1$. В качестве начального состояния элемента задержки можно взять любое из его состояний. Так как функции состояния и переходов имеют вид $\varphi(q, a) = a$, $\psi(q, a) = q$, то, заполняя таблицу, получаем: если автомат находился в состоянии 0, то $\varphi(0, 0) = 0$, $\psi(0, 0) = 0$, $\varphi(0, 1) = 1$, $\psi(0, 1) = 0$; если в состоянии 1, то $\varphi(1, 0) = 0$, $\psi(1, 0) = 1$, $\varphi(1, 1) = 1$, $\psi(1, 1) = 1$ (табл. 8.15).

Полученные результаты используем для построения диаграммы Мура, имеющей две вершины и четыре ребра (рис. 8.48). ►

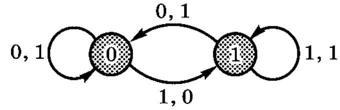


Рис. 8.48

8.246. Для элемента задержки в случае $A = B = \{0, 1, 2\}$ построить каноническую таблицу и диаграмму Мура.

8.247. Построить диаграмму Мура автомата, заданного таблицей 8.16.

Таблица 8.16

	0	1	2
q_1	q_3 / 2	q_1 / 1	q_2 / 2
q_2	q_2 / 0	q_2 / 0	q_3 / 1
q_3	q_3 / 1	q_3 / 2	q_1 / 0

В задачах 8.248–8.251 выяснить, являются ли следующие графы диаграммами Мура некоторого автомата. Ответ обосновать.

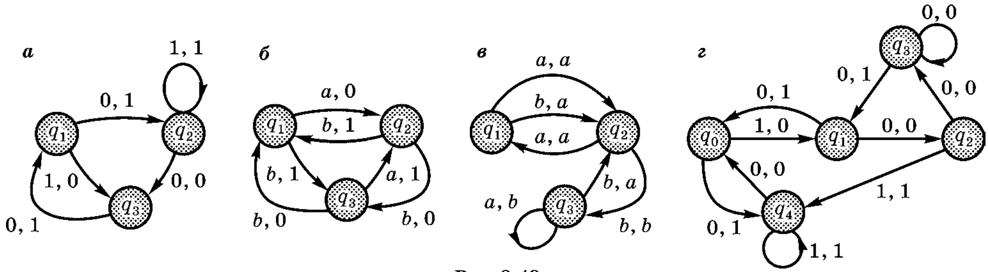


Рис. 8.49

8.248. Граф на рис. 8.49*а*. **8.249**. Граф на рис. 8.49*б*.
8.250. Граф на рис. 8.49*в*. **8.251**. Граф на рис. 8.49*г*.

В задачах 8.252, 8.253 получить результат на выходе, если на вход автомата, заданного диаграммой Мура, подана указанная последовательность символов.

8.252. Диаграмма изображена на рис. 8.50*а*, на вход подается последовательность *ababbaab*. За начальное состояние принять q_1.

8.253. Диаграмма на рис. 8.50*б*, на вход подается последовательность 011000110. За начальное состояние принять q_0.

В задачах 8.254, 8.255 получить результат на выходе, если на вход автомата подана указанная последовательность символов, а также построить каноническую таблицу автоматов, заданных следующими диаграммами Мура.

8.254. Диаграмма на рис. 8.50*а*, на вход подается последовательность *abbabaab*. Разобрать все возможные случаи начального состояния.

8.255. Диаграмма изображена на рис. 8.50*б*, на вход подается последовательность 100111001. Разобрать все возможные случаи начального состояния.

8.256. Построить диаграмму Мура и каноническую таблицу автомата, заданного каноническими уравнениями

$$\begin{cases} \varphi(q,a) = q + a \,(\mathrm{mod}\, 3), \\ \psi(q,a) = \begin{cases} a, \text{ если } q < 2, \\ 1 - a, \text{ если } q = 2, \end{cases} \end{cases}$$

если $A = B = \{0,\ 1\}$ и $Q = \{0,\ 1,\ 2\}$.

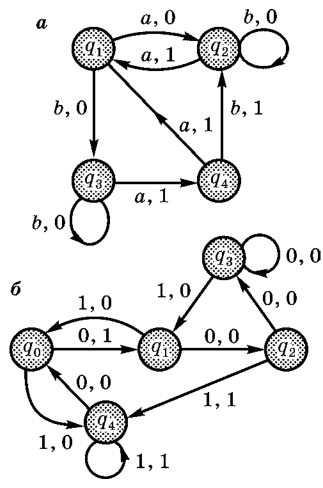


Рис. 8.50

8.257. Построить диаграмму Мура и каноническую таблицу автомата V, заданного каноническими уравнениями

$$\begin{cases} b(t) = q(t) + a(t)\,(\mathrm{mod}\, 3), \\ q(t+1) = a(t) + 1\,(\mathrm{mod}\, 3), \end{cases}$$

где $A = B = Q = \{0,\ 1,\ 2\}$.

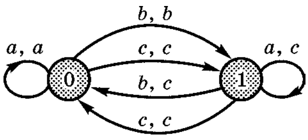


Рис. 8.51

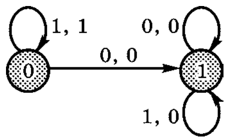


Рис. 8.52

8.258. Автомат V таков, что $A = \{0, 1\} \times \{0, 1\}$, $B = Q = \{0, 1\}$, $\varphi(q, (x, y)) = q + xy \pmod 2$, $\psi(q, (x, y)) = q + x + y \pmod 2$. Построить диаграмму Мура и каноническую таблицу автомата V.

В задачах 8.259, 8.260 написать канонические уравнения автомата, заданного диаграммой Мура.

8.259. Диаграмма представлена на рис. 8.51.

8.260. Диаграмма представлена на рис. 8.52.

2. Продолжение функций φ и ψ

Пусть $A = \{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$ — конечный алфавит. *Словом* w над алфавитом A называется любая последовательность символов алфавита $w = a_{i_1}a_{i_2}\ldots a_{i_k}$. Число k называется *длиной* слова w и обозначается $|w|$. Слово, в котором нет ни одной буквы, обозначают символом λ и называют *пустым*; символами A^m и A^* обозначают соответственно множество всех слов длины m и множество всех слов, а A^+ — множество всех непустых слов. Полагают $|\lambda| = 0$ и $A^0 = \{\lambda\}$. Иногда используют обозначение $w = a^k$, если $w = \underbrace{aa\ldots a}_{k \text{ раз}}$.

Произведением двух слов $w, w' \in A^*$ называется слово, полученное приписыванием к слову w справа слова w', т. е. если $w = a_{i_1}a_{i_2}\ldots a_{i_s}$ и $w' = a_{j_1}a_{j_2}\ldots a_{j_t}$, то

$$ww' = a_{i_1}a_{i_2}\ldots a_{i_s}a_{j_1}a_{j_2}\ldots a_{j_t}.$$

Продолжением функций $\varphi: Q \times A \to Q$ и $\psi: Q \times A \to B$ *на слова* называются соответственно функции $\overline{\varphi}: Q \times A^* \to Q$ и $\overline{\psi}: Q \times A^* \to B^*$, определенные следующим образом:

для любого $a \in A$ $\overline{\varphi}(q, a) = \varphi(q, a)$ и $\overline{\psi}(q, a) = \psi(q, a)$;
для любых $a \in A$ и $w \in A^+$ $\overline{\varphi}(q, aw) = \overline{\varphi}(\varphi(q, a), w)$
и $\overline{\psi}(q, aw) = \psi(q, a)\overline{\psi}(\varphi(q, a), w)$; $\overline{\varphi}(q, \lambda) = q$, $\overline{\psi}(q, \lambda) = \lambda$.

Таблица 8.17

	a	b	c
q_1	q_1 / 0	q_2 / 0	q_2 / 1
q_2	q_2 / 1	q_1 / 1	q_2 / 0

ПРИМЕР 8.28. Автомат задан таблицей 8.17. Определить

$$\overline{\varphi}(q_1, ab),\ \overline{\varphi}(q_2, abc),\ \overline{\varphi}(q_1, abca),\ \overline{\psi}(q_2, ba),\ \overline{\psi}(q_1, a^3b^2).$$

◀ В соответствии с определением и таблицей получаем следующую цепочку значений функции переходов при подаче последовательно на вход символов a, b, c, a: $q_1 \xrightarrow{a} q_1 \xrightarrow{b} q_2 \xrightarrow{c} q_2 \xrightarrow{a} q_1$. Тогда

$$\overline{\varphi}(q_1, ab) = \varphi(\underbrace{\varphi(q_1, a)}_{=q_1}, b) = \varphi(q_1, b) = q_2,$$

$$\overline{\varphi}(q_2, abc) = \overline{\varphi}(\underbrace{\varphi(q_2, a)}_{=q_1}, bc) = \overline{\varphi}(q_1, bc) = \varphi(\underbrace{\varphi(q_1, b)}_{=q_2}, c) = \varphi(q_2, c) = q_2,$$

$$\overline{\varphi}(q_1, abca) = \overline{\varphi}(\underbrace{\varphi(q_1, a)}_{=q_1}, bca) = \overline{\varphi}(\underbrace{\varphi(\varphi(q_1, a), b)}_{=q_2}, ca) = \overline{\varphi}(\underbrace{\varphi(\varphi(\varphi(q_1, a), b), c)}_{=q_2}, a) = q_2.$$

Аналогично находим: $q_2 \xrightarrow{b} \underset{1}{q_1} \xrightarrow{a} \underset{0}{q_1}$. Отсюда

$$\overline{\psi}(q_2, ba) = \psi(q_2, b)\psi(\varphi(q_1, b), a) = 1\psi(q_1, a) = 10; \quad q_1 \xrightarrow{a} \underset{0}{q_1} \xrightarrow{a} \underset{0}{q_1} \xrightarrow{a} \underset{0}{q_1} \xrightarrow{b} \underset{0}{q_2} \xrightarrow{b} \underset{1}{q_1},$$

поэтому $\overline{\psi}(q_2, a^3b^2) = 00001$. ►

8.261. Выяснить, какую информацию можно получить из функций $\overline{\varphi}$ и $\overline{\psi}$, если в какой-либо момент автомат находится в состоянии q, а на его вход поступает последовательность символов $a_{i_1}, a_{i_2}, \ldots, a_{i_k}$.

Таблица 8.18

	a	b	c
q_1	q_1 / 0	q_2 / 0	q_2 / 1
q_2	q_1 / 0	q_1 / 1	q_2 / 1

Таблица 8.19

	a	b
q_1	q_2 / 0	q_3 / 0
q_2	q_1 / 0	q_4 / 1
q_3	q_1 / 1	q_4 / 0
q_4	q_3 / 1	q_2 / 1

Таблица 8.20

	0	1	2
q_1	q_2 / a	q_3 / b	q_2 / a
q_2	q_1 / b	q_2 / b	q_3 / a
q_3	q_1 / a	q_2 / a	q_2 / b

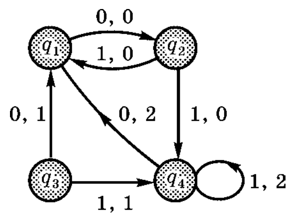


Рис. 8.53

8.262. Автомат задан таблицей 8.18. Найти:

а) $\overline{\varphi}(q_1, ab)$; б) $\overline{\varphi}(q_2, abc)$; в) $\overline{\varphi}(q_1, abca)$; г) $\overline{\psi}(q_1, ba)$; д) $\overline{\psi}(q_2, a^3b^2)$.

8.263. Автомат задан таблицей 8.19. Найти:

а) $\overline{\varphi}(q_1, ab)$; б) $\overline{\varphi}(q_4, aba)$; в) $\overline{\varphi}(q_2, a^2b^2a)$; г) $\overline{\psi}(q_3, ba)$; д) $\overline{\psi}(q_2, a^2b^3)$.

8.264. Автомат задан таблицей 8.20. Найти: а) $\overline{\varphi}(q_2, 0120)$; б) $\overline{\psi}(q_3, 1120)$.

8.265. Автомат задан диаграммой Мура, изображенной на рис. 8.53. Найти: а) $\overline{\varphi}(q_1, 001)$; б) $\overline{\psi}(q_3, 110)$.

8.266. Автомат задан диаграммой Мура, изображенной на рис. 8.54. Найти:

а) $\overline{\varphi}(q_3, baab)$; б) $\overline{\varphi}(q_3, a^{200})$; в) $\overline{\psi}(q_2, abab)$; г) $\overline{\psi}(q_2, b^{10})$.

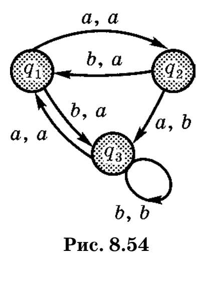


Рис. 8.54

8.267. Автомат задан каноническими уравнениями

$$\begin{cases} q(t+1) = q(t) \to a(t) \oplus 1, \\ b(t) = q(t) \oplus a(t), \end{cases}$$

где $Q = A = B = \{0, 1\}$. Найти: а) $\overline{\varphi}(0, 01110)$, б) $\overline{\psi}(1, 1001)$.

8.268. Автомат задан каноническими уравнениями

$$\begin{cases} q(t+1) = q(t) + a(t) + 1, \\ b(t) = q(t) + 2a(t), \end{cases}$$

где $Q = A = B = \{0, 1, 2\}$, и вычисления производятся по модулю 3. Найти: а) $\overline{\varphi}(0, 1220)$; б) $\overline{\psi}(1, 1021)$.

3. Приведенный автомат

Состояния q и q' автомата $V = (A, Q, B, \varphi, \psi)$ называют *неотличимыми*, если $\overline{\psi}(q,w) = \overline{\psi}(q',w)$ для всех $w \in A^+$. Состояния q и q' *отличимы*, если $\overline{\psi}(q,w) \neq \overline{\psi}(q',w)$ для некоторого слова $w \in A^+$.

Положим $q \sim q'$, если q и q' неотличимы. Отношение неотличимости разбивает множество Q на непересекающиеся классы эквивалентности. Множество классов обозначим символом $\widehat{Q}$, а его элементы будем обозначать $\hat{q}$.

Приведенным автоматом $\widehat{V} = (A, \widehat{Q}, B, \hat{\varphi}, \hat{\psi})$, соответствующим автомату $V = (A, Q, B, \varphi, \psi)$, называется автомат, в котором функции переходов $\hat{\varphi}: \widehat{Q} \times A \to \widehat{Q}$ и выходов $\hat{\psi}: \widehat{Q} \times A \to B$ определены следующим образом:

$$\hat{\varphi}(\hat{q}, a) = \widehat{\varphi(q, a)}, \tag{8.8}$$

$$\hat{\psi}(\hat{q}, a) = \psi(q, a), \tag{8.9}$$

где $\hat{q} \in \widehat{Q}$, $a \in A$.

ПРИМЕР 8.29. Построить приведенный автомат для автомата, заданного диаграммой Мура, изображенной на рис. 8.55.

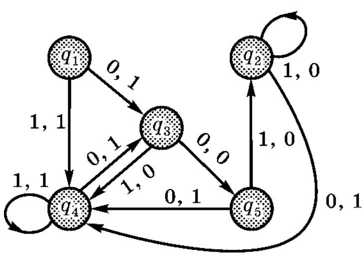


Рис. 8.55

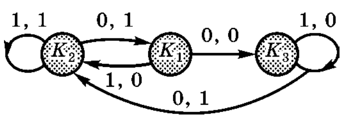


Рис. 8.56

◀ Вычислим: $\psi(q_1, 0) = 1$, $\psi(q_2, 0) = 1$, $\psi(q_3, 0) = 0$, $\psi(q_4, 0) = 1$, $\psi(q_5, 0) = 1$. Следовательно, состояние q_3 отличимо от всех остальных. Учитывая этот факт, выделяем состояние q_3 в отдельный класс, так что $Q = \{q_3\} \cup \{q_1, q_2, q_4, q_5\}$.

Далее вычисляем: $\psi(q_1, 1) = 1$, $\psi(q_2, 1) = 0$, $\psi(q_4, 1) = 1$, $\psi(q_5, 1) = 0$. Отсюда следует, что q_1 не может лежать в одном классе с q_2 или q_5, а q_2 с q_1 или q_4. Разбиение, полученное ранее, измельчается до следующего: $Q = \{q_3\} \cup \{q_1, q_4\} \cup \{q_2, q_5\}$. Положим $K_1 = \{q_3\}$, $K_2 = \{q_1, q_4\}$, $K_3 = \{q_2, q_5\}$. Покажем, что это окончательное разбиение. Имеем $\varphi(q_1, 0) = q_3$, $\varphi(q_4, 0) = q_3$, поэтому $\varphi(K_2, 0) \subseteq K_1$. Аналогично получаем $\varphi(K_2, 1) \subseteq K_2$ и т. д., т. е. функция φ «не разбивает» классы. Следовательно, классы K_1, K_2, K_3 можно считать состояниями нового автомата. Это и есть приведенный автомат, его диаграмма Мура изображена на рис. 8.56. ▶

ПРИМЕР 8.30. Построить приведенный автомат для автомата V, заданного таблицей 8.21.

Таблица 8.21

	q_1	q_2	q_3	q_4	q_5
0	q_3 / 1	q_1 / 1	q_4 / 0	q_1 / 1	q_1 / 1
1	q_4 / 1	q_5 / 0	q_3 / 1	q_4 / 0	q_4 / 0

◀ Верхняя строка таблицы 11011 определяет разбиение σ: $Q = \{q_3\} \cup \{q_1, q_2, q_4, q_5\}$, нижняя строка — разбиение τ: $Q = \{q_1, q_3\} \cup \{q_2, q_4, q_5\}$. Их пересечение $\sigma \cap \tau$ — это разбиение $Q = \{q_1\} \cup \{q_3\} \cup \{q_2, q_4, q_5\}$. Докажем, что состояния q_2, q_4, q_5 неотличимы друг от друга. В столбцах таблицы, соответствующих этим состояниям, имеем $\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$.

Значит, функция $\overline{\psi}$ на состояниях q_2, q_4, q_5 принимает одинаковые значения. Кроме того, другая часть столбцов:

$$\begin{pmatrix}q_1\\q_5\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}q_1\\q_4\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}q_1\\q_4\end{pmatrix},$$

Таблица 8.22

	$\hat{q}_1$	$\hat{q}_2$	$\hat{q}_3$
0	$\hat{q}_3$ / 1	$\hat{q}_1$ / 1	$\hat{q}_2$ / 0
1	$\hat{q}_1$ / 1	$\hat{q}_2$ / 0	$\hat{q}_3$ / 1

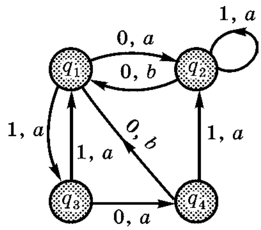


Рис. 8.57

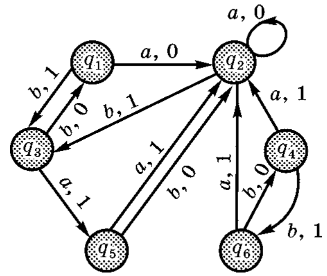


Рис. 8.58

такова, что q_5, q_4, q_4 лежат в одном классе разбиения. Это доказывает, что q_5, q_4, q_4 неотличимы. Из таблицы автомата V получаем таблицу приведенного автомата $\hat{V}$ — для этого достаточно взять по одному представителю в каждом классе разбиения $\sigma \cap \tau$ (табл. 8.22). ►

Таблица 8.23

	q_1	q_2	q_3	q_4
0	q_2 / 0	q_1 / 0	q_2 / 1	q_2 / 0
1	q_1 / 1	q_3 / 0	q_4 / 1	q_1 / 1

8.269. Автомат V задан диаграммой Мура (рис. 8.57). Построить диаграмму Мура приведенного автомата $\hat{V}$.

8.270. Автомат V задан диаграммой Мура (рис. 8.58). Построить диаграмму Мура приведенного автомата $\hat{V}$.

8.271. Автомат V задан таблицей 8.23. Построить таблицу его приведенного автомата $\hat{V}$.

8.272. Автомат V задан таблицей 8.24. Построить таблицу его приведенного автомата $\hat{V}$.

Таблица 8.24

	q_1	q_2	q_3	q_4	q_5
a	q_2 / a	q_1 / a	q_5 / a	q_1 / a	q_3 / a
b	q_5 / b	q_4 / a	q_2 / b	q_3 / b	q_4 / a

4. Отличимость состояний автомата. Теоремы Мура

Пусть M — подмножество множества A^*. Говорят, что состояния q и q' автомата $V = (A, Q, B, \varphi, \psi)$ *отличимы множеством* M, если существует непустое слово $w \in M$ такое, что $\bar{\psi}(q,w) \neq \bar{\psi}(q',w)$. В противном случае говорят, что состояния q и q' неотличимы множеством M.

Для автоматов $V = (A, Q, B, \varphi, \psi)$ и $V' = (A, Q', B, \varphi', \psi')$ с одинаковыми входными и выходными алфавитами аналогичным образом вводятся понятия отличимости (неотличимости) состояний $q \in Q$ и $q' \in Q'$, а также отличимость (неотличимость) множеством M.

ТЕОРЕМА (1-я теорема Мура). *Если состояния q, $q' \in Q$ автомата $V = (A, Q, B, \varphi, \psi)$ отличимы, то они отличимы словом длины $n - 1$, где $n = |Q|$, т. е. существует такое $w \in A^{n-1}$, что $\bar{\psi}(q,w) \neq \bar{\psi}(q',w)$.*

ТЕОРЕМА (2-я теорема Мура). *Пусть $V = (A, Q, B, \varphi, \psi)$ и $V' = (A, Q', B, \varphi', \psi')$ — два автомата с одними и теми же входным и выходным алфавитами. Состояния $q \in Q$ и $q' \in Q'$ являются отличимыми в том и только том случае, если они отличимы множеством $A^{n+n'-1}$, где $n = |Q|$, $n' = |Q'|$.*

ПРИМЕР 8.31. Показать, что для установления отличимости состояний автомата $V = (A, Q, B, \varphi, \psi)$, заданного таблицей 8.25, недостаточно последовательности длины $n - 2$.

Таблица 8.25

	q_1	q_2	q_3	…	q_{n-1}	q_n
0	q_2 / 1	q_3 / 0	q_4 / 0	…	q_n / 0	q_n / 0
1	q_2 / 1	q_1 / 0	q_2 / 0	…	q_{n-2} / 0	q_{n-1} / 0

◄ Состояния q_n и q_{n-1} отличимы словом $\underbrace{11\ldots1}_{n-1}$. Действительно,

$$\overline{\psi}(q_n,\underbrace{11\ldots1}_{n-1})=\underbrace{00\ldots0}_{n-1},\ \text{а}\ \overline{\psi}(q_{n-1},\underbrace{11\ldots1}_{n-1})=\underbrace{0\ldots0}_{n-1}1.$$

В то же время слова длины $n-2$ эти состояния не отличают, так как если $\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_{n-2} \in \{0, 1\}$, то $\overline{\psi}(q_n,\varepsilon_1\ldots\varepsilon_{n-2})=\overline{\psi}(q_{n-1},\varepsilon_1\ldots\varepsilon_{n-2})=\underbrace{00\ldots0}_{n-2}$. ►

8.273. Пусть $V = (A, Q, B, \varphi, \psi)$ и $V' = (A, Q', B, \varphi', \psi')$ — два автомата $A = B = \{0, 1\}$, $|Q| = 4$, $|Q'| = 6$. Какой вывод об отличимости состояний $q \in Q$ и $q' \in Q'$ можно сделать, если:

а) для слова w длины 9 $\overline{\psi}(q,w)=\overline{\psi}(q',w)$?

б) для любых слов w длины 9 $\overline{\psi}(q,w)=\overline{\psi}(q',w)$?

в) для любых слов w длины 5 $\overline{\psi}(q,w)=\overline{\psi}(q',w)$?

8.274. Пусть $|A| = |B| = 2$. Изобразить возможные диаграммы Мура без расстановки меток на ребрах попарно различных автоматов, множество состояний которых равно 2.

В задачах 8.275, 8.276 изобразить возможные диаграммы Мура без расстановки меток на ребрах попарно различных автоматов при заданных условиях.

8.275. $|A| = 2, |B| = 3, |Q| = 2$. **8.276.** $|A| = 3, |B| = 2, |Q| = 2$.

5. Ограниченно-детерминированные функции. Информационное дерево

Пусть $A = \{a_1, a_2, \ldots, a_m\}$ — непустой конечный *алфавит*. Его элементы называются *буквами*. Каждую бесконечную последовательность $a(1)a(2)a(3)\ldots$, где $a(i) \in A$, будем называть *сверхсловом*. Пусть A^∞ и B^∞ — множества сверхслов над алфавитами A и B соответственно. Рассмотрим отображение $f\colon A^\infty \to B^\infty$.

Функция $f\colon A^\infty \to B^\infty$ называется *детерминированной*, если для любого числа $i \in \mathbb{N}$ и для любых сверхслов $w = a(1)a(2)a(3)\ldots$, $w' = a'(1)a'(2)a'(3)\ldots$ из A^∞ из условия совпадения в них первых i членов $a(1) = a'(1), \ldots, a(i) = a'(i)$, следует, что в сверхсловах $f(w) = b(1)b(2)b(3)\ldots$, $f(w') = b'(1)b'(2)b'(3)\ldots$ первые i членов также совпадают, т. е. $b(1) = b'(1), \ldots, b(i) = b'(i)$.

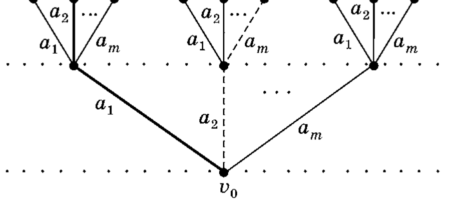


Рис. 8.59

Из определения следует, что детерминированная функция характеризуется тем, что $b(i)$ является функцией лишь от $a(1), a(2), \ldots, a(i)$, т. е. $b(i) = f_i(a(1), a(2), \ldots, a(i))$.

С множеством A^∞ можно связать некоторое бесконечное дерево T. Опишем его построение. Возьмем произвольную точку и назовем ее *корнем* дерева. Из корня выпустим m ребер, концы которых назовем вершинами первого яруса. Из каждой вершины первого яруса выпустим m ребер, которые назовем вершинами второго яруса, и т. д. (рис. 8.59). Будем считать, что ребра, соответствующие буквам алфавита A, идут слева направо (т. е. крайнее левое ребро соответствует букве a_1, следующее — букве a_2, крайнее правое — букве a_m). Тогда ветви дерева T (бесконечные) будут соответствовать сверхсловам $a(1)a(2)a(3)... \in A^\infty$, причем это соответствие взаимно однозначное. Например, ветвь дерева, отмеченная жирной линией, соответствует сверхслову $a_1a_2a_m...$, а ветвь, отмеченная пунктирной линией, — сверхслову $a_2a_ma_2...$.

Пусть дана детерминированная функция $f\colon A^\infty \to B^\infty$. Рассмотрим произвольное сверхслово $w = a(1)a(2)a(3)... \in A^\infty$. Пусть $f(w) = b(1)b(2)b(3)...$. Пометим ребра ветви дерева T, соответствующей сверхслову w, символами $b(1)$, $b(2)$, $b(3)$, ... Поступая так с каждой ветвью, из дерева T получим *информационное дерево* T_f, соответствующее функции f. Соответствие между информационными деревьями и детерминированными функциями является взаимно однозначным.

Пусть дано информационное дерево T_f, соответствующее детерминированной функции f. Для любой вершины v этого дерева пусть $T_f(v)$ обозначает поддерево, корнем которого является вершина v (оно состоит из вершины v и всех вершин и ребер, идущих «после» v, вместе с пометками на этих ребрах). Введем отношение эквивалентности на множестве вершин дерева T_f, полагая $v \sim v'$, если у поддеревьев $T_f(v)$ и $T_f(v')$ соответствующие друг другу ребра имеют одинаковые пометки. Детерминированная функция $f\colon A^\infty \to B^\infty$ называется *ограниченно детерминированной*, если множество вершин информационного дерева T_f разбивается на конечное число классов эквивалентности. Число классов эквивалентности называется *весом дерева* и, соответственно, *весом* детерминированной функции.

ПРИМЕР 8.32. Пусть функция f: $\{0, 1\}^\infty \to \{0, 1\}^\infty$ определяется правилом: $f(a(1)a(2)a(3)...) = a(1), a(1) \oplus a(2), a(1) \oplus a(2) \oplus a(3), ...$.

Построить информационное дерево функции и найти ее вес.

◀ Можно заметить, что все вершины вида, изображенного на рис. 8.60*а*, в этом дереве эквивалентны друг другу, и аналогичное справедливо для вершин вида, изображенного на рис. 8.60*б*. Так как информационное дерево T_f (рис. 8.61) функции f данного примера имеет ровно два класса эквивалентности, то функция f является ограниченно детерминированной с весом 2. ▶

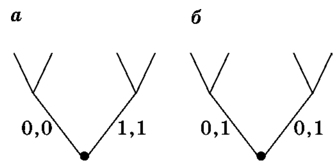


Рис. 8.60

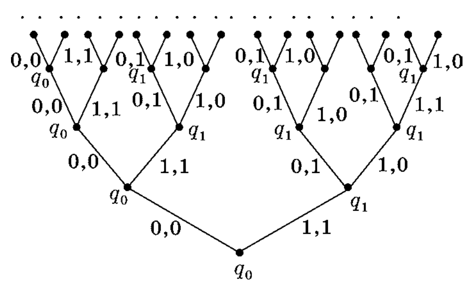


Рис. 8.61

ТЕОРЕМА. *Ограниченно детерминированные функции $f\colon A^\infty \to B^\infty$ и только они являются автоматными, т. е. реализуются некоторым конечным автоматом. При этом A является входным алфавитом автомата, а B — выходным.*

В случае ограниченно-детерминированной функции полное (бесконечное) информационное дерево можно всегда свести к конечному (*усеченному*) дереву, с дважды помеченными дугами и помеченными вершинами. Если функция имеет конечный вес s, то на каждой ветке возникает повторение меток из множества $\{q_0, q_1, ..., q_s\}$ вершин $v_0, v_1, ..., v_j, ...$, и индекс j, определяющий усечение — место первого совпадения метки с начальной, удовлетворяет неравенству $j \le s$. После усечения рассматриваемой ветви сохраняется ее начальный отрезок до вершины v_j. Выполнив эту операцию для каждой ветви, получаем *усеченное дерево*. По усеченному дереву однозначно восстанавливается исходное дерево.

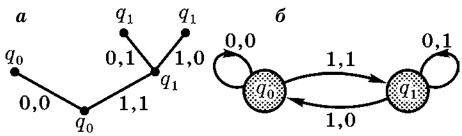


Рис. 8.62

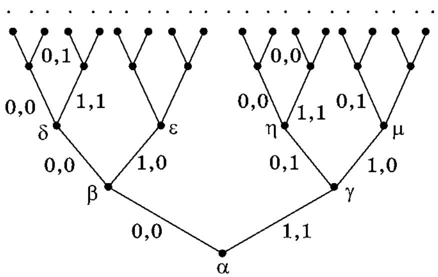


Рис. 8.63

Если в этом усеченном дереве произвести отождествление вершин с одинаковыми метками, а также отождествление кратных дуг с одинаковыми двойными метками, то получится *диаграмма переходов* ограниченно детерминированной функции, т. е. диаграмма Мура.

ПРИМЕР 8.33. Пусть $A = B = \{0, 1\}$ и $f: A^\infty \to B^\infty$ — функция, определяемая равенством $b(i) = a(1) \oplus a(2) \oplus \ldots \oplus a(i)$. Построить диаграмму Мура автомата, реализующего эту функцию.

◄ В примере 8.32 было показано, что данная функция f является ограниченно детерминированной, так как дерево T_f имеет два класса эквивалентности. Обозначив эти классы q_0 и q_1, взяв усеченное дерево (рис. 8.62*а*) и отождествив в нем вершины с одинаковыми метками, получим диаграмму Мура автомата (рис. 8.62*б*), реализующего эту функцию. Пусть нахождение автомата в состоянии q_0 означает, что предыдущая сумма $a(1) \oplus a(2) \oplus \ldots \oplus a(i-1)$ была равна 0, и потому $b(i) = a(i)$. Тогда состояние q_1 означает, что $a(1) \oplus a(2) \oplus \ldots \oplus a(i-1) = 1$, и в этом случае $b(i) = 1 \oplus a(i)$. Переход из состояния q_0 в q_1 и из q_1 в q_0 происходит при $a(i) = 1$. Если $a(i) = 0$, то автомат остается в предыдущем состоянии. ►

ПРИМЕР 8.34. На рис. 8.63 изображен фрагмент информационного дерева некоторой ограниченно детерминированной функции. Каково наименьшее возможное число классов эквивалентности вершин этого дерева?

◄ Понятно, что вершины α и β, а также α и γ лежат в разных $\sim$-классах. Кроме того, рассматривая ветви длины 3, можно заметить, что $\beta \not\sim \gamma$. Рассмотрение ветвей длины 2 показывает, что $\alpha \not\sim \eta$. Возможно попадание в один класс эквивалентности вершин α и δ, а также μ и β (или μ и γ). Таким образом, наименьшее число классов эквивалентности равно 4. Один из вариантов разбиения на классы эквивалентности следующий: $\{\alpha, \delta, \ldots\}, \{\beta, \mu, \ldots\}, \{\eta, \ldots\}, \{\gamma, \ldots\}$. ►

В задачах 8.277–8.280 построить информационное дерево функций f: $A^\infty \to B^\infty, A = B = \{0, 1\}$.

8.277. $f(a(1)a(2)a(3)\ldots) = b(1)b(2)b(3)\ldots$, где $b(i) = \overline{a(i)}$, если $i = 2n - 1$, $n \in \mathbb{N}$, и $b(i) = a(i)$, если $i = 2n$, $n \in \mathbb{N}$.

8.278. $f(a(1)a(2)a(3)\ldots) = b(1)b(2)b(3)\ldots$, где $b(i) = \alpha(1) \oplus \alpha(i)$ при всех i.

8.279. $f(a(1)a(2)a(3)\ldots) = b(1)b(2)b(3)\ldots$, где $b(i) = \begin{cases} 0, \text{ если } i = 1, \\ b(i-1) \oplus a(i), \text{ если } i \geq 2. \end{cases}$

8.280. $f(a(1)a(2)a(3)\ldots) = b(1)b(2)b(3)\ldots$, где $b(i) = \begin{cases} 1, \text{ если } i = 1, \\ b(i-1) \cdot a(i), \text{ если } i \geq 2. \end{cases}$

8.281. Разработать алгоритм построения информационного дерева ограниченно детерминированной функции по ее усеченному дереву.

В задачах 8.282–8.285 построить информационное дерево и диаграмму Мура ограниченно детерминированной функции по данному усеченному дереву.

8.282. См. рис. 8.64.

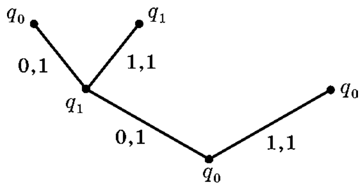


Рис. 8.64

8.283. См. рис. 8.65.

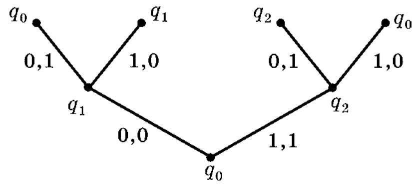


Рис. 8.65

8.284. См. рис. 8.66.

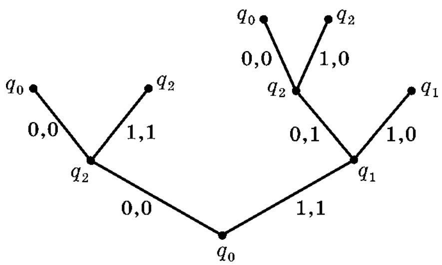


Рис. 8.66

8.285. См. рис. 8.67.

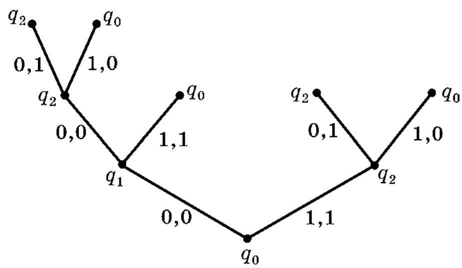


Рис. 8.67

В задачах 8.286–8.290 выяснить, какие из функций $f\colon A^\infty \to B^\infty$, $A = B = \{0, 1\}$, являются детерминированными.

8.286. $f(a(1)a(2)a(3)\ldots) = a(1)a(1)a(2)a(3)a(4)\ldots$.

8.287. $f(a(1)a(2)a(3)\ldots) = a(2)a(3)a(4)\ldots$.

8.288. $f(a(1)a(2)a(3)\ldots) = 0a(2)0a(4)0a(6)\ldots$.

8.289. $f(a(1)a(2)a(3)\ldots) = \begin{cases} 111\ldots, \text{ если } a(i) = 0 \text{ для всех } i, \\ a(1)a(2)a(3)\ldots, \text{ в противном случае.} \end{cases}$

8.290. $f(a(1)a(2)a(3)\ldots) = b(1)b(2)b(3)\ldots$, где $b(i) = a(i) \to a(1)$ при $i \geq 1$.

В задачах 8.291–8.293 выяснить, какие из функций $f\colon A^\infty \to B^\infty$ являются ограниченно детерминированными; для являющихся найти вес и построить диаграмму Мура.

8.291. $A = B = \{a, b, c\}$, $f(a(1)a(2)a(3)\ldots) = abca(1)a(2)a(3)\ldots$.

8.292. $A = B = \{0, 1\}$, $f(a(1)a(2)a(3)\ldots) = 0a(1)0a(2)0a(3)\ldots$.

8.293. $A = B = \{a, b, c\}$, $b(i) = \begin{cases} a(i), \text{ если для любого } j \leq i \;\; a(j) \neq c, \\ c, \text{ если существует } j \leq i \;\; a(j) = c. \end{cases}$

В задачах 8.294–8.296 определить количество классов эквивалентности множества вершин дерева T_f заданных функций.

8.294. $A = \{0, 1\}$, $B = \{0, 1, 2\}$, $b(i) = a(1) + a(2) + \ldots + a(i) \pmod 3$.

8.295. $A = B = \{0, 1\}$, $f(a(1)a(2)a(3)\ldots) = 00a(1)a(2)a(3)\ldots$.

8.296. $A = \{a, b, c\}$, $B = \{0, 1\}$, $b(i) = \begin{cases} 0, \text{ если } i = 1 \text{ или } a(i) \neq a(i-1), \\ 1, \text{ в противном случае.} \end{cases}$

С диаграммой Мура функции f можно связать две функции: $\varphi: A \times Q \to B$ — выхода и $\psi: A \times Q \to Q$ — переходов. Функции φ и ψ по диаграмме определяются однозначно следующим образом. По паре (a_i, q_j) находят состояние — вершину с меткой q_j и дугу, исходящую из нее, которой приписан входной символ a_i. Значением функции φ на паре (a_i, q_j) является выходной символ b_l, приписанный найденной дуге, а значением ψ — состояние, совпадающее с меткой вершины — конца этой дуги. Система уравнений

$$\begin{cases} b(t) = \varphi(a(t), q(t-1)), \\ q(t) = \psi(a(t), q(t-1)), \\ q(0) = q_0, \end{cases}$$

где $a(t) \in A$, $b(t) \in B$, $q(t) \in Q$, $(t = 1, 2, \ldots)$ и $q_0 \in Q$, называется *каноническими уравнениями функции f с начальным условием q_0*.

Любую ограниченно детерминированную функцию $f: A^\infty \to B^\infty$ веса s можно задать с помощью ее *канонической таблицы*, которая имеет такой же вид, как и каноническая таблица автомата, строки которой соответствуют различным состояниям диаграммы Мура, а столбцы — различным буквам алфавита A. Диаграмма Мура функции имеет s вершин q_i $(i = 1, 2, \ldots, s)$, и из каждой ее вершины исходит $m = |A|$ дуг, помеченных упорядоченной парой символов (a_i, b_j), где $a_i \in A$, и индекс i пробегает все значения от 1 до m, а $b_j \in B$ и индекс j принимает какое-либо значение от 1 до $k = |B|$. В ячейку таблицы, соответствующую вершине q_i и символу a_j, записываются два символа: один — совпадающий с меткой вершины — конца этой дуги, соответствующей паре (a_i, q_j), другой — выходной символ b_l, приписанный найденной дуге. Для однозначного задания функции необходимо выделить начальное состояние.

Таблица 8.26

$q(t-1)$	$a(t)$	$\varphi(t)$
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	0

Таблица 8.27

$q(t-1)$	$a(t)$	$\psi(t)$
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	0

ПРИМЕР 8.35. Для функции f из примера 8.33 построить ее канонические уравнения и каноническую таблицу.

◄ В примере 8.33 была построена диаграмма Мура функции. Пусть $q_0 = 0$ и $q_1 = 1$, тогда $A = B = Q = \{0, 1\}$. Для построения канонических уравнений составив таблицы истинности для функций φ (табл. 8.26) и ψ (табл. 8.27), получим $\varphi(t) = \psi(t) = \overline{q(t-1)}a(t) \vee q(t-1)\overline{a(t)}$. Отсюда

$$\begin{cases} b(t) = \overline{q(t-1)}a(t) \vee q(t-1)\overline{a(t)}, \\ q(t) = \overline{q(t-1)}a(t) \vee q(t-1)\overline{a(t)}, \\ q(0) = 0. \end{cases}$$

По диаграмме составим каноническую таблицу функции, так же как делали в п. 1 настоящего параграфа (табл. 8.28). ►

Таблица 8.28

	0	1
q_0	q_0 / 0	q_1 / 1
q_1	q_1 / 1	q_0 / 0

В задачах 8.297, 8.298 построить канонические уравнения заданных функций.

8.297. $b(t) = \begin{cases} 1 \text{ при } t = 1, \\ a(t-1) \to a(t) \text{ при } t \geq 2. \end{cases}$

8.298. $b(t) = \begin{cases} 0 \text{ при } t = 1, \\ a(t-1) \to \overline{b(t-1)} \text{ при } t \geq 2. \end{cases}$

В задачах 8.299, 8.300 построить диаграмму Мура заданных функций.

8.299. $b(t)=\begin{cases} a(t) \text{ при } t=1,2, \\ \overline{a(t-1)} \text{ при } t\ge 3; \end{cases}$ $\quad A=B=\{0,1\}$.

8.300. $b(t)=\begin{cases} \overline{a(1)} \text{ при } t=1, \\ b(t-1)\vee a(t) \text{ при } t\ge 2; \end{cases}$ $\quad A=B=\{0,1\}$.

6. Синтез автоматов

Под *синтезом* автоматов мы понимаем построение автоматов, удовлетворяющих заданному свойству или выполняющих заданные функции.

Автоматы $V_1=(A_1, Q_1, B_1, \varphi_1, \psi_1)$ и $V_2=(A_2, Q_2, B_2, \varphi_2, \psi_2)$ допускают *последовательное* соединение в случае, если $B_1\subseteq A_2$ (рис. 8.68). При этом получается автомат $V=(A, Q, B, \varphi, \psi)$, у которого $A=A_1$, $B=B_2$, $Q=Q_1\times Q_2$ и

$$\varphi((q_1, q_2), a)=(\varphi_1(a, q_1), \varphi_2(\psi_1(a, q_1), q_2)),$$
$$\psi((q_1, q_2), a)=\psi_2(\varphi_1(a, q_1), q_2).$$

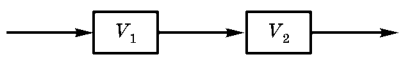


Рис. 8.68

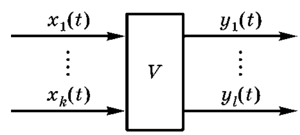


Рис. 8.69

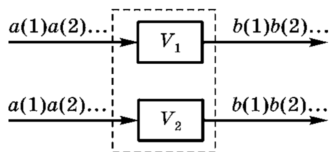


Рис. 8.70

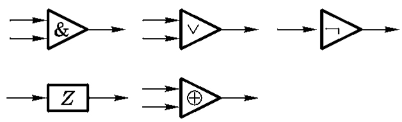


Рис. 8.71

Параллельное соединение приводит к появлению автомата $V=(A_1\times A_2, Q_1\times Q_2, B_1\times B_2, \varphi, \psi)$ (рис. 8.69), где $\varphi((q_1, q_2), (a_1, a_2))=(\varphi_1(q_1, a_1), \varphi_2(q_2, a_2))$, $\psi((q_1, q_2), (a_1, a_2))=(\psi_1(q_1, a_1), \psi_2(q_2, a_2))$.

Пусть $V=(A, Q, B, \varphi, \psi)$ — конечный автомат. Если $A=\{a_1, a_2, \ldots, a_m\}$ и $m\le 2^k$, то входной символ a можно закодировать двоичной последовательностью длины k, а именно: $a_1\to\underbrace{00\ldots0}_{k}$, $a_2\to\underbrace{00\ldots1}_{k}$, $a_3\to\underbrace{00\ldots10}_{k}$ и т. д. Аналогично, если $B=\{b_1, \ldots, b_n\}$ и $n\le 2^l$, то выходные символы $b\in B$ могут быть представлены двоичными последовательностями длины l. Автомат V (рис. 8.70), таким образом, становится устройством, перерабатывающим двоичную информацию:

Выходы $y_j(t)$ представляют собой булевы функции от входов $x_1(i), \ldots, x_k(i)$, где $i=t, t-1, \ldots$. Эти функции можно реализовать с помощью схем, содержащих стандартные булевы элементы и элемент задержки (рис. 8.71).

ПРИМЕР 8.36. Построить схему из элементов (рис. 8.71) автомата, осуществляющего сложение двух двоичных последовательностей с переносом разряда. Например,

$x(t)$	0	1	0	0	1	0	1	1	0	1	0	...
$y(t)$	1	0	1	1	1	0	1	0	1	1	0	...
$b(t)$	1	1	1	1	0	1	0	0	0	1	1	...

◀ Заметим, что $b(t)=\begin{cases} x(t)+y(t), \text{ если не было переполнения,} \\ x(t)+y(t)+1, \text{ в противном случае.} \end{cases}$

Положим $u(t)=\begin{cases} 1, \text{ если есть переполнение,} \\ 0, \text{ если нет.} \end{cases}$ Тогда $b(t) = x(t) + y(t) + u(t-1)$, $u(t) =$ $= 0$, если среди чисел $x(t)$, $y(t)$, $u(t-1)$ не более одного равны 1, $u(t) = 1$ — в противном случае. Нетрудно видеть, что $u(t) = x(t)y(t) + (x(t) + y(t))u(t-1)$. Теперь мы можем изобразить схему устройства (рис. 8.72). ▶

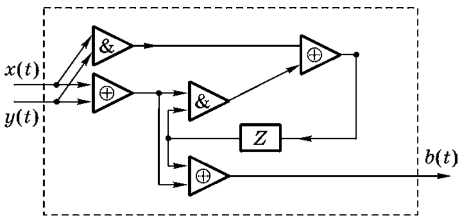


Рис. 8.72

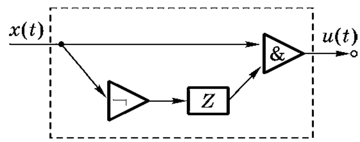


Рис. 8.73

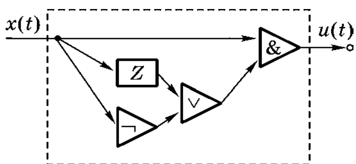


Рис. 8.74

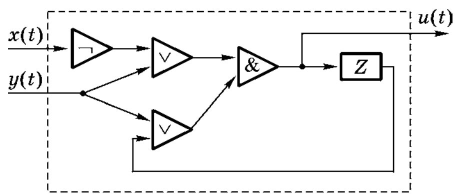


Рис. 8.75

В задачах 8.301–8.303 автомат V с $A = B = \{0, 1\}$ работает по схеме, показанной на рисунке. При этом считается, что $u(0) = 0$. Требуется: а) построить канонические уравнения; б) найти первые 5 символов в выходной последовательности, если $x(1)x(2)x(3)x(4)x(5)\ldots = 10101\ldots$.

8.301. Схема на рис. 8.73. **8.302.** Схема на рис. 8.74.

8.303. Автомат V с $A = B = \{0, 1\}$ работает по схеме, показанной на рис. 8.75. При этом считается, что $u(0) = 0$.

а) Выразить $u(t)$ через $x(t)$, $y(t)$, $u(t-1)$.

б) Найти первые 3 символа в выходной последовательности, если $x(1)x(2)x(3)\ldots = 100\ldots$, $y(1)y(2)y(3)\ldots = 011\ldots$.

ГЛАВА 9

ВЕКТОРНЫЙ АНАЛИЗ И ТЕОРИЯ ПОЛЯ

§ 9.1. СКАЛЯРНЫЕ И ВЕКТОРНЫЕ ПОЛЯ. ГРАДИЕНТ

1. Геометрические характеристики скалярных и векторных полей

Если каждой точке P некоторой области V пространства поставлена в соответствие скалярная величина (число) $u(P)$, то говорят, что в этой области задано *скалярное поле* $u(P)$, $P \in V$. Для точки P с декартовыми координатами (x, y, z) можно записать $u(P) = u(x, y, z) = u(\mathbf{r})$, где $\mathbf{r} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}$ — радиус-вектор точки P. Частным случаем скалярного поля является *плоское скалярное поле* $u(x, y)$, определенное в некоторой области на плоскости.

Наглядное представление о характере скалярного поля дают его *поверхности уровня*. Это поверхности в области V, на которых поле $u(P)$ принимает постоянное значение. Они описываются уравнениями вида

$$u(x, y, z) = \text{const}. \tag{9.1}$$

Аналогом поверхностей уровня для плоских полей являются *линии уровня* — кривые, в точках которых $u(P)$ имеет одно и то же значение: $u(x, y) = \text{const}$.

Если каждой точке $P \in V$ поставлен в соответствие вектор $\mathbf{a}(P) = a_x(P)\mathbf{i} + a_y(P)\mathbf{j} + a_z(P)\mathbf{k}$, то говорят, что в области V определено *векторное поле* $\mathbf{a}(P) = \mathbf{a}(x, y, z) = \mathbf{a}(r)$. Рассматривают и *плоские векторные поля* $\mathbf{a}(P) = \mathbf{a}(x, y)$, зависящие от двух переменных.

Наглядной характеристикой векторного поля $\mathbf{a}(P)$ является набор его векторных (силовых) линий. *Векторной линией* векторного поля называется кривая, в каждой точке P которой вектор поля $\mathbf{a}(P)$ является касательным к этой кривой в данной точке. Векторные линии поля $\mathbf{a}(P) = a_x(P)\mathbf{i} + a_y(P)\mathbf{j} + a_z(P)\mathbf{k}$ определяются системой дифференциальных уравнений

$$\frac{dx}{a_x(x,y,z)} = \frac{dy}{a_y(x,y,z)} = \frac{dz}{a_z(x,y,z)}. \tag{9.2}$$

ПРИМЕР 9.1. Потенциал $u(r)$ электрического поля, создаваемого зарядом q, помещенным в начало координат, определяется равенством $u(\mathbf{r}) = \dfrac{q}{4\pi\varepsilon_0 r}$, где r — длина радиус-вектора $\mathbf{r}$, а ε_0 — электрическая постоянная. Определить вид поверхностей уровня скалярного поля $u(\mathbf{r})$ (*эквипотенциальных поверхностей*) и найти поверхность уровня, проходящую через точку $P(3, 0, 4)$.

◀ Так как $r=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$, то уравнение (9.1) поверхностей уровня принимает вид $\frac{q}{4\pi\varepsilon_0\sqrt{x^2+y^2+z^2}}=C$ $(C\neq 0)$. Отсюда находим

$$\sqrt{x^2+y^2+z^2}=\frac{q}{4\pi\varepsilon_0 C}=C_1,$$

или $x^2+y^2+z^2=C_1^2$. Таким образом, поверхностями уровня потенциала электрического поля точечного заряда являются концентрические сферы, в центре которых расположен заряд. В точке $P(3,\ 0,\ 4)$ имеем $3^2+0^2+4^2=25=C_1^2$, т. е. через точку $P(3,\ 0,\ 4)$ проходит поверхность уровня $x^2+y^2+z^2=25$ — сфера радиуса 5 с центром в начале координат. ▶

ПРИМЕР 9.2. Согласно закону Кулона, напряженность электрического поля точечного заряда q определяется равенством $\mathbf{E}(\mathbf{r})=\frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r^3}\mathbf{r}$. Найти векторные линии поля $\mathbf{E}(\mathbf{r})$ и определить векторную линию, проходящую через точку $P(1,\ 2,\ 3)$.

◀ Поскольку $\mathbf{E}=\frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r^3}(x\mathbf{i}+y\mathbf{j}+z\mathbf{k})$, уравнения (9.2) принимают вид

$$\frac{4\pi\varepsilon_0 r^3}{q}\frac{dx}{x}=\frac{4\pi\varepsilon_0 r^3}{q}\frac{dy}{y}=\frac{4\pi\varepsilon_0 r^3}{q}\frac{dz}{z},$$

или $\frac{dx}{x}=\frac{dy}{y}=\frac{dz}{z}$. Общее решение этой системы уравнений $y=C_1x$, $z=C_2x$ определяет семейство прямых $\frac{x-0}{1}=\frac{y-0}{C_1}=\frac{z-0}{C_2}$, проходящих через начало координат. Таким образом, векторные линии электрического поля точечного заряда — это прямые, проходящие через точку пространства, в которую помещен заряд. Для определения векторной линии, проходящей через точку P, подставляем ее координаты в полученные уравнения. Получаем $\frac{1-0}{1}=\frac{2-0}{C_1}=\frac{3-0}{C_2}$, откуда $C_1=2$, $C_2=3$. Следовательно, искомая векторная линия — это прямая $\frac{x}{1}=\frac{y}{2}=\frac{z}{3}$. ▶

ПРИМЕР 9.3. Магнитное поле $\mathbf{H}$ электрического тока, текущего по бесконечному проводу в положительном направлении оси Oz, определяется формулой $\mathbf{H}=2I\frac{-y\mathbf{i}+x\mathbf{j}}{x^2+y^2}$, где I — величина тока. Найти векторные линии поля $\mathbf{H}(\mathbf{r})$ и определить ту из них, которая проходит через точку $P(12,\ 5,\ 0)$.

◀ Запишем уравнения (9.2) для данного поля: $-\frac{(x^2+y^2)dx}{y}=\frac{(x^2+y^2)dy}{x}=\frac{dz}{0}$. Из этих уравнений находим $x^2+y^2=C_1$, $z=C_2$, т. е. векторные линии магнитного поля электрического тока лежат в плоскостях, перпендикулярных оси проводника, и образуют в каждой из таких плоскостей семейство концентрических окружностей с центром на оси проводника. Для точки $P(12,\ 5,\ 0)$ имеем $C_1=12^2+5^2=169$, $C_2=0$, поэтому через эту точку проходит векторная линия $x^2+y^2=169$, $z=0$, т. е. окружность радиуса 13, лежащая в плоскости Oxy. ▶

В задачах 9.1–9.14 определить вид линий или поверхностей уровня скалярных полей и найти линию или поверхность уровня, проходящую через заданную точку P.

9.1. $u = x^2 + y^2$, $P(6, 8)$.
9.2. $u = x^2 - 2x + y^2 + 4y$, $P(4, 2)$.
9.3. $u = x^2 - y$, $P(1, 2)$.
9.4. $u = y^2 + x$, $P(1, 2)$.
9.5. $u = x^2 - y^2$, $P(4, 3)$.
9.6. $u = xy$, $P(2, 3)$.
9.7. $u = \dfrac{y}{x}$, $P(-1, 3)$.
9.8. $u = x + y + z$, $P(-1, 1, -1)$.
9.9. $u = 3x - 2y + z + 5$, $P(1, 2, 3)$.
9.10. $u = x^2 - 2x + y^2 + z^2$, $P(1, 0, 2)$.
9.11. $u = x^2 + 2y^2 + 3z^2$, $P(-1, 0, 1)$.
9.12. $u = x^2 + y^2 - z$, $P(-1, 2, -3)$.
9.13. $u = 2x^2 + 3y^2 - 5z$, $P(1, -1, 2)$.
9.14. $u = x^2 + y^2 - z^2$, $P(3, 4, 5)$.

В задачах 9.15–9.21 найти векторные линии векторного поля $\mathbf{a}$ и определить ту из них, которая проходит через указанную точку P.

9.15. $\mathbf{a} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j}$, $P(-1, 3)$.
9.16. $\mathbf{a} = \mathbf{i} + x\mathbf{j}$, $P(2, 2)$.
9.17. $\mathbf{a} = y\mathbf{i} - x\mathbf{j}$, $P(4, 3)$.
9.18. $\mathbf{a} = x\mathbf{i} - y\mathbf{j}$, $P(-1, -1)$.
9.19. $\mathbf{a} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}$, $P(1, 2, -2)$.
9.20. $\mathbf{a} = \dfrac{1}{x}\mathbf{i} + \mathbf{j} + \mathbf{k}$, $P(1, 2, 3)$.
9.21. $\mathbf{a} = \dfrac{1}{x}\mathbf{i} + \dfrac{1}{y}\mathbf{j} + \dfrac{1}{z}\mathbf{k}$, $P(-1, 0, 1)$.

2. Производная по направлению и градиент скалярного поля

Предположим, что в области V задано дифференцируемое скалярное поле $u(\mathbf{r})$. Пусть $\mathbf{s} = \cos\alpha \cdot \mathbf{i} + \cos\beta \cdot \mathbf{j} + \cos\gamma \cdot \mathbf{k}$ — единичный вектор данного направления, а $\mathbf{r}_0$ — радиус-вектор точки $P_0(x_0, y_0, z_0) \in V$. Проведем через конец вектора $\mathbf{r}_0$ прямую в направлении $\mathbf{s}$ (рис. 9.1).

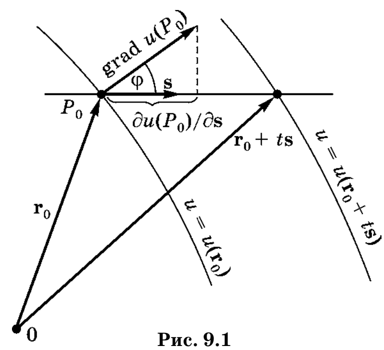


Рис. 9.1

Все точки полученной прямой имеют радиус-векторы вида $\mathbf{r}_0 + t\mathbf{s}$, $t \in \mathbb{R}$. Рассматривая скалярное поле $u(\mathbf{r})$ только на той части этой прямой, которая лежит в области V, получаем функцию $u(\mathbf{r}_0 + t\mathbf{s})$ одной переменной t. Если существует производная этой функции в точке $t = 0$, то она называется *производной по направлению* $\mathbf{s}$ скалярного поля $u(\mathbf{r})$ в точке P_0 и обозначается $\dfrac{\partial u(\mathbf{r}_0)}{\partial \mathbf{s}}$ или $\dfrac{\partial u(P_0)}{\partial \mathbf{s}}$. Таким образом, производная по направлению $\mathbf{s}$ скалярного поля $u(\mathbf{r})$ в точке P_0 равна

$$\frac{\partial u(\mathbf{r}_0)}{\partial \mathbf{s}} = \lim_{t \to 0} \frac{u(\mathbf{r}_0 + t\mathbf{s})}{t}.$$

Справедливо равенство

$$\frac{\partial u(P_0)}{\partial \mathbf{s}} = \frac{\partial u(x_0, y_0, z_0)}{\partial x}\cos\alpha + \frac{\partial u(x_0, y_0, z_0)}{\partial y}\cos\beta + \frac{\partial u(x_0, y_0, z_0)}{\partial z}\cos\gamma. \tag{9.3}$$

Производная по направлению $\dfrac{\partial u(\mathbf{r}_0)}{\partial \mathbf{s}}$ характеризует скорость изменения поля $u(P)$ в точке P_0 в направлении $\mathbf{s}$. Направление $\mathbf{s}^*$, по которому производная $\dfrac{\partial u(\mathbf{r}_0)}{\partial \mathbf{s}}$

принимает максимальное значение $\left(\dfrac{\partial u(\mathbf{r}_0)}{\partial \mathbf{s}^*}=\max\limits_{s}\dfrac{\partial u(\mathbf{r}_0)}{\partial \mathbf{s}}\right)$, называют *направлением наискорейшего возрастания* поля $u(\mathbf{r})$ в точке $\mathbf{r}_0$. Для противоположного направления $-\mathbf{s}^*$ имеем $\dfrac{\partial u(\mathbf{r}_0)}{\partial(-\mathbf{s}^*)}=-\dfrac{\partial u(\mathbf{r}_0)}{\partial(\mathbf{s}^*)}=\min\limits_{s}\dfrac{\partial u(\mathbf{r}_0)}{\partial(\mathbf{s})}$, поэтому $-\mathbf{s}^*$ называют *направлением наискорейшего убывания* поля $u(\mathbf{r})$ в точке $\mathbf{r}_0$.

Градиентом скалярного поля $u(P) = u(x, y, z)$ называется вектор

$$\operatorname{grad} u(P)=\frac{\partial u(P)}{\partial x}\mathbf{i}+\frac{\partial u(P)}{\partial y}\mathbf{j}+\frac{\partial u(P)}{\partial z}\mathbf{k},$$

проекциями которого на координатные оси являются соответствующие частные производные функции $u(P)$ в данной точке. С использованием вектора $\operatorname{grad} u$ правую часть выражения (9.3) можно записать в виде скалярного произведения:

$$\frac{\partial u}{\partial \mathbf{s}}=(\operatorname{grad} u,\mathbf{s})=|\operatorname{grad} u|\cos\varphi, \tag{9.4}$$

где φ — угол между векторами $\operatorname{grad} u$ и $\mathbf{s}$ (см. рис. 9.1).

Таким же образом производная по направлению и градиент определяются для плоского скалярного поля $u(P) = u(x, y)$.

ПРИМЕР 9.4. Потенциал $u(\mathbf{r})$ электрического поля, создаваемого зарядом q, помещенным в начало координат, определяется равенством $u(\mathbf{r})=\dfrac{q}{4\pi\varepsilon_0 r}$, где ε_0 — электрическая постоянная. Найти напряженность $\mathbf{E}(\mathbf{r})$ электрического поля этого заряда.

◀ Из физики известно, что $\mathbf{E}(\mathbf{r}) = -\operatorname{grad} u(\mathbf{r})$. Поэтому

$$\mathbf{E}(\mathbf{r})=-\frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\operatorname{grad}\frac{1}{r}=-\frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\operatorname{grad}\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}=$$

$$=\frac{q}{4\pi\varepsilon_0(x^2+y^2+z^2)^{3/2}}(x\mathbf{i}+y\mathbf{j}+z\mathbf{k})=\frac{q\mathbf{r}}{4\pi\varepsilon_0 r^3}. \ ▶$$

В задачах 9.22–9.28 найти производную поля u по указанному направлению в точке P_0.

9.22. $u = xy$, $P_0(2, 4)$, по направлению $\mathbf{s}=\dfrac{1}{2}\mathbf{i}+\dfrac{\sqrt{3}}{2}\mathbf{j}$.

9.23. $u = x^2 + y^2$, $P_0(1, 0)$, по направлению оси Oy.

9.24. $u=\dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{y}$, $P_0\left(1,\dfrac{1}{2}\right)$, по направлению биссектрисы первого координатного угла.

9.25. $u = 3x^2 - y^2$, $P_0(1, 1)$, по направлению вектора $\overrightarrow{P_0P_1}$, где $P_1(2, 3)$.

9.26. $u=\dfrac{x^2+y^2}{2}+z$, $P_0(2, 1, 1)$, по направлению прямой $\dfrac{x-2}{1}=\dfrac{y-1}{0}=\dfrac{z-1}{2}$ в сторону возрастания поля.

9.27. $u = x^2 - y^2 + z^2$, $P_0(2, 1, -1)$, по направлению вектора $\mathbf{a} = (1, -1, 1)$.

9.28. $u=\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}+\dfrac{z^2}{c^2}$, $P_0(a, b, c)$, по направлению радиус-вектора точки P_0.

В задачах 9.29–9.32 найти градиенты заданных скалярных полей.

9.29. $u = |\mathbf{r}|$. **9.30.** $u = \ln \mathbf{r}$.

9.31. $u = (\mathbf{a}, \mathbf{r})$, где $\mathbf{a}$ — постоянный вектор.

9.32. $u = (\mathbf{a}, \mathbf{r})(\mathbf{b}, \mathbf{r})$, где $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$ — постоянные векторы.

9.33. Доказать, что вектор $\operatorname{grad} u(P_0)$:

а) указывает направление наискорейшего возрастания поля $u(P)$ в точке P_0;

б) направлен по нормали в точке P_0 к поверхности уровня поля $u(P)$, проходящей через эту точку.

Пусть $u(P)$ и $v(P)$ — дифференцируемые скалярные поля, $c = \text{const}$. В задачах 9.34–9.38 доказать соотношения.

9.34. $\operatorname{grad}(u + v) = \operatorname{grad} u + \operatorname{grad} v$.

9.35. $\operatorname{grad}(cu) = c \operatorname{grad} u$.

9.36. $\operatorname{grad}(uv) = v \operatorname{grad} u + u \operatorname{grad} v$.

9.37. $\operatorname{grad}\left(\dfrac{u}{v}\right) = \dfrac{v \operatorname{grad} u - u \operatorname{grad} v}{v^2}$, $v \neq 0$.

9.38. $\operatorname{grad}(u^n) = nu^{n-1} \operatorname{grad} u$.

Пусть скалярное поле $u(\mathbf{r})$ является *центрально-симметричным*, т. е. зависит только от длины радиус-вектора $\mathbf{r}$: $u(\mathbf{r}) = u(r)$. В задачах 9.39, 9.40 доказать соотношения.

9.39. $(\operatorname{grad} u(r), \mathbf{r}) = u'(r)r$. **9.40.** $[\operatorname{grad} u(r), \mathbf{r}] = \mathbf{0}$.

9.41. В каких точках градиент поля $u = x^2 - y^2 + 2z^2 - 2x + 4y - 12z + 5$ является единичным вектором, параллельным:

а) оси Ox; б) оси Oy; в) оси Oz; г) прямой $\dfrac{x-1}{1} = \dfrac{y-5}{0} = \dfrac{z-2}{2}$?

В задачах 9.42–9.44 определить, в какой из двух указанных точек скорость наискорейшего возрастания скалярного поля u больше, и указать эту скорость.

9.42. $u = xyz$, $P_1(1, 2, 2)$, $P_2(4, 0, 2)$.

9.43. $u = \dfrac{1}{6}(xy^2z + x^2yz + xyz^2)$, $P_1(3, 1, 2)$, $P_2(-1, 2, 3)$.

9.44. $u = 2^r$, $P_1(-3, 4, 0)$, $P_2(2, 4, 2)$.

9.45. Найти единичные векторы нормали к поверхности $xyz = 6$ в точке $P_0(1, 2, 3)$.

В задачах 9.46–9.48 найти единичный вектор нормали к заданной поверхности в указанной точке P_0.

9.46. $\dfrac{x^2}{12} + \dfrac{y^2}{6} + \dfrac{z^2}{18} = 1$, $P_0(2, 1, 3)$.

9.47. $z^2 = x^2 + y^2$, $P_0(3, 4, 5)$.

9.48. $\dfrac{x^2}{4} + y^2 - \dfrac{z^2}{9} = 1$, $P_0(2, 1, 3)$.

В задачах 9.49–9.52 убедиться в ортогональности линий или поверхностей уровня полей u и v в каждой допустимой точке.

9.49. $u = x^2 - y^2$, $v = xy$.

9.50. $u = 2x^2 + y^2$, $v = \dfrac{y^2}{x}$.

9.51. $u = x^2 + y^2 - z^2$, $v = xz + yz$.

9.52. $u = x^2 + y^2 - 2z^2$, $v = xyz$.

§ 9.2. КРИВОЛИНЕЙНЫЕ И ПОВЕРХНОСТНЫЕ ИНТЕГРАЛЫ

1. Криволинейный интеграл 1-го рода

Пусть $\overset{\frown}{AB}$ — дуга кусочно-гладкой кривой, $u(P)$ — скалярное поле, заданное в некоторой области, содержащей $\overset{\frown}{AB}$, точки $A = A_0, A_1, A_2, \ldots, A_n = B$ образуют разбиение дуги $\overset{\frown}{AB}$, а P_i $(i = 1, 2, \ldots, n)$ — некоторые точки, выбранные на частичных дугах $\overset{\frown}{A_{i-1}A_i}$, длины которых обозначим через Δl_i (рис. 9.2).

Если при $\max\limits_i \Delta l_i \to 0$ существует предел интегральных сумм $\sum\limits_{i=1}^{n} u(P_i)\Delta l_i$, не зависящий ни от способа разбиения дуги $\overset{\frown}{AB}$ точками A_i, ни от выбора точек P_i на частичных дугах $\overset{\frown}{A_{i-1}A_i}$, то этот предел называется *криволинейным интегралом 1-го рода* функции $u(P)$ по кривой $\overset{\frown}{AB}$ и обозначается $\int\limits_{\overset{\frown}{AB}} u(P)dl$ или $\int\limits_{\overset{\frown}{AB}} u(x, y, z)dl$.

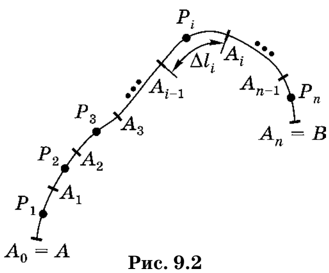


Рис. 9.2

Таким образом,

$$\int\limits_{\overset{\frown}{AB}} u(P)dl = \lim_{\max\limits_i \Delta l_i \to 0} \sum_{i=1}^{n} u(P_i)\Delta l_i. \tag{9.5}$$

Интеграл (9.5) существует, в частности, для непрерывной на $\overset{\frown}{AB}$ функции $u(P)$.

Если $u(P)$ имеет физический смысл линейной плотности масс, зарядов и т. п. в точках кривой $\overset{\frown}{AB}$, то криволинейный интеграл (9.5) интерпретируется как масса этой кривой, ее суммарный заряд и т. п. При $u(P) \equiv 1$ криволинейный интеграл 1-го рода определяет длину дуги $\overset{\frown}{AB}$. Криволинейный интеграл 1-го рода не зависит от направления, в котором проходится дуга $\overset{\frown}{AB}$, т. е.

$$\int\limits_{\overset{\frown}{AB}} u(P)dl = \int\limits_{\overset{\frown}{BA}} u(P)dl.$$

Вычисление интеграла (9.5) осуществляется приведением к определенному интегралу следующим образом: если пространственная кривая $\overset{\frown}{AB}$ задана параметрически: $x = x(t)$, $y = y(t)$, $z = z(t)$, $t_0 \le t \le t_1$, то

$$\int\limits_{\overset{\frown}{AB}} u(P)dl = \int_{t_0}^{t_1} u(x(t), y(t), z(t))\sqrt{x'^2(t) + y'^2(t) + z'^2(t)}\,dt.$$

В частности, если плоская кривая задана:

а) параметрически: $x = x(t)$, $y = y(t)$, $t_0 \le t \le t_1$, то

$$\int\limits_{\overset{\frown}{AB}} u(P)dl = \int_{t_0}^{t_1} u(x(t), y(t))\sqrt{x'^2(t) + y'^2(t)}\,dt;$$

б) в явном виде: $y = y(x)$, $a \le x \le b$, то

$$\int\limits_{\overset{\frown}{AB}} u(P)dl = \int_{t_0}^{t_1} u(x, y(x))\sqrt{1 + y'^2(x)}\,dx;$$

в) в полярных координатах: $\rho = \rho(\varphi)$, $\varphi_0 \le \varphi \le \varphi_1$, то

$$\int\limits_{\overset{\frown}{AB}} u(P)\,dl = \int\limits_{\varphi_0}^{\varphi_1} u(\rho(\varphi)\cos\varphi, \rho(\varphi)\sin\varphi)\sqrt{\rho^2(\varphi)+\rho'^2(\varphi)}\,d\varphi.$$

ПРИМЕР 9.5. Найти массу M первого витка винтовой линии $x = a\cos t$, $x = a\sin t$, $z = ht$, если ее линейная плотность $\mu(P)$ пропорциональна координате z точки P: $\mu(P) = kz$.

◀ Первому витку винтовой линии соответствует изменение параметра t от 0 до 2π, $dl = \sqrt{x'^2(t)+y'^2(t)+z'^2(t)}\,dt = \sqrt{a^2+h^2}\,dt$. Поэтому

$$M = \int\limits_0^{2\pi} kht\sqrt{a^2+h^2}\,dt = kh\sqrt{a^2+h^2}\int\limits_0^{2\pi} t\,dt = kh\sqrt{a^2+h^2}\,\frac{t^2}{2}\Big|_0^{2\pi} = 2\pi^2 kh\sqrt{a^2+h^2}. \blacktriangleright$$

ПРИМЕР 9.6. Найти общий заряд Q дуги $\overset{\frown}{AB}$ спирали $\rho = h\varphi$ между точками $A(0, 0)$ и $B\left(0, \frac{\pi h}{2}\right)$, если линейная плотность $q(P)$ распределения зарядов в точке $P(x, y)$ кривой равна $q(P) = q_0\sqrt{x^2+y^2}$.

◀ Дуге $\overset{\frown}{AB}$ соответствует изменение полярного угла φ в пределах от 0 до $\frac{\pi}{2}$,

$$dl = \sqrt{\rho^2(\varphi)+\rho'^2(\varphi)}\,d\varphi = h\sqrt{\varphi^2+1}\,d\varphi,$$
$$q(P) = q_0\sqrt{x^2+y^2} = q_0\sqrt{\rho^2(\varphi)\cos^2\varphi+\rho^2(\varphi)\sin^2\varphi} = q_0\rho(\varphi) = q_0 h\varphi.$$

Поэтому

$$Q = q_0h^2\int\limits_0^{\pi/2}\varphi\sqrt{\varphi^2+1}\,d\varphi = \frac{q_0h^2}{2}\int\limits_0^{\pi/2}\sqrt{\varphi^2+1}\,d(\varphi^2+1) = \frac{q_0h^2}{3}(\varphi^2+1)^{3/2}\Big|_0^{\pi/2} =$$
$$= \frac{q_0h^2}{3}\left[\left(\frac{\pi^2}{4}+1\right)^{3/2}-1\right]. \blacktriangleright$$

В задачах 9.53–9.66 вычислить криволинейные интегралы 1-го рода.

9.53. $\int\limits_{AB}(x^2+y)\,dl$, где AB — отрезок прямой между точками $A(1, 0)$ и $B(2, 1)$.

9.54. $\int\limits_{AB}(x+y^2)\,dl$, где AB — отрезок прямой между точками $A(0, 0)$ и $B(1, 2)$.

9.55. $\int\limits_{AB} y\cos x\,dl$, где AB — отрезок прямой между точками $A(0, 0)$ и $B(-\pi, -\pi)$.

9.56. $\int\limits_{AB} y\sin x\,dl$, где AB — отрезок прямой между точками $A\left(-\frac{\pi}{2}, -\frac{\pi}{2}\right)$ и $B(0, 0)$.

9.57. $\int\limits_{\overset{\frown}{AB}} xy\,dl$, где $\overset{\frown}{AB}$ — кривая $y = x^4$ между точками $A(0, 0)$ и $B(-1, 1)$.

9.58. $\int\limits_{\overset{\frown}{AB}} x^2 y^{\frac{1}{3}}\,dl$, где $\overset{\frown}{AB}$ — кривая $y = 2x^3$ между точками $A(-1, -2)$ и $B(0, 0)$.

9.59. $\int\limits_{C} y\,dl$, где C — дуга эллипса: $x = 2\cos t,\ y = 3\sin t,\ 0 \le t \le \pi$.

9.60. $\int\limits_{AB} \left(2x - y + \frac{z}{3} - 1\right)dl$, где AB — отрезок прямой между точками $A(1, 2, 3)$ и $B(2, 4, 6)$.

9.61. $\int\limits_{\overset{\frown}{AB}} \frac{y}{x+3z}\,dl$, где $\overset{\frown}{AB}$ — дуга кривой $x = t,\ y = \frac{t^2}{\sqrt{2}},\ z = \frac{t^3}{3}$ между точками $A(0, 0, 0)$ и $B\left(\sqrt{2}, \sqrt{2}, \frac{2\sqrt{2}}{3}\right)$.

9.62. $\int\limits_{C} \rho^2\,dl$, где C — дуга кривой $\rho = 2\cos\varphi,\ 0 \le \varphi \le \frac{\pi}{2}$.

9.63. $\int\limits_{C} \rho\,dl$, где C — дуга лемнискаты $\rho^2 = a^2\cos 2\varphi,\ 0 \le \varphi \le \frac{\pi}{4}$.

9.64. $\int\limits_{C} \rho^{\frac{3}{2}}\,dl$, где C — дуга кривой $\rho^2 = 8(1 + \sin\varphi),\ -\frac{\pi}{2} \le \varphi \le \frac{\pi}{2}$.

9.65. $\int\limits_{C} \rho^3\,dl$, где C — дуга кривой $\rho = \sin\varphi$, $0 \le \varphi \le \pi$.

9.66. $\int\limits_{C} \sqrt{\rho}\,dl$, где C — дуга кривой $\rho = 2(1 - \sin\varphi),\ 0 \le \varphi \le \frac{\pi}{2}$.

В задачах 9.67–9.74 найти массу кривой C с заданной линейной плотностью $\mu(P)$.

9.67. C — контур треугольника ABC с вершинами $A(0, 0)$, $B(1, 0)$ и $C(0, 1)$; $\mu(P) = x + y$.

9.68. C — первая арка циклоиды: $x = a(t - \sin t),\ y = a(1 - \cos t),\ 0 \le t \le 2\pi$; $\mu(P) = \sqrt{y}$.

9.69. C — дуга окружности $x = a\cos t,\ y = a\sin t,\ 0 \le t \le \frac{\pi}{2}$; $\mu(P) = x + 2y$.

9.70. C — дуга астроиды: $x = a\cos^3 t,\ y = a\sin^3 t,\ 0 \le t \le \frac{\pi}{2}$; $\mu(P) = xy$.

9.71. C — дуга развертки окружности: $x = a(\cos t + t\sin t)$, $y = a(\sin t - t\cos t)$, $0 \le t \le 2\pi$; $\mu(P) = \sqrt{x^2 + y^2}$.

9.72. C — дуга конической винтовой линии $x = ae^t\cos t,\ y = ae^t\sin t,\ z = ae^t$ между точками $A(0, 0, 0)$ и $B(a, 0, a)$; $\mu(P) = z$.

9.73. C — дуга лемнискаты $\rho^2 = a^2\cos 2\varphi,\ 0 \le \varphi \le \frac{\pi}{4}$; $\mu(P) = \rho$.

9.74. C — дуга кардиоиды $\rho = a(1 + \cos\varphi),\ 0 \le \varphi \le \pi$; $\mu(P) = \sqrt{\rho}$.

В задачах 9.75–9.80 найти суммарный заряд кривой C с заданной линейной плотностью распределения зарядов $q(P)$.

9.75. C — контур квадрата $|x|+|y|=1$; $q(P)=|xy|$.

9.76. C — дуга эллипса $x=3\cos t$, $y=2\sin t$, $0\le t\le\dfrac{\pi}{2}$; $q(P)=xy$.

9.77. C — дуга кривой $x=t$, $y=\dfrac{t^2}{\sqrt{2}}$, $z=\dfrac{t^3}{3}$ между точками $A(0, 0, 0)$ и $B\left(\sqrt{2},\sqrt{2},\dfrac{2\sqrt{2}}{3}\right)$; $q(P)=\dfrac{y}{x+3z}$.

9.78. C — астроида $x=a\cos^3 t$, $y=a\sin^3 t$, $0\le t\le 2\pi$; $q(P)=|xy|$.

9.79. C — кардиоида $\rho=a(1+\cos\varphi)$, $0\le\varphi\le 2\pi$; $q(P)=\sqrt{\rho}$.

9.80. C — лемниската $\rho^2=a^2\cos 2\varphi$, $0\le\varphi\le 2\pi$; $q(P)$ пропорциональна расстоянию от точки P до начала координат (коэффициент пропорциональности Q).

2. Криволинейный интеграл 2-го рода

Предположим, что $\overset{\frown}{AB}$ — дуга кусочно-гладкой кривой, $\mathbf{a}=\mathbf{a}(\mathbf{r})=a_x(x, y, z)\mathbf{i}+a_y(x, y, z)\mathbf{j}+a_z(x, y, z)\mathbf{k}$ — векторное поле, заданное в некоторой области V, содержащей $\overset{\frown}{AB}$. Пусть $A=A_0, A_1, A_2, \ldots, A_n=B$ — точки, образующие разбиение дуги $\overset{\frown}{AB}$ на частичные дуги $\overset{\frown}{A_{i-1}A_i}$, длины которых равны Δl_i. Обозначим через $\Delta\mathbf{r}_i$ вектор с началом в точке A_{i-1} и концом в точке A_i и на каждой частичной дуге $\overset{\frown}{A_{i-1}A_i}$ выберем произвольную точку P_i, $i=1, 2, \ldots, n$ (рис. 9.3).

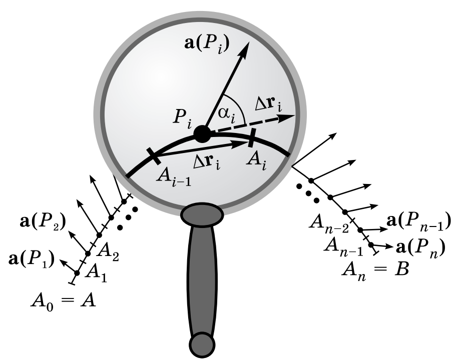
Если при $\max\limits_i \Delta l_i\to 0$ существует предел интегральных сумм $\sum\limits_{i=1}^{n}(\mathbf{a}(P_i),\Delta\mathbf{r}_i)$, не зависящий от способа разбиения дуги $\overset{\frown}{AB}$ точками A_i и от выбора точек P_i на частичных дугах $\overset{\frown}{A_{i-1}A_i}$, то этот предел называется *криволинейным интегралом 2-го рода* от векторной функции $\mathbf{a}(\mathbf{r})$ по дуге $\overset{\frown}{AB}$ и обозначается $\int\limits_{\overset{\frown}{AB}}(\mathbf{a},d\mathbf{r})$ или $\int\limits_{\overset{\frown}{AB}} a_x dx+a_y dy+a_z dz$.

Таким образом,

$$\int\limits_{\overset{\frown}{AB}}(\mathbf{a},d\mathbf{r})=\lim_{\max\limits_i \Delta l_i\to 0}\sum_{i=1}^{n}(\mathbf{a}(P_i),d\mathbf{r}_i). \qquad (9.6)$$

Интеграл (9.6) существует, в частности, для непрерывной на $\overset{\frown}{AB}$ векторной функции $\mathbf{a}(\mathbf{r})$.

Простейший физический смысл криволинейного интеграла 2-го рода — работа силового поля $\mathbf{a}(\mathbf{r})$, совершаемая при перемещении в нем материальной точки по кривой $\overset{\frown}{AB}$ из точки A в точку B.



$(\mathbf{a}(P_i),\,\Delta\mathbf{r}_i)=|\mathbf{a}(P_i)||\Delta\mathbf{r}_i|\cos\alpha_i$

Рис. 9.3

Криволинейный интеграл 2-го рода зависит от направления, по которому проводится интегрирование вдоль дуги $\overset{\frown}{AB}$:

$$\int\limits_{\overset{\frown}{BA}} (\mathbf{a}, d\mathbf{r}) = -\int\limits_{\overset{\frown}{AB}} (\mathbf{a}, d\mathbf{r}).$$

Интеграл (9.6), взятый по замкнутому контуру C, называется *циркуляцией векторного поля* $\mathbf{a}(\mathbf{r})$ по этому контуру и обозначается символом $\oint\limits_C (\mathbf{a}, d\mathbf{r})$. Направление обхода контура C следует указать. Считается, что перемещение против часовой стрелки соответствует положительному направлению, а по часовой стрелке — отрицательному направлению обхода.

Вычисление интеграла (9.6) осуществляется приведением к определенному интегралу следующим образом. Пусть пространственная кривая $\overset{\frown}{AB}$ задана в параметрическом виде: $x = x(t)$, $y = y(t)$, $z = z(t)$, $t_0 \le t \le t_1$. Тогда

$$\int\limits_{\overset{\frown}{AB}} (\mathbf{a}, d\mathbf{r}) =$$
$$= \int\limits_{t_0}^{t_1} \Big(a_x(x(t), y(t), z(t))x'(t) + a_y(x(t), y(t), z(t))y'(t) + a_z(x(t), y(t), z(t))z'(t) \Big) dt.$$

В частном случае плоского векторного поля $\mathbf{a}(\mathbf{r}) = a_x(x, y)\mathbf{i} + a_y(x, y)\mathbf{j}$ и плоской кривой $\overset{\frown}{AB}$ имеем:

а) если $\overset{\frown}{AB}$ задана параметрически $x = x(t)$, $y = y(t)$, $t_0 \le t \le t_1$, то

$$\int\limits_{\overset{\frown}{AB}} (\mathbf{a}, d\mathbf{r}) = \int\limits_{\overset{\frown}{AB}} a_x dx + a_y dy = \int\limits_{t_0}^{t_1} \Big(a_x(x(t), y(t))x'(t) + a_y(x(t), y(t))y'(t) \Big) dt;$$

б) если $\overset{\frown}{AB}$ задана в явном виде $y = y(x)$, $a \le x \le b$, то

$$\int\limits_{\overset{\frown}{AB}} (\mathbf{a}, d\mathbf{r}) = \int\limits_{\overset{\frown}{AB}} a_x dx + a_y dy = \int\limits_a^b \Big(a_x(x, y(x)) + a_y(x, y(x))y'(x) \Big) dx.$$

ПРИМЕР 9.7. Найти работу А силы $\mathbf{F}(\mathbf{r}) = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}$ при перемещении материальной точки по отрезку прямой AB от $A(0, 0, 0)$ до $B(1, 2, 3)$.

◀ Отрезок AB можно задать параметрически, например, следующим образом: $x = x(t) = t$, $y = y(t) = 2t$, $z = z(t) = 3t$, $0 \le t \le 1$. Тогда

$$\text{А} = \int\limits_{\overset{\frown}{AB}} (\mathbf{F}, d\mathbf{r}) = \int\limits_0^1 (t \cdot (t)' + 2t \cdot (2t)' + 3t \cdot (3t)')dt = \int\limits_0^1 14t\,dt = 7t^2\Big|_0^1 = 7. \text{ ▶}$$

ПРИМЕР 9.8. Найти криволинейный интеграл 2-го рода от плоского векторного поля $\mathbf{a}(\mathbf{r}) = (x + y^2)\mathbf{i} + (x^2 + y)\mathbf{j}$ по дуге параболы $y = x^2$, $1 \le x \le 2$.

◀ В данном случае

$$\int\limits_{\overset{\frown}{AB}} (\mathbf{a}, d\mathbf{r}) = \int\limits_{\overset{\frown}{AB}} a_x dx + a_y dy = \int\limits_1^2 ((x + x^4) + (x^2 + x^2)(x^2)')dx =$$
$$= \int\limits_1^2 (x + x^4 + 4x^3)dx = \left(\frac{x^2}{2} + \frac{x^5}{5} + x^4 \right)\Bigg|_1^2 = 22{,}7. \text{ ▶}$$

В задачах 9.81–9.90 вычислить криволинейные интегралы 2-го рода.

9.81. $\int\limits_{\overset{\frown}{AB}} xy\,dx + (y-x)\,dy$, где $\overset{\frown}{AB}$ — отрезок прямой от точки $A(0, 0)$ до точки $B(1, 1)$.

9.82. $\int\limits_{\overset{\frown}{AB}} x\cos y\,dx - y\sin x\,dy$, где $\overset{\frown}{AB}$ — отрезок прямой от точки $A(0, 0)$ до точки $B(\pi, 2\pi)$.

9.83. $\int\limits_{\overset{\frown}{AB}} (x+y)^2\,dx - (x-y)^2\,dy$, где $\overset{\frown}{AB}$ — дуга параболы $y = x^2$ от точки $A(0, 0)$ до точки $B(1, 1)$.

9.84. $\int\limits_{\overset{\frown}{AB}} 2xy\,dx + x^2\,dy$, где $\overset{\frown}{AB}$ — дуга параболы $y = 2x^2$ от точки $A(0, 0)$ до точки $B(1, 2)$.

9.85. $\int\limits_{\overset{\frown}{AB}} y\,dx + x\,dy$, где $\overset{\frown}{AB}$ — дуга окружности $x^2 + y^2 = 1$, лежащая в первом квадранте от точки $A(1, 0)$ до точки $B(0, 1)$.

9.86. $\int\limits_{\overset{\frown}{AB}} \dfrac{y^2\,dx - x^2\,dy}{x^2 + y^2}$, где $\overset{\frown}{AB}$ — верхняя полуокружность $x^2 + y^2 = 4$ от точки $A(2, 0)$ до точки $B(-2, 0)$.

9.87. $\int\limits_{\overset{\frown}{AB}} y\,dx - x\,dy$, где $\overset{\frown}{AB}$ — верхняя половина эллипса $\dfrac{x^2}{4} + \dfrac{y^2}{9} = 1$ от точки $A(2, 0)$ до точки $B(-2, 0)$.

9.88. $\int\limits_{\overset{\frown}{AB}} (2-y)\,dx - (1-y)^2\,dy$, где $\overset{\frown}{AB}$ — арка циклоиды $x(t) = t - \sin t$, $y(t) = 1 - \cos t$, $0 \le t \le 2\pi$ от точки $A(0, 0)$ до точки $B(0, 2\pi)$.

9.89. $\int\limits_{\overset{\frown}{AB}} -yz\,dx + xz\,dy + xy\,dz$, $\overset{\frown}{AB}$ — первый виток винтовой линии $x = \cos t$, $y = \sin t$, $z = t$, $0 \le t \le 2\pi$.

9.90. $\int\limits_{\overset{\frown}{AB}} z\,dx + x\,dy + y\,dz$, $\overset{\frown}{AB}$ — дуга, описываемая уравнением $\mathbf{r} = t\mathbf{i} + t^2\mathbf{j} + t^3\mathbf{k}$, $0 \le t \le 1$.

В задачах 9.91–9.95 найти работу силы $\mathbf{F}$ при перемещении материальной точки по дуге $\overset{\frown}{AB}$ из точки A в точку B.

9.91. $\mathbf{F} = y\mathbf{i} - x\mathbf{j}$; $A(0, 0)$, $B(1, 2)$; а) $\overset{\frown}{AB}$ — отрезок прямой; б) $\overset{\frown}{AB}$ — ломаная ACB, где $C(1, 0)$; в) $\overset{\frown}{AB}$ — ломаная ACB, где $C(0, 1)$.

9.92. $\mathbf{F} = (x + y)\mathbf{i} + (y - x)\mathbf{j}$; $A(-1, -1)$, $B(1, 1)$; а) $\overset{\frown}{AB}$ — отрезок прямой; б) $\overset{\frown}{AB}$ — ломаная ACB, где $C(-1, 1)$; б) $\overset{\frown}{AB}$ — ломаная ACB, где $C(1, -1)$.

9.93. $\mathbf{F} = (x^2 + y)\mathbf{i} + (x - y^2)\mathbf{j}$; $A(0, 1)$, $B(1, 0)$; а) $\overset{\frown}{AB}$ — отрезок прямой; б) $\overset{\frown}{AB}$ — ломаная ACB, где $C(-1, 1)$; в) $\overset{\frown}{AB}$ — ломаная ACB, где $C(1, -1)$.

9.94. $\mathbf{F} = y^2\mathbf{i} + x^2\mathbf{j}$; $A(0, 0)$, $B(1, 1)$; а) $\overset{\frown}{AB}$ — отрезок прямой; б) $\overset{\frown}{AB}$ — дуга параболы $y = x^2$; в) $\overset{\frown}{AB}$ — дуга параболы $y^2 = x$; г) $\overset{\frown}{AB}$ — ломаная ACB, где $C(1, 0)$; д) $\overset{\frown}{AB}$ — ломаная ACB, где $C(0, 1)$.

9.95. $\mathbf{F} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}$; $A(0, 0, 0)$, $B(1, 0, 1)$; $\overset{\frown}{AB}$ — первый виток конической винтовой линии $x = e^t\cos t$, $y = e^t\sin t$, $z = e^t$.

В задачах 9.96–9.105 найти циркуляцию векторного поля $\mathbf{a} = a_x\mathbf{i} + a_y\mathbf{j} + a_z\mathbf{k}$ вдоль замкнутого контура C в положительном направлении.

9.96. $\mathbf{a} = (x^2y + e^y)\mathbf{i} + (xy^2 + xe^y)\mathbf{j}$, C — окружность $x^2 + y^2 = 4$.

9.97. $\mathbf{a} = (2xy - y)\mathbf{i} + x^2\mathbf{j}$, C — окружность $x^2 + y^2 = 9$.

9.98. $\mathbf{a} = (x^3y + \sin y)\mathbf{i} + (xy^3 + x\cos y - y)\mathbf{j}$, C — контур квадрата с вершинами $P(1, 1)$, $Q(-1, 1)$, $R(-1, -1)$, $S(1, -1)$.

9.99. $\mathbf{a} = (xy + x + \cos y)\mathbf{i} + (xy - x\sin y)\mathbf{j}$, C — эллипс $\dfrac{x^2}{4} + \dfrac{y^2}{9} = 1$.

9.100. $\mathbf{a} = \dfrac{y\mathbf{i} - x\mathbf{j}}{x^2 + y^2}$, C — окружность $x^2 + y^2 = 9$.

9.101. $\mathbf{a} = \dfrac{x\mathbf{i} + y\mathbf{j}}{x^2 + y^2}$, C — окружность $x^2 + y^2 = 2$.

9.102. $\mathbf{a} = (2xy - y)\mathbf{i} + (x^2 - y)\mathbf{j}$, C — контур треугольника с вершинами $P(0, 0)$, $Q(2, 0)$, $R(1, 1)$.

9.103. $\mathbf{a} = (x - y)(\mathbf{i} + \mathbf{j})$, C — эллипс $\dfrac{x^2}{9} + y^2 = 1$.

9.104. $\mathbf{a} = y\mathbf{i} - z\mathbf{j} + x\mathbf{k}$, C — окружность $x^2 + y^2 = 1$, $z = 1$, положительное направление определяется относительно орта $\mathbf{k}$.

9.105. $\mathbf{a} = z\mathbf{i} + x\mathbf{j} + y\mathbf{k}$, C — эллипс $\dfrac{x^2 + y^2}{2} + z^2 = 4$, $y = x$, положительное направление определяется относительно орта $\mathbf{i}$.

Если векторная функция $\mathbf{a}(\mathbf{r}) = a_x(x, y)\mathbf{i} + a_y(x, y)\mathbf{j}$ непрерывна вместе с частными производными первого порядка в замкнутой ограниченной односвязной области D с кусочно-гладкой границей C, то справедлива *формула Грина*

$$\oint_C a_x dx + a_y dy = \iint_D \left(\frac{\partial a_y}{\partial x} - \frac{\partial a_x}{\partial y}\right) dx dy,$$

где контур C обходится в положительном направлении.

ПРИМЕР 9.9. Найти циркуляцию векторного поля $\mathbf{a}(\mathbf{r}) = (x^2 + y)\mathbf{i} + (x + y^3)\mathbf{j}$ по окружности $x^2 + y^2 = r^2$ в положительном направлении.

◄ Применяя формулу Грина, можно записать

$$\int_{\overset{\frown}{AB}} (\mathbf{a}, d\mathbf{r}) = \int_{\overset{\frown}{AB}} (x^2 + y)dx + (x + y^3)dy = \iint_D \left(\frac{\partial}{\partial x}(x + y^3) + \frac{\partial}{\partial y}(x^2 + y)\right) dx dy =$$

$$= 2\iint_D dx dy = 2\pi r^2,$$

поскольку двойной интеграл $\iint\limits_D dxdy$ по кругу D: $x^2 + y^2 \le r^2$ равен площади этого круга πr^2. ►

В задачах 9.106–9.112, используя формулу Грина, вычислить интегралы, взятые вдоль замкнутых контуров C в положительном направлении.

9.106. $\oint\limits_C (x + e^x - y^2)dx + (x^2 + \sin y + y)dy$, C — контур, образованный полуокружностью $y = \sqrt{1 - x^2}$ и осью Ox.

9.107. $\oint\limits_C (2xy + y^2 - \sin 2x)dx + (2xy - x^2 - y^2 + e^y)dy$, C — контур, образованный синусоидой $y = \sin x$ и отрезком оси Ox при $0 \le x \le \pi$.

9.108. $\oint\limits_C (x^3 - x^2 y)dx + (xy^2 - y^2 + ye^y)dy$, C — окружность $x^2 + y^2 = r^2$.

9.109. $\oint\limits_C (\sqrt{x} + e^x + y)dx + (y^2 + \sin^2 y - x)dy$, C — эллипс $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$.

9.110. $\oint\limits_C (x + y)^2 dx - (x^2 + y^2 + y\sqrt{y})dy$, C — треугольник с вершинами $P(0, 0)$, $Q(1, 0)$ и $R(0, 1)$.

9.111. $\oint\limits_C (x^2 y + e^y + xe^x)dx - (xy^2 + xe^y - y^5)dy$, C — окружность $x^2 + y^2 = 4$.

9.112. $\oint\limits_C (2xy - y - xe^x)dx + (x^2 + y^3 \sin y)dy$, C — окружность $x^2 + y^2 = 3$.

Предположим, что векторное поле $\mathbf{a} = \mathbf{a}(\mathbf{r}) = a_x(x, y, z)\mathbf{i} + a_y(x, y, z)\mathbf{j} + a_z(x, y, z)\mathbf{k}$ задано в области V, причем в этой области выражение $a_x dx + a_y dy + a_z dz$ является *полным дифференциалом*, т. е. $a_x dx + a_y dy + a_z dz = du$, где $u = u(P) = u(x, y, z)$ — некоторая скалярная функция, определенная в V. Тогда независимо от вида кривой $\overset{\frown}{AB}$, целиком лежащей в области V, справедливо равенство

$$\int\limits_{\overset{\frown}{AB}} a_x dx + a_y dy + a_z dz = u(B) - u(A) = u(x_1, y_1, z_1) - u(x_0, y_0, z_0),$$

где $A(x_0, y_0, z_0)$ — начало, а $B(x_1, y_1, z_1)$ — конец пути интегрирования.

ПРИМЕР 9.10. Вычислить интеграл $\int\limits_{\overset{\frown}{AB}} xdx + ydy + zdz$ по произвольной кусочно-гладкой кривой от точки $A(-1, 0, 1)$ до точки $B(0, 2, -2)$.

◄ Очевидно, $x\,dx + y\,dy + z\,dz = du$, где, например, $u(x, y, z) = \dfrac{x^2 + y^2 + z^2}{2}$, поскольку $\dfrac{\partial u}{\partial x} = x$, $\dfrac{\partial u}{\partial y} = y$ и $\dfrac{\partial u}{\partial z} = z$. Таким образом, $\int\limits_{\overset{\frown}{AB}} xdx + ydy + zdz = u(B) - u(A) = 4 - 1 = 3$. Проверьте этот результат, вычислив данный интеграл обычным образом по какой-либо конкретной кривой $\overset{\frown}{AB}$. ►

Пусть область V односвязна и функции a_x, a_y и a_z обладают в ней непрерывными частными производными первого порядка. Выражение $a_x dx + a_y dy + a_z dz$ будет полным дифференциалом тогда и только тогда, когда в области V тождественно выполняются следующие равенства:

$$\frac{\partial a_x}{\partial y}=\frac{\partial a_y}{\partial x},\ \frac{\partial a_y}{\partial z}=\frac{\partial a_z}{\partial y},\ \frac{\partial a_z}{\partial x}=\frac{\partial a_x}{\partial z}.$$

В этом случае функцию $u(P) = u(x, y, z)$ можно найти по формуле

$$u(x,y,z)=\int_{x_0}^{x}a_x(x,y_0,z_0)dx+\int_{y_0}^{y}a_y(x,y,z_0)dy+\int_{z_0}^{z}a_z(x,y,z)dz+c, \tag{9.7}$$

где $(x_0, y_0, z_0) \in V$ — некоторая фиксированная точка, а c — произвольная постоянная. Здесь предполагается, что ломаная $A_0A_xA_{xy}A_{xyz}$ с вершинами $A_0(x_0, y_0, z_0)$, $A_x(x, y_0, z_0)$, $A_{xy}(x, y, z_0)$, $A_{xyz}(x, y, z)$ целиком лежит в области V.

Как следствие из (9.7) получаем, что криволинейный интеграл 2-го рода от полного дифференциала по кривой $\overset{\frown}{AB}$ от точки $A(x_0, y_0, z_0)$ до точки $B(x_1, y_1, z_1)$ можно вычислить, и не находя функцию $u(x, y, z)$, а именно:

$$\int\limits_{(x_0,y_0,z_0)}^{(x_1,y_1,z_1)}a_xdx+a_ydy+a_zdz=\int_{x_0}^{x_1}a_x(x,y_0,z_0)dx+\int_{y_0}^{y_1}a_y(x_1,y,z_0)dy+\int_{z_0}^{z_1}a_z(x_1,y_1,z)dz. \tag{9.8}$$

Для плоского векторного поля $\mathbf{a}(\mathbf{r}) = a_x(x, y)\mathbf{i} + a_y(x, y)\mathbf{j}$ упомянутые выше условия полного дифференциала, формулы для нахождения функции $u(P) = u(x, y)$ и вычисления интеграла выглядят, соответственно, следующим образом:

$$\frac{\partial a_x}{\partial y}=\frac{\partial a_y}{\partial x};\ u(x,y)=\int_{x_0}^{x}a_x(x,y_0)dx+\int_{y_0}^{y}a_y(x,y)dy+c;$$

$$\int\limits_{(x_0,y_0)}^{(x_1,y_1)}a_xdx+a_ydy=\int_{x_0}^{x_1}a_x(x,y_0)dx+\int_{y_0}^{y_1}a_y(x_1,y)dy.$$

ПРИМЕР 9.11. Убедившись в том, что подынтегральное выражение является полным дифференциалом, вычислить интеграл $\int\limits_{\overset{\frown}{AB}}yzdx+xzdy+xydz$ по произвольной кусочно-гладкой кривой $\overset{\frown}{AB}$ от точки $A(0, 0, 0)$ до точки $B(1, 1, 1)$.

◄ В данном случае $a_x = yz$, $a_y = xz$ и $a_z = xy$. Поэтому $\frac{\partial a_x}{\partial y}=z=\frac{\partial a_y}{\partial x}$; $\frac{\partial a_y}{\partial z}=x=\frac{\partial a_z}{\partial y}$; $\frac{\partial a_z}{\partial x}=y=\frac{\partial a_x}{\partial z}$, т. е. подынтегральное выражение $yz\,dx + xz\,dy + xy\,dz$ является полным дифференциалом. Положив, например, $(x_0, y_0, z_0) = (0, 0, 0)$, найдем функцию $u(P)$:

$$u(x,y,z)=\int_0^x\underbrace{a_x(x,0,0)}_{=0}dx+\int_{y_0}^{y}\underbrace{a_y(x,y,0)}_{=0}dy+\int_{z_0}^{z}a_z(x,y,z)dz+c=\int_0^z xydz+c=xyz+c.$$

Отсюда $\int\limits_{\overset{\frown}{AB}}yzdx+xzdy+xydz=\int\limits_{(0,0,0)}^{(1,2,3)}yzdx+xzdy+xydz=u(1,2,3)-u(0,0,0)=6.$ ►

В задачах 9.113–9.124, убедившись в том, что подынтегральное выражение является полным дифференциалом, вычислить криволинейные интегралы.

9.113. $\int\limits_{(1,1)}^{(2,3)} y\,dx + x\,dy.$ **9.114.** $\int\limits_{(-1,1)}^{(2,-2)} x\,dx + y\,dy.$

9.115. $\int\limits_{(0,1)}^{(2,3)} (x+y)dx + (x-y)dy.$ **9.116.** $\int\limits_{(1,-1)}^{(1,1)} (x-y)dx + (y-x)dy.$

9.117. $\int\limits_{(-2,-1)}^{(3,0)} (x^4 + 4xy^3)dx + (6x^2y^2 - 5y^4)dy.$

9.118. $\int\limits_{(0,0)}^{(3,\pi/2)} e^x \cos y\,dx - e^x \sin y\,dy.$

9.119. $\int\limits_{(1,1,1)}^{(3,2,1)} y^2z^3dx + 2xyz^3dy + 3xy^2z^2dz.$

9.120. $\int\limits_{(1,0,1)}^{(-1,2,1)} (y+z)dx + (x+z)dy + (x+y)dz.$

9.121. $\int\limits_{(0,2,1)}^{(-1,2,4)} e^x(yz^2dx + z^2dy + 2yz\,dz).$

9.122. $\int\limits_{(10,2,0)}^{(2,3,\pi/2)} 2x\sin z\,dx + \sin z\,dy + (x^2 + y)\cos z\,dz.$

9.123. $\int\limits_{(1,1,1)}^{(1,2,3)} (2x-y-z)dx + (2y-x-z)dy + (2z-x-y)dz.$

9.124. $\int\limits_{(0,1,0)}^{(4,0,3)} \dfrac{x\,dx + y\,dy + z\,dz}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$, путь не проходит через начало координат.

9.125. Найти работу силы $\mathbf{F}$ при перемещении материальной точки вдоль произвольной кусочно-гладкой кривой из точки $A(x_0, y_0, z_0)$ в точку $B(x_1, y_1, z_1)$:

а) $\mathbf{F} = -mg\mathbf{k}$ — сила тяжести у поверхности Земли (m — масса материальной точки, g — ускорение свободного падения, ось Oz направлена вертикально вверх);

б) $\mathbf{F} = -\dfrac{c\mathbf{r}}{r^3}$ — сила тяготения точечной массы, помещенной в начало координат ($c = \text{const}$, $\mathbf{r} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}$, $r = \sqrt{x^2+y^2+z^2}$).

3. Поверхностный интеграл 1-го рода

Предположим, что G — кусочно-гладкая поверхность, а $u(P)$ — скалярное поле, заданное в некоторой области, содержащей G. Пусть G_i — частичные поверхности с площадями $\Delta\sigma_i$, образующие некоторое разбиение поверхности G, и $P_i \in G_i$ — произвольные точки, выбранные на поверхностях G_i, $i = 1, 2, \ldots, n$. Обозначим через d_i диаметр поверхности G_i, т. е. точную верхнюю грань расстояний между точками этой поверхности. Если при стремлении к нулю максимального из диаметров d_i существует предел интегральных сумм $\sum_{i=1}^{n} u(P_i)\Delta\sigma_i$, не зависящий ни от способа разбиения поверхности G, ни от выбора точек P_i, то этот предел называется *поверхностным интегралом 1-го рода* функции $u(P)$ по поверхности G и обозначается $\iint_G u(P)d\sigma$ или $\iint_G u(x,y,z)d\sigma$. Таким образом,

$$\iint_G u(P)d\sigma = \lim_{\max_i d_i \to 0} \sum_{i=1}^{n} u(P_i)\Delta\sigma_i. \tag{9.9}$$

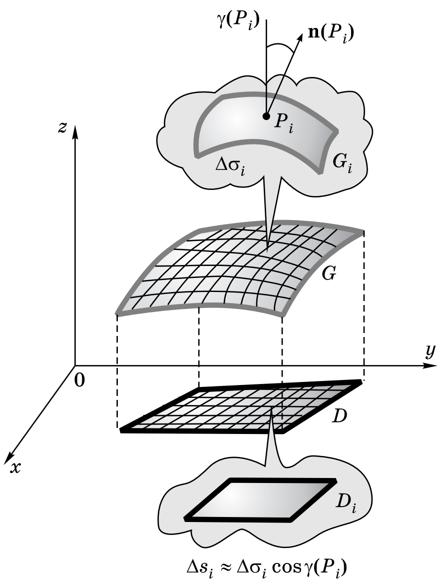


Рис. 9.4

Интеграл (9.9) существует, в частности, для непрерывной на G функции $u(P)$.

Вычисление поверхностного интеграла (9.9) можно свести к вычислению двойного интеграла. Предположим, что любая прямая, параллельная оси Oz, пересекает поверхность G не более чем в одной точке. Тогда уравнение этой поверхности можно записать в явном виде $z = z(x, y)$. Пусть, наконец, G проектируется на плоскость Oxy в область D. Площадь Δs_i проекции D_i частичной поверхности G_i связана с площадью $\Delta\sigma_i$ этой поверхности соотношением $\Delta s_i \approx \Delta\sigma_i \cos\gamma(P_i)$, где $\gamma(P_i)$ — острый угол, который нормаль $n(P_i)$ к поверхности G_i в точке P_i составляет с осью Oz (рис. 9.4). Для дифференциалов это соотношение принимает вид $ds = d\sigma\cos\gamma$, где $\cos\gamma$ определяется равенством

$$\cos\gamma = \frac{1}{\sqrt{1+\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2}}.$$

Отсюда получаем, что

$$\iint_G u(x,y,z)d\sigma = \iint_D u(x,y,z(x,y))\frac{ds}{\cos\gamma} = \iint_D u(x,y,z(x,y))\sqrt{1+\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2}\,dxdy.$$

Если какая-либо из прямых, параллельных оси Oz, пересекает поверхность G более чем в одной точке, то G разбивают на части, для каждой из которых условие единственности пересечения выполняется. Затем проводят интегрирование по каждой из этих частей и складывают полученные результаты. Кроме этого, при переходе от поверхностного к двойному интегралу поверхность G можно проектировать не только на плоскость Oxy, но и на координатные плоскости Oxz и Oyz.

Поверхностный интеграл 1-го рода по двухсторонней поверхности не зависит от того, по какой стороне поверхности он берется. Физический смысл этого интеграла связан с определением массы, электрического заряда, координат центра масс, момента инерции и других интегральных характеристик поверхности G при известной поверхностной плотности $u(P)$ массы, заряда и т. п.

ПРИМЕР 9.12. Найти суммарный заряд Q конической поверхности G: $z^2 = x^2 + y^2$, $0 \le z \le 1$, если поверхностная плотность распределения зарядов в точке $P(x, y, z)$ равна $q(P) = \frac{q_0}{z}$.

◀ Суммарный заряд вычисляется по формуле $Q = \iint\limits_G q(P)\,d\sigma$. Уравнение поверхности G можно преобразовать к виду $z = \sqrt{x^2 + y^2}$, поэтому

$$d\sigma = \sqrt{1 + \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2}\,dx\,dy = \sqrt{1 + \left(\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}\right)^2 + \left(\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}\right)^2}\,dx\,dy = \sqrt{2}\,dx\,dy.$$

Отсюда $Q = \sqrt{2}q_0 \iint\limits_D \frac{dx\,dy}{z(x,y)} = \sqrt{2}q_0 \iint\limits_D \frac{dx\,dy}{\sqrt{x^2+y^2}}$. Проекцией D поверхности G на плоскость Oxy является круг $x^2 + y^2 \le 1$. Поэтому целесообразно перейти к полярным координатам (ρ, φ): $x = \rho\cos\varphi$, $y = \rho\sin\varphi$, $dx\,dy = \rho\,d\rho\,d\varphi$. Тогда

$$Q = \sqrt{2}q_0 \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^1 \frac{1}{\rho}\rho\,d\rho = 2\sqrt{2}\pi q_0 \int_0^1 d\rho = 2\sqrt{2}\pi q_0.$$

Итак, суммарный заряд поверхности Q равен $2\sqrt{2}\pi q_0$. ▶

ПРИМЕР 9.13. Найти координаты центра масс (x_0, y_0, z_0) и момент инерции J_z относительно оси Oz однородной полусферы G: $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$, $z \ge 0$ с поверхностной плотностью $\mu(P) \equiv c$.

◀ Координаты центра масс поверхности определяются формулами

$$x_0 = \frac{1}{M}\iint\limits_G x\mu(P)\,d\sigma,\quad y_0 = \frac{1}{M}\iint\limits_G y\mu(P)\,d\sigma,\quad z_0 = \frac{1}{M}\iint\limits_G z\mu(P)\,d\sigma,$$

где $M = \iint\limits_G \mu(P)\,d\sigma$ — масса поверхности. В силу симметрии поверхности G относительно оси Oz получим $x_0 = y_0 = 0$.

Уравнение G, разрешенное относительно z, имеет вид $z = \sqrt{R^2 - x^2 - y^2}$. Поэтому

$$d\sigma = \sqrt{1 + \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2}\,dx\,dy =$$

$$= \sqrt{1 + \left(\frac{x}{\sqrt{R^2-x^2-y^2}}\right)^2 + \left(\frac{y}{\sqrt{R^2-x^2-y^2}}\right)^2}\,dx\,dy = \frac{R\,dx\,dy}{\sqrt{R^2-x^2-y^2}}.$$

Отсюда $z_0 = \frac{1}{M}\iint\limits_G z\mu(P)\,d\sigma = \frac{c}{M}\iint\limits_D \sqrt{R^2-x^2-y^2}\,\frac{R\,dx\,dy}{\sqrt{R^2-x^2-y^2}} = \frac{cR}{M}\iint\limits_D dx\,dy$, где D — проекция полусферы G на плоскость Oxy, являющаяся кругом радиуса R в этой плоскости.

Интеграл $\iint\limits_D dxdy$ равен площади этого круга, т. е. πR^2, Следовательно, $z_0 = \dfrac{\pi c R^3}{M}$. Найдем массу поверхности G: $M = \iint\limits_G \mu(P)d\sigma = c\iint\limits_G d\sigma = 2\pi c R^2$, так как интеграл $\iint\limits_G d\sigma$ определяет площадь полусферы G, равную $2\pi R^2$. Отсюда окончательно получаем $z_0 = \dfrac{R}{2}$ и координаты центра масс $(x_0, y_0, z_0) = \left(0, 0, \dfrac{R}{2}\right)$.

Момент инерции поверхности G относительно оси Oz определяется формулой $J_z = \iint\limits_G \mu(P) r_z^2(P) d\sigma$, где $r_z^2(P) = x^2 + y^2$ — квадрат расстояния от точки $P(x, y, z)$ до оси Oz. Таким образом, $J_z = c\iint\limits_G (x^2+y^2)d\sigma = c\iint\limits_D (x^2+y^2)\dfrac{R\,dxdy}{\sqrt{R^2-x^2-y^2}}$. Переходя к полярным координатам, получаем

$$J_z = cR\int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^R \frac{\rho^3 d\rho}{\sqrt{R^2-\rho^2}} = 2\pi c R\int_0^R \frac{\rho^3 d\rho}{\sqrt{R^2-\rho^2}} = \frac{4}{3}\pi c R^4. \blacktriangleright$$

В задачах 9.126–9.140 вычислить поверхностные интегралы 1-го рода.

9.126. $\iint\limits_G x^2yz\,d\sigma$, где G — часть плоскости $x + y + z = 1$, лежащая в первом октанте.

9.127. $\iint\limits_G xy^2z\,d\sigma$, где G — часть плоскости $x + y + z = 3$, $x \ge 0$, $y \ge 0$, $z \ge 0$.

9.128. $\iint\limits_G xz\,d\sigma$, где G — часть плоскости $x + 2y + z = 1$, $x \ge 0$, $y \ge 0$, $z \ge 0$.

9.129. $\iint\limits_G x^2z\,d\sigma$, где G — часть плоскости $2x + y + 3z = 5$, $x \ge 0$, $y \ge 0$, $z \ge 0$.

9.130. $\iint\limits_G (x+2y)d\sigma$, где G — часть плоскости $\dfrac{x}{3} + \dfrac{y}{2} + z = 1$, $x \ge 0$, $y \ge 0$, $z \ge 0$.

9.131. $\iint\limits_G \dfrac{d\sigma}{(1+x+y)^2}$, где G — часть плоскости $x + y + z = 1$, $x \ge 0$, $y \ge 0$, $z \ge 0$.

9.132. $\iint\limits_G \sqrt{x^2+y^2}\,d\sigma$, где G — часть поверхности конуса $z^2 = x^2 + y^2$, $0 \le z \le 1$.

9.133. $\iint\limits_G z^2 d\sigma$, где G — часть поверхности конуса $z^2 = x^2 + y^2$, $0 \le z \le 3$.

9.134. $\iint\limits_G z\,d\sigma$, где G — часть поверхности конуса $z^2 = x^2 + y^2$, $z \ge 0$, вырезаемая цилиндром $x^2 + y^2 = 2y$.

9.135. $\iint\limits_G (x^2+y^2+z^2)d\sigma$, где G — полусфера $x^2 + y^2 + z^2 = 1$, $z \ge 0$.

9.136. $\iint\limits_G (x+y+z)d\sigma$, где G — часть сферы $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$, $x \ge 0$, $y \ge 0$, $z \ge 0$.

9.137. $\iint\limits_G (x^2+y^2)d\sigma$, где G — полусфера $x^2 + y^2 + z^2 = 1$, $z \ge 0$.

9.138. $\iint\limits_G (2x-y)d\sigma$, где G — верхняя полусфера $z=\sqrt{4-x^2+y^2}$.

9.139. $\iint\limits_G z\,d\sigma$, где G — часть параболоида $2z = x^2 + y^2$, $z \le 1$.

9.140. $\iint\limits_G xyz\,d\sigma$, где G — часть параболоида $z = x^2 + y^2$, $z \le 1$.

9.141. Найти массу части поверхности гиперболического параболоида $z = x^2 - y^2$, вырезаемой из него цилиндром $x^2 + y^2 = 1$, если поверхностная плотность распределения массы $\mu(P) = c|z|$.

9.142. Определить момент инерции однородной боковой поверхности конуса $z=\sqrt{x^2+y^2}$, $z \le a$, относительно оси Oz (поверхностная плотность $\mu(P) \equiv c$).

9.143. Найти электрический заряд части двуполостного гиперболоида $z^2 = x^2 + y^2 + 1$, $1 \le z \le \sqrt{2}$, если поверхностная плотность распределения зарядов $q(P) = cz$.

9.144. Найти электрический заряд части параболоида $2az = x^2 + y^2$, вырезаемой из него цилиндром $x^2 + y^2 = a^2$, если поверхностная плотность распределения зарядов $q(P)=c\sqrt{z}$.

4. Поверхностный интеграл 2-го рода

Кусочно-гладкая поверхность G в трехмерном пространстве называется *двухсторонней*, если нормаль к ней при обходе по любому замкнутому контуру, лежащему на поверхности G и не пересекающему ее границы, возвращается в первоначальное положение. Если у двухсторонней поверхности выбрана определенная сторона (или выбрано одно из двух возможных направлений нормали к поверхности), то такая поверхность называется *ориентированной*.

Предположим, что G — кусочно-гладкая ориентированная поверхность и $\mathbf{a}(P) = a_x(x, y, z)\mathbf{i} + a_y(x, y, z)\mathbf{j} + a_z(x, y, z)\mathbf{k}$ — векторное поле, заданное в области, содержащей G. Разобьем G на частичные поверхности $G_1, G_2, \ldots, G_n$ с площадями $\Delta\sigma_1, \Delta\sigma_2, \ldots, \Delta\sigma_n$, выберем на частичных поверхностях G_i произвольные точки P_i и обозначим через $\mathbf{n}(P_i)$ единичные нормали к поверхности G в точках P_i, $i = 1, 2, \ldots, n$, соответствующие ее ориентации, и пусть $\Delta\sigma_i = \mathbf{n}(P_i)\Delta\sigma_i$ (рис. 9.5). Если при стрем-

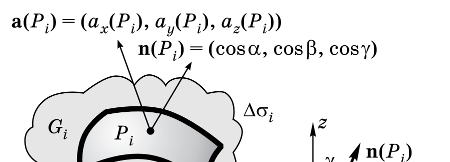


Рис. 9.5

лении к нулю максимального из диаметров d_i поверхностей G_i существует предел интегральных сумм $\sum_{i=1}^{n}(\mathbf{a}(P_i),\mathbf{n}(P_i))\Delta\sigma_i=\sum_{i=1}^{n}(\mathbf{a}(P_i),\Delta\sigma_i)$, не зависящий от способа разбиения поверхности G и от выбора точек P_i, то этот предел называется *поверхностным интегралом 2-го рода* от векторного поля $\mathbf{a}(P)$ по поверхности G и обозначается $\iint\limits_G(\mathbf{a},d\sigma)$ или $\iint\limits_G a_x\,dydz+a_y\,dxdz+a_z\,dxdy$. (Для интеграла по замкнутой поверхности G обычно используют символ $\oint\!\!\oint\limits_G(\mathbf{a},d\sigma)$.) Таким образом,

$$\iint\limits_G(\mathbf{a},d\sigma)=\iint\limits_G a_x\,dydz+a_y\,dxdz+a_z\,dxdy=\lim_{\max\limits_i d_i\to 0}\sum_{i=1}^{n}(\mathbf{a}(P_i),\Delta\sigma_i). \qquad (9.10)$$

Интеграл (9.10) существует, в частности, для непрерывного на G векторного поля $\mathbf{a}(P)$. Переход к другой стороне поверхности меняет направление нормали к ней на противоположное, поэтому и знак поверхностного интеграла 2-го рода меняется при этом на противоположный. Вычисление поверхностного интеграла 2-го рода (9.10) сводится к вычислению поверхностного интеграла 1-го рода:

$$\iint\limits_G(\mathbf{a},d\sigma)=\iint\limits_G(\mathbf{a},\mathbf{n})d\sigma=\iint\limits_G(a_x\cos\alpha+a_y\cos\beta+a_z\cos\gamma)d\sigma, \qquad (9.11)$$

где $\cos\alpha$, $\cos\beta$ и $\cos\gamma$ — координаты (*направляющие косинусы*) единичной нормали $\mathbf{n}=(\cos\alpha,\ \cos\beta,\ \cos\gamma)$ к выбранной стороне поверхности G (рис. 9.5). Если поверхность G задана неявным уравнением $g(x,\ y,\ z)=0$, то

$$\cos\alpha=\frac{\pm g'_x}{\sqrt{g'^2_x+g'^2_y+g'^2_z}},\quad \cos\beta=\frac{\pm g'_y}{\sqrt{g'^2_x+g'^2_y+g'^2_z}},\quad \cos\gamma=\frac{\pm g'_z}{\sqrt{g'^2_x+g'^2_y+g'^2_z}}, \qquad (9.12)$$

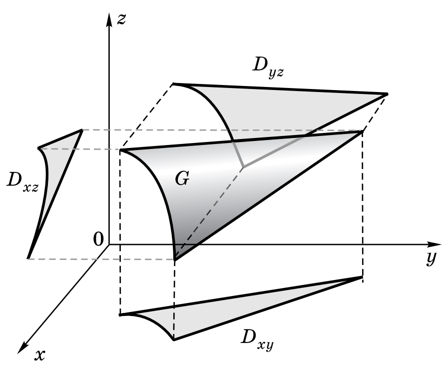


Рис. 9.6

причем знак в этих выражениях определяется выбором стороны поверхности G.

Предположим, что любая прямая, параллельная какой-либо из осей Ox, Oy, Oz, пересекает поверхность G не более чем в одной точке, т. е. уравнение этой поверхности можно записать в явном виде каждым из трех способов: $x=x(y,\ z)$, $y=y(x,\ z)$ и $z=z(x,\ y)$. Пусть G проектируется на координатные плоскости Oyz, Oxz и Oxy в области D_{yz}, D_{xz} и D_{xy} соответственно (рис. 9.6). Тогда вычисление поверхностного интеграла 2-го рода (9.10) можно свести к вычислению трех двойных интегралов:

$$\iint\limits_G(\mathbf{a},d\sigma)=\pm\iint\limits_{D_{yz}}a_x(x(y,z),y,z)dydz\pm\iint\limits_{D_{xz}}a_y(x,y(x,z),z)dxdz\pm$$
$$\pm\iint\limits_{D_{xy}}a_z(x,y,z(x,y))dxdy. \qquad (9.13)$$

Знаки перед интегралами в правой части этого равенства совпадают со знаками направляющих косинусов нормали $\cos\alpha$, $\cos\beta$ и $\cos\gamma$ соответственно.

Поверхностный интеграл 2-го рода (14.10) называют также *потоком векторного поля* $\mathbf{a}(P)$ через поверхность G. Его можно интерпретировать как количество жидкости, газа, излучаемой энергии и т. п., протекающих за единицу времени через поверхность G.

ПРИМЕР 9.14. Найти поток векторного поля $\mathbf{a}(x, y, z) = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} - z\mathbf{k}$ через внешнюю поверхность параболоида $z = x^2 + y^2$, ограниченную плоскостью $z = 1$.

◀ Для вычисления потока используем формулу (9.11). Найдем направляющие косинусы нормали к поверхности G. Неявное уравнение параболоида имеет вид $g(x, y, z) = x^2 + y^2 - z = 0$, поэтому в соответствии с (9.12) имеем

$$\cos\alpha = \frac{\pm 2x}{\sqrt{4x^2+4y^2+1}},\ \cos\beta = \frac{\pm 2y}{\sqrt{4x^2+4y^2+1}},\ \cos\gamma = \frac{\pm(-1)}{\sqrt{4x^2+4y^2+1}}.$$

В первом октанте ($x > 0,\ y > 0,\ z > 0$) внешняя нормаль составляет острые углы с осями Ox и Oy и тупой угол с осью Oz, так что $\cos\alpha > 0$, $\cos\beta > 0$, $\cos\gamma < 0$. Поэтому во всех последних равенствах выбираем знак «+».

Теперь в соответствии с (14.9) переходим к поверхностному интегралу 1-го рода:

$$\iint\limits_G (\mathbf{a}, d\boldsymbol{\sigma}) = \iint\limits_G \left(x\left(\frac{2x}{\sqrt{4x^2+4y^2+1}}\right) + y\left(\frac{2y}{\sqrt{4x^2+4y^2+1}}\right) - z\frac{-1}{\sqrt{4x^2+4y^2+1}} \right) d\sigma =$$
$$= \iint\limits_G \frac{2x^2+2y^2+z}{\sqrt{4x^2+4y^2+1}} d\sigma.$$

Для вычисления этого поверхностного интеграла сведем его к двойному интегралу. Проекцией D поверхности G на плоскость Oxy является круг $x^2 + y^2 \le 1$. Используя выражение для элемента площади поверхности $d\sigma = \sqrt{1 + {z'_x}^2 + {z'_y}^2}\,dxdy$ и явное уравнение $z = x^2 + y^2$ поверхности G, находим $d\sigma = \sqrt{1 + 4x^2 + 4y^2}\,dxdy$, откуда

$$\iint\limits_G (\mathbf{a}, d\boldsymbol{\sigma}) = \iint\limits_D \frac{2x^2+2y^2+z(x,y)}{\sqrt{4x^2+4y^2+1}} \sqrt{1+4x^2+4y^2}\,dxdy =$$
$$= \iint\limits_D (2x^2+2y^2+(x^2+y^2))\,dxdy = 3\iint\limits_D (x^2+y^2)\,dxdy.$$

Переходя к полярным координатам $x = \rho\cos\varphi$, $y = \rho\sin\varphi$, $dx\,dy = \rho\,d\rho\,d\varphi$, окончательно получаем $3\iint\limits_D (x^2+y^2)\,dxdy = 3\int\limits_0^{2\pi} d\varphi \int\limits_0^1 \rho^3 d\rho = \frac{2}{3}\pi$, т. е. $\iint\limits_G (\mathbf{a}, d\boldsymbol{\sigma}) = \frac{2}{3}\pi$. ▶

ПРИМЕР 9.15. Найти поток векторного поля $\mathbf{a}(x, y, z) = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}$ через часть сферы $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$, лежащую в первом октанте, в направлении внешней нормали.

◀ Воспользуемся формулой (9.13). Явные уравнения поверхности G имеют вид $x = \sqrt{a^2 - y^2 - z^2}$, $y = \sqrt{a^2 - x^2 - z^2}$, $z = \sqrt{a^2 - x^2 - y^2}$, ее проекциями D_{yz}, D_{yz} и D_{yz} на координатные плоскости Oyz, Oxz и Oxy являются части кругов $y^2 + z^2 \le a^2$, $x^2 + z^2 \le a^2$ и $x^2 + y^2 \le a^2$, лежащие в первых квадрантах соответствующих координатных плоскостей. По формуле (9.13) находим

$$\iint\limits_G (\mathbf{a}, d\boldsymbol{\sigma}) = \pm\iint\limits_{D_{yz}} \sqrt{a^2-y^2-z^2}\,dydz \pm \iint\limits_{D_{xz}} \sqrt{a^2-x^2-z^2}\,dxdz \pm \iint\limits_{D_{xy}} \sqrt{a^2-x^2-y^2}\,dxdy. \quad (9.14)$$

Внешняя нормаль к поверхности G составляет острые углы с координатными осями Ox, Oy и Oz, поэтому все ее направляющие косинусы положительны и в правой части (9.14) следует выбрать знак «+» перед каждым из интегралов. При вычислении двойных интегралов из (9.14) используем полярные координаты. Например, $y = \rho\cos\varphi$, $z = \rho\sin\varphi$, $dy\,dz = \rho\,d\rho\,d\varphi$, тогда

$$\iint\limits_{D_{yz}} \sqrt{a^2 - y^2 - z^2}\,dy\,dz = \int\limits_0^{\pi/2} d\varphi \int\limits_0^a \sqrt{a^2 - \rho^2}\,\rho\,d\rho = \frac{\pi}{4}a^3.$$

Окончательно получаем $\iint\limits_G (\mathbf{a}, d\sigma) = \dfrac{3\pi a^3}{4}$. ►

В задачах 9.145–9.154 вычислить поверхностные интегралы 2-го рода.

9.145. $\iint\limits_G y\,dx\,dz$, где G — верхняя сторона части плоскости $x + \dfrac{y}{2} + \dfrac{z}{3} = 1$, лежащей в первом октанте.

9.146. $\iint\limits_G \dfrac{dx\,dy}{z}$, где G — внешняя сторона сферы $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$.

9.147. $\iint\limits_G x^2 dy\,dz$, где G — внешняя сторона части параболоида $z = \dfrac{3}{4}(x^2 + y^2)$, $x \geq 0$, $y \geq 0$, $z \leq 3$.

9.148. $\iint\limits_G 2x\,dy\,dz - z\,dx\,dz + y\,dx\,dy$, где G — верхняя сторона части плоскости $x + y + z = 2$, лежащей в первом октанте.

9.149. $\iint\limits_G x\,dy\,dz - 2x\,dx\,dz + yz\,dx\,dy$, где G — верхняя сторона части плоскости $x + y + z = 1$, лежащей в первом октанте.

9.150. $\iint\limits_G 2x\,dy\,dz - y\,dx\,dz + z\,dx\,dy$, где G — внешняя сторона части сферы $x^2 + y^2 + z^2 = 4$, $x \geq 0$, $z \geq 0$.

9.151. $\iint\limits_G xy\,dy\,dz - yz\,dx\,dz + zx\,dx\,dy$, где G — внешняя сторона части сферы $x^2 + y^2 + z^2 = 1$, лежащей в первом октанте.

9.152. $\iint\limits_G y\,dy\,dz + 2x\,dx\,dz - z\,dx\,dy$, где G — внешняя сторона части параболоида $z = x^2 + y^2$, лежащей в первом октанте и отсекаемой плоскостью $z = 2$.

9.153. $\iint\limits_G xy\,dx\,dz - 2z\,dx\,dy$, где G — внешняя сторона боковой поверхности конуса $z = 1 - \sqrt{x^2 + y^2}$, $z \geq 0$.

9.154. $\iint\limits_G 2x\,dy\,dz + 2y\,dx\,dz - z\,dx\,dy$, где G — внешняя сторона боковой поверхности конуса $z^2 = x^2 + y^2$, $0 \le z \le 1$.

В задачах 9.155–9.162 найти поток векторного поля $\mathbf{a}$ через поверхность G.

9.155. $\mathbf{a} = x^2\mathbf{i} + y^2\mathbf{j} + z\mathbf{k}$, G — внешняя сторона поверхности тела

$$2\sqrt{x^2+y^2} \le z \le 2.$$

9.156. $\mathbf{a} = 2x\mathbf{i} - y\mathbf{j}$, G — внешняя сторона части поверхности цилиндра $x^2 + y^2 = 4$, $x \ge 0$, $y \ge 0$, $0 \le z \le 3$.

9.157. $\mathbf{a} = x^2\mathbf{i} + y^2\mathbf{j} + z^2\mathbf{k}$, G — внутренняя сторона части параболоида $z = 2(x^2 + y^2)$, $z \le 2$.

9.158. $\mathbf{a} = x^2\mathbf{i} - y^2\mathbf{j} + z^2\mathbf{k}$, G — внешняя сторона части сферы $x^2 + y^2 + z^2 = 2$, лежащей в первом октанте.

9.159. $\mathbf{a} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} - 3z\mathbf{k}$, G — внутренняя сторона поверхности куба $|x| \le a$, $|y| \le a$, $|z| \le a$.

9.160. $\mathbf{a} = 2x^2\mathbf{i} + 3y^2\mathbf{j} + z^2\mathbf{k}$, G — внешняя сторона поверхности тела

$$\sqrt{x^2+y^2} \le z \le \sqrt{2-x^2+y^2}.$$

9.161. $\mathbf{a} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}$, G — часть параболоида $z = x^2 - y^2$, вырезаемая плоскостями $x = 0$, $x = 1$ и $z = 0$ и ориентированная в соответствии с направлением орта $\mathbf{k}$.

9.162. $\mathbf{a} = x^2\mathbf{i} + y^2\mathbf{j} + z\mathbf{k}$, G — часть параболоида $z = \frac{1}{2}(x^2 - y^2)$, вырезаемая цилиндром $x^2 + y^2 = 2$ и ориентированная в соответствии с направлением орта $\mathbf{k}$.

§ 9.3. ОСНОВНЫЕ ОПЕРАЦИИ ВЕКТОРНОГО АНАЛИЗА

1. Дивергенция. Формула Остроградского–Гаусса

Пусть в некоторой области V пространства определено векторное поле $\mathbf{a}(P)$ и $P_0 \in V$ — фиксированная точка.

Окружим точку P_0 кусочно-гладкой замкнутой поверхностью S, ограничивающей область Ω_S (рис. 9.7). Если существует предел отношения потока $\oiint\limits_G (\mathbf{a}, d\sigma)$ поля $\mathbf{a}(P)$ через замкнутую поверхность S к объему $v(\Omega_S)$ области Ω_S при стягивании поверхности S в точку P_0, то этот предел называется *дивергенцией* векторного поля $\mathbf{a}(P)$ в точке P_0 и обозначается через $\operatorname{div}\mathbf{a}(P_0)$:

$$\operatorname{div}\mathbf{a}(P_0) = \lim_{S \to P_0} \frac{1}{v(\Omega_S)} \oiint\limits_S (\mathbf{a}, d\sigma).$$

Дивергенция непрерывно дифференцируемого поля $\mathbf{a} = a_x\mathbf{i} + a_y\mathbf{j} + a_z\mathbf{k}$ существует и может быть вычислена по формуле

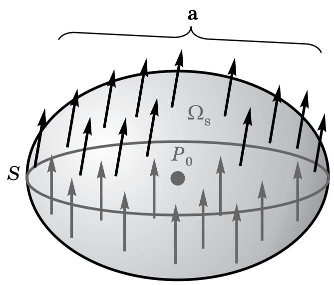


Рис. 9.7

$$\operatorname{div}\mathbf{a} = \frac{\partial a_x}{\partial x} + \frac{\partial a_y}{\partial y} + \frac{\partial a_z}{\partial z}.$$

Величина $\operatorname{div}\mathbf{a}(P_0)$ является локальной характеристикой векторного поля $\mathbf{a}(P)$ в точке P_0 и имеет физический смысл плотности источников (при $\operatorname{div}\mathbf{a}(P_0) > 0$) или стоков (при $\operatorname{div}\mathbf{a}(P_0) < 0$) этого поля в точке P_0.

Пусть векторное поле $\mathbf{a} = a_x\mathbf{i} + a_y\mathbf{j} + a_z\mathbf{k}$ непрерывно дифференцируемо в замкнутой односвязной области V с границей G. Тогда справедлива *формула Остроградского–Гаусса*:

$$\oiint\limits_G (\mathbf{a}, d\sigma) = \iiint\limits_V \operatorname{div}\mathbf{a}\, dv$$

или

$$\oiint\limits_G a_x dy dz + a_y dx dz + a_z dx dy = \iiint\limits_V \left(\frac{\partial a_x}{\partial x} + \frac{\partial a_y}{\partial y} + \frac{\partial a_z}{\partial z}\right) dv. \qquad (9.15)$$

ПРИМЕР 9.16. Напряженность в точке с радиус-вектором $\mathbf{r}$ электрического поля точечного заряда q, помещенного в начало координат, равна $\mathbf{E} = \dfrac{kq\mathbf{r}}{r^3}$, где $k = \dfrac{1}{4\pi\varepsilon_0}$, ε_0 — электрическая постоянная. Найти $\operatorname{div}\mathbf{E}$ в точке $(x, y, z) \neq (0, 0, 0)$.

◄ Компоненты вектора $\mathbf{E}$ равны

$$E_x = \frac{kqx}{(\sqrt{x^2+y^2+z^2})^3},\ E_y = \frac{kqy}{(\sqrt{x^2+y^2+z^2})^3},\ E_z = \frac{kqz}{(\sqrt{x^2+y^2+z^2})^3}.$$

Отсюда

$$\operatorname{div}\mathbf{E} = \frac{\partial E_x}{\partial x} + \frac{\partial E_y}{\partial y} + \frac{\partial E_z}{\partial z} = kq\frac{3(\sqrt{x^2+y^2+z^2})^3 - 3(x^2+y^2+z^2)\sqrt{x^2+y^2+z^2}}{(x^2+y^2+z^2)^3} = 0$$

при $x^2 + y^2 + z^2 \neq 0$. Итак, во всех точках пространства, где нет зарядов, дивергенция электрического поля (т. е. плотность источников этого поля) равна нулю. Это соответствует физическим представлениям о том, что источниками электрического поля являются заряды. ►

ПРИМЕР 9.17. Вычислить поверхностный интеграл 2-го рода

$$I = \oiint\limits_G x^3 dy dz + y^3 dx dz + z^3 dx dy,$$

где G — внешняя сторона сферы $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$.

◄ Воспользуемся формулой Остроградского–Гаусса. В соответствии с (9.15) находим $I = \iiint\limits_V \left(\dfrac{\partial}{\partial x}x^3 + \dfrac{\partial}{\partial y}y^3 + \dfrac{\partial}{\partial z}z^3\right) dv = 3\iiint\limits_V (x^2+y^2+z^2) dv$, где V — шар $x^2 + y^2 + z^2 \leq a^2$.

Для вычисления последнего интеграла целесообразно перейти к сферическим координатам: $x = \rho\cos\varphi\cos\theta$, $y = \rho\sin\varphi\cos\theta$, $z = \rho\sin\theta$, $dx\,dy\,dz = \rho^2\cos\theta\, d\rho\, d\varphi\, d\theta$. Тогда получим

$$I = 3\iiint\limits_V \underbrace{(x^2+y^2+z^2)}_{\rho^2} dv = 3\int\limits_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos\theta d\theta \int\limits_0^{2\pi} d\varphi \int\limits_0^a \rho^4 d\rho =$$

$$= 3\sin\theta\Big|_{-\pi/2}^{\pi/2} \cdot 2\pi \cdot \frac{\rho^5}{5}\Big|_0^a = \frac{12\pi}{5}a^5. \ ►$$

В задачах 9.163–9.171 найти дивергенцию векторного поля **a**.

9.163. $\mathbf{a} = xy\mathbf{i} + yz\mathbf{j} + xz\mathbf{k}$. **9.164.** $\mathbf{a} = \mathbf{r}$.

9.165. $\mathbf{a} = \dfrac{\mathbf{r}}{r}$, $r \neq 0$. **9.166.** $\mathbf{a} = \dfrac{\mathbf{r}}{r^2}$, $r \neq 0$.

9.167. $\mathbf{a} = \dfrac{\mathbf{i}+\mathbf{j}+\mathbf{k}}{\sqrt[3]{(x+y+z)^2}}$.

9.168. $\mathbf{a} = \mathbf{H} = 2I\dfrac{-y\mathbf{i}+x\mathbf{j}}{x^2+y^2}$ — магнитное поле электрического тока I, текущего по бесконечному проводу в положительном направлении оси Oz.

9.169. $\mathbf{a} = \operatorname{grad} u$, где $u = u(x, y, z)$ — скалярное поле.

9.170. $\mathbf{a} = [\mathbf{c}, \mathbf{r}]$, где **c** — постоянный вектор.

9.171. $\mathbf{a} = \mathbf{r}[\mathbf{c}, \mathbf{r}]$, где **c** — постоянный вектор.

В задачах 9.172–9.176 доказать утверждения.

9.172. $\operatorname{div}(\mathbf{a} + \mathbf{b}) = \operatorname{div}\mathbf{a} + \operatorname{div}\mathbf{b}$. **9.173.** $\operatorname{div}(c\mathbf{a}) = c\operatorname{div}\mathbf{a}$, $c = \text{const}$.

9.174. $\operatorname{div}(u\mathbf{c}) = (\mathbf{c}, \operatorname{grad} u)$, где u — скалярное поле, **c** — постоянный вектор.

9.175. $\operatorname{div}(u\mathbf{a}) = u\operatorname{div}\mathbf{a} + (\mathbf{a}, \operatorname{grad} u)$, где u — скалярное поле, **a** — векторное поле.

9.176. Поток радиус-вектора **r** через любую замкнутую кусочно-гладкую поверхность в направлении внешней нормали равен утроенному объему области, ограниченной этой поверхностью.

В задачах 9.177–9.185, используя формулу Остроградского–Гаусса, найти поверхностные интегралы 2-го рода.

9.177. $\iint\limits_G x^2dy\,dz + y^2dx\,dz + z^2\,dx\,dy$, G — внешняя сторона поверхности параллелепипеда $0 \le x \le 1$, $0 \le y \le 2$, $0 \le z \le 3$.

9.178. $\iint\limits_G x^3dy\,dz + y^3dx\,dz - z^3\,dx\,dy$, G — внутренняя сторона поверхности куба $0 \le x \le a$, $0 \le y \le a$, $0 \le z \le a$.

9.179. $\iint\limits_G (xy^2 + y - 1)dy\,dz + yz^2x\,dx\,dz + x^2z\,dx\,dy$, G — внешняя сторона сферы $x^2 + y^2 + z^2 = 1$.

9.180. $\iint\limits_G x^2dy\,dz + xy\,dx\,dz + 3z\,dx\,dy$, G — внешняя сторона замкнутой поверхности $z^2 = x^2 + y^2$, $0 \le z \le 4$.

9.181. $\iint\limits_G x\,dy\,dz + y\,dx\,dz + z\,dx\,dy$, G — внешняя сторона боковой поверхности цилиндра $x^2 + y^2 = 1$, $0 \le z \le 1$.

9.182. $\iint\limits_G y^7z^3dy\,dz + z^2x\,dx\,dz + dx\,dy$, G — внешняя сторона верхней полусферы $z = \sqrt{1 - x^2 + y^2}$.

9.183. $\iint\limits_G (y-z^2)dydz+(x+z^2)dxdz+dxdy$, G — внутренняя сторона части параболоида $z = 4 - x^2 - y^2$, отсекаемой плоскостью $z = 0$.

9.184. $\iint\limits_G (y+z)dydz+(x+z)dxdz+(x^2+y^2)dxdy$, G — внешняя сторона поверхности $z=\sqrt{1-x^2-y^2}$.

9.185. $\iint\limits_G (xz+y)dydz+(xy-z)dxdz+yzdxdy$, где G — внешняя сторона части цилиндра $x^2 + y^2 = 2$, лежащей между плоскостями $z = 0$ и $z = 1$.

2. Ротор векторного поля. Формула Стокса

Пусть в некоторой области V пространства определено векторное поле $\mathbf{a}(P)$, $P_0 \in V$ — фиксированная точка, а $\mathbf{l}$ — вектор, определяющий некоторое направление. Проведем через точку P_0 плоскость L, перпендикулярную направлению $\mathbf{l}$, и выберем на ней замкнутый контур γ, охватывающий эту точку и ограничивающий область ω_γ. Предположим, что для любого направления $\mathbf{l}$ существует предел отношения циркуляции $\oint\limits_\gamma (\mathbf{a}, d\mathbf{r})$ поля $\mathbf{a}(P)$ по контуру γ к площади $s(\omega_\gamma)$ области ω_γ при стягивании контура γ в точку P_0. Тогда вектор $\operatorname{rot}\mathbf{a}(P_0)$, проекция которого на произвольное направление $\mathbf{l}$ равна указанному пределу, т. е.

$$\text{Пр}_{\mathbf{l}}(\operatorname{rot}\mathbf{a}(P_0)) = \lim_{\gamma \to P_0} \frac{1}{s(\omega_\gamma)} \oint\limits_\gamma (\mathbf{a}, d\mathbf{r}),$$

при обходе контура γ в положительном направлении относительно вектора $\mathbf{l}$, называется *ротором* (*вихрем*) векторного поля $\mathbf{a}(P)$ в точке P_0 (рис. 9.8).

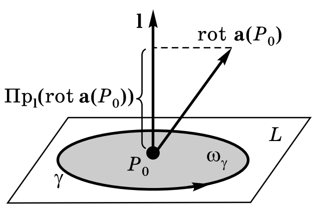


Рис. 9.8

Вектор $\operatorname{rot}\mathbf{a}(P_0)$ характеризует завихренность векторного поля $\mathbf{a}(P)$ в окрестности точки P_0, приводящую к ненулевым циркуляциям этого поля вдоль замкнутых контуров.

Если в области V векторное поле $\mathbf{a} = a_x\mathbf{i} + a_y\mathbf{j} + a_z\mathbf{k}$ непрерывно дифференцируемо, то в каждой точке этой области существует $\operatorname{rot}\mathbf{a}$ и справедлива формула

$$\operatorname{rot}\mathbf{a} = \left(\frac{\partial a_z}{\partial y} - \frac{\partial a_y}{\partial z}\right)\mathbf{i} + \left(\frac{\partial a_x}{\partial z} - \frac{\partial a_z}{\partial x}\right)\mathbf{j} + \left(\frac{\partial a_y}{\partial x} - \frac{\partial a_x}{\partial y}\right)\mathbf{k}. \tag{9.16}$$

Правую часть формулы (9.16) можно записать с помощью символического определителя

$$\operatorname{rot}\mathbf{a} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ a_x & a_y & a_z \end{vmatrix}.$$

Пусть кусочно-гладкая двухсторонняя поверхность G, ограниченная кусочно-гладким контуром C, расположена внутри пространственной области V и пусть векторное поле $\mathbf{a} = a_x\mathbf{i} + a_y\mathbf{j} + a_z\mathbf{k}$ непрерывно дифференцируемо в V. Тогда справедлива формула Стокса

$$\oint_C (\mathbf{a}, d\mathbf{r}) = \iint_G (\operatorname{rot}\mathbf{a}, d\boldsymbol{\sigma})$$

или

$$\oint_C a_x dx + a_y dy + a_z dz =$$
$$= \iint_G \left(\frac{\partial a_z}{\partial y} - \frac{\partial a_y}{\partial z}\right) dy dz + \left(\frac{\partial a_x}{\partial z} - \frac{\partial a_z}{\partial x}\right) dx dz + \left(\frac{\partial a_y}{\partial x} - \frac{\partial a_x}{\partial y}\right) dx dy, \qquad (9.17)$$

где обход контура C производится в положительном направлении относительно нормали к выбранной стороне поверхности G (рис. 9.9).

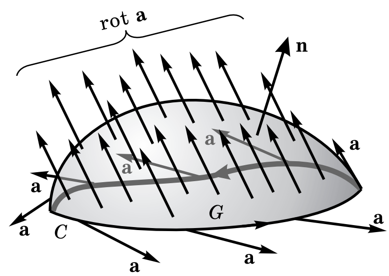


Рис. 9.9

Обычно используют следующую краткую формулировку формулы Стокса: *циркуляция векторного поля по замкнутому контуру равна потоку ротора этого поля через поверхность, натянутую на контур.*

ПРИМЕР 9.18. Найти ротор электрического поля $\mathbf{E} = \dfrac{kq\mathbf{r}}{r^3}$ точечного заряда q, помещенного в начало координат.

◀ Компоненты вектора $\mathbf{E}$ равны

$$E_x = \frac{kqx}{(\sqrt{x^2+y^2+z^2})^3},\quad E_y = \frac{kqy}{(\sqrt{x^2+y^2+z^2})^3},\quad E_z = \frac{kqz}{(\sqrt{x^2+y^2+z^2})^3},$$

поэтому согласно формуле (9.16) находим

$$\operatorname{rot}\mathbf{E} = \left(\frac{\partial E_z}{\partial y} - \frac{\partial E_y}{\partial z}\right)\mathbf{i} + \left(\frac{\partial E_x}{\partial z} - \frac{\partial E_z}{\partial x}\right)\mathbf{j} + \left(\frac{\partial E_y}{\partial x} - \frac{\partial E_x}{\partial y}\right)\mathbf{k} =$$
$$= \frac{kq(-3zy+3zy)}{(\sqrt{x^2+y^2+z^2})^5}\mathbf{i} + \frac{kq(-3xz+3xz)}{(\sqrt{x^2+y^2+z^2})^5}\mathbf{j} + \frac{kq(-3xy+3xy)}{(\sqrt{x^2+y^2+z^2})^5}\mathbf{k} = 0\cdot\mathbf{i} + 0\cdot\mathbf{j} + 0\cdot\mathbf{k} = \mathbf{0}$$

при $(x, y, z) \neq (0, 0, 0)$. Таким образом, электрическое поле точечного заряда является безвихревым векторным полем. ▶

ПРИМЕР 9.19. Найти циркуляцию векторного поля $\mathbf{a} = y^2\mathbf{i} - x\mathbf{j} + z\mathbf{k}$ вдоль эллипса C: $x^2 + y^2 = 1$, $z = x$ (кривая пересечения кругового цилиндра с плоскостью) в положительном направлении относительно орта $\mathbf{k}$: а) непосредственно; б) с помощью формулы Стокса (9.17).

◀ а) Кривую C можно задать параметрически следующим образом: $x = \cos t$, $y = \sin t$, $z = \cos t$, $0 \le t \le 2\pi$. При возрастании параметра t точка (x, y, z) перемещается в положительном относительно орта $\mathbf{k}$ направлении. Поэтому

$$\oint_C (\mathbf{a}, d\mathbf{r}) = \oint_C a_x dx + a_y dy + a_z dz = \oint_C y^2 dx - x dy + z dz =$$
$$= \int_0^{2\pi} (-\sin^3 t - \cos^2 t - \cos t \sin t) dt = -\pi.$$

б) В данном случае

$$\operatorname{rot}\mathbf{a} = \left(\frac{\partial a_z}{\partial y} - \frac{\partial a_y}{\partial z}\right)\mathbf{i} + \left(\frac{\partial a_x}{\partial z} - \frac{\partial a_z}{\partial x}\right)\mathbf{j} + \left(\frac{\partial a_y}{\partial x} - \frac{\partial a_x}{\partial y}\right)\mathbf{k} = -(1+2y)\mathbf{k}.$$

В качестве поверхности G, ограниченной контуром C, выберем, например, часть плоскости $z = x$, на которой он расположен (внутренность эллипса). По формуле Стокса получаем

$$\oint_C (\mathbf{a}, d\mathbf{r}) = \iint_G (\operatorname{rot}\mathbf{a}, d\sigma) = -\iint_G ((1+y)\mathbf{k}, d\sigma) = -\iint_{D_{xy}} (1+y)\,dx\,dy,$$

где проекция D_{xy} поверхности G на координатную плоскость Oxy представляет собой круг $x^2 + y^2 \le 1$. Переходя к полярным координатам $x = \rho\cos\varphi$, $y = \rho\sin\varphi$, $dx\,dy = \rho\,d\rho\,d\varphi$, находим

$$\oint_C (\mathbf{a}, d\mathbf{r}) = -\int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^1 (1 + 2\rho\sin\varphi)\rho\,d\rho = -\pi,$$

что совпадает с результатом пункта а). ►

В задачах 9.186–9.189 доказать утверждения.

9.186. а) $\operatorname{rot}(\mathbf{a} + \mathbf{b}) = \operatorname{rot}\mathbf{a} + \operatorname{rot}\mathbf{b}$; б) $\operatorname{rot}(c\mathbf{a}) = c\operatorname{rot}\mathbf{a}$, $c = \text{const}$.

9.187. $\operatorname{rot}(\operatorname{grad} u) = 0$, где u — дважды дифференцируемое скалярное поле.

9.188. $\operatorname{div}(\operatorname{rot}\mathbf{a}) = 0$, где $\mathbf{a}$ — дважды дифференцируемое векторное поле.

9.189. Магнитное поле $\mathbf{H} = 2I\dfrac{-y\mathbf{i} + x\mathbf{j}}{x^2 + y^2}$ (см. задачу 9.168) в области своего определения является безвихревым.

В задачах 9.190–9.197 для заданных полей $\mathbf{a}$ найти $\operatorname{rot}\mathbf{a}$.

9.190. $\mathbf{a} = \mathbf{r} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}$. **9.191.** $\mathbf{a} = y\mathbf{i} + z\mathbf{j} + x\mathbf{k}$.

9.192. $\mathbf{a} = yz\mathbf{i} + xz\mathbf{j} + xy\mathbf{k}$. **9.193.** $\mathbf{a} = xyz(\mathbf{i} + \mathbf{j} + \mathbf{k})$.

9.194. $\mathbf{a} = xyz(x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k})$. **9.195.** $\mathbf{a} = \dfrac{\mathbf{r}}{r} = \dfrac{x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}$.

9.196. $\mathbf{a} = (z - y)\mathbf{i} + (x - z)\mathbf{j} + (y - x)\mathbf{k}$.

9.197. $\mathbf{a} = [\mathbf{b}, \mathbf{c}]$, где $\mathbf{b} = x^2\mathbf{i} + y^2\mathbf{j} - x^2\mathbf{k}$, $\mathbf{c} = \mathbf{i} - \mathbf{j} + 2\mathbf{k}$.

9.198. Найти ротор поля $\mathbf{v}$ скоростей точек твердого тела, вращающегося вокруг начала координат с угловой скоростью $\boldsymbol{\omega} = \omega_x\mathbf{i} + \omega_y\mathbf{j} + \omega_z\mathbf{k}$.

В задачах 9.199–9.203, используя формулу Стокса, найти циркуляцию вектора $\mathbf{a}$ по замкнутому контуру C в указанном направлении.

9.199. $\mathbf{a} = y\mathbf{i} + z\mathbf{j} + x\mathbf{k}$, C — контур треугольника с вершинами $(1, 0, 0)$, $(0, 1, 0)$ и $(0, 0, 1)$, в положительном направлении относительно орта $\mathbf{i}$.

9.200. $\mathbf{a} = (z - y)\mathbf{i} + (x - z)\mathbf{j} + (y - x)\mathbf{k}$, C — контур треугольника с вершинами $(1, 0, 0)$, $(0, 2, 0)$ и $(0, 0, 3)$, в положительном направлении относительно орта $\mathbf{j}$.

9.201. $\mathbf{a} = z\mathbf{i} + x\mathbf{j} + y\mathbf{k}$, C — эллипс $x^2 + y^2 = 1$, $z = 2x$, в отрицательном направлении относительно орта $\mathbf{k}$.

9.202. $\mathbf{a} = z^2\mathbf{i} + x^2\mathbf{j} + y^2\mathbf{k}$, C — окружность $x^2 + y^2 + z^2 = 1$, $x + y + z = 1$, в положительном направлении относительно орта $\mathbf{k}$.

9.203. $\mathbf{a} = y^2\mathbf{i} + xy\mathbf{j} + (x^2 + y^2)\mathbf{k}$, C — контур, образованный линиями пересечения в первом октанте параболоида $z = x^2 + y^2$, и плоскостей $x = 0$, $y = 0$ и $z = 1$, в положительном направлении относительно внешней нормали параболоида.

§ 9.4.
ВИДЫ ВЕКТОРНЫХ ПОЛЕЙ. ОПЕРАТОР ГАМИЛЬТОНА

1. Потенциальное векторное поле

Векторное поле $\mathbf{a} = \mathbf{a}(P)$ называется *потенциальным*, если существует такая скалярная функция $u = u(P)$, называемая *потенциалом* поля $\mathbf{a}$, что

$$\mathbf{a}(P) = \operatorname{grad} u(P).$$

Необходимым и достаточным условием потенциальности непрерывно дифференцируемого в односвязной области поля $\mathbf{a}(P)$ является равенство нулю ротора этого поля:

$$\operatorname{rot}\mathbf{a} \equiv 0. \tag{9.18}$$

Потенциальное векторное поле обладает следующими свойствами.

1. Криволинейный интеграл 2-го рода от потенциального в односвязной области V поля $\mathbf{a}(P)$ по любой кусочно-гладкой кривой $\overset{\frown}{AB}$, расположенной в этой области, равен

$$\int\limits_{\overset{\frown}{AB}}(\mathbf{a}, d\mathbf{r}) = \int\limits_{\overset{\frown}{AB}}(\operatorname{grad} u, d\mathbf{r}) = \int\limits_A^B du = u(B) - u(A).$$

2. Циркуляция потенциального поля $\mathbf{a}(P)$ по любому замкнутому контуру, целиком лежащему в V, равна нулю.

3. Потенциал поля $\mathbf{a}(P)$ можно найти по формуле

$$u(P) = \int\limits_{P_0}^{P}(\mathbf{a}, d\mathbf{r}) + c, \tag{9.19}$$

где $P_0(x_0, y_0, z_0)$ — любая фиксированная точка области V (часто принимают $P_0(0, 0, 0)$), $c = \text{const} = u(P_0)$, а $P(x, y, z) \in V$ — текущая точка. Путем интегрирования в (9.19) может быть произвольная кусочно-гладкая кривая, соединяющая точку P_0 с точкой P и принадлежащая области V. В качестве этого пути проще всего выбрать ломаную со звеньями, параллельными осям координат (рис. 9.10). Тогда формула (9.19) преобразуется в формулу (9.7):

$$u(x,y,z) = \int\limits_{x_0}^{x} a_x(x, y_0, z_0)dx + \int\limits_{y_0}^{y} a_y(x, y, z_0)dy + \int\limits_{z_0}^{z} a_z(x, y, z)dz + c. \tag{9.20}$$

Изложенный метод нахождения потенциала векторного поля применяется и при решении ряда других задач, эквивалентных рассмотренной. Примерами таких задач являются восстановление функций нескольких переменных по их полным дифференциалам (см. § 9.2) и интегрирование дифференциальных уравнений в полных дифференциалах (см. гл. 7).

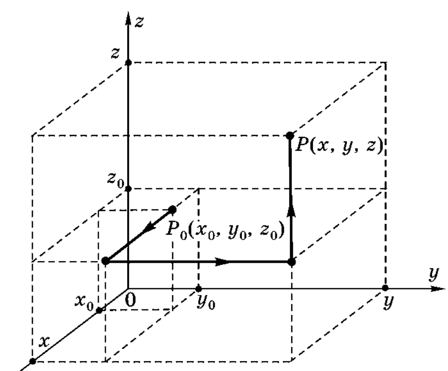


Рис. 9.10

ПРИМЕР 9.20. Найти потенциал $u(r)$ электрического поля $\mathbf{E} = \dfrac{kq\mathbf{r}}{r^3}$ точечного заряда q, помещенного в начало координат, считая, что $\lim\limits_{r\to\infty} u(\mathbf{r}) = 0$.

◀ Векторное поле $\mathbf{E}=\frac{kq\mathbf{r}}{r^3}$ является потенциальным, так как для него выполняется необходимое и достаточное условие потенциальности (9.18) (см. пример 9.18). Используя выражения

$$E_x=\frac{kqx}{(\sqrt{x^2+y^2+z^2})^3},\ E_y=\frac{kqy}{(\sqrt{x^2+y^2+z^2})^3},\ E_z=\frac{kqz}{(\sqrt{x^2+y^2+z^2})^3}$$

для компонент поля $\mathbf{E}$, найдем его потенциал по формуле (9.20):

$$u(x,y,z)=kq\left(\int_{x_0}^{x}\frac{x\,dx}{(\sqrt{x^2+y_0^2+z_0^2})^3}+\int_{y_0}^{y}\frac{y\,dy}{(\sqrt{x^2+y^2+z_0^2})^3}+\int_{z_0}^{z}\frac{z\,dz}{(\sqrt{x^2+y^2+z^2})^3}\right)+c=$$

$$=kq\left(\left.\frac{-1}{\sqrt{x'^2+y_0^2+z_0^2}}\right|_{x_0}^{x}+\left.\frac{-1}{\sqrt{x^2+y'^2+z_0^2}}\right|_{y_0}^{y}+\left.\frac{-1}{\sqrt{x^2+y^2+z'^2}}\right|_{z_0}^{z}\right)+c=$$

$$=\frac{kq}{\sqrt{x_0^2+y_0^2+z_0^2}}-\frac{kq}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}+c=-\frac{kq}{r}+c_1.$$

Из условия $\lim\limits_{r\to\infty}u(\mathbf{r})=0$ находим $c_1=0$. Таким образом, потенциалом электрического поля $\mathbf{E}=\frac{kq\mathbf{r}}{r^3}$ является скалярная функция $u=-\frac{kq}{r}$. Отметим, что в физике принято соотношение $\mathbf{E}(\mathbf{r})=-\operatorname{grad}u(\mathbf{r})$, а потенциалом электрического поля заряда q считают противоположную величину $\frac{kq}{r}$ (см. пример 9.4). ▶

В задачах 9.204–9.215, убедившись в том, что заданные плоские и трехмерные векторные поля являются потенциальными, найти их потенциалы.

9.204. $\mathbf{a}=e^x(\sin y\,\mathbf{i}+\cos y\,\mathbf{j})$.

9.205. $\mathbf{a}=3x^2\mathbf{i}+y^2\mathbf{j}$.

9.206. $\mathbf{a}=(y^2\cos 2x-2xy^2\sin 2x+2x)\mathbf{i}+2xy\cos 2x\,\mathbf{j}$.

9.207. $\mathbf{a}=(3x^2y-y^3)\mathbf{i}+(x^3-3xy^2)\mathbf{j}$.

9.208. $\mathbf{a}=(3x^2+2xy-y^2)\mathbf{i}+(x^2-2xy-3y^2)\mathbf{j}$.

9.209. $\mathbf{a}=(2xye^x+x^2ye^x+y^2e^y)\mathbf{i}+(x^2e^x+2xye^y+xy^2e^y)\mathbf{j}$.

9.210. $\mathbf{a}=e^z\cos y\,\mathbf{i}-xe^z\sin y\,\mathbf{j}+xe^z\cos y\,\mathbf{k}$.

9.211. $\mathbf{a}=(yz-xy)\mathbf{i}+\left(xz-\frac{x^2}{2}+yz^2\right)\mathbf{j}+(xy+y^2z)\mathbf{k}$.

9.212. $\mathbf{a}=(y^2+z^2)\mathbf{i}+(z+2xy)\mathbf{j}+(y+2xz)\mathbf{k}$.

9.213. $\mathbf{a}=\left(\frac{1}{z}-\frac{y}{x^2}\right)\mathbf{i}+\left(\frac{1}{x}-\frac{z}{y^2}\right)\mathbf{j}+\left(\frac{1}{y}-\frac{x}{z^2}\right)\mathbf{k}$.

9.214. $\mathbf{a}=\left(\frac{y}{z}+\frac{z}{y}-\frac{yz}{x^2}\right)\mathbf{i}+\left(\frac{x}{z}+\frac{z}{x}-\frac{xz}{y^2}\right)\mathbf{j}+\left(\frac{y}{x}+\frac{x}{y}-\frac{xy}{z^2}\right)\mathbf{k}$.

9.215. $\mathbf{a}=\left(\frac{z}{y^2}-\frac{y}{z^2}-\frac{2yz}{x^3}\right)\mathbf{i}+\left(\frac{z}{x^2}-\frac{x}{z^2}-\frac{2xz}{y^3}\right)\mathbf{j}+\left(\frac{y}{x^2}+\frac{x}{y^2}+\frac{2xy}{z^3}\right)\mathbf{k}$.

2. Соленоидальное векторное поле

Векторное поле $\mathbf{a} = \mathbf{a}(P)$ называется *соленоидальным* в области V, если в каждой точке этой области его дивергенция равна нулю: $\operatorname{div}\mathbf{a} = 0$. Это условие означает, что соленоидальное поле свободно от источников. Для дифференцируемого в области V векторного поля $\mathbf{a} = a_x\mathbf{i} + a_y\mathbf{j} + a_z\mathbf{k}$ условие соленоидальности можно записать в виде

$$\operatorname{div}\mathbf{a} = \frac{\partial a_x}{\partial x} + \frac{\partial a_y}{\partial y} + \frac{\partial a_z}{\partial z} \equiv 0.$$

В силу теоремы Остроградского–Гаусса поток соленоидального в односвязной области V поля через любую замкнутую кусочно-гладкую поверхность, расположенную в V, равен нулю.

ПРИМЕР 9.21. Доказать, что для любого дважды дифференцируемого векторного поля $\mathbf{a} = \mathbf{a}(P)$ поле вихрей $\operatorname{rot}\mathbf{a}$ является соленоидальным.

◀ Из выражения

$$\operatorname{rot}\mathbf{a} = \left(\frac{\partial a_z}{\partial y} - \frac{\partial a_y}{\partial z}\right)\mathbf{i} + \left(\frac{\partial a_x}{\partial z} - \frac{\partial a_z}{\partial x}\right)\mathbf{j} + \left(\frac{\partial a_y}{\partial x} - \frac{\partial a_x}{\partial y}\right)\mathbf{k},$$

поскольку смешанные производные компонент дважды дифференцируемого поля не зависят от порядка дифференцирования, получаем

$$\operatorname{div}\operatorname{rot}\mathbf{a} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial a_z}{\partial y} - \frac{\partial a_y}{\partial z}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial a_x}{\partial z} - \frac{\partial a_z}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial a_y}{\partial x} - \frac{\partial a_x}{\partial y}\right) = 0. \ ▶$$

9.216. Доказать, что если поле $\mathbf{a} = \mathbf{a}(P)$ соленоидально в односвязной области, то его поток через любую кусочно-гладкую замкнутую поверхность, целиком лежащую в этой области, равен нулю.

В задачах 9.217–9.224 проверить, являются ли заданные поля соленоидальными в областях своего определения.

9.217. $\mathbf{a} = (x^2y + y^3z)\mathbf{i} + (x^3z - xy^2)\mathbf{j} + (x^3 - x^2y^2)\mathbf{k}$.

9.218. $\mathbf{a} = y\ln x\,\mathbf{i} + x\ln y\,\mathbf{j} - (x^2 - y^2)\dfrac{z}{xy}\mathbf{k}$.

9.219. $\mathbf{a} = xy^3\mathbf{i} + x^3y\mathbf{j} - (x^3 + y^3)z\mathbf{k}$.

9.220. $\mathbf{a} = \dfrac{x}{yz}\mathbf{i} + \dfrac{y}{xz}\mathbf{j} - \dfrac{(x+y)\ln z}{xy}\mathbf{k}$.

9.221. $\mathbf{a} = xz\sin y\,\mathbf{i} + y^2z\cos x\,\mathbf{j} - z^2(\sin y + y\cos x)\mathbf{k}$.

9.222. $\mathbf{a} = \dfrac{x^2}{yz}\mathbf{i} + \dfrac{(x^2+y^2)\ln(1/y)}{xz}\mathbf{j} + \dfrac{z^2}{xy}\mathbf{k}$.

9.223. $\mathbf{a} = \dfrac{x\mathbf{i} - y\mathbf{j}}{\sqrt{x^2+y^2}} + \dfrac{(x^2 - y^2)}{(x^2+y^2)^{3/2}}\mathbf{k}$.

9.224. $\mathbf{a} = (x^3y^3z^3 - x^2yz^3)\mathbf{i} + xy^2z^3\mathbf{j} - x^2y^3z^4\mathbf{k}$.

3. Лапласово поле

Векторное поле $\mathbf{a} = \mathbf{a}(P)$ называется *лапласовым* или *гармоническим* в области V, если оно является и потенциальным, и соленоидальным в этой области, т. е. если

$$\operatorname{rot}\mathbf{a}(P) = 0 \quad \text{и} \quad \operatorname{div}\mathbf{a}(P) = 0, \quad P \in V.$$

ПРИМЕР 9.22. Убедиться в том, что в любой области V, не содержащей начало координат, электрическое поле точечного заряда q, помещенного в начало координат, является лапласовым.

◀ Указанное векторное поле описывается формулой $\mathbf{E}=\frac{kq\mathbf{r}}{r^3}$ (см. примеры 9.16 и 9.18). В соответствующих примерах показано, что $\operatorname{div}\mathbf{E}(P)=0$ и $\operatorname{rot}\mathbf{E}(P)=0$ при $P\neq(0, 0, 0)$. А это означает, что поле $\mathbf{E}$ лапласово. ▶

9.225. Доказать, что потенциал $u(P)$ лапласова поля $\mathbf{a}=\mathbf{a}(P)$ является *гармонической функцией*, т. е. $u(P)$ удовлетворяет уравнению

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}=0, \text{ или } \Delta u=0,$$

где $\Delta=\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}+\frac{\partial^2}{\partial z^2}$ — *оператор Лапласа*.

9.226. Доказать, что плоское векторное поле, потенциалом которого является функция $u=\ln r$, лапласово.

В задачах 9.227–9.230 установить, являются ли лапласовыми заданные векторные поля.

9.227. $\mathbf{a}=(x+2y)\mathbf{i}-(3x+y)\mathbf{j}$.

9.228. $\mathbf{a}=(2x-3y)\mathbf{i}-(3x+2y)\mathbf{j}$.

9.229. $\mathbf{a}=(2x+2y+3z)\mathbf{i}+(2x+2y+4z)\mathbf{j}+(3x+4y-4z)\mathbf{k}$.

9.230. $\mathbf{a}=(x+y+z)\mathbf{i}+(x-2y+3z)\mathbf{j}+(2x+2y+z)\mathbf{k}$.

В задачах 9.231–9.237 проверить, являются ли гармоническими заданные функции.

9.231. $u=ax+by+cz+d$. **9.232.** $u=r^2=x^2+y^2+z^2$.

9.233. $u=r=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$. **9.234.** $u=\frac{1}{r}=\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$.

9.235. $u=\frac{1}{r^2}=\frac{1}{x^2+y^2+z^2}$. **9.236.** $u=ax^2+2bxy+cy^2$.

9.237. $u=a_{11}x^2+a_{22}y^2+a_{33}z^2+2a_{12}xy+2a_{13}xz+2a_{23}yz$.

4. Оператор Гамильтона и его применение

В преобразованиях, связанных с основными операциями векторного анализа (градиент, дивергенция, ротор), часто бывает удобным использование *оператора Гамильтона* — символического вектора ∇ (читается: *набла*):

$$\nabla=\mathbf{i}\frac{\partial}{\partial x}+\mathbf{j}\frac{\partial}{\partial y}+\mathbf{k}\frac{\partial}{\partial z}.$$

Преобразуя выражения, содержащие оператор ∇, входящий в произведения векторов на скаляры, скалярные и векторные произведения векторов, этот оператор рассматривают одновременно и как вектор, и как дифференциальный оператор. Основные операции векторного анализа выражаются с помощью оператора Гамильтона следующим образом:

$$\operatorname{grad} u = \mathbf{i}\frac{\partial}{\partial x}u + \mathbf{j}\frac{\partial}{\partial y}u + \mathbf{k}\frac{\partial}{\partial z}u = \nabla u,$$

$$\operatorname{div}\mathbf{a} = \frac{\partial}{\partial x}a_x + \frac{\partial}{\partial y}a_y + \frac{\partial}{\partial z}a_z = (\nabla, \mathbf{a}),$$

$$\operatorname{rot}\mathbf{a} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ a_x & a_y & a_z \end{vmatrix} = [\nabla, \mathbf{a}].$$

ПРИМЕР 9.23. Найти $\operatorname{rot}(u\mathbf{a})$, используя операции векторного анализа над скалярным полем u и векторным полем $\mathbf{a}$.

◄ Применяя оператор ∇, запишем $\operatorname{rot}(u\mathbf{a}) = [\nabla, u\mathbf{a}]$. В последнем выражении дифференциальный оператор ∇ «действует» на произведение $u\mathbf{a}$, поэтому из правила дифференцирования произведения получаем

$$[\nabla, u\mathbf{a}] = [\nabla, \overset{\downarrow}{u}\mathbf{a}] + [\nabla, u\overset{\downarrow}{\mathbf{a}}]$$

(стрелка указывает множитель, на который «действует» ∇). Далее,

$$[\nabla, \overset{\downarrow}{u}\mathbf{a}] = -[\mathbf{a}, \nabla u] = -[\mathbf{a}, \operatorname{grad} u] = [\operatorname{grad} u, \mathbf{a}],$$

поскольку вектор $\mathbf{a}$, на который оператор ∇ не «действует», можно поставить перед ∇, но при этом поменяется порядок сомножителей векторного произведения и оно изменит знак. Аналогично,

$$[\nabla, u\overset{\downarrow}{\mathbf{a}}] = [u\nabla, \mathbf{a}] = u[\nabla, \mathbf{a}] = u\operatorname{rot}\mathbf{a}.$$

Окончательно имеем $\operatorname{rot}(u\mathbf{a}) = [\operatorname{grad} u, \mathbf{a}] + u \operatorname{rot} \mathbf{a}$. ►

ПРИМЕР 9.24. Найти $\operatorname{div}\operatorname{grad} u$.

◄ С помощью оператора Гамильтона находим

$$\operatorname{div}\operatorname{grad} u = (\nabla, \nabla u) = (\nabla, \nabla)u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}.$$

Таким образом, скалярный квадрат ∇^2 вектора набла есть оператор Лапласа Δ (см. задачу 9.225) и $\operatorname{div}\operatorname{grad} u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = \Delta u$. ►

В задачах 9.238–9.249, применяя оператор Гамильтона, преобразовать указанные выражения (u, v — скалярные, $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ — векторные поля, $\mathbf{c}$ — постоянный вектор).

9.238. $\operatorname{grad}(uv)$. **9.239.** $\operatorname{div}(\mathbf{c}u)$. **9.240.** $\operatorname{div}(\mathbf{a}u)$.
9.241. $\operatorname{div}[\mathbf{a}, \mathbf{c}]$. **9.242.** $\operatorname{div}[\mathbf{a}, \mathbf{b}]$. **9.243.** $\operatorname{rot}(\mathbf{c}u)$.
9.244. $\operatorname{rot}(\mathbf{a}u)$. **9.245.** $\operatorname{rot}\operatorname{grad} u$. **9.246.** $\operatorname{div}\operatorname{rot}\mathbf{a}$.
9.247. $\operatorname{rot}\operatorname{rot}\mathbf{a}$. **9.248.** $\operatorname{div}\operatorname{grad} uv$. **9.249.** $\operatorname{rot}\operatorname{rot}(u\mathbf{c})$.

ГЛАВА 10

РЯДЫ

§ 10.1. ЧИСЛОВЫЕ РЯДЫ

1. Сходимость числового ряда. Критерий Коши

Пусть $\{u_n\}$ — бесконечная последовательность действительных или комплексных чисел. Выражение

$$u_1 + u_2 + \ldots + u_n + \ldots = \sum_{n=1}^{\infty} u_n \qquad (10.1)$$

называется *числовым рядом*. Слагаемые u_n называют *членами* числового ряда, а суммы $S_1 = u_1$, $S_2 = u_1 + u_2$, …, $S_n = u_1 + u_2 + \ldots + u_n = \sum_{k=1}^{n} u_k$, … — его *частичными суммами*. Если последовательность частичных сумм сходится: $\lim_{n\to\infty} S_n = S$, то ряд (10.1) называется *сходящимся*, а число S — его *суммой*. Если же последовательность $\{S_n\}$ расходится, то и ряд (10.1) называют *расходящимся*. Нумерация членов числового ряда может начинаться с любого целого числа, в том числе $n = 0$.

ПРИМЕР 10.1. Доказать, что ряд $\sum_{n=0}^{\infty} aq^n$ (*сумма бесконечной геометрической прогрессии*) при $|q| < 1$ сходится, и найти его сумму.

◄ Найдем частичные суммы S_n данного ряда:

$$S_n = a + aq + \ldots + aq^n = \frac{a}{1-q}(1 + q + \ldots + q^n)(1-q) =$$

$$= \frac{a}{1-q}(1 + q + \ldots + q^n - q - q^2 - \ldots - q^{n+1}) = \frac{a}{1-q}(1 - q^{n+1}).$$

При условии $|q| < 1$ имеем $\lim_{n\to\infty} S_n = \frac{a}{1-q}\left(1 - \lim_{n\to\infty} q^{n+1}\right) = \frac{a}{1-q}$. Это означает, что рассматриваемый числовой ряд сходится и его сумма S равна $\frac{a}{1-q}$. ►

ПРИМЕР 10.2. Доказать сходимость ряда $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2 - 1/4}$ и найти его сумму.

◀ Поскольку $\dfrac{1}{n^2-1/4}=\dfrac{1}{(n-1/2)(n+1/2)}=\dfrac{1}{n-1/2}-\dfrac{1}{n+1/2}$, частичные суммы ряда равны

$$S_n=\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{n-1/2}-\frac{1}{n+1/2}\right)=$$
$$=\frac{1}{1/2}-\frac{1}{3/2}+\frac{1}{3/2}-\frac{1}{5/2}+\frac{1}{5/2}-\frac{1}{7/2}+\ldots+\frac{1}{(2n-1)/2}-\frac{1}{(2n+1)/2}=2-\frac{1}{(2n+1)/2}.$$

Отсюда $\lim\limits_{n\to\infty}S_n=2$, т. е. данный ряд сходится и его сумма $S = 2$. ▶

ПРИМЕР 10.3. Исследовать сходимость рядов:

а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}1=1+1+\ldots$; б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n=-1+1-1+\ldots$.

◀ а) Последовательность частичных сумм $S_n = n$ ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty}1$ неограниченно возрастает. Следовательно, этот ряд расходится.

б) Частичная сумма S_n ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n$ равна 0, если n — четное число и 1, если n нечетно. Это означает, что последовательность $\{S_n\}$ не имеет предела и данный ряд расходится. ▶

КРИТЕРИЙ КОШИ. *Для того чтобы числовой ряд (10.1) сходился, необходимо и достаточно, чтобы для любого* $\varepsilon > 0$ *существовало такое число* $N = N(\varepsilon)$, *что*

$$|S_{n+p}-S_n|=|u_{n+1}+u_{n+2}+\ldots+u_{n+p}|<\varepsilon$$

при всех $n > N$ *и* $p = 1, 2, \ldots$.

НЕОБХОДИМЫЙ ПРИЗНАК СХОДИМОСТИ. *Если числовой ряд (10.1) сходится, то*

$$\lim_{n\to\infty}u_n=0. \tag{10.2}$$

Из необходимого признака следует, что *если условие (10.2) не выполняется, то ряд (15.1) расходится* (см. пример 10.3). *При выполнении условия (10.2) ряд (10.1) может сходиться или расходиться*, так как этот признак не является достаточным.

ПРИМЕР 10.4. Показать, что несмотря на выполнение необходимого признака сходимости, ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\ln\left(1+\dfrac{1}{n}\right)$ расходится.

◀ Члены этого ряда $u_n=\ln\left(1+\dfrac{1}{n}\right)$ совпадают со значениями функции $y=\ln x$ в точках $x=x_n=1+\dfrac{1}{n}$. Заметим, что $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=1$. Поэтому, с учетом непрерывности функции $y = \ln x$ в точке $x = 1$, имеем $\lim\limits_{n\to\infty}u_n=\lim\limits_{n\to\infty}\ln x_n=\ln 1=0$. Таким образом, необходимый признак сходимости числового ряда в данном случае выполняется. Однако последовательность частичных сумм $S_n=\sum\limits_{k=1}^{n}\ln\left(1+\dfrac{1}{k}\right)=\sum\limits_{k=1}^{n}(\ln(1+k)-\ln k)=\ln(1+n)$ неограниченно возрастает, следовательно рассматриваемый числовой ряд расходится. ▶

ПРИМЕР 10.5. Исследовать сходимость *гармонического ряда* $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$.

◀ Необходимый признак сходимости для данного ряда выполняется, но это не дает окончательного ответа на вопрос о его сходимости. Воспользуемся критерием Коши. Для $n = p$ имеем

$$S_{n+p} - S_n = S_{2n} - S_n = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \ldots + \frac{1}{2n} > \frac{1}{2n} + \frac{1}{2n} + \ldots + \frac{1}{2n} = n\frac{1}{2n} = \frac{1}{2},$$

т. е. для гармонического ряда критерий Коши не выполняется и этот ряд расходится. ▶

В задачах 10.1–10.5 доказать сходимость числовых рядов и найти их суммы.

10.1. $\frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{2\cdot 3} + \frac{1}{3\cdot 4} + \ldots = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)}$.

10.2. $\frac{1}{1\cdot 4} + \frac{1}{4\cdot 7} + \frac{1}{7\cdot 10} + \ldots = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(3n-2)(3n+1)}$.

10.3. $1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{4} - \frac{1}{8} + \ldots = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{2^{n-1}}$.

10.4. $\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{3}\right) + \left(\frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2}\right) + \left(\frac{1}{2^3} + \frac{1}{3^3}\right) + \ldots = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{2^n} + \frac{1}{3^n}\right)$.

10.5. $\sum_{n=1}^{\infty} (\sqrt{n+2} - 2\sqrt{n+1} + \sqrt{n})$.

В задачах 10.6–10.12 исследовать сходимость числовых рядов, используя критерий Коши или необходимый признак сходимости.

10.6. $0{,}02 + \sqrt{0{,}02} + \sqrt[3]{0{,}02} + \sqrt[4]{0{,}02} + \ldots = \sum_{n=1}^{\infty} \sqrt[n]{0{,}02}$.

10.7. $\frac{1}{101} + \frac{1}{201} + \frac{1}{301} + \ldots = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{100n+1}$.

10.8. $\frac{1}{2} + \frac{2}{3} + \frac{3}{4} + \ldots = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{n+1}$.

10.9. $\frac{2^1}{1^{10}} + \frac{2^2}{2^{10}} + \frac{2^3}{3^{10}} + \ldots = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{n^{10}}$.

10.10. $\frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \ldots = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!}$.

10.11. $\frac{\sin 1}{3^1} + \frac{\sin 2}{3^2} + \frac{\sin 3}{3^3} + \ldots = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin n}{3^n}$.

10.12. $\frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \ldots = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$.

В задачах 10.13–10.15 доказать утверждения.

10.13. Отбрасывание или изменение конечного числа членов числового ряда не влияет на его сходимость или расходимость.

10.14. Умножение всех членов числового ряда на одно и то же число $c \neq 0$ не влияет на его сходимость.

10.15. Если ряды $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ и $\sum\limits_{n=1}^{\infty} v_n$ сходятся и их суммы равны S_1 и S_2 соответственно, то сходится и ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (u_n \pm v_n)$, причем его сумма равна $S_1 \pm S_2$.

2. Абсолютная сходимость. Признаки сходимости рядов с неотрицательными членами

Числовой ряд (10.1) называется *абсолютно сходящимся*, если сходится ряд

$$|u_1| + |u_2| + \ldots + |u_n| + \ldots = \sum_{n=1}^{\infty} |u_n|, \tag{10.3}$$

составленный из абсолютных величин членов исходного ряда (10.1).

Абсолютно сходящийся ряд сходится. Обратное, вообще говоря, неверно.

Если ряд (10.1) сходится, а ряд (10.3) расходится, то ряд (10.1) называют *условно сходящимся*.

Поскольку члены ряда (10.3) неотрицательны, при исследовании абсолютной сходимости обычно используют признаки сходимости рядов с неотрицательными членами.

ПРИЗНАК СРАВНЕНИЯ. *Пусть существует такое натуральное число N, что члены рядов $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ и $\sum\limits_{n=1}^{\infty} v_n$ для всех $n \geq N$ удовлетворяют неравенствам*

$$0 \leq u_n \leq v_n.$$

Тогда, если ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} v_n$ сходится, то ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ также сходится. Если же ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ расходится, то расходится и ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} v_n$.

ПРИМЕР 10.6. Исследовать сходимость ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{n^2}$.

◀ Известно, что ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{n^2 - 1/4}$ сходится, см. пример 10.2. Кроме того,

$$0 < \frac{1}{n^2} < \frac{1}{n^2 - 1/4}$$

для $n \geq 1$. В соответствии с признаком сравнения отсюда следует, что ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{n^2}$ сходится. ▶

ПРИМЕР 10.7. Исследовать сходимость ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{n}{n^2 - 1/2}$.

◀ Известно, что гармонический ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ расходится (см. пример 10.5). Далее, $\frac{n}{n^2-1/2}=\frac{1}{n-1/2n}>\frac{1}{n}>0$ для $n\geq 1$ или $0<\frac{1}{n}<\frac{n}{n^2-1/2}$, откуда с учетом признака сравнения следует, что ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{n^2-1/2}$ расходится. ▶

ПРЕДЕЛЬНЫЙ ПРИЗНАК СРАВНЕНИЯ. *Если члены рядов* $\sum_{n=1}^{\infty}u_n$ *и* $\sum_{n=1}^{\infty}v_n$ *с положительными членами удовлетворяют условию*

$$0<\lim_{n\to\infty}\frac{u_n}{v_n}<+\infty,$$

то эти ряды либо оба сходятся, либо оба расходятся.

ПРИМЕР 10.8. Исследовать сходимость ряда $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^3}{2n^5-1}$ с помощью предельного признака сравнения.

◀ Известно, что ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$ сходится (см. пример 10.6). Кроме того,

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n^3}{2n^5-1}:\frac{1}{n^2}\right)=\lim_{n\to\infty}\frac{n^5}{2n^5-1}=\frac{1}{2},$$

поэтому сходится и ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^3}{2n^5-1}$. ▶

Применив предельный признак сравнения к исследуемому ряду $\sum_{n=1}^{\infty}u_n$ и *ряду Дирихле* $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^p}$ (см. пример 10.11), получаем следующий результат: *если для ряда* $\sum_{n=1}^{\infty}u_n$ *с положительными членами выполняется условие*

$$0<\lim_{n\to\infty}\left(u_n:\frac{1}{n^p}\right)<+\infty,$$

то при $p>1$ *этот ряд сходится, а при* $p\leq 1$ *— расходится.*

ПРИМЕР 10.9. С помощью сравнения с рядом Дирихле исследовать сходимость ряда $\sum_{n=1}^{\infty}\sin\frac{5}{n+2}$.

◀ Используя первый замечательный предел, находим

$$\lim_{n\to\infty}\left(\sin\frac{5}{n+2}:\frac{1}{n}\right)=\lim_{n\to\infty}\frac{\sin\left(\frac{5}{n+2}\right)}{\frac{5}{n+2}}\cdot\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{5}{n+2}}{\frac{1}{n}}=1\cdot\lim_{n\to\infty}\frac{5n}{n+2}=5,$$

т. е. в данном случае $p=1$. Это означает, что ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\sin\frac{5}{n+2}$ расходится. ▶

В задачах 10.16–10.31 исследовать сходимость рядов, используя подходящие признаки сравнения, а также сравнение с рядом Дирихле.

10.16. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2n-1}$. **10.17.** $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{2n+1}}$.

10.18. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(3n+2)^2}$. **10.19.** $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n}{7n^3-3}$.

10.20. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{(n+1)(n+2)(n+3)}}$. **10.21.** $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\sin\frac{2\pi}{3n-2}$.

10.22. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{\sin^6 n!}{n^2}$. **10.23.** $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n^3-n+1}{n^6+n^4-n^2+1}$.

10.24. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}n^3\operatorname{tg}^4\frac{\pi}{n}$. **10.25.** $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\sqrt{n^3}\operatorname{arctg}^3\frac{\pi}{n}$.

10.26. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{3\cos\frac{2\pi}{n}}{\sqrt[5]{n^5+1}}$. **10.27.** $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\ln\frac{n^2+3}{n^2+2}$.

10.28. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{2^n+\sin n}{3^n-\cos n}$. **10.29.** $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{\ln n}{n^2\sqrt{n}}$.

10.30. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}e^{-n^2+n}$. **10.31.** $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{2^n}{(n^2+1)3^n}$.

Для исследования рядов с положительными членами используют и другие признаки сходимости.

ПРИЗНАК ДАЛАМБЕРА. *Если* $u_n > 0$, $n = 1, 2, \ldots$, *и*

$$\lim_{n\to\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n}=q,$$

то при $q < 1$ *ряд* $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$ *сходится, а при* $q > 1$ *— расходится.*

ПРИЗНАК КОШИ. *Если* $u_n \ge 0$, $n = 1, 2, \ldots$, *и*

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{u_n}=q,$$

то при $q < 1$ *ряд* $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$ *сходится, а при* $q > 1$ *— расходится.*

При использовании признака Коши бывает полезна *формула Стирлинга*:

$$n!=\sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{e}\right)^n e^{\frac{\theta}{12n}},\ \ 0<\theta<1.$$

В случае $q = 1$ признаки Даламбера и Коши не дают ответа на вопрос о сходимости ряда и требуется дополнительное исследование.

ПРИМЕР 10.10. Исследовать сходимость ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n!}{n^n}$, используя признаки Даламбера и Коши.

◀ По признаку Даламбера с использованием второго замечательного предела получаем $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{(n+1)!\cdot n^n}{(n+1)^{n+1}\cdot n!}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n^n}{(n+1)^n}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n}=\frac{1}{e}<1$, т. е. ряд сходится.

В соответствии с признаком Коши и с учетом формулы Стирлинга находим

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{u_n}=\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\frac{n!}{n^n}}=\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\frac{\sqrt{2\pi n}(n/e)^n e^{\frac{\theta}{12n}}}{n^n}}=\frac{1}{e}\lim_{n\to\infty}(2\pi n)^{\frac{1}{2n}}e^{\frac{\theta}{12n^2}}=\frac{1}{e}<1,$$

т. е. и по признаку Коши рассматриваемый ряд сходится. ▶

В задачах 10.32–10.43 исследовать сходимость рядов, используя признак Даламбера.

10.32. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n^n}{3^n n!}$.

10.33. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n^{10}}{(n+1)!}$.

10.34. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{3^n}{(n-1)!}\sqrt[3]{n^2}$.

10.35. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{5^n(n^2+1)}{n!}$.

10.36. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{4^n(n+2)!}{(2n)!}$.

10.37. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(n!)^2}{2^{n^2}}$.

10.38. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{e^n}{2^n}\arccos\frac{1}{n^2}$.

10.39. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1\cdot 4\cdot 7\cdot\ldots\cdot(3n-2)}{5\cdot 7\cdot 9\cdot\ldots\cdot(2n+3)}$.

10.40. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(3^n-1)(4^n+1)}{(2^n+1)(5^n-1)}$.

10.41. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n^n}{(n!)^2}$.

10.42. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{13^{2n}}{(3n-1)!}$.

10.43. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1\cdot 3\cdot 5\cdot\ldots\cdot(2n-1)}{2^{2n}(n-1)!}$.

В задачах 10.44–10.53 исследовать сходимость рядов, используя признак Коши.

10.44. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}n^3\left(\frac{2n}{4n+5}\right)^n$.

10.45. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n+1}{3n-2}\right)^{2n-1}$.

10.46. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\frac{3n-2}{5n+4}\right)^{n^2}$.

10.47. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^n}\left(\frac{n+1}{n}\right)^{n^2}$.

10.48. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}n^n\,\mathrm{tg}^n\left(\frac{\pi}{n}\right)$.

10.49. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}n^n\sin^n\left(\frac{1}{\pi n}\right)$.

10.50. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(2{,}7)^{n+1}e^{-n+1}$.

10.51. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n^n(n+1)^{n+1}}{(2n)^{2n}}$.

10.52. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}2^{n+1}n\left(\frac{n-1}{n}\right)^n$.

10.53. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n^2}{\left(2+\frac{1}{n}\right)^n}$.

Одним из важных средств исследования рядов с положительными членами является

ИНТЕГРАЛЬНЫЙ ПРИЗНАК КОШИ. *Пусть функция* $f(x)$ *неотрицательна и не возрастает при* $x \in [1, +\infty)$. *Тогда ряд* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f(n)$ *сходится или расходится одновременно с несобственным интегралом* $\int\limits_{1}^{+\infty} f(x)dx$.

ПРИМЕР 10.11. Выяснить, при каких значениях параметра p сходится ряд Дирихле $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$.

◀ Если $p \le 0$, то ряд Дирихле расходится, так как не выполняется необходимое условие сходимости (10.2). При $p > 0$ функция $f(x) = \frac{1}{x^p}$ удовлетворяет условиям интегрального признака Коши. Поэтому исследование сходимости ряда Дирихле сводится к исследованию сходимости интеграла $\int\limits_{1}^{+\infty} \frac{dx}{x^p}$:

$$\int\limits_{1}^{+\infty} \frac{dx}{x^p} = \lim_{A \to +\infty} \int\limits_{1}^{A} \frac{dx}{x^p} = \begin{cases} \lim\limits_{A \to +\infty} \ln A = +\infty \quad \text{при } p = 1, \\ \lim\limits_{A \to +\infty} \left(\dfrac{A^{1-p}}{1-p} - \dfrac{1}{1-p} \right) = +\infty \quad \text{при } 0 < p < 1, \\ \lim\limits_{A \to +\infty} \left(\dfrac{1}{p-1} - \dfrac{1}{(p-1)A^{p-1}} \right) = \dfrac{1}{1-p} \quad \text{при } p > 1. \end{cases}$$

Таким образом, ряд Дирихле сходится, если $p > 1$, и расходится при $p \le 1$. ▶

В задачах 10.54–10.63 исследовать сходимость рядов, используя интегральный признак Коши.

10.54. $\sum\limits_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n \ln^2 n}$. **10.55.** $\sum\limits_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n \sqrt{\ln n}}$. **10.56.** $\sum\limits_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n \ln n}$.

10.57. $\sum\limits_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n \ln n (\ln \ln n)^2}$. **10.58.** $\sum\limits_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n \ln^{\beta} n}$. **10.59.** $\sum\limits_{n=3}^{\infty} \frac{1}{n \ln n (\ln \ln n)^{\gamma}}$.

10.60. $\sum\limits_{n=4}^{\infty} \frac{1}{(n-3)\ln^2(n+1)}$. **10.61.** $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2n \sqrt[3]{\ln^2(3n-1)}}$.

10.62. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n-1}{(n^2+1)\ln^3(n+1)}$. **10.63.** $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n^2+1}{(n^3+2)\ln(n+1)}$.

В задачах 10.64–10.84 исследовать сходимость рядов.

10.64. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n-1}{n^2+n+1} \right)^2$. **10.65.** $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}} \ln \frac{n+1}{n}$.

10.66. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n^{10}}{2^n}$. **10.67.** $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{n!}$.

10.68. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n}{n+1} \right)^n$. **10.69.** $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n^2+n-1}{n^4+n^2+1}$.

10.70. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{n^n}{(2n+1)^{n-1}}$.

10.71. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\dfrac{n-2}{n}\right)^{n^2}$.

10.72. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{\sqrt{n+1}-\sqrt{n-1}}{n}$.

10.73. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\dfrac{n-1}{n+1}\right)^{n(n-1)}$.

10.74. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(n!)^2}{(2n)!}$.

10.75. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\sin\left(\dfrac{\pi}{n^2}\right)$.

10.76. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\ln\left(1+\dfrac{2}{n^2}\right)$.

10.77. $\sum\limits_{n=3}^{\infty}\dfrac{1}{n\ln n\,(\ln\ln n)^3}$.

10.78. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{3^n n!}{n^n}$.

10.79. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1\cdot 4\cdot 7\cdot\ldots\cdot(3n-2)}{7\cdot 11\cdot 15\cdot\ldots\cdot(4n+3)}$.

10.80. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\dfrac{2n+1}{3n+1}\right)^n$.

10.81. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\dfrac{n}{n+1}\right)^n$.

10.82. $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\dfrac{\sqrt{n}-\sqrt[3]{n}}{n^2-1}$.

10.83. $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\dfrac{1}{n(\sqrt{n}-\sqrt[3]{n})}$.

10.84. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{\sqrt[3]{n}}{(2n+1)(3\sqrt{n}-1)}$.

3. Сходимость рядов с произвольными членами

ПРИЗНАК ЛЕЙБНИЦА. *Если члены знакочередующегося ряда*

$$v_1-v_2+v_3-v_4+\ldots=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}v_n \quad (v_n\ge 0,\ n=1,2,\ldots)$$

удовлетворяют требованиям:

а) *последовательность* $\{v_n\}$ *не возрастает* $(v_1\ge v_2\ge\ldots\ge v_n\ge\ldots)$;

б) $\lim\limits_{n\to\infty}v_n=0$,

то этот ряд сходится.

ПРИМЕР 10.12. Исследовать сходимость знакочередующегося ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\dfrac{1}{n}$.

◄ Члены этого ряда удовлетворяют условиям признака Лейбница:

$$v_n=\frac{1}{n}>\frac{1}{n+1}=v_{n+1} \text{ и } \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}=0,$$

поэтому он сходится. В то же время ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n}$, составленный из абсолютных величин членов рассматриваемого ряда, расходится, см. пример 10.5. Таким образом, ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\dfrac{1}{n}$ сходится условно. ►

ПРИЗНАК ДИРИХЛЕ. *Если последовательность* $\{a_n\}$ *является невозрастающей и бесконечно малой, т. е.* $a_1 \geq a_2 \geq \ldots \geq a_n \geq \ldots$ *и* $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$, *а частичные суммы ряда* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ *ограничены в совокупности:* $\left|\sum\limits_{k=1}^{n} b_k\right| \leq M$ *для всех* $n \in \mathbb{N}$, *то ряд* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n b_n$ *сходится.*

ПРИМЕР 10.13. Исследовать сходимость ряда

$$1+\frac{1}{2}-\frac{2}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}-\frac{2}{6}+\ldots+\frac{1}{3n-2}+\frac{1}{3n-1}-\frac{2}{3n}+\ldots.$$

◄ Положим $a_n = \dfrac{1}{n}$; $b_1 = 1, b_2 = 1, b_3 = -2, b_4 = 1, b_5 = 1, b_6 = -2, \ldots$. Тогда рассматриваемый ряд представляется в виде $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n b_n$. При этом последовательность $\{a_n\}$ не возрастает и является бесконечно малой. А ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ обладает ограниченной последовательностью частичных сумм: $S_1 = 1$, $S_1 = 2$, $S_3 = 0$, $S_4 = 1$, $S_5 = 2$, $S_6 = 0, \ldots$. Таким образом, согласно признаку Дирихле, рассматриваемый ряд сходится. ►

ПРИМЕР 10.14. Исследовать сходимость ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{\sin n\alpha}{n}$, $\alpha \in \mathbb{R}$.

◄ Если $\alpha = 2m\pi$, $m \in \mathbb{Z}$, то все члены ряда равны нулю и он сходится. При $\alpha \neq 2m\pi$ имеем

$$\sum_{k=1}^{n}\sin k\alpha = \frac{1}{2\sin\frac{\alpha}{2}}\sum_{k=1}^{n}2\sin\frac{\alpha}{2}\sin k\alpha = \frac{1}{2\sin\frac{\alpha}{2}}\sum_{k=1}^{n}\left[\cos\left(k-\frac{1}{2}\right)\alpha-\cos\left(k+\frac{1}{2}\right)\alpha\right]=$$

$$=\frac{\cos\frac{\alpha}{2}-\cos\left(n+\frac{1}{2}\right)\alpha}{2\sin\frac{\alpha}{2}},$$

откуда $\left|\sum\limits_{k=1}^{n}\sin k\alpha\right| \leq \dfrac{2}{2\sin\frac{\alpha}{2}} = \dfrac{1}{\sin\frac{\alpha}{2}}$, $n \in \mathbb{N}$. Это означает ограниченность в совокупности частичных сумм ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\sin n\alpha$. Далее, последовательность $\left\{\dfrac{1}{n}\right\}$ является невозрастающей и бесконечно малой. Таким образом, при $\alpha \neq 2m\pi$, $m \in \mathbb{Z}$, выполнены все требования признака Дирихле, поэтому ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{\sin n\alpha}{n}$ сходится. Следовательно, этот ряд сходится при всех $\alpha \in \mathbb{R}$. ►

В задачах 10.85–10.112 исследовать числовые ряды на абсолютную и условную сходимость.

10.85. $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{1}{5n-1}$.

10.86. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{\sqrt{n^3}}$.

10.87. $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{n}{10n-1}$.

10.88. $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\left(\frac{2n+1}{3n-2}\right)^n$.

10.89. $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{4\cdot 7\cdot 10\cdot\ldots\cdot(3n+1)}{4\cdot 6\cdot 8\cdot\ldots\cdot(2n+2)}$.

10.90. $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{\ln n}{n}$.

10.91. $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{4\cdot 6\cdot 8\cdot\ldots\cdot(2n+2)}{4\cdot 7\cdot 10\cdot\ldots\cdot(3n+1)}$.

10.92. $\sum_{n=2}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{n\ln n}$.

10.93. $\sum_{n=2}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{n\ln^2 n}$.

10.94. $\sum_{n=3}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{n\ln n\ln\ln n}$.

10.95. $\sum_{n=3}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{n\ln n(\ln\ln n)^{4/3}}$.

10.96. $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{1}{n^{\alpha}}$.

10.97. $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{n^3}{3^n}$.

10.98. $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{1}{n+\ln n}$.

10.99. $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{2^{n^2}}{n!}$.

10.100. $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\left(\frac{2n+1}{n^2+2}\right)^2$.

10.101. $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\left(\frac{n}{n+1}\right)^{n^2}$.

10.102. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n+\cos\frac{1}{n}}$.

10.103. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{\sqrt{n}+\sin^2 n}$.

10.104. $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\left(1-\sin\frac{1}{n}\right)$.

10.105. $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{n^n}{(2n+1)!}$.

10.106. $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{\sin(n\sqrt{n})}{n\sqrt{n}}$.

10.107. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{\ln(n+1)}$.

10.108. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n\operatorname{tg}\frac{1}{n}}{\operatorname{arctg}(n+1)}$.

10.109. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}+\left(\frac{3}{2}\right)^n}$.

10.110. $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{n^2+n+1}{n^4+n^2+1}$.

10.111. $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{\sin\left(1+\frac{1}{n}\right)}{\left(1+\frac{1}{n^2}\right)}$.

10.112. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin\frac{\pi n}{2}}{n}$.

10.113. Доказать, что признак Лейбница является частным случаем признака Дирихле.

В задачах 10.114–10.122 исследовать сходимость рядов.

10.114. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{\sin\frac{\pi n}{4}}{n}$. **10.115.** $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{\sin\frac{\pi n}{7}}{\sqrt{n}}$.

10.116. $1-1+\dfrac{1}{3}+\dfrac{1}{2}-\dfrac{2}{3}+\dfrac{1}{4}+\ldots+\dfrac{1}{n}-\dfrac{2}{n+1}+\dfrac{1}{n+2}+\ldots$.

10.117. $1-\dfrac{1}{2}-\dfrac{1}{3}+\dfrac{1}{4}+\dfrac{1}{2}-\dfrac{1}{3}-\dfrac{1}{4}+\dfrac{1}{5}+\ldots+\dfrac{1}{n}-\dfrac{1}{n+1}-\dfrac{1}{n+2}+\dfrac{1}{n+3}+\ldots$.

10.118. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{\cos n\alpha}{n}$, $\alpha \in \mathbb{R}$. **10.119.** $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{\cos\frac{3n}{5}}{\ln n}$.

10.120. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{\sin n^2}{n^2}$. **10.121.** $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{\cos 5n}{3n+\sin n}$.

10.122. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{\sin 3{,}14n}{n+\ln n}$.

§ 10.2. ФУНКЦИОНАЛЬНЫЕ РЯДЫ

1. Область сходимости функционального ряда

Пусть $\{f_n(x)\}$ — бесконечная последовательность функций, заданных на множестве $G \subset \mathbb{R}$. Выражение

$$f_1(x)+f_2(x)+\ldots+f_n(x)+\ldots=\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x) \tag{10.4}$$

называют *функциональным рядом*.

Если числовой ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n(x_0)$, $x_0 \in G$ сходится, то говорят, что функциональный ряд (10.4) *сходится в точке* x_0. Множество $D \subset G$ всех точек, в которых функциональный ряд (10.4) сходится, называется *областью сходимости* этого ряда. Аналогично определяются *области абсолютной* и *условной сходимости* функционального ряда (10.4). В области сходимости D ряда (10.4) определена функция $S(x)$ — сумма этого ряда.

Таким образом, функциональный ряд (10.4) сходится на множестве D к функции $S(x)$, если для любых $\varepsilon > 0$ и $x \in D$ существует такой номер $N = N(x, \varepsilon)$, что при $n > N$ для *остатка ряда* $R_n(x) = S(x) - \sum\limits_{k=1}^{n} f_k(x) = \sum\limits_{k=n+1}^{\infty} f_k(x)$ выполняется неравенство

$$|R_n(x)| < \varepsilon.$$

КРИТЕРИЙ КОШИ. *Для того чтобы числовой ряд (10.4) сходился в области D, необходимо и достаточно, чтобы для любого $\varepsilon > 0$ и любого $x \in D$ существовал такой номер $N = N(\varepsilon, x)$, что*

$$|f_{n+1}(x)+f_{n+2}(x)+\ldots+f_{n+p}(x)| = \left|\sum_{k=n+1}^{n+p} f_k(x)\right| < \varepsilon$$

при всех $n > N$ и $p \in \mathbb{N}$.

ПРИМЕР 10.15. Найти области сходимости и абсолютной сходимости ряда

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^x}.$$

◀ При $x \le 0$ не выполняется необходимый признак сходимости (10.2), поэтому данный ряд расходится. При $x > 0$ этот ряд сходится согласно признаку Лейбница. При $x > 1$ ряд сходится абсолютно в соответствии с интегральным признаком Коши (см. пример 10.11). Таким образом, областью сходимости рассматриваемого ряда является интервал $(0; +\infty)$, а областью абсолютной сходимости — интервал $(1; +\infty)$. ▶

Для определения области сходимости функционального ряда (10.4) во многих случаях возможно использование следующего алгоритма, основанного на признаке Даламбера или признаке Коши.

1. Найти предел $\lim\limits_{n\to\infty}\left|\dfrac{f_{n+1}(x)}{f_n(x)}\right| = q(x)$ или $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{|f_n(x)|} = q(x)$.

2. Решив неравенство $q(x) < 1$, найти область, в которой ряд (10.4) сходится абсолютно (при $q(x) > 1$ этот ряд расходится).

3. Провести дополнительное исследование ряда в граничных точках полученной области (они удовлетворяют уравнению $q(x) = 1$).

4. С учетом результатов шагов 2 и 3 окончательно определить область сходимости D функционального ряда (10.4).

ПРИМЕР 10.16. Найти область сходимости ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^n}{10n+1}\left(\dfrac{1-x}{1+x}\right)^n$.

◀ Воспользуемся предложенным алгоритмом.

1. Находим предел $q(x) = \lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{\left|\dfrac{(-1)^n}{10n+1}\left(\dfrac{1-x}{1+x}\right)^n\right|} = \left|\dfrac{1-x}{1+x}\right|\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{\sqrt[n]{10n+1}} = \left|\dfrac{1-x}{1+x}\right|$.

2. Решаем неравенство $q(x) < 1$:

$$\left|\frac{1-x}{1+x}\right| < 1 \Leftrightarrow \begin{cases}\dfrac{1-x}{1+x} < 1,\\ \dfrac{1-x}{1+x} > -1\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}\dfrac{-2x}{1+x} < 0,\\ \dfrac{2}{1+x} > 0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x \in (-\infty; -1)\cup(0; +\infty)\\ x \in (-1; +\infty)\end{cases} \Leftrightarrow x \in (0; +\infty).$$

Таким образом, ряд сходится абсолютно при $x \in (0; +\infty)$.

3. В граничной точке $x = 0$ найденной области получаем знакочередующийся числовой ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^n}{10n+1}$, который сходится условно.

4. Таким образом, областью сходимости рассматриваемого ряда является полуинтервал $D = [0; +\infty)$, а областью абсолютной сходимости — интервал $(0; +\infty)$. ▶

В задачах 10.123–10.149 найти области сходимости и абсолютной сходимости рядов.

10.123. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{\sin nx}{n\sqrt{n}}$.

10.124. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{n!}{x^n}$.

10.125. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{x^n}{n!}$.

10.126. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{(x+2)^n}$.

10.127. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^n}{\sqrt{n}}\left(\dfrac{1+x}{1-x}\right)^n$.

10.128. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}n^x$.

10.129. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} x^n \sin\dfrac{x}{3^n}$.

10.130. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{\ln^n x}{n}$.

10.131. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{2^{nx}}{n^2+x^2}$.

10.132. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^n \dfrac{2n-1}{n^2+1}(x+1)^n$.

10.133. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \sin\left(\dfrac{\sqrt{n-1}}{n^2+1}\right)(x-2)^n$.

10.134. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \ln^2\left(1+\dfrac{x^2}{\sqrt[3]{n^2}}\right)$.

10.135. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(\dfrac{x}{\sqrt{n}+|x|}\right)^n x^{n+1}$.

10.136. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(\dfrac{nx-1}{nx+1}\right)^n$.

10.137. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{(x-2)^n}{\sqrt{n}x^{2n}}$.

10.138. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^n \dfrac{n^2+1}{n^3(x^n+1)}$.

10.139. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{n+5}{n^3x^2+1}$.

10.140. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{n!x^2}{x^{3n}+1}$.

10.141. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (x^{2n}+3x^n)$.

10.142. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{n!}{n^{n+1}x^n}$.

10.143. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{x^{2n}}{x^{2n}+2}$.

10.144. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{x^n+3}{x^{3n}+5}$.

10.145. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} x^n \ln(\sqrt{n}x)$.

10.146. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (n^2+1)3^{-nx}$.

10.147. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{9^n}{2^n+x^{2n}}$.

10.148. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{2^n}{5^n+x^n}$.

10.149. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{x^{2n}}{\sqrt{n}(x-2)^n}$.

2. Равномерная сходимость функционального ряда

Говорят, что функциональный ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n(x)$, сходящийся в области D, *сходится равномерно* в этой области, если для любого $\varepsilon > 0$ найдется такой номер $N = N(\varepsilon)$, что при всех $n > N(\varepsilon)$ для остатка $R_n(x) = \sum\limits_{k=n+1}^{\infty} f_k(x)$ этого ряда справедливо неравенство

$$|R_n(x)| < \varepsilon$$

для всех $x \in D$. В противном случае указанный ряд сходится *неравномерно*.

Принципиальное отличие равномерной сходимости от неравномерной сходимости функционального ряда в области D следует из определений этих понятий. В случае равномерной сходимости оценка $|R_n(x)| < \varepsilon$, $n > N(\varepsilon)$, характеризующая приближение в точке x частичных сумм $\sum\limits_{k=1}^{n} f_k(x)$ к сумме ряда $S(x)$, выполняется для произвольного $\varepsilon > 0$ *при неизменном* $N(\varepsilon)$ *одновременно для всех точек* $x \in D$. Если же ряд сходится неравномерно, то хотя для любого $\varepsilon > 0$ в произвольной точке $x \in D$ и выполняется оценка $|R_n(x)| < \varepsilon$, $n > N(\varepsilon, x)$, однако найдется другая точка $\hat{x} \in D$, для которой подобная оценка справедлива, начиная с бóльшего номера: $n > N(\varepsilon, \hat{x}) = \hat{N}$, где $\hat{N} > N$.

ПРИМЕР 10.17. Доказать равномерную сходимость ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{n(n+1)}$ на всей числовой прямой $\mathbb{R}$.

◄ Оценим остаток ряда:

$$|R_n(x)| = \left|\sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{\sin kx}{k(k+1)}\right| \le \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{|\sin kx|}{k(k+1)} \le \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{1}{k(k+1)} =$$

$$= \sum_{k=n+1}^{\infty} \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}\right) = \frac{1}{n+1}, \ x \in \mathbb{R}.$$

Отсюда следует, что для произвольного $\varepsilon > 0$ неравенство $|R_n(x)| \le \frac{1}{n+1} < \varepsilon$ будет выполнено при всех $x \in \mathbb{R}$, если $n > N(\varepsilon) = \left[\frac{1}{\varepsilon}\right]$ ($[a]$ — целая часть числа a). Это означает равномерную сходимость указанного ряда на числовой прямой. ►

ПРИМЕР 10.18. Ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} x^n$ исследовать на равномерную сходимость в интервале $(0; 1)$. Найти наименьший номер $N = N(x, \varepsilon)$, начиная с которого модуль разности

$$\left|S(x) - \sum_{k=1}^{n} x^k\right| = |R_n(x)|$$

не превышает величины $\varepsilon = 0{,}001$, если $x = 0{,}9$, $x = 0{,}99$, $x = 0{,}999$, $x = 0{,}9999$.

◄ Согласно признаку Коши ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} x^n$ сходится абсолютно при всех $x \in (0; 1)$. Докажем, что он сходится *неравномерно* в интервале $(0; 1)$. Для этого нужно показать, что существует такое $\varepsilon > 0$, что для каждого числа N имеется по меньшей мере одно $n > N$ и $x_n \in D = (0; 1)$ такие, что $|R_n(x_n)| > \varepsilon$.

По формуле суммы бесконечной убывающей геометрической прогрессии найдем остаток ряда: $R_n(x) = \sum\limits_{k=n+1}^{\infty} x^k = \frac{x^{n+1}}{1-x} = |R_n(x)|$. Если положить $\varepsilon = 1$ и $x_n = (1/2)^{\frac{1}{n+1}}$, то неравенство $|R_n(x_n)| > \varepsilon$ или $\dfrac{1/2}{1-(1/2)^{\frac{1}{n+1}}} > 1$ будет выполнено при всех натуральных n (проверьте!). Это означает, что для каждого N можно указать такие числа $n \in \mathbb{N}$, $n > N$ и $x_n \in D = (0; 1)$ (именно: любое натуральное $n > N$ и $x_n = (1/2)^{\frac{1}{n+1}}$), что $|R_n(x_n)| > \varepsilon$, где $\varepsilon = 1$. Таким образом, ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} x^n$ на интервале $(0; 1)$ сходится неравномерно.

Далее, решая неравенства $R_n(x) = \frac{x^{n+1}}{1-x} \le 0{,}001$ относительно $n \in \mathbb{N}$ при указанных значениях x, находим $N(0{,}9; \varepsilon) = 87$, $N(0{,}99; \varepsilon) = 1145$, $N(0{,}999; \varepsilon) = 13808$, $N(0{,}9999; \varepsilon) = 161172$. ►

ПРИЗНАК ВЕЙЕРШТРАССА. *Функциональный ряд* $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ *сходится абсолютно и равномерно в области* D*, если существует сходящийся числовой ряд* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *с положительными членами, удовлетворяющими условию*

$$|f_n(x)| \le a_n, \quad n = 1, 2, \ldots,$$

для всех $x \in D$.

Ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ называется *мажорирующим рядом* для функционального ряда $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$.

ПРИМЕР 10.19. Доказать, что функциональный ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\left(1-\cos\frac{x}{n}\right)$ сходится равномерно на любом отрезке $[a; b] \subset \mathbb{R}$.

◄ С учетом неравенства $|\sin y| \le |y|$ получаем $1-\cos\frac{x}{n} = 2\sin^2\frac{x}{n} \le \frac{2x^2}{n^2}$. Поскольку при $x \in [a; b]$ выполняется неравенство $|x| \le C = \max(|a|, |b|)$, можно записать

$$\left|1-\cos\frac{x}{n}\right| = 1-\cos\frac{x}{n} \le \frac{2C^2}{n^2}, \; x \in [a; b].$$

Таким образом, сходящийся ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2C^2}{n^2}$ является мажорирующим для функционального ряда $\sum_{n=1}^{\infty}\left(1-\cos\frac{x}{n}\right)$, значит, последний сходится равномерно на отрезке $[a; b]$. ►

ПРИМЕР 10.20. Доказать, что функциональный ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x}{1+n^4x^2}$ сходится равномерно на промежутке $[0; +\infty)$.

◄ Найдем максимальные значения a_n членов ряда $f_n(x) = \frac{x}{1+n^4x^2}$ на промежутке $[0; +\infty)$. Необходимое условие экстремума $f_n'(x) = \frac{1-n^4x^2}{(1+n^4x^2)^2} = 0$ дает стационарную точку $x_n = \frac{1}{n^2}$. Поскольку при переходе через эту точку производная $f_n'(x)$ меняет знак с «+» на «−», x_n — точка локального максимума функции $f_n(x)$. Убедитесь самостоятельно, что в точке x_n достигается и абсолютный на промежутке $[0; +\infty)$ максимум $f_n(x)$. Величина этого максимума $a_n = f_n(x_n) = \frac{1}{2n^2}$.

Итак, $|f_n(x)| = f_n(x) \le \max\limits_{x\in[0;+\infty)} f_n(x) = a_n = \frac{1}{2n^2}$ для всех $x \in [0; +\infty)$. Это означает, что сходящийся числовой ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2n^2}$ является мажорирующим для функционального ряда $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x}{1+n^4x^2}$, $x \in [0; +\infty)$, поэтому согласно признаку Вейерштрасса последний ряд сходится равномерно. ►

В задачах 10.150–10.156 исследовать ряды на равномерную сходимость в указанных промежутках.

10.150. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} x^n$, а) $(-1;\ 0)$; б) $[-0{,}99;\ 0{,}999]$.

10.151. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{x^n}{n\sqrt{n}}$, $[-1;\ 1]$.

10.152. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{x^n}{n!}$, а) $(0;\ +\infty)$; б) $[0;\ 10]$.

10.153. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} x^n(1-x)$, $[-1;\ 1]$.

10.154. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(\dfrac{x^n}{n} - \dfrac{x^{n+1}}{n+1}\right)$, $[-1;\ 1]$.

10.155. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{(x+n-1)(x+n)}$, $(0;+\infty)$.

10.156. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{x}{(nx+1)((n+1)x+1)}$, а) $(0;\ 1)$; б) $(0{,}01;\ +\infty)$.

В задачах 10.157–10.162 найти области сходимости и равномерной сходимости рядов.

10.157. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{(-1)^n}{n+|x|}$.

10.158. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{\sin^2 nx}{n\sqrt{n}}$.

10.159. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{(-1)^n}{n^x}$.

10.160. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{(-1)^n}{\sqrt{n}(x-1)^n}$.

10.161. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{n(x+1)^n}$.

10.162. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{2^{nx}}{n^2}$.

В задачах 10.163–10.173 с помощью признака Вейерштрасса доказать равномерную сходимость рядов в указанных промежутках.

10.163. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{x^2+n\sqrt[7]{n}}$, $(-\infty,+\infty)$.

10.164. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{x^2+n\sqrt[7]{n}}$, $(-\infty,+\infty)$.

10.165. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{(x^4+x^2+1)n\sqrt{n}}$, $(-\infty,+\infty)$.

10.166. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{\cos nx}{\sqrt[3]{n^5+x^6}}$, $(-\infty,+\infty)$.

10.167. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{\sin \pi nx}{n\sqrt{n+x^2}}$, $(-\infty,+\infty)$.

10.168. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{\operatorname{arctg}(x^2+n^2)}{x^2+n^2+1}$, $(-\infty,+\infty)$.

10.169. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} x^2 e^{-nx}$, $[0,+\infty)$.

10.170. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{nx}{1+n^5x^2}$, $(-\infty,+\infty)$.

10.171. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{x^2}{1+n^2x^3}$, $[0,+\infty)$.

10.172. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \sin\dfrac{x}{x^2+n^2}$, $(-\infty,+\infty)$.

10.173. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{x^2-2nx+2n^2}$, $(-\infty,+\infty)$.

§ 10.3. СТЕПЕННЫЕ РЯДЫ

1. Интервал сходимости степенного ряда

Ряд

$$a_0 + a_1(x - x_0) + a_2(x - x_0)^2 + \ldots + a_n(x - x_0)^n + \ldots = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(x - x_0)^n \tag{10.5}$$

называется *степенным рядом*. Любой степенной ряд сходится при $x = x_0$. Если ряд (10.5) сходится не только в точке $x = x_0$, то существует положительное число R (возможно, $R = +\infty$) такое, что этот ряд сходится абсолютно при $|x - x_0| < R$ и расходится при $|x - x_0| > R$. Число R называется *радиусом сходимости* ряда (10.5), для него справедливо равенство

$$R = \frac{1}{\overline{\lim\limits_{n\to\infty}} \sqrt[n]{|a_n|}} \tag{10.6}$$

(при $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}} \sqrt[n]{a_n} = 0$ полагают $R = +\infty$). Если существует предел $\lim\limits_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|$, то радиус сходимости можно найти по формуле

$$R = \left(\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|\right)^{-1} = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right|. \tag{10.7}$$

В случае, когда $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}} \sqrt[n]{|a_n|} = +\infty$ или $\lim\limits_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = +\infty$, ряд (10.5) сходится в единственной точке $x = x_0$. В каждой из граничных точек *интервала сходимости* $(x_0 - R; x_0 + R)$ степенной ряд может сходиться или расходиться. На любом отрезке $[a; b] \subset (x_0 - R; x_0 + R)$ ряд (10.5) сходится равномерно. Если степенной ряд сходится (не обязательно абсолютно) на конце $x_0 + R$ (или $x_0 - R$) интервала сходимости, то он сходится равномерно на любом промежутке $[a; x_0 + R]$ (или $[x_0 - R; b]$), где a, b — точки интервала сходимости.

ПРИМЕР 10.21. Найти области сходимости степенных рядов:

а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n}$; б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(x - x_0)^n}{n!}$; в) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} n!(x - x_0)^n$.

◄ а) Радиус сходимости ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n}$ можно найти по любой из формул (10.6) и (10.7): $R = \frac{1}{\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{1/n}} = 1$ или $R = \lim\limits_{n\to\infty}\frac{n}{n+1} = 1$. В граничной точке $x = -1$ интервала сходимости $(-1; 1)$ ряд сходится согласно признаку Лейбница, а в граничной точке $x = 1$ он расходится (так как это гармонический ряд, см. пример 10.5). Следовательно, область сходимости данного ряда — полуинтервал $[-1; 1)$.

б) Ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(x - x_0)^n}{n!}$ имеет радиус сходимости $R = \lim\limits_{n\to\infty}\frac{(n+1)!}{n!} = \lim\limits_{n\to\infty}(n+1) = +\infty$, он сходится на всей числовой прямой.

в) Радиус сходимости ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} n!(x - x_0)^n$ найдем по формуле (10.7):

$$R = \lim_{n\to\infty} \frac{n!}{(n+1)!} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n+1} = 0,$$

этот ряд сходится в единственной точке $x = x_0$. ►

Формулы (10.6) и (10.7) для радиуса сходимости степенного ряда следуют из признаков Коши и Даламбера соответственно. Верхний предел (возможно, и бесконечный) в (10.6) всегда существует, поэтому формула (10.6) справедлива для любого ряда (10.5), хотя ее использование и может вызвать затруднения. Равенство (10.6) применимо лишь при условии существования предела $\lim\limits_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|$. Это условие не выполняется, например, для рядов, содержащих не все степени величины $(x - x_0)$. В таких случаях может помочь непосредственное применение признака Даламбера к ряду (10.5).

ПРИМЕР 10.22. Исследовать сходимость степенного ряда

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n \frac{(x-2)^{2n}}{n}.$$

◄ Коэффициенты данного ряда равны $a_{2k} = (-1)^k \frac{1}{k}$, $a_{2k-1} = 0$, $k = 1, 2, \ldots$. Поэтому последовательность $\{\sqrt[n]{|a_n|}\} = \{0, \sqrt{1}, 0, \sqrt[4]{1/2}, 0, \sqrt[6]{1/3}, 0, \sqrt[8]{1/4}, \ldots, 0, \sqrt[2n]{1/n}, \ldots\}$ имеет две предельные точки: 0 и $1 = \lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[2n]{1/n}$. Следовательно, $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}} \sqrt[n]{|a_n|} = 1$ и радиус сходимости ряда равен $R = \dfrac{1}{\overline{\lim\limits_{n\to\infty}} \sqrt[n]{|a_n|}} = 1.$

Применение формулы (10.7) невозможно, так как $\lim\limits_{k\to\infty}\left|\frac{a_{2k+1}}{a_{2k}}\right| = \lim\limits_{k\to\infty}\frac{0}{1/k} = 0$, а $\lim\limits_{k\to\infty}\left|\frac{a_{2k+2}}{a_{2k+1}}\right| = \lim\limits_{k\to\infty}\frac{1/(k+1)}{0} = +\infty$, поэтому предел $\lim\limits_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|$ не существует. Используя признак Даламбера непосредственно, получим

$$q = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{(-1)^{n+1}(x-2)^{2n+2}/(n+1)}{(-1)^n(x-2)^{2n}/n}\right| = \lim_{n\to\infty}\frac{n}{n+1}(x-2)^2 = (x-2)^2.$$

Если $q < 1$, то $(x - 2)^2 < 1$ или $|x - 2| < 1$. Отсюда находим радиус сходимости: $R = 1$, и интервал сходимости ряда: $(2 - R;\ 2 + R) = (1;\ 3)$.

В граничных точках $x = 1$ и $x = 3$ степенной ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n \frac{(x-2)^{2n}}{n}$ превращается в числовой ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n \frac{1}{n}$, сходящийся условно. Таким образом, данный ряд сходится равномерно на отрезке $[1;\ 3]$ (так как он сходится, хотя и условно, в точках $x = 1$ и $x = 3$) и сходится абсолютно на интервале $(1;\ 3)$. ►

В задачах 10.174–10.190 найти области сходимости степенных рядов.

10.174. $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{2n+1}{n+2}(x-2)^n$. **10.175.** $\sum_{n=1}^{\infty}(x+3)^n\sin\frac{1}{3^n}$.

10.176. $\sum_{n=1}^{\infty}(x-3)^n\arcsin\frac{2n+1}{4^n}$. **10.177.** $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(x+1)^n}{2^n(n+2)^2}$.

10.178. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(3n-1)(x-1)^n}{(n+2)!}$. **10.179.** $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^2x^{2n}}{n!}$.

10.180. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(x-1)^n}{4^n n}$. **10.181.** $\sum_{n=1}^{\infty}\sin\left(\frac{n-1}{(n^2+1)\sqrt{n}}\right)(x+1)^n$.

10.182. $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{(x-4)^n}{3^n(n+1)}$. **10.183.** $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{2n+1}}{4^n n\ln^2 n}$.

10.184. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(x-1)^{2n-1}}{9^{n+1}n}$. **10.185.** $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(x-2)^{3n}}{8^{n-1}n}$.

10.186. $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n-1}{2n+1}\right)^{2n+1}(x+2)^n$. **10.187.** $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{2n-1}{2n+1}\right)^{n+1}(x+3)^n$.

10.188. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(x+1)^n}{3^n n\ln n}$. **10.189.** $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^{1000}(x-5)^n}{4^n}$.

10.190. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n(x+1)^n}{(n+2)^{n+1}}$.

2. Разложение функций в степенные ряды. Ряд Тейлора

Если ряд $\sum_{n=0}^{\infty}a_n(x-x_0)^n$ сходится на множестве D к функции $f(x)$, т. е.

$$f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}a_n(x-x_0)^n,\ x\in D,$$

то этот ряд называют *разложением на D функции $f(x)$ в степенной ряд по степеням* $(x-x_0)$. Пусть функция $f(x)$ имеет на множестве D непрерывные производные всех порядков. Тогда степенной ряд $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n$ называют *рядом Тейлора* этой функции. При $x_0=0$ получаем частный случай $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n$ ряда Тейлора — *ряд Маклорена* функции $f(x)$.

Если функция $f(x)$ может быть разложена на множестве D в степенной ряд, то он является рядом Тейлора функции $f(x)$. Ряд Тейлора функции $f(x)$ представляет эту функцию на множестве D, т. е. $f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n$ тогда и только тогда, когда остаточный член формулы Тейлора $R_{n+1}(x)$ (см. гл. 3) стремится к нулю при $n\to\infty$. Остаточный член может быть записан в различных формах, например в форме Лагранжа

$$R_{n+1}(x)=\frac{(x-x_0)^{n+1}}{(n+1)!}f^{(n+1)}(x_0+\theta(x-x_0))$$

или в форме Коши

$$R_{n+1}(x)=\frac{(x-x_0)^{n+1}(1-\theta)^n}{n!}f^{(n+1)}(x_0+\theta(x-x_0)),$$

где $0<\theta<1$.

Степенной ряд (10.5) с радиусом сходимости $R>0$ можно почленно интегрировать на любом отрезке $[a;\ x]\subset(x_0-R;\ x_0+R)$, причем полученный в результате этого ряд имеет тот же радиус сходимости. Кроме того, степенной ряд (10.5) внутри его интервала сходимости можно дифференцировать почленно любое число раз. Ряд, полученный n-кратным почленным дифференцированием ряда (10.5), имеет тот же радиус сходимости, что и исходный ряд.

При решении задач на разложение функций в степенные ряды часто используют следующие известные формулы для рядов Тейлора:

а) $e^x=1+x+\dfrac{x^2}{2!}+\ldots+\dfrac{x^n}{n!}+\ldots=\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{x^n}{n!},\ x\in\mathbb{R};$

б) $\cos x=1-\dfrac{x^2}{2!}+\ldots+(-1)^n\dfrac{x^{2n}}{(2n)!}+\ldots=\sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^n\dfrac{x^{2n}}{(2n)!},\ x\in\mathbb{R};$

в) $\sin x=x-\dfrac{x^3}{3!}+\ldots+(-1)^n\dfrac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}+\ldots=\sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^n\dfrac{x^{2n+1}}{(2n+1)!},\ x\in\mathbb{R};$

г) $\ln(1+x)=x-\dfrac{x^2}{2}+\ldots+(-1)^{n+1}\dfrac{x^n}{n}+\ldots=\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\dfrac{x^n}{n},\ x\in(-1;\ 1];$

д) $\operatorname{arctg}x=x-\dfrac{x^3}{3}+\dfrac{x^5}{5}-\dfrac{x^7}{7}+\ldots+(-1)^n\dfrac{x^{2n+1}}{2n+1}+\ldots=\sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^n\dfrac{x^{2n+1}}{2n+1},\ x\in[-1;\ 1];$

е) $(1+x)^\alpha=1+\alpha x+\dfrac{\alpha(\alpha-1)}{2!}x^2+\ldots+\dfrac{\alpha(\alpha-1)\ldots(\alpha-n+1)}{n!}x^n+\ldots=$

$$=1+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\alpha(\alpha-1)\ldots(\alpha-n+1)}{n!}x^n,\ x\in[-1;\ 1],\ \alpha\in\mathbb{R}\setminus\mathbb{N}$$

(при $\alpha\in\mathbb{N}$ функция $(1+x)^m$ представляется по формуле бинома Ньютона многочленом степени m: $(1+x)^m=\sum\limits_{n=0}^{m}C_m^n x^n,\ x\in\mathbb{R}$);

ж) $\dfrac{1}{1+x}=1-x+x^2-x^3+\ldots+(-1)^n x^n+\ldots=\sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^n x^n,\ \ x\in(-1;\ 1)$ (бесконечная геометрическая прогрессия со знаменателем $-x$, получается из предыдущего разложения при $\alpha=-1$);

з) $\dfrac{1}{1-x}=1+x+x^2+x^3+\ldots+x^n+\ldots=\sum\limits_{n=0}^{\infty}x^n,\ \ x\in(-1;\ 1)$ (бесконечная геометрическая прогрессия со знаменателем x).

ПРИМЕР 10.23. Разложить функцию $f(x)=\dfrac{1}{2-x}$ в степенной ряд: а) по степеням x; б) по степеням бинома $(x+3)$. Указать области сходимости полученных разложений.

◄ Используем разложение з):

а) $f(x)=\dfrac{1}{2-x}=\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{1-x/2}\right)=\dfrac{1}{2}\sum\limits_{n=0}^{\infty}\left(\dfrac{x}{2}\right)^n=\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{x^n}{2^{n+1}}$. Область сходимости находим из условия $\dfrac{x}{2}\in(-1;1)$: $x\in(-2;\ 2)$.

б) $f(x)=\dfrac{1}{2-x}=\dfrac{1}{5-(x+3)}=\dfrac{1}{5}\left(\dfrac{1}{1-(x+3)/5}\right)=\dfrac{1}{5}\sum\limits_{n=0}^{\infty}\left(\dfrac{x+3}{5}\right)^n=\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{(x+3)^n}{5^{n+1}}$. Для области сходимости получаем $\dfrac{x+3}{5}\in(-1;1)$, откуда $x\in(-8;\,2)$. ►

ПРИМЕР 10.24. Разложить функцию $f(x)=\dfrac{x^2+3}{x^3-x^2-x+1}$ в степенной ряд по степеням x.

◄ Разложим $f(x)$ на элементарные дроби: $f(x)=\dfrac{x^2+3}{x^3-x^2-x+1}=\dfrac{1}{1+x}+\dfrac{2}{(1-x)^2}$.

С учетом разложения ж) имеем $\dfrac{1}{1+x}=\sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^n x^n$, $x\in(-1;\,1)$. Далее, $\dfrac{2}{(1-x)^2}=2\left(\dfrac{1}{1-x}\right)'$ и (см. разложение з)) $\dfrac{1}{1-x}=\sum\limits_{n=0}^{\infty}x^n$, $x\in(-1;\,1)$. Поэтому, применяя почленное дифференцирование ряда, находим

$$\frac{2}{(1-x)^2}=2\left(\frac{1}{1-x}\right)'=2\left(\sum_{n=0}^{\infty}x^n\right)'=2\sum_{n=0}^{\infty}(x^n)'=2\sum_{n=1}^{\infty}nx^{n-1}=\sum_{n=0}^{\infty}2(n+1)x^n.$$

Сложив полученные ряды, окончательно запишем

$$f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n x^n+\sum_{n=0}^{\infty}2(n+1)x^n=\sum_{n=0}^{\infty}(2n+2+(-1)^n)x^n=$$
$$=3+3x+7x^2+7x^3+11x^4+\ldots,\quad x\in(-1;\,1).\ ►$$

ПРИМЕР 10.25. Разложить функцию $f(x)=\int\limits_0^x\dfrac{\sin t}{t}dt$ (*интегральный синус*) в степенной ряд по степеням x.

◄ Используя разложение в), можно записать $\dfrac{\sin t}{t}=\sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^n\dfrac{t^{2n}}{(2n+1)!}$, $t\in\mathbb{R}$. Интегрируя почленно этот ряд на отрезке $[0;\,x]\in\mathbb{R}$, получаем

$$f(x)=\int_0^x\frac{\sin t}{t}dt=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\int_0^x\frac{t^{2n}dt}{(2n+1)!}=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)(2n+1)!},\ x\in\mathbb{R}.\ ►$$

В задачах 10.191–10.205, применяя подходящие разложения а)–з) основных элементарных функций, разложить функции $f(x)$ в степенные ряды по степеням x и указать области сходимости этих рядов.

10.191. $f(x)=\dfrac{1}{2-3x}$. **10.192.** $f(x)=\dfrac{5}{4+5x}$.

10.193. $f(x)=\dfrac{x^{10}}{1-x}$. **10.194.** $f(x)=\dfrac{x}{1-x^2}$.

10.195. $f(x)=\dfrac{x}{2+3x}$. **10.196.** $f(x)=\dfrac{4x}{3x^2-2x-1}$.

10.197. $f(x)=\dfrac{5-2x}{x^2-5x+6}$. **10.198.** $f(x)=\dfrac{5x^2-2x-1}{2x^3-x^2-2x+1}$.

10.199. $f(x)=e^{-x^2}$. **10.200.** $f(x)=\sin^2 x$.

10.201. $f(x)=\cos^2 x$. **10.202.** $f(x)=\ln(5+x^2)$.

10.203. $f(x)=\operatorname{arctg}(3x^3)$. **10.204.** $f(x)=\operatorname{sh} x=\dfrac{e^x-e^{-x}}{2}$.

10.205. $f(x)=\operatorname{ch} x=\dfrac{e^x+e^{-x}}{2}$.

В задачах 10.206–10.216, используя почленное интегрирование или дифференцирование рядов, разложить указанные функции в степенные ряды по степеням x.

10.206. $f(x)=\cos x - x\sin x$. **10.207.** $f(x)=\sin 2x - 2x\cos x$.

10.208. $f(x)=\dfrac{2}{(1-x)^3}$. **10.209.** $f(x)=\dfrac{1}{(x+1)^4}$.

10.210. $f(x)=\operatorname{arctg} x$. **10.211.** $f(x)=\ln(1+x)$.

10.212. $f(x)=\arcsin x$. **10.213.** $f(x)=\ln(x^2+3x+2)$.

10.214. $f(x)=\ln(2+x-x^2)$. **10.215.** $f(x)=\int\limits_0^x e^{-\frac{t^2}{2}}dt$.

10.216. $f(x)=\int\limits_0^x e^{-\frac{t^2}{2}}dt$.

В задачах 10.217–10.223, применяя почленное дифференцирование или интегрирование, найти суммы степенных рядов.

10.217. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\dfrac{x^{n+1}}{n(n+1)}$. **10.218.** $\sum\limits_{n=1}^{\infty} nx^n$.

10.219. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n}\dfrac{x^{2n+2}}{2(2n+1)(n+1)}$. **10.220.** $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{x^{2n+1}}{2n+1}$.

10.221. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{x^{n}}{n(n+1)}$. **10.222.** $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}n^2x^n$.

10.223. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} n(n+1)x^n$.

3. Применения степенных рядов

Разложения функций в степенные ряды можно использовать для вычисления с любой точностью значений этих функций в произвольных точках областей сходимости соответствующих рядов. Для контроля точности таких вычислений можно использовать, например, выражение для остаточного члена формулы Тейлора в форме Лагранжа (см. п. 2 настоящего параграфа). Можно также попытаться оценить остаток ряда $R_n(x)=\sum\limits_{k=n+1}^{\infty} a_kx^k$ непосредственно. В частности, если ряд $\sum\limits_{k=n+1}^{\infty} a_kx^k$ является знакочередующимся, то для его остатка справедлива оценка $|R_n(x)|\le|a_{n+1}x^{n+1}|$.

ПРИМЕР 10.26. Найти число e с точностью до 10^{-6}.

◀ Используя разложение а) из п. 2, для $x = 1$ получаем

$$e = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} + R_n(1).$$

Оценим остаток ряда:

$$R_n(1) = \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{1}{k!} = \frac{1}{n!} \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{1}{(n+1)\cdot\ldots\cdot k} < \frac{1}{n!} \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{1}{(n+1)^{k-n}} = \frac{1}{n!} \cdot \frac{\frac{1}{n+1}}{1 - \frac{1}{n+1}} = \frac{1}{n!n}.$$

Найдем $n \in \mathbb{N}$, для которого $\frac{1}{n!n} \le 10^{-6}$ или $n!\,n \ge 10^6$: $n \ge 9$. Вычислив $\sum_{k=0}^{9} \frac{1}{k!}$ и округлив результат до 6 знаков после запятой, находим число e с требуемой точностью: $e = 2{,}718282$. ▶

ПРИМЕР 10.27. Найти $\operatorname{arctg}\frac{1}{2}$ с точностью до 10^{-4}.

◀ Полагая в разложении д) из п. 2, что $x = \frac{1}{2}$, получаем

$$\operatorname{arctg}\frac{1}{2} = \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{(2k+1)2^{2k+1}} + R_n\left(\frac{1}{2}\right).$$

Поскольку данный ряд является знакочередующимся, $\left|R_n\left(\frac{1}{2}\right)\right| \le \frac{1}{(2k+3)2^{2k+3}}$. Находим $n \in \mathbb{N}$, для которого $\frac{1}{(2n+3)2^{2n+3}} \le 10^{-4}$ или $(2n + 3)2^{2n+3} \ge 10^4$. Получаем $n \ge 4$. Вычислив $\sum_{k=0}^{4} \frac{(-1)^k}{(2k+1)\,2^{2k+1}} = \frac{1}{2} - \frac{1}{24} + \frac{1}{160} - \frac{1}{896} + \frac{1}{4608}$ и округлив результат до 4 знаков, находим $\operatorname{arctg}\frac{1}{2} = 0{,}4636$ с точностью до 10^{-4}. ▶

В задачах 10.224–10.231 определить, многочлен какой степени следует оставить в разложении соответствующей функции, чтобы вычислить указанные величины с точностью до 10^{-6}.

10.224. $\sqrt{e}$. **10.225.** $\frac{1}{e}$. **10.226.** $\sqrt[3]{e}$. **10.227.** $\cos 10°$.

10.228. $\sin 12°$. **10.229.** $\ln 1{,}01$. **10.230.** $\ln 2$. **10.231.** $\operatorname{arctg}\frac{1}{2}$.

10.232. С какой предельной абсолютной погрешностью можно найти $\sqrt[5]{36} = (32+4)^{\frac{1}{5}} = 2\left(1+\frac{1}{8}\right)^{\frac{1}{5}}$, взяв три члена разложения е) из п. 2?

10.233. При каких x многочлен $x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120}$ определяет значение $\sin x$ с точностью до 10^{-4}?

10.234. Какова предельная абсолютная погрешность равенства

$$\sqrt{4+x}=2+\frac{x}{4}-\frac{x^2}{64}$$

при вычислении $\sqrt{5}$?

В задачах 10.235–10.243, используя подходящие разложения, вычислить указанные величины с точностью до 10^{-4}.

10.235. $\sqrt{e}$. **10.236.** $\frac{1}{e}$. **10.237.** $\sin\frac{\pi}{7}$.

10.238. $\sin 10°$. **10.239.** $\cos 1$. **10.240.** $\sqrt{15}$.

10.241. $\sqrt[5]{250}$. **10.242.** $\ln 1{,}5$. **10.243.** $\operatorname{arctg}\frac{3}{4}$.

Степенные ряды можно использовать и для интегрирования функций. Разложив подынтегральную функцию $f(t)$ в степенной ряд, можно с учетом теоремы об интегрировании степенных рядов представить интеграл $\int\limits_a^x f(t)dt$ в виде степенного ряда и вычислить его с требуемой точностью для любых x и a из интервала сходимости исходного или полученного ряда.

ПРИМЕР 10.28. Вычислить интеграл $\int\limits_0^1 e^{-t^2}dt$ с точностью до 10^{-4}.

◀ Используя разложение $e^x=\sum\limits_{k=0}^{\infty}\frac{x^k}{k!}$, получаем $e^{-t^2}=\sum\limits_{k=0}^{\infty}(-1)^k\frac{t^{2k}}{k!}$, $t\in\mathbb{R}$. В результате почленного интегрирования находим $\int\limits_0^x e^{-t^2}dt=\sum\limits_{k=0}^{\infty}(-1)^k\frac{x^{2k+1}}{(2k+1)k!}$, откуда

$$\int\limits_0^1 e^{-t^2}dt=\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\frac{1}{(2k+1)k!}.$$

С учетом оценки остатка данного знакочередующегося ряда $|R_n(1)|\le\frac{1}{(2n+3)(n+1)!}$, вычисляем искомый интеграл с требуемой точностью:

$$\int\limits_0^1 e^{-t^2}dt\approx\sum_{k=0}^{6}(-1)^k\frac{1}{(2k+1)k!}=0{,}7468. \blacktriangleright$$

В задачах 10.244–10.247 разложить интегралы в степенные ряды по степеням x.

10.244. $\int\limits_0^x\frac{\ln(1+t^2)}{t}dt$. **10.245.** $\int\limits_0^x\frac{\sin t^2}{t}dt$.

10.246. $\int\limits_0^x\cos t^2dt$. **10.247.** $\int\limits_0^x\frac{1}{\sqrt{1+t^3}}dt$.

В задачах 10.248–10.253 вычислить интегралы с точностью до 10^{-4}.

10.248. $\int\limits_0^{0,3} \frac{\ln(1+x)}{x}dx.$ **10.249.** $\int\limits_0^{0,2} \frac{\operatorname{arctg} x}{x}dx.$

10.250. $\int\limits_0^{0,5} e^{-x^2}dx.$ **10.251.** $\int\limits_0^{0,6} \sqrt[3]{1+x^2}dx.$

10.252. $\int\limits_0^{0,8} \frac{dx}{1+x^5}.$ **10.253.** $\int\limits_0^{1} \frac{\sin x}{x}dx.$

§ 10.4. РЯД ФУРЬЕ. ИНТЕГРАЛ ФУРЬЕ

1. Разложение функции в тригонометрический ряд Фурье

Если функция $f(x)$, определенная на отрезке $[-l;\, l]$, абсолютно интегрируема на нем (т. е. $\int\limits_{-l}^{l} |f(x)|dx < +\infty$), то существуют числа

$$a_0 = \frac{1}{l}\int\limits_{-l}^{l} f(x)dx,\;\; a_k = \frac{1}{l}\int\limits_{-l}^{l} f(x)\cos\frac{k\pi x}{l}dx,\;\; b_k = \frac{1}{l}\int\limits_{-l}^{l} f(x)\sin\frac{k\pi x}{l}dx,\;\; k = 1, 2, \ldots,$$

называемые *коэффициентами Фурье* этой функции. Ряд

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty}\left(a_k\cos\frac{k\pi x}{l} + b_k\sin\frac{k\pi x}{l}\right)$$

называется *рядом Фурье* функции $f(x)$ по *тригонометрической системе функций* $\left\{\frac{1}{\sqrt{2l}},\, \frac{1}{\sqrt{l}}\cos\frac{\pi kx}{l},\, \frac{1}{\sqrt{l}}\sin\frac{\pi kx}{l},\, k\in\mathbb{N}\right\}$ или ее *тригонометрическим рядом Фурье*.

Будем считать, что функция $f(x)$ определена не только на промежутке $[-l;\, l]$, но и при всех $x \in \mathbb{R}$ и является периодической с периодом $2l$ (если $f(x)$ первоначально задана на отрезке $[-l;\, l]$, то рассматривается ее периодическое продолжение с периодом $2l$ на всю числовую прямую). При определенных условиях ряд Фурье сходится к $f(x)$ в каждой точке $x \in \mathbb{R}$. Тогда говорят, что этот ряд представляет функцию $f(x)$ и пишут

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty}\left(a_k\cos\frac{k\pi x}{l} + b_k\sin\frac{k\pi x}{l}\right),\;\; x\in\mathbb{R}.$$

Для формулировки указанных условий введем следующие понятия.

Функция $f(x)$ называется *кусочно-непрерывной* на сегменте $[a;\, b]$, если она непрерывна всюду на $[a;\, b]$, за исключением, быть может, конечного числа точек, в каждой из которых $f(x)$ имеет конечные правое и левое предельные значения. Будем считать, что в любой точке разрыва $f(x) = \frac{f(x-0)+f(x+0)}{2}$.

Если кусочно-непрерывная на отрезке $[a;\, b]$ функция $f(x)$ имеет на $[a;\, b]$ кусочно-непрерывную производную $f'(x)$, то эта функция называется *кусочно-гладкой* на $[a;\, b]$.

ТЕОРЕМА 10.1. *Если функция $f(x)$ имеет период $2l$ и является кусочно-гладкой на периоде, то ее тригонометрический ряд Фурье сходится к $f(x)$ в каждой точке $x \in \mathbb{R}$.*

ТЕОРЕМА 10.2. *Если функция $f(x)$ периода $2l$ непрерывная и кусочно-гладкая на числовой прямой $\mathbb{R}$, то ее ряд Фурье сходится к $f(x)$ равномерно на $\mathbb{R}$.*

Отметим, что непрерывная на промежутке $[-l; l]$ функция $f(x)$ остается непрерывной и после ее периодического продолжения на всю числовую прямую в том и только том случае, если $f(l) = f(-l)$.

Для четной функции ($f(x) = f(-x)$) коэффициенты Фурье $b_k = 0$, $k = 1, 2, \ldots$, и представление $f(x)$ рядом Фурье принимает вид

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos\frac{k\pi x}{l}, \text{ где } a_k = \frac{2}{l}\int_0^l f(x)\cos\frac{k\pi x}{l}dx, \ k = 0, 1, 2, \ldots, \tag{10.8}$$

(*разложение $f(x)$ в ряд Фурье по косинусам*). Если же $f(x)$ — нечетная функция ($f(-x) = -f(x)$), то $a_k = 0$, $k = 1, 2, \ldots$, и ее представление рядом Фурье является *разложением по синусам*:

$$f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} b_k \sin\frac{k\pi x}{l}, \text{ где } b_k = \frac{2}{l}\int_0^l f(x)\sin\frac{k\pi x}{l}dx, \ k = 1, 2, \ldots. \tag{10.9}$$

Если до периодического продолжения функция $f(x)$ задана на отрезке $[0; l]$, то при выполнении соответствующих требований ее можно представить рядом Фурье как по косинусам (если продолжить $f(x)$ на отрезок $[-l; l]$ четным образом), так и по синусам (продолжив $f(x)$ на $[-l; l]$ нечетным образом).

Для функции $f(x)$ с интегрируемым на отрезке $[-l; l]$ квадратом (т. е. $\int_{-l}^{l} f^2(x)dx < +\infty$) справедливо *равенство Парсеваля*:

$$\frac{a_0^2}{2} + \sum_{k=1}^{\infty}(a_k^2 + b_k^2) = \frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f^2(x)dx. \tag{10.10}$$

ПРИМЕР 10.29. Представить рядом Фурье функцию

$$f(x) = \begin{cases} -1 \text{ при } -\pi < x < 0, \\ 1 \text{ при } 0 < x \le \pi \end{cases}$$

и изобразить графически первые четыре частичные суммы этого ряда.

◀ Функция $f(x)$ является кусочно-гладкой на отрезке $[-\pi; \pi]$, поэтому ее можно представить рядом Фурье. Поскольку $f(x)$ нечетна, используем представление (10.9) (разложение по синусам). Находим коэффициенты Фурье:

$$a_k = 0, \ \ k = 0, 1, \ldots;$$

$$b_k = \frac{2}{\pi}\int_0^l f(x)\sin kx\,dx = -\frac{2}{\pi k}(\cos\pi k - 1) = \frac{2}{\pi k}[1 - (-1)^k], \ k = 1, 2, \ldots.$$

При четных k (т. е. $k = 2m$, $m = 0, 1, \ldots$) коэффициенты Фурье $b_k = b_{2m} = 0$, а при нечетных k ($k = 2m - 1$, $m = 1, 2, \ldots$) имеем $b_k = \frac{4}{\pi k} = \frac{4}{\pi(2m-1)}$. Поэтому

$$b_k = \begin{cases} 0 \text{ при } k = 2m, \\ \dfrac{4}{\pi(2m-1)} \text{ при } k = 2m - 1. \end{cases}$$

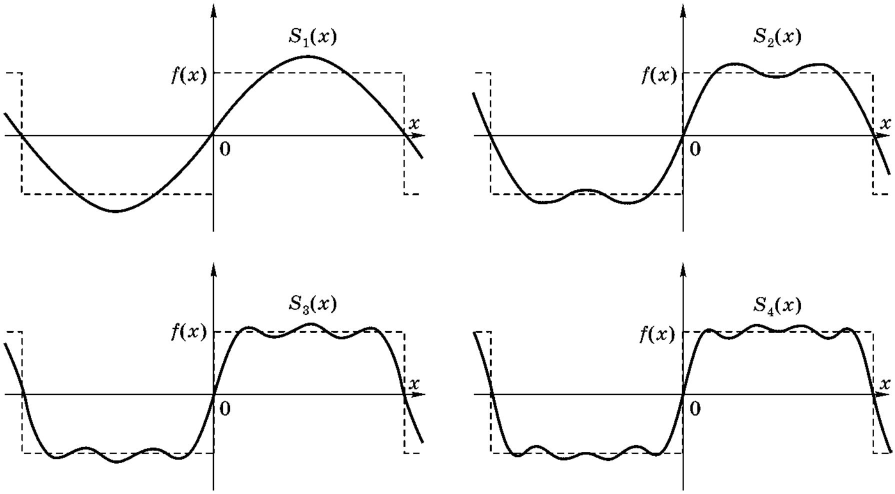


Рис. 10.1

Таким образом, $f(x) = \dfrac{4}{\pi}\sum\limits_{m=1}^{n}\dfrac{\sin(2m-1)x}{2m-1}$.

Графики функции $f(x)$ и частичных сумм $S_n(x) = \dfrac{4}{\pi}\sum\limits_{m=1}^{n}\dfrac{\sin(2m-1)x}{2m-1}$, $n = 1, 2, 3, 4$, представлены на рис. 10.1. ►

ПРИМЕР 10.30. Функцию $f(x) = x$, $x \in [0; \pi]$, заданную на сегменте $[0; \pi]$, разложить в ряд Фурье на отрезке $[-\pi; \pi]$, продолжив ее на этот отрезок: а) нечетным образом; б) четным образом. Изобразить графически первые четыре частичные суммы каждого из разложений.

◄ а) Нечетное продолжение $f(x)$ имеет вид $f(x) = x$, $x \in (-\pi; \pi)$. После периодического продолжения $f(x)$ на всю числовую ось эта функция терпит разрывы в точках $x = \pm\pi, \pm 2\pi, \pm 3\pi, \ldots$. Полагаем в этих точках

$$f(x) = \frac{f(x-0)+f(x+0)}{2} = \frac{\pi+(-\pi)}{2} = 0.$$

Периодическая функция $f(x)$ является кусочно-гладкой на числовой прямой, поэтому ее ряд Фурье представляет эту функцию.

В соответствии с (10.9) находим

$$b_k = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)\sin kx\,dx = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} x\sin kx\,dx = (-1)^{k+1}\frac{2}{k},\ \ k = 1, 2, \ldots;$$

$$f(x) = 2\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^{k+1}\frac{\sin kx}{k}.$$

Графики $f(x)$ первых четырех частичных сумм этого ряда Фурье показаны на рис. 10.2.

б) Продолжив $f(x)$ четным образом на отрезок $[-\pi; \pi]$, получим функцию $f(x) = |x|$, $x \in [-\pi; \pi]$. После периодического продолжения $f(x)$ на всю числовую ось эта функция остается непрерывной и кусочно-гладкой. Таким образом, ряд Фурье представляет функцию $f(x)$ и сходится к ней равномерно.

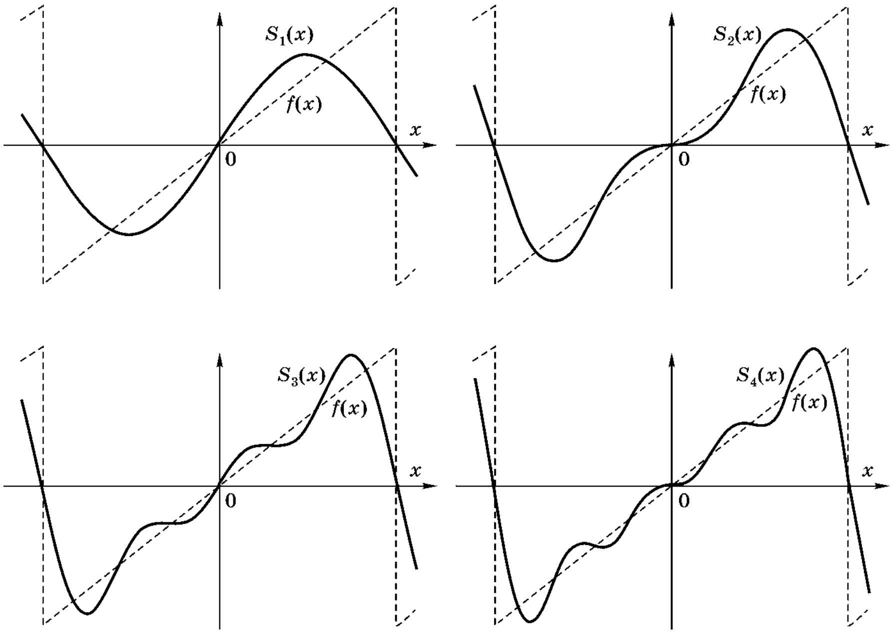


Рис. 10.2

С учетом четности $f(x)$ находим ее разложение Фурье по формулам (10.8):

$$a_0 = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)dx = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} x\,dx = \pi;$$

$$a_k = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)\cos kx\,dx = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} x\cos kx\,dx = \frac{1}{k^2}[(-1)^k - 1] =$$

$$= \begin{cases} 0 \text{ при } k = 2m, \\ -\dfrac{4}{\pi k^2} \text{ при } k = 2m-1, \end{cases} \quad m = 1, 2, \ldots;$$

$$f(x) = \frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi}\sum_{m=1}^{\infty}\frac{\cos(2m-1)x}{(2m-1)^2}.$$

Графики функции $f(x)$ первых четырех частичных сумм ее ряда Фурье представлены на рис. 10.3.

Сравнение графиков на рис. 10.2 и рис. 10.3 показывает более быструю сходимость ряда Фурье к функции $f(x)$ в случае б). Это объясняется тем, что в случае а) функция $f(x) = x$, $x \in [-\pi; \pi]$ не удовлетворяет условию $f(-\pi) = f(\pi)$, поэтому ее периодическое продолжение является разрывной функцией. А в случае б) для непрерывной на отрезке $[-\pi; \pi]$ функции $f(x) = |x|$ это условие выполняется, что гарантирует непрерывность и ее периодического продолжения на всей числовой прямой. ▶

При вычислении коэффициентов Фурье периодической с периодом $2l$ функции $f(x)$ промежутком интегрирования может быть не только $[-l; l]$, но и любой отрезок длины $2l$:

$$a_k = \frac{1}{l}\int_a^{a+2l} f(x)\cos\frac{k\pi x}{l}dx, \; k = 0, 1, 2, \ldots; \quad b_k = \frac{1}{l}\int_a^{a+2l} f(x)\sin\frac{k\pi x}{l}dx, \; k = 1, 2, \ldots.$$

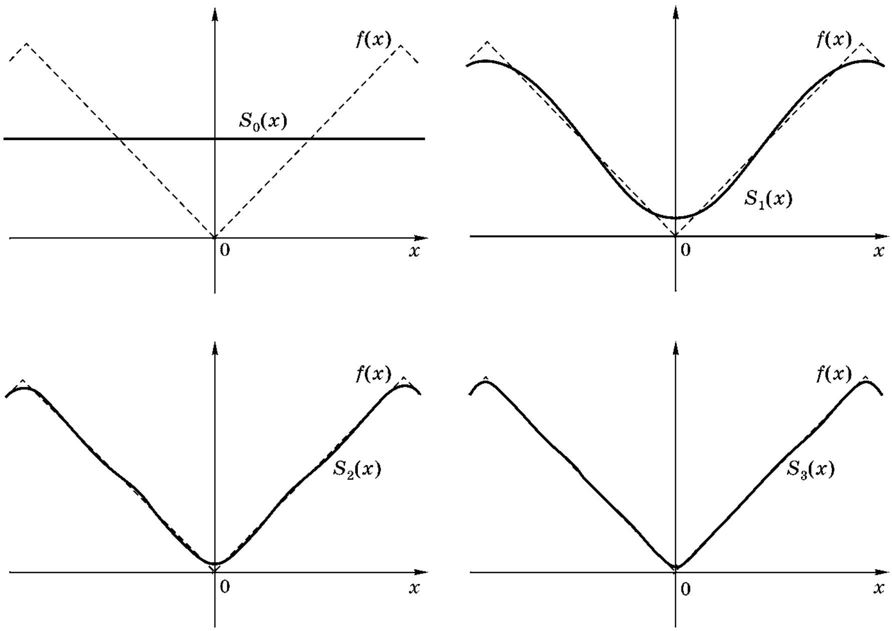


Рис. 10.3

С учетом этого можно находить разложение в тригонометрический ряд Фурье функции $f(x)$, заданной на произвольном промежутке $[a;\, b]$.

В задачах 10.254–10.259 разложить в ряд Фурье периодическую с периодом 2π функцию $f(x)$ и построить графики первых четырех частичных сумм $S_n(x)$ полученного ряда.

10.254. $f(x)=\begin{cases}\pi+x \text{ при } -\pi<x<0,\\ \pi \text{ при } 0\le x<\pi.\end{cases}$

10.255. $f(x)=\begin{cases}-x(\pi+x) \text{ при } -\pi\le x<0,\\ x(\pi-x) \text{ при } 0\le x\le\pi.\end{cases}$

10.256. $f(x)=x^2,\ x\in[-\pi;\pi]$.

10.257. $f(x)=\begin{cases}0 \text{ при } -\pi\le x<0,\\ \sin x \text{ при } 0\le x\le\pi.\end{cases}$

10.258. $f(x)=\dfrac{\pi-x}{2},\ x\in(0;2\pi)$.

10.259. $f(x)=\dfrac{\pi^2-3x^2}{12},\ x\in[-\pi;\pi]$.

В задачах 10.260–10.279 разложить в ряд Фурье периодическую с периодом $2l$ функцию $f(x)$, заданную на периоде указанным образом.

10.260. $f(x)=\begin{cases}-1 \text{ при } 0<x<1,\\ 1 \text{ при } 1<x<2.\end{cases}$

10.261. $f(x)=\begin{cases}4 \text{ при } 0<x<2,\\ 1 \text{ при } 2<x<4.\end{cases}$

10.262. $f(x)=\begin{cases}A \text{ при } -\pi<x<0,\\ B \text{ при } 0<x<\pi.\end{cases}$

10.263. $f(x)=\begin{cases}2 \text{ при } 0<x<1,\\ 1 \text{ при } 1<x<3.\end{cases}$

10.264. $f(x)=\begin{cases}-3 \text{ при } -2<x<0,\\ 1 \text{ при } 0<x<1.\end{cases}$

10.265. $f(x)=x,\ x\in(0;2\pi)$.

10.266. $f(x)=2x,\ x\in(0;3).$

10.267. $f(x)=x-1,\ x\in(0;1).$

10.268. $f(x)=\begin{cases}x+1 \text{ при } 0<x<1,\\ x \text{ при } 1<x<2.\end{cases}$

10.269. $f(x)=|\sin x|,\ x\in[-\pi;\pi].$

10.270. $f(x)=|\cos x|,\ x\in[0;2\pi].$

10.271. $f(x)=\begin{cases}2x \text{ при } 0<x<1,\\ 0 \text{ при } 1<x<2.\end{cases}$

10.272. $f(x)=\begin{cases}0 \text{ при } 0<x<2,\\ x-2 \text{ при } 2\le x<4.\end{cases}$

10.273. $f(x)=\begin{cases}-\cos x \text{ при } -\pi<x<0,\\ \cos x \text{ при } 0<x<\pi.\end{cases}$

10.274. $f(x)=\begin{cases}\dfrac{\pi^2+2\pi x}{8} \text{ при } -\pi\le x<0,\\ \dfrac{\pi^2-2\pi x}{8} \text{ при } 0\le x\le\pi.\end{cases}$

10.275. $f(x)=\begin{cases}\dfrac{\pi^2 x+\pi x^2}{8} \text{ при } -\pi\le x<0,\\ \dfrac{\pi^2 x-\pi x^2}{8} \text{ при } 0\le x\le\pi.\end{cases}$

10.276. $f(x)=\begin{cases}-x^2 \text{ при } -\pi<x<0,\\ x^2 \text{ при } 0\le x<\pi.\end{cases}$

10.277. $f(x)=\begin{cases}x-1 \text{ при } 0<x<1,\\ 2x \text{ при } 1<x<2.\end{cases}$

10.278. $f(x)=\arcsin(\sin x),\ x\in[-\pi;\pi].$

10.279. $f(x)=\arcsin(\cos x),\ x\in[-\pi;\pi].$

В задачах 10.280–10.291, доопределив необходимым образом заданную на промежутке $(0;\, l)$ функцию $f(x)$ до периодической с периодом $2l$, разложить ее в ряд Фурье: а) по косинусам; б) по синусам.

10.280. $f(x)=\dfrac{\pi}{2}-x,\ x\in(0;\pi).$

10.281. $f(x)=x+\dfrac{\pi}{2},\ x\in(0;\pi).$

10.282. $f(x) = x + 1,\ x \in (-1;\, 0).$

10.283. $f(x) = 3 - 2x,\ x \in (0;\, 1).$

10.284. $f(x) = x(\pi - x),\ x \in [0;\, \pi].$

10.285. $f(x) = x^2,\ x \in [0;\, 1).$

10.286. $f(x)=\begin{cases}1 \text{ при } -2<x<-1,\\ 0 \text{ при } -1<x<0.\end{cases}$

10.287. $f(x)=\begin{cases}2 \text{ при } 0<x<1,\\ -3 \text{ при } 1<x<2.\end{cases}$

10.288. $f(x)=\cos x,\ x\in\left(0;\dfrac{\pi}{2}\right).$

10.289. $f(x)=\sin 2x,\ x\in\left(0;\dfrac{\pi}{4}\right).$

10.290. $f(x)=\begin{cases}1 \text{ при } 0<x<1,\\ 2-x \text{ при } 1<x<2.\end{cases}$

10.291. $f(x)=x\sin x,\ x\in[0;\pi].$

С помощью представлений функций рядами Фурье можно подсчитать суммы некоторых числовых рядов.

ПРИМЕР 10.31. Используя результаты примера 10.30, найти суммы числовых рядов:

$$\text{а) } 1-\frac{1}{3}+\frac{1}{5}-\frac{1}{7}+\ldots=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{2n-1};\quad \text{б) } 1+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{5^2}+\frac{1}{7^2}+\ldots=\sum_{m=1}^{\infty}\frac{1}{(2m-1)^2}.$$

◀ а) Для функции $f(x) = x,\ x \in [-\pi; \pi]$, получено представление

$$f(x)=2\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^{k+1}\frac{\sin kx}{k}.$$

Полагая $x=\frac{\pi}{2}$, получаем

$$f\left(\frac{\pi}{2}\right)=\frac{\pi}{2}=2\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^{k+1}\frac{\sin\frac{\pi k}{2}}{k}=2\left(\sin\frac{\pi}{2}-\frac{1}{2}\underbrace{\sin\pi}_{=0}+\frac{1}{3}\sin\frac{3\pi}{2}-\frac{1}{4}\underbrace{\sin 2\pi}_{=0}+\frac{1}{5}\sin\frac{5\pi}{2}-\ldots\right)=$$

$$=2\left(\sin\frac{\pi}{2}+\frac{1}{3}\sin\frac{3\pi}{2}+\frac{1}{5}\sin\frac{5\pi}{2}-\ldots\right)=2\left(1-\frac{1}{3}+\frac{1}{5}-\ldots\right)=2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{2n-1}.$$

Отсюда $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{2n-1}=\frac{\pi}{4}$.

б) Используем представление функции $f(x) = |x|,\ x \in [-\pi; \pi]$:

$$f(x)=\frac{\pi}{2}-\frac{4}{\pi}\sum_{m=1}^{\infty}\frac{\cos(2m-1)x}{(2m-1)^2}.$$

При $x = \pi$ имеем

$$f(\pi)=\pi=\frac{\pi}{2}-\frac{4}{\pi}\sum_{m=1}^{\infty}\frac{\overbrace{\cos(2m-1)\pi}^{=-1}}{(2m-1)^2}=\frac{\pi}{2}+\frac{4}{\pi}\sum_{m=1}^{\infty}\frac{1}{(2m-1)^2},$$

откуда следует, что $\sum\limits_{m=1}^{\infty}\frac{1}{(2m-1)^2}=\frac{\pi^2}{8}$. ▶

ПРИМЕР 10.32. Используя результат примера 10.30.а) и равенство Парсеваля (10.10), найти сумму числового ряда $1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{4^2}+\ldots=\sum\limits_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^2}$.

◀ В примере 10.30 найдено представление функции $f(x)=x,\ \ x\in[-\pi;\pi]$ рядом Фурье:

$$f(x)=2\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^{k+1}\frac{\sin kx}{k}.$$

Вычислим интеграл $\frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi}f^2(x)dx=\frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi}x^2dx=\frac{2\pi^2}{3}$.

Далее, $\underbrace{\frac{a_0^2}{2}}_{=0}+\sum\limits_{k=1}^{\infty}(\underbrace{a_k^2}_{=0}+b_k^2)=\sum\limits_{k=1}^{\infty}b_k^2=4\sum\limits_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^2}$, поэтому в соответствии с (10.10) получаем

$$4\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^2}=\frac{2\pi^2}{3},\ \text{ или }\ \sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^2}=\frac{\pi^2}{6}.\ ▶$$

В задачах 10.292–10.299, используя ответы задач 10.269, 10.273, 10.275, 10.284 и, где необходимо, равенство Парсеваля, найти суммы числовых рядов.

10.292. $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{4k^2-1}$. **10.293.** $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^{k+1}(2k-1)}{4(2k-1)^2-1}$.

10.294. $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^{k+1}}{(2k-1)^3}$. **10.295.** $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^k}{k^2}$.

10.296. $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{(4k^2-1)^2}$. **10.297.** $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{k^2}{(4k^2-1)^2}$.

10.298. $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{(2k-1)^6}$. **10.299.** $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^4}$.

2. Интеграл Фурье

При стремлении к бесконечности периода $2l$ функции $f(x)$ ее разложение в ряд Фурье переходит в интегральное представление

$$f(x)=\frac{f(x-0)+f(x+0)}{2}=\frac{1}{\pi}\int_0^{\infty}d\omega\int_{-\infty}^{\infty}f(u)\cos\omega(u-x)du, \qquad (10.11)$$

называемое *интегралом Фурье*.

ТЕОРЕМА 10.3. *Если функция $f(x)$ абсолютно интегрируема на числовой прямой (т. е. $\int_{-\infty}^{\infty}|f(x)|dx<+\infty$) и является кусочно-гладкой на каждом отрезке этой прямой, то справедливо представление* (10.11).

С помощью формулы косинуса разности равенство (10.11) можно записать в виде

$$f(x)=\int_0^{\infty}[a(\omega)\cos\omega x+b(\omega)\sin\omega x]d\omega, \qquad (10.12)$$

где

$$a(\omega)=\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}f(x)\cos\omega x\,dx,\ \ b(\omega)=\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}f(x)\sin\omega x\,dx. \qquad (10.13)$$

Если $f(x)$ четная функция, то $b(\omega)=0$ и $a(\omega)=\frac{2}{\pi}\int_0^{\infty}f(x)\cos\omega x\,dx$, поэтому из (10.12) получаем

$$f(x)=\int_0^{\infty}\hat{f}_c(\omega)d\omega,\ \ x\in\mathbb{R}; \qquad (10.14)$$

$$\hat{f}_c(\omega)=\frac{2}{\pi}\int_0^{\infty}f(x)\cos\omega x\,dx,\ \ \omega\in[0;+\infty). \qquad (10.15)$$

Аналогично, для нечетной функции $f(x)$ имеем

$$f(x)=\int_0^{\infty}\hat{f}_s(\omega)d\omega,\ \ x\in\mathbb{R}; \qquad (10.16)$$

$$\hat{f}_s(\omega)=\frac{2}{\pi}\int_0^{\infty}f(x)\sin\omega x\,dx,\ \ \omega\in[0;+\infty). \qquad (10.17)$$

Равенства (10.14), (10.15) определяют пару *косинус-преобразований*, а (10.16), (10.17) — *синус-преобразований Фурье*. Преобразования (10.15) и (10.17) называются *прямыми преобразованиями*, а (10.14) и (10.16) — *обратными преобразованиями Фурье*.

Предположим, что значениями функции $g(y)$ вещественной переменной y являются комплексные числа, т. е. $g(y) = u(y) + iv(y)$, где $i=\sqrt{-1}$ — мнимая единица. Введем понятие определенного интеграла от функции $g(y)$ в соответствии с равенством

$$\int_a^b g(y)dy = \int_a^b u(y)dy + i\int_a^b v(y)dy$$

(предполагается, что все интегралы в последнем соотношении существуют).

Используя формулу Эйлера $e^{iy} = \cos y + i\sin y$, $y \in \mathbb{R}$, равенство (10.11) можно записать в виде *интеграла Фурье в комплексной форме*:

$$f(x) = \frac{f(x-0)+f(x+0)}{2} = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} d\omega \int_{-\infty}^{\infty} f(u)e^{i\omega(u-x)}du.$$

Соответствующая пара преобразований Фурье имеет вид

$$f(x) = \int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(\omega)e^{i\omega x}\,d\omega, \tag{10.18}$$

$$\hat{f}(\omega) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{-i\omega x}\,dx. \tag{10.19}$$

Преобразование (10.19) называют *прямым преобразованием* (или просто *преобразованием*) *Фурье функции* $f(x)$, а (10.18) — *обратным преобразованием Фурье в комплексной форме*.

Для преобразования Фурье будем также использовать и обозначение $\hat{f}(\omega) = \mathbb{F}[f]$.

ПРИМЕР 10.33. Найти прямое и обратное преобразования Фурье в комплексной форме функции $f(x) = e^{-\alpha|x|}$, $\alpha > 0$.

◄ Из (10.19) для прямого преобразования Фурье получаем

$$\hat{f}(\omega) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\alpha|x|}e^{-i\omega x}dx = \frac{1}{2\pi}\left(\int_{-\infty}^{0} e^{(\alpha-i\omega)x}dx + \int_{0}^{+\infty} e^{-(\alpha+i\omega)x}dx\right) =$$
$$= \frac{1}{2\pi}\left(\frac{e^{(\alpha-i\omega)x}}{\alpha-i\omega}\bigg|_{-\infty}^{0} - \frac{e^{-(\alpha+i\omega)x}}{\alpha+i\omega}\bigg|_{0}^{+\infty}\right) = \frac{1}{2\pi}\left(\frac{1}{\alpha-i\omega}+\frac{1}{\alpha+i\omega}\right) = \frac{\alpha}{\pi(\alpha^2+\omega^2)},$$

то есть

$$\hat{f}(\omega) = \frac{\alpha}{\pi(\alpha^2+\omega^2)}.$$

Для обратного преобразования используем формулу (10.18):

$$e^{-\alpha|x|} = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\alpha e^{i\omega x}}{\pi(\alpha^2+\omega^2)}d\omega = \frac{\alpha}{\pi}\left(\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\cos\omega x}{\alpha^2+\omega^2}d\omega + i\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\sin\omega x}{\alpha^2+\omega^2}d\omega\right) = \frac{2\alpha}{\pi}\int_0^{+\infty}\frac{\cos\omega x}{\alpha^2+\omega^2}d\omega$$

(мы учли свойства подынтегральных выражений: $\dfrac{\cos\omega x}{\alpha^2+\omega^2}$ — четная, а $\dfrac{\sin\omega x}{\alpha^2+\omega^2}$ — нечетная функция). Итак,

$$f(x) = e^{-\alpha|x|} = \frac{2\alpha}{\pi}\int_0^{+\infty}\frac{\cos\omega x}{\alpha^2+\omega^2}d\omega. \tag{10.20}$$

Отметим, что рассматриваемая функция $f(x) = e^{-\alpha|x|}$ четна, поэтому представление (10.20) является и ее обратным косинус-преобразованием Фурье (убедитесь в этом!). ▶

Пусть вещественные функции $f(x)$ и $g(x)$ удовлетворяют требованиям теоремы 10.3. В задачах 10.300–10.305 доказать утверждения.

10.300. а) Если $f(x)$ — четная функция, то $\hat{f}_c(\omega) = 2\hat{f}(\omega)$ при $\omega \geq 0$; б) если $f(x)$ — нечетная функция, то $\hat{f}_s(\omega) = 2i\hat{f}(\omega)$ при $\omega \geq 0$.

10.301. $\mathbb{F}[c_1 f + c_2 g] = c_1\mathbb{F}[f] + c_2\mathbb{F}[g]$, $c_1, c_2 = \text{const}$ (*линейность преобразования Фурье*).

10.302. а) Если $f(x)$ — четная функция, то $\hat{f}(\omega)$ — четная вещественная функция (*четная симметрия преобразования Фурье*); б) если $f(x)$ — нечетная функция, то $\hat{f}(\omega)$ — нечетная чисто мнимая функция (*нечетная симметрия преобразования Фурье*).

10.303. $\mathbb{F}[f(ax)] = \dfrac{1}{a}\hat{f}\left(\dfrac{\omega}{a}\right)$, $a = \text{const} > 0$ (*изменение масштаба*).

10.304. $\mathbb{F}[f(x-a)] = e^{-i\omega a}\hat{f}(\omega)$, $a = \text{const}$ (*сдвиг аргумента на a*).

10.305. а) $f(0) = \displaystyle\int_{-\infty}^{\infty}\hat{f}(\omega)d\omega$; б) $\hat{f}(0) = \dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx$.

В задачах 10.306–10.320 найти преобразования Фурье в комплексной форме и, если они существуют, косинус- или синус-преобразования указанных функций.

10.306. $f(x) = \begin{cases} 0 \text{ при } x < 0, \\ e^{-x} \text{ при } x \geq 0. \end{cases}$

10.307. $f(x) = e^{-|x|}$.

10.308. $f(x) = \begin{cases} a \text{ при } |x| \leq A, \\ 0 \text{ при } |x| > A, \end{cases}$ $A > 0$.

10.309. $f(x) = \begin{cases} a \text{ при } A \leq x \leq B, \\ 0 \text{ при } x < A \text{ и } x > B, \end{cases}$ $B > A$.

10.310. $f(x) = \begin{cases} \operatorname{sgn} x \text{ при } |x| \leq 1, \\ 0 \text{ при } |x| > 1. \end{cases}$

10.311. $f(x) = \begin{cases} a(1-|x|) \text{ при } |x| \leq 1, \\ 0 \text{ при } |x| > 1. \end{cases}$

10.312. $f(x) = \begin{cases} 2 \text{ при } |x| \leq 1, \\ 1 \text{ при } 1 < |x| \leq 2, \\ 0 \text{ при } |x| \geq 2. \end{cases}$

10.313. $f(x) = \begin{cases} 0 \text{ при } x < 0, \\ xe^{-x} \text{ при } x \geq 0. \end{cases}$

10.314. $f(x) = \begin{cases} \cos x \text{ при } x \in [0; \pi], \\ 0 \text{ при } x \notin [0; \pi]. \end{cases}$

10.315. $f(x) = \begin{cases} xe^{x} \text{ при } x < 0, \\ 0 \text{ при } x \geq 0. \end{cases}$

10.316. $f(x) = \begin{cases} x+1 \text{ при } |x| \leq 1, \\ 0 \text{ при } |x| > 1. \end{cases}$

10.317. $f(x) = \begin{cases} \sin x \text{ при } x \in [0; \pi], \\ 0 \text{ при } x \notin [0; \pi]. \end{cases}$

10.318. $f(x) = \begin{cases} x^2 \text{ при } |x| \leq 1, \\ 0 \text{ при } |x| > 1. \end{cases}$

10.319. $f(x) = be^{-\alpha|x|}(1 + \alpha|x|)$, $\alpha > 0$.

10.320. $f(x) = be^{-\alpha|x|}\left(1 + \alpha|x| + \dfrac{1}{3}\alpha^2 x^2\right)$, $\alpha > 0$.

ГЛАВА 11

ЭЛЕМЕНТЫ ТЕОРИИ ВЕРОЯТНОСТЕЙ

§ 11.1. СЛУЧАЙНЫЕ СОБЫТИЯ. ВЕРОЯТНОСТЬ

1. Случайные события и действия над ними

Пусть задан вероятностный опыт (испытание, эксперимент). Обозначим Ω — *множество элементарных исходов* данного опыта. Под этим понимают множество взаимоисключающих случайных исходов $\{\omega\}$ таких, что результатом опыта всегда является один и только один исход ω.

Любое подмножество множества элементарных исходов Ω будем называть *случайным событием*. Заметим, что при математически строгом подходе это определение должно быть уточнено, если Ω не является конечным или счетным множеством. Такое уточнение необходимо при построении аксиоматики теории вероятностей.

Считается, что *событие A произошло* (*наступило*, *реализовалось*), если результатом случайного опыта явился какой-либо из элементарных исходов, входящих в подмножество $A \subset \Omega$.

Событие $A = \Omega$ называется *достоверным событием*, а событие $A = \varnothing$, не содержащее ни одного элементарного исхода, называется *невозможным событием*. Очевидно, что достоверное событие Ω всегда происходит, а невозможное событие $\varnothing$ никогда не происходит в данном опыте.

Два события A и B называются *совместными* (*несовместными*), если в результате эксперимента возможно (невозможно) их совместное осуществление. Другими словами, события A и B совместны, если соответствующие множества A и B имеют общие элементы, и несовместны в противном случае.

Суммой $A + B$ событий A и B называется событие, состоящее в том, что происходит хотя бы одно из событий A или B (соответствующее множество является объединением множеств A и B).

Произведением AB событий A и B называется событие, состоящее в том, что происходят оба события A и B (соответствующее множество является пересечением множеств A и B).

Разностью $A - B$ событий A и B называется событие, состоящее в том, что происходит событие A, но не происходит событие B (соответствующее множество состоит из тех элементарных исходов, которые принадлежат множеству A, но не принадлежат множеству B).

Противоположным событию A называется событие $\bar{A}$ (отрицание события A), состоящее в том, что событие A не происходит (соответствующее множество $\bar{A} = \Omega \setminus A$ состоит из всех элементарных исходов, не входящих в подмножество A).

Говорят, что *событие A влечет за собой событие B* ($A \subset B$), если каждое появление события A сопровождается появлением события B (множество A является подмножеством множества B).

События A и B называются эквивалентными ($A = B$), если $A \subset B$ и $B \subset A$.

Операции сложения и умножения событий обладают следующими свойствами:

$A + B = B + A$; $AB = BA$ (*коммутативность*);

$A + (B + C) = (A + B) + C$; $A(BC) = (AB)C$ (*ассоциативность*);

$(A + B)C = AC + BC$ (*дистрибутивность умножения относительно сложения*).

Заметим, что указанное свойство дистрибутивности позволяет «раскрывать скобки», как в обычной алгебре действительных чисел. ►

ПРИМЕР 11.1. Из $A \subset B$ следует, что $A + B = B$, $AB = A$ (*общий закон поглощения*).

◄ Докажем второе из этих равенств. Пусть элементарный исход $\omega \in AB$. Тогда по определению произведения событий $\omega \in A$, поэтому $AB \subset A$.

Далее, если $\omega \in A$, то при условии $A \subset B$ имеем $\omega \in B$, т. е. $\omega \in AB$, откуда следует, что $A \subset AB$.

Итак, $AB \subset A$ и $A \subset AB$, значит, $AB = A$. ►

В задачах 11.1–11.14 доказать справедливость тождеств.

11.1. $A - B = A\overline{B}$.

11.2. (*простейшие законы поглощения*). $A + A = A$, $AA = A$, $A + \varnothing = A$, $A\varnothing = \varnothing$, $A + \Omega = \Omega$, $A\Omega = A$.

11.3. $A + \overline{A} = \Omega$; $\overline{\Omega} = \varnothing$, $\overline{\varnothing} = \Omega$, $A\overline{A} = \varnothing$.

11.4. $\overline{\overline{A}} = A$.

11.5. $\overline{A + B} = \overline{A} \cdot \overline{B}$, $\overline{AB} = \overline{A} + \overline{B}$ (*правила де Моргана*).

11.6. Методом математической индукции доказать:

$$\overline{A_1 + A_2 + \ldots + A_n} = \overline{A_1} \cdot \overline{A_2} \cdot \ldots \cdot \overline{A_n}.$$

11.7. (*дистрибутивность сложения относительно умножения*). $AB + C = (A + C)(B + C)$.

11.8. $(A - B) + B = A + B$ (вычитание событий не является ассоциативной операцией).

11.9. Пусть $A \subset B$. Показать, что тогда $(A - B) + B = B$.

11.10. $(A + B) - B = A - AB = A\overline{B} = A - B$.

11.11. $AC - B = AC - BC$.

11.12. $(A + B)(A + \overline{B}) = A$.

11.13. $(\overline{A} + BC)(\overline{B} + AC)(\overline{C} + AB) = ABC + \overline{A}\overline{B}\overline{C}$.

11.14. $(A - B) + (A - C) = A - BC$.

11.15. Проверить истинность следующих утверждений:

1) $ABC \subset AB + AC + BC$;

2) $AB + \overline{C} = A\overline{C} + \overline{B}C$;

3) $AB + AC + BC \subset A + B + C$.

Пусть A, B, C — наблюдаемые события в некотором эксперименте. В задачах 11.16–11.19 выразить указанные события в алгебре событий.

11.16. $E_1 = \{$из трех событий A, B, C произойдет ровно одно$\}$, $F_1 = \{$из трех событий A, B, C произойдет ровно два$\}$.

11.17. $E_2 = \{$из трех событий A, B, C произойдет хотя бы одно$\}$, $F_2 = \{$из трех событий A, B, C произойдет не меньше двух$\}$.

11.18. $E_3 = \{$из трех событий A, B, C не произойдет ни одного$\}$, $F_3 = \{$из трех событий A, B, C произойдет хотя бы два$\}$, $G = \{$из трех событий A, B, C не произойдет хотя бы одно$\}$.

11.19. Производится три выстрела из орудия по цели. Определим наблюдаемое событие $A_k = \{$попадание при k-м выстреле$\}$ ($k = 1, 2, 3$). Записать в алгебре событий следующие события: $A = \{$ровно одно попадание$\}$, $B = \{$хотя бы одно попадание$\}$, $C = \{$хотя бы один промах$\}$, $D = \{$не меньше двух попаданий$\}$, $E = \{$попадание не раньше чем при третьем выстреле$\}$.

2. Вероятность события. Классическая вероятностная схема (схема урн)

В современной теории вероятностей вероятность строится как определенная числовая мера множеств-событий.

Пусть $\mathbb{F}$ — система подмножеств из Ω, удовлетворяющая условиям:

1) $\Omega \in \mathbb{F}$ (Ω — элемент этой системы);

2) из условия $A \in \mathbb{F}$, $B \in \mathbb{F}$ следует $A + B \in \mathbb{F}$, $AB \in \mathbb{F}$, $\bar{A} \in \mathbb{F}$, $\bar{B} \in \mathbb{F}$. Такая система подмножеств называется *алгеброй событий*.

Вероятностью события A называется числовая функция $P(A)$, определенная на алгебре событий $\mathbb{F}$, такая что выполняются следующие 3 аксиомы:

1) $P(A) \geq 0$ (*аксиома неотрицательности*);

2) $P(\Omega) = 1$ (*аксиома нормированности*);

3) для любой последовательности попарно несовместных событий $A_1, A_2, \ldots, A_n, \ldots$ ($A_iA_j = \varnothing$, $i \neq j$) имеет место

$$P\left(\sum_k A_k\right) = \sum_k P(A_k) \text{ (\textit{аксиома сложения})}.$$

Из указанных аксиом вытекают простейшие свойства вероятности:

$$P(\varnothing) = 0;\ P(\bar{A}) = 1 - P(A);\ 0 \leq P(A) \leq 1.$$

Пусть опыт состоит из конечного числа исходов. Элементарные исходы опыта называются *равновозможными*, если по условиям этого опыта наступление любого из них не является объективно более возможным, чем наступление другого. Например, равновозможными являются элементарные исходы опытов, связанных с подбрасыванием монеты, правильной игральной кости, с извлечением наудачу шаров из урны, содержащей n неотличимых на ощупь шаров, и т. д.

Опыт, имеющий конечное число равновозможных элементарных исходов, называется *классической вероятностной схемой* (*схемой урн*). В силу конечности множества Ω, система всех подмножеств множества Ω представляет алгебру. Таким образом, любое подмножество из Ω в классической схеме является наблюдаемым событием.

Пусть A — наблюдаемое событие в классической схеме, $N(A)$ — число *благоприятствующих событию* A исходов (т. е. число элементов подмножества $A \in \Omega$). Тогда вероятность события A определяется как отношение числа исходов, благоприятствующих этому событию, к общему числу исходов:

$$P(A) = \frac{N(A)}{N(\Omega)}. \tag{11.1}$$

Формула (11.1) называется *формулой классической вероятности*.

При подсчете числа элементарных исходов, благоприятствующих тому или иному событию, часто используют *формулы комбинаторики*.

Пусть даны m групп элементов, причем i-я группа содержит N_i элементов. Опыт состоит в выборе m элементов — по одному элементу из каждой группы. Тогда общее число N возможных способов выбора определяется *основной формулой комбинаторики*:

$$N = N_1 N_2 \ldots N_m. \tag{11.2}$$

Рассмотрим опыт с выбором m элементов из множества, содержащего n элементов. Результат такого опыта называют *выборкой из n элементов по m*. Возможны следующие схемы выбора.

1. Каждый выбранный элемент после выбора не участвует в дальнейшем выборе (т. е. осуществляется *выбор без возвращения*). Тогда говорят о *выборке без повторений*, так как в такой выборке все элементы различны (не повторяются). Если при этом не происходит *упорядочивания* элементов, то различные исходы опыта отличаются только составом и называются *сочетаниями*. Таким образом, общее число исходов в данной схеме определяется формулой

$$C_n^m = \frac{n!}{m!(n-m)!}. \tag{11.3}$$

2. Выбор m элементов осуществляется *без возвращения*, но с *упорядочиванием*. В этом случае элементарные исходы называются *размещениями*, а их общее число определяется формулой

$$A_n^m = \frac{n!}{(n-m)!} = m! C_n^m. \tag{11.4}$$

3. Каждый выбранный элемент фиксируется и возвращается в группу из n элементов, т. е. участвует в дальнейшем выборе (осуществляется *выбор с возвращением*). В результате один и тот же элемент может попасть в выборку и более одного раза. Если *упорядочивания* не производится, то различные исходы отличаются только составом и называются *сочетаниями с повторениями*. Их общее число определяется формулой

$$C_{(n)}^m = C_{n+m-1}^m = \frac{(n+m-1)!}{m!(n-1)!}. \tag{11.5}$$

4. Выбор m элементов осуществляется *с возвращением* (как и в схеме 3) и с дальнейшим *упорядочиванием*. Получаемые элементарные исходы называются *размещениями с повторениями* и отличаются не только составом, но и расположением элементов. Общее число исходов в данной схеме определяется формулой

$$A_{(n)}^m = n^m. \tag{11.6}$$

ПРИМЕР 11.2. Для представительства в студенческом органе самоуправления из группы 20 студентов с помощью жеребьевки выбираются три человека. С какой вероятностью в представительство попадут только студенты из первой половины списка группы (событие A)?

◄ В данном случае происходит выбор из 20 элементов по 3 без возвращения и без упорядочивания (схема 1). Элементарные исходы — сочетания, и общее число исходов: $N(\Omega) = C_{20}^3$.

При подсчете числа благоприятствующих исходов учитываем, что этим исходам соответствуют выборки из 10 (первая половина списка) по 3: $N(A) = C_{10}^3$. По формулам (11.1) и (11.3) получаем

$$\mathrm{P}(A) = \frac{C_{10}^3}{C_{20}^3} = \frac{10! \cdot 3! \cdot 17!}{3! \cdot 7! \cdot 20!} = \frac{10! \cdot 17!}{7! \cdot 20!} = \frac{10 \cdot 9 \cdot 8}{20 \cdot 19 \cdot 18} = \frac{8}{2 \cdot 19 \cdot 2} = \frac{2}{19}. \blacktriangleright$$

ПРИМЕР 11.3. Для представительства в студенческом органе самоуправления от группы (20 студентов) с помощью жеребьевки выбирают трех человек: руководителя, его заместителя и секретаря представительства.

С какой вероятностью председателем будет студент из первой половины списка, а остальные представители — из второй половины списка (событие A)?

◀ Данный опыт соответствует схеме выбора 2, т. е. происходит выбор из 20 по 3 без возвращения и с упорядочиванием. Например, можно считать, что первый элемент выборки — председатель, второй — заместитель и третий — секретарь. Поэтому исходы в данном опыте — размещения и $N(\Omega)=A_{20}^3$.

Найдем число благоприятствующих исходов $N(A)$. Для этих исходов председатель выбирается из десяти студентов (первая половина списка), т. е. существует $n_1 = 10$ вариантов выбора председателя. Остальные представители (2 человека в определенном порядке) выбираются также из десяти (вторая половина списка). Число вариантов этого выбора: $n_2 = A_{10}^2$. Поэтому по правилу (11.2) $N(A)=n_1n_2=10A_{10}^2$. Окончательно, по формулам (11.1) и (11.4) получаем

$$\mathrm{P}(A)=\frac{10A_{10}^2}{A_{20}^3}=\frac{10\cdot 10!\cdot 17!}{8!\cdot 20!}=\frac{10\cdot 10\cdot 9}{20\cdot 19\cdot 18}=\frac{10}{2\cdot 19\cdot 2}=\frac{5}{38}. \blacktriangleright$$

11.20. Наудачу выбирается пятизначное число. Какова вероятность следующих событий: $A = \{$число одинаково читается как слева направо, так и справа налево$\}$, $B = \{$число кратно пяти$\}$, $C = \{$число состоит из нечетных цифр$\}$?

11.21. На шахматную доску случайным образом ставят две ладьи — белую и черную. Какова вероятность того, что ладьи не побьют друг друга?

11.22. Зенитная батарея, состоящая из n орудий, производит залп по группе, состоящей из m самолетов. Каждое из орудий выбирает себе цель наудачу независимо от остальных. Найти вероятность того, что все орудия выстрелят по одному самолету.

11.23. Множество E состоит из трех различных элементов: $E = \{a, b, c\}$. Выписать состав Ω во всех четырех опытах по выбору двух элементов из множества E без возвращения и с возвращением, без упорядочивания и с упорядочиванием. Определить число элементов множества Ω (число различных выборок) в каждом из четырех опытов и сравнить результат с тем, который получается по соответствующей комбинаторной формуле.

11.24. Опыт состоит в случайном выборе одного элемента из множества $E_1 = \{a, b\}$ и одного элемента из множества $E_2 = \{a, b, c\}$. Перечислить состав множества $E = E_1 \times E_2$ (*прямое произведение* множеств). Какова вероятность того, что выборка будет состоять из одинаковых элементов?

11.25. Из множества чисел $E = \{1, 2, \ldots, n\}$ последовательно выбирается два числа. Какова вероятность, что второе число больше первого, если выбор осуществляется: а) без возвращения; б) с возвращением?

11.26. Путем жеребьевки разыгрывается 6 подписных изданий среди 10 участников. Сколько различных распределений подписок возможно, если каждое очередное наименование разыгрывается между всеми участниками? Какова вероятность того, что первые шесть человек получат каждый по одной подписке?

11.27. Студенты из группы (20 человек) сдают экзамен в случайной очередности. С какой вероятностью первый по списку группы студент будет сдавать экзамен первым, а двадцатый по списку студент — последним (событие A)?

11.28. Числа 1, 2, ..., 9 записываются в случайном порядке. Найти вероятности следующих событий: $A = \{$числа будут записаны в порядке возрастания$\}$, $B = \{$числа 1 и 2 будут стоять рядом и в порядке возрастания$\}$, $C = \{$числа 3, 6 и 9 будут стоять рядом$\}$, $D = \{$на четных местах будут стоять четные числа$\}$.

11.29. Группа, состоящая из 8 человек, занимает места за круглым столом в случайном порядке. Какова вероятность того, что при этом два определенных лица окажутся сидящими рядом?

11.30. n человек входят в комнату, где имеется всего m стульев ($m < n$), и рассаживаются случайным образом, но так, что все стулья оказываются занятыми. Найти вероятности следующих событий: $A = \{$два определенных лица окажутся без места$\}$, $B = \{k$ определенных лиц будут сидеть $(k \le m)\}$.

11.31. n мужчин и n женщин случайным образом рассаживаются в ряд на $2n$ мест. Какова вероятность, что все мужчины будут сидеть рядом?

11.32. В шахматном турнире участвуют 20 человек, которые разбиваются по жребию на две команды по 10 человек в каждой. Какова вероятность, что два наиболее сильных участника окажутся в разных командах?

11.33. В ящике 80 годных и 20 бракованных изделий. Наудачу отобрано 10 изделий для контроля. Найти вероятности событий: $A = \{$в выборке содержится ровно 4 бракованных$\}$, $B = \{$в выборке отсутствуют бракованные изделия$\}$.

11.34. Из колоды в 52 карты наудачу извлекают 4 карты. Найти вероятности событий: $A = \{$в полученной выборке все карты бубновой масти$\}$, $B = \{$появится хотя бы один туз$\}$, $C = \{$появятся ровно две пики$\}$.

11.35. Студент купил карточку «Спортлото» (6 из 49) и зачеркнул 6 номеров. Найти вероятности событий: $A = \{$студент угадал все 6 номеров$\}$, $B = \{$студент угадал по крайней мере 5 номеров$\}$.

11.36. Найти вероятность того, что случайно выбранный четырехзначный номер автомобиля не содержит цифр, отличных от «3» и «7».

11.37. Бросается 10 игральных костей. Вычислить вероятности событий: $A = \{$ни на одной из костей не выпадет 6 очков$\}$, $B = \{$хотя бы на одной из костей выпадет 6 очков$\}$, $C = \{$ровно на трех костях выпадет 6 очков$\}$.

11.38. Шесть студентов, среди которых Иванов, Петров и Сидоров, случайным образом занимают очередь в буфет. С какой вероятностью Сидоров окажется первым в очереди, а Иванов и Петров — по соседству друг с другом?

11.39. Из разрезной азбуки выкладывается слово *математика*. Затем все буквы этого слова тщательно перемешиваются и снова выкладываются в случайном порядке. Какова вероятность того, что снова получится слово *математика*?

11.40. Из урны, содержащей шары с номерами 1, 2, ..., n, наудачу отбирается k шаров и номера вынутых шаров записываются последовательно.

Какова вероятность того, что на фиксированном m-м месте ($m \le k$) окажется шар с номером m, если выбор осуществляется: а) без возвращения; б) с возвращением?

11.41. 20 футбольных команд, среди которых 4 призера предыдущего первенства, по жеребьевке разбиваются на 4 занумерованные подгруппы по 5 команд в каждой. Найти вероятности событий: $A = \{$в первую и вторую подгруппы не попадет ни один из призеров$\}$, $B = \{$в каждую подгруппу попадет один из призеров$\}$.

11.42. 52 карты наудачу раздаются четырем игрокам (каждому по 13 карт). Найти вероятности событий: $A = \{$каждый игрок получит туза$\}$, $B = \{$первый игрок получит все 13 карт одной масти$\}$.

11.43. В условиях предыдущей задачи найти вероятности событий: $C = \{$все тузы попадут к одному из игроков$\}$, $D = \{$двое определенных игроков не получат ни одного туза$\}$.

11.44. 7 яблок, 3 апельсина и 5 лимонов раскладываются случайным образом в три пакета таким образом, чтобы в каждом пакете было одинаковое количество фруктов. Найти вероятности событий: $A = \{$в каждом из пакетов по одному апельсину$\}$, $B = \{$определенный пакет не содержит апельсинов$\}$.

3. Схема геометрической вероятности

Формула классической вероятности следующим образом обобщается на случай бесконечных *множеств элементарных исходов*. Пусть Ω представляет собой множество в пространстве $\mathbb{R}^n$, в частности на прямой $\mathbb{R}$ или на плоскости $\mathbb{R}^2$.

В пространстве $\mathbb{R}$ в качестве множеств будем рассматривать только те множества, которые имеют *длину*; в пространстве $\mathbb{R}^2$ — те множества, которые имеют *площадь*; в $\mathbb{R}^3$ — множества, имеющие *объем*; в $\mathbb{R}^n$, $n > 3$, — множества, имеющие *обобщенный* (*n-мерный*) *объем*. Такие множества будем называть *измеримыми*. Под *мерой* $mes(A)$ множества $A \subset \mathbb{R}^n$ будем понимать длину, площадь, объем или обобщенный объем в зависимости от n.

Будем считать, что множество элементарных исходов случайного опыта $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ имеет конечную меру и точки $\omega \in \Omega$ (элементарные исходы) в этом опыте выбираются так, что вероятность попадания ω в любое измеримое множество $G \subset \Omega$ пропорциональна $mes(G)$ и не зависит от формы и расположения G в пространстве Ω (последнее условие аналогично требованию о равновозможности элементарных исходов в классической схеме). Такой опыт называют *схемой геометрической вероятности*.

Итак, пусть случайный опыт удовлетворяет поставленным условиям, и событие $A \subset \Omega$ есть измеримое подмножество множества Ω. Тогда вероятность события A определяется формулой

$$\mathrm{P}(A) = \frac{mes(A)}{mes(\Omega)}. \qquad (11.7)$$

Это определение называется *геометрическим определением вероятности*, а формула (11.7) — *формулой геометрической вероятности*.

ПРИМЕР 11.4. Точное значение физической величины округляют до ближайшего целого числа. Найти вероятность того, что абсолютная величина ошибки округления не превысит 0,1 (событие A).

◄ При округлении точного значения до ближайшего целого возникает случайная ошибка x, величина которой лежит в диапазоне от $-0{,}5$ до $+0{,}5$. Таким образом, опыт состоит в случайном выборе числа x из отрезка $[-0,5;\ 0,5]$. Соответствующий элементарный исход: $\omega = x$. Поэтому множество элементарных исходов имеет вид $\Omega = [-0,5;\ 0,5] \subset \mathbb{R}$.

Событие A, согласно условию задачи, — это множество, имеющее вид $A = \{x\,|\,|x| \le 0,1\} = [-0,1;\ 0,1]$.

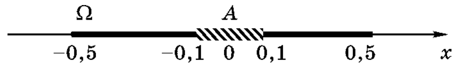


Рис. 11.1

Множества Ω и A показаны на рис. 11.1. В данном случае мерой множества является его длина, поэтому по формуле (11.7) получаем $\mathrm{P}(A) = \dfrac{mes(A)}{mes(\Omega)} = \dfrac{0,2}{1} = 0,2$. ►

ПРИМЕР 11.5. К причалу для высадки пассажиров в течение ближайшего часа в случайные моменты времени должны подойти два катера. Одновременное причаливание обоих катеров невозможно. Время высадки пассажиров с первого катера составляет 10 мин, а со второго катера — 20 мин.

Найти вероятность того, что одному из катеров придется ожидать освобождения причала (событие A).

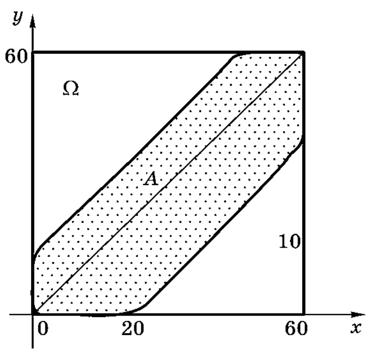


Рис. 11.2

◄ Обозначим время прихода (в минутах) первого катера через x, а второго — через y. Тогда опыт можно представить как случайный выбор точки (x, y) из двумерного множества $\Omega = \{(x, y) \in R^2\,|\,0 \le x \le 60,\ 0 \le y \le 60\} \subset \mathbb{R}^2$. Очевидно, это квадрат со стороной 60 (рис. 11.2).

Событие A произойдет в любом из следующих случаев:

а) первый катер прибудет не позднее второго ($x \le y$) и при этом к моменту прихода второго катера высадка с первого катера еще не закончится ($y - x \le 10$), т. е. если $0 \le y - x \le 10$;

б) второй катер придет раньше, т. е. $y < x$, и к прибытию первого катера высадка пассажиров на втором еще не закончится: $x - y \le 20$, т. е. если $0 < x - y \le 20$.

Таким образом, условие появления события A описывается объединением неравенств $\left[\begin{array}{l} 0 \le y - x \le 10, \\ 0 < x - y \le 20, \end{array}\right.$ т. е. $A = \left\{(x, y) \in \Omega \,\middle|\, \left[\begin{array}{l} 0 \le y - x \le 10, \\ 0 \le x - y \le 20 \end{array}\right.\right\}$. Область A на рис. 11.2 заштрихована.

В данном случае мера множества — это площадь. Площадь области A на рис. 11.2 равна площади квадрата без двух треугольников, поэтому $mes(A) = 60^2 - 0,5(50^2 + 40^2) = 1550$, $mes(\Omega) = 60^2 = 3600$ и $\mathrm{P}(A) = \dfrac{mes(A)}{mes(\Omega)} \approx 0,43$. ►

11.45. После прошедшего урагана на участке между 40-м и 70-м километрами телефонной линии произошел обрыв провода. Какова вероятность того, что разрыв произошел между 45-м и 50-м километрами линии?

11.46. На перекрестке установлен автоматический светофор, в котором одну минуту горит зеленый свет и полминуты — красный, затем снова одну минуту — зеленый и полминуты — красный и т. д. В случайный момент времени к перекрестку подъезжает автомобиль. Какова вероятность того, что он проедет перекресток без остановки?

11.47. Внутри квадрата с вершинами (0, 0), (0, 1), (1, 1) и (1, 0) наудачу ставится точка (x, y). Какова вероятность того, что координаты этой точки удовлетворяют условию $y > \frac{x}{2}$?

11.48. В условиях эксперимента, описанного в предыдущей задаче, найти вероятности событий: $C = \{(x, y) | \max(x, y) < a, a > 0\}$, $D = \{(x, y) | \min(x, y) < a, 0 \le a \le 1\}$.

11.49 (*задача о встрече*). Иван и Петр договорились о встрече в определенном месте между одиннадцатью и двенадцатью часами. Каждый приходит в случайный момент указанного промежутка и ждет появления другого до истечения часа, но не более 15 минут, после чего уходит. Найти вероятность события A = {встреча состоялась}.

11.50. В условиях предыдущей задачи найти вероятности событий: C = = {Ивану не пришлось ждать Петра} и D = {встреча состоялась после 11 ч 30 мин}, если установлено время ожидания τ мин, $0 < \tau < 60$.

11.51. Точка (p, q) наудачу выбирается в квадрате $|p| \le 1$, $|q| \le 1$, и составляется квадратное уравнение $x^2 + px + q = 0$. Найти вероятности событий: A = {корни уравнения действительны}, B = {корни уравнения положительны}.

11.52. На отрезке длины l наудачу выбираются две точки. Определить вероятность того, что из полученных трех отрезков можно построить треугольник.

11.53. Два угла треугольника выбираются наудачу из отрезка $\left[0, \frac{\pi}{3}\right]$. Какова вероятность, что треугольник остроугольный?

11.54. На окружности единичного радиуса наудачу ставятся три точки A, B и C. Какова вероятность того, что треугольник ABC остроугольный?

11.55 (*задача Бюффона*). На плоскость, разграфленную параллельными прямыми, отстоящими друг от друга на расстояние $2a$, наудачу бросается игла диной $2l$ ($l \le a$). Найти вероятность события A = {игла пересечет какую-либо из прямых}.

4. Условная вероятность. Независимость событий

Пусть A и B — наблюдаемые события в эксперименте, причем $\mathrm{P}(A) > 0$. *Условной вероятностью* $\mathrm{P}(B/A)$ *осуществления события B при условии, что событие A произошло*, называется число, определяемое равенством

$$\mathrm{P}(B/A) = \frac{\mathrm{P}(AB)}{\mathrm{P}(A)}. \qquad (11.8)$$

Для краткости условную вероятность $\mathrm{P}(B/A)$ называют «*вероятностью события B при условии A*». Формула (11.8) вводится аксиоматически и сводит вопрос о вычислении *условной* вероятности к вычислению двух *безусловных* вероятностей, определенных в вероятностном пространстве для данного эксперимента. Кроме того, при таком определении условная вероятность, рассматриваемая как функция наблюдаемых событий $B \in \mathbb{F}$ при фиксированном событии A, обладает всеми свойствами безусловной вероятности.

Событие A называется *независимым от события* B, удовлетворяющего условию $P(B) > 0$, если выполняется равенство

$$P(A/B) = P(A).$$

События A и B называются *независимыми*, если

$$P(AB) = P(A)P(B).$$

ПРИМЕР 11.6. Студент подготовился к ответу на первые 15 из 20 вопросов экзамена. Вопрос для ответа на экзамене выбирается наудачу. События: B = {выбран известный студенту вопрос}, A = {выбран вопрос из второй половины списка}. Найти вероятности $P(B)$ и $P(B/A)$.

◀ По формуле классической вероятности находим $P(B)=\frac{15}{20}=\frac{3}{4}$, $P(A)=\frac{10}{20}=\frac{1}{2}$. Так как AB — событие, состоящее в том, что выбран знакомый студенту вопрос из второй половины списка, то $P(AB)=\frac{5}{20}=\frac{1}{4}$. Далее, по формуле (11.8) получаем $P(B/A)=\frac{1/4}{1/2}=\frac{1}{2}$. ▶

11.56. Пусть A, B и C — наблюдаемые события в эксперименте, причем $P(C) > 0$ и $P(AC) > 0$. Доказать справедливость следующих формул условной вероятности:

$$P(\bar{A}/C)=1-P(A/C),\ \ P(\Omega/C)=1,\ \ P(\varnothing/C)=0.$$

11.57. Один раз подбрасывается игральная кость. События: A = {выпало простое число очков}, B = {выпало четное число очков}. Вычислить $P(A/B)$.

11.58. Подбрасывают наудачу три игральные кости. Наблюдаемые события: A = {на трех костях выпадут разные грани}, B = {хотя бы на одной из костей выпадет шестерка}. Вычислить $P(B/A)$ и $P(A/B)$.

11.59. Вероятность того, что студент перейдет на второй курс, равна 0,9, а вероятность окончить институт равна 0,8. Какова вероятность того, что студент второго курса окончит институт?

11.60. Известно, что для данного эксперимента событие A не зависит от события B. Показать, что тогда событие B не зависит от A (т. е. свойство независимости является *взаимным*).

11.61. Пусть события A и B несовместны ($AB = \varnothing$) и имеют ненулевые вероятности. Доказать, что они зависимы. В частности, отсюда следует, что элементарные исходы любого вероятностного эксперимента зависимы.

11.62. Пусть события A и B независимы и не являются невозможными. Доказать, что они совместны.

11.63. Пусть события A и B независимы. Показать, что тогда независимыми являются и события $\bar{A}$ и B.

Следствие. Если A и B независимы, то независимы также и следующие пары событий: A и $\bar{B}$, $\bar{A}$ и B, $\bar{A}$ и $\bar{B}$.

11.64. Из колоды в 36 карт наудачу извлекают одну карту. События: A = {вынут туз}, B = {вынута карта красной масти}, F = {вынутая карта —

фигура, т. е. является валетом, дамой, королем или тузом}. Установить, зависимы или независимы следующие три пары событий: A и B, A и F, F и B.

11.65. В семье двое детей. Считая, что рождение мальчика и девочки — события независимые и равновероятные, вычислить вероятность того, что оба ребенка мальчики, если известно, что в семье есть мальчик.

События $A_1, A_2, \ldots, A_n$, $n > 2$, называются *независимыми в совокупности*, если для любого подмножества $\{A_{i_k}, k = 1, \ldots, m;\ m = 2, 3, \ldots, n\}$ из этих событий выполняется равенство

$$P(A_{i_1}A_{i_2}\ldots A_{i_m}) = P(A_{i_1})P(A_{i_2})\ldots P(A_{i_m}).$$

В частности, для событий A_i, $i = 1, \ldots, n$, независимых в совокупности,

$$P(A_1A_2\ldots A_n) = P(A_1)P(A_2)\ldots P(A_n). \tag{11.9}$$

Если события $A_1, A_2, \ldots, A_n$ независимы в совокупности, то они и попарно независимы, т. е. $P(A_iA_j) = P(A_i)P(A_j)$ для любых $i, j \in \{1, 2, \ldots, n\}$, $i \neq j$. Обратное, вообще говоря, неверно, т. е. из попарной независимости событий $A_1, A_2, \ldots, A_n$ не следует независимость в совокупности.

11.66. Подбрасываются наудачу две правильные монеты. События: A_1 = {на первой монете выпал герб}, A_2 = {на второй монете выпал герб}, A_3 = {на одной и только одной из монет выпал герб}. Показать, что события A_1, A_2, A_3 попарно независимы, но не являются независимыми в совокупности.

11.67 (*пример Бернштейна*). Тетраэдр, три грани которого окрашены соответственно в красный, зеленый и синий цвета, а четвертая грань содержит все три цвета, наудачу бросается на плоскость. События R, G и B состоят в том, что тетраэдр упал на грань, содержащую соответственно красный, зеленый либо синий цвет. Доказать, что указанные события попарно независимы, но не являются независимыми в совокупности.

5. Вероятности сложных событий

Сложным событием называется наблюдаемое событие, выраженное с помощью допустимых алгебраических операций через другие, наблюдаемые в этом же эксперименте события. Вероятность осуществления того или иного сложного события вычисляется по правилам, основу которых составляют две следующие формулы.

Формула сложения вероятностей для двух событий:

$$P(A + B) = P(A) + P(B) - P(AB).$$

Формула умножения вероятностей для двух событий:

$$P(AB) = P(A)P(B/A) = P(B)P(A/B).$$

Формула сложения легко обобщается на случай трех и большего числа событий (см., например, задачу 11.79). Формула умножения для произвольного числа n событий может быть записана в следующем виде:

$$P(A_1A_2\ldots A_n) = P(A_1)P(A_2/A_1)\ldots P(A_n/A_1A_2\ldots A_{n-1}). \tag{11.10}$$

ПРИМЕР 11.7. Из урны, в которой первоначально было 5 белых и 5 черных шаров, извлекли последовательно 3 шара. Найти вероятность того, что все извлеченные шары — белые (событие A), если: а) шары извлекались с возвращением; б) шары извлекались без возвращения.

◄ Пусть события A_i = {в i-м извлечении взят белый шар}. Рассмотрим две постановки опыта.

а) При каждом возвращении очередного шара состав урны восстанавливается, и результат каждого следующего извлечения можно считать независимым от предыдущих. Поэтому по формуле (11.9) при $n = 3$ имеем

$$P(A) = P(A_1A_2A_3) = P(A_1)P(A_2)P(A_3) = \left(\frac{1}{2}\right)^3 = \frac{1}{8}.$$

б) При извлечении без возвращения состав урны меняется, события A_1, A_2 и A_3 становятся зависимыми, поэтому используем формулу умножения (11.10) при $n = 3$: $P(A) = P(A_1A_2A_3) = P(A_1)P(A_2/A_1)P(A_3/A_1A_2)$.

Найдем вероятности событий в правой части последнего равенства. Очевидно, $P(A_1) = \frac{5}{10} = \frac{1}{2}$. Далее, $P(A_2/A_1) = \frac{4}{9}$, так как при условии, что событие A_1 произошло, ко второму извлечению в урне осталось 9 шаров, из которых 4 — белые. И, наконец, $P(A_3/A_1A_2) = \frac{3}{8}$, поскольку, если произошло событие A_1A_2 (и в первый, и во второй раз извлекли белый шар), то к третьему извлечению в урне было 8 шаров, из которых 3 белых. Подставляя полученные значения вероятностей в формулу для $P(A)$, окончательно получаем $P(A) = P(A_1)P(A_2/A_1)P(A_3/A_1A_2) = \frac{1}{2}\cdot\frac{4}{9}\cdot\frac{3}{8} = \frac{1}{12}$. ►

11.68. Пусть события A_1, A_2, ..., A_n независимы в совокупности. Показать, что

$$P(A_1 + A_2 + \ldots + A_n) = 1 - P(\bar{A}_1)P(\bar{A}_2)\ldots P(\bar{A}_n).$$

11.69. Из урны, содержащей 6 белых и 4 черных шара, наудачу и последовательно извлекают по одному шару до появления черного шара. Найти вероятность того, что придется производить четвертое извлечение, если выборка производится: а) с возвращением; б) без возвращения.

11.70. В условиях эксперимента, описанного в задаче 11.64, вычислить вероятности событий BF, AF и ABF.

11.71. В условиях того же эксперимента вычислить вероятности событий $B + F$, $F - A$, $F - AB$.

11.72. Только один из n ключей подходит к данной двери. Найти вероятность того, что придется опробовать ровно k ключей ($k \le n$) для открывания двери.

11.73. Монета бросается 3 раза. Какова вероятность, что все 3 раза появится герб?

11.74. Из колоды в 36 карт наудачу извлекают 3 карты. Какова вероятность, что среди них окажется хотя бы один туз?

11.75. Два стрелка независимо друг от друга произвели по одному выстрелу в одну и ту же мишень. Найти вероятности событий: A = {в мишени есть пробоины}, B = {ровно одна пробоина в мишени}.

11.76. Наудачу подбрасываются две игральные кости. Найти вероятности следующих событий: A = {сумма выпавших очков четна}, B = {произведение выпавших очков четно}, C = {на одной из костей число очков четно, а на другой — нечетно}.

11.77. Сколько раз нужно бросить пару игральных костей, чтобы с вероятностью, не меньшей 0,5, хотя бы один раз появилась сумма очков, равная 12?

11.78. Какова вероятность того, что наудачу взятое двузначное число делится на 2, но не делится на 3?

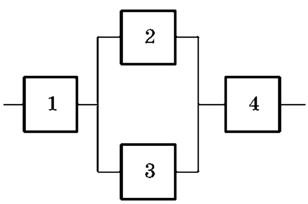
11.79. Используя ассоциативное свойство сложения, показать, что справедлива следующая формула сложения для трех событий:

$$\mathrm{P}(ABC) = \mathrm{P}(A) + \mathrm{P}(B) + \mathrm{P}(C) - \mathrm{P}(AB) - \mathrm{P}(BC) - \mathrm{P}(AC) + \mathrm{P}(ABC).$$

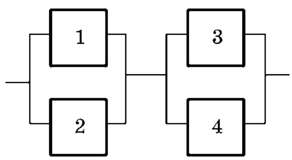
Рассмотрим схемы соединения элементов с одним входом и одним выходом. Предположим, что отказы элементов являются независимыми в совокупности событиями. Считается известной *надежность* p_k k-го элемента (вероятность его безотказной работы в течение заданного времени). Соответственно $q_k = 1 - p_k$ — вероятность его отказа. Отказ любого из элементов приводит к прерыванию сигнала в той ветви цепи, где находится данный элемент.

В задачах 11.80–11.82 вычислить надежность каждой из схем.

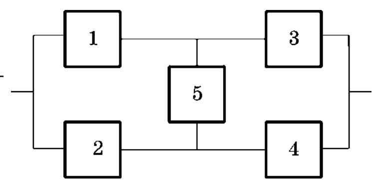
11.80.



11.81.



11.82.



6. Формула полной вероятности и формула Байеса

Пусть $H_1, H_2, \ldots, H_n$ — наблюдаемые события в эксперименте, причем система множеств $\{H_1, H_2, \ldots, H_n\}$ образует разбиение множества Ω. Для любого наблюдаемого в эксперименте события A справедлива следующая *формула полной вероятности*:

$$\mathrm{P}(A) = \sum_{k=1}^{n} \mathrm{P}(H_k)\mathrm{P}(A/H_k). \qquad (11.11)$$

События H_k принято называть *гипотезами* по отношению к событию A. Безусловные вероятности $\mathrm{P}(H_k)$ трактуются как *доопытные* (*априорные*) вероятности гипотез.

Систему множеств $\{H_1, H_2, \ldots, H_n\}$ в событийной трактовке называют *полной группой несовместных событий*.

ПРИМЕР 11.8. На трех заводах производятся однотипные изделия. В магазин поступило 50 изделий с первого завода, 20 изделий — со второго завода и 30 изделий — с третьего завода. Брак в общем количестве изделий, производимых на первом заводе, составляет 1%, на втором заводе — 2% и на третьем заводе — 3%.

В магазине наудачу выбрано одно изделие для покупки. С какой вероятностью это изделие является бракованным?

◀ Введем обозначения: A = {выбрано бракованное изделие}, H_i = {выбранное изделие изготовлено на i-м заводе}, $i = 1, 2, 3$. Очевидно, гипотезы $\{H_i\}$ составляют полную группу попарно несовместных событий.

Согласно условию задачи, вероятности гипотез равны

$$P(H_1) = \frac{50}{100} = 0{,}5,\ P(H_2) = \frac{20}{100} = 0{,}2,\ P(H_3) = \frac{30}{100} = 0{,}3,$$

а условные вероятности события A равны $P(A/H_1) = 0{,}01$, $P(A/H_2) = 0{,}02$, $P(A/H_3) = 0{,}03$.

По формуле полной вероятности (11.11) находим $P(A) = 0{,}5 \cdot 0{,}01 + 0{,}2 \cdot 0{,}02 + 0{,}3 \cdot 0{,}03 = 0{,}018$. ▶

Пусть эксперимент проведен и стало известно, что событие A произошло. Возникает вопрос: какова *послеопытная* (*апостериорная*) вероятность осуществления гипотезы H_k при условии, что событие A произошло? Ответ дается *формулой Байеса*

$$P(H_k / A) = \frac{P(H_k)P(A/H_k)}{P(A)}, \tag{11.12}$$

где $P(A)$ — полная вероятность, определяемая формулой (11.11). Формула Байеса позволяет «переоценить» вероятность каждой из гипотез после поступления новой информации относительно осуществления тех или иных наблюдаемых событий.

ПРИМЕР 11.9. В электронном устройстве, состоящем из двух блоков, возникла неисправность. Предварительный анализ возможных ее причин привел к такой оценке возможностей локализации неисправности: вероятности отказов в первом и втором блоках равны 0,4 и 0,6 соответственно (возможность отказов в обоих блоках исключается). Для уточнения причины неисправности на вход устройства был подан тестовый сигнал, который не проходит на выход с вероятностью 0,2, если неисправен первый блок, и с вероятностью 0,9 при неисправности во втором блоке. Сигнал на выходе не появился. В каком из блоков наиболее вероятно находится неисправность?

◀ Введем обозначения событий: A = {сигнал на выходе не появился}, H_1 = {неисправен первый блок}, H_2 = {неисправен второй блок}.

По условию задачи $P(H_1) = 0{,}4$, $P(H_2) = 0{,}6$, $P(A/H_1) = 0{,}2$, $P(A/H_2) = 0{,}9$.

По формуле Байеса (11.12) находим

$$P(H_1 / A) = \frac{0{,}4 \cdot 0{,}2}{0{,}4 \cdot 0{,}2 + 0{,}6 \cdot 0{,}9} = 0{,}129,\ P(H_2 / A) = \frac{0{,}6 \cdot 0{,}9}{0{,}4 \cdot 0{,}2 + 0{,}6 \cdot 0{,}9} = 0{,}871.$$

Полученные значения апостериорных вероятностей гипотез позволяют с большой уверенностью считать, что причина неисправности находится во втором блоке. ▶

11.83. В условиях эксперимента, описанного в примере 11.8, случайно выбранное изделие оказалось дефектным. Какова при этом условии вероятность, что оно изготовлено первым заводом?

11.84. В одной урне лежат 1 белый и 3 черных шара, во второй — 2 белых и 2 черных шара. Наудачу выбирают урну и из нее наудачу вынимают шар. С какой вероятностью этот шар белый?

11.85. Проверяется партия приборов, среди которых 10% дефектных. Проверка такова, что с вероятностью 0,95 обнаруживается дефект, если он есть, и с вероятностью 0,03 прибор ошибочно признается неисправным. С какой вероятностью проверяемый прибор будет признан дефектным?

11.86. Студент Иванов знает только 10 из 25 экзаменационных билетов. В каком случае шансы Иванова получить знакомый билет выше: когда он подходит тянуть билет первым или вторым по счету?

11.87. Программа экзамена содержит 30 различных вопросов, из которых студент Иванов знает только 15. Для успешной сдачи экзамена достаточно ответить на два предложенных вопроса или на один из них и на дополнительный вопрос. Какова вероятность того, что Иванов успешно сдаст экзамен?

11.88. Производится n независимых выстрелов зажигательными снарядами по резервуару с горючим. Каждый снаряд попадает в резервуар с вероятностью p. Если в резервуар попал один снаряд, то горючее воспламеняется с вероятностью p_1, если два и больше снарядов — с полной достоверностью. Найти вероятность того, что при n выстрелах горючее воспламенится.

11.89. Три стрелка произвели по одному выстрелу в мишень. Вероятности попадания в мишень первым, вторым и третьим стрелком соответственно равны 0,4, 0,3 и 0,5. Какова вероятность, что первый стрелок промахнулся, если в мишени оказалось две пробоины?

11.90. Из 18 стрелков 5 попадают в мишень с вероятностью 0,8, 7 — с вероятностью 0,7, 4 — с вероятностью 0,6 и 2 — с вероятностью 0,5. Наудачу выбранный стрелок произвел выстрел, но в мишень не попал. К какой из групп вероятнее всего принадлежит этот стрелок?

11.91. Прибор состоит из двух последовательно включенных узлов. Надежность первого узла равна 0,9, второго — 0,8. За время испытания прибора зарегистрирован его отказ. Какова вероятность, что отказал только первый узел?

11.92. Предположим, что надежность определения туберкулеза при рентгеновском просвечивании грудной клетки составляет 99% (т. е. 1% носителей туберкулеза остаются нераспознанными). Вероятность того, что у здорового человека будет ошибочно определен туберкулез, равна 0,01. Просвечиванию была подвергнута большая группа людей со средним процентом больных, равным 0,1%. Какова вероятность того, что человек, признанный больным, действительно является носителем туберкулеза?

§ 11.2. СЛУЧАЙНЫЕ ВЕЛИЧИНЫ

1. Случайные величины дискретного типа

Действительная функция $X = X(\omega)$, определенная на множестве Ω данного эксперимента, называется *случайной величиной дискретного типа* (сокращенно СВДТ), если множество E_X ее *возможных значений* (*реализаций*) конечно или счетно.

Пусть $\mathrm{P}\{X = x_k\} = p_k > 0, \ \sum_k p_k = 1,$ где суммирование ведется по всем возможным значениям k.

Законом распределения случайной величины X дискретного типа называется закон соответствия между ее возможными значениями $x_k \in E_X$ и вероятностями p_k этих возможных значений.

Закон распределения СВДТ можно задать аналитически или с помощью *ряда распределения*, который обычно оформляется в виде таблицы.

ПРИМЕР 11.10. Трижды подбрасывается монета. Случайная величина X — число выпавших гербов. Описать закон распределения.

◀ Очевидно, что $E_X = \{0, 1, 2, 3\}$. Множество элементарных исходов эксперимента Ω состоит из 8 равновероятных исходов. Рассматривая событие $\{X = k\}$, $k \in E_X$, как сложное и применяя правила теории вероятностей, получаем закон распределения, который оформим в виде таблицы 11.1.

Таблица 11.1

x_k	0	1	2	3
p_k	1/8	3/8	3/8	1/8

Полученное в примере 11.10 распределение носит название *биномиального*. Его общие свойства будут изучены позже. ▶

Функция $F_X(x)$ действительной переменной x, $-\infty < x < \infty$, определяемая формулой

$$F_X(x) = \mathrm{P}\{X < x\} = \sum_{i:\, x_i < x} \mathrm{P}\{X = x_i\}$$

называется *функцией распределения* случайной величины X дискретного типа.

Функция $F_X(x)$ обладает следующими свойствами:

1. $0 \le F_X(x) \le 1 \ \ \forall x \in \mathbb{R}$.
2. $F_X(-\infty) = 0, \ F_X(+\infty) = 1$.
3. $F_X(x)$ неубывающая функция на всей оси.
4. $F_X(x)$ непрерывна слева, т. е. $\lim\limits_{x \to x_0 - 0} F_X(x) = F_X(x_0) \ \ \forall x_0 \in \mathbb{R}$.

5 (*конструктивное свойство*). $\mathrm{P}\{x_1 \le X < x_2\} = F_X(x_2) - F_X(x_1)$.

Из определения и свойств 3 и 4 следует, что $F_X(x)$ имеет ступенчатый вид, испытывая скачки в точках x, для которых существует положительная вероятность события $\{X = x\}$.

ПРИМЕР 11.11. Закон распределения СВДТ задан таблицей 11.2.

Таблица 11.2

X	–3	–1	0	2	3
P	0,1	0,3	0,1	0,3	0,2

Составить функцию распределения и построить ее график. С помощью $F_X(x)$ найти вероятности событий $\{X = 2\}$ и $\{-1 < X \le 2\}$.

◀ По определению $F_X(x) = \mathrm{P}\{X < x\}$, поэтому

$$F_X(x) = \begin{cases} 0, & x \le -3, \\ 0{,}1, & -3 < x \le -1, \\ 0{,}4, & -1 < x \le 0, \\ 0{,}5, & 0 < x \le 2, \\ 0{,}8, & 2 < x \le 3, \\ 1, & x > 3. \end{cases}$$

График функции распределения $F_X(x)$ приведен на рис. 11.3.

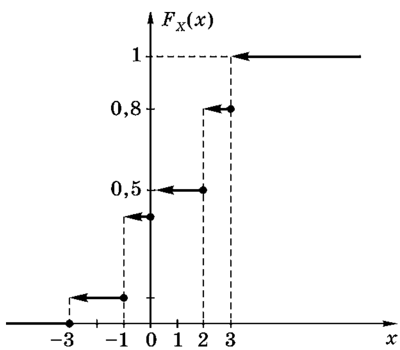


Рис. 11.3

$\mathrm{P}\{X = 2\} = F_X(2 + 0) - F_X(2) = 0{,}8 - 0{,}5 = 0{,}3;$
$\mathrm{P}\{-1 < X \le 2\} = F_X(2 + 0) - F_X(-1 + 0) =$
$= 0{,}8 - 0{,}4 = 0{,}4.$ ▶

1.93. Закон распределения СВДТ X задан таблицей 11.3. Найти вероятность события $\{-3 \le X \le 4\}$.

Таблица 11.3

X	1	3	5	7
P	0,1	0,3	0,2	0,4

11.94. *Индикатором события* $A \in \mathbb{F}$ называется СВДТ I_A, определяемая равенством

$$I_A = I_A(\omega) = \begin{cases} 1, & \omega \in A, \\ 0, & \omega \notin A. \end{cases}$$

Обозначим $p = \mathrm{P}(A)$. Описать закон распределения индикатора I_A и вычислить функцию распределения $F_{I_A}(x)$.

11.95. В урне 5 белых и 25 черных шаров. Вынули наудачу два шара. Случайная величина X — число вынутых белых шаров. Описать закон распределения и составить функцию распределения $F_X(x)$.

11.96. Случайная величина X принимает только два различных значения 1 и -1 с вероятностями 0,5. Вычислить $F_X(0{,}5)$ и $F_X(-0{,}5)$.

11.97. Функция распределения случайной величины X имеет вид

$$F_X(x) = \begin{cases} 0, & \text{если } x \le 2, \\ 0{,}3, & \text{если } 2 < x \le 3, \\ 0{,}5, & \text{если } 3 < x \le 4, \\ 1, & \text{если } x \ge 4. \end{cases}$$

Вычислить $\mathrm{P}\{X \ge 3{,}5\}$ и $\mathrm{P}\{|X| < 2{,}5\}$.

11.98. Построить ряд распределения для СВДТ из предыдущей задачи.

Числовые характеристики случайной величины дискретного типа. *Начальным моментом s-го порядка* случайной величины X дискретного типа называется действительное число α_s, определяемое формулой

$$\alpha_s = \sum_i x_i^s \mathrm{P}\{X = x_i\} = \sum_i x_i^s p_i. \tag{11.13}$$

Начальный момент α_s существует, если ряд в правой части формулы (11.13) сходится абсолютно.

Начальный момент первого порядка α_1 называется *математическим ожиданием* (*средним значением по распределению*) случайной величины X и для него используется специальное обозначение $m_X = \mathrm{M}[X] = \alpha_1$. Таким образом, математическое ожидание определяется формулой

$$m_X = \sum_i x_i \mathrm{P}\{X = x_i\} = \sum_i x_i p_i. \tag{11.14}$$

Математическое ожидание в теории вероятностей относится к типу *характеристик положения*. Другой характеристикой положения может являться *мода распределения*, определяемая как *наиболее вероятное из возможных значений случайной величины* X: $d_X = \arg\max_{x_k} \mathrm{P}\{X = x_k\}$.

Центральным моментом s-го порядка случайной величины X называется действительное число μ_s, определяемое формулой

$$\mu_s = \sum_i (x_i - m_X)^s p_i.$$

Центральный момент второго порядка называется *дисперсией случайной величины* X и для нее используется специальное обозначение $D_X = \mathrm{D}[X] = \mu_2$.

Таким образом, дисперсия случайной величины X определяется по формуле

$$D_X = \sum_i (x_i - m_X)^2 p_i.$$

Действительное число $\sigma_X = \sqrt{D_X}$ называется *средним квадратическим отклонением* случайной величины X (или *стандартным отклонением*).

ПРИМЕР 11.12. Закон распределения случайной величины X задан таблицей 11.4.

Вычислить m_X, α_2 и d_X.

Таблица 11.4

X	–1	0	1	2
P	0,1	0,2	0,3	0,4

◀ По формуле (11.14) получаем $m_X = -1 \cdot 0{,}1 + 0 \cdot 0{,}2 + 1 \cdot 0{,}3 + 2 \cdot 0{,}4 = 1$. Начальный момент α_2 находим по формуле (11.13) при $s = 2$:
$\alpha_2 = (-1)^2 \cdot 0{,}1 + 0^2 \cdot 0{,}2 + 1^2 \cdot 0{,}3 + 2^2 \cdot 0{,}4 = 2$.
Наиболее вероятным значением для данного распределения является $x_4 = 2$, поэтому $d_X = x_4 = 2$. ▶

Таблица 11.5

X	1	2	3	4
P	1/16	1/4	1/2	3/16

11.99. Закон распределения случайной величины X задан таблицей 11.5.

Вычислить m_X, D_X и σ_X.

11.100. Доказать, что из определений моментов следует формула

$$D_X = \alpha_2 - \alpha_1^2 = \alpha_2 - m_X^2,$$

которую часто используют для вычисления дисперсии.

11.101. Вычислить математическое ожидание, дисперсию и среднеквадратическое отклонение индикаторной случайной величины I_A, определенной в задаче 11.93.

Таблица 11.6

X	0	1	2
P	0,1	0,2	c

11.102. Закон распределения случайной величины X задан таблицей 11.6. Найти константу c и вычислить $\text{P}\{X > 0{,}7\}$, m_X, D_X и σ_X.

11.103. Возможные значения случайной величины X таковы: $x_1 = 1$, $x_2 = 2$, $x_3 = 3$. Известно, что $m_X = 2{,}3$, $\alpha_2 = 5{,}9$. Найти вероятности, соответствующие возможным значениям X, и составить ряд распределения.

11.104. Баскетболист бросает мяч в корзину до первого попадания, но не более трех раз. Вероятность попадания при каждом броске равна 0,8. Случайная величина X — количество произведенных бросков. Описать закон распределения случайной величины X и найти m_X и D_X.

11.105. В урне 2 белых и 3 черных шара. Наудачу вынимаются два шара. Случайная величина X — число белых шаров среди вынутых. Составить ряд распределения случайной величины X и найти математическое ожидание и дисперсию.

2. Примеры основных дискретных распределений

Биномиальный закон распределения. Ряд классических дискретных распределений связан с экспериментом, в котором проводятся последовательные независимые испытания и наблюдается результат совместного осуществления тех или иных исходов каждого испытания.

Испытания (опыты) называются *независимыми*, если вероятность любого исхода в n-м по счету испытании не зависит от того, какие исходы имели другие испытания.

Простейшим примером последовательности независимых испытаний является повторение опыта в неизменных условиях, в каждом из которых имеется два исхода — *успех* (если событие A произошло) и *неуспех* (если событие A не произошло). При этом вероятности успеха (p) и неуспеха ($q = 1 - p$) не зависят от номера опыта. Такая схема повторных испытаний называется *схемой Бернулли*.

Пусть X — число успехов в n опытах по схеме Бернулли с вероятностью успеха в одном опыте, равной p. Множество возможных значений данной дискретной случайной величины равно $E_X = \{0, 1, \ldots, n\}$, а вероятности реализаций этих значений определяются *формулой Бернулли*

$$p_m = \mathrm{P}\{X = m\} = C_n^m p^m q^{n-m}, \ \ m \in E_X. \tag{11.15}$$

Полученное распределение называется *биномиальным*. Оно зависит от двух параметров и для краткости обозначается $X \sim B(n, p)$.

Основные числовые характеристики биномиального распределения:

$$m_X = np, D_X = npq, \ \sigma_X = \sqrt{D_X} = \sqrt{npq}. \tag{11.16}$$

Наиболее вероятное значение, т. е. мода d_X, удовлетворяет неравенству

$$np - q \le d_X \le np + p. \tag{11.17}$$

ПРИМЕР 11.13. Передается 5 сообщений по каналу связи ($n = 5$). Каждое сообщение с вероятностью $p = 0{,}3$, независимо от других искажается. Случайная величина X — количество искаженных сообщений. Вычислить вероятность того, что ровно 2 сигнала получат искажение и найти m_X, D_X, σ_X, d_X.

◀ По описанию эксперимента X имеет биномиальное распределение с параметрами $n = 5$ и $p = 0{,}3$. По формуле (11.15) получаем

$$\mathrm{P}\{X = 2\} = C_5^2 p^2 q^3 = 10 \cdot 0{,}3^2 \cdot 0{,}7^3 \approx 0{,}309.$$

Числовые характеристики находим по формулам (11.16)–(11.17):

$$m_X = 5 \cdot 0{,}3 = 1{,}5, \ \ D_X = 5 \cdot 0{,}3 \cdot 0{,}7 = 1{,}05, \ \ \sigma_X = \sqrt{1{,}05} \approx 1{,}03, \ \ d_X = 1. \ ▶$$

11.106. Производится 5 независимых выстрелов по цели, вероятность попадания в которую равна 0,2. Для поражения цели достаточно трех попаданий. Найти вероятность того, что цель будет поражена.

11.107. Вероятность того, что событие A хотя бы один раз произойдет в 4 независимых испытаниях по схеме Бернулли, равна 0,59. Какова вероятность появления события A в одном испытании?

11.108. Вероятность попадания в мишень при одном выстреле равна 0,2. Сделано 10 выстрелов. Найти наиболее вероятное число попаданий и вероятность этого числа.

11.109. Десять осветительных лампочек для елки включены в цепь последовательно. Вероятность для любой лампочки перегореть при повышении напряжения в сети равна 0,1. Определить вероятность разрыва цепи при повышении напряжения в сети.

11.110. Производится обстрел учебной цели из орудия. Вероятность попадания в цель при одном выстреле равна p. Поражение цели может наступить при k попаданиях ($k = 1, 2, \ldots$) с вероятностью, равной $1 - t^k$ ($0 < t < 1$). Вычислить вероятность поражения цели при n выстрелах.

11.111. На контроль поступила партия деталей из цеха. Известно, что 5% всех деталей не удовлетворяет стандарту. Сколько нужно испытать деталей, чтобы с вероятностью не менее 0,95 обнаружить хотя бы одну нестандартную деталь?

11.112. Вероятность отказа каждого прибора при испытании не зависит от отказов остальных приборов и равна 0,2. Пусть X — число отказавших приборов из 9. Вычислить вероятность события $A = \{X \geq m_X\}$ и наиболее вероятное число отказавших приборов.

Распределение Пуассона. СВДТ X имеет *распределение Пуассона* с параметром $a > 0$, если ее возможные значения $x_m = m$, где $m = 0, 1, 2, \ldots$, а вероятности реализации этих значений в опыте определяются формулой Пуассона

$$p_m = \mathrm{P}\{X = m\} = \frac{a^m}{m!}e^{-a}, \quad m \in E_X. \tag{11.18}$$

Так как распределение Пуассона зависит от одного параметра a, то для краткости пишут $X \sim Pu(a)$.

Характерной особенностью распределения Пуассона является совпадение математического ожидания и дисперсии, т. е. $m_X = D_X = a$, $\sigma_X = \sqrt{D_X} = \sqrt{a}$.

Распределение Пуассона может быть получено из биномиального путем предельного перехода при $n \to \infty$ и $p \to 0$ при условии $np \to a$, и в этом случае интерпретируется как *закон редких явлений*. Если n достаточно велико, а p мало, то при условии $0{,}1 < np < 10$ формулу Пуассона (11.18) часто используют в качестве приближения для биномиальных вероятностей осуществления ровно m успехов в n независимых испытаниях.

ПРИМЕР 11.14. Завод отправил на базу 5000 доброкачественных изделий. Вероятность того, что в пути изделие повредится, равна 0,0002. Найти вероятность того, что среди доставленных на базу изделий окажется ровно 3 поврежденных изделия.

◀ Пусть X — число поврежденных изделий из 5000. Согласно описанию эксперимента $X \sim B(n, p)$, где $n = 5000$, $p = 0{,}0002$. Так как $a = np = 5000 \cdot 0{,}0002 = 1$, то выполнены условия применения закона редких явлений. Следовательно, приближенно

$$\mathrm{P}\{X = 3\} \approx \frac{1^3}{3!} \cdot e^{-1} = \frac{1}{6e} \approx 0{,}06. \ \blacktriangleright$$

Замечание. Имеются специальные таблицы (см. приложения 3 и 4), с помощью которых можно найти вероятности распределения Пуассона и суммарные вероятности распределения Пуассона.

11.113. В стае 1000 птиц, из которых 50 окольцованных. Орнитологами поймано 100 птиц. Найти среднее число окольцованных птиц среди пойманных и вероятность того, что среди пойманных птиц нет окольцованных.

11.114. Аппаратура содержит 2000 одинаково надежных элементов, вероятность отказа каждого из которых не зависит от состояния остальных элементов и равна 0,0005. Какова вероятность отказа аппаратуры, если он наступает при отказе по крайней мере двух элементов?

11.115. Найти вероятность того, что среди 200 изделий окажется более трех бракованных, если в среднем число бракованных изделий составляет 1%.

11.116. Корректура в 500 страниц содержит 1300 опечаток. Найти наиболее вероятное число опечаток на одной странице текста и вероятность этого числа.

11.117. Среднее число болезнетворных микробов в одном кубическом метре воздуха равно 100. Взято на пробу 2 дм^3 воздуха. Найти вероятность того, что в нем будет обнаружен хотя бы один микроб.

Пусть модель вероятностного эксперимента представляет собой *простейший пуассоновский поток событий с интенсивностью* λ (λ — среднее число событий, появляющихся в единицу времени).

Обозначим X — число наблюдаемых событий за время τ в пуассоновском потоке с интенсивностью λ. Тогда $X \sim Pu(a)$, где $a = \lambda\tau$, и справедлива формула Пуассона

$$p_m = \mathrm{P}\{X = m\} = \frac{(\lambda\tau)^m}{m!}e^{-\lambda\tau}.$$

Подобной моделью описываются, например, поступления вызовов на АТС, в скорую помощь, в пожарную часть или приходы посетителей в те или иные объекты массового обслуживания.

ПРИМЕР 11.15. На автоматическую телефонную станцию поступает простейший поток вызовов с интенсивностью $\lambda = 0{,}8$ (вызов/мин). Найти вероятность того, что за 2 минуты: а) не поступит ни одного вызова; б) поступит ровно один вызов; в) поступит хотя бы один вызов.

◄ Случайная величина X — число вызовов за 2 минуты — распределена по закону Пуассона с параметром $a = \lambda\tau = 0{,}8 \cdot 2 = 1{,}6$. Применяя формулу Пуассона, получаем:

а) $p_0 = \dfrac{(1{,}6)^0}{0!}e^{-1{,}6} \approx 0{,}202;$

б) $p_1 = \dfrac{(1{,}6)^1}{1!}e^{-1{,}6} \approx 0{,}323;$

в) $\mathrm{P}\{X \geq 1\} = 1 - \mathrm{P}\{X < 1\} = 1 - 0{,}202 \approx 0{,}798.$ ►

11.118. В магазин за покупками приходят в среднем 30 человек в час. С какой вероятностью можно ожидать, что в течение минуты в магазин не войдет ни один покупатель?

11.119. На регистрирующее устройство попадает в среднем 120 космических частиц в минуту. С какой вероятностью за одну секунду будет зарегистрировано не менее двух частиц?

11.120. Среднее число вызовов, поступающих на АТС в минуту, равно 120. Найти вероятности следующих событий: A = {за две секунды на АТС не поступит ни одного вызова}, B = {за две секунды на АТС поступит менее двух вызовов}.

11.121. В условиях предыдущей задачи найти вероятности событий: C = {за одну секунду на АТС поступит ровно три вызова}, D = {за три секунды на АТС поступит менее трех вызовов}.

Геометрический закон распределения. Рассмотрим следующий эксперимент. Пусть испытания по схеме Бернулли с вероятностью успеха p в одном испытании повторяются до тех пор, пока не появится успех, после чего прекращаются. Обозначим X — число проведенных испытаний. Закон распределения данной случайной величины называется *геометрическим с параметром* $p > 0$ и описывается следующим образом: множество возможных значений $E_X = \mathbb{N}$, а вероятности реализаций этих значений в опыте описываются формулой

$$p_m = \mathrm{P}\{X = m\} = q^{m-1}p, \quad m \in \mathbb{N}. \tag{11.19}$$

Вероятности p_m для последовательных значений m образуют геометрическую прогрессию с первым членом p и знаменателем $q = 1 - p$, чем объясняется название — «геометрическое распределение». (Краткое обозначение: $X \sim G(p)$.)

Основные числовые характеристики случайной величины X, имеющей геометрическое распределение, определяются формулами

$$m_X = \frac{1}{p}, \;\; D_X = \frac{q}{p^2}, \;\; \sigma_X = \sqrt{D_X} = \frac{\sqrt{q}}{p}, \;\; q_X = 1.$$

ПРИМЕР 11.16. Стрелок продолжает стрелять до тех пор, пока не промахнется. Вероятность его попадания в цель при каждом выстреле — $p = 0{,}9$. Какова вероятность того, что он сделает не менее трех выстрелов?

◀ Обозначим X — число выстрелов, сделанных стрелком. Очевидно, что

$$X \sim G(1 - p),$$

поэтому по формуле (11.19) получаем

$$\mathrm{P}\{X \geq 3\} = 1 - \mathrm{P}\{X < 3\} = 1 - 0{,}1 - 0{,}9 \cdot 0{,}1 = 0{,}81. \;▶$$

11.122. Вероятность попадания баскетболистом в корзину при штрафном броске равна $1/3$. На тренировке баскетболист выполняет штрафные броски до тех пор, пока не попадет в корзину, а затем передает мяч другому игроку. Какова вероятность, что баскетболист сделает число бросков, превышающее среднее число по распределению?

11.123. Вероятность изготовления бракованной детали на станке равна 0,05. Пусть X — число бракованных деталей, изготавливаемых на станке с начала его работы до появления первой бракованной детали. Найти m_X и $F_X(3)$.

11.124. Из колоды, состоящей из 36 карт, последовательно достают по одной карте, каждый раз возвращая обратно. Найти среднее число извлеченных карт до появления туза пик и вероятность того, что до появления туза пик придется извлекать не менее 3 карт.

11.125. При проведении операции срочно потребовался донор с редкой группой крови. По статистике такая группа крови встречается у 5% людей. Сколько в среднем придется опросить людей, чтобы найти человека с такой группой крови? Какова вероятность того, что из 10 сотрудников, работающих в операционной, найдется хотя бы один с такой группой крови?

11.126. Вероятность появления брака на автоматической линии равна 0,001. Линия работает без переналадки до появления первого бракованного изделия. Сколько изделий в среднем производит данная автоматическая линия между двумя переналадками? Какова вероятность, что число произведенных изделий окажется больше $3m_X$?

3. Случайные величины непрерывного типа

Случайная величина X называется *случайной величиной непрерывного типа* (сокращенно СВНТ), если при всех $x \in \mathbb{R}$ функция распределения $F_X(x)$ представима в виде

$$F_X(x) = \mathrm{P}\{X < x\} = \int_{-\infty}^{x} f_X(t)\,dt,$$

где $f_X(x)$ — так называемая *плотность распределения вероятностей*, удовлетворяющая условиям:

1. $f_X(x) \geq 0$ для всех $x \in \mathbb{R}$ (свойство неотрицательности плотности).

2. $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f_X(x)\,dx = 1$ (условие нормировки).

3. $\mathrm{P}\{X \in B\} = \int\limits_{B} f_X(x)\,dx$ для любого $B \subset \mathbb{R}$.

4. (Частный случай пункта 3.) $\int\limits_{x_1}^{x_2} f_X(x)\,dx = \mathrm{P}\{x_1 \leq X \leq x_2\}$ $\forall x_1 < x_2$.

5. $F'_X(x) = f_X(x)$ в точках непрерывности плотности $f_X(x)$.

Начальным моментом s-го порядка случайной величины X называется действительное число α_s, определяемое формулой

$$\alpha_s = \int_{-\infty}^{+\infty} x^s f_X(x)\,dx, \quad s = 0, 1, 2, \ldots. \tag{11.20}$$

Начальный момент α_s существует, если интеграл в правой части формулы (11.20) сходится абсолютно.

Начальный момент первого порядка α_1 называется *математическим ожиданием* (*средним значением по распределению*) случайной величины X и для него используется специальное обозначение $m_X = \mathrm{M}[X] = \alpha_1$.

Таким образом, математическое ожидание определяется формулой

$$m_X = \int_{-\infty}^{+\infty} x f_X(x)\,dx. \tag{11.21}$$

Случайная величина называется *центрированной*, если ее математическое ожидание равно нулю. Общепринятым для центрированной случайной величины является обозначение $\overset{\circ}{X}$, так что $\mathrm{M}[\overset{\circ}{X}] = 0$.

Центральным моментом s-го порядка непрерывной случайной величины X называется действительное число μ_s, определяемое формулой

$$\mu_s = \int_{-\infty}^{+\infty} (x - m_X)^s f_X(x)\,dx.$$

Центральный момент μ_s существует, если интеграл в правой части формулы сходится абсолютно.

Центральный момент второго порядка называется *дисперсией случайной величины X* и для него используется специальное обозначение $D_X = \mathrm{D}[X] = \mu_2$. Таким образом, дисперсия случайной величины X определяется формулой

$$D_X = \int_{-\infty}^{+\infty} (x - m_X)^2 f_X(x)\,dx = \alpha_2 - m_X^2. \tag{11.22}$$

Действительное число $\sigma_X = \sqrt{D_X}$ называется *средним квадратическим отклонением* случайной величины X непрерывного типа (или *стандартным отклонением*).

Случайная величина X называется *стандартизованной*, если $m_X = 0$ и $\sigma_X = 1$.

Математическое ожидание — не единственная *характеристика положения* случайной величины непрерывного типа. Часто применяются и другие, такие как мода, медиана и квантиль распределения.

Модой СВНТ X называется действительное число d_X, являющееся точкой максимума функции плотности $f_X(x)$. Мода может не существовать, иметь единственное значение (такие распределения называются *унимодальными*) или много значений (*полимодальные* распределения).

Медианой случайной величины X непрерывного типа называется действительное число h_X, определяемое условием $P\{X < h_X\} = P\{X \geq h_X\}$. Таким образом, медиана h_X — корень уравнения $F_X(x) = 0,5$. Геометрически медиана — это абсцисса той точки на оси Ox, для которой площади под графиком функции плотности $f_X(x)$, лежащие слева и справа от нее, одинаковы и равны $0,5$. В случае симметричного распределения (имеющего моду) три характеристики — математическое ожидание (если оно существует), мода и медиана совпадают.

Квантилью порядка p распределения СВНТ X называется действительное число x_p, удовлетворяющее условию $P\{X < x_p\} = p$. Таким образом, $h_X = x_{0,5}$, т. е. медиана h_X — квантиль порядка $0,5$.

ПРИМЕР 11.17. Плотность распределения случайной величины X имеет вид

$$f_X(x) = \begin{cases} 0, & x \leq 2, \\ 0,75(x-2)(4-x), & 2 < x \leq 4, \\ 0, & x > 4. \end{cases}$$

Найти математическое ожидание, дисперсию, моду и медиану случайной величины X.

◀ Очевидно, что распределение симметрично, так как график плотности $f_X(x) = 0,75(x-2)(4-x)$ при $2 < x \leq 4$ является параболой. Осью симметрии является вертикальная прямая $x = 3$. Поэтому $m_X = d_X = h_X = 3$; дисперсию определим по формуле (11.22) через второй начальный момент: $D_X = \alpha_2 - m_X^2$. По формуле (11.21) находим $\alpha_2 = \dfrac{3}{4}\int\limits_2^4 x^2(x-2)(4-x)dx = 9,2$. Таким образом, $D_X = 9,2 - 9 = 0,2$. ▶

11.127. Заданы функции $f_1(x) = -x^2$, $f_2(x) = \dfrac{1}{2}\sin x + \dfrac{1}{2}$, $f_3(x) = \dfrac{1}{\pi(1+x^2)}$. Какие из них не являются плотностями вероятности?

11.128. Известна функция распределения СВНТ X:

$$F_X(x) = \begin{cases} 0, & x \leq 0, \\ ax^2, & 0 < x \leq 1, \\ 1, & x > 1. \end{cases}$$

Вычислить коэффициент a, плотность распределения $f_X(x)$, $P\{0,25 \leq X < 0,5\}$, математическое ожидание и дисперсию.

11.129. Известна функция плотности распределения вероятностей:

$$f_X(x) = \begin{cases} 0, & |x| \geq \dfrac{\pi}{2}, \\ a\cos x, & |x| < \dfrac{\pi}{2}. \end{cases}$$

Найти коэффициент a и вычислить m_X, D_X и $F_X(x)$.

11.130. Плотность распределения вероятностей СВНТ имеет вид

$$f_X(x) = ae^{2x-x^2} \quad (a > 0).$$

Найти моду этой случайной величины.

11.131. Дана плотность распределения вероятностей случайной величины X:

$$f_X(x) = \begin{cases} 0, & x \le 0, \\ x - \dfrac{x^3}{4}, & 0 < x \le 2, \\ 0, & x > 2. \end{cases}$$

Найти моду и медиану случайной величины X.

11.132. СВНТ X имеет плотность распределения

$$f_X(x) = \begin{cases} 0, & x < 0, \\ a(3x - x^2), & 0 \le x \le 3, \\ 0, & x > 3. \end{cases}$$

Найти коэффициент a, математическое ожидание, моду, медиану и дисперсию.

11.133. Случайная величина имеет функцию распределения

$$F_X(x) = \begin{cases} 0, & x < 1, \\ 1 - \dfrac{1}{x}, & x \ge 1. \end{cases}$$

Найти медиану и квантиль порядка $2/3$. Существует ли математическое ожидание у данного распределения?

4. Примеры основных непрерывных распределений

Равномерное распределение. Говорят, что СВНТ X распределена *равномерно* на отрезке $[a; b]$, если плотность распределения вероятностей имеет вид

$$f_X(x) = \begin{cases} 0, & x \notin [a; b], \\ \dfrac{1}{b-a}, & x \in [a; b]. \end{cases}$$

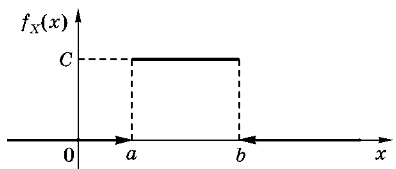


Рис. 11.4

График плотности $f_X(x)$ приведен на рис. 11.4. Краткое обозначение: $X \sim R(a, b)$.

Функция распределения $F_X(x) = \mathrm{P}\{X < x\}$ имеет вид

$$F_X(x) = \begin{cases} 0, & x \le a, \\ \dfrac{x-a}{b-a}, & a < x \le b, \\ 1, & x > b. \end{cases}$$

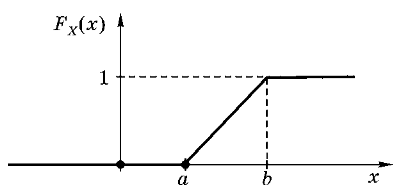


Рис. 11.5

График $F_X(x)$ приведен на рис. 11.5.

Для $X \sim R(a, b)$ математическое ожидание, дисперсия и среднее квадратическое отклонение имеют вид:

$$m_X = \frac{a+b}{2},\ D_X = \frac{(b-a)^2}{12},\ \sigma_X = \frac{b-a}{2\sqrt{3}}. \qquad (11.23)$$

Моды равномерное распределение не имеет, а медиана совпадает с математическим ожиданием.

ПРИМЕР 11.18. Случайная величина X, являющаяся погрешностью приближенных измерений каких-либо параметров при округлении до ближайших целых чисел, удовлетворительно описывается распределением $R(-\delta/2; \delta/2)$, где δ — цена деления измерительного прибора. Вычислить m_X, D_X и σ_X.

◄ По формулам (11.23) получаем $m_X = 0$, $D_X = \delta^2/12$, $\sigma_X = \sqrt{3}\delta/6$. ►

11.134. Случайная величина X равномерно распределена на отрезке $[-2, 2]$. Вычислить $\mathrm{P}\{X \le 3\sigma_X\}$ и квантиль порядка 0,9.

11.135. Азимутальный лимб имеет цену делений один градус. Какова вероятность при считывании азимута угла сделать ошибку в пределах ± 10 мин, если отсчет округляется до ближайшего целого числа градусов?

11.136. Шкала рычажных весов, установленных в лаборатории, имеет цену делений 1 г. При измерении массы вещества отсчет делается с округлением в ближайшую сторону. Какова вероятность, что абсолютная ошибка измерения массы: а) не превысит величины среднеквадратического отклонения возможных ошибок определения массы; б) будет заключена между значениями σ_X и $2\sigma_X$?

Показательное (экспоненциальное) распределение. Случайная величина X называется распределенной *по показательному* (*экспоненциальному*) *закону с параметром* $\lambda > 0$, если ее плотность распределения вероятностей имеет вид

$$f_X(x) = \begin{cases} 0, & x \le 0, \\ \lambda e^{-\lambda x}, & x > 0. \end{cases}$$

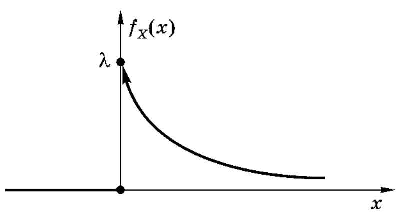


Рис. 11.6

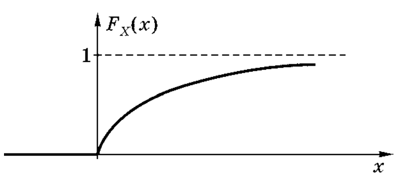


Рис. 11.7

График плотности $f_X(x)$ приведен на рис. 11.6.

Краткое обозначение: $X \sim E(\lambda)$.

Функция распределения $F_X(x) = \mathrm{P}\{X < x\}$ имеет вид

$$F_X(x) = \begin{cases} 0, & x \le 0, \\ 1 - e^{-\lambda x}, & x > 0. \end{cases}$$

График $F_X(x)$ приведен на рис. 11.7.

Основные числовые характеристики случайной величины $X \sim E(\lambda)$:

$$m_X = \frac{1}{\lambda} = \sigma_X,\ D_X = \frac{1}{\lambda^2},\ h_X = \frac{\ln 2}{\lambda}.$$

Показательное распределение тесно связано с *простейшим пуассоновским потоком событий*. Именно: интервал времени T между двумя соседними событиями в простейшем потоке имеет показательное распределение с параметром λ, равным интенсивности потока. Таким образом, показательному распределению подчиняются такие случайные величины, как время ожидания в очереди, время безотказной работы радиоэлектронной аппаратуры и другие.

11.137. Время ремонта и обслуживания автомобиля после одной поездки X случайно и описывается экспоненциальным законом распределения. Было замечено, что в текущем сезоне на ремонт и обслуживание автомобиля после одной поездки тратилось в среднем 5 минут. Найти вероятность того, что при очередной поездке это время не превысит 30 минут.

11.138. Время ожидания у бензоколонки автозаправочной станции является случайной величиной X, распределенной по показательному закону со средним временем ожидания, равным t_0. Найти вероятности событий:

$$A=\left\{\frac{1}{2}t_0 \le X < \frac{3}{2}t_0\right\},\ \ B=\{X \ge 2t_0\}.$$

11.139. Случайная величина X распределена по показательному закону с параметром $\lambda = 10$. Вычислить условную вероятность $\mathrm{P}\{X \ge 100\ /\ X \ge 99\}$.

11.140. Время X безотказной работы станка имеет показательное распределение. Вероятность того, что станок не откажет за 5 часов работы, равна 0,60653. Найти m_X, D_X и начальный момент α_2.

Нормальное распределение. Случайная величина X называется распределенной по *нормальному* (*гауссовскому*) *закону с параметрами* $m \in \mathbb{R}$ и $\sigma > 0$, если плотность распределения вероятностей имеет вид

$$f_X(x)=\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}},\ -\infty < x < +\infty.$$

Так как это распределение зависит от двух параметров: m и σ, то пишут $X \sim N(m, \sigma)$. При этом основные характеристики нормального распределения имеют следующий вид: $m_X = m,\ D_X = \sigma^2,\ h_X = d_X = m$.

График плотности вероятности $f_X(x)$ (кривая Гаусса) изображен на рис. 11.8.

Кривая $y = f_X(x)$ симметрична относительно прямой, проходящей через точку $x = m$ параллельно оси ординат. Изменение m равносильно сдвигу кривой вдоль оси Ox. При этом в точке $x = m$ имеется единственный максимум функции $f_X(x)$, равный $\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}$. С уменьшением σ кривая нормального распределения становится все более островершинной (рис. 11.9).

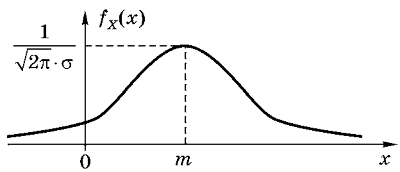


Рис. 11.8

Если случайная величина $X \sim N(0, 1)$, то она называется *стандартизованной нормальной случайной величиной*. Ее плотность имеет вид

$$\varphi(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}}.$$

Эта функция табулирована только для $x \ge 0$, поскольку является четной, т. е. $\varphi(-x) = \varphi(x)$.

Функция распределения стандартизованной нормальной случайной величины

$$\Phi(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{x}e^{-\frac{t^2}{2}}\,dt$$

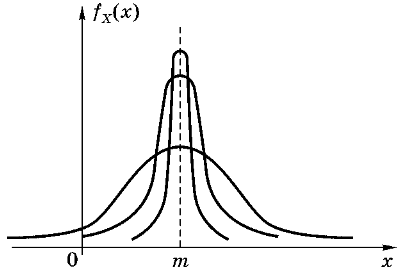


Рис. 11.9

называется *функцией нормального распределения* и также табулирована для $x \geq 0$, поскольку обладает свойством

$$\Phi(-x) = 1 - \Phi(x).$$

Обычно в таблице приводятся значения функции $\Phi(x)$ лишь для $x < 3{,}5$. Это обусловлено тем, что при $x \geq 3{,}5$ значения $\Phi(x)$ практически не отличаются от единицы. Поэтому при решении задач можно с достаточной точностью считать, что $\Phi(x) = 1$ при $x \geq 3{,}5$.

Функция распределения $F_X(x) = \mathrm{P}\{X < x\}$ для случайной величины $X \sim N(m, \sigma)$ выражается через функцию нормального распределения $\Phi(x)$ следующим образом:

$$F_X(x) = \int_{-\infty}^{x} f_X(t)\,dt = \Phi\left(\frac{x-m}{\sigma}\right).$$

Поэтому для вероятности попадания нормальной случайной величины на интервал справедлива формула

$$\mathrm{P}\{x_1 \leq X < x_2\} = \Phi\left(\frac{x_2-m}{\sigma}\right) - \Phi\left(\frac{x_1-m}{\sigma}\right). \tag{11.24}$$

ПРИМЕР 11.19. Дана случайная величина $X \sim N(30, 10)$. Найти $\mathrm{P}\{10 \leq X < 50\}$.

◄ По формуле (11.24)

$$\mathrm{P}\{10 \leq X < 50\} = \Phi\left(\frac{50-30}{10}\right) - \Phi\left(\frac{10-30}{10}\right) = \Phi(2) - \Phi(-2) =$$
$$= \Phi(2) - (1 - \Phi(2)) = 2\Phi(2) - 1 \approx 2 \cdot 0{,}9772 - 1 = 0{,}9544. \text{ ►}$$

Часто требуется вычислить вероятность того, что отклонение случайной величины $X \sim N(m, \sigma)$ от ее математического ожидания по абсолютной величине меньше заданного положительного числа ε, т. е. требуется найти вероятность $\mathrm{P}\{|X - m_X| < \varepsilon\}$. Ответ дается формулой

$$\mathrm{P}\{|X - m_X| < \varepsilon\} = 2\Phi\left(\frac{\varepsilon}{\sigma}\right) - 1. \tag{11.25}$$

ПРИМЕР 11.20 (*правило k-сигм*). Случайная величина $X \sim N(m, \sigma)$. Вычислить $P\{|X - m| < k\sigma\}$ для значений $k = 1, 2, 3$.

◄ По формуле (11.25) и с помощью таблицы из приложения 2 получаем

$$\mathrm{P}\{|X - m_X| < k\sigma\} = 2\Phi\left(\frac{k\sigma}{\sigma}\right) - 1 = 2\Phi(k) - 1 = \begin{cases} 0{,}6827, & k = 1, \\ 0{,}9545, & k = 2, \\ 0{,}9973, & k = 3. \end{cases} \text{ ►}$$

11.141. Рост мужчины удовлетворительно описывается нормальным законом распределения. По статистике средний рост составляет 170 см, а среднее квадратическое отклонение равно 7 см. Найти вероятность того, что рост наугад взятого мужчины будет отличаться от среднего роста не более чем на 10 см.

11.142. Считается, что отклонение длины изготавливаемых деталей от стандарта является случайной величиной, распределенной по нормальному закону. Если стандартная длина детали 40 см и среднее квадратическое отклонение равно 0,4 см, то какую погрешность длины изделия можно гарантировать с вероятностью 0,8?

11.143. Автомат изготавливает шарики. Шарик считается годным, если отклонение X диаметра шарика от проектного размера по абсолютной величине меньше 0,7 мм. Считая, что случайная величина X распределена нормально со средним квадратическим отклонением 0,4 мм, найти: а) вероятность изготовления годного шарика; б) сколько в среднем будет годных шариков среди 100 изготовленных?

11.144. Найти дисперсию случайной величины X, распределенной по нормальному закону, если известно, что отклонения от математического ожидания, не превосходящие 0,1 см, имеют место с вероятностью 0,7887.

11.145. Заряд охотничьего пороха отвешивается на весах, имеющих среднеквадратическую ошибку взвешивания 150 мг. Номинальный вес порохового заряда 2,3 г. Определить вероятность повреждения ружья, если максимально допустимый вес порохового заряда 2,5 г.

§ 11.3. СЛУЧАЙНЫЕ ВЕКТОРЫ

1. Двумерные случайные векторы дискретного типа

Пусть на одном и том же пространстве элементарных исходов $\Omega = \{\omega\}$ заданы две случайные величины $X = X(\omega)$, и $Y = Y(\omega)$. Система случайных величин (X, Y) называется двумерной случайной величиной (или *двумерным случайным вектором*).

Двумерный случайный вектор (X, Y) называется *случайным вектором дискретного типа*, если множество его возможных значений $E_{X,Y} = E_X \times E_Y$ конечно или счетно.

Пусть случайная величина X принимает значения $x_1, \ldots, x_n$, а случайная величина Y — значения $y_1, \ldots, y_m$. *Законом распределения* двумерного случайного вектора (X, Y) называется перечень возможных значений $(x_i, y_j) \in E_{X,Y}$ и вероятностей реализаций этих значений в опыте:

$$p_{ij} = \mathrm{P}\{X = x_i, Y = y_j\}, \quad i = 1, 2, \ldots, n; \quad j = 1, 2, \ldots, m.$$

Аналогично одномерному случаю, закон распределения двумерной дискретной случайной величины удобно описывать с помощью таблицы (см., например, таблицу 11.7).

Таблица 11.7

X \ Y	y_1	y_2	…	y_m	$p_{i\bullet} = \mathrm{P}\{X = x_i\}$
x_1	p_{11}	p_{12}	…	p_{1m}	$p_{1\bullet}$
x_2	p_{21}	p_{22}	…	p_{2m}	$p_{2\bullet}$
…	…	…	…	…	…
x_n	p_{n1}	p_{n2}	…	p_{nm}	$p_{n\bullet}$
$p_{\bullet j} = \mathrm{P}\{Y = y_j\}$	$p_{\bullet 1}$	$p_{\bullet 2}$	…	$p_{\bullet m}$	1

Одномерные законы распределения отдельных компонент случайного вектора (X, Y) выражаются через вероятности совместных значений p_{ij} по формулам

$$\mathrm{P}\{X = x_i\} = p_{i\cdot} = \sum_j p_{ij}, \quad \mathrm{P}\{Y = y_j\} = p_{\cdot j} = \sum_i p_{ij},$$

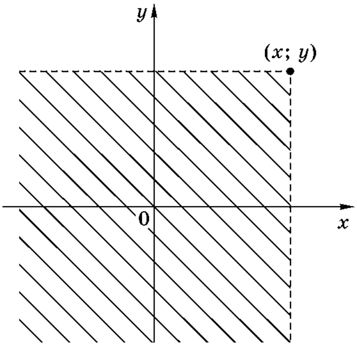


Рис. 11.10

где суммирование распространяется на все возможные значения индексов i или j. Соответствующие вероятности вписываются в добавленные столбец и строку таблицы.

Клетка в правом нижнем углу таблицы служит для проверки условия нормировки:

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} p_{ij} = 1.$$

Функцией распределения случайного вектора (X, Y) называется действительная функция двух переменных, определяемая равенством $F_{X,Y}(x, y) = \mathrm{P}\{X < x, Y < y\}$.

Геометрически значение $F_{X,Y}(x, y)$ — это вероятность попадания случайной точки (X, Y) в бесконечный квадрант с вершиной (x, y) (на рис. 11.10 этот квадрант показан штриховкой). Отсюда следует формула для вычисления функции распределения:

$$F_{X,Y}(x, y) = \sum_{i:\, x_i < x}\ \sum_{j:\, y_j < y} p_{ij}. \tag{11.26}$$

Из определения двумерной функции распределения и формулы (11.26) следует, что $F_{X,Y}(x, y)$ имеет ступенчатый вид, испытывая скачки в точках $(x_i, y_j) \in E_{X,Y}$.

Вероятность попадания двумерного случайного вектора в произвольную область $B \in \mathbb{R}^2$ задается формулой

$$\mathrm{P}\{(X, Y) \in B\} = \sum_{\substack{i \\ (x_i, y_j) \in B}} \sum_{j} p_{ij}.$$

ПРИМЕР 11.21. Закон распределения двумерного дискретного случайного вектора (X, Y) задан таблицей 11.8.

Найти одномерные законы распределения компонент X и Y, вероятность $\mathrm{P}\{X \geq Y\}$ и вычислить функцию распределения $F_{X,Y}(x, y)$.

◄ Одномерные законы $p_{i\bullet}$ и $p_{\bullet j}$ распределения компонент X и Y построены в добавленных столбце и строке таблицы 11.9 соответственно. Далее по правилам теории вероятностей получаем

$$P\{X \geq Y\} = 1 - P\{X < Y\} = 1 - P\{X = 0, Y = 1\} = 1 - 0{,}06 = 0{,}94.$$

Для вычисления функции распределения воспользуемся тем, что геометрически значение $F_{X,Y}(x, y)$ — это вероятность попадания случайной точки (X, Y) в бес-

Таблица 11.8

X \ Y	−1	1
0	0,1	0,06
1	0,3	0,11
2	0,2	0,16

Таблица 11.9

X \ Y	−1	1	$p_{i\bullet}$
0	0,1	0,06	0,16
1	0,3	0,11	0,48
2	0,2	0,16	0,36
$p_{\bullet j}$	0,6	0,4	1

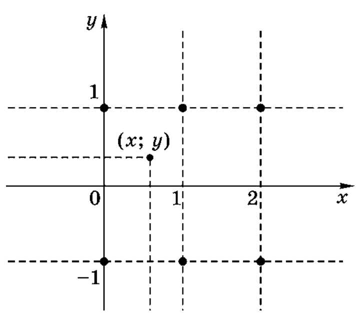


Рис. 11.11

конечный квадрант с вершиной (x, y). Для вершины этого квадранта, согласно условию задачи, есть двенадцать областей, образованных тремя вертикальными прямыми $x = 0$, $x = 1$, $x = 2$ и двумя горизонтальными прямыми $y = -1$, $y = 1$.

На рис. 11.11 показан случай, когда вершина (x, y) находится внутри прямоугольника $0 < x \le 1$, $-1 < y \le 1$. При этом внутри квадранта находится только одна точка с координатами $(0, -1)$, в которой имеется ненулевая вероятность, равная 0,1. Функцию распределения $F_{X,Y}(x, y)$ представим в виде таблицы 11.10. ►

Таблица 11.10

X \ Y	$y \le -1$	$-1 < y \le 1$	$y > 1$
$x \le 0$	0	0	0
$0 < x \le 1$	0	0,1	0,16
$1 < x \le 2$	0	0,4	0,64
$x > 2$	0	0,6	1

Таблица 11.11

X \ Y	$y \le 1$	$1 < y \le 2$	$2 < y \le 3$	$y > 3$
$x \le 0$	0	0	0	0
$0 < x \le 1$	0	0,5	0,5	0,5
$1 < x \le 2$	0	0,5	0,75	0,75
$2 < x \le 3$	0	0,5	0,75	0,875
$x > 3$	0	0,5	0,75	1

ПРИМЕР 11.22. Известна функция распределения $F_{X,Y}(x, y)$ двумерного дискретного случайного вектора (X, Y) (см. таблицу 11.11).

Найти функции распределения $F_X(x)$ и $F_Y(y)$ компонент X и Y, а затем построить их законы распределения.

◄ Учитывая, что $F_X(x) = F_{X,Y}(x, +\infty)$, $F_Y(y) = F_{X,Y}(+\infty, y)$, получим («проходя» соответственно по последнему столбцу и последней строке таблицы)

$$F_X(x)=\begin{cases}0, & x\le 0,\\ 0{,}5, & 0<x\le 1,\\ 0{,}75, & 1<x\le 2,\\ 0{,}875, & 2<x\le 3,\\ 1, & x>3,\end{cases} \quad \text{и} \quad F_Y(y)=\begin{cases}0, & y\le 1,\\ 0{,}5, & 1<y\le 2,\\ 0{,}75, & 2<y\le 3,\\ 1, & y>3.\end{cases}$$

Для построения таблиц распределения заметим, что функция распределения случайной величины X испытывает «скачки» в точках $x = 0, 1, 2, 3$, а случайной величины Y — в точках $y = 1, 2, 3$. Законы распределения компонент X и Y представлены в таблицах 11.12 и 11.13 соответственно. ►

Таблица 11.12

X	0	1	2	3
P	0,5	0,25	0,125	0,125

Таблица 11.13

Y	1	2	3
P	0,5	0,25	0,25

Начальным моментом порядка $k + s$ дискретного случайного вектора (X, Y) называется действительное число $\alpha_{k,s}$, определяемое формулой

$$\alpha_{k,s} = \sum_i \sum_j x_i^k y_j^s p_{ij}.$$

Центральным моментом порядка $k + s$ дискретного случайного вектора (X, Y) называется действительное число $\mu_{k,s}$, определяемое формулой

$$\mu_{k,s} = \sum_i \sum_j (x_i - m_X)^k (y_j - m_Y)^s p_{ij}.$$

Начальные и центральные моменты существуют, если ряд в правой части равенств абсолютно сходится. В частности, из данных определений следует

$$\alpha_{1,0} = m_X,\ \ \alpha_{0,1} = m_Y,\ \ \alpha_{2,0} = \mathrm{M}[X^2],\ \ \alpha_{0,2} = \mathrm{M}[Y^2],$$
$$\mu_{1,0} = \mu_{0,1} = 0,\ \ \mu_{2,0} = \mathrm{D}[X],\ \ \mu_{0,2} = \mathrm{D}[Y].$$

Точка с координатами (m_X, m_Y) на плоскости xOy называется *математическим ожиданием* случайного вектора (X, Y) или *центром рассеивания*.

Центральный момент второго порядка $\mu_{1,1}$ называется *ковариацией* и обозначается

$$K_{X,Y} = \mathrm{cov}(X, Y) = \mu_{1,1}.$$

Справедлива следующая формула, удобная для практического вычисления ковариации:

$$K_{X,Y} = \alpha_{1,1} - \alpha_{1,0}\cdot\alpha_{0,1} = \mathrm{M}[XY] - m_X m_Y.$$

Очевидно по определению:

$$K_{X,Y} = K_{Y,X}.$$

Число $\rho_{X,Y}$, определяемое как *нормированная ковариация*:

$$\rho_{X,Y} = \frac{K_{X,Y}}{\sigma_X\sigma_Y},$$

называется *коэффициентом корреляции случайных величин X и Y*.

Коэффициент корреляции $\rho_{X,Y}$ удовлетворяет условию $|\rho_{X,Y}| \le 1$ и характеризует степень *линейной зависимости* между X и Y. Если линейной зависимости нет, то $\rho_{X,Y} = 0$ ($K_{X,Y} = 0$). В этом случае случайные величины X и Y *называются некоррелированными*.

Таблица 11.14

X \ Y	0	1	2
0	1/9	1/3	1/4
1	1/9	1/6	0
2	1/36	0	0

Таблица 11.15

X \ Y	–1	0	1
–2	1/8	1/4	1/8
2	1/12	1/3	1/12

Таблица 11.16

X \ Y	1	2	3
0	0,5	0	0
1	0	0,25	0
2	0	0	0,125
3	0	0	0,125

11.146. Закон распределения двумерного дискретного случайного вектора (X, Y) задан таблицей 11.14. Требуется: 1) найти одномерные законы распределения компонент X и Y; 2) найти вероятность $\mathrm{P}\{X < Y\}$; 3) вычислить центр рассеивания и коэффициент корреляции.

11.147. Закон распределения двумерного вектора (X, Y) задан таблицей 11.15. Вычислить центр рассеивания, D_X, D_Y и $\rho_{X,Y}$.

11.148. Наудачу подбрасываются две игральные кости. Обозначим X — число выпадений «шестерки», Y — число выпадений четной цифры. Описать закон распределения случайного вектора (X, Y).

11.149. В условиях задачи 11.148 вычислить $P\{X \ge Y\}$ и $F_X(x)$.

11.150. Закон распределения двумерного дискретного случайного вектора (X, Y) задан таблицей 11.16. Вычислить коэффициент корреляции $\rho_{X,Y}$.

11.151. В продукции завода брак вследствие дефекта α составляет 3%, а вследствие дефекта β — $4{,}5\%$. Годная продукция составляет 95%. Определить, какой процент всей продукции обладает дефектами обоих типов. Найти коэффициент корреляции дефектов α и β. (*Указание.* Ввести индикаторные случайные величины: X — индикатор брака вследствие дефекта α при испытании одной детали ($X = 1$, если деталь обладает дефектом α, $X = 0$ в противном случае), Y — индикатор брака вследствие дефекта β при испытании одной детали. Затем описать закон распределения случайного вектора (X, Y)).

11.152. Брак в продукции завода вследствие дефекта α составил 6%, причем среди забракованной по признаку α продукции в 4% случаев встречается дефект β, а в продукции, свободной от дефекта α, дефект β встречается в 1% случаев. Найти вероятность встретить дефект β во всей продукции и коэффициент корреляции дефектов α и β.

2. Двумерные случайные векторы непрерывного типа

Двумерный случайный вектор (X, Y) называется *случайным вектором непрерывного типа*, если функция распределения $F_{X,Y}(x, y)$ непрерывна на всей плоскости и существует такая неотрицательная кусочно-непрерывная и интегрируемая по Риману в бесконечных пределах функция $f_{X,Y}(x, y)$, называемая *плотностью распределения вероятностей случайного вектора* (X, Y), что

$$F_{X,Y}(x,y)=\int_{-\infty}^{x}du\int_{-\infty}^{y}f_{X,Y}(u,v)dv, \tag{11.27}$$

Функция плотности $f_{X,Y}(x, y)$ обладает следующими свойствами:

1. $f_{X,Y}(x, y) \ge 0$ для всех $(x, y) \in \mathbb{R}^2$.

2. $f_{X,Y}(x,y)=\dfrac{\partial^2 F_{X,Y}(x,y)}{\partial x\,\partial y}$ во всех точках непрерывности функции $f_{X,Y}(x, y)$.

3. $\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}f_{X,Y}(x,y)\,dx\,dy=1$ (условие нормировки).

4. $f_X(x)=\int_{-\infty}^{+\infty}f_{X,Y}(x,y)\,dy,\ f_Y(y)=\int_{-\infty}^{+\infty}f_{X,Y}(x,y)\,dx,$ где $f_X(x)$, $f_Y(y)$ — плотности распределения вероятностей отдельных компонент X и Y.

5. $F_X(x)=\int_{-\infty}^{x}\left(\int_{-\infty}^{+\infty}f_{X,Y}(u,y)\,dy\right)du,\ F_Y(y)=\int_{-\infty}^{y}\left(\int_{-\infty}^{+\infty}f_{X,Y}(x,v)\,dx\right)dv,$ где $F_X(x)$, $F_Y(y)$ — функции распределения компонент X и Y.

6. $P\{(X,Y)\in D\}=\iint_D f_{X,Y}(x,y)\,dx\,dy,$ где D — произвольная квадрируемая область на плоскости. В частности, справедливо следующее конструктивное свойство 7.

7. Вероятность попадания случайной точки (X, Y) в прямоугольник со сторонами, параллельными осям координат (см. рис. 11.12), может быть вычислена по формуле

$$\mathrm{P}\{x_1 \le X < x_2, y_1 \le Y < y_2\} = (F_{X,Y}(x_2, y_2) - F_{X,Y}(x_1, y_2)) - (F_{X,Y}(x_2, y_1) - F_{X,Y}(x_1, y_1)).$$

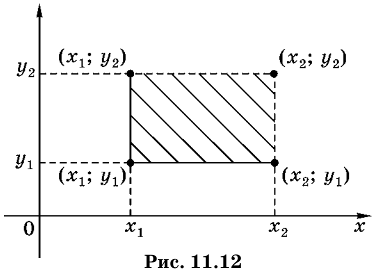


Рис. 11.12

ПРИМЕР 11.23. Плотность распределения двумерного случайного вектора (X, Y) имеет вид

$$f_{X,Y}(x,y)=\frac{1}{\pi^2(1+x^2)(1+y^2)},\quad x,y\in\mathbb{R}.$$

Вычислить функцию распределения $F_{X,Y}(x, y)$.

◄ По формуле (11.27) находим

$$F_{X,Y}(x,y)=\frac{1}{\pi^2}\int_{-\infty}^{y}dv\int_{-\infty}^{x}\frac{1}{(1+u^2)(1+v^2)}du=\frac{1}{\pi^2}\int_{-\infty}^{y}\frac{dv}{1+v^2}\cdot\int_{-\infty}^{x}\frac{du}{1+u^2}=$$

$$=\frac{1}{\pi^2}\operatorname{arctg}u\Big|_{-\infty}^{x}\cdot\operatorname{arctg}v\Big|_{-\infty}^{y}=\frac{1}{\pi^2}\left(\operatorname{arctg}x+\frac{\pi}{2}\right)\left(\operatorname{arctg}y+\frac{\pi}{2}\right). \text{ ►}$$

ПРИМЕР 11.24. Найти плотность распределения двумерного случайного вектора (X, Y), если известна функция распределения

$$F_{X,Y}(x,y)=\begin{cases}1+e^{-2x-3y}-e^{-2x}-e^{-3y}, & x\ge 0,\ y\ge 0,\\ 0, & \text{в остальных точках.}\end{cases}$$

◄ Согласно свойству 2, $f_{X,Y}(x,y)=\dfrac{\partial^2 F_{X,Y}(x,y)}{\partial x\,\partial y}$ во всех точках непрерывности функции $f_{X,Y}(x, y)$. Так как функция распределения дважды дифференцируема при $x\ge 0$, $y\ge 0$, то получаем

$$f_{X,Y}(x,y)=\begin{cases}6\cdot e^{-2x-3y}, & x\ge 0,\ y\ge 0,\\ 0, & \text{в иных случаях.}\end{cases} \text{ ►}$$

11.153. Дана двумерная функция распределения: $F_{X,Y}(x, y) = \sin x \sin y$, где $0\le x\le\frac{\pi}{2}$, $0\le y\le\frac{\pi}{2}$. Найти вероятность попадания случайной точки (X, Y) в прямоугольник, ограниченный прямыми $x=\frac{\pi}{6}$, $x=\frac{\pi}{2}$, $y=\frac{\pi}{4}$, $y=\frac{\pi}{3}$.

11.154. Найти вероятность того, что случайно брошенная точка с координатами (X, Y) попадет в область D, определенную неравенствами $\{1\le x\le 2,\ 1\le y\le 2\}$, если функция распределения координат этой точки равна

$$F_{X,Y}(x,y)=\begin{cases}1+2^{-x^2-2y^2}-2^{-x^2}-2^{-2y^2}, & x\ge 0,\ y\ge 0,\\ 0, & \text{иначе.}\end{cases}$$

11.155. Случайный вектор (X, Y) подчиняется закону распределения с плотностью

$$f_{X,Y}(x,y)=\begin{cases}axy, & (x,y)\in D,\\ 0, & (x,y)\notin D.\end{cases}$$

Область D — квадрат, ограниченный прямыми $x = 0$, $x = 2$, $y = 0$, $y = 2$. Найти коэффициент a и $f_X(x)$.

11.156. Случайный вектор (X, Y) имеет функцию распределения

$$F_{X,Y}(x,y)=\begin{cases}1+e^{-(\lambda x+\mu y)}-e^{-\lambda x}-e^{-\mu y}, & x\ge 0,\ y\ge 0,\\ 0, & \text{иначе.}\end{cases}$$

Найти законы распределения компонент X и Y.

11.157. Случайный вектор (X, Y) имеет функцию распределения

$$F_{X,Y}(x,y)=\begin{cases}1+2^{-x-y}-2^{-x}-2^{-y}, & x\geq 0,\ \ y\geq 0,\\ 0, & \text{иначе.}\end{cases}$$

Найти: а) двумерную плотность распределения случайного вектора (X, Y); б) вероятность попадания случайной точки с координатами (X, Y) в треугольник с вершинами $A(1; 3)$, $B(3; 3)$, $C(2; 8)$.

Начальным моментом порядка $k + s$ случайного вектора (X, Y) непрерывного типа называется действительное число $\alpha_{k,\,s}$, определяемое формулой

$$\alpha_{k,s}=\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}x^k y^s f_{X,Y}(x,y)\,dx\,dy.$$

Центральным моментом порядка $k + s$ случайного вектора (X, Y) непрерывного типа называется действительное число $\mu_{k,\,s}$, определяемое формулой

$$\mu_{k,s}=\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}(x-m_X)^k(y-m_Y)^s f_{X,Y}(x,y)\,dx\,dy.$$

Начальные и центральные моменты существуют, если интеграл в правой части равенств абсолютно сходится. В частности, из данных определений следует

$$\alpha_{1,\,0}=m_X,\ \ \alpha_{0,\,1}=m_Y,\ \ \alpha_{2,\,0}=\mathrm{M}[X^2],\ \ \alpha_{0,\,2}=\mathrm{M}[Y^2],$$
$$\mu_{1,\,0}=\mu_{0,\,1}=0,\ \ \mu_{2,\,0}=\mathrm{D}[X],\ \ \mu_{0,\,2}=\mathrm{D}[Y].$$

Точка с координатами (m_X, m_Y) на плоскости xOy называется *математическим ожиданием* случайного вектора (X, Y) непрерывного типа или *центром рассеивания*.

Центральный момент второго порядка $\mu_{1,\,1}$ называется *ковариацией* и обозначается

$$K_{X,\,Y}=\mathrm{cov}(X, Y)=\mu_{1,\,1}.$$

Справедлива следующая формула, удобная для практического вычисления ковариации:

$$K_{X,\,Y}=K_{Y,\,X}=\alpha_{1,\,1}-\alpha_{1,\,0}\cdot\alpha_{0,\,1}=\mathrm{M}[XY]-m_X m_Y. \tag{11.28}$$

Как и в случае случайного вектора дискретного типа число $\rho_{X,\,Y}$, определяемое формулой

$$\rho_{X,Y}=\frac{K_{X,Y}}{\sigma_X\sigma_Y},$$

называется *коэффициентом корреляции случайных величин X и Y*.

Коэффициент корреляции $\rho_{X,\,Y}$ удовлетворяет условию $|\rho_{X,\,Y}|\leq 1$ и характеризует степень *линейной зависимости* между X и Y. Если $\rho_{X,\,Y}=0$ $(K_{X,\,Y}=0)$, то случайные величины X и Y *называются некоррелированными*.

11.158. Двумерный случайный вектор (X, Y) подчиняется закону распределения с плотностью

$$f_{X,Y}(x,y)=\begin{cases}a(x+y), & (x,y)\in D,\\ 0, & (x,y)\notin D.\end{cases}$$

Область D — квадрат, ограниченный прямыми $x = 0$, $x = 3$, $y = 0$, $y = 3$.

Найти a, m_X, m_Y, D_X, D_Y, σ_X, σ_Y, $K_{X,Y}$, $\rho_{X,Y}$. Вычислить вероятность попадания случайной точки (X, Y) в квадрат Q, ограниченный прямыми $x = 1$, $x = 2$, $y = 1$, $y = 2$.

11.159. Случайный вектор (X, Y) подчиняется закону распределения с плотностью

$$f_{X,Y}(x,y) = \begin{cases} 4xye^{-(x^2+y^2)}, & x \ge 0,\ \ y \ge 0, \\ 0, & \text{в иных случаях.} \end{cases}$$

Вычислить коэффициент корреляции $\rho_{X,Y}$.

11.160. В условиях задачи 11.155 вычислить коэффициент корреляции $\rho_{X,Y}$.

3. Зависимость и независимость случайных величин

Компоненты X и Y случайного вектора (X, Y) называются *независимыми*, если выполняется условие

$$F_{X,Y}(x, y) = F_X(x)F_Y(y).$$

Для независимости компонент X и Y дискретного случайного вектора *необходимо и достаточно*, чтобы для любых x_i и y_j из таблицы распределения выполнялось условие

$$p_{ij} = \mathrm{P}\{X = x_i,\ Y = y_j\} = \mathrm{P}\{X = x_i\} \cdot \mathrm{P}\{Y = y_j\} = p_{i\bullet} \cdot p_{\bullet j}.$$

Если (X, Y) — случайный вектор непрерывного типа, то соответствующее условие независимости имеет вид

$$f_{X,Y}(x,y) = \frac{\partial^2 F_{X,Y}(x,y)}{\partial x\,\partial y} = \frac{dF_X(x)}{dx} \cdot \frac{dF_Y(y)}{dy} = f_X(x) \cdot f_Y(y).$$

Отметим, что допускается нарушение последнего равенства на множестве точек (x, y), имеющих суммарную площадь, равную нулю.

ПРИМЕР 11.25. Закон распределения случайного вектора (X, Y) задан таблицей 11.17.

Таблица 11.17

$X \backslash Y$	1	2
–1	0,15	0,05
0	0,3	0,05
1	0,35	0,1

Таблица 11.18

$X \backslash Y$	1	2	$p_{i\bullet}$
–1	0,15	0,05	0,2
0	0,3	0,05	0,35
1	0,35	0,1	0,45
$p_{\bullet j}$	0,8	0,2	1

Выяснить, являются ли случайные величины X и Y: а) зависимыми; б) коррелированными.

◀ Найдем законы распределения компонент X и Y и запишем их в расширенную таблицу 11.18.

а) Очевидно, что компоненты X и Y являются зависимыми, так как, например,

$$p_{11} = 0{,}15 \ne p_{1\bullet} \cdot p_{\bullet 1} = 0{,}2 \cdot 0{,}8 = 0{,}16.$$

б) Для ответа на второй вопрос вычисляем последовательно:

$m_X = -1 \cdot 0{,}2 + 0 \cdot 0{,}35 + 1 \cdot 0{,}45 = 0{,}25;$

$m_Y = 1 \cdot 0{,}8 + 2 \cdot 0{,}2 = 1{,}2;$

$D_X = (-1)^2 \cdot 0{,}2 + 0^2 \cdot 0{,}35 + 1^2 \cdot 0{,}45 - 0{,}25^2 = 0{,}5875,$

$\sigma_X = \sqrt{0{,}5875} \approx 0{,}766;$

$D_Y = 1^2 \cdot 0{,}8 + 2^2 \cdot 0{,}2 - 1{,}2^2 = 0{,}16,\quad \sigma_Y = \sqrt{0{,}16} = 0{,}4.$

Ковариацию вычисляем по формуле (11.28):

$$K_{X,Y} = \alpha_{1,1} - \alpha_{1,0}\cdot\alpha_{0,1} = -1\cdot 1\cdot 0{,}15 + (-1)\cdot 2\cdot 0{,}05 + 0\cdot 1\cdot 0{,}3 + 0\cdot 2\cdot 0{,}05 + \\ + 1\cdot 1\cdot 0{,}35 + 1\cdot 2\cdot 0{,}1 - 0{,}25\cdot 1{,}2 = 0.$$

Так как $K_{X,Y} = 0$, то компоненты некоррелированы. ►

Таблица 11.19

X \ Y	0	1	2	3
1	0,1	0,1	0,1	0,1
2	0,05	0,05	0,05	0,05
3	0,1	0,1	0,1	0,1

11.161. Закон распределения двумерного дискретного случайного вектора (X, Y) задан таблицей 11.19. Определить, зависимы или независимы компоненты X и Y.

11.162. Случайный вектор (X, Y) распределен равномерно в прямоугольнике со сторонами, параллельными координатным осям:

$$f_{X,Y}(x,y) = \begin{cases} C, & \text{если } -1 \le x < 2,\ 1 \le y < 3, \\ 0, & \text{иначе.} \end{cases}$$

Найти константу C и определить, зависимы или независимы X и Y.

11.163. Случайный вектор (X, Y) распределен равномерно в области D, определяемой неравенством $|x| + |y| \le 1$. Выяснить, являются ли случайные величины X и Y: а) зависимыми или независимыми; б) коррелированными или некоррелированными.

11.164. Показать,что если случайные величины X и Y связывает линейная зависимость $Y = aX + b$, то $\rho_{X,Y} = +1$ при $a > 0$, $\rho_{X,Y} = -1$ при $a < 0$.

11.165. Найти коэффициент корреляции $\rho_{X,Y}$ между случайными величинами: а) X и $Y = 13X - 2$; б) X и $Y = 9 - 7X$.

11.166. Двумерный случайный вектор (X, Y) подчиняется закону распределения с плотностью

$$f_{X,Y}(x,y) = \begin{cases} 24xy, & (x,y) \in D, \\ 0, & (x,y) \notin D. \end{cases}$$

Область D — треугольник, ограниченный прямыми $x + y - 1 = 0$, $x = 0$, $y = 0$.

Выяснить, зависимы или нет случайные величины X и Y и вычислить коэффициент корреляции $\rho_{X,Y}$.

11.167. Дан двумерный случайный вектор (X, Y), где X — время появления в магазине первого покупателя в понедельник, а Y — время появления в магазине первого покупателя во вторник. Известно, что $f_{X,Y}(x, y) = e^{-x-y}$, если $x, y \ge 0$. Установить, зависимы или нет случайные величины X и Y.

§ 11.4. ФУНКЦИИ ОТ СЛУЧАЙНЫХ ВЕЛИЧИН

1. Математическое ожидание функции от случайной величины

Пусть на пространстве элементарных исходов Ω задана случайная величина X. Предположим, что имеется числовая функция $\varphi(x)$ скалярного аргумента x. Случайная величина $Y = \varphi(X) = \varphi(X(\omega))$, $\omega \in \Omega$, называется *функцией от случайной величины X*.

Математическое ожидание случайной величины Y в случае, если оно существует, можно найти по формулам

$$m_Y = \mathrm{M}[Y] = \sum_i \varphi(x_i)\mathrm{P}\{X = x_i\} = \sum_i \varphi(x_i)p_i, \text{ если } X \text{ — СВДТ};$$
$$m_Y = \mathrm{M}[Y] = \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(x) f_X(x)dx, \text{ если } X \text{ — СВНТ}. \tag{11.29}$$

Таким образом, для вычисления математического ожидания функции от случайной величины X не обязательно знать закон распределения случайной величины $Y = \varphi(X)$, а достаточно знать закон распределения случайного аргумента X.

Сформулированные выше правила вычисления математического ожидания функции от случайной величины естественным образом обобщаются на случай функции от случайного вектора. В частности, если (X, Y) — двумерный случайный вектор с известным законом распределения и $Z = \varphi(X, Y)$, где $\varphi(x, y)$ — числовая функция скалярных аргументов x и y, то математическое ожидание случайной величины Z (если оно существует) может быть найдено по следующей формуле:

$$m_Z = \mathrm{M}[Z] = \sum_i \sum_j \varphi(x_i, y_j)\mathrm{P}\{X = x_i, Y = y_j\} = \sum_i \sum_j \varphi(x_i, y_j)p_{ij}, \tag{11.30}$$

если (X, Y) — случайный вектор дискретного типа, или

$$m_Z = \mathrm{M}[Z] = \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(x, y) f_{X,Y}(x, y)dxdy,$$

если (X, Y) — случайный вектор непрерывного типа.

Заметим, что, как и в одномерном случае, для вычисления математического ожидания функции от случайного вектора $Z = \varphi(X, Y)$ не обязательно знать закон распределения случайной величины Z, а достаточно знать закон распределения случайного вектора (X, Y).

Если существуют соответствующие моменты, то справедливы следующие свойства математического ожидания и дисперсии:

1. (*Свойство линейности математического ожидания.*)

$$\mathrm{M}[aX + bY + c] = a\mathrm{M}[X] + b\mathrm{M}[Y] + c.$$

В частности, $\mathrm{M}[aX] = a\mathrm{M}[X]$, $\mathrm{M}[c] = c$.

2. $\mathrm{D}_X = \mathrm{D}[X] = \mathrm{M}[X^2] - m_X^2$.

3. $\mathrm{D}[aX + bY + c] = a^2\mathrm{D}[X] + b^2\mathrm{D}[Y] + 2abK_{X,Y}$.

В частности, $\mathrm{D}[cX] = c^2\mathrm{D}[X]$, $\mathrm{D}[X + c] = \mathrm{D}[X]$.

4. Если случайные величины $X_1, X_2, \dots, X_n$ попарно некоррелированы, то

$$\mathrm{D}[X_1 + X_2 + \dots + X_n] = \mathrm{D}[X_1] + \mathrm{D}[X_2] + \dots + \mathrm{D}[X_n].$$

5. $\mathrm{M}[XY] = \mathrm{M}[X] \cdot \mathrm{M}[Y] + K_{X,Y}$ (или $K_{X,Y} = \mathrm{M}[XY] - m_X m_Y$).

ПРИМЕР 11.26. Задана плотность распределения случайной величины X:

$$f_X(x) = \begin{cases} \cos x, & x \in (0; \pi/2), \\ 0, & x \notin (0; \pi/2). \end{cases}$$

Найти математическое ожидание и дисперсию функции $Y = \sin(X)$.

◄ По формуле (11.29) находим математическое ожидание:

$$\mathrm{M}[Y] = \mathrm{M}[\sin(X)] = \int_0^{\pi/2} \sin(x)\cos(x)\,dx = \frac{1}{2}\sin^2(x)\Big|_0^{\pi/2} = \frac{1}{2}.$$

Для вычисления дисперсии используем свойство 2 и аналогичное правило для вычисления начального момента второго порядка случайной величины Y:

$$\mathrm{M}[Y^2] = \mathrm{M}[\sin^2(X)] = \int_0^{\pi/2} \sin^2(x)\cos(x)\,dx = \frac{1}{3}\sin^3(x)\Big|_0^{\pi/2} = \frac{1}{3}.$$

Далее, по свойству 2 получаем $D_Y = \mathrm{M}[Y^2] - \mathrm{M}^2[Y] = \frac{1}{3} - \frac{1}{4} = \frac{1}{12}$. ►

ПРИМЕР 11.27. Закон распределения случайного вектора (X, Y) задан таблицей 11.20.

Таблица 11.20

X \ Y	1/3	1/2	1
–1	1/6	0	1/3
1	1/3	1/6	0

Вычислить математическое ожидание и дисперсию случайной величины $Z = X/Y$.

◄ Математическое ожидание находим по формуле (11.30):

$$m_Z = \sum_i \sum_j \varphi(x_i, y_j) p_{ij} = (-3)\cdot\frac{1}{6} + (-2)\cdot 0 + (-1)\cdot\frac{1}{3} + 3\cdot\frac{1}{3} + 2\cdot\frac{1}{6} = \frac{1}{2}.$$

Дисперсию вычисляем через второй начальный момент (свойство 2). Применяя то же правило для вычисления $\mathrm{M}[Z^2]$, получаем

$$\mathrm{M}[Z^2] = \sum_i \sum_j (x_i/y_j)^2 p_{ij} = 9\cdot\frac{1}{6} + 1\cdot\frac{1}{3} + 4\cdot\frac{1}{6} = \frac{11}{2}.$$

Далее, согласно свойству 2, находим $\mathrm{D}[Z] = \mathrm{M}[Z^2] - \mathrm{M}^2[Z] = 11/2 - 1/4 = 5$. ►

ПРИМЕР 11.28. Известно, что случайная величина имеет биномиальное распределение $X \sim B(5;\ 0{,}4)$. Найти $\mathrm{D}[5 - 6X]$ и $\mathrm{M}[(X + 2)(7 - X)]$.

◄ По свойству 3 дисперсии $\mathrm{D}[5 - 6X] = (-6)^2 \cdot \mathrm{D}[X]$. Поскольку для случайной величины $X \sim B(n, p)$ дисперсия $\mathrm{D}_X = npq$, где по условию задачи $n = 5$, $p = 0{,}4$, $q = 1 - p = 0{,}6$, то $\mathrm{D}[5 - 6X] = 36 \cdot \mathrm{D}_X = 36 \cdot 5 \cdot 0{,}4 \cdot 0{,}6 = 43{,}2$.

Вычислим теперь $\mathrm{M}[(X + 2)(7 - X)]$. Используя свойство 1 математического ожидания, получаем

$$\mathrm{M}[(X + 2)(7 - X)] = \mathrm{M}[5X - X^2 + 14] = 5\mathrm{M}[X] - \mathrm{M}[X^2] + 14.$$

Поскольку для случайной величины $X \sim B(n, p)$ математическое ожидание $m_X = np = 5 \cdot 0{,}4 = 2$ и по свойству 2 $\mathrm{M}[X^2] = D_X + m_X^2 = 1{,}2 + 4 = 5{,}2$, то

$$\mathrm{M}[(X + 2)(7 - X)] = 5\mathrm{M}[X] - \mathrm{M}[X^2] + 14 = 5 \cdot 2 - 5{,}2 + 14 = 18{,}8.\ ►$$

11.168. Функция распределения СВНТ X имеет вид

$$F_X(x) = \begin{cases} 0, & x \le 0, \\ 1 - e^{-2x}, & x > 0. \end{cases}$$

Вычислить $\mathrm{M}[(X - 4)(5 - X)]$ и $\mathrm{D}[3 - 2X]$.

11.169. Один раз подброшены две игральные кости. Случайная величина S — сумма выпавших очков. Вычислить среднее значение и дисперсию случайной величины S.

11.170. Случайные величины X и Y независимы и имеют следующие характеристики: $m_X = 1$, $m_Y = 2$, $\sigma_X = 1$, $\sigma_Y = 2$. Вычислить $\mathrm{M}[(X + Y - 1)^2]$.

11.171. Известно, что случайная величина $X \sim R(-1;\ 1)$. Пусть $Y = \cos X$. Найти $K_{X,Y}$.

11.172. Подбрасывают три игральные кости. Рассматриваются случайные величины: X — количество костей, на которых выпало шесть очков, Y — количество костей, на которых выпало пять очков. Найти $\mathrm{M}[X + Y]$ и $\mathrm{D}[X + Y]$.

11.173. В прямоугольник с вершинами $(0, 0)$, $(2, 0)$, $(2, 1)$ и $(0, 1)$ наудачу ставится точка. Обозначим (X, Y) случайные координаты этой точки. Вычислить $\mathrm{M}[X \pm Y]$, $\mathrm{M}[X^2 + Y^2]$ и $\mathrm{M}[XY]$.

11.174. В условиях предыдущей задачи вычислить $\mathrm{D}[X \pm Y]$ и $\mathrm{D}[XY]$.

11.175. Две стороны треугольника равны a и b, а угол между ними — случайная величина, распределенная по закону $R(0, \pi)$. Вычислить математическое ожидание и дисперсию площади S треугольника.

11.176. X и Y — независимые случайные величины, одинаково распределенные по закону $R(0, a)$. Вычислить математическое ожидание случайной величины $Z = \min(X, Y)$.

11.177. Известно, что X распределена по закону $R(-2, 2)$, Y — по закону $N(0, 3)$; $\rho_{X,Y} = \sqrt{3}/12$. Вычислить $\mathrm{D}[3X - 4Y + 5]$.

11.178. На смежные стороны прямоугольника со сторонами a и b наудачу и независимо ставится по одной точке. Найти математическое ожидание и дисперсию квадрата расстояния между ними.

11.179. На отрезок $[0, a]$ наудачу ставятся две точки. Вычислить математическое ожидание объема шара, радиус которого равен расстоянию между этими точками.

2. Закон распределения функции от случайной величины

Пусть X — СВДТ. Тогда функция $Y = \varphi(X)$ также является дискретной случайной величиной, принимающей значения $y_i = \varphi(x_i)$. Если при этом все y_i различны, то $\mathrm{P}\{Y = y_i\} = \mathrm{P}\{X = x_i\} = p_i$. Если же среди y_i есть совпадающие значения, то при записи одного такого значения в таблицу распределения необходимо приписать ему суммарную вероятность.

Если X — СВНТ, то поиск закона распределения случайной величины $Y = \varphi(X)$ следует начинать с построения функции распределения

$$F_Y(y) = \mathrm{P}\{Y < y\} = \mathrm{P}\{\varphi(X) < y\},$$

откуда непосредственно получаем

$$F_Y(y) = \mathrm{P}\{\varphi(X) < y\} = \int\limits_{\varphi(x) < y} f_X(x)\,dx, \qquad (11.31)$$

где в правой части записан интеграл по области, определяемой неравенством $\varphi(x) < y$. Плотность распределения вероятности $f_Y(y)$ вычисляется путем дифференцирования функции распределения.

ПРИМЕР 11.29. Закон распределения случайной величины X задан таблицей 11.21.

Таблица 11.21

X	-2	0	2	3
P	0,2	0,3	0,1	0,4

Описать законы распределения функций $Y = \varphi_1(X) = X^3$ и $Z = \varphi_2(X) = X^2$.

◀ Найдем возможные значения случайной величины Y (заметим, что функция $\varphi_1(x)$ монотонна):

$$y_1 = (-2)^3 = -8,\ \ y_2 = 0^3 = 0,\ \ y_3 = 2^3 = 8,\ \ y_4 = 3^3 = 27.$$

Таким образом, ряд распределения случайной величины Y может быть описан таблицей 11.22.

Таблица 11.22

Y	–8	0	8	27
P	0,2	0,3	0,1	0,4

Функция $\varphi_2(x)$ не монотонна, поэтому значения z_i могут повторяться, что и наблюдается в данном случае:

$$\varphi_2(-2) = (-2)^2 = 4,\ \ \varphi_2(0) = 0^2 = 0,$$
$$\varphi_2(2) = 2^2 = 4,\ \ \varphi_2(3) = 3^2 = 9.$$

Таблица 11.23

Z	0	4	9
P	0,3	0,3	0,4

Следовательно, случайная величина Z имеет три возможных значения: $z_1 = 0$, $z_2 = 4$, $z_3 = 9$. При этом вероятность возможного значения $z_2 = 4$ равна сумме вероятностей несовместных событий $\{X = -2\}$ и $\{X = 2\}$. В результате ряд распределения случайной величины Z описывается таблицей 11.23. ►

ПРИМЕР 11.30. Найти плотность распределения вероятностей случайной величины $Y = X^2$, где $X \sim N(0, 1)$.

◄ В данном случае неравенство $X^2 < y$ легко разрешается относительно X при $y > 0$. Поэтому имеем по определению: $F_Y(y) = 0$, если $y \le 0$, и

$$F_Y(y) = \mathrm{P}\{X^2 < y\} = \mathrm{P}\{|X| < \sqrt{y}\} = 2\Phi(\sqrt{y}) - 1,\ \text{ если } y > 0.$$

Дифференцируя последнее равенство по y как сложную функцию, получаем выражение для плотности:

$$f_Y(y) = \begin{cases} 0, & y \le 0 \\ \dfrac{1}{\sqrt{2\pi y}}\exp\left\{-\dfrac{y}{2}\right\}, & y > 0. \end{cases}$$ ►

ПРИМЕР 11.31. Пусть $Y = aX + b$ $(a > 0)$, где X — случайная величина непрерывного типа с известной плотностью $f_X(x)$. Найти $f_Y(y)$.

◄ Поскольку функция $\varphi(x) = ax + b$ при $a > 0$ монотонно возрастающая, то нет необходимости применять интегрирование в формуле (11.31). Достаточно разрешить неравенство $aX + b < y$ относительно X. В результате получаем

$$F_Y(y) = \mathrm{P}\{aX + b < y\} = \mathrm{P}\left\{X < \frac{y-b}{a}\right\} = F_X\left(\frac{y-b}{a}\right).$$

Дифференцируя функцию распределения, получаем выражение для плотности:

$$f_Y(y) = \frac{d}{dy}F_X\left(\frac{y-b}{a}\right) = \frac{1}{a}f_X\left(\frac{y-b}{a}\right).$$ ►

Этот пример показывает, что при линейном преобразовании случайной величины X *вид закона распределения* не меняется, так как он описывается той же функцией распределения, но с линейно преобразованным аргументом. Естественно, что при этом изменяются математическое ожидание, дисперсия и другие числовые характеристики.

11.180. Случайная величина X распределена нормально с параметрами m и σ $(X \sim N(m, \sigma))$. Указать закон распределения $Y = aX + b$ и вычислить основные параметры этого распределения.

11.181. Случайная величина X распределена по закону Коши

$$f_X(x) = \frac{1}{\pi(1 + x^2)}.$$

Найти плотность распределения случайной величины $Y = X^3 + 2$.

Таблица 11.24

X	$\pi/4$	$\pi/2$	$3\pi/4$
P	0,2	0,7	0,1

11.182. Закон распределения случайной величины X задан таблицей 11.24. Найти закон распределения случайной величины $Y = \sin X$.

11.183. СВДТ X имеет пуассоновское распределение $X \sim Pu(23)$, а $Y = 1 - X$. Вычислить $F_Y(2)$.

11.184. Известна функция распределения $F_X(x)$ случайной величины X непрерывного типа. Найти функции распределения случайных величин $Y = 9X^2 - 4$, $Z = |X - 1|$, $V = e^{-2X}$, выразив их через функцию распределения случайной величины X.

11.185. Случайная величина X распределена по показательному закону с параметром $\lambda > 0$. Найти плотность распределения вероятностей случайных величин $Y = \sqrt{X}$, $Z = X^2$, $U = 1 - e^{-\lambda X}$.

11.186. Случайная величина X распределена по показательному закону с $m_X = 0{,}25$. Найти функцию распределения случайной величины $Y = \exp(-2X)$.

11.187. Случайная величина X распределена по закону $N(1, 2)$. Вычислить функцию распределения случайной величины $Y = 1 - X^2$.

Пусть (X, Y) — случайный вектор с заданным законом распределения и $\varphi(x, y)$ — произвольная неслучайная функция. Поиск закона распределения новой случайной величины $Z = \varphi(X, Y)$, являющейся функцией от случайного вектора, осуществляется следующим образом.

Если (X, Y) — СВДТ, то Z также является дискретной случайной величиной, принимающей значения $\varphi(x_i, y_j)$, $(x_i, y_j) \in E_{X,Y}$. Для построения ряда распределения случайной величины Z необходимо объединить в один столбец все одинаковые значения $\varphi(x_i, y_j)$, приписав этому столбцу суммарную вероятность.

Функция распределения вычисляется по формуле

$$F_Z(z) = \mathrm{P}\{Z < z\} = \sum_{i}\sum_{\substack{j \\ \varphi(x_i, y_j) < z}} p_{ij},$$

где $p_{ij} = \mathrm{P}\{X = x_i, Y = y_j\}$ — вероятности из таблицы распределения случайного вектора (X, Y).

Если (X, Y) — двумерный непрерывный случайный вектор с плотностью $f_{X,Y}(x, y)$, то функция распределения новой случайной величины Z определяется по формуле

$$F_Z(z) = \mathrm{P}\{Z < z\} = \iint\limits_{\varphi(x,y) < z} f_{X,Y}(x, y)\,dx\,dy.$$

Область интегрирования здесь представляет множество точек (x, y) на плоскости, для которых $\varphi(x, y) < z$. Найдя функцию распределения $F_Z(z)$, далее можно дифференцированием по z (в тех точках, в которых $F_Z(z)$ имеет производную) найти плотность $f_Z(z)$ распределения случайной величины Z.

Таблица 11.25

$X \backslash Y$	−1	0	1
−1	0,07	0,1	0,13
1	0,2	0,23	0,27

ПРИМЕР 11.32. Закон распределения случайного вектора (X, Y) задан таблицей 11.25. Описать закон распределения случайной величины $Z = X^2 + Y^2 - 1$.

◄ Найдем вначале значения функции $\varphi(x, y) = x^2 + y^2 - 1$ на множестве $E_X \times E_Y$:

$$\varphi(-1, -1) = (-1)^2 + (-1)^2 - 1 = 1, \quad \varphi(-1, 0) = (-1)^2 + 0^2 - 1 = 0,$$
$$\varphi(-1, 1) = (-1)^2 + 1^2 - 1 = 1, \quad \varphi(1, -1) = 1^2 + (-1)^2 - 1 = 1,$$
$$\varphi(1, 0) = 1^2 + 0^2 - 1 = 0, \quad \varphi(1, 1) = 1^2 + 1^2 - 1 = 1.$$

Следовательно, случайная величина Z имеет два возможных значения: $z_1 = 0$ и $z_2 = 1$.

Вероятность возможного значения $z_1 = 0$ равна сумме вероятностей несовместных событий $\{X = -1,\ Y = 0\}$ и $\{X = 1,\ Y = 0\}$, т. е. $\mathrm{P}\{Z = 0\} = 0,1 + 0,23 = 0,33$. Вероятность возможного значения $z_2 = 1$ равна сумме вероятностей несовместных событий $\{X = -1,\ Y = -1\}$, $\{X = -1,\ Y = 1\}$, $\{X = 1,\ Y = -1\}$ и $\{X = 1,\ Y = 1\}$, т. е. $\mathrm{P}\{Z = 1\} = 0,07 + 0,13 + 0,2 + 0,27 = 0,67$.

Таким образом, случайная величина Z имеет индикаторное распределение с параметром $p = 0,67$ ($Z \sim B(1;\ 0,67)$). ►

Таблица 11.26

x_i \ y_j	−1	0	1	2
0	0,05	0,03	0,15	0,05
1	0,1	0,05	0,25	0,05

11.188. Случайный вектор $(X,\ Y)$ дискретного типа распределен по закону, определяемому таблицей 11.26. Описать закон распределения случайных величин $U = |Y - X|$ и $V = Y^2 - X^2$.

11.189. В круг радиуса a наудачу ставится точка. Найти плотность распределения вероятностей расстояния от этой точки до центра круга.

11.190. Случайные величины X и Y независимы и одинаково распределены по закону $N(0,\ \sigma)$. Найти плотность распределения вероятностей случайной величины $R = \sqrt{X^2 + Y^2}$.

11.191. Случайный вектор $(X,\ Y)$ дискретного типа распределен по закону, описанному в задаче 11.189. Описать законы распределения случайных величин $U = XY$ и $V = X^2 + Y^2$.

Рассмотрим частный случай функциональной зависимости $Z = \varphi(X,\ Y) = X + Y$ при дополнительном условии независимости случайных величин X и Y. Задача поиска закона распределения случайной величины Z в этой постановке носит название *задачи композиции*.

Закон распределения определенного вида называется *композиционно устойчивым*, если из того, что две независимые случайные величины X и Y подчиняются закону распределения данного вида, следует, что их сумма $X + Y$ подчиняется закону распределения того же вида. Из изученных выше законов распределения композиционно устойчивыми являются следующие: закон Пуассона $Pu(\lambda)$, биномиальный закон $B(n,\ p)$ при фиксированном p, нормальный закон $N(m,\ \sigma)$.

Таблица 11.27

x_i	0	1	2
p_i	1/2	3/8	1/8

11.192. X и Y — независимые случайные величины, распределенные по одному и тому же закону, определяемому таблицей 11.27. Описать закон распределения суммы $Z = X + Y$.

11.193. X и Y — независимые случайные величины, распределенные по одному и тому же закону $Pu(2)$. Вычислить $\mathrm{P}\{X + Y < 3\}$.

11.194. X и Y независимы и подчиняются одному и тому же распределению $B(3;\ 2/3)$. Вычислить $\mathrm{P}\{X + Y > 2\}$.

11.195. Случайные величины X и Y независимы и распределены по законам: $X \sim N(1,\ 2)$, $Y \sim N(2,\ 1)$. Написать формулу плотности распределения вероятностей их суммы $Z = X + Y$.

11.196. Решить задачу композиции двух равномерных распределений на отрезке [0, 2] (равномерное распределение не является композиционно устойчивым!).

11.197. Случайные величины X и Y независимы и подчиняются одному и тому же закону геометрического распределения с параметром p. Найти закон распределения их суммы $Z = X + Y$ (геометрический закон не является композиционно устойчивым!).

11.198. Случайные величины X и Y независимы и распределены по законам: $X \sim N(-1, 1)$, $Y \sim N(1, 1)$. Используя композиционную устойчивость нормального закона и тот факт, что линейное преобразование не меняет вида закона распределения, вычислить $\mathrm{P}\{-9 < 3X + 4Y < 5\}$.

§ 11.5. ЗАКОНЫ БОЛЬШИХ ЧИСЕЛ И ПРЕДЕЛЬНЫЕ ТЕОРЕМЫ ТЕОРИИ ВЕРОЯТНОСТЕЙ

1. Законы больших чисел

Ряд утверждений и теорем в теории вероятностей объединены общим названием *законы больших чисел*.

Пусть X — случайная величина с конечным математическим ожиданием, тогда справедливо *первое неравенство Чебышева*:

$$\mathrm{P}\{|X| \geq \varepsilon\} = \mathrm{P}\{|X - 0| \geq \varepsilon\} \leq \frac{\mathrm{M}[|X|]}{\varepsilon}, \ \forall \varepsilon > 0.$$

В частности, если $X \geq 0$, то $m_X \geq 0$ и первое неравенство Чебышева перепишется в виде

$$\mathrm{P}\{X \geq \varepsilon\} = \mathrm{P}\{|X - 0| \geq \varepsilon\} \leq \frac{m_X}{\varepsilon}.$$

Пусть случайная величина X имеет конечные m_X и σ_X^2, тогда справедливо *второе неравенство Чебышева*:

$$\mathrm{P}\{|X - m_X| \geq \varepsilon\} \leq \frac{\sigma_X^2}{\varepsilon^2}.$$

На практике неравенства Чебышева применяют, если неизвестен закон распределения случайной величины X и $\varepsilon \gg m_X$ для первого неравенства и $\varepsilon \gg \sigma_X$ для второго неравенства. Полученные при этом значения вероятностей называются *оценками сверху* больших отклонений случайной величины X (для первого неравенства имеется в виду отклонение от нуля, для второго — отклонение от математического ожидания).

Для получения соответствующих *оценок снизу* следует перейти в неравенствах Чебышева к противоположным событиям. Например, из второго неравенства следует

$$\mathrm{P}\{|X - m_X| < \varepsilon\} \geq 1 - \frac{\sigma_X^2}{\varepsilon^2}.$$

ПРИМЕР 11.33. Пусть X — число бракованных изделий из 100 наудачу отобранных из большой партии, поступившей в продажу. За большой период посчитано, что в среднем для этого вида изделий брак составляет 1% . Оценить вероятность события $\{X \geq 5\}$.

◄ Так как $X > 0$ и по условию $m_X = 0{,}01 \cdot 100 = 1$, то по следствию из первого неравенства Чебышева находим $\mathrm{P}\{X \geq 5\} \leq \frac{m_X}{5} = \frac{1}{5} = 0{,}2$. ►

ПРИМЕР 11.34. В условиях примера 11.33 известно, что $\sigma_X^2 = 1$. а) Оценить сверху вероятность $\mathrm{P}\{X \geq 5\}$. б) Получить точное значение указанной вероятности, если предположить, что X подчиняется закону Пуассона с параметром $\lambda = 1$.

◀ а) В силу условия $X \geq 0$ справедливо равенство $\mathrm{P}\{X \geq 5\} = \mathrm{P}\{|X - 1| \geq 4\}$. Отсюда, согласно второму неравенству Чебышева, получаем

$$\mathrm{P}\{X \geq 5\} \leq \frac{\sigma_X^2}{16} = \frac{1}{16} \approx 0{,}0625.$$

Заметим, что вероятность существенно уменьшилась по сравнению с оценкой из предыдущего примера.

б) По условию $X \sim Pu(\lambda = 1)$, что хорошо согласуется с данными задачи (одним из признаков этого является равенство $m_X = \sigma_X^2$) и соответствует закону редких явлений. Используя таблицу суммарных вероятностей закона Пуассона (см. приложение 4), получаем

$$\mathrm{P}\{X \geq 5\} = \sum_{k=5}^{\infty} \frac{1}{k!} e^{-1} = 0{,}00366.$$

Это более чем в 17 раз меньше предыдущей оценки! ▶

11.199. В условиях примера 11.34 оценить сверху вероятность события $\{X \geq 2\}$.

11.200. Среднее значение скорости ветра у Земли в данной местности равно 20 м/с. Оценить снизу вероятность того, что при одном наблюдении скорость ветра окажется меньше 80 м/с.

11.201. Средняя температура в квартире в период отопительного сезона равна 20°C, а среднее квадратическое отклонение равно 2°C. Оценить снизу вероятность того, что температура в квартире отклонится от средней по абсолютной величине менее чем на 4°C.

11.202. Игральная кость подбрасывается 6 раз. Пусть X — число выпадений четной цифры.

а) Оценить по Чебышеву вероятность события $\{|X - m_X| \geq 3\}$.

б) Найти точное значение указанной вероятности.

11.203. Средний срок службы автомобильной свечи зажигания 4 года. Оценить снизу вероятность того, что данная свеча прослужит не более 8 лет.

11.204. Среднее значение расхода воды в некотором малом населенном пункте составляет 50 000 л в день. Оценить снизу вероятность того, что в этом населенном пункте расход воды в предновогодний день не превысит 120 000 л.

Последовательность случайных величин $X_1, X_2, \ldots, X_n$ *сходится к случайной величине X по вероятности* при $n \to \infty$, если $\forall \varepsilon \geq 0$

$$\lim_{n\to\infty} \mathrm{P}\{|X_n - X| \geq \varepsilon\} = 0, \text{ или } \lim_{n\to\infty} \mathrm{P}\{|X_n - X| < \varepsilon\} = 1.$$

Достаточное условие сходимости по вероятности:

$$\mathrm{P}\{|X_n - X| \geq \varepsilon\} \leq \delta_n(\varepsilon) \underset{n\to\infty}{\to} 0,$$

где $\{\delta_n(\varepsilon)\}$, $n = 1, 2, \ldots$, — зависящая от ε неотрицательная неслучайная последовательность.

В частных случаях в качестве предельной величины может выступать и не случайная величина (например, $\mathrm{M}[X]$). Для сходимости по вероятности принято краткое обозначение $X_n \underset{n\to\infty}{\overset{P}{\to}} X$.

Пусть $\{X_n\}$ — последовательность случайных величин с конечными математическими ожиданиями и дисперсиями. Для любого $n \in \mathbb{N}$ построим последовательность среднеарифметических $Y_n = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} X_k$, $n \in \mathbb{N}$.

Говорят, что к последовательности $\{X_n\}$ *применим закон больших чисел*, если для любого заданного $\varepsilon > 0$ $\mathrm{P}\{|Y_n - \mathrm{M}[Y_n]| \geq \varepsilon\} \underset{n\to\infty}{\to} 0$.

ТЕОРЕМА 11.1. (*Закон больших чисел в формулировке Чебышева.*) *Пусть для последовательности $\{X_k\}$ выполняются следующие условия:*

1) *элементы последовательности попарно независимы*;

2) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n^2}\sum_{k=1}^{n} \mathrm{D}[X_k] = 0$,

тогда к последовательности $\{X_k\}$ применим закон больших чисел.

Имеют место следующие частные случаи проявления закона больших чисел:

1) $\mathrm{D}[X_k] \leq \sigma^2$, $\forall k \in \mathbb{N}$, то есть дисперсии членов последовательности равномерно ограничены и, следовательно, условие 2) теоремы 11.1 выполняется;

2) все X_k попарно независимы, одинаково распределены и имеют конечную дисперсию. В этом случае закон больших чисел формулируется следующим образом: *среднее арифметическое первых n членов последовательности сходится по вероятности к их общему математическому ожиданию*. В краткой записи:

$$Y_n \underset{n\to\infty}{\overset{P}{\to}} m_X.$$

ТЕОРЕМА 11.2. (*Закон больших чисел в формулировке Бернулли.*) *Пусть X_n — число успехов в n опытах по схеме Бернулли с вероятностью успеха в одном опыте, равной p (в краткой записи: $X_n \sim B(n, p)$). Обозначим $Y_n = \frac{1}{n}\cdot X_n = p_n^*$ — относительная частота успехов. Тогда справедливо следующее утверждение.*

При увеличении числа опытов по схеме Бернулли относительная частота успехов сходится по вероятности к вероятности успеха в одном опыте, т. е. $p_n^* \underset{n\to\infty}{\overset{P}{\to}} p$.

Теорема Бернулли играет большую роль в математической статистике, составляя основу для оценивания неизвестной вероятности событий в реальных экспериментах.

11.205. Случайная двоичная последовательность, вырабатываемая на ЭВМ, делится на группы из одинаковых символов (нулей и единиц). Обозначим X_i — число знаков в i-й группе; $Y_n = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i$ — среднее число знаков в серии, вычисленное по n сериям. Доказать, что последовательность $\{Y_n\}$ сходится по вероятности к 2.

11.206. Пусть X_k — случайная длина детали, сходящей с конвейера. Известны ее основные характеристики:

$$\mathrm{M}[X_i] = m_X = 10\,\text{см},\ \ \mathrm{D}[X_i] = \sigma_X^2 = 0{,}04\,\text{см}^2.$$

Относительную точность изготовления детали можно характеризовать отношением $\frac{\sigma_X}{m_X}$. Производится сборка 9 подобных деталей (т. е. их длины складываются). Обозначим $Y = \sum_{i=1}^{n} X_i$. Вычислить относительную точность для Y, т. е. отношение $\frac{\sigma_Y}{m_Y}$.

В задачах 11.207, 11.208 заданы законы распределения членов последовательности $\{X_1, X_2, \ldots, X_k, \ldots\}$. Применим ли к этим последовательностям закон больших чисел?

11.207. $E_{X_k} = \{-k^2, 0, k^2\}$; $\mathrm{P}\{X_k = \pm k^2\} = 2^{-k}$; $\mathrm{P}\{X_k = 0\} = 1 - 2^{1-k}$.

11.208. $E_{X_k} = \{-\ln k, \ln k\}$; $\mathrm{P}\{X_k = \pm \ln k\} = 0{,}5$.

11.209. В последовательности $\{X_k\}$ случайные величины X_k попарно независимы и распределены по закону $R(-\sqrt{k}, \sqrt{k})$. Применим ли к этой последовательности закон больших чисел?

2. Предельные теоремы теории вероятностей

ТЕОРЕМА 11.3. (*Центральная предельная теорема* (ЦПТ).) *Пусть для последовательности случайных величин $X_1, X_2, \ldots, X_n$ выполняются условия*:

1) *при любом n случайные величины $X_1, X_2, \ldots, X_n$ независимы в совокупности*;
2) *одинаково распределены*;
3) *существует* $\mathrm{M}[X_k^2]$, $\forall k \in \mathbb{N}$.

Обозначим: $Y_n = \sum_{k=1}^{n} X_k$, $\overset{\circ}{Y}_n = Y_n - \mathrm{M}[Y_n]$, $Z_n = \frac{\overset{\circ}{Y}_n}{\sigma\sqrt{n}}$, *где* $\sigma^2 = \mathrm{D}[X_k]$, $k \in \mathbb{N}$.

Тогда для любого $x \in \mathbb{R}$ $\lim_{n \to \infty} F_{Z_n}(x) = \Phi(x)$, *где* $\Phi(x)$ — *функция нормального распределения* (*интеграл вероятности*).

ЦПТ была впервые доказана русским математиком А. М. Ляпуновым в 1901 г. при более жестких условиях на характеристики членов последовательности X_1, $X_2, \ldots, X_n$.

ЦПТ существенно усиливает результат теоремы Чебышева (закон больших чисел), устанавливая условия, при которых стандартизованная сумма независимых случайных величин в пределе подчиняется нормальному закону. Особое значение приобретает ЦПТ в математической статистике, составляя основу для оценивания ошибок результатов наблюдений.

Следствием ЦПТ для схемы Бернулли являются следующие две теоремы Муавра–Лапласа.

ТЕОРЕМА 11.4. (*Локальная теорема Муавра–Лапласа.*) *Пусть Y_n — число успехов в n опытах по схеме Бернулли, p — вероятность успеха в одном опыте, $m \in \mathbb{N}$ — фиксированная величина. Тогда для достаточно больших n справедлива приближенная формула*

$$\mathrm{P}\{Y_n = m\} \approx \varphi(x_m)/\sqrt{npq}, \qquad (11.32)$$

где $x_m = \frac{m - np}{\sqrt{npq}}$, $\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\exp(-x^2/2)$ — *плотность нормального стандартизованного распределения.*

ТЕОРЕМА 11.5. (*Интегральная теорема Муавра–Лапласа.*) *Пусть снова Y_n — число успехов в n опытах по схеме Бернулли, p — вероятность успеха в одном опыте. Тогда при условии $\sqrt{npq} \gg 1$ для вероятности попадания случайной величины Y_n на промежуток $[m_1, m_2]$ справедлива приближенная формула*

$$P\{m_1 \le Y_n \le m_2\} \approx \Phi\left(\frac{m_2 - np}{\sqrt{npq}}\right) - \Phi\left(\frac{m_1 - np}{\sqrt{npq}}\right). \tag{11.33}$$

ПРИМЕР 11.35. 100 раз подброшена правильная монета. Применяя локальную теорему Муавра–Лапласа, вычислить приближенно вероятность того, что герб выпадет ровно 50 раз.

◄ Пусть X — число выпадений герба при 100 подбрасываниях монеты. Очевидно, что $X \sim B(100;\ 0{,}5)$. Далее находим $np = 50$, $\sqrt{npq} = 5$, $x_m = \dfrac{50-50}{\sqrt{npq}} = 0.$ По формуле (11.32), используя таблицу значений функции $\varphi(x)$ (плотности нормального стандартизованного распределения), находим

$$P\{X = 50\} \approx \varphi(0)/5 = 0{,}39894/5 = 0{,}0798. ►$$

ПРИМЕР 11.36. После открытия Менделем законов наследственности многие ботаники проводили опыты по скрещиванию желтого (гибридного) гороха с зеленым. По известной гипотезе Менделя вероятность появления зеленого гороха в таких опытах должна быть равна 1/4. Проведя 34 153 опыта, в 8436 случаях получили зеленый горох. Обозначим p_n^* — относительная частота появления зеленого гороха. Вычислить вероятность события $P\{0{,}245 < p_n^* < 0{,}255\}$.

◄ По определению относительной частоты, $p_n^* = \dfrac{1}{n}X$, где X — число успехов (число появлений зеленого гороха) в $n = 34\,153$ опытах по схеме Бернулли с вероятностью успеха в одном опыте 0,25. Отсюда получаем $m_X = np = 34\,153 \cdot 0{,}25 = 8538{,}25$; $D_X = npq = 640{,}37$; $\sigma_X \cong 80$.

Поскольку $\sigma_X \gg 1$, то формула (11.33) дает хорошее приближение к искомой вероятности:

$$P\{0{,}245 < p_n^* < 0{,}255\} = P\{|p_n^* - p| < 0{,}005\} = P\{|X - np| < 0{,}005 \cdot n\} \approx$$
$$\approx 2\Phi\left(\frac{0{,}005n}{\sigma_X}\right) - 1 = 2\Phi(1{,}28) - 1 = 0{,}7995. ►$$

11.210. В условиях примера 11.35 вычислить приближенно вероятность того, что герб выпадет: а) ровно 35 раз; б) от 45 до 65 раз.

11.211. В условиях примера 11.36 установить, сколько надо произвести опытов, чтобы с вероятностью не меньшей 0,99 можно было утверждать, что отклонение относительной частоты от 0,25 не превзойдет 0,01?

11.212. Компьютерная программа выдала 10 000 случайных чисел из множества $\{0, 1, \ldots, 9\}$. Найти приближенное значение того, что число «нулей» будет заключено между 940 и 1060.

11.213. Дисперсия каждой из 4500 независимых, одинаково распределенных случайных величин равна 5. Вычислить приближенно вероятность P того, что среднее арифметическое этих величин отклонится от своего математического ожидания не более чем на 0,04: а) используя второе неравенство Чебышева; б) используя нормальное приближение как следствие из ЦПТ.

11.214. Партия куриных яиц принимается, если 96% всех яиц удовлетворяет нормам приемки (удовлетворяет стандарту). Считая, что число стандартных яиц в партии подчиняется биномиальному закону, найти приближенно вероятность того, что при контроле 200 яиц обнаружится не менее 190 стандартных.

11.215. С конвейера сходит в среднем 85% изделий первого сорта. Сколько изделий необходимо взять, чтобы с вероятностью, не меньшей 0,997, отклонение относительной частоты появления изделия первого сорта в выбранной партии от вероятности появления по абсолютной величине не превосходило 0,01? (Предполагаем, что искомое значение n удовлетворяет условию применимости интегральной теоремы Муавра–Лапласа.)

11.216. Вероятность попадания в мишень при каждом из 700 выстрелов равна 0,4. Какое максимально возможное отклонение относительной частоты от вероятности попадания при отдельном выстреле можно ожидать с вероятностью 0,997?

ТЕОРЕМА 11.6. (*Нормальная асимптотика закона Пуассона.*) *Пусть* $X \sim Pu(\lambda)$, $Z_\lambda = \dfrac{X-\lambda}{\sqrt{\lambda}}$ — *стандартизованная пуассоновская случайная величина. Тогда для любого* $x \in \mathbb{R}$ $\lim\limits_{\lambda \to \infty} \mathrm{P}\{Z_\lambda < x\} = \Phi(x)$.

Из утверждения теоремы следует, что при достаточно больших значениях параметра λ можно приближенно аппроксимировать пуассоновское распределение нормальным.

11.217. Пусть X — число автобусов, отправляемых в ремонт после месяца эксплуатации на городских линиях. Известно, что $m_X = 8$. Вычислить вероятность события $\{X < 15\}$ двумя способами: а) считая применимым закон редких явлений, т. е. полагая, что $X \sim Pu(\lambda)$ при $\lambda = 8$; б) считая применимой нормальную аппроксимацию пуассоновского распределения.

11.218. Известно, что в среднем 5% студентов носят очки. Какова вероятность, что из 200 студентов, сидящих в аудитории, окажется не менее 10% носящих очки?

11.219. Среднее число вызовов на АТС за 1 минуту равно $\lambda = m_X = 20$. Найти вероятности следующих событий: $A = \{X \geq 20\}$, $B = \{10 \leq X < 30\}$.

ГЛАВА 12

МЕТОДЫ СТАТИСТИЧЕСКОЙ ОБРАБОТКИ ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНЫХ ДАННЫХ

§ 12.1. ПЕРВИЧНАЯ ОБРАБОТКА ВЫБОРКИ

1. Способы описания результатов наблюдений

Совокупность всех возможных значений измеряемой случайной величины X принято в математической статистике называть *генеральной совокупностью*, а саму случайную величину X — *генеральной случайной величиной*.

В основе большинства методов математической статистики лежит *выборочный метод*, состоящий в том, что свойства генеральной совокупности X устанавливаются путем изучения ее свойств на случайной выборке конечного объема.

Выборкой объема n из генеральной совокупности называется n измеренных значений случайной величины X, записанные в порядке поступления этих значений, т. е. $x_1, x_2, \ldots, x_n$.

Задачей первичной обработки выборки является получение такого ее представления, которое позволяет выявить некоторые характерные особенности генеральной совокупности.

Выборка объема n из генеральной совокупности X, упорядоченная в порядке неубывания элементов, т. е. $x^{(1)} \le x^{(2)} \le \ldots \le x^{(n)}$, называется *вариационным рядом*. Разность между максимальным и минимальным элементами выборки $\omega = x^{(n)} - x^{(1)}$ называется *размахом выборки*.

Пусть выборка содержит m различных чисел $z_1, z_2, \ldots, z_m$, где $m \le n$ и $z_1 < z_2 < \ldots$ $\ldots < z_m$, причем число z_j встречается в выборке n_j раз, $j = 1, 2, \ldots, m$.

Число n_j называют *частотой* элемента выборки z_j, а отношение $p_j^* = \dfrac{n_j}{n}$ — *относительной частотой* этого элемента.

Статистическим рядом (*группированной* или *частотной выборкой*) называют таблицу, которая в первой строке содержит различные, упорядоченные значения выборки z_j, а во второй строке — относительные частоты $p_j^* = \dfrac{n_j}{n}$ этих значений (табл. 12.1).

Другой способ группировки, который используют обычно при больших объемах выборки ($n \ge 50$), состоит в следующем. Отрезок $[x^{(1)}; x^{(n)}]$, содержащий всю выборку, разбивают на m интервалов $\Delta_j = (d_{j-1}; d_j]$, как правило, одинаковой длины

$$\Delta = \frac{x^{(n)} - x^{(1)}}{m}.$$

Таблица 12.1

Значения z_j	z_1	z_2	...	z_m
Относительные частоты n_j/n	n_1/n	n_2/n	...	n_m/n

Таблица 12.2

Промежутки Δ_j	$(d_0; d_1]$	$(d_1; d_2]$	...	$\Delta_m = (d_{m-1}; d_m]$
Частоты n_j	n_1	n_2	...	n_m
Относительные частоты $p_j^* = n_j / n$	n_1/n	n_2/n	...	n_m/n

Далее, подсчитывают *частоты* n_j попадания выборочных значений x_i в промежутки Δ_j и *относительные частоты* n_j/n. Получающийся в результате этого статистический ряд, представленный в таблице 12.2, называют *интервальным статистическим рядом* (или *интервальной выборкой*).

Число m промежутков, на которые разбивают отрезок $[x^{(1)}; x^{(n)}]$, выбирают в зависимости от объема выборки n. Существуют различные критерии выбора m: например, оценку числа промежутков можно получить по формуле Стерджесса $m \approx [1 + 1{,}44 \cdot \ln n]$, где $[a]$ — целая часть числа a.

Распределение, описываемое таблицей 12.1, обладает всеми свойствами обычного дискретного распределения, в котором роль вероятностей играют относительные частоты p_j^*. Такое распределение называется *эмпирическим распределением*. Для простой (не группированной) выборки объема n полагаем $n_j = 1$ $(p_j^* = \frac{1}{n})$, $j = 1, 2, \ldots, n$, и получаем *равномерное эмпирическое распределение*.

Любые характеристики эмпирического распределения вычисляются по тем же правилам, что и для обычного дискретного распределения в теории вероятностей, но метятся «звездочкой», чтобы подчеркнуть их статистическую природу. Например, *эмпирическая функция распределения — функция накопленных частот* — вычисляется по формуле

$$F_n^*(x) = \mathrm{P}^*\{X < x\} = \sum_{k:\, x_k < x} p_k^* = \frac{1}{n} \sum_{k:\, x_k < x} n_k.$$

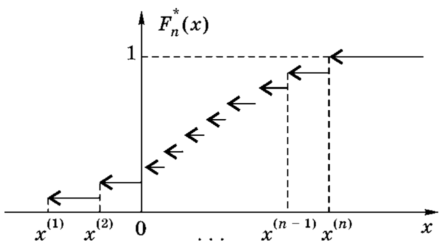


Рис. 12.1

Очевидно, $F_n^*(x) = 0$ при $x \le x^{(1)}$ и $F_n^*(x) = 1$ при $x > x^{(m)}$, кроме того, $F_n^*(x)$ — кусочно-постоянная функция с разрывами первого рода (скачками величины p_j^*) в точках $x = x^{(j)}$, $j = 1, 2, \ldots, m$. Пример графика эмпирической функции распределения показан на рис. 12.1 (здесь $n = 10$ и все выборочные значения $x^{(i)}$ различны).

Гистограммой частот (или просто — *гистограммой*) называют диаграмму, составленную из прямоугольников с основаниями $\Delta_j = [d_{j-1}; d_j]$ и высотами n_j (рис. 12.2) или $h_j^* = p_j^* / |\Delta_j|$, $j = 1, 2, \ldots, m$ (рис. 12.3). Гистограмма дает приближенное представление о плотности распределения вероятностей генеральной случайной величины X непрерывного типа.

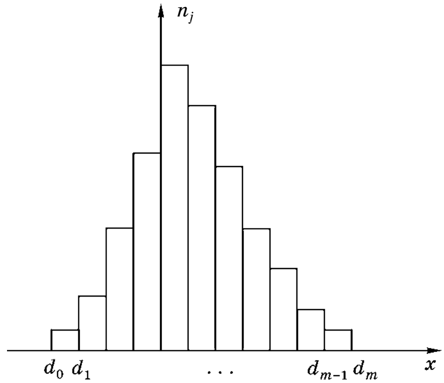


Рис. 12.2

Полигоном частот называют ломаную линию с вершинами в точках (z_j, n_j), взятых из частотной или интервальной выборки. Для интервальной выборки полагают $z_j = (d_{j-1} + d_j)/2$ (рис. 12.4).

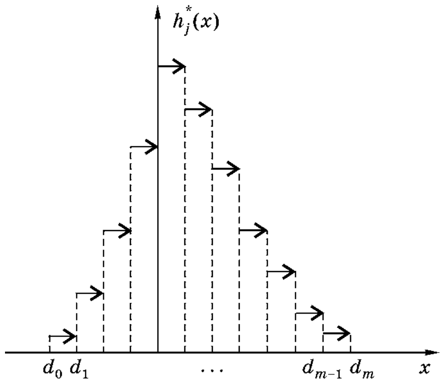


Рис. 12.3

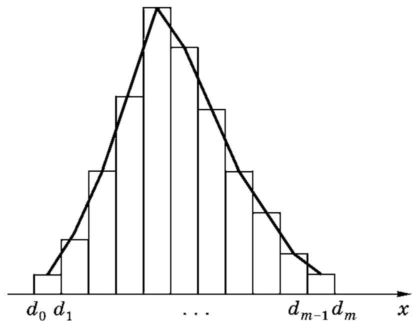


Рис. 12.4

ПРИМЕР 12.1. Наблюдения за проданными размерами мужской обуви в магазине за один рабочий день дали следующие результаты:

39 41 40 42 41 40 42 44 40 43 42 41 43 39 42
41 42 39 41 37 43 41 38 43 42 41 40 41 38 44
40 39 41 40 42 40 41 42 40 43 38 39 41 41 42.

Представить данную выборку в виде простейшего статистического ряда, где вместо относительных частот используются частоты n_j.

◀ Приводя выборку к вариационному ряду и подсчитывая частоту различных значений, получаем статистический ряд, представленный в таблице 12.3.

Таблица 12.3

Значение z_j	37	38	39	40	41	42	43	44
Частота n_j	1	3	5	8	12	9	5	2

Объем выборки равен $n=\sum_{j=1}^{8} n_j = 45.$ ▶

ПРИМЕР 12.2. Ниже приведены результаты обследования размеров оплаты труда сотрудников одной из коммерческих фирм (в условных единицах за неделю):

120 206 205 217 206 124 204 120 200 200 200 127 211
181 204 209 207 206 200 207 206 127 126 127 185 128
201 203 214 126 206 208 209 120 202 202 120 123 211
129 204 201 124 124 204 121 208 206 122 127.

Представить данные в виде интервальной выборки с шириной интервала $\Delta = 4$. Построить гистограмму частот.

◀ Преобразуя данные к вариационному ряду, находим наименьшее и наибольшее значения выборки: $x^{(1)} = 181$, $x^{(n)} = x^{(50)} = 217$. Отсюда число интервалов равно

$$l = \frac{x^{(50)} - x^{(1)}}{\Delta} = \frac{36}{4} = 9.$$

Подсчитывая число выборочных значений n_k, попавших в k-й интервал, получаем интервальное представление выборки в виде таблицы 12.4.

Соответствующая гистограмма частот представлена на рис. 12.5. ▶

Таблица 12.4

Интервалы	181–185	185–189	189–123	123–127	127–201	201–205	205–209	209–213	213–217
Частоты	2	0	7	9	8	8	12	2	2

Таблица 12.5

z_i	1	4	6
n_i	10	15	25

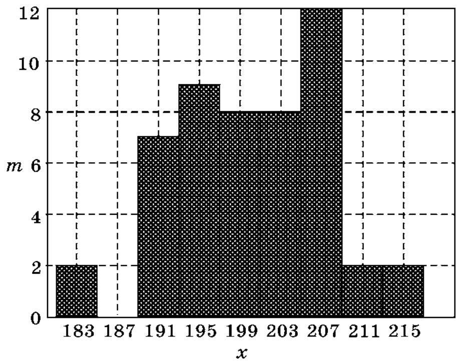


Рис. 12.5

12.1. Получена выборка: 5, 3, 7, 10, 5, 5, 2, 10, 7, 2, 7, 7, 4, 2, 4. Представить ее в виде а) вариационного ряда; б) статистического ряда; в) построить полигон частот.

12.2. Вычислить эмпирическую функцию распределения для выборки, представленной статистическим рядом в таблице 12.5.

В задачах 12.3–12.5 построить графики эмпирических функций распределения, гистограммы и полигоны частот для выборок, представленных статистическими рядами в таблицах 12.6–12.8.

12.3.

Таблица 12.6

z_i	15	16	17	18	12
n_i	1	4	5	4	2

12.4.

Таблица 12.7

z_i	2	3	4	5	6	7	8
n_i	1	3	4	6	5	2	1

12.5.

Таблица 12.8

Границы интервалов	10–20	20–30	30–40	40–50	50–60	60–70	70–80
Частоты	1	2	7	18	12	8	2

12.6. 50 абитуриентов получили на вступительных экзаменах следующее количество баллов (в 20-бальной системе оценок):

12, 14, 12, 15, 14, 18, 13, 16, 17, 12, 20, 17, 15, 13, 17, 16, 20,
14, 14, 13, 17, 16, 15, 12, 16, 15, 18, 17, 15, 14, 16, 15, 15, 18,
15, 15, 12, 14, 16, 18, 18, 15, 15, 17, 15, 16, 16, 14, 14, 17.

а) Представить выборку статистическим рядом. б) Построить полигон частот.

2. Числовые характеристики эмпирического распределения

Начальные α_k^* и центральные μ_k^* моменты эмпирического распределения, заданного статистическим рядом (табл. 12.1), определяются формулами:

$$\alpha_k^* = \sum_{i=1}^{m} z_i^k p_i^* = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{m} z_i^k n_i \qquad (12.1)$$

— *начальный выборочный момент k-го порядка*;

$$\mu_k^* = \sum_{i=1}^{m}(z_i - \alpha_1^*)^k p_i^* = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{m}(z_i - \overline{x})^k n_i \qquad (12.2)$$

— *центральный выборочный момент k-го порядка.*

В частности, начальный выборочный момент первого порядка

$$\alpha_1^* = \overline{x} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{m} z_i n_i \qquad (12.3)$$

называется *выборочным средним* (*средним арифметическим выборочных значений*).

Центральный выборочный момент второго порядка μ_2^* называется *выборочной дисперсией* и для нее вводится специальное обозначение

$$S^2 = \mu_2^* = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{m}(z_i - \overline{x})^2 n_i. \qquad (12.4)$$

Выборочные коэффициенты асимметрии и эксцесса вычисляются по формулам

$$a_X^* = \frac{\mu_3^*}{(\sigma_X^*)^3},\ \ e_X^* = \frac{\mu_4^*}{(\sigma_X^*)^4} - 3. \qquad (12.5)$$

Замечание. Для простой (негруппированной выборки) в формулах (12.1)–(12.4) следует положить $z_i = x_i$, $n_i = 1$, $i = 1, 2, \ldots, n$.

При большом объеме выборки ($n \geq 50$) из непрерывной генеральной совокупности X выборочные моменты вычисляются на основе интервальной выборки (табл. 12.2) по формулам

$$\alpha_k^* = \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{m} n_j(\hat{z}_j)^k,\ \ \overline{x} = \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{m} n_j\hat{z}_j,\ \ \mu_k^* = \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{m} n_j(\hat{z}_j - \overline{x})^k,\ \ S^2 = D_X^* = \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{m} n_j(\hat{z}_j - \overline{x})^2,$$

где $\hat{z}_j = \dfrac{d_j + d_{j-1}}{2}$ — середины промежутков разбиения.

Наряду с выборочным средним для эмпирического распределения можно определить еще две характеристики положения.

Выборочной модой d_X^* эмпирического распределения называется элемент выборки, встречающийся с наибольшей частотой.

Выборочной медианой называется число h_X^*, которое делит вариационный ряд на две части, содержащие равное число элементов. Если объем выборки — нечетное число ($n = 2m + 1$), то $h_X^* = x^{(m+1)}$. Если же $n = 2m$, то $h_X^* = \dfrac{1}{2}(x^{(m)} + x^{(m+1)})$.

ПРИМЕР 12.3. Вычислить среднее, моду и медиану для выборки 5, 6, 8, 2, 3, 1, 1, 4.

◄ Представим данные в виде вариационного ряда: 1, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 8. Выборочное среднее $\overline{x} = \dfrac{1}{8}(1+1+2+3+4+5+6+8) = 3{,}75$. С наибольшей частотой встречается элемент 1, поэтому $d_X^* = 1$. Так как $n = 8$, то медиана $h_X^* = \dfrac{1}{2}(3+4) = 3{,}5$. ►

ПРИМЕР 12.4. Показать, что справедлива следующая формула для выборочной дисперсии:

$$S^2 = D_X^* = \alpha_2^* - (\alpha_1^*)^2.$$

◀ Для простоты ограничимся доказательством для негруппированной выборки. Используя формулу (12.4) при $m = n$, $n_i = 1$, $i = 1, 2, \ldots, n$, и проводя очевидные преобразования, получаем

$$D_X^* = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \overline{x})^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i^2 - 2\overline{x}x_i + \overline{x}^2) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}x_i^2 - 2\overline{x}\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}x_i + \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\overline{x}^2 =$$

$$= \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}x_i^2 - 2\overline{x}^2 + \overline{x}^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}x_i^2 - \overline{x}^2 = \alpha_2^* - (\alpha_1^*)^2. \blacktriangleright$$

Заметим, что равенство $D_X^* = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}x_i^2 - \overline{x}^2 = \alpha_2^* - (\alpha_1^*)^2$ для выборочной дисперсии является аналогом соответствующей формулы для дисперсии в теории вероятностей: $\mathrm{D}[X] = \mathrm{M}[X^2] - \mathrm{M}^2[X] = \alpha_2 - \alpha_1^2$ (см. задачу 11.100).

Доказательство приведенной формулы для группированной выборки предлагается провести самостоятельно.

В задачах 12.7, 12.8 вычислить моду, медиану, среднее и дисперсию указанных выборок.

12.7. 7, 3, 3, 6, 4, 5, 1, 2, 1, 3.

12.8. 3,1; 3,0; 1,5; 1,8; 2,5; 3,1; 2,4; 2,8; 1,3.

12.9. Определить среднее, моду, медиану и дисперсию интервальной выборки, представленной в таблице 12.9.

Таблица 12.9

Границы интервалов	5–7	7–9	9–11	11–13	13–15	15–17
Частоты	8	14	40	26	6	4

Таблица 12.10

Границы интервалов	28–30	30–32	32–34	34–36	36–38	38–40	40–42	42–44
Частоты	8	15	15	12	15	20	10	5

12.10. В условиях задачи 12.5 вычислить среднее и дисперсию эмпирического распределения, представленного таблицей 12.8.

12.11. В условиях задачи 12.6 вычислить размах выборки, медиану, среднее и дисперсию эмпирического распределения.

12.12. Вычислить выборочные коэффициенты асимметрии и эксцесса для интервальной выборки, представленной в таблице 12.10.

§ 12.2. ОЦЕНИВАНИЕ НЕИЗВЕСТНЫХ ХАРАКТЕРИСТИК РАСПРЕДЕЛЕНИЯ

1. Точечные оценки и их свойства. Метод подстановки

Пусть θ — неизвестная числовая характеристика генеральной случайной величины X. *Точечной оценкой* $\tilde{\theta}$ неизвестной характеристики θ называется приближенное значение этой характеристики, полученное по выборке объема n из генеральной совокупности X.

Очевидно, что оценка $\tilde{\theta}$ является функцией n-мерного выборочного вектора $(X_1, X_2, \ldots, X_n)$, у которого компоненты независимы в совокупности и одинаково распределены по закону генеральной случайной величины. Таким образом,

$$\tilde{\theta} = \tilde{\theta}^{(n)}(X_1, X_2, \ldots, X_n)$$

и, следовательно, $\tilde{\theta}$ является случайной величиной, называемой *статистикой*.

Качество оценки характеризуется следующими основными свойствами.

1. *Несмещенность*. Статистика $\tilde{\theta}^{(n)}(X_1, X_2, \ldots, X_n)$ называется *несмещенной оценкой* параметра θ, если ее математическое ожидание совпадает с θ для любого фиксированного n:

$$\mathrm{M}[\tilde{\theta}^{(n)}(X_1, X_2, \ldots, X_n)] = \theta, \; n \in \mathbb{N}.$$

Если же это требование выполняется в пределе, т. е.

$$\lim_{n \to \infty} \mathrm{M}[\tilde{\theta}^{(n)}(X_1, X_2, \ldots, X_n)] = \theta,$$

то оценку $\tilde{\theta}^{(n)}$ называют *асимптотически несмещенной*. Несмещенность оценки означает отсутствие систематической ошибки оценивания.

2. *Состоятельность*. Статистика $\tilde{\theta}^{(n)}(X_1, X_2, \ldots, X_n)$ называется *состоятельной оценкой* параметра θ, если с ростом объема выборки n она сходится по вероятности к этому параметру:

$$\tilde{\theta}^{(n)}(X_1, X_2, \ldots, X_n) \xrightarrow[n \to \infty]{p} \theta.$$

Последнее означает, что для любого числа $\varepsilon > 0$

$$\lim_{n \to \infty} \mathrm{P}\{|\tilde{\theta}^{(n)}(X_1, X_2, \ldots, X_n) - \theta| < \varepsilon\} = 1.$$

Свойство состоятельности гарантирует возможность оценить по выборке искомый параметр с любой точностью и как угодно большой достоверностью за счет использования выборки достаточно большого объема.

ТЕОРЕМА 12.1 (*достаточные условия* состоятельности). *Пусть статистика* $\tilde{\theta}^{(n)}(X_1, X_2, \ldots, X_n)$ *удовлетворяет условиям*:

1) *является несмещенной (или асимптотически несмещенной) оценкой*;

2) $\lim\limits_{n \to \infty} \mathrm{D}[\tilde{\theta}^{(n)}(X_1, X_2, \ldots, X_n)] = 0.$

Тогда эта статистика является состоятельной оценкой параметра θ.

3. *Относительная эффективность*. Пусть $\tilde{\theta}_1$ и $\tilde{\theta}_2$ — две несмещенные оценки параметра θ. Тогда оценка $\tilde{\theta}_2$ *эффективнее* $\tilde{\theta}_1$, если $\mathrm{D}[\tilde{\theta}_2] < \mathrm{D}[\tilde{\theta}_1]$.

Простейшим методом точечного оценивания является *метод подстановки*. Пусть θ — неизвестная числовая характеристика генеральной совокупности. Метод подстановки предписывает положить $\tilde{\theta} = \theta^*$, где θ^* — соответствующая характеристика эмпирического распределения. Например, для оценивания моментов следует положить $\tilde{\alpha}_1 = \alpha_1^* = \bar{x}$, $\tilde{\mu}_2 = \mu_2^* = S^2$ и т. д.

ПРИМЕР 12.5. Пусть X имеет конечный момент $\mathrm{M}[X^2]$ (следовательно, по свойству математического ожидания, X имеет конечные m_X и D_X). Оценить m_X по выборке объема n и проверить свойства полученной оценки.

◄ По методу подстановки находим $\tilde{m}_X = \tilde{\alpha}_1 = \alpha_1^* = \bar{x}$. Проверим несмещенность.

$\mathrm{M}[\bar{X}] = \mathrm{M}\left[\dfrac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n} X_i\right] = \dfrac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n} \mathrm{M}[X_i]$ (по свойству линейности математического ожидания). Поскольку случайные величины X_i имеют тот же закон распределения, что и генеральная совокупность X, можно записать: $\mathrm{M}[X_i] = \mathrm{M}[X] = m$. Поэтому $\mathrm{M}[\bar{X}] = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} m = m$, т. е. несмещенность доказана. Тем самым выполнено первое достаточное условие состоятельности (теорема 12.1).

Проверим второе условие. При вычислении дисперсии используем независимость выборочных значений:

$$\mathrm{D}[\bar{x}] = \mathrm{D}\left[\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} x_k\right] = \frac{1}{n^2}\sum_{k=1}^{n}\mathrm{D}[x_k] = \frac{n\cdot\sigma_X^2}{n^2} = \frac{\sigma_X^2}{n} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0.$$

Так как оба условия теоремы 12.1 выполнены, то оценка $\tilde{m}_X = \bar{x}$ — состоятельна. ►

12.13. Пусть у генеральной совокупности X существует $\mathrm{M}[X^4]$. Показать, что выборочный начальный момент $\alpha_2^* = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i^2$ является несмещенной и состоятельной оценкой начального момента $\alpha_2 = \mathrm{M}[X^2]$.

12.14. Пусть известно математическое ожидание m генеральной совокупности X. Показать, что *выборочная дисперсия*

$$S_1^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i - m)^2, \qquad (12.6)$$

является несмещенной оценкой неизвестной дисперсии $\mathrm{D}[X] = \sigma^2$ генеральной совокупности.

12.15. Вывести следующую формулу для выборочной дисперсии:

$$S^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i - m)^2 - (\bar{x} - m)^2,$$

и с ее помощью, используя свойство линейности математического ожидания, показать, что оценка $\widetilde{\sigma_X^2} = S^2$ смещенная.

12.16. Используя результат предыдущей задачи, показать, что *исправленная выборочная дисперсия*, определяемая формулой

$$S_2^2 = \frac{n}{n-1}S^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2, \qquad (12.7)$$

является несмещенной оценкой дисперсии генеральной совокупности.

12.17. Пусть $X \sim Pu(\lambda)$. Методом подстановки оценить параметр λ и проверить несмещенность и состоятельность полученной оценки.

12.18. Пусть $X \sim B(1, p)$ — индикаторное распределение с неизвестным параметром p, имеющим смысл вероятности успеха в одном опыте по схеме Бернулли. Для оценки параметра p проведено n независимых испытаний, в которых получено k успехов. Методом подстановки оценить данный параметр по выборке объема n и проверить свойства (несмещенность и состоятельность).

2. Метод моментов

Метод моментов, предложенный английским статистиком К. Пирсоном, применяется для оценивания неизвестных параметров распределения.

Предположим, что вид закона распределения генеральной совокупности X известен и описывается функцией распределения $F_X(x;\theta)$, где θ — вектор неизвестных параметров. Пусть для простоты $\theta = (\theta_1, \theta_2)$ — двумерный вектор параметров (как это имеет место, например, для нормального или равномерного распределения).

Составим следующую систему уравнений для первых двух моментов распределения:

$$\begin{cases} \alpha_1 = \alpha_1^*, \\ \alpha_2 = \alpha_2^*, \end{cases} \text{ или } \begin{cases} \alpha_1 = \alpha_1^*, \\ \mu_2 = \mu_2^*. \end{cases} \tag{12.8}$$

В левой части системы (12.8) стоят теоретические моменты *по распределению*, зависящие от неизвестных параметров, в то время как в правой части — известные величины, полученные по выборке. *Оценкой* $\tilde{\theta} = (\tilde{\theta}_1, \tilde{\theta}_2)$ *по методу моментов* (*ММ-оценкой*) называется решение системы (12.8). Если получаемые решения являются непрерывными функциями своих аргументов, то оценки $\tilde{\theta}_i$ состоятельны.

ПРИМЕР 12.6. Найти ММ-оценки параметров a и b равномерно распределенной генеральной совокупности $X \sim R(a, b)$.

◀ Выберем второй вариант записи системы (12.8) и запишем теоретические моменты:

$$\alpha_1 = \mathrm{M}[X] = \frac{a+b}{2} \text{ и } \mu_2 = \mathrm{D}[X] = \frac{(b-a)^2}{12}.$$

Соответствующими выборочными моментами являются:

$$\alpha_1^* = \bar{x} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i \text{ и } \tilde{\mu}_2 = S^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2.$$

Составляем и решаем систему уравнений метода моментов:

$$\begin{cases} \dfrac{a+b}{2} = \bar{x}, \\ \dfrac{(b-a)^2}{12} = S^2, \end{cases} \text{ или } \begin{cases} a+b = 2\bar{x}, \\ b-a = 2\sqrt{3}S. \end{cases}$$

Решая полученную линейную систему уравнений, получаем

$$\begin{cases} a = \bar{x} - \sqrt{3}S, \\ b = \bar{x} + \sqrt{3}S, \end{cases}$$

где $S = \sqrt{S^2}$ — выборочное среднеквадратическое отклонение.

Итак, ММ-оценками параметров a и b являются $\tilde{a} = \bar{x} - \sqrt{3}S$ и $\tilde{b} = \bar{x} + \sqrt{3}S$. ▶

12.19. В условиях задачи 12.18 оценить неизвестный параметр p по методу моментов.

В задачах 12.20–12.22 по выборке $x_1, x_2, \ldots, x_n$ объема n найти ММ-оценки параметров указанных распределений.

12.20. Распределение Пуассона с параметром λ.

12.21. Нормальное распределение $N(m, \sigma^2)$.

12.22. Показательное распределение $Ex(\lambda)$.

12.23. Убедиться в том, что точечные оценки параметров m и σ^2 нормальной генеральной совокупности, полученные двумя различными методами, совпадают.

3. Интервальное оценивание. Доверительные интервалы

Пусть $(X_1, X_2, \ldots, X_n)$ — выборочный вектор, соответствующий генеральной совокупности X, распределенной по закону, зависящему от параметра θ, значение которого неизвестно.

Доверительным интервалом или *интервальной оценкой* для параметра θ называется интервал $(\underline{\theta};\overline{\theta})$, содержащий (накрывающий) истинное значение θ с заданной вероятностью β:

$$P\{\underline{\theta} < \theta < \overline{\theta}\} = \beta.$$

Число β называется *доверительной вероятностью*. Практический смысл имеет доверительная вероятность, близкая к 1, поэтому обычно выбирают $\beta \in [0{,}9;\ 0{,}99]$.

При заданном β длина $\overline{\theta} - \underline{\theta}$ этого интервала характеризует точность, с которой локализовано значение параметра θ, а *доверительная вероятность* β — надежность оценивания (вероятность ошибиться, утверждая, что $\theta \in (\underline{\theta}, \overline{\theta})$, не превосходит $1 - \beta$). Для увеличения надежности необходимо построить доверительный интервал *наименьшей возможной длины*.

Один из наиболее распространенных методов построения доверительного интервала состоит в следующем.

1. Зададим доверительную вероятность β.

2. Найдем статистику $Z = Z(X_1, X_2, \ldots, X_n, \theta)$, зависящую от неизвестного параметра θ и удовлетворяющую следующим условиям:

а) закон распределения статистики Z известен и не зависит от θ;

б) для любой выборки $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ функция $Z(x_1, x_2, \ldots, x_n, \theta)$ является непрерывной и строго монотонной (убывающей или возрастающей) функцией аргумента θ (статистику, удовлетворяющую условиям а) и б), называют *подходящей для построения доверительного интервала*).

3. По известному закону распределения статистики $Z(X_1, X_2, \ldots, X_n, \theta)$ найдем два числа z_1 и z_2 так, чтобы выполнялось равенство

$$P\{z_1 < Z(X_1, X_2, \ldots, X_n, \theta) < z_2\} = F_Z(z_2) - F_Z(z_1) = \beta. \tag{12.9}$$

Для однозначности решения уравнения (12.9) обычно полагают

$$P\{Z < z_1\} = P\{Z > z_2\} = (1 - \beta)/2. \tag{12.10}$$

4. Из уравнений (12.9) и (12.10) находим

$$z_1 = x_{\frac{1-\beta}{2}}, \ \ z_2 = x_{\frac{1+\beta}{2}},$$

где обозначено x_p — *квантиль порядка* p из распределения статистики Z (см. определение квантили в п. 11.2.3).

5. Разрешая неравенства

$$z_1 < Z(X_1, X_2, \ldots, X_n, \theta) < z_2 \tag{12.11}$$

относительно параметра θ (однозначность решения гарантируется свойством б) подходящей статистики), получаем неравенство

$$\underline{\theta}(X_1, X_2, \ldots, X_n, z_1, z_2) < \theta < \overline{\theta}(X_1, X_2, \ldots, X_n, z_1, z_2), \tag{12.12}$$

равносильное неравенству (12.11). Таким образом, имеем

$$P\{\underline{\theta}(X_1, X_2, \ldots, X_n, z_1, z_2) < \theta < \overline{\theta}(X_1, X_2, \ldots, X_n, z_1, z_2)\} = \beta,$$

т. е. неравенства (12.12) определяют доверительный интервал $(\underline{\theta}, \overline{\theta})$ для параметра θ.

Таблица 12.11

Предположения о генеральной совокупности	Оцениваемый параметр	Статистика	Закон распределения статистики
$X \sim N(m, \sigma^2)$, m известно	σ^2	$V_1 = \frac{nS_1^2}{\sigma^2}$	$\chi^2(n)$
$X \sim N(m, \sigma^2)$, m неизвестно	σ^2	$V_2 = \frac{(n-1)S_2^2}{\sigma^2}$	$\chi^2(n-1)$
$X \sim N(m, \sigma^2)$, σ^2 известна	m	$U = \frac{\bar{x} - m}{\sigma/\sqrt{n}}$	$N(0, 1)$
$X \sim N(m, \sigma^2)$, σ^2 неизвестна	m	$W = \frac{\bar{x} - m}{S_2/\sqrt{n}}$	$St(n-1)$

Отметим, что для квантилей симметричных распределений статистики $Z(X_1, X_2, \ldots, X_n, \theta)$ справедливо равенство $x_{\frac{1-\beta}{2}} = -x_{\frac{1+\beta}{2}}$, поэтому для таких распределений полагают

$$z_1 = -x_{\frac{1+\beta}{2}} \text{ и } z_2 = x_{\frac{1+\beta}{2}}.$$

Доверительные интервалы для математического ожидания и дисперсии. При построении доверительных интервалов для параметров *нормально распределенных генеральных совокупностей* обычно используются статистики, приведенные в таблице 12.11.

В таблице приняты следующие обозначения: $\chi^2(n)$ — распределение *хи-квадрат с n степенями свободы* (*распределение Пирсона*); $St(n)$ — *распределение Стьюдента с n степенями свободы*.

При построении доверительных интервалов используются таблицы квантилей соответствующих распределений, приведенные в ПРИЛОЖЕНИИ.

ПРИМЕР 12.7. Из генеральной совокупности $X \sim N(m, \sigma^2)$ с известной дисперсией $D[X] = \sigma^2 = 0{,}25$ взята выборка объема $n = 25$ и посчитано выборочное среднее $\bar{x} = 6{,}5$. Построить доверительный интервал для математического ожидания $m = M[X]$ с доверительной вероятностью $\beta = 0{,}95$.

◄ Поскольку β задано, то выполняем действия по приведенному выше плану, начиная с пункта 2.

Из таблицы 12.11 находим подходящую статистику $Z = U = \frac{\bar{x} - m}{\sigma/\sqrt{n}} \sim N(0, 1)$. Заметим, что квантили из распределения $N(0, 1)$ принято обозначать символом u_p. По таблице приложения 1 находим квантиль: $u_{\frac{1+\beta}{2}} = u_{0{,}975} = 1{,}96$. Таким образом, $z_2 = 1{,}96$. В силу симметрии закона $N(0, 1)$, полагаем $z_1 = -z_2 = -1{,}96$. Решая неравенство (12.11)

$$-1{,}96 < \frac{\bar{x} - m}{\sigma/\sqrt{n}} < 1{,}96$$

при заданных значениях $\bar{x}$, σ и n относительно параметра m, получаем искомый доверительный интервал:

$$6{,}34 < m < 6{,}696. \blacktriangleright$$

12.24. Показать, что если дисперсия генеральной совокупности σ^2 известна, то доверительный интервал для неизвестного математического ожидания m при произвольной доверительной вероятности β имеет вид

$$\bar{x} - \frac{\sigma}{\sqrt{n}} u_{\frac{1+\beta}{2}} < m < \bar{x} + \frac{\sigma}{\sqrt{n}} u_{\frac{1+\beta}{2}}.$$

12.25. В условиях предыдущей задачи показать, что длина полученного доверительного интервала $l(n) = 2u_{\frac{1+\beta}{2}} \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \to 0$ при $n \to \infty$. Это означает, что при увеличении объема выборки n точность интервальной оценки растет при фиксированной доверительной вероятности.

12.26. Пусть $X \sim N(m, \sigma^2)$, причем оба параметра неизвестны. Получена выборка объема n из данной генеральной совокупности. Используя в качестве подходящей статистики статистику W из таблицы 12.11, показать, что доверительный интервал для математического ожидания m при произвольном значении β имеет вид

$$\bar{x} - \frac{S_2}{\sqrt{n}} t_{\frac{1+\beta}{2}}(n-1) < m < \bar{x} + \frac{S_2}{\sqrt{n}} t_{\frac{1+\beta}{2}}(n-1),$$

где обозначено $t_{\frac{1+\beta}{2}}(n-1)$ — квантиль порядка $\frac{1+\beta}{2}$ из распределения Стьюдента с числом степеней свободы $n-1$.

В задачах 12.27–12.30 построить доверительные интервалы для неизвестного математического ожидания указанных характеристик по известным выборочным данным.

12.27. Емкость конденсатора, если $n = 16$, $\bar{x} = 20$ мкФ и среднеквадратичное отклонение известно и равно 4 мкФ.

12.28. Время безотказной работы электронной лампы, если $n = 100$, $\bar{x} = 500$ ч и среднеквадратичное отклонение известно и равно 10 ч.

12.29. Диаметр вала, если $n = 9$, $\bar{x} = 30$ мм и σ^2 оценено по выборке посредством исправленной выборочной дисперсии $S_2^2 = 9$ мм^2.

12.30. Содержание углерода в единице продукта, если $n = 25$, $\bar{x} = 18$ г, $S_2^2 = 16$ г^2.

12.31. После обработки партии из 100 резисторов получено выборочное среднее $\bar{x} = 10$ кОм. Считая известной дисперсию $\sigma^2 = 1$ кОм^2, установить, сколько нужно провести измерений, чтобы с вероятностью 0,95 интервал (9,9 кОм; 10,1 кОм) накрыл неизвестное значение математического ожидания m.

12.32. Показать, что если математическое ожидание m генеральной совокупности $X \sim N(m, \sigma^2)$ известно, то доверительный интервал для неизвестной дисперсии σ^2 при доверительной вероятности β имеет вид

$$\frac{nS_1^2}{\chi^2_{\frac{1+\beta}{2}}(n)} < \sigma^2 < \frac{nS_1^2}{\chi^2_{\frac{1-\beta}{2}}(n)}.$$

12.33. Показать, что если математическое ожидание m генеральной совокупности $X \sim N(m, \sigma^2)$ неизвестно, то доверительный интервал для неизвестной дисперсии σ^2 при доверительной вероятности β имеет вид

$$\frac{(n-1)S_2^2}{\chi^2_{\frac{1+\beta}{2}}(n-1)} < \sigma^2 < \frac{(n-1)S_2^2}{\chi^2_{\frac{1-\beta}{2}}(n-1)}.$$

12.34. По данным задачи 12.30 найти 90%-ный и 95%-ный доверительные интервалы для дисперсии.

12.35. По данным задачи 12.29 найти 99%-ный доверительный интервал для дисперсии.

12.36. На основании 20 опытов было установлено, что в среднем для прорастания семян одного из видов орхидеи требуется время $\overline{x} = 24$ дня при $S_2 = 6$ дней. Предполагая, что время прорастания семян подчиняется нормальному закону распределения, найти доверительные интервалы для неизвестных математического ожидания, дисперсии и среднеквадратического отклонения.

12.37. Проведено 12 измерений максимальной емкости подстроечных конденсаторов (в пикофарадах), давшие следующие результаты: 4,40; 4,91; 4,65; 4,56; 4,71; 4,54; 4,31; 4,42; 4,60; 4,35; 4,50; 4,43. Предполагая нормальность генеральной совокупности, построить 95%-ные доверительные интервалы для математического ожидания, дисперсии и среднеквадратического отклонения.

Доверительный интервал для неизвестной вероятности события. До сих пор предполагалось, что рассматриваемые генеральные совокупности подчинены нормальному закону распределения. Возможность построения *приближенных* доверительных интервалов для параметров генеральной совокупности с законом распределения, отличным от нормального, определяется центральной предельной теоремой и свойством асимптотической нормальности многих известных распределений.

ПРИМЕР 12.8. Пусть $X \sim B(1, p)$. Для оценки параметра p проведено $n \gg 1$ опытов по схеме Бернулли и получено число успехов, равное $k^{(n)}$. Построить приближенный доверительный интервал для параметра p с заданной доверительной вероятностью β.

◄ Ранее показано (задача 12.18), что несмещенной и состоятельной оценкой вероятности успеха p является относительная частота успехов $\tilde{p} = p^* = \dfrac{k^{(n)}}{n}$. Согласно интегральной теореме Муавра–Лапласа, статистика p^* имеет асимптотически нормальное распределение: $p^* \sim N\left(p, \sqrt{\dfrac{p(1-p)}{n}}\right)$, $n \to \infty$. Поэтому при $n \gg 1$ приближенно можно считать, что $Z = \dfrac{p^* - p}{\sqrt{\dfrac{p(1-p)}{n}}} \sim N(0, 1)$.

Нетрудно проверить, что статистика $Z = Z(p^*, p)$ монотонно зависит от p. Таким образом, Z — *подходящая статистика* для построения доверительного интервала.

Решив неравенства $-u_{\frac{1+\beta}{2}} < \dfrac{p^* - p}{\sqrt{\dfrac{p(1-p)}{n}}} < u_{\frac{1+\beta}{2}}$ относительно p с учетом близости значений $\tilde{p} \approx p$ при $n \gg 1$, получаем

$$p^* - u_{\frac{1+\beta}{2}}\sqrt{\frac{p^*(1-p^*)}{n}} < p < p^* + u_{\frac{1+\beta}{2}}\sqrt{\frac{p^*(1-p^*)}{n}}.$$

Полученное неравенство определяет приближенный доверительный интервал для параметра p при $n \gg 1$. ►

12.38. С производственной линии, производящей сигареты, наудачу отобрано 900 сигарет, при этом 45 из них оказались бракованными. Построить доверительный интервал для неизвестной вероятности брака во всей генеральной совокупности с доверительной вероятностью 0,9.

12.39. Какой объем выборки следует взять в условиях предыдущей задачи, чтобы с вероятностью, не меньшей 0,997, можно было утверждать, что вероятность появления бракованной сигареты с производственной линии не отличается от выборочной доли более чем на 0,05?

12.40. В 100 независимых выстрелах стрелок поразил мишень 82 раза. Найти 95%-ный доверительный интервал для вероятности попадания в мишень при одном выстреле для данного стрелка.

12.41. В 10 000 сеансах игры с автоматом выигрыш появился 4000 раз. Найти 95%-ный доверительный интервал для вероятности выигрыша. Сколько сеансов игры следует провести, чтобы с вероятностью 0,99 вероятность выигрыша отличалась от частоты не более чем на 0,01?

§ 12.3. ПРОВЕРКА СТАТИСТИЧЕСКИХ ГИПОТЕЗ

1. Проверка гипотез о сравнении с эталоном

Статистической гипотезой называется любое предположение о той или иной характеристике генеральной совокупности, которое можно проверить по выборочным данным.

В *задаче сравнения с эталоном* проверяется гипотеза о равенстве выбранной характеристики распределения фиксированному значению (*эталону*).

Пусть θ — неизвестная характеристика генеральной случайной величины X (например, $\theta = p$ — вероятность наблюдаемого события, если $X \sim B(1, p)$). Относительно параметра θ высказывается *основная*, или *проверяемая*, *гипотеза* H_0: $\theta = \theta_0$. Гипотеза, конкурирующая с основной, называется *альтернативой* и обозначается H_1. Возможно три варианта построения альтернативы:

$$H_1: \begin{cases} \theta > \theta_0 & \text{— правосторонняя;} \\ \theta \neq \theta_0 & \text{— двусторонняя;} \\ \theta < \theta_0 & \text{— левосторонняя.} \end{cases}$$

Статистическим критерием называется правило, позволяющее по выборочным данным принять основную гипотезу H_0 или отклонить ее в пользу альтернативы H_1.

Построение критерия определяется выбором *подходящей статистики* $Z(\theta, \theta^*)$, которая служит мерой расхождения между гипотетическим значением параметра θ (установленным в гипотезе H_0) и эмпирическим значением θ^*, которое оценивается по выборке. Закон распределения этой статистики должен быть известен по крайней мере при условии H_0 и по возможности не зависеть от неизвестного параметра.

Обозначим через G множество возможных значений статистики Z и пусть α — некоторое малое положительное число. Подмножество $G_\alpha \subset G$, удовлетворяющее уравнению

$$P\{Z \in G_\alpha / H_0\} = \alpha, \tag{12.13}$$

называется *критической областью*, а множество $G_{1-\alpha} = G \backslash G_\alpha$ — допустимой областью.

Обозначим $Z_{\text{выб}} = Z(x_1, x_2, \ldots, x_n / H_0)$ — выборочное значение статистики, вычисленное по выборке. В записи $Z_{\text{выб}}$ подчеркнуто, что выборочное значение вычисляется в предположении, что гипотеза H_0 верна. Отсюда следует, что статистика Z при условии H_0 должна быть полностью определена.

Сформулируем следующее *решающее правило*: если $Z_{\text{выб}} \in G_\alpha$, то гипотеза H_0 отвергается в пользу H_1 как не соответствующая опытным данным. Если же $Z_{\text{выб}} \in G_{1-\alpha}$, то следует принять H_0.

Критерий, основанный на применении данного правила, называется *критерием значимости*, а число α — *уровнем значимости критерия*. Уравнение (12.13) определяет при этом так называемую *ошибку первого рода*: *отвергнуть правильную гипотезу*.

Наряду с этим может быть совершена так называемая *ошибка второго рода*: *принять ложную гипотезу*. Это произойдет в том случае, когда $Z_{\text{выб}}$ попадет в допустимую область $G_{1-\alpha}$ и будет принято решение в пользу H_0, в то время как на самом деле верна гипотеза H_1. Вероятность ошибки второго рода определяется уравнением

$$P\{Z \in G_{1-\alpha} / H_1\} = \beta. \tag{12.14}$$

Вероятность противоположного события $P\{Z \in G_\alpha / H_1\} = 1 - \beta$ называют *мощностью критерия*. Она определяет вероятность *отвергнуть ложную гипотезу*.

Выбор критической области. Оптимальное решение задачи выбора критической области зависит от характера распределения статистики Z и формулировки альтернативы. Приведем соответствующие результаты для важнейших видов распределений, имея в виду задачу сравнения с эталоном.

Первый вид распределения статистики: симметричный относительно начала координат (нормальный, Стьюдента и т. п.). Критические области, соответствующие трем вариантам задания альтернативы H_1, определяются для данного вида распределения следующим образом:

$$H_1: \begin{cases} \theta \neq \theta_0 \Rightarrow G_\alpha = \{z \mid |z| > x_{1-\alpha/2}\}; \\ \theta > \theta_0 \Rightarrow G_\alpha = \{z \mid z > x_{1-\alpha}\}; \\ \theta < \theta_0 \Rightarrow G_\alpha = \{z \mid z < x_\alpha\}. \end{cases}$$

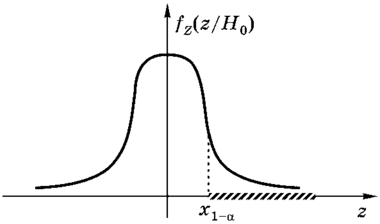


Рис. 12.6

Результат представлен на рис. 12.6, на нем обозначено: x_p — квантиль порядка p из распределения статистики Z и заштрихована правосторонняя критическая область, соответствующая альтернативе H_1: $\theta > \theta_0$.

Второй вид распределения статистики: несимметричный (распределения хи-квадрат или Фишера).

Критические области в этом случае имеют вид

$$H_1: \begin{cases} \theta \neq \theta_0 \Rightarrow G_\alpha = \{z \mid z > z_2\} \cup \{z < z_1\}, \\ \mathrm{P}\{Z > z_2 / H_0\} = \mathrm{P}\{Z < z_1 / H_0\} = \dfrac{\alpha}{2} \Rightarrow z_1 = x_{\frac{\alpha}{2}},\ z_2 = x_{1-\frac{\alpha}{2}}; \\ \theta > \theta_0 \Rightarrow G_\alpha = \{z \mid z > x_{1-\alpha}\}; \\ \theta < \theta_0 \Rightarrow G_\alpha = \{z \mid z < x_\alpha\}. \end{cases}$$

Результат представлен на рис. 12.7, на нем заштрихована двусторонняя критическая область, соответствующая альтернативе H_1: $\theta \neq \theta_0$.

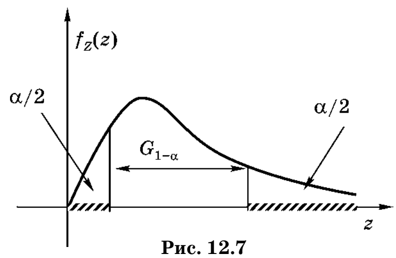


Рис. 12.7

Выбор подходящей статистики. Пусть генеральная случайная величина $X \sim N(m, \sigma^2)$. Для проверки статистических гипотез о сравнении с эталоном математического ожидания или дисперсии, по существу, используются те же статистики, которые использовались для построения доверительного интервала. Эти статистики подробно изучались в п. 12.2.3 и приводятся в сводной таблице 12.11.

Пусть, например, проверяется основная гипотеза H_0: $m = m_0$ против одной из альтернатив. Возможны два случая:

1) если σ^2 известно, то используем статистику $U = \dfrac{\overline{x} - m_0}{\sigma / \sqrt{n}} \sim N(0, 1)$;

2) если σ^2 неизвестно, то используем статистику $W = \dfrac{\overline{x} - m_0}{S_2 / \sqrt{n}} \sim St(n-1)$.

В приведенных формулах для U и W m заменено на m_0 в силу утверждения гипотезы H_0, которая, таким образом, полностью определяет закон распределения указанной статистики.

Для проверки основной гипотезы о дисперсии H_0: $\sigma_X^2 = \sigma_0^2$ против одной из альтернатив H_1 возможны также два случая:

1) если m известно, то используем статистику $V_1 = \dfrac{n \cdot S_1^2}{\sigma_0^2} \sim \chi^2(n)$;

2) если m неизвестно, то используем статистику $V_2 = \dfrac{(n-1)S_2^2}{\sigma_0^2} \sim \chi^2(n-1)$

(в формулах для V_1 и V_2 σ^2 заменено на σ_0^2 в соответствии с гипотезой H_0).

В случае, когда генеральная $X \sim B(1, p)$, при аналогичной постановке задачи для параметра p (H_0: $p = p_0$) при большом объеме выборки используется статистика

$$Z = \frac{p^* - p_0}{\sqrt{\dfrac{p_0 \cdot q_0}{n}}} \underset{npq \gg 1}{\sim} N(0, 1).$$

Здесь p^* — относительная частота успехов в n опытах по схеме Бернулли.

ПРИМЕР 12.9. Время реакции на световой сигнал среди водителей-профессионалов должно находиться на уровне ≈ 3 с для безопасной езды в темное время суток ($m_0 = 3$ с). Тестирования, проведенные среди 16 водителей, дали следующие результаты: $\overline{x} = 4{,}5$ с, $S_2^2 = 16$ с^2. Ответить на следующие вопросы.

1) Следует ли из этих данных, что время реакции испытуемых значимо больше номинального на уровне значимости $\alpha = 0{,}05$?

2) Как изменится результат проверки основной гипотезы, если выбрать $\alpha = 0{,}1$?

3) Что изменится, если известно, что $\sigma_x = 4$ с?

4) Можно ли считать, что время реакции водителей значимо отличается от номинального?

◀ Для ответа на первые три вопроса формулируем задачу проверки следующим образом:

$$H_0\colon m_X = m_0;\ \ H_1\colon m_X > m_0, \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \text{подходящей статистикой является } W = \frac{\bar{x} - 3}{\frac{S_2}{\sqrt{n}}} \sim St(15).$$

Как установлено в H_1, критическая область — правосторонняя, поэтому по таблице квантилей распределения Стьюдента находим $t_{0,95}(15) = 1{,}75$; далее вычисляем выборочное значение статистики: $W_{\text{выб}} = \dfrac{4{,}5 - 3}{4/4} = 1{,}5.$

1) Поскольку $W_{\text{выб}} < 1{,}75$, т. е. $W_{\text{выб}} \in G_{1-\alpha}$, то H_0 принимается на данном уровне значимости α. Другими словами, выборочные данные не подтверждают гипотезу H_1 о том, что время реакции испытуемых значимо больше номинального.

2) Если $\alpha = 0{,}1$, то критическая область расширяется: $G_\alpha = \{z \mid z \geq 1{,}341\}$, и H_0 отвергается.

3) Изменяется статистика — можно использовать U. Из таблицы квантилей нормального распределения находим $u_{0,95} = 1{,}645$. Так как $U_{\text{выб}} = 1{,}5 \in G_{1-\alpha}$, то H_0 принимается.

4) Постановка задачи в этом случае имеет вид

$$H_0\colon m_X = m_0 = 3,\ \ H_1\colon m_X \neq m_0.$$

Подходящей статистикой является W, определенная выше, но критическая область двусторонняя: $G_\alpha = \{z \mid |z| \geq t_{1-\frac{\alpha}{2}}(15)\}$, где $t_{1-\frac{\alpha}{2}}(15) = t_{0,975}(15) = 2{,}13$. Таким образом, допустимая область расширяется и H_0 подтверждается с большей надежностью. ▶

ПРИМЕР 12.10. Цех выпустил партию деталей (например, интегральных схем) с неизвестным процентом брака. Поставщик утверждает, что этот процент находится в пределах норматива, оговоренного в договоре с заказчиком (равен *эталонному* значению). Заказчик, напротив, утверждает, что по некоторым его наблюдениям этот процент значительно превышен. Пусть вероятность получить бракованную деталь в большой партии деталей согласно договору равна $p = 0{,}03$ (эталонное значение). Заказчик утверждает, что, по его данным, $p > 0{,}03$.

Для разрешения конфликта было обследовано 400 наудачу отобранных деталей и обнаружено, что 16 из них бракованные. Обе стороны договорились об уровне значимости $\alpha = 0{,}05$. Ответить на следующие вопросы: 1) чью гипотезу подтверждает эксперимент? 2) какова вероятность принять партию, в которой в действительности имеется 6% бракованных деталей? 3) каков смысл ошибок первого и второго рода?

◀ 1) Проверяется основная гипотеза H_0: $p = p_0 = 0{,}03$ против правосторонней альтернативы H_1. Подходящей статистикой для проверки данной гипотезы является $Z = \dfrac{p_n^* - p_0}{\sqrt{p_0 q_0 / n}}$, которая согласно интегральной теореме Муавра–Лапласа при достаточно больших значениях $np_0 q_0$ приближенно подчиняется закону $N(0, 1)$. Статистику Z легко преобразовать к виду $Z=\dfrac{m-np_0}{\sqrt{np_0q_0}}$, где m — число бракованных деталей в отобранной партии. В силу выбранной альтернативы, критическая область $G_\alpha = \{z \mid z > u_{0,95}\}$, где $u_{0,95} = 1,65$ из таблицы квантилей нормального распределения. Вычисляем выборочное значение статистики:

$$Z_{\text{выб}}=\frac{16-12}{\sqrt{400\cdot 0,03\cdot 0,97}}\approx 1,172.$$

Так как $Z_{\text{выб}} < 1,65$, то нет оснований отвергать гипотезу H_0: выборочные данные не противоречат утверждению поставщика.

2) Для ответа на поставленный вопрос заметим, что если верна альтернатива H_1': $p=p_1=0,6$, то число m бракованных деталей из 400 распределено по закону $B(400, p_1)$, поэтому $\mathrm{M}[m/H_1']=np_1=24$, $\mathrm{D}[m/H_1']=np_1q_1=22,56$.

Используя свойства математического ожидания и дисперсии, получаем

$$\mathrm{M}[Z/H_1']=3,52,\ \mathrm{D}[Z/H_1']=\frac{p_1q_1}{p_0q_0}=1,94.$$

Таким образом, статистика Z при условии, что H_1' верна, распределена по нормальному закону с параметрами $m_1 = 3,52$ и $\sigma_1^2=1,94$. Отсюда вероятность принять партию, в которой содержится 6% брака (т. е. вероятность ошибки второго рода), вычисляем по формуле (12.14):

$$\mathrm{P}\{Z\in G_{1-\alpha}/H_1'\}=\beta'=\mathrm{P}\{Z<1,65/H_1'\}=\Phi\left(\frac{1,65-3,52}{1,4}\right)=1-\Phi(1,335)\approx 0,091,$$

что почти в два раза больше, чем ошибка первого рода, равная $\alpha = 0,05$.

3) Ошибка первого рода: забракована хорошая партия — страдает поставщик; ошибка второго рода: принята плохая партия — страдает заказчик. ►

12.42. Средняя продолжительность службы батареек «Крона» при непрерывной работе согласно заводскому стандарту составляет 21,5 часа. Лаборатория проверила 6 батареек на одном из предприятий и получила следующие данные продолжительности службы (в часах): 12, 18, 22, 20, 16, 25.

Свидетельствуют ли эти данные, что батарейки, выпускаемые данным предприятием, имеют более короткую продолжительность службы, чем это предписано стандартом изготовления? Принять уровень значимости $\alpha = 0,05$. Как изменится результат проверки, если уменьшить вероятность ошибки первого рода в два раза?

12.43. Партия изделий принимается, если дисперсия контролируемого размера значимо не превышает 0,2 мкм^2. Исправленная выборочная дисперсия, найденная по выборке объема $n = 101$, оказалась равной 0,3 мкм^2. Можно ли принять партию: а) на уровне значимости 1% ? б) на уровне значимости 0,1% ?

12.44. В результате длительного хронометража времени сборки узла различными сборщиками установлено, что дисперсия этого времени $\sigma_0^2=2$ мин^2. Проведено двадцать наблюдений за работой новичка, давших результаты, приведенные в таблице 12.12. Можно ли на уровне значимости $\alpha = 0,05$ считать, что новичок работает ритмично (в том

Таблица 12.12

Время сборки узла x_i, мин	56	58	60	62	64
Число случаев m_i	1	4	10	3	2

смысле, что дисперсия затрачиваемого им времени сборки значимо не отличается от дисперсии *эталонного* времени сборки остальных сборщиков)?

12.45. Утверждается, что шарики, изготовленные станком-автоматом, имеют средний диаметр $d_0 = 10$ мм. Используя односторонний критерий при $\alpha = 0{,}05$, проверить эту гипотезу, если в выборке из $n = 16$ шариков средний диаметр оказался равным 10,3 мм, считая, что: а) дисперсия известна и равна $\sigma^2 = 1$ мм^2; б) оценка дисперсии, определенная по выборке $S_2^2 = 1{,}21$ мм^2.

12.46. Из большой партии резисторов одного типа и номинала случайным образом отобраны 36 штук. Выборочное среднее величины сопротивления при этом оказалось равным 9,3 кОм. Используя двусторонний критерий при $\alpha = 0{,}05$, проверить гипотезу о том, что выборка взята из партии с номиналом 10 кОм, если: а) дисперсия величины сопротивления известна и равна 4 кОм^2; б) дисперсия величины сопротивления неизвестна, а выборочная дисперсия равна 6,25 кОм^2.

12.47. По техническим условиям средняя прочность на разрыв троса составляет 2000 кг. В результате испытаний 20 кусков троса было установлено, что средняя прочность на разрыв равна 1255 кг, а выборочная исправленная дисперсия равна 625 кг^2. Удовлетворяет ли образец троса техническим условиям? Проверить данное утверждение на уровне значимости $2{,}5\%$.

12.48. По паспортным данным автомобильного двигателя расход топлива на 100 км пробега составляет 10 л. В результате изменения конструкции двигателя ожидается, что расход топлива уменьшится. Для проверки проведены испытания 25 случайно отобранных автомобилей с новым двигателем, давшие следующие результаты: выборочное среднее расхода топлива оказалось равным 9,3 л на 100 км пробега. Предполагая, что выборка получена из нормально распределенной совокупности со средним $m = 10$ л и известной дисперсией $\sigma^2 = 4$ л^2, проверить на уровне значимости 5%, подтверждаются ли ожидания конструкторов?

12.49. В условиях задачи 12.48 предположим, что альтернативой основной гипотезе служит H_1, утверждающая, что $m = 9$ л. Критическую область зададим неравенством $\bar{x} < 9{,}44$. Найти вероятности ошибок первого и второго рода для критерия с такой критической областью.

12.50. Точность наладки станка-автомата, производящего некоторые детали, характеризуется дисперсией длины деталей. Если эта величина будет больше 400 мкм^2, станок останавливается для наладки. Выборочная дисперсия длины 15 случайно отобранных деталей из продукции станка оказалась равной $S_2^2 = 680$ мкм^2. Следует ли производить наладку станка, если: а) уровень значимости принят $\alpha = 0{,}01$; б) уровень значимости принят $\alpha = 0{,}1$?

12.51. Из суточной продукции цеха случайным образом отобрано и проверено 200 приборов. При этом 16 приборов признаны негодными к эксплуатации. Можно ли считать, что годная продукция цеха составляет 90%, если $\alpha = 0{,}10$?

12.52. Статистика, собранная в университете в течение многих лет, показывает, что 64% студентов естественных факультетов успешно сдают экзамен по математике в первую сессию. В осенний семестр 2006/07 учебного года из 400 первокурсников успешно сдали экзамен по математике 280 человек. Показывает ли этот результат значимое улучшение знаний студентов по математике (принять $\alpha = 0{,}05$)?

12.53. Лекарства, применяемые обычно после операции, уменьшают болевые ощущения у 80% пациентов. Испытывается новое лекарство для той же цели. Для скольких пациентов из 100 оно должно быть эффективным, чтобы отдать ему предпочтение на 1%-ном уровне значимости?

12.54. При 600 подбрасываниях игральной кости шестерка появилась 75 раз. На уровне значимости $\alpha = 0{,}01$ проверить основную гипотезу о «правильности» игральной кости (т. е. о том, что вероятность появления шестерки при одном подбрасывании игральной кости равна 1/6).

2. Проверка гипотезы о равенстве дисперсий в двух независимых генеральных совокупностях

Пусть $X \sim N(m_X, \sigma_X^2)$, $Y \sim N(m_Y, \sigma_Y^2)$, причем X и Y — независимы (параметры m_X и m_Y могут быть известны или неизвестны). Из совокупностей X и Y взяты выборки объемов соответственно n_1 и n_2: $x_1, x_2, \ldots, x_{n_1}$ и $y_1, y_2, \ldots, y_{n_2}$, после обработки которых получены соответствующие оценки $\bar{x}$, $S_2^2(x)$ и $\bar{y}$, $S_2^2(y)$.

При заданном уровне значимости α проверяется основная гипотеза $H_0\colon \sigma_X^2 = \sigma_Y^2$ против одной из альтернатив

$$H_1\colon \begin{cases} \sigma_X^2 > \sigma_Y^2, \\ \sigma_X^2 \neq \sigma_Y^2, \\ \sigma_X^2 < \sigma_Y^2. \end{cases}$$

Если параметры m_X и m_Y известны, то подходящей статистикой для проверки нулевой гипотезы является статистика Q_1, определяемая формулой

$$Q_1 = \frac{S_1^2(x)}{S_2^2(y)} \cdot \frac{\sigma_Y^2}{\sigma_X^2} \sim Fi(n_1, n_2),$$

где $Fi(n_1, n_2)$ — *распределение Фишера с n_1 и n_2 степенями свободы.*

При условии H_0 неизвестные дисперсии сокращаются, и выборочное значение $Q_{1\text{выб}}$ полностью определено. В случае, если m_X и m_Y неизвестны, подходящей статистикой является $Q_2 = \dfrac{S_2^2(x)}{S_2^2(y)}$, для которой при условии H_0 справедливо утверждение

$$Q_2\big|_{H_0} \sim Fi(n_1 - 1, n_2 - 1).$$

Критическая область для проверки гипотезы H_0 выбирается в соответствии с правилами оптимизации ошибок I и II рода для несимметричных распределений (см. рис. 12.7). При этом следует учитывать, что в таблице квантилей распределения Фишера приводятся лишь значения, бóльшие единицы. Поэтому в формулах для указанных статистик рекомендуется делить бóльшую дисперсию на меньшую.

ПРИМЕР 12.11. Давление в камере контролируется по двум манометрам. Для сравнения точности этих приборов одновременно фиксируются их показания. По результатам 10 замеров посчитаны исправленные выборочные дисперсии измерений: $S_2^2(x) = 0{,}3$ и $S_2^2(y) = 0{,}15$. Можно ли считать, что оба манометра обеспечивают одинаковую точность измерений, если принять уровень значимости $\alpha = 0{,}1$? Предполагается, что результаты измерений распределены нормально.

◀ Точность измерений тем или иным прибором определяется дисперсией соответствующей генеральной совокупности, связанной с данным прибором. Поэтому задача заключается в проверке основной гипотезы $H_0: \sigma_X^2 = \sigma_Y^2$ против двусторонней альтернативы $H_1: \sigma_X^2 \neq \sigma_Y^2$.

Поскольку m_X и m_Y неизвестны, то подходящей статистикой является $Q_2 = \dfrac{S_2^2(x)}{S_2^2(y)}$, которая при условии H_0 распределена по закону $Fi(9, 9)$. Так как критическая область двусторонняя и $S_2^2(x) > S_2^2(y)$, то достаточно определить ее правую границу z_2 (см. рис. 12.7). По таблице квантилей распределения Фишера находим

$$z_2 = F_{1-\frac{\alpha}{2}}(9,9) = 3{,}18.$$

Вычисляем выборочное значение статистики:

$$Q_{2\text{выб}} = \frac{0{,}3}{0{,}15} = 2.$$

Поскольку $Q_{2\text{выб}} < 3{,}18$, то гипотеза H_0 принимается на данном уровне значимости: оба метода обеспечивают одинаковую точность измерений. ▶

12.55. По двум независимым выборкам, объемы которых $n_1 = 9$ и $n_2 = 16$, извлеченных из нормальных генеральных совокупностей X и Y, найдены исправленные выборочные дисперсии $S_2^2(x) = 34{,}02$ и $S_2^2(y) = 12{,}15$. При уровне значимости 0,01 проверить гипотезу H_0 о равенстве дисперсий σ_X^2 и σ_Y^2 против правосторонней альтернативы.

12.56. По двум независимым выборкам, объемы которых $n_1 = 14$ и $n_2 = 10$, извлеченных из нормальных генеральных совокупностей X и Y, найдены исправленные выборочные дисперсии $S_2^2(x) = 0{,}84$ и $S_2^2(y) = 2{,}52$. При уровне значимости 0,1 проверить гипотезу H_0 о равенстве дисперсий σ_X^2 и σ_Y^2 против двусторонней альтернативы.

12.57. Для сравнения точности двух станков-автоматов взяты две выборки изделий, объемы которых $n_1 = 10$ и $n_2 = 8$. В результате измерения контролируемого размера отобранных изделий получены следующие результаты:

x_i	1,08	1,10	1,12	1,14	1,15	1,25	1,36	1,38	1,40	1,42
y_i	1,11	1,12	1,18	1,22	1,33	1,35	1,36	1,38		

Можно ли считать, что станки обладают одинаковой точностью (т. е. имеют равные дисперсии контролируемого размера), если принять уровень значимости $\alpha = 0{,}1$, а в качестве конкурирующей гипотезы использовать двустороннюю?

12.58. Два токарных автомата изготовляют детали по одному чертежу. Из продукции первого станка было отобрано $n_1 = 9$ деталей, а из продукции второго $n_2 = 11$ деталей. Выборочные исправленные дисперсии контролируемого размера, определенные по этим выборкам, $S_2^2(x) = 5{,}9$ мкм^2 и $S_2^2(y) = 23{,}2$ мкм^2. Проверить гипотезу о равенстве дисперсий при $\alpha = 0{,}05$, если альтернативная гипотеза утверждает, что: а) дисперсии не равны; б) дисперсия размера для второго станка больше, чем для первого.

12.59. Для наладки станка была проверена точность изготовления 10 втулок и найдено значение несмещенной оценки дисперсии диаметра, равное 9,6 мкм^2. После наладки подверглись контролю еще 15 втулок, и получено новое значение оценки дисперсии, равное 5,7 мкм^2. Можно ли считать, что после наладки станка точность изготовления втулок увеличилась? Принять $\alpha = 0{,}05$.

3. Проверка гипотезы о равенстве средних в двух независимых генеральных совокупностях

Пусть две генеральные X и Y удовлетворяют тем же условиям, что и при сравнении дисперсий. Проверяется основная гипотеза H_0: $m_X = m_Y$ против одной из альтернатив

$$H_1:\begin{cases} m_X > m_Y, \\ m_X \neq m_Y, \\ m_X < m_Y. \end{cases}$$

Ограничимся рассмотрением двух случаев: 1) дисперсии σ_X^2 и σ_Y^2 точно известны; 2) $\sigma_Y^2 = \sigma_Y^2 = \sigma^2$, причем дисперсия σ^2 неизвестна.

В случае 1) подходящей статистикой для проверки основной гипотезы является статистика

$$U = \frac{\bar{x} - \bar{y}}{\sqrt{\dfrac{\sigma_X^2}{n_1} + \dfrac{\sigma_Y^2}{n_2}}},$$

распределенная по закону $N(0,\ 1)$ при условии H_0.

В случае 2) необходимо вначале проверить вспомогательную гипотезу H_0' о равенстве дисперсий при двусторонней альтернативе. Если гипотеза H_0' о равенстве дисперсий подтверждается на том же уровне значимости α, то подходящей статистикой для проверки основной гипотезы H_0 является

$$W = \frac{\bar{x} - \bar{y}}{S \cdot \sqrt{\dfrac{1}{n_1} + \dfrac{1}{n_2}}},$$

где $S = \sqrt{S^2}$, S^2 — дисперсия объединенной выборки, определяемая формулой

$$S^2 = \frac{(n_1 - 1)S_2^2(x) + (n_2 - 1)S_2^2(y)}{n_1 + n_2 - 2} \tag{12.15}$$

и являющаяся несмещенной и состоятельной оценкой неизвестной дисперсии σ^2.

При условии H_0 статистика W распределена по закону Стьюдента $St(n_1 + n_2 - 2)$ и ее выборочное значение полностью определено.

Если гипотеза H_0' о равенстве дисперсий отклоняется, то исходная задача проверки основной гипотезы H_0 точного решения не имеет. Существуют различные приближенные критерии, справедливые при больших объемах выборки.

ПРИМЕР 12.12. Обследование, проведенное на скорость реакции среди молодых водителей по 100-балльной системе, дало следующие результаты: в группе из 21 человека, проходившего курс интенсивной подготовки на специальном автодроме, получено $\bar{x} = 93,\ S_2^2(x) = 8{,}65$. В группе же из 121 человека, проходившего обычные курсы вождения, получено $\bar{y} = 90{,}5,\ S_2^2(y) = 25{,}35$.

Свидетельствуют ли эти данные о том, что интенсивный курс значимо улучшил результаты? Принять $\alpha = 0{,}002$.

◀ Проверяется основная гипотеза о равенстве математических ожиданий против правосторонней альтернативы. Так как дисперсии неизвестны, то вначале необходимо проверить дополнительную гипотезу $H_0'\colon \sigma_X^2=\sigma_Y^2$ против двусторонней альтернативы $H_1'\colon \sigma_X^2\neq\sigma_Y^2$. Для проверки используем статистику Фишера:

$$Q_2=\frac{S_2^2(y)}{S_2^2(x)}\sim Fi(n_2-1,n_1-1).$$

Для облегчения поиска квантилей из таблицы распределения Фишера делим бо́льшую дисперсию на меньшую. Кроме того, в этом случае, несмотря на двустороннюю альтернативу, достаточно вычислить лишь правую часть критической области, определяемую условием

$$G_\alpha^+=\{q\mid q>q_{\text{кр}}\},$$

где $q_{\text{кр}}=\chi^2_{1-\alpha/2}(n_2-1,n_1-1)=\chi^2_{0,999}(120,20)=3{,}54.$ Вычисляя выборочное значение статистики, получаем $Q_{2\text{выб}}=2{,}92\in G_{1-\alpha}$, и, таким образом, гипотеза H_0' принимается: дисперсии значимо не различаются.

Поскольку реализовался случай 2, то для проверки основной гипотезы H_0 используем стьюдентову статистику W.

По формуле (12.15) находим дисперсию объединенной выборки $S^2=22{,}967$ и $S=4{,}79$. Таким образом, выборочное значение статистики получается равным $W_{\text{выб}}=2{,}21$. Поскольку критическая область правосторонняя, то $G_\alpha=\{w\mid w>w_{\text{кр}}\}$, где $w_{\text{кр}}$ находим, используя нормальную асимптотику распределения Стьюдента при большом числе степеней свободы: $w_{\text{кр}}=t_{1-\alpha}(140)\approx u_{0,998}=2{,}88$.

Так как $W_{\text{выб}}<w_{\text{кр}}$, то на данном уровне значимости $\alpha=0{,}002$ принимается гипотеза H_0. Следовательно, интенсивные курсы не привели к значимому улучшению результатов вождения. ▶

12.60. В двух фирмах, производящих детское питание, производилась оценка качества продукции. В фирме A, где проверялось 30 единиц продукции, средняя сумма баллов оказалась равной 52. Во второй фирме B проверялось 36 единиц продукции, и их средняя сумма баллов оказалась равной 45. Дисперсии суммы баллов, вычисленные для нескольких тысяч единиц продукции каждой из фирм, составляют $\sigma_X^2=15$ для фирмы A и $\sigma_Y^2=12$ для фирмы B. Считая, что суммы баллов, определяющие качество продукции для обеих фирм, — независимые и нормально распределенные совокупности, установить: можно ли считать, что питание, выпускаемое фирмой A, обладает значимо лучшим качеством, чем выпускаемое фирмой B? Принять уровень значимости равным $\alpha=0{,}05$.

12.61. С целью ускорения производства интегральных схем производственная линия была модифицирована. Для исследования эффекта модификации было зафиксировано время изготовления каждой из 50 интегральных схем при старом и новом процессах. Для старого процесса среднее время изготовления одной интегральной схемы оказалось равным 35 с, а для модифицированного процесса — 33 с. Стандартные отклонения времени изготовления интегральной схемы для старого и нового процессов можно считать одинаковыми. Вычисленное значение среднеквадратического отклонения объединенной выборки равно 1,5 с. Можно ли на 2%-ном уровне значимости сделать вывод, что скорость изготовления интегральной схемы при модифицированном процессе больше?

12.62. Высказывается предположение, что выпускники специализированных физико-математических классов имеют более высокие знания по математике при поступлении в МИЭТ, чем выпускники обычных классов зеленоградских школ. Наудачу отобрали 10 школьников из 11-го класса лицея и 10 школьников из 11-го класса школы № 909. После проведения тестового экзамена получены следующие результаты (в 100-балльной шкале оценок):

лицей (X): 75 73 100 68 79 76 81 65 82 90
школа № 909 (Y): 85 84 75 47 80 65 55 45 70 65

1) Согласуются ли эти данные с высказанным предположением на уровне значимости 2,5%?

2) Для увеличения надежности вывода тестированию была подвергнута большая группа школьников — из каждой школы по 25 человек. После обработки выборок получены следующие результаты: $\overline{x} = 75{,}5$; $S_2^2(x) = 112{,}3$; $\overline{y} = 65{,}2$; $S_2^2(y) = 220{,}6$. Повторить процедуру проверки при том же уровне значимости.

12.63. Для исследования влияния двух типов покрытия на удельную проводимость телевизионных трубок получены следующие результаты (в условных единицах):

x_i (первый тип трубок): 6 5 12 9 10
y_i (второй тип трубок): 14 11 0 5 6 8

Можно ли на основании этих данных считать, что тип покрытия влияет на удельную проводимость трубок? Принять $\alpha = 0{,}1$.

4. Проверка гипотезы о законе распределения. Критерий согласия хи-квадрат

Пусть закон распределения генеральной случайной величины неизвестен, но имеются те или иные основания предполагать, что генеральная случайная величина X распределена по закону, описываемому известной функцией распределения $F_X(x; \theta)$, где θ — вектор параметров, которыми определяется данная функция (например, высказывается предположение, что $X \sim N(m, \sigma^2)$, тогда $\theta = (m, \sigma^2)$).

Таким образом, формулируем основную гипотезу H_0: $X \sim F_X(x; \theta)$.

Альтернативной всегда выступает гипотеза $H_1 = \overline{H_0}$, отрицающая H_0. Критерии, используемые для проверки указанной основной гипотезы, носят название *критериев согласия*. Наиболее употребительным на практике является так называемый *критерий согласия хи-квадрат* (критерий Пирсона).

Критерий Пирсона основан на поразрядном сравнении частот и вероятностей, поэтому предварительно выборка приводится к частотному виду. При этом в зависимости от типа генеральной случайной величины по разному трактуется понятие «разряд». Именно: если генеральная X является СВДТ, то *разрядами* являются возможные значения $x \in E_X$ в группированной выборке. Если же генеральная X является СВНТ, то *разрядами* являются интервалы при интервальном представлении выборки.

Подходящей статистикой для проверки основной гипотезы является статистика Пирсона

$$Z = \sum_{k=1}^{l} \frac{n}{p_k} \cdot (p_k^* - p_k)^2, \qquad (12.16)$$

где l — число разрядов; p_k — теоретическая вероятность попадания в k-й разряд, если верна гипотеза H_0; p_k^* — относительная частота попадания выборочных значений в k-й разряд; n — объем выборки.

Пусть гипотеза H_0 *простая*, т. е. полностью определяет закон распределения генеральной случайной величины X, включая параметр θ. В этом случае теоретические вероятности p_k вычисляются по обычным правилам теории вероятностей:

$$p_k = \begin{cases} \mathrm{P}\{X = z_k\},\ k = 1, 2, \ldots, l, \text{ — для частотной выборки;} \\ \mathrm{P}\{X \in I_k\} = F_X(a_k; \theta) - F(a_{k-1}; \theta) \text{ — для интервальной выборки.} \end{cases}$$

Учитывая, что $p_k^* = \dfrac{m_k}{n}$, где m_k — частота попаданий выборочных значений в k-й разряд, формула (12.16) для статистики Z может быть преобразована к виду

$$Z = \sum_{k=1}^{l} \left(\frac{m_k - np_k}{\sqrt{np_k}} \right)^2. \tag{12.17}$$

Если $np_k \gg 1$, $k = 1, 2, \ldots, l$, то статистика Z при условии H_0 распределена по закону $\chi^2(l-1)$ (одна степень свободы «теряется» из-за наличия одной линейной связи, наложенной на случайные величины m_k: $\sum\limits_{k=1}^{l} m_k = n$).

Критическую область для проверки основной гипотезы H_0 следует выбирать на правом хвосте распределения $\chi^2(l-1)$, так как это максимизирует мощность критерия. Действительно, если гипотеза H_0 — ложная, т. е. p_k не являются истинными вероятностями k-го разряда, то, как видно из формулы (12.16), каждое слагаемое в сумме будет иметь порядок n и сумма будет неограниченно возрастать вместе с объемом выборки. Таким образом, если $G_\alpha = \{z \mid z > \chi^2_{1-\alpha}(l-1)\}$, то при достаточно большом n событие $\{Z_{\text{выб}} \in G_\alpha / H_1\}$ будет иметь вероятность, близкую к единице, и ложная гипотеза будет почти наверняка отвергнута.

ПРИМЕР 12.13. Исследуя вероятностные законы наследственности, Грегор Мендель проводил в течение 8 лет (с 1857 по 1865 г.) эксперименты по селекции гороха. За это время он вырастил и детально изучил около 10 000 растений гороха, прежде чем решился опубликовать свои результаты в одном из научных журналов. Однако после этого события потребовалось 35 лет для того, чтобы ученый мир понял и оценил значение сделанного им открытия. В одном из своих экспериментов Мендель наблюдал частоты различных видов семян, получаемых при скрещивании растений с круглыми желтыми семенами и растений с морщинистыми зелеными семенами. Эти данные наблюдений и теоретически рассчитанные вероятности приведены в таблице 12.13.

Проверить на уровне значимости $\alpha = 0{,}05$ основную гипотезу о соответствии наблюдаемых частот теоретическим вероятностям.

Таблица 12.13

Номер разряда	**Виды семян**	**Частота m_k**	**Теоретические вероятности p_k**
1	Круглые и желтые	315	9/16
2	Морщинистые и желтые	101	3/16
3	Круглые и зеленые	108	3/16
4	Морщинистые и зеленые	32	1/16

◀ В данном примере разрядами являются значения качественных признаков: X_1 — форма (круглые или морщинистые), X_2 — цвет (желтый или зеленый), по которым вся популяция гороха (генеральная совокупность) разделилась на 4 непересекающихся класса. Статистика Пирсона принимает вид

$$Z = \sum_{k=1}^{4} \left(\frac{m_k - np_k}{\sqrt{np_k}} \right)^2 \sim \chi^2(3).$$

Из таблицы квантилей распределения хи-квадрат находим $\chi^2_{1-\alpha}(3) = \chi^2_{0,95}(3) = 7{,}81$. Вычисляем выборочное значение статистики: $Z_{\text{выб}} = 0{,}47$. Так как $0{,}47 \ll 7{,}81$ ($Z_{\text{выб}} \in G_{1-\alpha}$), то гипотеза H_0 принимается с хорошей надежностью. ▶

Замечание. В рассмотренном примере число разрядов l определилось автоматически, так как сами разряды порождены естественной классификацией признаков в номинальной шкале. Аналогичная ситуация наблюдается и в случае частотной выборки из дискретного распределения. Если же X — СВНТ, и обрабатывается выборка большого объема, то для определения числа интервалов группировки часто используют формулу Кендалла–Стьюарта: $l = [1{,}87 \cdot (n-1)^{2/5}]$, где $[a]$ — целая часть числа a.

В случае, если интервальная выборка задана экспериментатором, то необходимо объединить слабо заполненные соседние интервалы до выполнения условия $np_k \geq 5$.

Если гипотеза H_0 — *сложная*, т. е. гипотетическая функция распределения $F_X(x; \theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_s)$ зависит от s неизвестных параметров, то в формуле (12.17) следует заменить теоретические вероятности p_k их оценками, полученными по выборке. В этом случае теряется еще s степеней свободы, так что $Z \sim \chi^2(l - s - 1)$.

12.64. Для проверки на равномерность распределения последовательности псевдослучайных чисел, вырабатываемых генератором (команда *rand* в пакете MATLAB), взято $n = 2000$ таких чисел и рассортировано по десяти интервалам равной длины $\Delta_i = 0{,}1$; $x \in [0, 1]$. Получена интервальная выборка, представленная в таблице 12.14.

Таблица 12.14

Номер интервала	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Число попаданий	124	128	123	207	212	184	122	216	129	128

На уровне значимости $\alpha = 0{,}05$ проверить основную гипотезу H_0, утверждающую, что данная выборка принадлежит генеральной совокупности X, распределенной по закону $R(0, 1)$.

12.65. В таблице 12.15 приводятся данные о фактических объемах сбыта (в условных единицах) в пяти районах. Согласуются ли эти результаты с предположением о том, что сбыт продукции в этих районах должен быть одинаковым? Принять $\alpha = 0{,}01$.

Таблица 12.15

Район	1	2	3	4	5
Фактический объем сбыта	110	130	70	90	100

12.66. При испытании радиоэлектронной аппаратуры фиксировалось число отказов. Результаты 59 испытаний приводятся в таблице 12.16. На уровне значимости $\alpha = 0{,}1$ проверить гипотезу H_0 о том, что число отказов имеет распределение Пуассона.

Таблица 12.16

Число отказов	0	1	2	3
Число испытаний	42	10	4	3

12.67. Результаты измерений входного сопротивления (в Ом) 130 электронных ламп представлены в таблице 12.17 в виде интервальной выборки. На уровне значимости $\alpha = 0{,}01$ проверить гипотезу H_0 о нормальности распределения входного сопротивления электронной лампы.

Таблица 12.17

Границы интервала	3,0–3,6	3,6–4,2	4,2–4,8	4,8–5,4	5,4–6,0	6,0–6,6	6,6–7,2
Частота	2	3	35	43	22	15	5

12.68. В десятичной записи числа π среди 10 000 первых значащих цифр после запятой цифры 0, 1, ..., 9 встречаются соответственно m = (968, 1026, 1021, 574, 1014, 1046, 1021, 970, 948, 1014) раз. Можно ли на уровне значимости 0,05 считать, что эти цифры распределены равномерно?

§ 12.4. КОРРЕЛЯЦИОННЫЙ И РЕГРЕССИОННЫЙ АНАЛИЗ ДАННЫХ

1. Основы корреляционного анализа

Корреляционный анализ — это совокупность методов исследования так называемой *корреляционной зависимости* между случайными величинами.

Для двух случайных величин X и Y корреляционный анализ состоит из следующих основных этапов: 1) получение выборки из двумерного распределения (X, Y) и при необходимости построения корреляционной таблицы; 2) вычисления выборочного коэффициента корреляции; 3) проверки статической гипотезы о значимости корреляционной связи.

Корреляционная таблица представляет собой $l_1 \times l_2$-клеточную таблицу, где l_1 и l_2 — числа интервалов соответственно для X и Y, а в каждой клетке таблицы приводится число n_{ij} тех пар значений (x, y), компоненты которых попадают в соответствующие интервалы группировки по каждой переменной.

Выборочный коэффициент корреляции Пирсона определяется формулой

$$r = \rho^*_{X,Y} = \frac{S_{X,Y}}{S_X S_Y}. \tag{12.18}$$

При этом, если вычисления осуществляются по корреляционной таблице, то

$$S_{X,Y} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{l_1}\sum_{j=1}^{l_2}(\hat{x}_i - \overline{x})(\hat{y}_j - \overline{y})n_{ij} \tag{12.19}$$

— выборочная ковариация; $\hat{x}_i$ и $\hat{y}_j$ — центры соответствующих интервалов группировки;

$$S_X = \sqrt{S_X^2},\ \ S_Y = \sqrt{S_Y^2},$$

$$S_X^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{l_1} n_{i\bullet}(\hat{x}_i - \overline{x})^2,\ \ S_Y^2 = \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{l_2} n_{\bullet j}(\hat{y}_j - \overline{y})^2 \qquad (12.20)$$

— соответствующие выборочные дисперсии.

Для выборочной ковариации $S_{X,\,Y}$ справедлива формула

$$S_{X,\,Y} = \alpha_{1,1}^* - \overline{x}\,\overline{y} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{l_1}\sum_{j=1}^{l_2} n_{ij}\,\hat{x}_i\hat{y}_j - \overline{x}\,\overline{y}, \qquad (12.21)$$

являющаяся аналогом формулы $K_{X,\,Y} = \alpha_{1,\,1} - m_X m_Y$ в теории вероятностей. Для простой (негруппированной) выборки формулы (12.19)–(12.21) упрощаются и приобретают вид

$$S_{X,\,Y} = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}(x_k - \overline{x})(y_k - \overline{y});\ \ \alpha_{1,1}^* = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} x_k y_k;$$

$$S_X^2 = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}(x_k - \overline{x})^2,\ \ S_Y^2 = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}(y_k - \overline{y})^2.$$

ПРИМЕР 12.14. В таблице 12.18 представлены результаты измерений роста X (см) и веса Y (кг) 50 мужчин — слушателей военной академии. Вычислить выборочный коэффициент корреляции.

Таблица 12.18

X \ Y	[55; 65)	[65; 75)	[75; 85)	[85; 95)	$n_{i\bullet}$
[155; 165)	2	5	4	1	12
[165; 175)	2	8	9	4	23
[175; 185)	0	4	6	5	15
$n_{\bullet j}$	4	17	19	10	50

◀ По формулам группированной выборки вычисляем средние:

$$\overline{x} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{3}\hat{x}_i n_{i\bullet} = \frac{8530}{50} = 170{,}6,\ \ \overline{y} = \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{4}\hat{y}_j n_{\bullet j} = \frac{3850}{50} = 77,$$

и выборочные вторые начальные моменты:

$$\alpha_{2,0}^* = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{3}\hat{x}_i^2 n_{i\bullet} = 29158,\ \ \alpha_{0,2}^* = \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{4}\hat{y}_j^2 n_{\bullet j} = 6006,\ \ \alpha_{1,1}^* = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{3}\sum_{j=1}^{4} n_{ij}\,\hat{x}_i\,\hat{y}_j = 13156.$$

Далее, используя формулы для выборочных дисперсий через начальные моменты (см. пример 12.4), получаем

$$S_X^2 = \alpha_{2,0}^* - \overline{x}^2 = 53{,}64,\ \ S_Y^2 = \alpha_{0,2}^* - \overline{y}^2 = 77,\ \ S_{X,Y} = \alpha_{1,1}^* - \overline{x}\,\overline{y} = 19{,}8.$$

Наконец, по формуле (12.18) находим коэффициент корреляции:

$$r = \frac{19{,}8}{7{,}3239 \cdot 8{,}7749} = 0{,}308.\ ▶$$

12.69. Показать, что для простой (негруппированной) выборки справедлива следующая формула для выборочной ковариации:

$$S_{X,Y} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i y_i - \overline{x}\cdot\overline{y}.$$

12.70. Показать, что для выборочного коэффициента корреляции справедливо свойство, аналогичное свойству коэффициента корреляции в теории вероятностей: $|r| \le 1$.

В задачах 12.71–12.72 вычислить коэффициент корреляции для указанных выборок из двумерной генеральной совокупности, представленных в таблицах 12.19, 12.20.

12.71.

Таблица 12.19

x	8	10	5	8	9
y	1	3	1	2	3

12.72.

Таблица 12.20

X \ Y	40–50	50–60	60–70	79–80
10–11	2	11	3	2
11–12	1	12	2	4
12–13	3	6	27	6
13–14	2	3	3	8

Пусть r — выборочный коэффициент корреляции, являющийся асимптотически несмещенной и состоятельной оценкой коэффициента корреляции ρ генеральной совокупности, и пусть гипотеза H_0 утверждает, что $\rho = 0$. Если гипотеза H_0 отклоняется на заданном уровне значимости, то делается вывод, что линейная связь между X и Y *значима*. Альтернативной гипотезой при этом может выступать любая из трех возможных:

$$H_1: \begin{cases} \rho < 0; \\ \rho \ne 0; \\ \rho > 0. \end{cases}$$

В противном случае (если гипотеза H_0 принимается), делается вывод о том, что X и Y *некоррелированы*, т. е. линейная связь между ними *незначима*.

Пусть (X, Y) — двумерная генеральная совокупность, распределенная по двумерному нормальному закону с коэффициентом корреляции ρ. Из курса теории вероятности известно, что равенство нулю коэффициента корреляции эквивалентно в этом случае условию независимости компонент X и Y. Если же $\rho = \pm 1$, то это свидетельствует о наличии линейной зависимости между X и Y. При проверке *независимости* в качестве альтернативы всегда выбирается двусторонняя.

Подходящей статистикой для проверки основной гипотезы является статистика U, предложенная Фишером:

$$U = \frac{\sqrt{n-3}}{2} \ln\frac{1+r}{1-r},$$

закон распределения которой при условии H_0 удовлетворительно аппроксимируется нормальным $N(0, 1)$ уже при $n \ge 10$.

ПРИМЕР 12.15. В условиях примера 12.14, предполагая нормальность двумерной генеральной совокупности (X, Y), проверить гипотезу о независимости компонент. Принять $\alpha = 0{,}05$.

◄ Выборочный коэффициент корреляции вычислен в примере 12.14: $r = 0{,}308$. Так как альтернатива двусторонняя, то из таблицы квантилей нормального распределения находим квантиль $u_{1-\frac{\alpha}{2}} = u_{0,975} = 1{,}96$. Вычисляем выборочное значение статистики U:

$$U_{\text{выб}} = \frac{\sqrt{47}}{2}\ln\frac{1+0{,}308}{1-0{,}308} = 2{,}1824.$$

Так как $|U_{\text{выб}}| > 1{,}96$, (т. е. $U_{\text{выб}} \in G_\alpha$), то гипотеза H_0 отклоняется в пользу гипотезы H_1. Компоненты X и Y зависимы. ►

12.73. Выборочный коэффициент корреляции r, вычисленный по выборке объема $n = 39$, равен 0,25. Проверить значимость корреляции при альтернативных гипотезах: а) двусторонняя; б) правосторонняя. Принять $\alpha = 0{,}05$.

12.74. Проверить значимость линейной зависимости между компонентами двумерной нормальной генеральной совокупности (X, Y) по следующим данным: а) $r = -0{,}41$, $n = 52$, $\alpha = 0{,}1$ и гипотеза H_1 левосторонняя; б) $r = 0{,}15$, $n = 39$, $\alpha = 0{,}01$ и гипотеза H_1 двусторонняя; в) $r = -0{,}32$, $n = 103$, $\alpha = 0{,}05$ и гипотеза H_1 двусторонняя.

12.75. Проведены парные измерения производительности труда Y в зависимости от уровня механизации работ X для 28 промышленных предприятий Московской области. Предполагается, что вектор (X, Y) имеет двумерное нормальное распределение. В результате обработки выборочных данных получен выборочный коэффициент корреляции $r = 0{,}51$. Требуется: 1) в условиях двусторонней альтернативы найти критическое значение уровня значимости α_0 такое, что при $\alpha < \alpha_0$ гипотеза H_0 о независимости будет приниматься для полученного в данной выборке коэффициента корреляции; 2) для $\alpha = 0{,}05$ и правосторонней альтернативы найти критическое значение $r_{\text{кр}}$ такое, что при $r > r_{\text{кр}}$ гипотеза H_0 будет отвергаться в пользу H_1.

12.76. Выборка объема $n = 72$ из двумерной нормальной генеральной совокупности (X, Y) приведена к группированному виду, представленному в корреляционной таблице 12.21. Вычислить выборочный коэффициент корреляции и на уровне значимости 0,05 проверить основную гипотезу о независимости компонент.

Таблица 12.21

X \ Y	120–140	140–160	160–180	180–200	200–220	220–240	240–260	$n_{i\bullet}$
10–20					7	5	3	15
20–30				5	4	2		11
30–40			3	4	2			9
40–50		2	6	4				12
50–60	3	5	3					11
60–70	4	2						6
$n_{\bullet j}$	7	9	12	13	13	7	3	72

12.77. По выборочным данным, приведенным в таблице 12.22, вычислить значение выборочного коэффициента корреляции, и на уровне значимости 0,05 проверить основную гипотезу H_0 о значимости линейной связи против правосторонней альтернативы.

Таблица 12.22

X \ Y	0,02	0,06	0,10	0,14	0,18	0,22	$n_{i\bullet}$
720–750	3	1	1				5
750–780	1	2	4	3	2		12
780–810		1	3	2	3	2	11
810–840			1	4	4	3	12
840–870				1	2	5	8
$n_{\bullet j}$	4	4	9	10	11	10	48

2. Основы регрессионного анализа

Зависимость между случайными величинами X и Y называется *стохастической*, если с изменением одной их них (например, X) меняется закон распределения другой (Y). В качестве примеров такой зависимости приведем зависимость веса человека (Y) от его роста (X), предела прочности стали (Y) от ее твердости (X) и т. д.

В теории вероятностей стохастическую зависимость Y от X описывают условным математическим ожиданием:

$$y(x) = \mathrm{M}[Y/X = x] = \begin{cases} \sum\limits_k y_k \mathrm{P}\{Y = y_k/x\}, & Y \text{ — СВДТ}, \\ \int\limits_{-\infty}^{\infty} y \cdot f(y/x)\,dy, & Y \text{ — СВНТ}, \end{cases}$$

которое, как видно из записи, является функцией от независимой переменной x, имеющей смысл возможного значения случайной величины X.

Уравнение $y = y(x)$ называется *уравнением регрессии Y по X*. График функции $y = y(x)$ называется *кривой регрессии*. Кривые регрессии обладают следующим свойством: среди всех действительных функций $\varphi(x)$ минимум $\mathrm{M}[(Y - \varphi(x))^2]$ достигается для функции

$$\varphi_0(x) = \mathrm{M}[Y/X = x],$$

т. е. регрессия Y по X дает наилучшее в среднеквадратическом предсказание величины Y по заданному значению $X = x$. Наиболее простым является случай, когда регрессия Y по X линейна:

$$y(x) = a_0 + a_1 x.$$

Если $(X; Y)$ — случайный вектор, распределенный по двумерному нормальному закону с центром рассеивания (m_X, m_Y), дисперсиями σ_X^2 и σ_Y^2 и коэффициентом корреляции ρ, то коэффициенты a_0 и a_1 определяются равенствами

$$a_0 = m_Y - \rho\frac{\sigma_Y}{\sigma_X}m_X, \quad a_1 = \rho\frac{\sigma_Y}{\sigma_X},$$

и уравнением регрессии в этом случае является прямая линия

$$y(x) = m_Y + \rho\frac{\sigma_Y}{\sigma_X}\cdot(x - m_X), \tag{12.22}$$

проходящая через центр рассеивания $(m_X; m_Y)$ с угловым коэффициентом

$$\beta = \rho\cdot\frac{\sigma_Y}{\sigma_X},$$

называемым *коэффициентом регрессии Y по X*.

В реальных экспериментах, связанных со статистической обработкой опытных данных, условный закон распределения случайной величины Y при условии $X = x$ обычно заранее неизвестен. В таком случае речь может идти лишь о каком-либо приближении к теоретической кривой регрессии, построенном на основе выборочных данных. Другими словами, задача заключается в подборе подходящей функциональной зависимости, наилучшим образом (в смысле среднеквадратического критерия) приближающей стохастическую зависимость.

Регрессионный анализ проводится в три этапа. На первом этапе по виду расположения выборочных точек (x_i, y_i) на плоскости выдвигают гипотезу о виде функциональной зависимости, например,

$$y = \varphi(x; a_0, a_1, \ldots, a_m), \tag{12.23}$$

где $a_0, a_1, \ldots, a_m$ — набор параметров, определяющих данную функцию.

На втором этапе осуществляется *подгонка* модели, т. е. вычисляются оценки неизвестных параметров функции по методу наименьших квадратов. *Метод наименьших квадратов* состоит в минимизации суммы квадратов отклонений точек на искомой кривой от соответствующих выборочных значений y_k, т. е. минимизации величины

$$Q = \sum_{k=1}^{n} [y_k - \varphi(x_k; a_0, a_1, \ldots, a_m)]^2.$$

Подставляя полученные в результате минимизации оценки параметров $\tilde{a}_0, \tilde{a}_1, \ldots, \tilde{a}_m$ (МНК-оценки) в формулу (12.23), получаем уравнение *кривой регрессии Y по X*:

$$\tilde{y}(x) = \varphi(x; \tilde{a}_0, \tilde{a}_1, \ldots, \tilde{a}_m).$$

Модель регрессии называется *линейной по параметрам*, если функция φ представима в виде

$$\varphi(x_k; a_0, a_1, \ldots, a_m) = \sum_{k=0}^{m} a_k \varphi_k(x),$$

где $\varphi_k(x)$ — известные *координатные* функции. В частном случае, когда $\varphi_k(x) = x^k$, $k = 0, 1, \ldots, m$, модель называется *полиномиальной*.

ПРИМЕР 12.16. Пусть получена выборка $(x_k; y_k)$, $k = 1, 2, \ldots, n$, из двумерной генеральной совокупности (X, Y). Корреляционный анализ показал, что корреляционная зависимость Y от X значима на некотором уровне α. Выдвигается гипотеза о том, что уравнение прямой регрессии Y по X

$$y(x) = ax + b$$

должно хорошо аппроксимировать стохастическую зависимость Y от X. Найти МНК-оценки параметров a и b и составить уравнение прямой регрессии Y по X.

◄ Искомые оценки являются решениями следующей задачи минимизации:

$$Q(a, b) = \sum_{k=1}^{n} [y_k - ax_k - b]^2 \to \min_{a, b}.$$

Запишем необходимые условия экстремума дифференцируемой функции $Q(a, b)$:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial Q}{\partial a} = 0, \\ \dfrac{\partial Q}{\partial b} = 0. \end{cases}$$

Получаем следующую систему линейных алгебраических уравнений для неизвестных коэффициентов a и b:

$$\begin{cases} a\sum_{k=1}^{n} x_k^2 + b\sum_{k=1}^{n} x_k = \sum_{k=1}^{n} x_k y_k, \\ a\sum_{k=1}^{n} x_k^2 + bn = \sum_{k=1}^{n} y_k. \end{cases}$$

Решая полученную линейную систему и вводя обычные обозначения для выборочных характеристик случайного вектора (X, Y), получаем МНК-оценки параметров:

$$\tilde{a} = \frac{S_{X,Y}}{S_X} = r\cdot\frac{S_Y}{S_X},\ \ \tilde{b} = \overline{y} - \overline{x}\cdot r\cdot\frac{S_Y}{S_X},$$

где r — выборочный коэффициент корреляции, S_X и S_Y — выборочные среднеквадратические отклонения.

Таким образом, уравнение линейной регрессии Y по X приобретает вид

$$\tilde{y}(x) = \overline{y} + r\cdot\frac{S_Y}{S_X}\cdot(x - \overline{x}). \tag{12.24}$$

Заметим, что полученное уравнение аналогично теоретическому уравнению регрессии (12.22), если заменить все входящие в него вероятностные моменты соответствующими выборочными оценками в соответствии с методом подстановки. ►

Замечание. Аналогично примеру 12.16 строится уравнение прямой регрессии X по Y, имеющее вид

$$\tilde{x}(y) = \overline{x} + r\frac{S_X}{S_Y}\cdot(y - \overline{y}). \tag{12.25}$$

Из уравнений (12.24) и (12.25) видно, что обе прямые проходят через центр рассеивания $(\overline{x}, \overline{y})$, но с разными угловыми коэффициентами. Обе прямые совпадают тогда и только тогда, когда $|r| = 1$, т. е. тогда, когда между Y и X имеет место линейная функциональная зависимость.

На третьем этапе анализируют качество построения модели: проверяются так называемые *значимость* и *адекватность* модели. Этот этап осуществляется средствами проверки статистических гипотез.

Обозначим $\beta^* = r\cdot\frac{S_Y}{S_X}$ — *выборочный коэффициент регрессии*. Уравнение прямой регрессии Y по X запишется в виде

$$\tilde{y}(x) = \overline{y} + \beta^*(x - \overline{x}).$$

Модель линейной регрессии называется *статистически незначимой на уровне* α, если на данном уровне подтверждается гипотеза H_0: $\beta = 0$ против двусторонней альтернативы. Для проверки используется фишеровская статистика

$$Z = \frac{(\beta^*)^2 Q_X}{S^2} \sim Fi(1, n-2),$$

где $Q_X = \sum_{i=1}^{n}(x_i - \overline{x})^2$, $S^2 = \frac{1}{n-2}\sum_{i=1}^{n}(y_i - \tilde{y}_i)^2$ — оценка дисперсии *ошибок наблюдений*.

Если гипотеза H_0 отклоняется, то линейная модель называется *значимой* на уровне значимости α. Если регрессионная модель значима, то отсюда еще не следует, что она хорошо согласуется с результатами наблюдений, т. е. адекватна им.

12.78. В условиях задачи 12.76 написать уравнение прямой регрессии Y по X.

12.79. В условиях задачи 12.77 написать уравнения прямых регрессии Y по X и X по Y.

12.80. В книге «Основы химии» Д. И. Менделеев приводит экспериментальные данные о количестве Y азотно-натриевой соли, которое можно растворить в 100 г воды в зависимости от температуры x (см. таблицу 12.23). Приблизить указанные статистические данные уравнением прямой регрессии.

Таблица 12.23

x_i	0	4	10	15	21	29	36	51	68
y_i	66,7	71,0	76,3	80,6	85,7	92,9	99,4	113,6	125,1

12.81. При исследовании некоторой химической реакции через каждые 5 минут определялось количество Y вещества, оставшееся в системе. Результаты измерений приведены в таблице 12.24, где t — время после начала реакции в минутах; Y — количество вещества в процентах. Предполагая, что подходящей моделью регрессии является полиномиальная второго порядка (параболическая регресия) $y(t) = a_0 + a_1t + a_2t^2$, найти МНК-оценки параметров a_0, a_1 и a_2 и определить, какой процент вещества остается в системе по истечении 25 мин после начала реакции.

Таблица 12.24

t_i	0	7	12	17	22	27	32	37
y_i	100	87,3	72,9	63,2	54,7	47,5	41,4	36,3

12.82. Для совокупности данных, представленных в таблице 12.25, найти оценку коэффициента регрессии β^* и проверить гипотезу о значимости линейной регрессии.

Таблица 12.25

x_i	1,2	2,4	2,8	4,2	5,9	6,8	8,1	9,2	10,1	11,0
y_i	7	12	17	24	29	38	46	45	54	68

В задачах 12.83–12.84 по заданным выборкам (таблицы 12.26 и 12.27) вычислить оценки для коэффициента корреляции и коэффициента линейной регрессии, и на уровне значимости 0,05 проверить гипотезы: 1) о значимости коэффициента корреляции; 2) о значимости линейной регрессии.

12.83.

Таблица 12.26

x_i	2,7	4,6	6,3	7,8	9,2	10,6	12,0	13,4	14,7
y_i	17	16,2	13,3	13,0	9,7	9,9	6,2	5,8	5,7

12.84.

Таблица 12.27

x_i	1	2	3	4	5	6	7	8	9
y_i	0,21	0,32	0,58	1,02	1,76	2,68	3,75	5,07	6,62

Продолжение табл. 12.27

x_i	10	11	12	13	14	15	16	17
y_i	8,32	12,21	12,33	14,58	17,07	12,53	22,72	29,05

Модель линейной регрессии называется *адекватной*, если предсказанные по ней значения переменной Y согласуются с результатами наблюдений. Грубая оценка адекватности модели может быть проведена непосредственно по графику *остатков*, т. е. разностей между наблюдаемыми и вычисленными значениями: $e_i = y_i - \tilde{y}_i$ ($i = 1, 2, \ldots, n$).

Если модель адекватна, то остатки e_i являются реализациями случайных ошибок наблюдений ε_i, которые должны быть независимыми нормально распределенными случайными величинами с нулевыми средними и одинаковыми дисперсиями σ^2. Проверка выполнения этих предположений различными статистическими методами и лежит в основе оценки адекватности по графику остатков.

Для формулирования строгого критерия адекватности необходимо в каждой точке x_i проводить повторные измерения, чтобы оценить дисперсию измерений и сопоставить ее с дисперсией остатков. Получаемый при этом критерий адекватности Фишера требует применения элементов *однофакторного дисперсионного анализа*, что выходит за рамки данного задачника.

ОТВЕТЫ И УКАЗАНИЯ

ГЛАВА 1

1.1. 5. **1.2.** 1. **1.3.** $\alpha^2 - \beta^2 - \gamma^2 + \delta^2$. **1.4.** $\sin(\alpha - \beta)$. **1.5.** 0. **1.6.** −3. **1.7.** 1. **1.8.** $a^3 + b^3 + c^3 - 3abc$. **1.12.** 1. **1.13.** $2a^2(a + x)$. **1.14.** 1. **1.15.** $x = 1$, $y = 2$. **1.16.** $x = 2$, $y = -5$. **1.17.** $x = 1 - a$, $y = -1 - a$. **1.18.** $x = -2$, $y = 3$, $z = -4$. **1.19.** $x = -1$, $y = -2$, $z = -4$. **1.20.** $x = 1$, $y = 3$, $z = -1$. **1.21.** а) Параллельно и в одну сторону; б) параллельно и в противоположные стороны; в) да. **1.23.** а) $\overrightarrow{AC}$; б) $\overrightarrow{AB}$; в) **0**. **1.24.** а) $\overrightarrow{AC_1}$; б) $\overrightarrow{AC_1}$; в) $\overrightarrow{AC_1}$.

1.25. Да, так как $\mathbf{a} = \frac{1}{2}((\mathbf{a}+\mathbf{b})+(\mathbf{a}-\mathbf{b}))$, $\mathbf{b} = \frac{1}{2}((\mathbf{a}+\mathbf{b})-(\mathbf{a}-\mathbf{b}))$. **1.27.** $\overrightarrow{AB} = \frac{4}{3}\overrightarrow{AM} - \frac{2}{3}\overrightarrow{AN}$.

1.28. $\overrightarrow{AC} = 2\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AF}$. **1.29.** $-\frac{1}{2}\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AA_1}$. **1.30.** $\overrightarrow{AA_1} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{AB_1} + \overrightarrow{AD_1} - \overrightarrow{AC})$,

$\overrightarrow{AC_1} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{AB_1} + \overrightarrow{AD_1} + \overrightarrow{AC})$. **1.31.** $\frac{1}{2}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AA_1}$. **1.33.** $|k| = \frac{|\overrightarrow{AC}|}{|\overrightarrow{AB}|}$ при $A \neq B$.

1.34. $\overrightarrow{OL} = \frac{\mathbf{a}|\mathbf{b}| + \mathbf{b}|\mathbf{a}|}{|\mathbf{a}| + |\mathbf{b}|}$. **1.35.** $3\mathbf{p} - 4\mathbf{q} - 3\mathbf{r} - 2\mathbf{s} = 0$. **1.37.** 1, −2. **1.39.** $\overrightarrow{OP} = \frac{3}{5}\mathbf{a} + \frac{1}{10}\mathbf{b}$.

1.40. $\overrightarrow{CM} = -\overrightarrow{AC} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AD} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$. **1.41.** $\overrightarrow{SE} = \{-1, 1, 2\}$. **1.42.** $\overrightarrow{SD} = \mathbf{a} - \mathbf{b} + \mathbf{c}$; $\overrightarrow{SD} = \{1, -1, 1\}$.

1.43. $\overrightarrow{SC} = \{-1, 1, 1\}$, $\overrightarrow{AM} = \left\{\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right\}$, $\overrightarrow{SO} = \left\{-1, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right\}$. **1.44.** $\alpha_1 = 3$, $\beta_1 = 9$; $\alpha_2 = -1$, $\beta_2 = 1$.

1.45. $\alpha = -1$, $\beta = 4$. **1.47.** $\alpha_1 = 5$, $\beta_1 = 4$ или $\alpha_2 = -5$, $\beta_2 = -4$. **1.48.** $\alpha = 7/4$, $\beta = 17/2$.

1.49. −6. **1.50.** а) $\sqrt{5}, \left\{-\frac{1}{\sqrt{5}}, \frac{2}{\sqrt{5}}, 0\right\}$; б) $\frac{2}{\sqrt{5}}$; в) −19/3; г) 0. **1.51.** $\mathbf{a} = \left\{-\frac{1}{2}, -\frac{3}{2}\right\}$, $\mathbf{a} = -\frac{1}{2}\mathbf{e}_1 - \frac{3}{2}\mathbf{e}_2$.

1.52. $\mathbf{a} = \{-7, -1\}$, $\mathbf{a} = -7\mathbf{e}_1 - \mathbf{e}_2$. **1.53.** $\mathbf{a} = \{-2, 1, -1\}$, $\mathbf{a} = -2\mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2 - \mathbf{e}_3$. **1.54.** $\mathbf{a} = \{-1, 2, 0\}$, $\mathbf{a} = -\mathbf{e}_1 + 2\mathbf{e}_2$. **1.55.** 5 и $\sqrt{130}$. **1.56.** 12. **1.58.** (2, 1, 2). **1.59.** (4, 8, −2), (−6, −4, 8), (6, 6, 0). **1.60.** $C = (6, -2)$, $D = (2, -4)$. **1.61.** (5, −2, −4). **1.62.** (8, 11, 23), (0, 1, 11).

1.63. а) {−1, −1, 6}; б) {−3, 1, 2}; **1.64.** $\mathbf{a}_0 = \left\{\frac{1}{3}, -\frac{2}{3}, \frac{2}{3}\right\}$. **1.65.** $\left(\frac{x_1 + \lambda x_2}{1+\lambda}, \frac{y_1 + \lambda y_2}{1+\lambda}, \frac{z_1 + \lambda z_2}{1+\lambda}\right)$.

1.66. а) $\mathbf{a}_0 = \left\{\frac{2}{\sqrt{13}}, \frac{3}{\sqrt{13}}, 0\right\}$; б) {5, 12, 1}; в) $\mathbf{a} + \mathbf{b} - 2\mathbf{c} = -2\mathbf{j}$; г) 6.

1.67. $\mathbf{x}_1 = -5\mathbf{i} + 10\mathbf{j} + 10\mathbf{k}$, $\mathbf{x}_2 = 5\mathbf{i} - 10\mathbf{j} - 10\mathbf{k}$.

1.68. $\mathbf{x} = 2\mathbf{i} + 2\mathbf{j} + 2\mathbf{k}$. **1.69.** $\mathbf{x} = \pm 5\mathbf{i} + \frac{5}{\sqrt{2}}\mathbf{j} - \frac{5}{\sqrt{2}}\mathbf{k}$. **1.70.** $\mathbf{x} = \frac{5}{3}(\mathbf{i} - 7\mathbf{j} + 2\mathbf{k})$. *Указание*. Вектор $\mathbf{x} = \lambda(\mathbf{a}_0 + \mathbf{b}_0)$, где $\mathbf{a}_0$ и $\mathbf{b}_0$ — орты заданных векторов $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$. **1.71.** $\sqrt{11}$. **1.72.** $3\sqrt{3}$. **1.73.** а) -3; б) 2; в) $\sqrt{57}$; г) $\frac{7}{\sqrt{13}}$; д) $\frac{\sqrt{3}}{2}$; **1.74.** $\pi - \arccos\frac{1}{\sqrt{10}}$. **1.75.** 1. **1.76.** $\lambda = \pm\frac{3}{5}$. **1.77.** 120°. **1.78.** 1/3. **1.79.** $-1/3$ или $-23/27$. **1.80.** 120°. **1.81.** $\sqrt{22}$. **1.82.** 3. **1.83.** 2. **1.84.** $\frac{8}{7} \le |\mathbf{a}| \le \frac{10}{7}$. *Указание*. Выразите вектор $\mathbf{a}$ через векторы $\mathbf{f} = \mathbf{a} + 3\mathbf{b}$ и $\mathbf{d} = 2\mathbf{a} - \mathbf{b}$. **1.85.** $-2{,}75$. **1.86.** $\overrightarrow{BH} = -\mathbf{a} + \frac{\mathbf{ab}}{\mathbf{b}^2}\mathbf{b}$. **1.87.** $\arccos\frac{25}{\sqrt{742}}$ и $\frac{\sqrt{117}}{2}$. **1.88.** $\frac{\sqrt{362}}{6}$. **1.90.** 60° или 120°. **1.91.** $\frac{5}{\sqrt{3}}\{1, 1, 1\}$. **1.92.** Бóльшая диагональ равна $a\sqrt{6}$, остальные — $a\sqrt{2}$. **1.93.** $\arccos\frac{1}{4}$. **1.94.** 5. **1.95.** $\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$. *Указание*. Ввести систему координат с центром в точке пересечения диагоналей основания. **1.96.** $x' = (x - x_0)\cos\varphi + (y - y_0)\sin\varphi$, $y' = -(x - x_0)\sin\varphi + (y - y_0)\cos\varphi$. **1.97.** $X' = X\cos\varphi + Y\sin\varphi$, $Y' = -X\sin\varphi + Y\cos\varphi$, $Z' = Z$.

1.98. $\mathbf{a}_1\mathbf{a}_2 = \sum_{i,k=1}^{3} X_i^{(1)}X_k^{(2)}\mathbf{e}_i\mathbf{e}_k = 5X_1^{(1)}X_1^{(2)} + 2X_2^{(1)}X_2^{(2)} + 9X_3^{(1)}X_3^{(2)} - 2(X_1^{(1)}X_2^{(2)} + X_2^{(1)}X_1^{(1)}) - 3(X_1^{(1)}X_3^{(2)} + X_3^{(1)}X_1^{(2)}) + 4(X_2^{(1)}X_3^{(2)} + X_3^{(1)}X_2^{(2)})$. **1.99.** а) 3; б) 9; в) 54. **1.100.** $0{,}75A$. **1.102.** $2\mathbf{k} - 2\mathbf{i}$. **1.103.** 0. **1.104.** $[\mathbf{a}, \mathbf{c}]$. **1.105.** 3. **1.106.** $\pm\frac{1}{\sqrt{94}}\{3, 7, 6\}$. **1.107.** $\pm\frac{1}{\sqrt{35}}\{1, -5, -3\}$. **1.108.** $\alpha = \frac{12}{5}$, $\beta = \frac{9}{5}$. **1.109.** $2\sqrt{11}$. **1.110.** $\{7, 5, 1\}$. **1.111.** $\{-4, -2, -4\}$. **1.112.** а) $50\sqrt{2}$; б) $\frac{5\sqrt{73}}{2}$; в) $\frac{9\sqrt{2}}{2}$. **1.113.** $\sqrt{371}$. **1.114.** $\sqrt{\frac{395}{34}}$. **1.116.** а) Да; б) нет. **1.117.** -21. **1.118.** $-2A$. **1.119.** $\frac{A}{23}$. **1.120.** 9. **1.121.** 5/3. **1.122.** $\frac{1}{\sqrt{83}}$. **1.123.** а) $\frac{a^3}{4}$; б) $\frac{a^3}{48}$. **1.125.** а) (0, 0, 0) или (0, 29, 0); б) (0, 1, 0) или (0, 4, 0). **1.127.** а) Общее уравнение: $x - y - 1 = 0$; нормальное: $\frac{1}{\sqrt{2}}x - \frac{1}{\sqrt{2}}y - \frac{1}{\sqrt{2}} = 0$; $p = \frac{1}{\sqrt{2}}$; б) общее уравнение: $-x + y - 1 = 0$; нормальное: $-\frac{1}{\sqrt{2}}x + \frac{1}{\sqrt{2}}y - \frac{1}{\sqrt{2}} = 0$; $p = \frac{1}{\sqrt{2}}$. **1.128.** а) $\frac{x+1}{3} = \frac{y-2}{-1}$. Общее уравнение: $x + 3y - 5 = 0$. Нормальное уравнение: $\frac{1}{\sqrt{10}}x - \frac{3}{\sqrt{10}}y - \frac{5}{\sqrt{10}} = 0$; $p = \frac{5}{\sqrt{10}}$. б) $\frac{x-1}{0} = \frac{y-1}{-1}$. Общее уравнение: $-x + 1 = 0$. Нормальное уравнение: $x - 1 = 0$; $p = 1$. в) $\frac{x+1}{2} = \frac{y-1}{0}$. Общее уравнение: $y - 1 = 0$. Нормальное уравнение: $y - 1 = 0$; $p = 1$. **1.129.** а) $\frac{x-1}{-3} = \frac{y-2}{-1}$. Общее уравнение: $x - 3y + 5 = 0$. Нормальное уравнение: $-\frac{1}{\sqrt{10}}x + \frac{3}{\sqrt{10}}y - \frac{5}{\sqrt{10}} = 0$; $p = \frac{5}{\sqrt{10}}$. б) $\frac{x-2}{-2} = \frac{y-2}{0}$. Общее уравнение: $y - 2 = 0$. Нормальное уравнение: $y - 2 = 0$; $p = 2$. **1.130.** 0,4. **1.131.** $4x - 5y - 7 = 0$, $4x - 5y + 34 = 0$. **1.132.** $a = 10/3$. **1.133.** (0; 8,5). **1.134.** $x + 3y - 11 = 0$. **1.135.** $3x + 4y - 10 = 0$. **1.136.** $2x + 24y - 29 = 0$. **1.137.** $\rho(M, l) = \frac{3}{\sqrt{5}}$, l_1: $\frac{x+1}{-2} = \frac{y-2}{1}$, l_2: $-2(x + 1) + (y - 2) = 0$. **1.138.** $\rho(M, l) = \frac{1}{2}$, l_1: $\frac{x-1}{0} = \frac{y}{2}$, l_2: $2y = 0$.

1.139. Пересекаются в точке $M_0=\left(-\frac{3}{4},-\frac{1}{2}\right)$, $\cos(\widehat{l_1,l_2})=\frac{1}{\sqrt{5}}$. **1.140.** Пересекаются в точке $M_0=(1,\ 0)$, $\cos(\widehat{l_1,l_2})=\frac{2}{\sqrt{5}}$. **1.141.** Пересекаются в точке $M_0=\left(-\frac{8}{11},-\frac{1}{11}\right)$, $\cos(\widehat{l_1,l_2})=\arccos\frac{3}{\sqrt{493}}$. **1.142.** Параллельны, $\rho(l_1,l_2)=\sqrt{2}$. **1.143.** $(1,\ 7)$, $(2,\ 24)$. **1.144.** $4x-3y+10=0$, $7x-y-8=0$, $3x+4y-5=0$. **1.145.** $x-3y-23=0$, $7x+9y+19=0$, $4x+3y+13=0$. **1.146.** $x-6y+17=0$, $8x+3y-17=0$, $7x+9y+17=0$. **1.147.** $A=(-4,-4)$, $B=(-22,-31)$, $C=(-23,-23)$. **1.148.** Уравнения сторон: $3x-2y+53=0$ и $4x+y+33=0$; диагоналей: $161x-12y+877=0$ и $47x+64y-139=0$. **1.150.** 20 и $-4/5$. **1.151.** По разные. **1.152.** Отрезок PQ не пересекает прямую l. **1.153.** Точка P не лежит между прямыми. **1.154.** Лежит. **1.155.** В вертикальных. **1.158.** $\frac{7}{\sqrt{5}}$. **1.159.** $\frac{3}{\sqrt{34}}$. **1.160.** $\frac{8}{\sqrt{29}}$. **1.161.** $P_1=(-4,0)$ и $P_2=(-7/3,0)$. **1.162.** $(1,1)$ и $(-2/3,-2/3)$. **1.163.** $(-1/4,\ 1/4)$. **1.164.** $(-1,\ 3)$. **1.165.** а) $x+2y+2=0$; б) $x-2y-2=0$; в) $x+2y-2=0$. **1.166.** $x-y+2z-3=0$. **1.167.** $x-2y-4z+16=0$. **1.168.** $7x+2y-z-8=0$. **1.169.** $2x+y=0$. **1.170.** $x-2y+z=0$. **1.171.** $-x+y+2z-5=0$. **1.172.** $-x+2y+3z-3=0$. **1.173.** $2x-2y-z+1=0$. **1.174.** $x+y-3$. **1.175.** $2x-y-1=0$. **1.176.** $\frac{2}{\sqrt{35}}$. **1.177.** $17x+6y-8z+1=0$. **1.178.** $4x-9y-z-8=0$. **1.179.** $3x+4y-2z-11=0$. **1.180.** $7x-y+4z-10=0$. **1.181.** $2x-y-z=0$. **1.182.** $2x+4y-4z+5=0$. **1.183.** Плоскости пересекаются, $\cos(\widehat{\alpha_1,\alpha_2})=\frac{\sqrt{3}}{42}$. **1.184.** Плоскости параллельны, $\rho(\alpha_1,\alpha_2)=\frac{3}{2\sqrt{6}}$. **1.185.** Плоскости совпадают. **1.186.** Плоскости параллельны, $\rho(\alpha_1,\alpha_2)=\frac{4}{\sqrt{2}}$. **1.187.** $\frac{x-1}{1}=\frac{y-2}{-2}=\frac{z-3}{-4}$; $x=1+t$, $y=2-2t$, $z=3-4t$. **1.188.** $\frac{x+1}{0}=\frac{y-2}{-4}=\frac{z}{1}$; $x=-1$, $y=2-4t$, $z=t$. **1.189.** $\frac{x+3}{2}=\frac{y-2}{-4}=\frac{z-1}{-4}$; $x=-3+2t$, $y=2-4t$, $z=1-4t$. **1.190.** $\frac{x-1{,}4}{-3}=\frac{y+0{,}2}{4}=\frac{z}{5}$. **1.191.** $\frac{x-0{,}2}{-1}=\frac{y-1{,}4}{-7}=\frac{z}{-5}$. **1.192.** 3. **1.193.** 5/3. **1.194.** $\frac{5}{\sqrt{13}}$. **1.195.** α_1: $x-2y+3z-6=0$, $\rho(\alpha,\alpha_1)=\frac{4}{\sqrt{14}}$. **1.196.** α_1: $2x+y-z-2=0$, $\rho(\alpha,\alpha_1)=\frac{1}{\sqrt{6}}$. **1.197.** $2x+2y-z-10=0$, $2x+2y-z+20=0$. **1.198.** $5x-3y+4z-19=0$. **1.199.** $\frac{40}{\sqrt{762}}$. **1.200.** $\frac{x-1}{1}=\frac{y-3}{2}=\frac{z+2}{9}$; $x=1+t$, $y=3+2t$, $z=-2+9t$. **1.201.** $\frac{x-3}{3}=\frac{y-2}{4}=\frac{z+5}{-2}$. **1.202.** $\frac{x+1}{7}=\frac{y-2}{-1}=\frac{z-3}{-5}$. **1.203.** $x-y-z+4=0$. **1.204.** $\arccos\sqrt{\frac{6}{17}}$. **1.205.** $\arccos\frac{11}{26}$. **1.206.** $\frac{\pi}{2}-\arccos\frac{5}{\sqrt{38}}$. **1.207.** $\sqrt{\frac{138}{7}}$. **1.208.** $\sqrt{\frac{110}{21}}$. **1.209.** $\sqrt{\frac{86}{29}}$. **1.210.** 3. **1.211.** 5. **1.212.** $\frac{37}{\sqrt{165}}$. **1.213.** $\frac{8}{\sqrt{38}}$. **1.214.** $\frac{x-3}{2}=\frac{y+1}{4}=\frac{z-2}{-5}$. **1.215.** $(-1,\ 3,\ 1)$. **1.216.** $(-2,\ 1,\ 4)$. **1.217.** $(5,\ 9,\ -10)$. **1.218.** $\frac{x+1}{4}=\frac{y-1}{-1}=\frac{z-3}{-2}$.

1.219. $\begin{cases} x+y+z-5=0, \\ 3x-2y-z+15=0. \end{cases}$ **1.220.** $\frac{x-3}{24}=\frac{y-1}{41}=\frac{z+4}{-75}$. **1.221.** $2x-16y-13z+31=0$.

1.222. $6x-20y-11z+1=0$. **1.223.** а) $a=4, b=3$; б) $F_1=(-\sqrt{7},0)$, $F_2=(\sqrt{7},0)$; в) $e=\frac{\sqrt{7}}{4}$; г) $d_1\colon x=-\frac{16}{\sqrt{7}}$, $d_2\colon x=\frac{16}{\sqrt{7}}$. **1.224.** а) $\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{4}=1$; б) $\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{9}=1$; в) $\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{16}=1$; г) $\frac{x^2}{169}+\frac{y^2}{25}=1$; д) $\frac{x^2}{5}+\frac{y^2}{1}=1$; е) $\frac{x^2}{64}+\frac{y^2}{48}=1$. **1.225.** $\frac{(x-x_0)^2}{a^2}+\frac{(y-y_0)^2}{b^2}=1$. **1.226.** а) $C=(3,-1)$, $a=3$, $b=\sqrt{5}$, $e=2/3$, $d_1\colon 2x+3=0$; $d_2\colon 2x-15=0$. б) $C=(-1,2)$, $a=5$, $b=4$, $e=3/5$, $d_1\colon 3x+28=0$; $d_2\colon 2x-22=0$. в) $C=(1,-2)$, $b=4$, $a=2\sqrt{3}$, $e=1/2$, $d_1\colon y+10=0$; $d_2\colon y-6=0$. **1.229.** $\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{4}=1$, $r_{1,2}=4\pm\sqrt{3}$, $\rho_{1,2}=\frac{2}{\sqrt{3}}(4\pm\sqrt{3})$. **1.230.** $(-\frac{15}{4},\pm\frac{\sqrt{63}}{4})$.
1.231. а) Пересекает; б) общих точек не имеет; в) касается. **1.232.** а) $3x+2y-10=0$ и $3x+2y+10=0$; б) $x+y-5=0$ и $x+y+5=0$. **1.233.** а) $a=3$, $b=5$; б) $F_1=(-\sqrt{34},0)$, $F_2=(\sqrt{34},0)$; в) $e=\frac{\sqrt{34}}{3}$; г) $d_1\colon x=-\frac{9}{\sqrt{34}}$ и $d_2\colon x=\frac{9}{\sqrt{34}}$. **1.234.** а) $\frac{x^2}{4}-\frac{y^2}{9}=1$; б) $\frac{x^2}{9}-\frac{y^2}{16}=1$; в) $\frac{x^2}{4}-\frac{y^2}{5}=1$; г) $\frac{x^2}{64}-\frac{y^2}{36}=1$; д) $\frac{x^2}{36}-\frac{y^2}{64}=1$; е) $\frac{x^2}{4}-\frac{y^2}{5}=1$.
1.235. $\frac{(x-3)^2}{4}-\frac{(y+2)^2}{1{,}6^2}=-1$. **1.236.** $\frac{(x-x_0)^2}{a^2}-\frac{(y-y_0)^2}{b^2}=1$. **1.237.** а) $C=(2,-3)$, $a=3$, $b=4$, $e=5/3$, уравнения асимптот: $4x-3y-17=0$ и $4x+3y+1=0$; уравнения директрис: $5x-1=0$ и $5x-19=0$; б) $C=(-5,1)$, $a=8$, $b=6$, $e=5/4$, уравнения асимптот: $3x+4y+11=0$ и $3x-4y+19=0$; уравнения директрис: $x=-11{,}4$ и $x=1{,}4$; в) $C=(2,-1)$, $a=4$, $b=3$, $e=5/4$, уравнения асимптот: $4x+3y-5=0$ и $4x-3y-11=0$; уравнения директрис: $y=-4{,}2$ и $y=2{,}2$. **1.240.** $r_1=9/4$, $r_2=41/4$, $\rho(M,d_1)=9/5$, $\rho(M,d_2)=41/5$. **1.241.** $(-6,\pm4\sqrt{3})$. **1.242.** $\frac{x_0x}{a^2}-\frac{y_0y}{b^2}=1$. **1.243.** а) $10x-3y-32=0$ и $10x-3y+32=0$; б) $3x-4y-10=0$ и $3x-4y+10=0$. **1.244.** а) $p=3$; б) $p=5/2$; в) $p=2$; г) $p=1/2$. **1.245.** а) $y^2=-x$; б) $x^2=-2y$; в) $x^2=-12y$. **1.246.** а) $(y-y_0)^2=2p(x-x_0)$; б) $(y-y_0)^2=-2p(x-x_0)$. **1.247.** а) $A=(2,0)$, $p=2$; б) $A=(0,2)$, $p=1/2$; в) $A=(1,3)$, $p=1/8$; г) $A=(6,-1)$, $p=3$; д) $A=(1,2)$, $p=2$; е) $A=(-4,3)$, $p=1/4$. **1.249.** 6.
1.250. а) $y=\frac{1}{8}x^2-x+3$; б) $x^2+2xy+y^2-6x+2y+9=0$. **1.251.** $y_0y=p(x+x_0)$. **1.252.** а) $x+y+2=0$; б) $2x-y-16=0$. **1.253.** Эллипсоид. **1.254.** Двуполостной гиперболоид вращения. **1.255.** Параболоид вращения. **1.256.** Эллиптический параболоид. **1.257.** Параболоид вращения. **1.258.** Однополостной гиперболоид вращения. **1.259.** Однополостной гиперболоид. **1.260.** Конус. **1.261.** Гиперболический параболоид. **1.262.** Параболический цилиндр. **1.263.** Гиперболический параболоид. **1.264.** Двуполостной гиперболоид вращения. **1.265.** Эллиптический параболоид. **1.266.** Гиперболический параболоид. **1.267.** Конус второго порядка. **1.268.** $\frac{(x-3)^2}{25}+\frac{y^2}{225/16}+\frac{z^2}{100/16}=1$.
1.269. а) $\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{25}-\frac{z^2}{49}=0$; б) $x^2-3y^2+z^2=0$. **1.270.** $M_1=(3,4,-2)$ и $M_2=(6,-2,2)$.
1.271. $M=(4,-3,2)$ — прямая касается поверхности. **1.272.** Прямая и поверхность не имеют общих точек.

ГЛАВА 2

2.1. $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \\ -1 & -2 \end{pmatrix}$. **2.2.** $\begin{pmatrix} 5 & 4 & 4 \\ 11 & 10 & 9 \\ 16 & 16 & 15 \end{pmatrix}$. **2.3.** $\begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 27 & -3 & 10 \end{pmatrix}$. **2.4.** $\begin{pmatrix} -4 & 9 \\ 7 & -13 \\ -15 & -10 \end{pmatrix}$. **2.5.** $\begin{pmatrix} 8 & 3 \\ 6 & -10 \end{pmatrix}$.

2.6. $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$. **2.7.** $\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$. **2.8.** $\begin{pmatrix} 1 & 5 & -5 \\ 3 & 10 & 0 \\ 2 & 9 & -7 \end{pmatrix}$. **2.9.** $\begin{pmatrix} 11 & -22 & 29 \\ 9 & -27 & 32 \\ 13 & -17 & 26 \end{pmatrix}$. **2.10.** (31).

2.11. $\begin{pmatrix} 12 & 0 & -6 & 9 & 3 \\ 4 & 0 & -2 & 3 & 1 \\ -4 & 0 & 2 & -3 & -1 \\ 20 & 0 & -10 & 15 & 5 \\ 8 & 0 & -4 & 6 & 2 \end{pmatrix}$. **2.12.** $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & 1 \\ 4 & 3 & 2 \end{pmatrix}$. **2.13.** $\begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & \dots & a_{n1} \\ a_{12} & a_{22} & \dots & a_{n2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{1m} & a_{2m} & \dots & a_{nm} \end{pmatrix}$.

2.14. $AA^{\mathrm{T}} = \begin{pmatrix} 15 & 4 \\ 4 & 43 \end{pmatrix}$, $A^{\mathrm{T}}A = \begin{pmatrix} 17 & -2 & 21 & -1 \\ -2 & 5 & -3 & 7 \\ 21 & -3 & 26 & -2 \\ -1 & 7 & -2 & 10 \end{pmatrix}$. **2.15.** $AA^{\mathrm{T}} = \begin{pmatrix} 5 & -6 & -4 \\ -6 & 12 & 0 \\ -4 & 0 & 8 \end{pmatrix}$,

$A^{\mathrm{T}}A = \begin{pmatrix} 5 & -1 & 5 & -1 & 5 \\ -1 & 5 & -1 & 5 & -1 \\ 5 & -1 & 5 & -1 & 5 \\ -1 & 5 & -1 & 5 & -1 \\ 5 & -1 & 5 & -1 & 5 \end{pmatrix}$. **2.17.** -8. **2.18.** -13. **2.19.** $a_{11} \cdot a_{22} \cdot \ldots \cdot a_{nn}$.

2.20. $(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} a_{1n} \cdot a_{2,n-1} \cdot \ldots \cdot a_{n1}$. **2.21.** а) Не изменится; б) не изменится; в) обратится в нуль; г) умножится на $(-1)^{n-1}$. **2.22.** -8. **2.23.** 18. **2.24.** -10. **2.25.** $(be - cd)^2$. **2.26.** $xyzuv$.
2.27. $n!$. **2.28.** $2n + 1$. **2.29.** 1. **2.30.** $(-1)^{n-1} \cdot n$. **2.32.** $\begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 1{,}5 & -0{,}5 \end{pmatrix}$. **2.33.** $\begin{pmatrix} 7 & -4 \\ -5 & 3 \end{pmatrix}$.

2.34. $-\frac{1}{3} \cdot \begin{pmatrix} 7 & -6 & 1 \\ -5 & 3 & 1 \\ 6 & -3 & -3 \end{pmatrix}$. **2.35.** $\frac{1}{9} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & -2 \\ 2 & -2 & 1 \end{pmatrix}$. **2.36.** $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -38 & 41 & -34 \\ 27 & -29 & 24 \end{pmatrix}$.

2.37. $\begin{pmatrix} 3/4 & -7/24 & -1/24 \\ -1/2 & 5/12 & -1/12 \\ -1/4 & 1/24 & 7/24 \end{pmatrix} = \frac{1}{24} \cdot \begin{pmatrix} 18 & -7 & -1 \\ -12 & 10 & -2 \\ -6 & 1 & 7 \end{pmatrix}$.

2.38. $\begin{pmatrix} 1 & -1/2 & 0 \\ -1/3 & -2/3 & -1/3 \\ 0 & -1/4 & 1/4 \end{pmatrix} = \frac{1}{12} \cdot \begin{pmatrix} 12 & -6 & 0 \\ -4 & 8 & -4 \\ 0 & -3 & 3 \end{pmatrix}$. **2.39.** $\frac{1}{9} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & -2 \\ 2 & -2 & 1 \end{pmatrix}$.

2.40. $\begin{pmatrix} -7 & 5 & 12 & -19 \\ 3 & -2 & -5 & 8 \\ 41 & -30 & -69 & 111 \\ -59 & 43 & 99 & -159 \end{pmatrix}$. **2.41.** $\begin{pmatrix} 22 & -6 & -26 & 17 \\ -17 & 5 & 20 & -13 \\ -1 & 0 & 2 & -1 \\ 4 & -1 & -5 & 3 \end{pmatrix}$. **2.42.** $\begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$.

2.43. $\begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 5 & -4 \end{pmatrix}$. **2.44.** $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$. **2.45.** $\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix}$. **2.46.** $\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 2 & -4 \\ -2 & 4 \end{pmatrix}$. **2.47.** $\begin{pmatrix} 6 & 4 & 5 \\ 2 & 1 & 2 \\ 3 & 3 & 3 \end{pmatrix}$.

2.48. (1, 6, −3, 13). **2.49.** (4, 6, −35, −1). **2.50.** (70, 40, −20, −16). **2.51.** 2. **2.52.** 3. **2.53.** 2. **2.54.** 3. **2.55.** 2. **2.56.** 5. **2.57.** Линейно независима. **2.58.** Линейно зависима. **2.59.** Линейно независима. **2.60.** Линейно независима. **2.61.** Линейно зависима. **2.62.** 3. **2.63.** 3. **2.64.** $r = 3$; $\mathfrak{B} = \{\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_3, \mathbf{a}_4\}$. **2.65.** $r = 3$; $\mathfrak{B} = \{\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_5\}$. **2.67.** (1, −1, 1, −1, 1). **2.68.** (5, −1, −1, −1, −1). **2.69.** $x = 2$, $y = -2$. **2.70.** $x = 1$, $y = -1$. **2.71.** $x = 2$, $y = -1$, $z = 1$. **2.72.** $x = 1$, $y = 2$, $z = -2$. **2.73.** $x_1 = -3$, $x_2 = 2$, $x_3 = 1$. **2.74.** $x_1 = -1$, $x_2 = 1$, $x_3 = -2$. **2.75.** $x_1 = 1$, $x_2 = -1$, $x_3 = 2$, $x_4 = -2$. **2.76.** $x_1 = 3$, $x_2 = -4$, $x_3 = -1$, $x_4 = 1$. **2.77.** $x_3 = 22x_1 - 33x_2 - 11$, $x_4 = -16x_1 + 24x_2 + 8$. **2.78.** Общее решение: $x_1 = \dfrac{x_3 - 9x_4 - 2}{11}$, $x_2 = \dfrac{-5x_3 + x_4 + 10}{11}$. **2.79.** Общее решение: $x_3 = -\dfrac{9}{2} - x_1 - 2x_2$, $x_4 = -\dfrac{25}{2} - 2x_1 - 4x_2$, $x_5 = -\dfrac{15}{2} - 2x_1 - 4x_2$. **2.80.** $x_3 = \dfrac{4}{3}x_1 + \dfrac{2}{3}x_2$, $x_4 = -1 - \dfrac{14}{3}x_1 - \dfrac{7}{3}x_2$, $x_5 = 2 + \dfrac{4}{3}x_1 + \dfrac{2}{3}x_2$. **2.81.** c_1E_1, $E_1 = (3, 1, 5)^{\mathrm{T}}$. **2.82.** $c_1E_1 + c_2E_2$, $E_1 = (2, 1, 0)^{\mathrm{T}}$, $E_2 = (3, 0, 1)^{\mathrm{T}}$. **2.83.** Система имеет только тривиальное решение. **2.84.** c_1E_1, $E_1 = (4, 1, -5)^{\mathrm{T}}$. **2.85.** Общее решение: $c_1E_1 + c_2E_2$, $E_1 = (1, 0, -5/2, -3)^{\mathrm{T}}$, $E_2 = (0, 1, -7/2, -4)^{\mathrm{T}}$. **2.86.** Общее решение: $c_1E_1 + c_2E_2$, $E_1 = (1, 0, -5/2, 7/2)^{\mathrm{T}}$, $E_2 = (0, 1, 5, -7)^{\mathrm{T}}$. **2.87.** Общее решение: $c_1E_1 + c_2E_2$, $E_1 = (1, 0, 3/4, -3/2, 9)^{\mathrm{T}}$, $E_2 = (0, 1, -1/4, 1/2, 0)^{\mathrm{T}}$. **2.88.** $c_1E_1 + c_2E_2 + c_3E_3$, $E_1 = (1, 1, -1, 1, 0, 0)^{\mathrm{T}}$, $E_2 = (-1, 0, 0, 0, 1, 0)^{\mathrm{T}}$, $E_3 = (0, -1, 0, 0, 0, 1)^{\mathrm{T}}$. **2.89.** $X_0 + c_1E_1 + c_2E_2 + c_3E_3$, $X_0 = (1/3, 1/3, 0, 0, 0)^{\mathrm{T}}$, $E_1 = (0, 1, 1, 0, 0)^{\mathrm{T}}$, $E_2 = (0, 1, 0, 1, 0)^{\mathrm{T}}$, $E_3 = (1/3, -5/3, 0, 0, 1)^{\mathrm{T}}$. **2.90.** $X_0 + c_1E_1 + + c_2E_2 + c_3E_3$, $X_0 = (2/3, 1/6, 0, 0, 0)^{\mathrm{T}}$, $E_1 = (0, 1/2, 1, 0, 0)^{\mathrm{T}}$, $E_2 = (0, -1/2, 0, 1, 0)^{\mathrm{T}}$, $E_3 = (1/3, 5/6, 0, 0, 1)^{\mathrm{T}}$. **2.91.** $X_0 + c_1E_1 + c_2E_2 + c_3E_3 + c_4E_4$, $X_0 = (2/3, 0, -1/3, 0, 0, 0)^{\mathrm{T}}$, $E_1 = (1, 1, 0, 0, 0, 0)^{\mathrm{T}}$, $E_2 = (-1, 0, 1, 0, 0, 0)^{\mathrm{T}}$, $E_3 = (0, 0, 0, 1, 1, 0)^{\mathrm{T}}$, $E_4 = (0, 0, 0, -1, 0, 1)^{\mathrm{T}}$. **2.92.** $X_0 + c_1E_1 + c_2E_2 + c_3E_3$, $X_0 = (1, -1/2, 0, 0, 0)^{\mathrm{T}}$, $E_1 = (0, -3/2, 1, 0, 0)^{\mathrm{T}}$, $E_2 = (0, -2, 0, 1, 0)^{\mathrm{T}}$, $E_3 = (0, -5/2, 0, 0, 1)^{\mathrm{T}}$.

2.93. $(1, -1, -1, 1)^{\mathrm{T}}$. **2.94.** $(6 - c, -5 + c, 3, -1 - c, c)^{\mathrm{T}}$. **2.95.** $\left(\dfrac{1}{2}c + \dfrac{31}{6}, \dfrac{2}{3}, 3, -\dfrac{1}{2}c - \dfrac{7}{6}, c\right)^{\mathrm{T}}$.

2.96. $(3, 0, -5, 11)^{\mathrm{T}}$. **2.97.** Система несовместна. **2.98.** $\left(\dfrac{-6+8c}{7}, \dfrac{1-13c}{7}, \dfrac{15-6c}{7}, c\right)^{\mathrm{T}}$.

2.107. $r = 2$; базисом является, например, $(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2)$. **2.108.** $r = 2$; базисом является, например, $(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2)$, $(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_3)$, $(\mathbf{x}_2, \mathbf{x}_3)$. **2.109.** а) Поменяются местами две строки; б) поменяются местами два столбца; в) произойдет симметричное отражение матрицы относительно центра. **2.110.** $\mathbf{x} = -13\mathbf{e}_1' + 6\mathbf{e}_2' - 27\mathbf{e}_3'$. **2.111.** $T_{\mathfrak{B}\to\mathfrak{B}'} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$, $\mathbf{x} = -\dfrac{1}{2}\mathbf{e}_2' + \dfrac{5}{1}\mathbf{e}_2' - \dfrac{1}{2}\mathbf{e}_3'$. **2.112.** $T_{\mathfrak{B}\to\mathfrak{B}'} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$, $\mathbf{x} = -\mathbf{e}_1' + 2\mathbf{e}_2' - \mathbf{e}_3'$.

2.113. $T_{\mathfrak{B}\to\mathfrak{B}'} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$, $\mathbf{x} = -2\mathbf{e}_1' + \mathbf{e}_2' + \mathbf{e}_3'$. **2.114.** $T_{\mathfrak{B}\to\mathfrak{B}'} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\varphi & -\sin\varphi \\ 0 & \sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix}$,

$\mathbf{x} = \mathbf{e}_1' - (2\cos\varphi + \sin\varphi)\mathbf{e}_2' + (2\sin\varphi + \cos\varphi)\mathbf{e}_3'$. **2.115.** $T_{\mathfrak{B}\to\mathfrak{B}'} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$,

$\mathbf{x} = \left(\frac{5}{4}, \frac{1}{4}, -\frac{1}{4}, -\frac{1}{4}\right)$. **2.116.** $T_{\mathfrak{B}\to\mathfrak{B}'} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$, $\mathbf{x} = (1, 0, -1, 0)$.

2.122. $T_{\mathfrak{B}'\to\mathfrak{B}''} = \left(T_{\mathfrak{B}\to\mathfrak{B}'}\right)^{-1} \cdot T_{\mathfrak{B}\to\mathfrak{B}''} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 0 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 0 & 3 \\ 4 & 3 & 1 & 6 \\ 2 & 5 & 4 & 6 \\ 0 & 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

2.123. а) $(0, -2, 4)$; б) $(-1, 2, 1, 0)$. **2.124.** $\left(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, -2\right)$.

2.125. $\begin{pmatrix} 1 & -t_0 & t_0^2 & -t_0^3 & \ldots & (-1)^{n-1}t_0^{n-1} \\ 0 & 1 & -2t_0 & 3t_0^2 & \ldots & (-1)^{n-2}(n-1)t_0^{n-2} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \ldots & 1 \end{pmatrix}$. В этой матрице в $(k + 1)$-м столбце стоят числа $(-t_0)^k$, $C_k^{k-1}(-t_0)^{k-1}$, $C_k^{k-2}(-t_0)^{k-2}, \ldots, C_k^1(-t_0)$, $1, 0, 0, \ldots, 0$.

2.131. $\left(\sum_{i=1}^{n} x_i y_i\right)^2 \le \sum_{i=1}^{n} x_i^2 \cdot \sum_{i=1}^{n} y_i^2$. **2.133.** $\mathbf{e}_1 = \mathbf{f}_1 = (1, 1, 1, 1)$, $\mathbf{e}_2 = (2, 2, -2, -2)$, $\mathbf{e}_3 = (-1, 1, -1, 1)$. **2.134.** $\mathbf{e}_1 = \mathbf{f}_1 = (1, 2, 1, 3)$, $\mathbf{e}_2 = (10/3, -1/3, 1/3, -1)$, $\mathbf{e}_3 = (-19/185, 87/185, 61/185, -72/185)$. **2.135.** $\mathfrak{B} = \{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$, $\mathbf{e}_1 = (1, 2, 2, -1)$, $\mathbf{e}_2 = (2, 3, -3, 2)$, $\mathbf{e}_3 = (2, -1, -1, -2)$. **2.136.** $\mathfrak{B} = \{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$, $\mathbf{e}_1 = (2, 1, 3, -1)$, $\mathbf{e}_2 = (3, 2, -3, -1)$, $\mathbf{e}_3 = (1, 5, 1, 10)$. **2.137.** $\mathbf{e}_3 = \left(\frac{2}{3}, -\frac{2}{3}, -\frac{1}{3}\right)$. **2.138.** $\mathbf{e}_3 = (-4, 2, -1, 3)$, $\mathbf{e}_4 = (2, 4, 3, 1)$. **2.139.** $\mathbf{e}_4 = (1, 1, 1, 1, -4)$, $\mathbf{e}_5 = (-2, -2, 3, 3, -2)$. **2.140.** Является, $A = \begin{pmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix}$. **2.141.** Не является. **2.142.** Является оператором проектирования на ось, заданную вектором $\mathbf{e}$. Если $\mathbf{e} = \cos\alpha \cdot \mathbf{i} + \cos\beta \cdot \mathbf{j} + \cos\gamma \cdot \mathbf{k}$, $A = \begin{pmatrix} \cos^2\alpha & \cos\beta\cos\alpha & \cos\gamma\cos\alpha \\ \cos\alpha\cos\beta & \cos^2\beta & \cos\lambda\cos\beta \\ \cos\alpha\cos\gamma & \cos\beta\cos\gamma & \cos^2\gamma \end{pmatrix}$. **2.143.** Является, если $\mathbf{a} = a_1\mathbf{i} + a_2\mathbf{j} + a_3\mathbf{k}$, $A = \begin{pmatrix} 0 & -a_3 & a_2 \\ a_3 & 0 & -a_1 \\ -a_2 & a_1 & 0 \end{pmatrix}$. **2.144.** Не является. **2.145.** Является, оператор $\mathbf{A} = \mathbf{U}(\mathbf{e}, \varphi)$ представляет собой сумму операторов из задач 2.140, 2.142 и 2.143, матрицы которых известны. **2.146.** Является, $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \\ 3 & -1 & 1 \end{pmatrix}$. **2.147.** Является, $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ -2 & 0 & 2 \\ 4 & -1 & 5 \end{pmatrix}$. **2.148.** Не является. **2.149.** Является, $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. **2.150.** Не является. **2.151.** Является, $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$. **2.152.** $\mathbf{A}^{-1} = \mathbf{A}$. **2.153.** Оператор не имеет обратного. **2.154.** $\mathbf{A}^{-1}(\mathbf{x}) = \frac{1}{9}(x_1 + 2x_2 + 2x_3, 2x_1 + x_2 - 2x_3, 2x_1 - 2x_2 + x_3)$.

2.155. $C=\begin{pmatrix}22 & 13 & 1\\ -39 & -16 & 25\\ -1 & 0 & -6\end{pmatrix}$, $\mathbf{C}(\mathbf{x})=(22x_1+13x_2-37x_3,\ -39x_1-16x_2+25x_3,\ -x_1-6x_3)$.

2.156. $C=\begin{pmatrix}-15 & 23 & -7\\ 2 & 8 & -4\\ -7 & 1 & 7\end{pmatrix}$, $\mathbf{C}(\mathbf{x})=(-15x_1+23x_2-7x_3,\ 2x_1+8x_2-4x_3,\ -7x_1+x_2+7x_3)$.

2.157. $C=0$, $\mathbf{C}(\mathbf{x})=0$. **2.158.** $\mathbf{A}(\mathbf{a})=(-5, -7, 13)$. **2.159.** $\mathbf{A}(\mathbf{a})=(-13, -13, 13)$.

2.160. $\frac{1}{3}\begin{pmatrix}-10 & -21 & 9\\ 5 & 9 & -6\\ 1 & 6 & 3\end{pmatrix}$. **2.161.** $\begin{pmatrix}-5 & -10\\ 1 & 3\end{pmatrix}$. **2.162.** а) $[\mathbf{A}]_{\mathcal{B}'}=\begin{pmatrix}1 & 2 & 2 & 1\\ 2 & 3 & 5 & 1\\ 3 & -1 & 0 & 2\\ 1 & 1 & 2 & 3\end{pmatrix}$;

б) $[\mathbf{A}]_{\mathcal{B}'}=\begin{pmatrix}-2 & 0 & 1 & 0\\ 1 & -4 & -8 & -7\\ 1 & 4 & 6 & 4\\ 1 & 3 & 4 & 7\end{pmatrix}$. **2.163.** $[\mathbf{A}+\mathbf{B}]_{\mathcal{B}''}=\begin{pmatrix}44 & 44\\ -29{,}5 & -25\end{pmatrix}$.

2.164. а) $\begin{pmatrix}0 & 1 & 0 & 0 & \dots & 0\\ 0 & 0 & 2 & 0 & \dots & 0\\ 0 & 0 & 0 & 3 & \dots & 0\\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots\\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & n-1\\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0\end{pmatrix}$; б) $\begin{pmatrix}0 & 1 & 0 & \dots & 0\\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0\\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0\\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots\\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1\\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0\end{pmatrix}$. **2.165.** $\lambda=a$, $\mathbf{x}^{(\lambda)}$ — любой ненулевой вектор. **2.166.** $\lambda_1=1$, $\mathbf{x}^{(\lambda_1)}=x\mathbf{i}$, $x\neq 0$; $\lambda_2=0$, $\mathbf{x}^{(\lambda_2)}=y\mathbf{j}+z\mathbf{k}$, $y^2+z^2\neq 0$. **2.167.** $\lambda=0$, $\mathbf{x}^{(\lambda)}=x\mathbf{i}$, $x\neq 0$. **2.168.** $\lambda_1=1$, $\mathbf{x}^{(\lambda_1)}$ — любой ненулевой вектор, параллельный плоскости отражения; $\lambda_2=-1$, $\mathbf{x}^{(\lambda_2)}=\alpha\mathbf{e}$, $\alpha\neq 0$. **2.169.** $\lambda_1=-1$, $\lambda_2=6$; собственные векторы имеют вид $\mathbf{x}^{(\lambda_1)}=\alpha(1,-1)$ и $\mathbf{x}^{(\lambda_2)}=\alpha(2, 5)$, где $\alpha\neq 0$. **2.170.** $\lambda_1=\lambda_2=\lambda_3=-1$; собственные векторы имеют вид $\mathbf{x}=\alpha(1, 1, -1)$, $\alpha\neq 0$. **2.171.** $\lambda_1=\lambda_2=\lambda_3=2$; собственные векторы имеют вид $\mathbf{x}=\alpha_1(1, 2, 0)+\alpha_2(0, 0, 1)$, где $\alpha_1^2+\alpha_2^2\neq 0$. **2.172.** $\lambda_1=1$, $\lambda_2=\lambda_3=0$; собственные векторы $\mathbf{x}^{(\lambda_1)}=\alpha(1,1,1)$ и $\mathbf{x}^{(\lambda_2)}=\alpha(1, 2, 3)$, где $\alpha\neq 0$. **2.173.** $\lambda_1=3$, $\lambda_2=\lambda_3=-1$; собственные векторы $\mathbf{x}^{(\lambda_1)}=\alpha(1,2,2)$, и $\mathbf{x}^{(\lambda_2)}=\alpha(1, 2, 1)$, где $\alpha\neq 0$, для $\lambda=-1$. **2.174.** $\lambda_1=-1$, $\lambda_2=2$, $\lambda_3=-2$; собственные векторы $\mathbf{x}^{(\lambda_1)}=\alpha(1,1,1)$, $\mathbf{x}^{(\lambda_2)}=\alpha(4,1,7)$ и $\mathbf{x}^{(\lambda_3)}=\alpha(2,3,3)$, где $\alpha\neq 0$. **2.179.** $\begin{pmatrix}3 & 6\\ -1 & -3\end{pmatrix}$. **2.180.** $\begin{pmatrix}-83 & -59 & -45\\ 107 & 83 & 67\\ 14 & 10 & 3\end{pmatrix}$.

2.181. $\begin{pmatrix}4 & -2 & 2\\ 2 & -1 & 1\\ 1 & 2 & 1\end{pmatrix}$. **2.182.** Поворот на угол φ вокруг начала координат по часовой стрелке. **2.186.** $E_1=\begin{pmatrix}2/3\\ 2/3\\ 1/3\end{pmatrix}$, $E_2=\begin{pmatrix}1/3\\ -2/3\\ 2/3\end{pmatrix}$, $E_3=\begin{pmatrix}-2/3\\ 1/3\\ 2/3\end{pmatrix}$, $D=\begin{pmatrix}9 & 0 & 0\\ 0 & -9 & 0\\ 0 & 0 & 18\end{pmatrix}$. **2.187.** $E_1=\begin{pmatrix}1/\sqrt{2}\\ 1/\sqrt{2}\\ 0\end{pmatrix}$,

$E_2=\begin{pmatrix}1/\sqrt{18}\\ -1/\sqrt{18}\\ -4/\sqrt{18}\end{pmatrix}$, $E_3=\begin{pmatrix}2/3\\ -2/3\\ 2/3\end{pmatrix}$, $D=\begin{pmatrix}9 & 0 & 0\\ 0 & 9 & 0\\ 0 & 0 & 27\end{pmatrix}$. **2.188.** $E_1=\begin{pmatrix}1/\sqrt{2}\\ -1/\sqrt{2}\\ 0\end{pmatrix}$, $E_2=\begin{pmatrix}1/\sqrt{3}\\ 1/\sqrt{3}\\ -1/\sqrt{3}\end{pmatrix}$,

$E_3 = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{6} \\ 1/\sqrt{6} \\ 2/\sqrt{6} \end{pmatrix}$, $D = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix}$. **2.189.** $\lambda_1 = -6$, $\lambda_1 = -1$; $\mathbf{x}_1 = \{1, -1\}$, $\mathbf{x}_2 = \{2, 5\}$. **2.190.** $\lambda_1 = 1$, $\lambda_{2,3} = 2$; $\mathbf{x}_1 = \{1, 1, 1\}$, $\mathbf{x}_2 = \{1, 1, 0\}$, $\mathbf{x}_3 = \{1, 0, -3\}$. **2.191.** $\lambda_{1,2,3} = 2$, $\lambda_4 = -2$; $\mathbf{x}_1 = \{1, 1, 0, 0\}$, $\mathbf{x}_2 = \{1, 0, 1, 0\}$, $\mathbf{x}_3 = \{1, 0, 0, 1\}$, $\mathbf{x}_4 = \{1, -1, -1, -1\}$. **2.201.** $A = \begin{pmatrix} 6 & 0 & -4 \\ 0 & 6 & 2 \\ -4 & 2 & 6 \end{pmatrix}$.

2.202. $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$. **2.203.** $A' = \begin{pmatrix} 3 & -1 & -1 & -1 \\ 1 & 3 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & -3 \\ -1 & -1 & 3 & -1 \end{pmatrix}$. **2.204.** $A' = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2 & -2 \end{pmatrix}$. **2.206.** Положительно определенная. **2.207.** Отрицательно определенная. **2.208.** Общего вида. **2.209.** Отрицательно определенная. **2.210.** Положительно определенная. **2.211.** Общего вида. **2.212.** Положительно определенная. **2.213.** Эллипс $\frac{x'^2}{2} + y'^2 = 1$, $O' = (-4/5,\ 2/5)$, $\mathbf{e}_1 = \frac{1}{\sqrt{5}}\mathbf{i} + \frac{2}{\sqrt{5}}\mathbf{j}$, $\mathbf{e}_2 = -\frac{2}{\sqrt{5}}\mathbf{i} + \frac{1}{\sqrt{5}}\mathbf{j}$. **2.214.** Парабола $y'^2 = 4\sqrt{2}x'$, $O' = (2, 1)$, $\mathbf{e}_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}\mathbf{i} + \frac{1}{\sqrt{2}}\mathbf{j}$, $\mathbf{e}_2 = -\frac{1}{\sqrt{2}}\mathbf{i} + \frac{1}{\sqrt{2}}\mathbf{j}$. **2.215.** Гипербола $\frac{x'^2}{4} - \frac{y'^2}{9} = 1$, $O' = (1,\ 1)$, $\mathbf{e}_1 = \frac{3}{\sqrt{13}}\mathbf{i} + \frac{2}{\sqrt{13}}\mathbf{j}$, $\mathbf{e}_2 = -\frac{2}{\sqrt{13}}\mathbf{i} + \frac{3}{\sqrt{13}}\mathbf{j}$. **2.216.** Параллельные прямые $x' = \pm\frac{\sqrt{5}}{2}$, $O' = (-3/5,\ -3/10)$, $\mathbf{e}_1 = -\frac{2}{\sqrt{5}}\mathbf{i} + \frac{1}{\sqrt{5}}\mathbf{j}$, $\mathbf{e}_2 = \frac{1}{\sqrt{5}}\mathbf{i} + \frac{2}{\sqrt{5}}\mathbf{j}$, или, в старых переменных, $2x - y + 1 = 0$, $2x - y - 4 = 0$. **2.217.** Эллипс $\frac{x'^2}{35/6} + \frac{y'^2}{35/36} = 1$, $O' = (7/6,\ 1/3)$, $\mathbf{e}_1 = \frac{2}{\sqrt{5}}\mathbf{i} - \frac{1}{\sqrt{5}}\mathbf{j}$, $\mathbf{e}_2 = \frac{1}{\sqrt{5}}\mathbf{i} + \frac{2}{\sqrt{5}}\mathbf{j}$. **2.218.** Парабола $y'^2 = \frac{1}{\sqrt{5}}x'$, $O' = (3, 2)$, $\mathbf{e}_1 = -\frac{2}{\sqrt{5}}\mathbf{i} - \frac{1}{\sqrt{5}}\mathbf{j}$, $\mathbf{e}_2 = \frac{1}{\sqrt{5}}\mathbf{i} - \frac{2}{\sqrt{5}}\mathbf{j}$. **2.219.** Эллипсоид $\frac{x'^2}{2} + \frac{y'^2}{1} + \frac{z'^2}{2/3} = 1$, $O' = (1, 2, -1)$, $\mathbf{e}_1 = \frac{1}{3}\mathbf{i} + \frac{2}{3}\mathbf{j} + \frac{2}{3}\mathbf{k}$, $\mathbf{e}_2 = \frac{2}{3}\mathbf{i} + \frac{1}{3}\mathbf{j} - \frac{2}{3}\mathbf{k}$, $\mathbf{e}_3 = \frac{2}{3}\mathbf{i} - \frac{2}{3}\mathbf{j} + \frac{1}{3}\mathbf{k}$. **2.220.** Двуполостной гиперболоид $\frac{x'^2}{4/5} + \frac{y'^2}{4/5} - \frac{z'^2}{4/25} = -1$, $O' = (0, 1, -2/5)$, $\mathbf{e}_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}\mathbf{i} - \frac{1}{\sqrt{2}}\mathbf{j}$, $\mathbf{e}_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}\mathbf{i} + \frac{1}{\sqrt{2}}\mathbf{j}$, $\mathbf{e}_3 = \mathbf{k}$. **2.221.** Эллиптический параболоид $\frac{x'^2}{5\sqrt{2}/4} + \frac{y'^2}{\sqrt{2}/2} = 2z'$, $O' = (-1/40,\ -19/40,\ 1/2)$, $\mathbf{e}_1 = \frac{1}{\sqrt{6}}\mathbf{i} + \frac{1}{\sqrt{6}}\mathbf{j} - \frac{2}{\sqrt{6}}\mathbf{k}$, $\mathbf{e}_2 = \frac{1}{\sqrt{3}}\mathbf{i} + \frac{1}{\sqrt{3}}\mathbf{j} + \frac{1}{\sqrt{3}}\mathbf{k}$, $\mathbf{e}_3 = \frac{1}{\sqrt{2}}\mathbf{i} - \frac{1}{\sqrt{2}}\mathbf{j}$. **2.222.** Параболический цилиндр $y'^2 = \frac{4}{3}x'$, $O' = (2,\ 1,\ -1)$, $\mathbf{e}_1 = \frac{2}{3}\mathbf{i} + \frac{2}{3}\mathbf{j} + \frac{1}{3}\mathbf{k}$, $\mathbf{e}_2 = \frac{2}{3}\mathbf{i} - \frac{1}{3}\mathbf{j} - \frac{2}{3}\mathbf{k}$, $\mathbf{e}_3 = \frac{1}{3}\mathbf{i} - \frac{2}{3}\mathbf{j} + \frac{2}{3}\mathbf{k}$. **2.223.** Эллиптический цилиндр $\frac{x'^2}{2} + \frac{y'^2}{1} = 1$, $O' = (0, 1, 0)$, $\mathbf{e}_1 = \frac{1}{\sqrt{3}}\mathbf{i} + \frac{1}{\sqrt{3}}\mathbf{j} - \frac{1}{\sqrt{3}}\mathbf{k}$, $\mathbf{e}_2 = \frac{1}{\sqrt{6}}\mathbf{i} - \frac{2}{\sqrt{6}}\mathbf{j} - \frac{1}{\sqrt{6}}\mathbf{k}$, $\mathbf{e}_3 = \frac{1}{\sqrt{2}}\mathbf{i} + \frac{1}{\sqrt{2}}\mathbf{k}$. **2.224.** Однополостной гиперболоид $\frac{x'^2}{1/3} + \frac{y'^2}{1/6} - \frac{z'^2}{1/2} = 1$, $O' = \left(-\frac{1}{3}, -\frac{2}{3}, \frac{2}{3}\right)$, $\mathbf{e}_1 = \frac{1}{\sqrt{3}}\mathbf{i} - \frac{1}{\sqrt{3}}\mathbf{j} + \frac{1}{\sqrt{3}}\mathbf{k}$, $\mathbf{e}_2 = \frac{1}{\sqrt{6}}\mathbf{i} + \frac{2}{\sqrt{6}}\mathbf{j} + \frac{1}{\sqrt{6}}\mathbf{k}$, $\mathbf{e}_3 = \frac{1}{\sqrt{2}}\mathbf{i} - \frac{1}{\sqrt{2}}\mathbf{k}$. **2.225.** Гиперболический цилиндр $\frac{x'^2}{1/3} - \frac{y'^2}{1/3} = 1$, $O' = \left(\frac{1}{6}, \frac{1}{3}, -\frac{5}{6}\right)$, $\mathbf{e}_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}\mathbf{i} - \frac{1}{\sqrt{2}}\mathbf{k}$, $\mathbf{e}_2 = \frac{1}{\sqrt{3}}\mathbf{i} - \frac{1}{\sqrt{3}}\mathbf{j} + \frac{1}{\sqrt{3}}\mathbf{k}$, $\mathbf{e}_3 = \frac{1}{\sqrt{6}}\mathbf{i} + \frac{2}{\sqrt{6}}\mathbf{j} + \frac{1}{\sqrt{6}}\mathbf{k}$.

ГЛАВА 3

3.1. $R=\sqrt{\frac{3V}{\pi}}$, $D=(0,+\infty)$. **3.2.** $S=\operatorname{tg}\alpha$, $D=(0,\pi/2)$. **3.3.** $S=\sqrt[3]{36\pi V^2}$. **3.4.** $V=\frac{S^2\sqrt{16\pi^2-S^2}}{24\pi^2}$. **3.5.** $S=\sqrt{(a-vt)^2+(b-vt)^2}$. **3.6.** $v_{\text{ср}}=2\frac{Sv}{S+l}$. **3.7.** 0, 1, 4, 9. **3.8.** 1, 0,8, 0, $\sqrt{0{,}75}$. **3.9.** 2, 1, 1,5, 2, 3. **3.10.** 0, 0, 0, $(7-2\pi)^2$. **3.11.** а) x^2; б) x^2-2x+1; в) x^2-1; г) $\frac{1}{x^2}$; д) $\frac{1}{x^2}$; е) $4x^2$; ж) $2x^2$. **3.12.** а) $\frac{1}{3x}$; б) $\frac{1}{3x+6}$; в) $\frac{4}{3x+6}$; г) $2-\frac{4}{3x+6}$. **3.13.** $(-\infty, 0{,}75]$. **3.14.** $(-\infty,-1)\cup(1,+\infty)$. **3.15.** $[0, 3]$. **3.16.** $(-\infty,1)\cup(1,5)\cup$ $\cup(5,+\infty)$. **3.17.** $[0, 1]$. **3.18.** $(-\infty,-3)\cup(-3,0]$. **3.19.** $[-2, 1)$. **3.20.** $(-\infty,2)\cup(2,+\infty)$. **3.21.** $D=\bigcup\limits_{k\in\mathbb{Z}}[2\pi k,\pi(2k+1)]$. **3.22.** $D=\bigcup\limits_{k\in\mathbb{Z}}\left(-\frac{\pi}{3}+2\pi k,\frac{\pi}{3}+2\pi k\right)$. **3.23.** $D=(-\infty,0]$.

3.24. $D=\bigcup\limits_{k\in\mathbb{N}\cup\{0\}}[4\pi^2k^2,\pi^2(2k+1)^2]$. **3.25.** $D=\mathbb{R}$, $E=[2,+\infty)$. **3.26.** $D=[1-\sqrt{6},1+\sqrt{6}]$, $E=[0,\sqrt{6}]$. **3.27.** $D=\mathbb{R}$, $E=(0,1]$. **3.28.** $D=(-\infty,-2)\cup(2,+\infty)$, $E=\mathbb{R}$. **3.29.** $D=(-4,4)$, $E=[-4,+\infty)$. **3.30.** $D=\mathbb{R}$, $E=[-\sqrt{2},\sqrt{2}]$. **3.31.** $f(g(x))=2x^3-1$; $f(f(x))=4x-3$; $g(f(x))=(2x-1)^3$; $g(g(x))=x^9$. **3.32.** $f(g(x))=(\sqrt{x}+1)^2$; $f(f(x))=(x^2+2x+2)^2$; $g(f(x))=|x+1|$; $g(g(x))=\sqrt[4]{x}$. **3.33.** Четная. **3.34.** Нечетная. **3.35.** Ни четная, ни нечетная. **3.36.** Ни четная, ни нечетная. **3.37.** Нечетная. **3.38.** Нечетная. **3.39.** $T=2\pi/3$. **3.40.** $T=\pi$. **3.41.** $T=\pi$. **3.42.** $T=2\pi$. **3.43.** Непериодическая. **3.44.** Непериодическая. **3.45.** $f^{-1}(x)=\frac{x^3-7}{2}$, $D(f^{-1})=\mathbb{R}$. **3.46.** $f^{-1}(x)=\frac{10-x^3}{3}$, $D(f^{-1})==\mathbb{R}$. **3.47.** $f^{-1}(x)=\frac{5x+2}{1-3x}$, $D(f^{-1})=(-\infty,1/3)\cup(1/3,+\infty)$. **3.48.** $f^{-1}(x)=\frac{x+3}{x-2}$, $D(f^{-1})=(-\infty,2)\cup(2,+\infty)$.

3.49. $f^{-1}(x)=\frac{3-(x-1)^2}{2}$, $D(f^{-1})=[1,+\infty)$. **3.50.** $f^{-1}(x)=\frac{(x+1)^2+5}{3}$, $D(f^{-1})=[-1,+\infty)$. **3.51.** $f^{-1}(x)=\log_2 x+2$, $D(f^{-1})=(0,+\infty)$. **3.52.** $f^{-1}(x)=5-2^{-x}$, $D(f^{-1})=\mathbb{R}$.

3.53. $f^{-1}(x)=\begin{cases}\sqrt[3]{x}, & -\infty<x<0,\\ \sqrt{x-1}, & 1\le x<+\infty.\end{cases}$ **3.54.** а) $f^{-1}(x)=-\sqrt{x+1}$, $D(f^{-1})=[-1,+\infty)$; б) $f^{-1}(x)=\sqrt{x+1}$, $D(f^{-1})=[-1,+\infty)$. **3.55.** а) $f^{-1}(x)=-\sqrt{4-x}-1$, $D(f^{-1})=(-\infty,4]$; б) $f^{-1}(x)=\sqrt{4-x}-1$, $D(f^{-1})=(-\infty,4]$. **3.56.** а) $f^{-1}(x)=\arccos x$, $D(f^{-1})=[-1,1]$; б) $f^{-1}(x)=2\pi-\arccos x$, $D(f^{-1})=[-1,1]$. **3.57.** а) $f^{-1}(x)=\operatorname{arctg} x$, $D(f^{-1})=(-\infty,+\infty)$; б) $f^{-1}(x)=\pi+\operatorname{arctg} x$, $D(f^{-1})=(-\infty,+\infty)$. **3.58.** $f(u)=u^3$, $u=\sin x$. **3.59.** $f(u)=\sqrt{u}$, $u=v^2$, $v=\sin x$. **3.60.** $f(u)=2^u$, $u=\sin v$, $v=x^2$. **3.61.** $f(u)=u^2$, $u=\sin v$, $v=2^x$. **3.62.** Парабола $y=x^2$, растянутая в 2 раза вдоль оси Oy, смещенная вдоль оси Ox влево на 1 и вдоль оси Oy вниз на 1. **3.63.** Парабола $y=x^2$, сжатая в 2 раза вдоль оси Oy, отраженная относительно оси Ox, смещенная вдоль оси Ox вправо на 1 и вдоль оси Oy вверх на 1. **3.64.** Парабола $y=x^2$, сжатая в 3 раза вдоль оси Oy, отраженная относительно оси Ox, смещенная вдоль оси Ox вправо на 2 и вдоль оси Oy вверх на 3. **3.65.** Парабола $y=x^2$, растянутая в 2 раза вдоль оси Oy, смещенная вдоль оси Ox влево на 2 и вдоль оси Oy вверх на 1. **3.66.** Гипербола $y=1/x$, растянутая в 2 раза вдоль оси Oy, смещенная вдоль оси Ox вправо на 1 и вдоль оси Oy вниз на 1. **3.67.** Гипербола $y=1/x$, растянутая в 3 раза вдоль оси Oy, отраженная относительно оси Ox, смещенная вдоль оси

Ox влево на 3 и вдоль оси Oy вверх на 2. **3.68.** Гипербола $y = 1/x$, растянутая в 7 раз вдоль оси Oy, смещенная вдоль оси Ox вправо на 2 и вдоль оси Oy вверх на 2. **3.69.** Гипербола $y = 1/x$, растянутая в 7 раз вдоль оси Oy, смещенная вдоль оси Ox вправо на 2/3 и вдоль оси Oy вниз на 1/3. **3.70.** Синусоида $y = \sin x$, растянутая в 2 раза вдоль оси Ox и в 2 раза вдоль оси Oy, смещенная вдоль оси Ox влево на $\pi/2$ и вдоль оси Oy вверх на 2. **3.71.** Косинусоида $y = \cos x$, сжатая в 2 раза вдоль оси Ox и в 2 раза вдоль оси Oy, отраженная относительно оси Ox, смещенная вдоль оси Ox влево на $\pi/6$ и вдоль оси Oy вниз на 1. **3.72.** График показательной функции $y = 2^x$, сжатый в 3 раза вдоль оси Ox, растянутый в 2 раза вдоль оси Oy, смещенный вдоль оси Oy вниз на 1. **3.73.** График логарифмической функции $y = \log_{1/2}x$, смещенный вдоль оси Ox влево на 2 и вдоль оси Oy вниз на 2. **3.74.** График обратной тригонометрической функции $y = \arcsin x$, сжатый в 3 раза вдоль оси Ox, растянутый в 2 раза вдоль оси Oy, отраженный относительно оси Ox, смещенный вдоль оси Ox влево на 1. **3.75.** График обратной тригонометрической функции $y = \arccos x$, сжатый в 2 раза вдоль оси Ox, сжатый в 2 раза вдоль оси Oy, смещенный вдоль оси Ox вправо на 1. **3.76.** График обратной тригонометрической функции $y = \operatorname{arctg} x$, сжатый в 4 раза вдоль оси Ox, растянутый в 3 раза вдоль оси Oy, отраженный относительно оси Ox, смещенный вдоль оси Ox влево на 1/2. **3.77.** График обратной тригонометрической функции $y = \operatorname{arcctg} x$, сжатый в 2 раза вдоль оси Ox, растянутый в 2 раза вдоль оси Oy, отраженный относительно оси Oy, смещенный вдоль оси Ox вправо на 1.

3.78.[1] $f(x)=\begin{cases}-3x, & -\infty<x<-2,\\ 4-x, & -2\le x<1,\\ 3x, & 1\le x<+\infty.\end{cases}$ **3.79.** $f(x)=\begin{cases}(x-1)^2-4, & x\in(-\infty,-1)\cup(3,+\infty),\\ 4-(x-1)^2, & x\in[-1,3].\end{cases}$

3.80. $f(x)=\begin{cases}-\sin x, & x\in(-\infty,0),\\ \sin x, & x\in[0,+\infty).\end{cases}$ **3.81.** $f(x)=\begin{cases}2-\dfrac{7}{x+2}, & x\in(-\infty,-2)\cup[3/2,+\infty),\\ -2+\dfrac{7}{x+2}, & x\in(-2,\,3/2).\end{cases}$

3.82. $f(x)=\begin{cases}\log_2(x-2), & x\in(2,+\infty),\\ \log_2(-x-2), & x\in(-\infty,-2).\end{cases}$ **3.83.** $f(x)=\begin{cases}\log_{0,5}(x-1), & x\in(1,\,2),\\ -\log_{0,5}(x-1), & x\in[2,+\infty).\end{cases}$

3.84. Прямая $y = n$ при $x \in [n,\, n+1)$, $n \in \mathbb{Z}$. **3.85.** Прямая $y = x - n$ при $x \in [n,\, n+1)$, $n \in \mathbb{Z}$. **3.86.** При $x \in (-\infty,\, 0)$ прямая $y = -1$, при $x \in (0,\, +\infty)$ прямая $y = 1$, при $x = 0$ $y = 0$.

3.87. $f(x) = |x|$. **3.88.** $f(x)=\begin{cases}-1, & x\in(\pi/2+2\pi k,\, 3\pi/2+2\pi k),\ k\in\mathbb{Z},\\ 0, & x=\pi/2+\pi k,\ k\in\mathbb{Z},\\ 1, & x\in(-\pi/2+2\pi k,\, \pi/2+2\pi k),\ k\in\mathbb{Z}.\end{cases}$ **3.89.** Прямые $y = x$ и $y = -x$. **3.90.** Окружность радиуса 3 с центром в точке $(-3,\, 0)$. **3.91.** Квадрат с вершинами в точках $(1,\, 0)$, $(0,\, 1)$, $(-1,\, 0)$, $(0,\, -1)$. **3.92.** В верхней полуплоскости кривая $y = |x^2 - 2x - 3|$ (см. задачу 3.79), в нижней полуплоскости ее отражение относительно оси абсцисс. **3.93.** Окружность радиуса $\sqrt{17}$ с центром в точке $(-2,\, 3)$. **3.94.** В первой четверти два луча $y = x + 1$ и $y = x - 1$ и их отражения относительно осей и начала координат. **3.95.** $\frac{1}{5}, \frac{3}{8}, \frac{5}{11}, \frac{7}{14}, \frac{9}{17}$. **3.96.** $0, \frac{3}{2}, \frac{2}{3}, \frac{5}{4}, \frac{4}{5}$. **3.97.** $\frac{\sqrt{2}}{2}, 1, \frac{\sqrt{2}}{2}, 0, -\frac{\sqrt{2}}{2}$.

3.98. 2, 0, 6, 0, 8. **3.99.** $x_n=\dfrac{(-1)^n}{n+1}$. **3.100.** $x_n=\dfrac{n-1}{n}$. **3.101.** $x_n=\dfrac{2n}{2n-1}$. **3.102.** $x_n = 1 + (-1)^n$. **3.103.** $x_n = n\sin\dfrac{\pi n}{2}$. **3.104.** $x_n = n^{(-1)^n}$. **3.113.** 4/3. **3.114.** 1. **3.115.** 5/2. **3.116.** 1.

---

[1] Здесь и далее ко всем аналогичным задачам этого параграфа в ответе указывается тот вид исходной функции, из которого легко получается ее график.

3.117. –9. **3.118.** 7/4. **3.119.** 1. **3.120.** 5/2. **3.121.** –8/3. **3.122.** 1. **3.123.** 0. **3.124.** –5/6. **3.125.** Является. **3.126.** Является. **3.127.** Не является. **3.128.** Не является. **3.129.** Является. **3.130.** Не является. **3.131.** 0. **3.132.** 0. **3.133.** ∞. **3.134.** 0. **3.135.** ∞. **3.136.** ∞. **3.141.** Число A есть предел функции $f(x)$ при x, стремящемся к $-\infty$, если для любого числа $\varepsilon > 0$ найдется число $\delta(\varepsilon) > 0$ такое, что для всех x, удовлетворяющих неравенству $x < -\delta(\varepsilon)$, выполняется неравенство $|f(x) - A| < \varepsilon$. **3.142.** Число -1 есть предел функции $f(x)$ при x, стремящемся к $+\infty$, если для любого числа $\varepsilon > 0$ найдется число $\delta(\varepsilon) > 0$ такое, что для всех x, удовлетворяющих неравенству $x > \delta(\varepsilon)$, выполняется неравенство $|f(x) + 1| < \varepsilon$. **3.143.** Число 5 есть предел функции $f(x)$ при x, стремящемся к ∞, если для любого числа $\varepsilon > 0$ найдется число $\delta(\varepsilon) > 0$ такое, что для всех x, удовлетворяющих неравенству $|x| > \delta(\varepsilon)$, выполняется неравенство $|f(x) - 5| < \varepsilon$. **3.144.** Функция $f(x)$ стремится к $-\infty$ при x, стремящемся к $+\infty$, если для любого числа $\mathrm{E} > 0$ найдется число $\delta(\mathrm{E}) > 0$ такое, что для всех x, удовлетворяющих неравенству $x > \delta(\mathrm{E})$, выполняется неравенство $f(x) < -\mathrm{E}$. **3.145.** Функция $f(x)$ стремится к $+\infty$ при x, стремящемся к 3, если для любого числа $\mathrm{E} > 0$ найдется число $\delta(\mathrm{E}) > 0$ такое, что для всех x, удовлетворяющих неравенству $0 < |x - 3| < \delta(\mathrm{E})$, выполняется неравенство $f(x) > \mathrm{E}$. **3.146.** Функция $f(x)$ стремится к ∞ при x, стремящемся к ∞, если для любого числа $\mathrm{E} > 0$ найдется число $\delta(\mathrm{E}) > 0$ такое, что для всех x, удовлетворяющих неравенству $|x| > \delta(\mathrm{E})$, выполняется неравенство $|f(x)| > \mathrm{E}$. **3.150.** Число 2 есть предел функции $f(x)$ при x, стремящемся к 1 слева, если для любого числа $\varepsilon > 0$ найдется число $\delta(\varepsilon) > 0$ такое, что для всех x, удовлетворяющих неравенству $-\delta(\varepsilon) < x - 1 < 0$, выполняется неравенство $|f(x) - 2| < \varepsilon$. **3.151.** Число 3 есть предел функции $f(x)$ при x, стремящемся к 2 справа, если для любого числа $\varepsilon > 0$ найдется число $\delta(\varepsilon) > 0$ такое, что для всех x, удовлетворяющих неравенству $0 < x - 2 < \delta(\varepsilon)$, выполняется неравенство $|f(x) - 3| < \varepsilon$. **3.152.** Функция $f(x)$ стремится к $-\infty$ при x, стремящемся к -1 справа, если для любого числа $\mathrm{E} > 0$ найдется число $\delta(\mathrm{E}) > 0$ такое, что для всех x, удовлетворяющих неравенству $0 < x + 1 < \delta(\mathrm{E})$, выполняется неравенство $f(x) < -\mathrm{E}$. **3.153.** Функция $f(x)$ стремится к ∞ при x, стремящемся к 4 слева, если для любого числа $\mathrm{E} > 0$ найдется число $\delta(\mathrm{E}) > 0$ такое, что для всех x, удовлетворяющих неравенству $-\delta(\mathrm{E}) < x - 4 < 0$, выполняется неравенство $|f(x)| > \mathrm{E}$. **3.154.** 0. **3.155.** 4/3. **3.156.** ∞. **3.157.** $+\infty$. **3.158.** 0. **3.159.** 1/3. **3.160.** –3. **3.161.** 0. **3.162.** ∞. **3.163.** 2/5. **3.164.** 122. **3.165.** –3. **3.166.** 1. **3.167.** 1/2. **3.168.** –3/4. **3.169.** 1. **3.170.** 5/7. **3.171.** 1/5. **3.172.** 3. **3.173.** 1/3. **3.174.** ∞. **3.175.** 0. **3.176.** 0. **3.177.** 3/8. **3.178.** 0. **3.179.** 1/4. **3.180.** 1/324. **3.181.** 1/4. **3.182.** 135/64. **3.183.** 1/6. **3.184.** 1/2. **3.185.** 1/2. **3.186.** 0. **3.187.** 4/3. **3.188.** 1/3. **3.189.** 0. **3.190.** 1. **3.191.** 1/2. **3.192.** 4. **3.193.** 3/8. **3.194.** 3/5. **3.195.** 3/5. **3.196.** –3. **3.197.** 1/6. **3.198.** 1/3. **3.199.** $-\sqrt{3}$. **3.200.** 2. **3.201.** 4. **3.202.** 0. **3.203.** 2. **3.204.** 0. **3.209.** e^{16}. **3.210.** $e^{68/5}$. **3.211.** e^{20}. **3.212.** e^{-14}. **3.213.** e^{1/π^2}. **3.214.** $\sqrt[3]{e}$. **3.215.** e^{-1}. **3.216.** e^{-1}. **3.217.** $e^{-1/2}$. **3.218.** $+\infty$. **3.219.** 2. **3.220.** 1. **3.221.** $a - b$. **3.222.** $a^b \ln a$. **3.223.** $\frac{1}{10\ln 10}$. **3.224.** –1/2. **3.225.** $\ln a$. **3.226.** $1/e$. **3.227.** 1/10. **3.228.** –1/8. **3.229.** $e^{1/e}$. **3.230.** +1, –1. **3.231.** $-\infty$, $+\infty$. **3.232.** $+\infty$, 0. **3.233.** 2, –2. **3.234.** 1, –1. **3.235.** $-\pi/2$, $\pi/2$. **3.236.** 2. **3.237.** 2. **3.238.** 1/2. **3.239.** 1/2. **3.240.** 2. **3.241.** 1. **3.242.** 1/2. **3.243.** 2/3. **3.244.** 2. **3.245.** 1. **3.246.** 1. **3.247.** 3. **3.252.** 0,98. **3.253.** 1,05. **3.254.** 4,9. **3.255.** 4,0625. **3.256.** 1,2. **3.257.** 0,92. **3.258.** 3/8. **3.259.** –1/10. **3.260.** 4/3. **3.261.** 1. **3.262.** 1/2. **3.263.** 2. **3.264.** 540. **3.265.** $\frac{1}{5\ln 10}$. **3.266.** 3. **3.267.** 2. **3.268.** 3/4. **3.269.** 1. **3.270.** 2. **3.271.** 16/15. **3.272.** 0. **3.273.** 0. **3.274.** 2. **3.275.** $\sqrt{a}$. **3.276.** Фундаментальная. **3.277.** Нефундаментальная. **3.278.** Нефундаментальная. **3.279.** Фундаментальная. **3.280.** 1/2. **3.281.** 1. **3.284.** 4. **3.285.** 1/2. **3.286.** –6. **3.287.** 0. **3.292.** Функция $f(x)$ не является равномерно непрерывной на множестве D, если существует $\varepsilon > 0$ такое, что для любого $\delta > 0$ найдутся точки x' и $x'' \in D$, удовлетворяющие неравенству $|x' - x''| < \delta$, но выполняется неравенство $|f(x') - f(x'')| \geq \varepsilon$. **3.295.** $x = 0$, $x = 1$ — точки разрыва второго рода. **3.296.** $x = 1$ — точка устранимого разрыва, $x = -3$ — точка разрыва второго рода. **3.297.** $x = 0$ — точка устранимого разрыва. **3.298.** $x = 0$ — точка устранимого разрыва, $x = 1$ — точка разрыва второго рода. **3.299.** $x = 2$, $x = -2$ — точки разрыва второго рода. **3.300.** $x = 0$ — точка устранимого разрыва. **3.301.** $x = 0$ — точка разрыва первого рода. **3.302.** $x = 0$ — точка устранимого разрыва. **3.303.** $x = 2$ — точка устранимого разрыва. **3.304.** $x = \pi/2 + \pi n$, $n \in \mathbb{Z}$, — точки разрыва первого рода. **3.305.** $2x$.

3.306. $3x^2$. **3.307.** $\dfrac{1}{2\sqrt{x}}$. **3.308.** $\dfrac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}$. **3.309.** $-\sin x$. **3.310.** $1/\cos^2 x$. **3.311.** $2^x \ln 2 + 2$.

3.312. $3^x \ln 3 + 3$. **3.313.** $\dfrac{1}{x\ln 2}$. **3.314.** $\dfrac{1}{x\ln 10}$. **3.315.** $f'_-(1) = -1$, $f'_+(1) = 1$. **3.316.** $f'_-(1) = 1$, $f'_+(1) = 0$. **3.317.** $f'_-(0) = 0$, $f'_+(0) = 0$. **3.318.** $f'_-(0) = -1$, $f'_+(0) = 1$. **3.319.** 0. **3.321.** $-2 + 3x^2$.

3.322. $\dfrac{1}{\sqrt{x}} - \dfrac{1}{x^2}$. **3.323.** $\dfrac{x^2 - 2x + 1}{2\sqrt{x^5}}$. **3.324.** $-\dfrac{(x+1)^2}{x^4}$. **3.325.** $\cos x - x\sin x$.

3.326. $\dfrac{5}{3}\sqrt[3]{x^2} \cdot \operatorname{tg} x + \dfrac{\sqrt[3]{x^5}}{\cos^2 x}$. **3.327.** $\dfrac{\sin x - 3x\cos x}{3\sqrt[3]{x^2}\sin^2 x}$. **3.328.** $\dfrac{1 - 2x \operatorname{arctg} x}{(1+x^2)^2}$.

3.329. $-\dfrac{3x^2 + 3}{(x^3 + 3x - 1)^2}$. **3.330.** $-\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}\arcsin^2 x}$. **3.331.** $\dfrac{-x^4 - 4x^2 + 1}{(x^3 - x)^2}$.

3.332. $\dfrac{2}{\sqrt{x}(2 - \sqrt{x})^2}$. **3.333.** $3x^2 \ln x + x^2 + 2^x \ln 2$. **3.334.** $\sqrt[3]{x}\left(\log_3 x + \dfrac{3x}{4\ln 3}\right) - \dfrac{e^x(4x-1)}{4\sqrt[4]{x^5}}$.

3.335. $4^x \log_4 e \cdot \operatorname{ctg} x - (a + 4^x)/\sin^2 x$. **3.336.** $-\dfrac{x\lg x + \sqrt{1-x^2}\arccos x \cdot \lg e}{x\sqrt{1-x^2}\lg^2 x}$. **3.337.** $20(2x+1)^9$.

3.338. $-\dfrac{9}{2}\sqrt{1-3x}$. **3.339.** $\dfrac{2^x \ln 2}{\sqrt{1-2^{2x}}}$. **3.340.** $\dfrac{1}{x^2+1}$. **3.341.** $-\dfrac{2x}{(1+x^2)\sqrt{1-x^4}}$.

3.342. $\dfrac{\sin x}{2\sqrt{1-\cos x}}$. **3.343.** $-\dfrac{1}{2\sqrt{-x}\sqrt{x+1}}$. **3.344.** $\dfrac{3\sqrt{x}}{2(1+x^3)}$. **3.345.** $\cos^3 x - 3x\cos^2 x \cdot \sin x$.

3.346. $\dfrac{3x^2 \sin x^2 - 2x^4 \cos x^2}{\sin^2 x^2}$. **3.347.** $2^{x/\ln x} \ln 2 \dfrac{\ln x - 1}{\ln^2 x}$. **3.348.** $\dfrac{3}{2} \cdot 3^{\sqrt{\sin^3 x}} \cdot \ln 3 \cdot \sqrt{\sin x} \cdot \cos x$.

3.349. $-\dfrac{1}{4\sqrt{\operatorname{arcctg}\sqrt{x}} \cdot (1+x)\sqrt{x}}$. **3.350.** $\dfrac{1}{2\sqrt{\log_3 \ln x} \cdot \ln 3 \cdot \ln x \cdot x}$.

3.351. $\dfrac{\sqrt{3}}{2\sqrt{\log_3 \operatorname{tg}\ln x} \cdot \operatorname{tg}\ln x \cdot \ln 3 \cdot \cos^2 \ln x \cdot x}$. **3.352.** $-2xe^{-x^2}$. **3.353.** $1/\cos x$.

3.354. $\dfrac{4\sin^3 \ln(2^{x^2} + x)\cos\ln(2^{x^2} + x)}{2^{x^2} + x}(2x\,2^{x^2}\ln 2 + 1)$. **3.355.** $\dfrac{1}{\sqrt{a^2 + x^2}}$. **3.356.** $\dfrac{2}{1-x^2}$.

3.357. $\dfrac{x\arcsin x}{\sqrt{(1-x^2)^3}}$. **3.358.** $\dfrac{x^2 - 1}{\sqrt{3 - 2x - x^2}}$. **3.359.** 0, $x \in (-\infty, 1) \cup (1, 3) \cup (3, +\infty)$.

3.360. $2x - 4$, $x \in (-\infty, 1) \cup (3, +\infty)$; $4 - 2x$, $x \in (1, 3)$. **3.361.** $\dfrac{1}{x}$. **3.362.** $\dfrac{2}{1-x^2}$. **3.363.** $\operatorname{ch} x$.

3.364. $\operatorname{sh} x$. **3.365.** $\dfrac{1}{\operatorname{ch}^2 x}$. **3.366.** $-\dfrac{1}{\operatorname{sh}^2 x}$. **3.367.** $(\sin x)^x\left(\ln\sin x + \dfrac{x\cos x}{\sin x}\right)$.

3.368. $x^{2^x}2^x\left(\frac{1}{x}+\ln x\cdot\ln 2\right)$. **3.369.** $\sqrt{x^{\sqrt[3]{x}}}\left(\frac{3+\ln x}{6\sqrt[3]{x^2}}\right)$. **3.370.** $(\ln x)^{1/x}\frac{1-\ln x\cdot\ln\ln x}{x^2\ln x}$.

3.371. $\frac{x^4+6x^2+1}{3x(1-x^4)}\sqrt[3]{\frac{x(x^2+1)}{(x^2-1)^2}}$. **3.372.** $\frac{10-2x-2x^2}{3x^2\sqrt[3]{x^2(x+2)^2(x-1)}}$. **3.373.** $\frac{3t-1}{3t^2}$. **3.374.** $\frac{1}{3t}$.

3.375. $-\frac{b}{a}\operatorname{ctg}\varphi$. **3.376.** $2\cos^2 t(\cos 2t-2\sin 2t)$. **3.377.** 1. **3.378.** $\frac{b}{a}\operatorname{th}t$. **3.379.** 1. **3.380.** -1.

3.381. 1. **3.382.** -1. **3.383.** $2+\sqrt{3}$. **3.384.** 12. **3.385.** 4/3. **3.386.** -1. **3.387.** $-\frac{b^2x}{a^2y}$.

3.388. $\frac{x(x^2-3y^2)}{y(3x^2-y^2)}$. **3.389.** $-\sqrt{\frac{y}{x}}$. **3.390.** $\frac{1}{2(1+\ln y)}$. **3.391.** $\frac{e^x\sin y+e^y\sin x}{e^y\cos x-e^x\cos y}$. **3.392.** -2^{y-x}.

3.393. $\frac{x+y}{x-y}$. **3.394.** $\frac{y}{x}\cdot\frac{x\ln y-y}{y\ln x-x}$. **3.395.** $-2\cos 2x$. **3.396.** $\frac{2-6x^4}{(1+x^4)^2}$.

3.397. $-\frac{2(x^2+1)}{3\ln 2(x^2-1)^2}$. **3.398.** $2e^{-x^2}(2x^2-1)$. **3.399.** $\frac{3x}{(1-x^2)^2}+\frac{(1+2x^2)\arcsin x}{(1-x^2)^{5/2}}$.

3.400. $\frac{1}{4}x^{\sqrt{x}-1}\left((2+\ln x)^2-\frac{\ln x}{\sqrt{x}}\right)$. **3.401.** a^ne^{ax}. **3.402.** $\cos\left(x+\frac{\pi n}{2}\right)$. **3.403.** $\sin\left(x+\frac{\pi n}{2}\right)$.

3.404. $(-1)^{n-1}\frac{(n-1)!}{(1+x)^n}$. **3.405.** $\frac{m!}{(m-n)!}(1+x)^{m-n}$, если $n\le m$, 0, если $n>m$.

3.406. $2^{n-1}\cos\left(2x+\frac{\pi n}{2}\right)$. **3.407.** $(209-x-x^2)\cos x-15(2x+1)\sin x$. **3.408.** $e^x(x^2+$ $+39x+360)$. **3.409.** $4\sqrt{2}\sin\left(x-\frac{\pi}{4}\right)e^{-x}$. **3.410.** $\frac{8!}{x^9}$. **3.411.** $-\frac{p^2}{y^3}$. **3.412.** $e^{2y}\frac{2-xe^y}{(1-xe^y)^3}$.

3.413. $-\frac{2(1+y)^2}{y^5}$. **3.414.** $\frac{y((1+y)^2+(x-1)^2)}{x^2(1+y)^3}$. **3.415.** $-\operatorname{ctg}^3 t$ или $-\frac{1}{(x^2-1)^{3/2}}$, $x\in(1;+\infty)$.

3.416. $\frac{2}{(t^2-1)}$ или $-2\sec^2 x$, $x\in(-\pi/2;\pi/2)$. **3.417.** $2(1+t^2)$ или $2\sec^2 x$, $x\in(-\pi/2;\pi/2)$.

3.418. $\frac{1}{3a\cos^4 t\sin t}$ или $\frac{a^{2/3}}{3x^{4/3}\sqrt{a^{2/3}-x^{2/3}}}$, $x\in(-a;a)$. **3.423.** $5x-y-6=0$, $x+5y-$ $-22=0$. **3.424.** $3x+y=0$, $x-3y=0$. **3.425.** $x+2y-5=0$, $2x-y=0$. **3.426.** $2x-y=0$, $x+2y=0$. **3.427.** $x-ey=0$, $ex+y-1-e^2=0$. **3.428.** $2x-y+3=0$, $x+2y-1=0$. **3.429.** $3x-y-1=0$, $x+3y-7=0$. **3.430.** $7x-10y+6=0$, $10x+7y-34=0$. **3.431.** $y=0$, $(\pi+4)x+(\pi-4)y-\pi^2\frac{\sqrt{2}}{4}=0$. **3.432.** $5x+6y-13=0$, $6x-5y+21=0$. **3.433.** $x+y-$ $-2=0$, $x-y=0$. **3.434.** $x-y+2=0$. **3.435.** $3x-y-2=0$. **3.436.** $3x+9y-8=0$. **3.437.** $2x-2y-15=0$. **3.439.** В точке $M_1(0, 0)$ угол равен 0 (кривые касаются), в точке $M_2(1, 1)$ угол равен $\operatorname{arctg}\frac{1}{7}$. **3.440.** $\operatorname{arctg}2\sqrt{2}$. **3.441.** $\pi/4$. **3.442.** Ось Ox под углами $\pi/4$ и $3\pi/4$, ось Oy под углом $\operatorname{arctg}\frac{1}{3}$. **3.443.** $(1/8, -1/16)$. **3.444.** $y=x^2-x+1$.

3.445. а) $t_1=0$, $t_2=8$; б) 21, 11; в) $t\in(0;4)\cup(8;+\infty)$; г) $t_1=\frac{4}{3}(3+\sqrt{3})$, $t_2=\frac{4}{3}(3-\sqrt{3})$.

3.446. 242. **3.447.** $-a\omega\sin\omega t$. **3.448.** 10 м^2/с, $\sqrt{2}$ м/с. **3.449.** $400\pi v$ м^3/с, $80\pi v$ м^2/с.

3.450. $\dfrac{1+2t^2}{\sqrt{1+t^2}}$. **3.451.** 1000 г, 0 г/см, 200 г/см, 100 г/см. **3.452.** $v_x = -r\omega\sin\varphi$, $v_y = r\omega\cos\varphi$. **3.453.** $\dfrac{a^2-2x^2}{\sqrt{a^2-x^2}}dx$. **3.454.** $\operatorname{sh}2x\,dx$. **3.455.** $\operatorname{arctg}x\,dx$.
3.456. $\dfrac{e^{\sin x}(x\cos x-2)}{x^3}dx$. **3.457.** $\dfrac{x(y^2-2x^2)}{y(2y^2-x^2)}dx$. **3.458.** $-\dfrac{\sin(x+y)}{1+\sin(x+y)}dx$.
3.459. $\Delta S = 2x\Delta x + \Delta x^2$, $dS = 2x\Delta x$, $\Delta S - dS = \Delta x^2$. **3.460.** Скорость равна $2at_0$, ускорение — $2a$, $ds(t_0) = 2at_0\Delta t$ — путь, который был бы пройден точкой с момента t_0 до момента $t_0 + \Delta t$ при равномерном движении со скоростью $2at_0$. **3.461.** 2 см. **3.462.** 10 см.

3.463. 2,93. **3.464.** $\Delta I \approx -\dfrac{U}{R^2}\Delta R$. **3.465.** 0,05. **3.466.** –0,02. **3.467.** 2,98. **3.468.** 0,01.

3.469. 1. **3.470.** 1,9875. **3.471.** $-ab^2\sin(bx + c)dx^2$. **3.472.** $3^{-x^2}\ln 9(2x^2\ln 3-1)dx^2$.

3.473. $\dfrac{(2-x^2)\sin x-2x\cos x}{x^3}dx^2$. **3.474.** $\dfrac{2x^3-6x}{(1+x^2)^2}dx^2$. **3.475.** $\dfrac{2(3x^2-9x+7)}{(x^2-3x+2)^3}dx^2$.

3.476. $-\dfrac{1}{(1-x^2)^{3/2}}dx^2$. **3.477.** $f(1) = f(3)$, $\gamma = 2$. **3.479.** $\gamma=\pm1/\sqrt{3}$. **3.480.** $\gamma=\dfrac{2+\sqrt{13}}{9}$.

3.482. 0. **3.483.** 1/3. **3.484.** m/n. **3.485.** $+\infty$. **3.486.** 1/4. **3.487.** $\dfrac{\ln a-\ln b}{\ln c-\ln d}$. **3.488.** 2.

3.489. –1. **3.490.** 2/3. **3.491.** 1/2. **3.492.** 0. **3.493.** 1. **3.494.** 0. **3.495.** 2. **3.496.** 0. **3.497.** ∞. **3.498.** 0. **3.499.** –1. **3.500.** 0. **3.501.** –1. **3.502.** $+\infty$. **3.503.** –1/6. **3.504.** 1. **3.505.** 1. **3.506.** 1. **3.507.** e. **3.508.** 2. **3.509.** e^2. **3.510.** $1/\sqrt[6]{e}$. **3.511.** $1/\sqrt{e}$. **3.512.** $-e/2$. **3.513.** $-9 + 17(x + 1) - 9(x + 1)^2 + 2(x + 1)^3$. **3.514.** $Q_3(x) = 37 - 49(x + 2) + 28(x + 1)^2 - 8(x + 2)^3$, $Q_4(x) = 37 - 49(x + 2) + 28(x + 1)^2 - 8(x + 2)^3 + (x + 2)^4$. **3.515.** $\ln x=(x-1)-\dfrac{(x-1)^2}{2}+R_2(x)$.

3.516. $\sqrt{x}=1+\dfrac{x-1}{2}-\dfrac{(x-1)^2}{8}+R_2(x)$; а) $\sqrt{1{,}21}\approx1{,}0994875$; б) $\sqrt{1{,}21}\approx1{,}04875$.

3.517. $1+2x+\dfrac{2^2x^2}{2!}+\dfrac{2^3x^3}{3!}+\ldots+\dfrac{2^nx^n}{n!}$. **3.518.** $2x^2-\dfrac{2^2x^4}{2}+\dfrac{2^3x^6}{3}-\ldots+(-1)^{n+1}\dfrac{2^nx^{2n}}{n}$.

3.519. $\dfrac{1}{2}-\dfrac{x}{2^2}+\dfrac{x^2}{2^3}-\ldots+(-1)^n\dfrac{x^n}{2^{n+1}}$. **3.520.** $\ln4+\dfrac{x}{4}-\dfrac{x^2}{4^2\cdot2}+\dfrac{x^3}{4^3\cdot3}-\ldots+(-1)^{n+1}\dfrac{x^n}{4^n\cdot n}$.

3.521. $\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{2^2x^2}{2!}-\dfrac{2^4x^4}{4!}+\ldots+(-1)^{n-1}\dfrac{2^{2n}x^{2n}}{(2n)!}\right)$.
3.522. $2+2\left(\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{x}{4}-\dfrac{1\cdot1}{2\cdot4}\left(\dfrac{x}{4}\right)^2+\dfrac{1\cdot1\cdot3}{2\cdot4\cdot6}\left(\dfrac{x}{4}\right)^3-\ldots+(-1)^{n-1}\dfrac{1\cdot1\cdot3\cdot\ldots\cdot(2n-3)}{2\cdot4\cdot6\cdot\ldots\cdot2n}\left(\dfrac{x}{4}\right)^n\right)$.

3.523. 5/6, $|\varepsilon| < 1/120$. **3.524.** $1\dfrac{31}{48}$, $|\varepsilon| < 1/192$. **3.525.** 0,492, $|\varepsilon| < 0{,}0324$. **3.526.** $2\dfrac{121}{512}$, $|\varepsilon| < 5/16384$. **3.527.** 0,878. **3.528.** 2,8718. **3.529.** –0,105. **3.530.** 0,895. **3.531.** 1/20. **3.532.** 9/35. **3.533.** –1/2. **3.534.** –1/6. **3.535.** Возрастает на $[-1/\sqrt{2}, 1/\sqrt{2}]$, убывает на $[-1, -1/\sqrt{2}]$ и $[1/\sqrt{2}, 1]$, $f_{\min}=f(-1/\sqrt{2})=-1/2$, $f_{\max}=f(1/\sqrt{2})=1/2$. **3.536.** Возрастает на $(-\infty, -1]$ и $(0, 1]$, убывает на $[-1, 0)$ и $[1, +\infty)$, $f_{\max} = f(1) = f(-1) = 1$. **3.537.** Возрастает на $[e, +\infty)$, убывает на $(0, 1)$ и $(1, e]$, $f_{\min} = f(e) = e$. **3.538.** Убывает на $\left[\dfrac{\pi}{3}(6k-1), \dfrac{\pi}{3}(6k+1)\right]$, возрастает на $\left[\dfrac{\pi}{3}(6k+1), \dfrac{\pi}{3}(6k+5)\right]$,

$f_{\min}=f\left(2k\pi+\frac{\pi}{3}\right)=2k\pi+\left(\frac{\pi}{3}-\sqrt{3}\right)$, $f_{\max}=f\left(2k\pi+\frac{5\pi}{3}\right)=2k\pi-\left(\frac{\pi}{3}-\sqrt{3}\right)$, $k\in\mathbb{Z}$.

3.539. Убывает на $(0, 2]$, возрастает на $[2, +\infty)$, $f_{\min} = f(2) = 2(1 - \ln 2)$. **3.540.** Возрастает на $[-1/\sqrt{2}, 1/\sqrt{2}]$, убывает на $(-\infty, -1/\sqrt{2}]$ и $[1/\sqrt{2}, +\infty)$, $f_{\min}=f(-1/\sqrt{2})=-1/\sqrt{2e}$, $f_{\max}=f(1/\sqrt{2})=1/\sqrt{2e}$. **3.541.** $M = 3$, $m = -24$. **3.542.** $M = 8$, $m = 0$. **3.543.** $M = 0{,}6$, $m = -1$. **3.544.** $M = 1$, $m = 0{,}6$. **3.545.** $M = 2$, $m=2-\sqrt[3]{6}$. **3.546.** $M = \pi/4$, $m = 0$.

3.547. $\frac{av_1+bv_2}{v_1^2+v_2^2}c$. **3.548.** $x=\frac{2p}{4+\pi}$, $y=\frac{1}{2}\left(p-x-\frac{\pi x}{2}\right)$. **3.549.** $\alpha= 2\pi/3$. **3.550.** 1.

3.551. $ah/4$. **3.552.** πa^3. **3.553.** $\frac{4}{27}\pi r^2h$. **3.554.** $\frac{8}{3}\pi r^3$. **3.555.** На $(-\infty, 0)$ выпуклость вверх, на $(0, +\infty)$ выпуклость вниз, $M(0, 2)$ — точка перегиба, $k = -1$. **3.556.** График всюду выпуклый вниз. **3.557.** На $[2\pi n, (2n + 1)\pi]$ выпуклость вверх, на $[(2n - 1)\pi, 2\pi n]$ выпуклость вниз, $(0, 2\pi n)$ — точки перегиба, $k = 1$, $(0, (2n + 1)\pi)$ — точки перегиба, $k = -1$, $n \in \mathbb{Z}$. **3.558.** На $(-\infty, 0)$ выпуклость вниз, на $(0, +\infty)$ выпуклость вверх, $(0, 0)$ — точка перегиба, $k = 1$. **3.559.** На $(-\infty, -1)$ и $(1, +\infty)$ выпуклость вниз, на $(-1, 1)$ выпуклость вверх, $M_1(-1;\sqrt[3]{2})$ и $M_2(1;\sqrt[3]{2})$ — точки перегиба, $k_1 = k_2 = \infty$. **3.560.** На $(-\infty, -1)$ выпуклость вверх, на $(-1, +\infty)$ выпуклость вниз, $(-1, 1 - e^{-2})$ — точка перегиба, $k = -e^{-2}$. **3.561.** На $(-\infty, 0)$ выпуклость вверх, на $(0, +\infty)$ выпуклость вниз. **3.562.** На $(-\infty, -1/\sqrt{2})$ и $(1/\sqrt{2}, +\infty)$ выпуклость вниз, на $(-1/\sqrt{2}, 1/\sqrt{2})$ выпуклость вверх, $M_1(-1/\sqrt{2}, 1/\sqrt{e})$, $M_1(1/\sqrt{2}, 1/\sqrt{e})$ — точки перегиба, $k_1=\sqrt{2/e}$, $k_2=-\sqrt{2/e}$. **3.563.** $x = -1$, $y = x - 1$. **3.564.** $y = 3x + 2$. **3.565.** $y = 2x$. **3.566.** $y=3x+\frac{\pi}{2}$ (правая), $y=3x-\frac{\pi}{2}$ (левая). **3.567.** $y = x + 1$ (правая), $y = -x - 1$ (левая). **3.568.** $x = 1$, $y = 1$. **3.569.** $x = -1$, $x = 0$, $y = x$. **3.570.** $y=x-\frac{1}{3}$. **3.571.** $y = 1$ (правая), $y = -1$ (левая). **3.572.** $x=-\frac{1}{e}$, $y=x+\frac{1}{e}$.

3.573. $f_{\max} = f(-1) = 2$, $f_{\min} = f(1) = -2$; $(0, 0)$ — точка перегиба. **3.574.** $f_{\max} = f(0) = 0$, $f_{\min} = f(\pm1) = -1$; $(\pm1/\sqrt{3}, -5/9)$ — точки перегиба. **3.575.** $f_{\max} = f(1) = 1/3$; $(\sqrt[3]{4}, \sqrt[3]{4}/6)$ — точка перегиба; $x=-\sqrt[3]{2}$, $y = 0$ — асимптоты. **3.576.** $f_{\min} = f(3) = 27/8$; $(0, 0)$ — точка перегиба; $x = 1$, $y = x/2 + 1$ — асимптоты. **3.577.** $(0, 0)$ — точка перегиба; $x = \pm1$, $y = x$ — асимптоты. **3.578.** $f_{\min} = f(0) = -1$; $(\pm\sqrt{3}/3, -1/2)$ — точки перегиба; $y = 1$ — асимптота. **3.579.** $f_{\min} = f(1) = -1$; $(0, 0)$, $(2, 0)$ — точки перегиба. **3.580.** $f_{\max} = f(0) = 2$; $f_{\min}=f(\pm1)=\sqrt[3]{4}$. **3.581.** $(0, 0)$ — точка перегиба; $y = -1$ — левая асимптота, $y = 1$ — правая асимптота. **3.582.** $(0, 0)$, $(\pm1, \pm\sqrt{2})$ — точки перегиба; $y = x$ — асимптота.

3.583. $f_{\min} = f(0) = 0$; $y=-\frac{\pi}{2}x-1$ — левая асимптота, $y=\frac{\pi}{2}x-1$ — правая асимптота.

3.584. $f_{\min} = f(1) = 1/2 + \pi/4$, $f_{\max} = f(-1) = -1/2 + 3\pi/4$; $(0, \pi/2)$ — точка перегиба; $y=\frac{x}{2}+\pi$ — левая асимптота, $y=\frac{x}{2}$ — правая асимптота. **3.585.** $f_{\max} = f(1) = e$; $\left(\frac{2\pm\sqrt{2}}{2}, \sqrt{e}\right)$ — точки перегиба; $y = 0$ — асимптота. **3.586.** $f_{\max}=f(1)=1/\sqrt{e}$, $f_{\min}=f(-1)=-1/\sqrt{e}$; $(0, 0)$, $\left(\pm\sqrt{3}, \pm\frac{\sqrt{3}}{e\sqrt{e}}\right)$ — точки перегиба; $y = 0$ — асимптота.

3.587. $f_{\max} = f(1/e) = -e$, $x = 1$, $x = 0$, $y = 0$ — асимптоты.

3.588. $f_{\min}=f(1/\sqrt{e})=-\dfrac{1}{2e}$; $\left(\dfrac{1}{e\sqrt{e}}, -\dfrac{3}{2e^3}\right)$ — точка перегиба.

3.589. $f_{\max}=f\left(\dfrac{\pi}{4}+2\pi k\right)=\sqrt{2}$, $f_{\min}=f\left(\dfrac{5\pi}{4}+2\pi k\right)=-\sqrt{2}$; $\left(\dfrac{3\pi}{4}+\pi k, 0\right)$ — точки перегиба, $k\in\mathbb{Z}$. **3.590.** $f_{\min}=f(1/e)=\left(\dfrac{1}{e}\right)^{1/e}\approx 0{,}69$; выпукла вниз, $f(x)\to 1$ при $x\to 0$.

ГЛАВА 4

4.1. $x^4+x^3-1/x+C$. **4.2.** $x^5/5+2x^3/3+x+C$. **4.3.** $\dfrac{3\sqrt[3]{x^4}}{4}+3\sqrt[3]{x}-\dfrac{3}{2\sqrt[3]{x^2}}+C$.

4.4. $x-\operatorname{arctg}x+C$. **4.5.** $\dfrac{(2x-5)^8}{16}+C$. **4.6.** $-\dfrac{1}{\sqrt[5]{5x+1}}+C$. **4.7.** $2x+\dfrac{7}{2}\ln|2x-1|+C$.

4.8. $\dfrac{3x+2\ln|3x+1|}{9}+C$. **4.9.** $x^3/3-x^2/2+x+C$. **4.10.** $x^3+3x^2/2+4x+5\ln|x-1|+C$.

4.11. $3\sin\dfrac{x-2}{3}+C$. **4.12.** $-\dfrac{\cos(3x+1)}{3}+C$. **4.13.** $-\dfrac{\cos 4x}{8}-\dfrac{\cos 2x}{4}+C$.

4.14. $\dfrac{5\sin x+\sin 5x}{10}+C$. **4.15.** $\operatorname{tg}x-x+C$. **4.16.** $x-\operatorname{cth}x+C$. **4.17.** $3\arcsin\dfrac{x}{2}+C$.

4.18. $\dfrac{3}{2}\arcsin\dfrac{2x}{\sqrt{5}}+C$. **4.19.** $\ln|x+\sqrt{x^2+16}|+C$. **4.20.** $\dfrac{\ln|4x+\sqrt{16x^2+1}|}{4}+C$.

4.21. $\dfrac{1}{5}\operatorname{arctg}\dfrac{x}{5}+C$. **4.22.** $\dfrac{1}{2\sqrt{5}}\cdot\operatorname{arctg}\dfrac{4x}{\sqrt{5}}+C$. **4.23.** $\dfrac{1}{4\sqrt{2}}\ln\left|\dfrac{x-2\sqrt{2}}{x+2\sqrt{2}}\right|+C$.

4.24. $\dfrac{1}{12}\cdot\ln\left|\dfrac{2x-3}{2x+3}\right|+C$. **4.25.** $\arcsin x+\ln|x+\sqrt{1+x^2}|+C$. **4.26.** $x+\dfrac{\cos 2x}{2}+C$.

4.27. $\dfrac{4^x}{\ln 4}+2\dfrac{6^x}{\ln 6}+\dfrac{9^x}{\ln 9}+C$. **4.28.** $\dfrac{8^x}{\ln 8}+\dfrac{(2/3)^x}{\ln(2/3)}+\dfrac{x^3}{3}+C$. **4.29.** $-\dfrac{\operatorname{ctg}(4x+1)}{4}+C$.

4.30. $\dfrac{x}{2}+\dfrac{\sin 2x}{4}+C$. **4.31.** $\dfrac{(x^4-1)^3}{12}+C$. **4.32.** $\dfrac{2\sqrt{(3x^3+2)^3}}{27}+C$. **4.33.** $\dfrac{\sqrt{2x^2-1}}{2}+C$.

4.34. $2\sqrt{x^2+3x+2}+C$. **4.35.** $e^{\sin x}+C$. **4.36.** $-\cos(x^3+x-5)+C$. **4.37.** $2e^{\sqrt{x}}+C$.

4.38. $\ln|\arcsin x|+C$. **4.39.** $\dfrac{\arcsin x^4}{4}+C$. **4.40.** $2\sqrt{\operatorname{tg}x+3}+C$. **4.41.** $\dfrac{\ln^2 x}{2}+C$.

4.42. $\dfrac{5\sqrt[5]{\ln^4 x}}{4}+C$. **4.43.** $\dfrac{\operatorname{arctg}2^x}{\ln 2}+C$. **4.44.** $x-\ln(1+e^x)+C$. **4.45.** $-\dfrac{\cos^4 x}{4}+C$.

4.46. $\dfrac{\ln|\sin 3x|}{3}+C$. **4.47.** $\dfrac{\operatorname{ch}^4 x}{4}+C$. **4.48.** $-\dfrac{1}{2\operatorname{sh}^2 x}+C$. **4.49.** $2\ln(2+\sqrt{x})+C$.

4.50. $\dfrac{2}{5}(x-1)^{5/2}+\dfrac{2}{3}(x-1)^{3/2}+C$. **4.51.** $\dfrac{(3x+1)^{11}}{99}-\dfrac{(3x+1)^{10}}{90}+C$.

4.52. $\dfrac{x}{2}\sqrt{1-x^2}+\dfrac{1}{2}\arcsin x+C$. **4.53.** $\dfrac{x}{2}\sqrt{1+x^2}+\dfrac{1}{2}\ln|x+\sqrt{1+x^2}|+C$.

4.54. $\frac{x}{2}\sqrt{x^2-1}-\frac{1}{2}\ln|x+\sqrt{x^2-1}|+C.$ **4.55.** $-x\cos x+\sin x+C.$ **4.56.** $\frac{2x\sin 2x+\cos 2x}{4}+C.$

4.57. $\frac{9x^2+18x-2}{27}\sin 3x+\frac{2x+2}{9}\cos 3x+C.$ **4.58.** $-\frac{2x^2-1}{4}\cos 2x+\frac{x}{2}\sin 2x+C.$

4.59. $e^x(x-1)+C.$ **4.60.** $2^x\left(\frac{x^2-1}{\ln 2}-\frac{2x}{\ln^2 2}+\frac{2}{\ln^3 2}\right)+C.$ **4.61.** $x(\ln x-1)+C.$

4.62. $2\sqrt{x}(\ln x-2)+C.$ **4.63.** $x(\ln^2 x-2\ln x+2)+C.$ **4.64.** $x\,\mathrm{arctg}\,x-0{,}5\ln(1+x^2)+C.$

4.65. $\sqrt{1-x^2}+x\arcsin x+C.$ **4.66.** $\frac{x^2\,\mathrm{arctg}\,x+\mathrm{arctg}\,x-x}{2}+C.$ **4.67.** $\frac{e^{3x}(3\sin x-\cos x)}{10}+C.$

4.68. $\frac{e^{2x}(3\sin 3x+2\cos 3x)}{13}+C.$ **4.69.** $\frac{x}{2}\sqrt{x^2-1}-\frac{1}{2}\ln|x+\sqrt{x^2-1}|+C.$

4.70. $\frac{x}{2}\sqrt{1-x^2}+\frac{1}{2}\arcsin x+C.$ **4.71.** $I_n=\frac{x}{2(n-1)(x^2+1)^{n-1}}+\frac{2n-3}{2(n-1)}I_{n-1},\ n\geq 2;$

$\frac{x}{2(1+x^2)}+\frac{\mathrm{arctg}\,x}{2}.$ **4.72.** $\frac{1}{\sqrt{6}}\mathrm{arctg}\frac{\sqrt{2}(x-1)}{\sqrt{3}}+C.$ **4.73.** $\frac{1}{2\sqrt{6}}\mathrm{arctg}\frac{2x-1}{\sqrt{6}}+C.$

4.74. $\frac{1}{2}\ln(x^2+4x+9)-\frac{3}{\sqrt{5}}\mathrm{arctg}\frac{x+2}{\sqrt{5}}+C.$ **4.75.** $\frac{1}{2}\ln(x^2-6x+13)+\frac{3}{2}\mathrm{arctg}\frac{x-3}{2}+C.$

4.76. $\frac{3}{2}\ln(x^2+2x+10)-\frac{2}{3}\mathrm{arctg}\frac{x+1}{3}+C.$ **4.77.** $\frac{1}{18}\ln(9x^2+12x+5)+\frac{7}{9}\mathrm{arctg}(3x+2)+C.$

4.78. $\frac{1}{2}\ln(x^2-3x+3)+\sqrt{3}\,\mathrm{arctg}\frac{2x-3}{\sqrt{3}}+C.$ **4.79.** $\frac{1}{2}\ln(x^2-4x+8)+\frac{3}{2}\mathrm{arctg}\frac{x-2}{2}+C.$

4.80. $\frac{1}{6}\ln\left|\frac{x-1}{x+5}\right|+C.$ **4.81.** $\frac{4}{3}\ln|x-4|-\frac{1}{3}\ln|x-1|+C.$ **4.82.** $\frac{\ln|x|}{2}-\frac{\ln(x^2+2)}{2}+C.$

4.83. $-\mathrm{arctg}\,x+2\ln|x-1|-\frac{1}{2}\ln(x^2+1)+C.$ **4.84.** $-\frac{1}{6}\ln|x|-\frac{7}{2}\ln|x-2|+\frac{17}{3}\ln|x-3|+C.$

4.85. $\frac{1}{2}\ln|x^2-1|+\ln|x-3|+C.$ **4.86.** $x-\frac{2}{x}+2\ln|x-4|+\ln|x|+C.$

4.87. $\frac{x^2}{2}+\frac{1}{x+1}+\frac{2}{(x+1)^2}+C.$ **4.88.** $\frac{x^2}{2}-x+\ln|x-1|-\frac{2}{x-1}+\mathrm{arctg}\,x+C.$

4.89. $\ln|x+1|-\frac{1}{x+1}+2\ln|x-1|+C.$ **4.90.** $\frac{1}{4}\mathrm{arctg}\frac{x^2+3}{2}+C.$ **4.91.** $\frac{1}{2\ln 2}\ln\left|\frac{2^x-4}{2^x-2}\right|+C.$

4.92. $\frac{1}{4\sqrt{2}}\ln\frac{x^2+\sqrt{2}x+1}{x^2-\sqrt{2}x+1}+\frac{\sqrt{2}}{4}\mathrm{arctg}\frac{x\sqrt{2}}{1-x^2}+C.$

4.93. $\ln\frac{x^2+4}{\sqrt{x^2+2}}+\frac{3}{2}\mathrm{arctg}\frac{x}{2}-\frac{3\sqrt{2}}{2}\mathrm{arctg}\frac{x\sqrt{2}}{2}+C.$ **4.94.** $\frac{1}{8(x^2+4)}+\frac{\ln x}{16}-\frac{\ln(x^2+4)}{32}+C.$

4.95. $\frac{x}{36(x^2+9)^2}+\frac{x}{216(x^2+9)}+\frac{1}{648}\mathrm{arctg}\frac{x}{3}+C.$ **4.96.** $\frac{1}{\sqrt{5}}\ln\left|\frac{\sqrt{5}+\mathrm{tg}(x/2)}{\sqrt{5}-\mathrm{tg}(x/2)}\right|+C.$

4.97. $\frac{2\sqrt{3}}{3}\mathrm{arctg}\frac{2\,\mathrm{tg}(x/2)-1}{\sqrt{3}}+C.$ **4.98.** $\ln|\mathrm{tg}(x/2)-2|-\ln|\mathrm{tg}(x/2)-1|+C.$

4.99. $\frac{1}{2}\ln\left|2\operatorname{tg}\frac{x}{2}-1\right|+C$. **4.100.** $\frac{\cos^3 x}{3}-\cos x+C$. **4.101.** $\sin x-\frac{2}{3}\sin^3 x+\frac{\sin^5 x}{5}+C$.

4.102. $\frac{3x}{8}+\frac{\sin x}{2}+\frac{\sin 2x}{16}+C$. **4.103.** $\frac{x}{2}-\frac{\sin 4x}{8}+C$. **4.104.** $-\cos x+\frac{\cos^7 x}{7}+C$.

4.105. $\frac{\sin^3 x}{3}-\frac{2}{5}\sin^5 x+\frac{\sin^7 x}{7}+C$. **4.106.** $-2\sqrt{\cos x}+\frac{2}{5}\sqrt{\cos^5 x}+C$.

4.107. $-\frac{2}{3\sqrt{\sin^3 x}}-4\sqrt{\sin x}+\frac{2}{5}\sqrt{\sin^5 x}+C$. **4.108.** $\frac{1}{7\cos^7 x}-\frac{1}{5\cos^5 x}+C$.

4.109. $-\frac{1}{2\operatorname{tg}^2 x}+3\ln|\operatorname{tg}x|+\frac{3}{2}\operatorname{tg}^2 x+\frac{1}{4}\operatorname{tg}^4 x+C$. **4.110.** $\frac{1}{5}\operatorname{tg}^5 x+\frac{1}{3}\operatorname{tg}^3 x+C$.

4.111. $\operatorname{tg}x+\frac{1}{3}\operatorname{tg}^3 x+C$. **4.112.** $-\frac{\cos x}{2\sin^2 x}+\frac{1}{2}\ln\left|\operatorname{tg}\frac{x}{2}\right|+C$.

4.113. $\frac{\sin x}{2\cos^2 x}-\frac{1}{2}\ln\left|\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4}-\frac{x}{2}\right)\right|+C$. **4.114.** $-\frac{\cos 10x}{20}+\frac{\cos 4x}{8}+C$. **4.115.** $\frac{\sin 4x}{8}-\frac{\sin 16x}{32}+C$.

4.117. $-\frac{1}{4}\cos 2x+\frac{3}{4}\cos\frac{2x}{3}+C$. **4.118.** $\frac{\sin x}{2}-\frac{1}{28}\sin 7x-\frac{1}{20}\sin 5x+C$.

4.119. $\frac{\cos 6x}{24}-\frac{\cos 4x}{16}-\frac{\cos 2x}{8}+C$. **4.120.** $\frac{\operatorname{sh}6x}{12}+\frac{x}{2}+C$. **4.121.** $\frac{\operatorname{ch}^3 2x}{6}-\frac{\operatorname{ch}2x}{2}+C$.

4.122. $\frac{\operatorname{sh}4x}{32}-\frac{x}{8}+C$. **4.123.** $\frac{3x}{8}+\frac{\operatorname{sh}2x}{4}+\frac{\operatorname{sh}4x}{32}+C$. **4.124.** $x-\operatorname{th}x-\frac{\operatorname{th}^3 x}{3}+C$.

4.125. $-2\operatorname{cth}2x+C$. **4.126.** $\operatorname{arctg}\frac{\sqrt{1+x}}{2}+C$. **4.127.** $\frac{3}{20}\sqrt[3]{(2x-3)^5}+\frac{9}{8}\sqrt[3]{(2x-3)^2}+C$.

4.128. $2\sqrt{x}+3\sqrt[3]{x}+6\sqrt[6]{x}+6\ln|\sqrt[6]{x}-1|+C$.

4.129. $6\operatorname{arctg}\sqrt[6]{x+2}-6\ln\sqrt[6]{x+2}+3\ln|1+\sqrt[3]{x+2}|+C$. **4.130.** $\frac{3}{16}\sqrt[3]{\left(\frac{x+1}{x-1}\right)^4}-\frac{3}{28}\sqrt[3]{\left(\frac{x+1}{x-1}\right)^7}+C$.

4.131. $\ln\left|\frac{\sqrt{x-1}+\sqrt{x+1}}{\sqrt{x-1}-\sqrt{x+1}}\right|-2\operatorname{arctg}\sqrt{\frac{x-1}{x+1}}+C$. **4.132.** $\frac{2}{9}\cdot\frac{3x-2}{\sqrt{3x-1}}+C$.

4.133. $6\sqrt[6]{x}-\ln\frac{(\sqrt[6]{x}+1)^2}{\sqrt[3]{x}-\sqrt[6]{x}+1}-2\sqrt{3}\operatorname{arctg}\frac{2\sqrt[6]{x}-1}{\sqrt{3}}+C$.

4.134. $\frac{x+1}{2}\sqrt{1-2x-x^2}+\arcsin\frac{x+1}{\sqrt{2}}+C$.

4.135. $6\arcsin\frac{x+1}{2}-\frac{\sqrt{3-2x-x^2}}{4}(x^3+3x^2-7x-9)+C$. **4.136.** $\arcsin\frac{x+2}{3}+C$.

4.137. $\ln\left|x+1+\sqrt{x^2+2x+7}\right|+C$. **4.138.** $\sqrt{x^2-6x+1}+C$.

4.139. $-\sqrt{2-x-x^2}+\frac{7}{2}\arcsin\frac{2x+1}{3}+C$.

4.140. $\frac{x-1}{2}\sqrt{x^2-2x+10}+\frac{9}{2}\ln(x-1+\sqrt{x^2-2x+10})+C$.

4.141. $\frac{x+2}{2}\sqrt{8+4x+x^2}+2\ln(x+2+\sqrt{8+4x+x^2})+C$. **4.142.** $\frac{1}{2\sqrt{3}}\ln\left|\frac{x-\sqrt{3}\sqrt{4-x^2}}{x+\sqrt{3}\sqrt{4-x^2}}\right|+C$.

4.143. $\ln\frac{x+\sqrt{x^2+1}}{\sqrt{x^2+1}}+C$. **4.144.** $\ln\left|\frac{x}{1+4x+\sqrt{x^2+8x+1}}\right|+C$.

4.145. $-\frac{\sqrt{2x^2-x+1}}{x}-\frac{1}{2}\ln\frac{2-x+\sqrt{2x^2-x+1}}{|x|}+C$. **4.146.** $-\frac{1}{2}\sqrt{\frac{5-x}{x-1}}+C$.

4.147. $-\frac{\sqrt{x^2+5}}{9(x+2)}-\frac{2}{27}\ln\frac{5-2x+3\sqrt{x^2+5}}{|x+2|}+C$. **4.148.** 2. **4.149.** 3/2. **4.150.** 3/ln 2. **4.151.** 1.

4.152. Первый. **4.153.** Первый. **4.156.** $|I|<7/24000$. **4.157.** 1/4. **4.158.** 0.

4.159. $\frac{2}{\pi}I_0\cos\varphi$. **4.160.** $v(s)=\sqrt{2gs}$, $v_{\text{ср}}=2v(s)/3$. **4.161.** 0. **4.162.** 0. **4.163.** 0. **4.164.** 4.

4.165. $\frac{x}{1+x^2}$. **4.166.** $\frac{\ln x}{x}$. **4.167.** $\frac{\sin x}{x}$. **4.168.** $\frac{x}{\ln x}$. **4.169.** 5. **4.170.** 11/3. **4.171.** $\pi/12$.

4.172. 1/2. **4.173.** 7/ln 2. **4.174.** $\frac{1}{2}\ln\frac{7}{3}$. **4.175.** $\frac{1}{4}\left(\operatorname{arctg}\frac{3}{2}-\operatorname{arctg}\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{4}\operatorname{arctg}\frac{4}{7}$.

4.176. $\ln\frac{2+\sqrt{5}}{1+\sqrt{2}}$. **4.177.** $\pi/3$. **4.178.** $\pi/4$. **4.179.** 1. **4.180.** $\frac{2}{3}(2^{3/2}-1)$. **4.181.** $\frac{1}{a+1}$. **4.182.** ln 3.

4.183. $\ln\frac{3}{2}$. **4.184.** $\frac{1}{4}(\operatorname{sh}2-1)$. **4.185.** $\frac{2}{\sqrt{5}}\operatorname{arctg}\frac{1}{\sqrt{5}}$. **4.186.** $\ln\frac{2+2\sqrt{2}}{1+\sqrt{5}}$. **4.187.** π. **4.188.** $\pi/6$.

4.189. $\pi/6$. **4.190.** $\frac{1}{3}(2\sqrt{3}-\pi)$. **4.191.** $\frac{81}{16}\pi$. **4.192.** $\frac{1}{2}\ln\frac{3}{2\sqrt{3}-3}$. **4.193.** sin 1. **4.194.** 1.

4.195. $\frac{\pi^2-8}{32}$. **4.196.** $\frac{2e^3+1}{9}$. **4.197.** $e-2$. **4.198.** $\pi\sqrt{2}-4$. **4.199.** $\frac{1}{18}(5\pi\sqrt{3}+9\ln 3)$.

4.200. $\sqrt{2}-\frac{2}{\sqrt{3}}+\ln\frac{2+\sqrt{3}}{1+\sqrt{2}}$. **4.201.** $\frac{\pi}{4}-\frac{1}{2}$. **4.202.** $\frac{1}{2}(e^{\pi/2}-1)$. **4.203.** $\frac{4}{25}(e^{3\pi/4}+1)$. **4.204.** 1/2.

4.205. Расходится. **4.206.** 1/2. **4.207.** 1. **4.208.** $\frac{\pi}{\sqrt{2}}$. **4.209.** Расходится. **4.210.** 2 + ln 2.

4.211. $\ln\sqrt{5}$. **4.212.** Расходится. **4.213.** 2/5. **4.214.** Сходится. **4.215.** Сходится. **4.216.** Расходится. **4.217.** Сходится. **4.218.** Расходится. **4.219.** Сходится. **4.220.** Расходится. **4.221.** Расходится. **4.222.** Сходится. **4.223.** Расходится. **4.224.** $\frac{5}{2}\sqrt[5]{4}$. **4.225.** π.

4.226. Расходится. **4.227.** Расходится. **4.228.** 0. **4.229.** Сходится. **4.230.** Сходится. **4.231.** Сходится. **4.232.** Расходится. **4.233.** Сходится. **4.234.** Расходится. **4.235.** Абсолютно сходится. **4.236.** Абсолютно сходится. **4.237.** Условно сходится. **4.238.** 9/2. **4.239.** 2(ch 1 − 1). **4.240.** e^2. **4.241.** 1. **4.242.** π. **4.243.** 2. **4.244.** πab.

4.245. $ab(2\sqrt{3}-\ln(2+\sqrt{3}))$. **4.246.** 1 + 0,5 ln 2. **4.247.** $2\pi+4/3$ и $6\pi-4/3$. **4.248.** $\frac{3\pi a^2}{2}$.

4.249. $\left(\frac{\pi}{2}-1\right)a^2$. **4.250.** $\frac{9\pi}{2}$. **4.251.** $\sqrt{3}-\frac{\pi}{3}$. **4.252.** $\sqrt{3}/2$. **4.253.** $\sqrt{2}\pi$. **4.254.** $\frac{3\pi a^2}{8}$.

4.255. 12π. **4.256.** $4a^2/3$. **4.257.** $\frac{24}{5}ab\sqrt{3}$. **4.258.** $\frac{\pi a^2 h}{2}$. **4.259.** $\frac{4}{3}\pi ab^2$. **4.260.** $\frac{272}{15}\pi$.

4.261. $\frac{13}{4}\pi$. **4.262.** $\frac{\pi^3}{2}$. **4.263.** $\frac{4}{3}\pi$. **4.264.** $\frac{4}{\pi}\ln\operatorname{tg}\frac{3\pi}{8}$. **4.265.** $\frac{8}{27}(10\sqrt{10}-1)$. **4.266.** $2\sqrt{3}$.

4.267. $\ln\frac{16}{5}$. **4.268.** $\frac{1}{2}\operatorname{sh}6$. **4.269.** $\pi a\sqrt{2}$. **4.270.** $6a$. **4.271.** $\sqrt{2}(e-1)$. **4.272.** $2\pi^2 a$.

4.273. $8a$. **4.274.** $13/3$. **4.275.** $\frac{4\sqrt{3}}{9}$. **4.276.** $3\sqrt{3}$. **4.277.** $\frac{22}{3}a$. **4.278.** 8. **4.279.** $8(2-\sqrt{3})$.

4.280. $5\pi\sqrt{1+4\pi^2}+\frac{5}{2}\ln(2\pi+\sqrt{1+4\pi^2})$. **4.281.** $3\pi a/2$. **4.282.** $\frac{2\pi}{9}(2\sqrt{2}-1)$.

4.283. $2\pi(\sqrt{2}+\ln(\sqrt{2}+1))$. **4.284.** $\frac{\pi}{8}(\text{sh}12+12)$. **4.285.** 48π. **4.286.** $2\pi(\sqrt{2}+\ln(\sqrt{2}+1))$.

4.287. $\frac{\pi}{6}(5\sqrt{5}-1)$. **4.288.** $\frac{64\pi a^2}{3}$. **4.289.** $8\pi+\frac{4\pi}{\sqrt{3}}\ln(2+\sqrt{3})$. **4.290.** $\frac{128}{5}\pi a^2$. **4.291.** $4\pi^2a^2$.

4.295. $\sqrt{2}+\ln(1+\sqrt{2})$. **4.296.** $M_x=\frac{1}{2}\left(e\sqrt{1+e^2}-\sqrt{2}+\ln(\sqrt{2}-1)(e+\sqrt{1+e^2})\right)$,

$I_x=\frac{1}{3}((1+e^2)^{3/2}-\sqrt{8})$. **4.297.** $\frac{\pi R^4H\omega^2}{20}$. **4.298.** $\frac{4\pi R^5\omega^2}{15}$. **4.299.** 150 м. **4.300.** $\pi/2$ м.

4.301. $\frac{1}{12}g\rho\pi R^2h^2$. **4.302.** $\frac{1}{12}g\rho a^2H^2$. **4.303.** $\frac{1}{3}g\rho ah^2$. **4.304.** $\pi g\rho RH^2$.

ГЛАВА 5

5.1. $x^2+y^2\le 9$ — круг радиуса 3 с центром в начале координат, включая границу круга. **5.2.** $x^2+y^2\ge 1$ — внешность круга радиуса 1 с центром в начале координат, включая границу круга. **5.3.** Внешность (не включая границу) эллипса $4x^2+y^2=1$. **5.4.** Внутренность (не включая границу) эллипса $x^2+4y^2=16$. **5.5.** Полуплоскость, расположенная под прямой $-x-y-1=0$, не включая прямую. **5.6.** Часть плоскости, расположенная над параболой $y=x^2+1$, включая параболу. **5.7.** Вся плоскость за исключением гиперболы $x^2-y^2=1$. **5.8.** Полосы $-\frac{\pi}{2}+2\pi k\le x\le\frac{\pi}{2}+2\pi k,\ k\in\mathbb{Z}$. **5.9.** $(x-1)^2+y^2\le 1$ — круг радиуса 1 с центром в точке $(1, 0)$, включая границу круга. **5.10.** Прямоугольник $|x|\le 2$, $|y|\le 3$. **5.11.** $x^2+y^2+z^2\le 16$ — шар радиуса 4 с центром в начале координат, включая границу шара. **5.12.** Внутренность параболоида $z=x^2+y^2$, включая границу. **5.13.** I, III, VI и VIII октанты, включая границы. **5.14.** Внутренность однополостного гиперболоида $x^2+y^2-z^2=1$, включая границу. **5.15.** Окружности с центром в начале координат; параболоид вращения. **5.16.** Окружности с центром в начале координат; прямой круговой конус. **5.17.** Эллипсы с центром в начале координат; верхняя половина эллипсоида $x^2+4y^2+z^2=4$. **5.18.** Окружности с центром в начале координат; поверхность, полученная вращением линии $z=2\ln y$, $y>0$, вокруг оси Oz. **5.19.** -6. **5.20.** 0. **5.21.** 0. **5.22.** 0. **5.26.** Не имеет. **5.27.** $(1, -1)$. **5.28.** (m, n), $m, n\in\mathbb{Z}$. **5.29.** Линия разрыва — парабола $y=x^2$. **5.30.** Линии разрыва — окружность $x^2+y^2=1$ и гипербола $x^2-y^2=1$. **5.31.** Поверхность разрыва — сфера $x^2+y^2+z^2=4$. **5.32.** Поверхность разрыва — конус $x^2+y^2-z^2=0$. **5.33.** Поверхность разрыва — плоскость $x+2y+3z-6=0$. **5.34.** Поверхность разрыва — однополостный гиперболоид $x^2+y^2-z^2=1$. **5.35.** $\frac{\partial f}{\partial x}=5x^4-15x^2y^3$,

$\frac{\partial f}{\partial y}=5y^4-15y^2x^3$, $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}=20x^3-30xy^3$, $\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}=20y^3-30x^3y$, $\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}=-45x^2y^2$.

5.36. $\frac{\partial f}{\partial x}=y-\frac{y}{x^2}$, $\frac{\partial f}{\partial y}=x+\frac{1}{x}$, $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}=\frac{2y}{x^3}$, $\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}=0$, $\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}=1-\frac{1}{x^2}$. **5.37.** $\frac{\partial f}{\partial x}=\frac{y^3}{(x^2+y^2)^{3/2}}$,

$\frac{\partial f}{\partial y}=\frac{x^3}{(x^2+y^2)^{3/2}}$, $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}=-\frac{3xy^3}{(x^2+y^2)^{5/2}}$, $\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}=\frac{3x^2y^2}{(x^2+y^2)^{5/2}}$, $\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}=-\frac{3x^3y}{(x^2+y^2)^{5/2}}$.

5.38. $\frac{\partial f}{\partial x}=(1-xy)e^{-xy}$, $\frac{\partial f}{\partial y}=-x^2e^{-xy}$, $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}=y(xy-2)e^{-xy}$, $\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}=x(xy-2)e^{-xy}$,

$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}=x^3e^{-xy}$. **5.39.** $\frac{\partial f}{\partial x}=-\frac{\cos y^2}{x^2}$, $\frac{\partial f}{\partial y}=-\frac{2y\sin y^2}{x}$, $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}=\frac{2\cos y^2}{x^3}$, $\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}=\frac{2y\sin y^2}{x^2}$,

$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}=-\frac{2\sin y^2+4y^2\cos y^2}{x}$. **5.40.** $\frac{\partial f}{\partial x}=-\frac{y}{x^2+y^2}$, $\frac{\partial f}{\partial y}=\frac{x}{x^2+y^2}$, $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}=\frac{2xy}{(x^2+y^2)^2}$,

$\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}=\frac{y^2-x^2}{(x^2+y^2)^2}$, $\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}=-\frac{2xy}{(x^2+y^2)^2}$. **5.41.** $\frac{\partial f}{\partial x}=\frac{2x}{x^2+y^2}$, $\frac{\partial f}{\partial y}=\frac{2y}{x^2+y^2}$, $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}=\frac{2(y^2-x^2)}{(x^2+y^2)^2}$,

$\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}=-\frac{4xy}{(x^2+y^2)^2}$, $\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}=\frac{2(x^2-y^2)}{(x^2+y^2)^2}$. **5.42.** $\frac{\partial f}{\partial x}=-\frac{y\,\mathrm{sgn}\,x}{x^2+y^2}$, $\frac{\partial f}{\partial y}=\frac{|x|}{x^2+y^2}$, $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}=\frac{2|x|y}{(x^2+y^2)^2}$,

$\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}=\frac{(y^2-x^2)\mathrm{sgn}\,x}{(x^2+y^2)^2}$, $\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}=-\frac{2|x|y}{(x^2+y^2)^2}$. **5.43.** $\frac{\partial f}{\partial x}=-\frac{x}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}}$,

$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}=\frac{2x^2-y^2-z^2}{(x^2+y^2+z^2)^{5/2}}$, $\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}=\frac{3xy}{(x^2+y^2+z^2)^{5/2}}$. **5.44.** $\frac{\partial f}{\partial x}=-\frac{z}{x}\left(\frac{y}{x}\right)^z$, $\frac{\partial f}{\partial y}=\frac{z}{y}\left(\frac{y}{x}\right)^z$,

$\frac{\partial f}{\partial z}=\left(\frac{y}{x}\right)^z\ln\frac{y}{x}$, $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}=\frac{z(z+1)}{x^2}\left(\frac{y}{x}\right)^z$, $\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}=\frac{z(z-1)}{y^2}\left(\frac{y}{x}\right)^z$, $\frac{\partial^2 f}{\partial z^2}=\left(\frac{y}{x}\right)^z\ln^2\frac{y}{x}$, $\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}=-\frac{z^2}{xy}\left(\frac{y}{x}\right)^z$,

$\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial z}=-\frac{1}{x}\left(\frac{y}{x}\right)^z\left(1+z\ln\frac{y}{x}\right)$, $\frac{\partial^2 f}{\partial y\partial z}=\frac{1}{y}\left(\frac{y}{x}\right)^z\left(1+z\ln\frac{y}{x}\right)$. **5.47.** r. **5.48.** $r^2\cos\theta$. **5.53.** $\Delta f = 0{,}53$,

$df = 0{,}5$. **5.54.** $\Delta f = -0{,}137$, $df = -0{,}1$. **5.55.** $df=\frac{x\,dx}{\sqrt{x^2+y^2}\,(y+\sqrt{x^2+y^2})}+\frac{dy}{\sqrt{x^2+y^2}}$.

5.56. $df=\frac{y}{x^2\cos^2(y^2/x)}(2x\,dy-y\,dx)$. **5.57.** $df=-\frac{z}{(x^2+y^2)^{3/2}}(x\,dx+y\,dy)+\frac{1}{(x^2+y^2)^{1/2}}dz$.

5.58. $df=(xy)^z\left(\frac{z}{x}dx+\frac{z}{y}dy+\ln(xy)dz\right)$. **5.59.** $df = 3x(x + 2y)dx + 3(x^2 - y^2)dy$,

$d^2f = 6((x + y)dx^2 + 2x\,dx\,dy - y\,dy^2)$. **5.60.** $df=(x\,dy-y\,dx)\left(\frac{1}{x^2}+\frac{1}{y^2}\right)$,

$d^2f=2\left(\frac{y}{x^3}dx^2+\left(\frac{1}{y^2}-\frac{1}{x^2}\right)dx\,dy-\frac{x}{y^3}dy^2\right)$. **5.61.** $df = e^{xy}((y^2 + xy + 1)dx + (x^2 + xy + 1)dy)$,

$d^2f = e^{xy}(y(y^2 + xy + 2)dx^2 + 2(x + y)(xy + 2)dx\,dy + x(x^2 + xy + 2)dy^2)$.

5.62. $df=\left(\ln\frac{y}{x}-1\right)dx+\frac{x}{y}dy$, $d^2f=-\frac{1}{x}dx^2+\frac{2}{y}dx\,dy-\frac{x}{y^2}dy^2$.

5.63. $df = (y + z)dx + (z + x)dy + (x + y)dz$, $d^2f = 2(dx\,dy + dx\,dz + dy\,dz)$.
5.64. $df = e^{xyz}(yz\,dx + zx\,dy + xy\,dz)$, $d^2f = e^{xyz}((yz\,dx + zx\,dy + xy\,dz)^2 + 2(z\,dx\,dy + x\,dy\,dz + y\,dz\,dx))$. **5.65.** 8,29. **5.66.** 2,96. **5.67.** 1,004. **5.68.** 9,9435. **5.69.** $1{,}2\pi$ м³. **5.70.** Уменьшится примерно на 1,6 см (точнее, на 11/7 см). **5.71.** До 8 м². **5.73.** $f(x, y) = 12 + 15(x - 2) + 6(x - 2)^2 + 3(x - 2)(y - 1) - 6(y - 1)^2 + (x - 2)^3 - 2(y - 1)^3$.

5.74. $f(x,y)=1+y+\frac{1}{2!}(y^2-x^2)+\frac{1}{3!}(y^3-3x^2y)+o(\rho^3)$, где $\rho=\sqrt{x^2+y^2}$.

5.75. $f(x,y,z)=(x-1)+(y-1)-\frac{1}{2}(x-1)^2-\frac{1}{2}(y-1)^2+z^2+o(\rho^2)$,

где $\rho=\sqrt{(x-1)^2+(y-1)^2+z^2}$.

5.76. $f(x, y, z) = 8 - 8(y + 1) + 4(z - 2) + (x - 1)^2 + (y + 1)^2 + (z - 2)^2 - 2(x - 1)(y + 1) - 2(x - 1)(z - 2) - 2(y + 1)(z - 2)$. **5.77.** $\frac{dz}{dt} = e^{2x-3y}(2\sec^2 t - 3(2t-1))$.

5.78. $\frac{dz}{dt} = x^y\left(\frac{y}{xt} + \ln x \cos t\right)$. **5.79.** $\frac{dz}{dt} = \frac{2e^{2t}(x-y)}{x^2+y^2}$. **5.80.** $\frac{du}{dt} = \frac{x(z+2yt^2) - yzte^t}{tx^2}$.

5.81. $\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{e^x}{e^x+e^y}$, $\frac{dz}{dx} = \frac{e^x + e^y(x^2+1)}{e^x+e^y}$. **5.82.** $\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{y}{y^2+(x+1)^2}$, $\frac{dz}{dx} = \frac{y(1-2(x+1)^2)}{y^2+(x+1)^2}$.

5.83. $\frac{\partial z}{\partial x} = 2u\left(\frac{ux}{v} - \frac{y\ln v}{x^2}\right)$, $\frac{\partial z}{\partial y} = 2u\left(\frac{\ln v}{x} + \frac{uy}{v}\right)$.

5.84. $dz = ((2uv - v^2)\sin y - (u^2 - 2uv)y\sin x)dx + ((2uv - v^2)x\cos y + (u^2 - 2uv)\cos x)dy$.

5.85. $\frac{\partial z}{\partial x} = 2xf'_v(u,v) - \frac{2y}{(x+y)^2}f'_u(u,v)$, $\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{2x}{(x+y)^2}f'_u(u,v) - 3f'_v(u,v)$.

5.86. $\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{2x}{x^2-y^2}f'_u(u,v) + y^2 f'_v(u,v)$, $\frac{\partial z}{\partial y} = 2xyf'_v(u,v) - \frac{2y}{x^2-y^2}f'_u(u,v)$.

5.87. $d^2u = 4f''(t)(x\,dx + y\,dy + z\,dz)^2 + 2f'(dx^2 + dy^2 + dz^2)$.

5.88. $d^2u = a^2 f''_{uu}(u,v)dx^2 + 2abf''_{uv}(u,v)dx\,dy + b^2 f''_{vv}(u,v)dy^2$. **5.89.** $4x + 2y - z - 5 = 0$, $\frac{x-2}{4} = \frac{y-1}{2} = \frac{z-5}{-1}$. **5.90.** $x + 2y + 3z - 14 = 0$, $\frac{x-1}{1} = \frac{y-2}{2} = \frac{z-3}{3}$. **5.91.** $x - y - 2z + 1 = 0$, $\frac{x-\pi/4}{1} = \frac{y-\pi/4}{-1} = \frac{z-1/2}{-2}$. **5.92.** $x + ez - 2 = 0$, $\frac{x-1}{1} = \frac{y-\pi}{0} = \frac{z-1/e}{e}$. **5.93.** $f_{\min} = -9$ при $x = 0$, $y = 3$. **5.94.** Экстремумов нет. **5.95.** $f_{\max} = 28$ при $x = 4$, $y = -1$. **5.96.** $f_{\min} = -8$ при $x = -1$, $y = 4$. **5.97.** $f_{\max} = 1/64$ при $x = 1/4$, $y = 1/2$. **5.98.** $f_{\min} = -4/3$ при $x = 0$, $y = -2/3$. В стационарной точке $(2, -2/3)$ экстремума нет. **5.99.** $f_{\min} = 30$ при $x = 5$, $y = 2$. **5.100.** $f_{\min} = 10 - 18\ln 3$ при $x = 1$, $y = 3$. **5.101.** Экстремумов нет. **5.102.** $f_{\min} = -14$ при $x = 2$, $y = -3$, $z = 1$. **5.103.** $f_{\max} = 2$ при $x = 1$, $y = 0$, $z = 0$. **5.104.** Экстремумов нет. **5.105.** $f_{\text{наиб}} = 6$ при $x = 1$, $y = 0$; $f_{\text{наим}} = 3$ при $x = 0$, $y = 1$. **5.106.** $f_{\text{наиб}} = 6$ при $x = 3$, $y = 0$ и при $x = 0$, $y = 3$; $f_{\text{наим}} = -1$ при $x = y = 1$. **5.107.** $f_{\text{наиб}} = 1/2$ при $x = y = \pm 1/\sqrt{2}$; $f_{\text{наим}} = -1/2$ при $x = -y = \pm 1/\sqrt{2}$. **5.108.** $f_{\text{наиб}} = \frac{2}{3\sqrt{3}}$ при $x = \frac{1}{\sqrt{3}}$, $y = \pm\sqrt{\frac{2}{3}}$; $f_{\text{наим}} = -\frac{2}{3\sqrt{3}}$ при $x = -\frac{1}{\sqrt{3}}$, $y = \pm\sqrt{\frac{2}{3}}$. **5.109.** $f_{\min} = -19/4$ при $x = y = -3/2$. **5.110.** $f_{\min} = 2$ при $x = y = 1$.

5.111. $f_{\min} = -1 - 2\sqrt{2}$ при $x = -y = -\frac{1}{\sqrt{2}}$; $f_{\max} = 1 - 2\sqrt{2}$ при $x = -y = \frac{1}{\sqrt{2}}$. **5.112.** $f_{\min} = -\sqrt{5}$ при $x = -2/\sqrt{5}$, $y = -1/\sqrt{5}$; $f_{\max} = \sqrt{5}$ при $x = 2/\sqrt{5}$, $y = 1/\sqrt{5}$. **5.113.** $f_{\min} = -18$ при $x = -4$, $y = -2$, $z = 4$; $f_{\max} = 18$ при $x = 4$, $y = 2$, $z = -4$. **5.114.** $f_{\min} = 4$ при $x = y = 0$, $z = \pm 2$; $f_{\max} = 16$ при $x = \pm 4$, $y = z = 0$; при $x = z = 0$, $y = \pm 3$ экстремума нет. **5.115.** Куб с длиной ребра a. **5.116.** Куб с длиной ребра $d\sqrt{3}$. **5.117.** Слагаемые равны $a/3$. **5.118.** Сомножители равны $\sqrt[4]{a}$. **5.119.** $\frac{dy}{dx} = \frac{1+y^2}{y^2}$, $\frac{d^2y}{dx^2} = -\frac{2(1+y^2)}{y^5}$. **5.120.** $\frac{dy}{dx} = -\frac{y}{x}$, $\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{2y}{x^2}$.

5.121. $\frac{\partial z}{\partial x}=1,\ \frac{\partial z}{\partial y}=\frac{1}{2}$. **5.122.** $\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{yz(x+z)-z^3}{z^3+2xy(x+z)},\ \frac{\partial z}{\partial y}=\frac{xz(x+z)}{z^3+2xy(x+z)}$.

5.123. $dz=\frac{zdx-z(1+x^2z^2)dy}{y(1+x^2z^2)-x}$. **5.124.** $dz=\frac{y^2(z+3x^2)dx+(3y^4+ze^{z/y})dy}{y(e^{z/y}-xy)}$.

5.125. $\frac{dy}{dx}=-\frac{3}{2},\ \frac{dz}{dx}=\frac{5}{3},\ \frac{d^2y}{dx^2}=-\frac{3}{8},\ \frac{d^2z}{dx^2}=\frac{5}{18}$. **5.126.** $dy=-\frac{4x}{5y}dx,\ dz=\frac{x}{5z}dx,$

$d^2y=-\frac{4}{25y^3}(4x^2+5y^2)dx^2,\ d^2z=\frac{1}{25z^2}(5z^2-x^2)dx^2$. **5.127.** $du=\frac{(y-u)dx+(y-v)dy}{x-y},$

$dv=\frac{(x-u)dx+(x-v)dy}{y-x},\ d^2v=-d^2u=\frac{2}{(x-y)^2}((y-u)dx^2+(y-v+u-x)dxdy+(v-x)dy^2)$.

5.129. $2x+7y-5z+4=0,\ \frac{x-2}{2}=\frac{y-1}{7}=\frac{z-3}{-5}$. **5.130.** $x+y-4z=0,\ \frac{x-2}{1}=\frac{y-2}{1}=\frac{z-1}{-4}$.

5.131. Точки с координатами $x=\pm\frac{1}{3},\ y=\pm\frac{4}{3},\ z=\pm\frac{4}{3}$ (знаки выбираются независимо друг от друга). **5.132.** $x+4y+6z=\pm 21$.

ГЛАВА 6

6.1. 8/3. **6.2.** $\frac{1}{2}\ln\frac{14}{11}$. **6.3.** $\frac{a^2}{4}(\pi+4)$. **6.4.** $3\pi/2$. **6.5.** 45/4. **6.6.** 0. **6.7.** 1/2. **6.8.** 1/40.

6.9. $\ln\frac{4}{3}$. **6.10.** −24. **6.11.** $-10\frac{2}{3}$. **6.12.** 9,6. **6.13.** $\int\limits_1^5 dx\int\limits_2^4 f(x,y)dy=\int\limits_2^4 dy\int\limits_1^5 f(x,y)dx$.

6.14. $\int\limits_2^4 dy\int\limits_y^{y+3} f(x,y)dx=\int\limits_2^4 dx\int\limits_2^x f(x,y)dy+\int\limits_4^5 dx\int\limits_2^4 f(x,y)dy+\int\limits_5^7 dx\int\limits_{x-3}^4 f(x,y)dy$.

6.15. $\int\limits_{-1}^1 dy\int\limits_{y^2-1}^{1-y^2} f(x,y)dx=\int\limits_{-1}^0 dx\int\limits_{-\sqrt{1+x}}^{\sqrt{1+x}} f(x,y)dy+\int\limits_0^1 dx\int\limits_{-\sqrt{1-x}}^{\sqrt{1-x}} f(x,y)dy$.

6.16. $\int\limits_0^{\sqrt3} dy\int\limits_{2-\sqrt{4-y^2}}^{\sqrt{4-y^2}} f(x,y)dx=\int\limits_0^1 dx\int\limits_0^{\sqrt{4x-x^2}} f(x,y)dy+\int\limits_1^2 dx\int\limits_0^{\sqrt{4-x^2}} f(x,y)dy$. **6.17.** $\frac{4}{3}a^4$.

6.18. 112/9. **6.19.** 1/4. **6.20.** 68/15. **6.21.** $128\pi/3$. **6.22.** $2\pi/3$. **6.23.** $\frac{45}{64}\pi a^4$.

6.24. $32(\sqrt3-\sqrt2)$. **6.25.** $\frac{1}{3}\int\limits_a^b du\int\limits_p^q f(\sqrt[3]{u^2v},\sqrt[3]{uv^2})dv$. **6.26.** $\int\limits_1^3 du\int\limits_0^3 f(v,u-v)dv$.

6.27. $\frac{1}{2}\int\limits_p^q du\int\limits_a^b f\left(\sqrt{\frac{u}{v}},\sqrt{uv}\right)\frac{dv}{v}$. **6.28.** $\frac{1}{5}\int\limits_a^b du\int\limits_p^q u^{-8/5}v^{-1/5}f(u^{-2/5}v^{1/5},u^{-1/5}v^{3/5})dv$.

6.29. $\frac{1}{2}(15-16\ln 2)$. **6.30.** 64/3. **6.31.** $\frac{3}{4}(\pi+2)$. **6.32.** $3\pi/2$. **6.33.** $4\sqrt3\pi$. **6.34.** $\frac{\sqrt3}{2}a^2$.

6.35. $\frac{8\sqrt2}{3}$. **6.36.** $2\pi a^2(2-\sqrt2)$. **6.37.** 8π. **6.38.** 1/6. **6.39.** 88/105. **6.40.** $\frac{2}{3}\pi(2-\sqrt2)$.

6.41. $\frac{2}{3}\pi\delta R^2$. **6.42.** $\frac{a^2b}{6}$. **6.43.** $M_x=\frac{\pi}{24},\ M_y=1-\frac{\pi^2}{12}$. **6.44.** $M_x=\frac{4}{3}a^3,\ M_y=\frac{5}{8}\pi a^3$.

6.45. $\bar{x}=-\frac{1}{2},\ \bar{y}=\frac{8}{5}$. **6.46.** $\bar{x}=\frac{2}{5},\ \bar{y}=\frac{1}{2}$. **6.47.** $I_x=\frac{1}{12},\ I_y=\frac{7}{12}$. **6.48.** $I=\pi R^4/4$.

6.49. $\int\limits_0^6 dx \int\limits_0^{(12-2x)/3} dy \int\limits_0^{(12-2x-3y)/4} f(x,y,z)dz$. **6.50.** $\int\limits_{-R}^{R} dx \int\limits_{-\sqrt{R^2-x^2}}^{\sqrt{R^2-x^2}} dy \int\limits_{-\sqrt{R^2-x^2-y^2}}^{\sqrt{R^2-x^2-y^2}} f(x,y,z)dz$.

6.51. $\int\limits_0^4 dz \int\limits_{-2\sqrt{z}}^{2\sqrt{z}} dx \int\limits_{-\sqrt{4z-x^2}}^{\sqrt{4z-x^2}} f(x,y,z)dy$. **6.52.** $\int\limits_{-1}^{1} dx \int\limits_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} dy \int\limits_{\sqrt{x^2+y^2}}^{1} f(x,y,z)dz$. **6.53.** 1/6.

6.54. 81/4. **6.55.** $a^4/8$. **6.56.** 0. **6.57.** $\frac{1}{2}\pi a^2h^2$. **6.58.** $\frac{\pi a^4}{6}$. **6.59.** $64\pi/3$. **6.60.** $\pi/10$.

6.61. 1/105. **6.62.** $6\pi a^2$. **6.63.** $\frac{32\pi}{3}(\sqrt{2}-1)$. **6.64.** $\pi/16$. **6.65.** $32\pi/3$. **6.66.** $9\pi(\sqrt{3}-\sqrt{2})$.

6.67. $m=\frac{1}{5}\pi\gamma_0R^2H,\quad \gamma_{\text{ср}}=\frac{3}{5}\gamma_0$. **6.68.** $m=\frac{31}{5}\pi\gamma_0a^3,\quad \gamma_{\text{ср}}=\frac{93}{140}\gamma_0$. **6.69.** $\left(0,0,\frac{2}{3}H\right)$.

6.70. $\left(0,0,\frac{3}{4}H\right)$. **6.71.** $\frac{1}{6}\pi HR^4$. **6.72.** $\frac{4}{9}\pi\gamma_0R^5$. **6.73.** 1/4. **6.74.** $\pi/2$. **6.75.** 4π. **6.76.** 1.

ГЛАВА 7

7.5. $y(\ln|x^2-1|+1)=1$. **7.6.** $y(1+x)=1$. **7.7.** $y=2-3\cos x$. **7.8.** $x=y\cdot e^{y+1}$. **7.9.** $x=y\ln\frac{y}{2}$. **7.10.** $x^2+y=xy'$. **7.11.** $xy'+y=0$. **7.12.** $y'=y\,\mathrm{th}\,x$. **7.13.** $2xyy'=y^2+x^2$. **7.14.** $y'^3=4y(xy'-2y)$. **7.15.** $y=(x-1)y'-y'^2$. **7.16.** $y^2+y'^2=1$. **7.17.** $y=1$. **7.18.** $y=-x$. **7.19.** $y=\frac{x^2}{4}$. **7.20.** $y=0,\ 27y=4x^3$. **7.21.** $(y-1)^3+(x-1)^3=C$. **7.22.** $x+y=C(1-xy)$. **7.23.** $y^2=\ln(1+e^x)^2+C$. **7.24.** $4\sqrt{1+y^2}-\sqrt{1+4x^2}=C$. **7.25.** $y^2-x^2+\frac{1}{y}-\frac{1}{x}=C$. **7.26.** $y=e^{C\,\mathrm{tg}\frac{x}{2}}$.

7.27. $\ln y=\ln\left|\mathrm{tg}\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{4}\right)\right|$. **7.28.** $2\ln|\sin y|=e^{(x-1)^2}-1$. **7.29.** $\mathrm{arctg}\,e^x=\frac{y^3}{3}+\frac{\pi}{4}$.

7.30. $2(x-2)=\ln^2 y$. **7.31.** $y^2-x^2=C$. **7.32.** $y^2+x^2=C$. **7.33.** $e^x+e^{-y}=C$. **7.34.** $y=\ln\mathrm{tg}(e^x+C)$. **7.35.** $\sin y\cos x=C$. **7.36.** $y=Ce^{\sqrt{1-x^2}},\ x=\pm1$. **7.37.** $\mathrm{tg}\,x\cdot\mathrm{tg}\,y=C$. **7.38.** $xy=Ce^{y-x}$. **7.39.** $x+y+2(\sqrt{y}-\sqrt{x})+2\ln\left|(\sqrt{x}+1)(\sqrt{y}-1)\right|=C,\quad y=1,\quad x=1$.

7.40. $2\sin x+\ln\left|\mathrm{tg}\frac{y}{2}\right|=C,\ y=\pi k,\ k\in\mathbb{Z}$. **7.41.** $y=a\sin\left(\arcsin\frac{x}{a}+C\right),\ y=\pm a$. **7.42.** $x=Cye^{\frac{y+x}{xy}}$, $C\in\mathbb{R}\backslash\{0\},\ y=0$. **7.43.** $\frac{1}{2}\ln^2 y=\ln\left|\mathrm{tg}\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{4}\right)\right|$. **7.44.** $y=e^{\frac{\pi}{4}-\mathrm{arctg}\,x}$.

7.45. $\sqrt{1+x^2}+\sqrt{1+y^2}=\sqrt{2}+1$. **7.46.** $x^2-4=\ln^2 y$. **7.47.** $y=\pm x\sqrt{2\ln|x|+C}$.

7.48. $1+\sin\frac{y}{x}=Cx\cos\frac{y}{x},\ y=\frac{\pi}{2}(1+2k)x$, где $k\in\mathbb{Z}$. **7.49.** $\mathrm{arctg}\frac{y}{x}=\ln|C\sqrt{y^2+x^2}|$.

7.50. $\frac{2x}{y-x}=\ln|C(y-x)^3(y+x)|,\ y=\pm x$. **7.51.** $x^2-y^2=Cy,\ y=\pm x$. **7.52.** $y=x\cdot e^{Cx}$.

7.53. $\frac{y}{x}\mathrm{arctg}\frac{y}{x}=\ln|C\sqrt{x^2+y^2}|$. **7.54.** $\ln x=\frac{y}{x}\left(\ln\frac{y}{x}-1\right)+C$. **7.55.** $y^2=4x^2\ln|Cx|$.

7.56. $x(x+2y)=C$. **7.57.** $y+\sqrt{x^2+y^2}=Cx^2,\ C\neq0,\ x=0$. **7.58.** $\frac{x}{x^2-y^2}=C,\ y=\pm x$.

7.59. $xe^{\sqrt{y/x}}=C,$ $y = 0$. **7.60.** $y = x\arccos(\ln|Cx|)$. **7.61.** $\ln|y|-\cos\dfrac{3x}{y}=C.$

7.62. $(y + 2x)^3(y + x)^2 = C$. **7.63.** $x^2 - xy + y^2 + x - y = C$. **7.64.** $x + 2y + 3\ln|x + y - 2| = C$, $x + y = 2$. **7.65.** $(y - x + 2)^2 + 2x = C$. **7.66.** $3y^3 = 8(x^2 - y^2)$. **7.67.** $y = x\arcsin x$.

7.68. $\operatorname{arctg}\dfrac{y}{2x}-2\ln|x|=\dfrac{\pi}{4}.$ **7.69.** $y = -x\ln|1 - \ln|x||$. **7.70.** $y = C\cos x + \sin x$.

7.71. $y=\dfrac{1}{5}x^3+\dfrac{C}{x^2}.$ **7.72.** $y = x^2 + Cx$. **7.73.** $y=C(x+1)^2+\dfrac{1}{2}(x+1)^4.$ **7.74.** $y = C\cdot e^{-\sin x} + \sin x - 1$. **7.75.** $y^2 = x(C - \ln|x|)$. **7.76.** $y = x^2 + Cx$. **7.77.** $y = x^2(1 + Ce^{1/x})$.

7.78. $y=Ce^{x^2}+\dfrac{1}{2}x^2.$ **7.79.** $y = x^n(e^x + C)$. **7.80.** $x = Cy^2e^{1/y} + y^2$. **7.81.** $y=e^{-x^2}(C_1+x^2).$

7.82. $y=\dfrac{4x}{4C-x^4},$ $y=0.$ **7.83.** $y=\dfrac{1}{\sqrt{x+0{,}5+Ce^{2x}}},$ $y=0.$ **7.84.** $y=\dfrac{1}{\sin^2 x(\cos x+C\sin x)},$ $y=0$. **7.85.** $y=\dfrac{-1}{(x+1)(C+\ln(x+1))},$ $y = 0$. **7.86.** $y=x^4\left(C+\dfrac{1}{2}\ln|x|\right)^2,$ $y = 0$.

7.87. $y=\dfrac{1}{\sqrt{x^2+1+Ce^{x^2}}},$ $y = 0$. **7.88.** $y=\dfrac{x^2}{Cx+1},$ $y = 0$. **7.89.** $y=\dfrac{x^2}{C(x-1)+1},$ $y = 0$.

7.90. $x^2 - xy + y^2 = C$. **7.91.** $xy - x^3 - 2y^2 = C$. **7.92.** $3x^2y^2 + x^4 + y^3 = C$.

7.93. $\ln|x+y|+\dfrac{y}{x+y}=C.$ **7.94.** $x^2 + y^2 = Cx^3$. **7.95.** $\dfrac{1}{2}x^2+\dfrac{1}{2}y^2-\operatorname{arctg}\dfrac{x}{y}=C.$

7.96. $x^2 - y^2 = Cy^3$. **7.97.** $x\sin y = C$. **7.98.** $x\sin y + y\cos x = C$. **7.99.** $x\cdot e^y + ye^x = C$.

7.100. $x^2 + ye^{-x} = C$. **7.101.** $\sqrt{1+x^2+y^2}+\ln\sqrt{\dfrac{x-y}{x+y}}=C.$ **7.102.** $\sqrt{x^2+y^2}+\dfrac{y}{x}=C.$

7.103. $x^2y+\ln\left|\dfrac{x}{y}\right|=C,$ $x = 0$, $y = 0$. **7.104.** $2xy^2+\dfrac{1}{xy}=C,$ $x = 0$, $y = 0$.

7.105. $(y^2 + x^2)^2 + 2a(y^2 - x^2) = C$. **7.106.** $xy(C - x^2 - y^2) = -1$, $x = 0$, $y = 0$.
7.107. $x = 2p + 6p^2 + C$, $y = p^2 + 4p^3$; $y = 0$ (особое решение).

7.108. $x=2\sqrt{p^2+1}-\ln(1+\sqrt{p^2+1})+\ln p+C,$ $y=p\sqrt{p^2+1};$ $y = 0$ (особое решение).

7.109. $x = e^p + C$, $y = (p - 1)e^p$. **7.110.** $y=Cx+\dfrac{1}{2}(C^2-x^2);$ $y = -x^2$ (особое решение).

7.111. $x = Cy + C^2$; $x=-\dfrac{1}{4}y^2$ (особое решение). **7.112.** $x = p^3 - p + 2$, $y=\dfrac{3}{4}p^4-\dfrac{p^2}{2}+C.$

7.113. $x = p\cos p$, $y = p^2\cos p - p\sin p - \cos p + C$. **7.114.** $Cx = \ln Cy$; $y = e^x$ (особое решение).

7.115. $y = \pm\ln|x^2 - 1|$. **7.116.** $y^2 = 4x$ и $xy^2 = 4$. **7.117.** $y=\pm\dfrac{x}{x-1}.$ **7.118.** $(x + C)^2 + y^2 = a^2$.

7.119. $y^2 = \pm 2a(x + C)$. **7.120.** $y=2\operatorname{ch}\dfrac{x}{2}.$ **7.121.** $y^2 = 4(x - 1)$ и $\dfrac{(x+1)^2}{4}+\dfrac{y^2}{8}=1.$ **7.122.** $x^2 + y^2 = 2y$. **7.123.** $x = y(3\pm\ln y)$. **7.124.** $y^2 = 2x + 1 - e^{2x}$. **7.125.** $y=\dfrac{1}{x}-x^2.$ **7.126.** $y=x\sqrt{5x^2-1}.$

7.127. 18,1 кг. *Указание.* Уравнение имеет вид $\dfrac{dx}{dt}=k\left(\dfrac{1}{3}-\dfrac{x}{300}\right),$ где k — коэффициент пропорциональности. **7.128.** 5,2 кг. *Указание.* Уравнение имеет вид $\dfrac{dx}{dt}=kx\left(\dfrac{10-x}{90}-\dfrac{1}{3}\right).$

7.129. Через 1575 лет. **7.130.** $v = 0{,}5 \cdot \sqrt{29}$ м/с. *Указание.* Уравнение имеет вид $\frac{dv}{dt} = 20\frac{t}{v}$.

7.131. $t = \dfrac{h(v_1 - v_0)}{v_0 v_1 \ln\frac{v_1}{v_0}} = \dfrac{3}{40\ln 2{,}5}$ с. *Указание.* Уравнение имеет вид $m\frac{dv}{dt} = kv^2$.

7.132. $t = -\dfrac{5\ln 10}{\ln 0{,}8}$ с. *Указание.* Уравнение имеет вид $m \cdot \frac{dv}{dt} = -kv$.

7.133. $T = 20 + 80(0{,}5)^{t/20} = 60$ мин. *Указание.* Уравнение имеет вид $\frac{dT}{dt} = k(T - T_0)$. **7.134.** За 6 мин 5 с. *Указание.* Уравнение имеет вид $\omega v(h)\,dt = -S(h)\,dh$, где ω — площадь отверстия, $v(h)$ — скорость истечения воды, h — уровень жидкости, $S(h)$ — площадь поперечного сечения сосуда, t — время. **7.135.** 0,82 кг. *Указание.* Уравнение имеет вид $\frac{ds}{dt} = ks(s+6)$. Влага, содержащаяся в пористом веществе, испаряется в окружающее пространство со скоростью, пропорциональной количеству влаги в данном веществе, а также пропорциональной разности между влажностью окружающего воздуха и влажностью насыщенного воздуха. **7.136.** 32,2 мин. **7.137.** $T = \frac{2}{3}x$; 864 000 кал. *Указание.* Уравнение имеет вид $\frac{dT}{dx} = -\frac{Q}{kA}$, где $Q = const$. В силу закона Ньютона скорость Q, с которой теплота распространяется через площадку A, перпендикулярную оси Ox, равна $Q = -kS\frac{dT}{dt}$, где k — коэффициент теплопроводности данного вещества, T — температура, t — время, S — площадь A; $(k = 0{,}0015)$.

7.138. $y_0' < x_0^2$. **7.139.** $y_0' > 0$. **7.140.** $x_0 \neq 0$ и y_0' любое, $y_0 \neq \frac{\pi}{2} + \pi k$, $k \in \mathbb{Z}$.

7.141. $x_0 \neq y_0'$, $y_0 \neq 0$, y_0'' — любое. **7.147.** $y = (C_1 + \operatorname{arctg} x)x - \ln\sqrt{1+x^2} + C_2$.

7.148. $y = \frac{x^4}{24} - \sin x + C_1x^2 + C_2x + C_3$. **7.149.** $y = \ln|\sin x| + C_1x^2 + C_2x + C_3$.

7.150. $y = \frac{x^3}{6}\ln|x| + C_1x^3 + C_2x^2 + C_3x + C_4$. **7.151.** $C_1^2 y = C_1x - \ln|C_1x+1| + C_2$, $y = \frac{x^2}{2} + C$, $y = C$. **7.152.** $y = x^2\ln|x| + C_1x^2 + C_2x + C_3$. **7.153.** $2y = C_1\cos 2x + (1 + 2C_1)x^2 + C_2x + C_3$.

7.154. $y = C_1(x - e^{-x}) + C_2$. **7.155.** $2y = C_1x^2 - C_1^2(x + C_1)\ln|x + C_1| + C_2x + C_3$.

7.156. $y = C_1\sin x + C_2 - x - \frac{1}{2}\sin 2x$. **7.157.** $y = \frac{1}{C_1}e^{C_1x+1}\left(x - \frac{1}{C_1}\right) + C_2$, $y = \frac{ex^2}{2} + C$.

7.158. $y = C_1\ln x + C_2x + C_3 - \frac{1}{2x}$. **7.159.** $y = C_2e^{C_1x}$. **7.160.** $y = C_2xe^{C_1x}$. *Указание.* Уравнение однородное относительно y, y', y''. **7.161.** $y = C_2\sqrt{|C_1 + x^2|}$.

7.162. $4(C_1y - 1) = C_1^2(x + C_2)^2$, $C_1 \neq 0$. **7.163.** $y - C_1\ln|y| = x + C_2$, $y = C$.

7.164. $y = \pm\frac{2}{3}(x + C_1)^{3/2} + C_2$. **7.165.** $y = Cx^2 + e^x(x - 1)$. **7.166.** $y = \frac{x^3 - 3x^2 + 6x + 4}{6}$.

7.167. $y = \frac{x^2+1}{2}$. **7.168.** $y = x + 1$. **7.169.** $y = C_1e^{5x} + C_2e^x$. **7.170.** $y = C_1e^{3x} + C_2e^{-x}$.

7.171. $y=C_1\frac{\cos x}{x}+C_2\frac{\sin x}{x}$. **7.172.** $y=C_1\left(\frac{1}{2}\ln\left|\frac{1+x}{1-x}\right|-1\right)+C_2x$. **7.173.** $y=C_1x+\frac{C_2}{x}+\frac{C_3}{x^2}$.

7.174. $y''+y'=0$. **7.175.** $y''-4y'+5y=0$. **7.176.** $y''-\frac{6}{x}y'+\frac{12}{x^2}y=0$. **7.177.** $y'''-y''=0$.

7.178. $y'''+y'=0$. **7.179.** $y'''-2y''+y'-2y=0$. **7.180.** $y''-8y'+15y=0$.
7.181. $y=-\cos x+\sin x$. **7.182.** $y=e^x+3\sin x+2\cos x$. **7.183.** $y=e^x+2e^{2x}+3e^{3x}$.
7.184. $y=e^x(x\ln|x|+C_1x+C_2)$. **7.185.** $y=(e^{-x}+e^{-2x})\ln(e^x+1)+C_1e^{-x}+C_2e^{-2x}$.
7.186. $y=\sin 2x\ln|\cos x|-x\cos 2x+C_1\cos 2x+C_2\sin 2x$.
7.187. $y=-x\cos x+\sin x\ln|\sin x|+C_1\cos x+C_2\sin x$. **7.188.** $C_1e^{2x}+C_2e^{-4x}$.
7.189. $C_1e^{3x}+C_2e^{5x}$. **7.190.** $C_1e^{4x}+C_2xe^{4x}$. **7.191.** $(C_1+C_2x+C_3x^2)e^{-x/2}$.

7.192. $C_1e^{3x}\cos 2x+C_2e^{3x}\sin 2x$. **7.193.** $C_1\cos\frac{x}{2}+C_2\sin\frac{x}{2}$. **7.194.** $e^{-x}(C_1\cos 3x+C_2\sin 3x)$.

7.195. $(C_1+C_2x)e^x+C_3e^{-2x}$. **7.196.** $(C_1+C_2x)e^{-x}+C_3e^{3x}$.

7.197. $C_1e^{-3x}+e^{3x/2}\left(C_2\cos\frac{x\sqrt{27}}{2}+C_3\sin\frac{x\sqrt{27}}{2}\right)$.

7.198. $C_1e^{x\sqrt{2}}+C_2e^{-x\sqrt{2}}+C_3\cos(x\sqrt{2})+C_4\sin(x\sqrt{2})$.

7.199. $e^x(C_1\cos x+C_2\sin x)+e^{-x}(C_3\cos x+C_4\sin x)$. **7.200.** $C_1e^{2x}+e^{-x}(C_2\cos 2x+C_3\sin 2x)$.
7.201. $C_1e^{-3x}+e^{-2x}(C_2\cos x+C_3\sin x)$. **7.202.** $C_1\cos x+C_2\sin x+C_3x\cos x+C_4x\sin x$.
7.203. $C_1+C_2x+C_3x^2+e^{3x}(C_4+C_5x)$. **7.204.** $C_1+C_2\cos 2x+C_3\sin 2x+x(C_4\cos 2x+C_5\sin 2x)$.
7.205. $C_1+C_2x+C_3x^2+C_4x^3+e^{-x}(C_5+C_6x)$. **7.206.** $y''-3y'-10y=0$, $y=C_1e^{-2x}+C_2e^{5x}$.
7.207. $y'''+2y''-25y'-50y=0$, $C_1e^{-2x}+(C_2+C_3x)e^{5x}$. **7.208.** $y'''+3y''+3y'+y=0$, $y=(C_1+C_2x+C_3x^2)e^{-x}$. **7.209.** $y''+4y'+13y=0$, $y=e^{-2x}(C_1\cos 3x+C_2\sin 3x)$. **7.210.** $y'''-3y''+9y'-27y=0$, $y=C_1e^{3x}+C_2\cos 3x+C_3\sin 3x$. **7.211.** $y^{\mathrm{IV}}-4y'''+9y''-4y'+8y=0$, $y=C_1\cos x+C_2\sin x+e^{2x}(C_3\cos 2x+C_4\sin 2x)$. **7.212.** $y''-y'-2y=0$. **7.213.** $y'''-y''-8y'+12y=0$. **7.214.** $y'''+y''+8y'-10y=0$. **7.215.** $y'''+6y''+12y'+8y=0$.

7.216. $y=(7-3x)e^{x-2}$. **7.217.** $y=2+e^{-x}$. **7.218.** $y=\frac{1}{5}e^{4x}+C_1e^{-x}+C_2e^{3x}$.

7.219. $y=(2x-2)e^x+C_1\cos x+C_2\sin x$. **7.220.** $y=xe^x+x^2+2+C_1e^x+C_2e^{-x}$.

7.221. $y=\left(\frac{x^2}{2}-\frac{x}{3}\right)e^x+C_1e^x+C_2e^{-2x}$. **7.222.** $y=-\frac{x}{5}e^{-4x}-\left(\frac{x}{6}+\frac{1}{36}\right)e^{-x}+C_1e^x+C_2e^{-4x}$.

7.223. $x=\left(\frac{t^3}{12}-\frac{t^2}{16}+\frac{t}{32}\right)e^t+C_1e^t+C_2e^{-3t}$. **7.224.** $x=\frac{e^{3t}}{37}(6\sin t-\cos t)+C_1e^{3t}+C_2e^{-3t}$.

7.225. $y=-5x^2+3x-29+C_1e^{2x}+C_2e^{-2x}\cos x+C_3e^{-2x}\sin x$.

7.226. $\tilde{y}=Ae^{3x}\cos x+Be^{3x}\sin x+Cx^2+Dx+E$.

7.227. $\tilde{y}=x(Ax+B)e^{-x}\cos 5x+x(Cx+D)e^{-x}\sin 5x$. **7.228.** $\tilde{y}=x(Ax+B)e^{4x}+C$.

7.229. $\tilde{y}=Ae^{-2x}\cos 3x+Be^{-2x}\sin 3x$.

7.230. $\tilde{y}=(Ax+B)e^x\cos 5x+(Cx+D)e^x\sin 5x+(Ex^2+Fx+G)e^{-x}$.

7.231. $\tilde{y}=Ae^x\cos x+Be^x\sin x+x(Cx^2+Dx+E)e^{-x}$. **7.232.** $x^2+y^2=z^2-2z(y-xy')$, $x+yy'=zz'-z'(y'-xy')$. **7.233.** $yy'+zz'=0$, $y^2+2xzz'=x^2+z'^2$.

7.234. $\frac{dx}{1}=\frac{dy}{z}=\frac{dz}{u}=\frac{du}{xyz-z^3}$. **7.235.** $\frac{dx}{1}=\frac{dy}{u}=\frac{du}{v}=\frac{dv}{w}=\frac{dw}{y^2}$.

7.236. $\frac{dx}{1}=\frac{dy}{v}=\frac{dz}{w}=\frac{du}{t}=\frac{dv}{v+w}=\frac{dw}{w+t}=\frac{dt}{t+v}$. **7.237.** $\frac{dx}{1}=\frac{dy}{v}=\frac{dz}{u}=\frac{du}{2y-z}=\frac{dv}{w}=\frac{dw}{x+y-z}$.

7.238. $\frac{dx}{1}=\frac{dy}{t}=\frac{dz}{x^2-uz}=\frac{dt}{z+u}=\frac{du}{v}=\frac{dv}{w}=\frac{dw}{-xy}$. **7.244.** $C_1x^2=2t+C_2$, $y^2=C_1(2t+C_2)$.

7.245. $x^2 = t^2 + C_1$, $y^2 = t^2 + C_2$. **7.246.** $y^2 = \dfrac{(C_1 + C_2 - x)^2}{2(C_2 - x)}$, $z^2 = \dfrac{(C_1 - C_2 + x)^2}{2(C_2 - x)}$.

7.247. $x = \ln|C_3(C_1 t + C_2)|$, $y = \ln|C_3(C_1 t + C_2)| - C_1$, $z = (C_1 + 1)t + C_2$.

7.248. $x^2 + y^2 + z^2 = C_1 y$, $z = C_2 y$. **7.249.** $x = C_1 t$, $y = C_2 e^t + \dfrac{2}{C_1}$. **7.250.** $z - 2y = C_1$, $2\sqrt{z - x - y} + y = C_2$. **7.251.** $x^2 = C_1 e^{2t} + C_2 e^{-2t}$, $y^2 = C_1 e^{2t} - C_2 e^{-2t}$. **7.252.** $y = x + \dfrac{1}{C_1 C_2} e^{-C_1 x}$, $z = C_2 e^{C_1 x}$; $y = x - e^x$, $z = e^{-x}$. **7.253.** $z = C_1 y$, $y^3 = \dfrac{3x^2}{2C_1} + C_2$; $z = y$, $y^3 = \dfrac{3}{2}x^2 + 1$.

ГЛАВА 8

8.1. 10. **8.2.** 73. **8.3.** 206. **8.4.** $2^{k+1} + 1$. **8.5.** $2^{m+k} - 2^k$. **8.6.** $2^{3k+1} + 2^{2k+1} - 2^{k+1} + 1$.

8.7. (110110). **8.8.** (11111010000). **8.9.** $n = (1\underbrace{0\ldots0}_{k-1 \text{ раз}}1)$. **8.10.** $n = (10\underbrace{1\ldots1}_{k-2 \text{ раз}})$ при $m \geq 4$; $n = (101)$ при $m = 3$; $n = (10)$ при $m = 2$. **8.11.** $(001) \preceq (101) \preceq (111)$; $(010) \preceq (110)$; $(101) \preceq (111)$; соседние: (001) и (101), (010) и (110), (101) и (100), (101) и (111), (110) и (111); противоположные: (001) и (110), (010) и (101). **8.12.** $(00110) \preceq (00111)$, $(00110) \preceq (10110)$, $(01010) \preceq (01011) \preceq (11011)$, $(01010) \preceq (11010) \preceq (11011)$; шесть пар соседних наборов; противоположных нет. **8.13.** C_n^k. **8.14.** 2^{n-1}. **8.15.** $n \cdot 2^{n-1}$. **8.16.** $C_n^k \cdot 2^{n-k}$. *Указание.* Любой набор, отстоящий от фиксированного набора $\tilde{\alpha}^n$ на расстоянии k, получается из $\tilde{\alpha}^n$ подходящей заменой некоторых k компонент на противоположные. **8.17.** C_{n-kr}^k. **8.22.** x_1 и x_2. **8.23.** x_1. **8.24.** x_1. **8.25.** x_4. **8.26.** $\tilde{\alpha}_f = (0001)$, $\tilde{\alpha}_f = (0010)$, $\tilde{\alpha}_f = (0100)$, $\tilde{\alpha}_f = (0110)$, $\tilde{\alpha}_f = (0111)$, $\tilde{\alpha}_f = (1000)$, $\tilde{\alpha}_f = (1001)$, $\tilde{\alpha}_f = (1011)$, $\tilde{\alpha}_f = (1101)$, $\tilde{\alpha}_f = (1110)$. **8.27.** 218. **8.30.** $2^{2^n - k}$. **8.31.** $2^{2^{n-1}}$. **8.32.** 2. **8.33.** $2^{2^n - 1} + C_{2^n}^{2^{n-1}}$. **8.34.** $\tilde{\alpha}_f = (0111010100010000)$; $N_f = \{(0001), (0010), (0011), (0101), (0111), (1011)\}$. **8.35.** $\tilde{\alpha}_f = (0101011111110010)$. **8.36.** Нет. *Указание.* Предполагая, что $x_i = 1$, если член C_i присутствует на заседании, и $x_i = 0$, если отсутствует, условия задачи с помощью булевой функции можно представить в виде $f(\tilde{x}^4) = \bar{x}_1\bar{x}_2x_3 \vee x_2\bar{x}_3x_4 \vee x_1x_4$, $f(x_1, 0, 0, x_4) = x_1x_4$ и $f(1, 0, 0, 1) = 1$. Следовательно, C_3 также может не участвовать. **8.37.** При условиях, указанных в задаче, проект может быть не принят. **8.38.** $\tilde{\alpha}_f = (0011)$. **8.39.** $\tilde{\alpha}_f = (1111)$. **8.40.** $\alpha_f = (00000100)$. **8.41.** $\alpha_f = (10111111)$. **8.42.** $\tilde{\alpha}_f = (0001001101011111)$. **8.43.** $\tilde{\alpha}_f = (1111001101101111)$. **8.56.** Да. **8.57.** Да. **8.58.** Да. **8.59.** Нет. **8.63.** Пары двойственных: f_1 и f_2, f_4 и f_5, f_6 и f_7; самодвойственных функций нет. **8.64.** $f_1 = f_6 = f_7^*$, $f_3^* = f_3$, $f_4^* = f_4$, $f_5^* = f_5$. **8.68.** 0, 1, x_1x_2, $x_1 \vee x_2$, $x_1 \downarrow x_2$, $x_1 \sim x_2$, $x_1 \oplus x_2$, $x_1|x_2$. **8.69.** 2^{n+1}. **8.70.** $\bar{x}_1\bar{x}_2x_3 \vee \bar{x}_1x_2x_3 \vee x_1x_2x_3$.

8.71. $\bar{x}_1\bar{x}_2\bar{x}_3 \vee \bar{x}_1\bar{x}_2x_3 \vee \bar{x}_1x_2x_3 \vee x_1\bar{x}_2x_3$.

8.72. $\bar{x}_1\bar{x}_2\bar{x}_3x_4 \vee \bar{x}_1\bar{x}_2x_3x_4 \vee \bar{x}_1x_2x_3x_4 \vee x_1\bar{x}_2x_3x_4 \vee x_1x_2x_3x_4$.

8.73. $\bar{x}_1\bar{x}_2\bar{x}_3\bar{x}_4 \vee \bar{x}_1\bar{x}_2x_3x_4 \vee x_1\bar{x}_2\bar{x}_3\bar{x}_4 \vee x_1\bar{x}_2x_3x_4 \vee x_1x_2x_3\bar{x}_4$.

8.74. а) $(x_1 \vee \bar{x}_2 \vee x_3)(\bar{x}_1 \vee x_2 \vee x_3)(\bar{x}_1 \vee x_2 \vee \bar{x}_3)$; б) $(x_1 \vee x_2 \vee x_3)(x_1 \vee \bar{x}_2 \vee x_3)(\bar{x}_1 \vee x_2 \vee x_3)$.

8.75. $(x_1 \vee x_2 \vee x_3 \vee x_4)(x_1 \vee \bar{x}_2 \vee x_3 \vee x_4)(x_1 \vee \bar{x}_2 \vee x_3 \vee \bar{x}_4)(x_1 \vee \bar{x}_2 \vee \bar{x}_3 \vee x_4)(\bar{x}_1 \vee \bar{x}_2 \vee x_3 \vee x_4)$.

8.76. $(x_1 \vee x_2 \vee \bar{x}_3 \vee x_4)(x_1 \vee \bar{x}_2 \vee x_3 \vee \bar{x}_4)(\bar{x}_1 \vee x_2 \vee x_3 \vee x_4)(\bar{x}_1 \vee \bar{x}_2 \vee x_3 \vee x_4)$.

8.77. $2^{n-1} + 2^{2n-1}$. **8.78.** $2^{2^n - C_n^{n/2}} - 1$ при n четном и $2^{2^n} - 1$ при нечетном n. **8.79.** $2^{2^n - n - 1} - 1$.

8.80. $2^{2^{n-1}} - 1$. **8.81.** $2^{2^{n-1}} - 1$, если n — нечетное; $2^{2^{n-1} + \frac{1}{2}C_n^{n/2}} - 1$, если n — четное. **8.82.** 2^n.

8.83. $2^n - n - 1$. **8.84.** $n + 1$. **8.85.** $(2^{n+1} + (-1)^n)/3$. **8.86.** $x_1 \oplus x_2$. **8.87.** $1 \oplus x_1 \oplus x_1x_2$.

8.88. $x_3 \oplus x_1x_3 \oplus x_1x_2x_3$. **8.89.** $1 \oplus x_1 \oplus x_2 \oplus x_1x_2 \oplus x_1x_3 \oplus x_2x_3$. **8.90.** $x_4 \oplus x_2x_4 \oplus x_2x_3x_4$.

8.91. $1 \oplus x_1 \oplus x_2 \oplus x_1x_2 \oplus x_1x_3 \oplus x_2x_3$. **8.92.** $x_1 \oplus x_1x_3 \oplus x_1x_2x_3$. **8.93.** $1 \oplus x_1x_2 \oplus x_1x_2x_3$. **8.94.** $x_1x_2x_3 \oplus x_1x_2 \oplus x_1x_3 \oplus x_2x_3 \oplus x_1 \oplus x_2 \oplus x_3$. **8.95.** $x_1x_2x_4 \oplus x_1x_2 \oplus x_2x_4 \oplus x_2 \oplus 1$.
8.96. а) 1 при $k = 0$; $(2^{C_n^k}-1)\cdot 2^L$, где $L = C_n^0 + C_n^2 + \ldots + C_n^{k-1}$ при $k \geq 1$; б) $2^{C_{2^n}^k}$.

8.97. $(2^{C_n^k}-1)\cdot 2^{L-1}$, где $L=\sum\limits_{m=0}^{k-1} C_n^m$. **8.98.** $\sum\limits_{i_1<i_2<\ldots<i_k} C_n^{i_1}\cdot C_n^{i_2}\cdot\ldots\cdot C_n^{i_k}$. **8.99.** 2^{n-2}. **8.100.** 2^{n-1}.

8.101. $f \notin T_0 \backslash T_1$. **8.102.** $f \notin T_0 \backslash T_1$. **8.103.** При нечетных $n \geq 2$. **8.104.** При всех $n \equiv 2 \pmod 4$ и $n \equiv 3 \pmod 4$ $f \notin T_0 \backslash T_1$. **8.105.** Нет. $A \subseteq L$. **8.106.** Нет. $A \subseteq T_0$. **8.107.** Нет. $A \subseteq T_0$. **8.108.** Да. **8.110.** $x_1, \overline{x}_1, x_2, \overline{x}_2$. **8.110.** Да. **8.111.** Да. **8.112.** Да. **8.113.** Нет. **8.114.** Да. **8.115.** Да. **8.116.** Нет. **8.117.** Да. **8.118.** $2^{2^{n-1}}$. **8.119.** 0, 1, $x_1 \vee x_2$, x_1, x_2, $x_1 \mathbin{\&} x_2$. **8.120.** Да. **8.121.** Да. **8.122.** Нет. **8.123.** Нет. **8.124.** Нет. **8.125.** Нет. **8.126.** Да. **8.127.** Да. **8.128.** $\tilde{\alpha}=(001)$, $\tilde{\beta}=(011)$. **8.129.** $\tilde{\alpha}=(010)$, $\tilde{\beta}=(011)$ или $\tilde{\beta}=(110)$; $\tilde{\alpha}=(100)$, $\tilde{\beta}=(101)$ или $\tilde{\beta}=(110)$. **8.130.** $\tilde{\alpha}\in\{(0101),(0111),(1010),(1011),(1101),(1110)\}$, $\tilde{\beta}=(1111)$. **8.131.** 2^{n+1}, 0, 1, $x_1 \oplus x_2$, x_1, $\overline{x}_1$, x_2, $\overline{x}_2$, $x_1 \sim x_2$.
8.132. Да. $f=\overline{x \to y}\oplus\overline{x}\cdot y=\overline{\overline{x}\vee y}\oplus(1\oplus x)y= x\overline{y}\oplus(1\oplus x)y=x(1\oplus y)\oplus(1\oplus x)y=x\oplus y$.
8.133. Нет. **8.134.** Нет. **8.135.** Да. **8.136.** Да. **8.137.** Нет. **8.138.** Да. **8.139.** Да.
8.141. а) Нет; б) да. **8.142.** а) См. рис. 1*а*; б) см. рис. 1*б*.
8.143. 1) $V(G) = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$; 2) $E(G) = \{12, 16, 23, 24, 25, 26, 36\}$; 3) пары смежных вершин: 1–2, 1–6, 2–5, 2–4, 2–6, 2–3, 3–6; 4) вершин, не смежных с вершиной 2, нет; 5) степени вершин: 2, 5, 2, 1, 1, 3; $\Delta(G) = 5$, $\delta(G) = 1$; 6) 4 и 5 — висячие вершины, 2 — доминирующая; 7) ребро {3, 6}, вершины 3, 4, 5, 6. **8.144.** 1) $V(G) = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$; 2) $E(G) = \{12, 23, 25, 26, 27, 47, 57, 67\}$; 3) пары смежных вершин: 1–2, 2–3, 2–5, 2–6, 2–7, 4–7, 5–7, 6–7; 4) вершина 4; 5) степени вершин: 1, 5, 1, 1, 2, 2, 4; $\Delta(G) = 5$, $\delta(G) = 1$; 6) 1, 3 и 4 — висячие вершины, доминирующих нет; 7) ребра {5, 7}, {4, 7}, {6, 7}; вершины 3, 4, 5, 6, 7. **8.145.** $|V(B^n)| = 2^n$, $|E(B^n)| = n2^{n-1}$. **8.146.** Существует. **8.147.** а) См. рис. 2*а*, $|E(\overline{G})|=8$, степени вершин равны 3, 0, 3, 4, 4, 2; б) см. рис. 2*б*, $|E(\overline{G})|=11$, степени вершин равны 5, 1, 5, 5, 3, 3, 2. **8.148.** а) См. рис. 3*а*, $|E(\overline{G})|=4$, степени вершин равны 2, 2, 1, 2, 1; б) см. рис. 3*б*, $|E(\overline{G})|=4$, степени вершин равны 0, 2, 1, 2, 1, 2; в) см. рис. 3*в*, $|E(\overline{G})|=7$, степени вершин равны 4, 3, 1, 2, 2. **8.149.** См. рис. 4, $|E(\overline{G})|=30$, все вершины имеют степень 6.

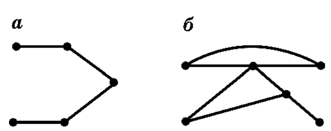


Рис. 1

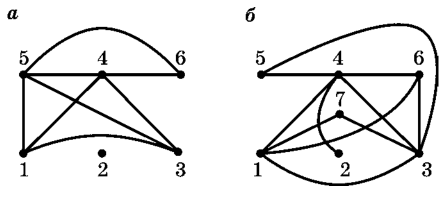


Рис. 2

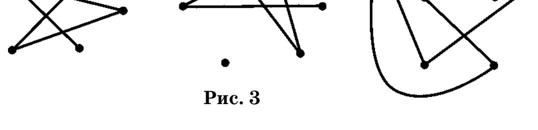


Рис. 3

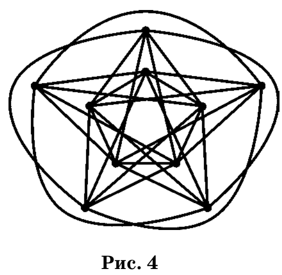


Рис. 4

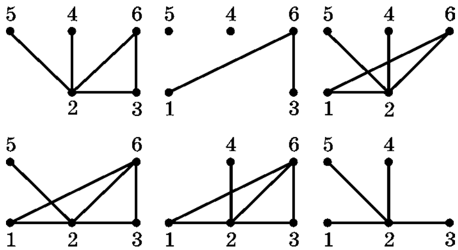


Рис. 5

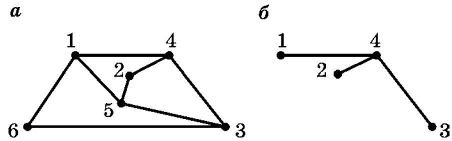


Рис. 6

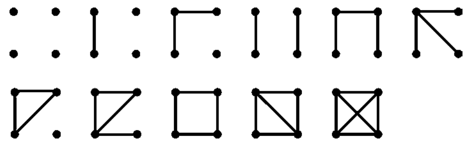


Рис. 7

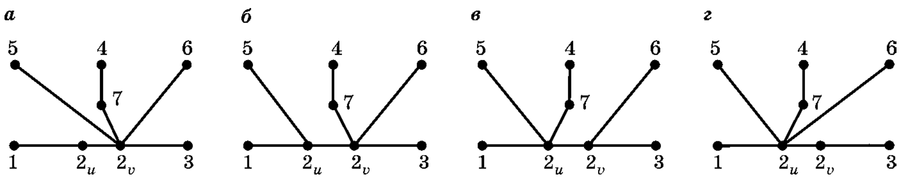


Рис. 8

8.151. *Указание.* Рассмотреть сумму степеней вершин. **8.152.** *Указание.* Предположить обратное для графа с n вершинами и доказать, что у одной вершины должна быть степень n. **8.153.** а) 64; б) 2^m. **8.154.** См. рис. 5. **8.155.** а) См. рис. 6*а*; б) $E_1 = \{14, 24, 34\}$, см. рис. 6*б*; в) $V_1 = \{1, 5, 6\}$ и $E_1 = \{15, 56\}$ — не определяют; $V_2 = \{1, 3, 5, 6\}$ и $E_2 = \{15, 25, 16, 56\}$ — не определяют; $V_3 = \{1, 3, 6\}$ и $E_3 = \{16, 36\}$ — определяют; г) 63. **8.156.** $2^{n(n-1)/2}$. **8.157.** G_1, G_2, G_3, G_4 являются полными двудольными графами. **8.158.** Нет. **8.159.** а) q и $\dfrac{q^2-q}{2}$; б) pq и $\dfrac{p^2+q^2-(p+q)}{2}$. **8.160.** Независимого множества нет, покрытие содержит $[n/2]$ вершин. **8.161.** Независимое множество содержит q вершин второй доли, покрытие — центральная вершина. **8.162.** Одна из долей образует наибольшее независимое множество из $\max\{p, q\}$ вершин, другая — покрытие из $\min\{p, q\}$ вершин. **8.163.** Независимое множество содержит 4, а покрытие — 6 вершин. **8.165.** См. рис. 7. **8.166.** G_1, G_2, G_3, G_4. **8.167.** 1), 2), 4). **8.168.** 1. *Указание.* Посчитать, сколько ребер удалено из полного графа. **8.169.** 2. **8.170.** *Указание.* Рассмотреть возможные наборы степеней вершин. **8.171.** *Указание.* Удвоенная сумма числа ребер графа равна числу ребер полного графа. **8.172.** *Указание.* Рассмотрев наборы степеней вершин, доказать, что среди графов порядка 4 самодополнительных нет, и построить граф порядка 5. **8.173.** $C^m_{n(n-1)/2}$. *Указание.* Рассмотреть полный граф и выяснить, сколькими способами можно выбрать из него те ребра, которые остаются в искомом. **8.174.** $2^{C_n^2}$. **8.176.** $\dfrac{(n-k)(n-k-1)}{2}$. **8.178.** $|\tilde{G}|=8$, $|E(\tilde{G})|=7$; а) см. рис. 8*а*; б) см. рис. 8*б*; в) см. рис. 8*в*; г) см. рис. 8*г*.

8.179. См. рис. 8.1. **8.181.** *Указание.* Если в путь входит одна и та же вершина, участок пути, заключенный между ее первым вхождением и последним, можно удалить. **8.183.** 6. **8.184.** Цепь длины 9 (2, 1, 5, 4, 2, 6, 1, 3, 4, 6), простая цепь длины 5 (1, 2, 6, 4, 5, 3), цикл длины 8 (1, 2, 4, 5, 1, 3, 4, 6, 1), простой цикл длины 6 (1, 2, 6, 4, 5, 3, 1). **8.185.** а) Для всех минимальная длина 3, максимальная 7; б) для всех минимальная длина 4, максимальная 14. **8.186.** а) 3; б) 3. **8.188.** а) См. рис. 9*а*; б) см. рис. 9*б*; в) все

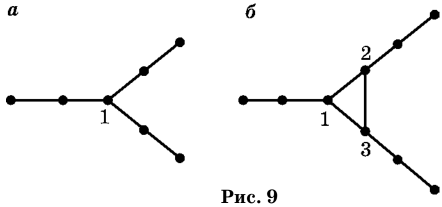


Рис. 9

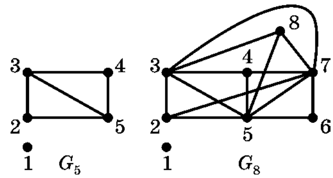


Рис. 10

графы на рис. 8.18. **8.189.** а), б) Например, граф куба и икосаэдра на рис. 8.18; в) см. ответ в) задачи 8.188. **8.190.** Тетраэдр $r = d = 1$; куб $r = d = 2$; октаэдр $r = d = 2$; додекаэдр $r = d = 5$; икосаэдр $r = d = 3$. **8.191.** б) См. рис. 9*а*. **8.192.** а) См. рис. 10; б) $G_n - 1$. **8.196.** 1 или 2. *Указание.* Рассмотреть, сколько вершин может быть в каждой компоненте связности. **8.197.** От 1 до 7. **8.198.** От 1 до 6. **8.199.** От 7 до 28. **8.200.** От 11 до 66. **8.201.** а), в) — существует; б) нет. **8.202.** а) Эйлеров путь существует у графов $K_{2,\,2l+1}$, где l — целое неотрицательное число; эйлеров цикл существует у графов $K_{2l,\,2p}$, где $l, p \in \mathbb{N}$; б) граф K_n не имеет эйлерова пути; эйлеров цикл существует, если n — нечетное число, большее 1; в) граф октаэдра. **8.203.** а) при $n = m$; б) при $n \geq 2$.

8.204. Рис. 8.21: $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$; рис. 8.25: $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$;

рис. 8.26: $A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 & 1 \\ -2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$. **8.205.** $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & \ldots & 1 \\ 1 & 0 & 1 & \ldots & 1 \\ 1 & 1 & 0 & \ldots & 1 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 1 & 1 & 1 & \ldots & 0 \end{pmatrix}$,

$$E = \begin{pmatrix} 1 & 1 & \ldots & 1 & 0 & 0 & \ldots & 0 & \ldots & 0 \\ 1 & 0 & \ldots & 0 & 1 & 1 & \ldots & 1 & \ldots & 0 \\ 0 & 1 & \ldots & 0 & 1 & 0 & \ldots & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 & 1 & \ldots & 0 & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & \ldots & 1 \\ 0 & 0 & \ldots & 1 & 0 & 0 & \ldots & 1 & \ldots & 1 \end{pmatrix}.$$ **8.206.** $A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 2 & 0 \end{pmatrix}$,

$E = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$. **8.207.** $A_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$, $A_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$,

$|A_1 - \lambda E| = |A_2 - \lambda E| = \lambda^3(\lambda^2 - 4)$. **8.208.** *Указание.* Перенумеровать строки и столбцы таким образом, чтобы из одной матрицы получилась другая. **8.209.** а) Сумма членов в i-й строке матриц $A(G)$ и $I(G)$ равна $\deg v_i$; б) сумма членов в j-м столбце матрицы

$A(G)$ равна $\deg v_i$, а в $I(G)$ равна 2. **8.210.** $K^2 = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 2 & 2 \\ 2 & 3 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 3 & 2 \\ 2 & 2 & 2 & 3 \end{pmatrix}$, $b_{ii} = 3$, так как существует ровно 3 пути из v_i в v_i, $b_{ij} = 2$, $i \neq j$, так как существует ровно 2 пути из v_i в v_j.

8.211. *Указание.* Показать, что $b_{ij} = \sum a_{ii_2} a_{i_2 i_3} \dots a_{i_{m-12}, j}$. **8.212.** а) $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$,

$E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, $\operatorname{rank} G = 4$; б) $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$, $E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, $\operatorname{rank} G = 2$.

8.213. а) См. рис. 11*а*; $\Delta(G) = 4$; $\operatorname{rank} G = 4$; вершины 2, 3, 4 — центральные; 1, 5 — периферийные; доминирующих нет; 1, 5 — концевые; б) см. рис. 11*б*; в) см. рис. 11*в*; г) см. рис. 11*г*. **8.214.** а) См. рис. 12*а*; $\Delta(G) = 2$; $\operatorname{rank} G = 5$; вершина 2 — центральная; 1, 3, 4, 5 — периферийные; 2 — доминирующая; 1 — концевая; б) см. рис. 12*б*. **8.215.** а) 1; б) 2; в) 3; г) 6. **8.222.** При нумерации, указанной на рис. 14: а) (01000010110101101101), [114457557]; б) (0000101110010111); [2332477]; в) (0010100101011011), [4444666]; г) (00001010101111), [246666]. **8.223.** В любом начальном отрезке последовательности количество нулей не меньше количества единиц. **8.224.** См. рис. 13*а*. **8.225.** См. рис. 13*б*. **8.226.** См. рис. 13*в*. **8.227.** См. рис. 13*г*. **8.228.** Нет. **8.231.** Нет. *Указания.* а), б), в) — доказать, что если планарен, то четырехугольников не менее 5; г) — доказать, что если планарен, то треугольников 8. **8.232.** Нет. **8.233.** Нет. **8.234.** Да. **8.235.** а) При любом n; б) при $n = 2$. **8.236.** 4. *Указание.* Доказать, что меньше нельзя, и показать, что можно убрать 4 ребра. **8.237.** 2. *Указание.* Доказать, что меньше нельзя, и показать, что можно убрать 2 вершины. **8.239.** 2. **8.240.** 4. **8.241.** 2. **8.242.** K_4.

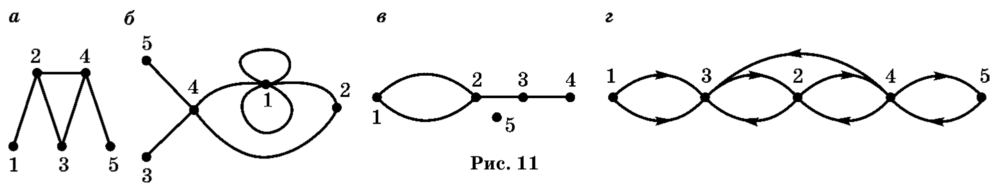


Рис. 11

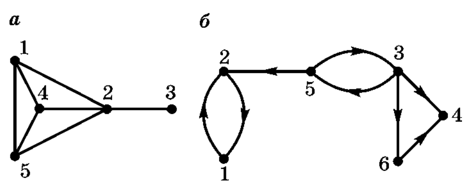


Рис. 12

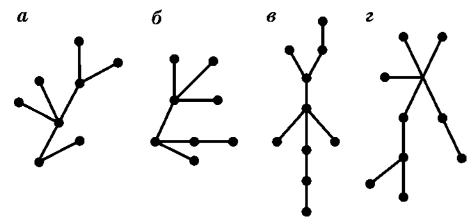


Рис. 13

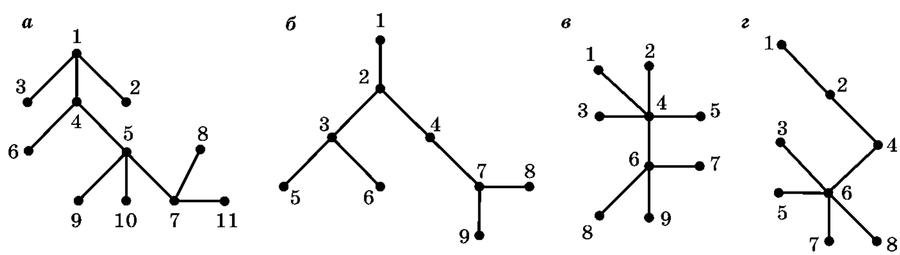


Рис. 14

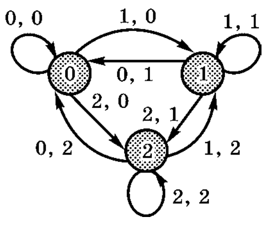


Рис. 15

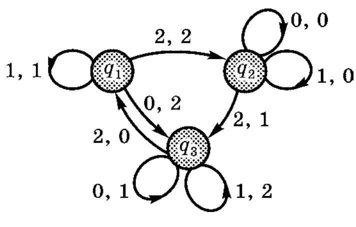


Рис. 16

Таблица 1

	0	1	2
0	0 / 0	1 / 0	2 / 0
1	0 / 1	1 / 1	2 / 1
2	0 / 2	1 / 2	2 / 2

8.243. 5. *Указание.* Учитывая, что $\Delta = 5$, найти раскраску 5 красками. **8.244.** 3; 3. **8.245.** 3; 4. **8.246.** См. рис. 15 и табл. 1. **8.247.** См. рис. 16.

8.248. Не является диаграммой Мура никакого автомата, так как на диаграмме не указано, в какое состояние должен переходить автомат, если он находится в состоянии q_3 и получает на входе символ 1. **8.249.** Не является диаграммой Мура, так как переход из состояния q_2 при получении символа b определен неоднозначно. **8.250.** Является диаграммой Мура конечного автомата. **8.251.** Не является диаграммой Мура, так как переход из состояний q_1 и q_3 при получении символа 0 определен неоднозначно и не определен при получении символа 1. **8.252.** 00100110. **8.253.** 100010110. **8.254.** Если начальное состояние — q_1, то 00010110; если q_2, то 10011100, если q_3, то 11010110, если q_4, то 10011100; см. табл. 2. **8.255.** Если начальное состояние — q_0, то 001001010; если q_1, то 010111010; если q_2, то 101001010, если q_3, то 000000010, если q_4, то 101001010; см. табл. 3. **8.256.** См. рис. 17 и табл. 4. **8.257.** См. рис. 18 и табл. 5. **8.258.** См. рис. 19 и табл. 6.

8.259. $b(t)=\begin{cases} a(t), \text{ если } q(t-1)=0, \\ c, \text{ если } q(t-1)=1, \end{cases} \quad q(t)=\begin{cases} q(t-1), \text{ если } a(t)=a, \\ \overline{q(t-1)}, \text{ если } a(t)\neq a. \end{cases}$

Таблица 2

	a	b
q_1	q_2 / 0	q_3 / 0
q_2	q_1 / 0	q_4 / 1
q_3	q_1 / 1	q_4 / 0
q_4	q_3 / 1	q_2 / 1

Таблица 3

	0	1
q_0	q_1 / 1	q_4 / 0
q_1	q_2 / 0	q_0 / 0
q_2	q_3 / 0	q_4 / 1
q_3	q_3 / 0	q_1 / 0
q_4	q_0 / 0	q_4 / 1

Таблица 4

	0	1
0	0 / 0	1 / 0
1	1 / 1	2 / 1
2	2 / 0	0 / 0

Таблица 5

	0	1	2
0	1 / 0	2 / 1	0 / 2
1	1 / 1	2 / 2	0 / 0
2	1 / 2	2 / 0	0 / 1

Таблица 6

	(0, 0)	(0, 1)	(1, 0)	(1, 1)
0	0 / 0	0 / 1	0 / 1	1 / 0
1	1 / 1	1 / 0	1 / 0	0 / 1

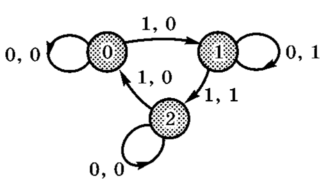


Рис. 17

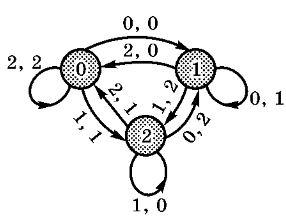


Рис. 18

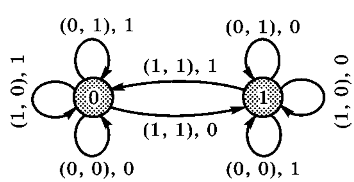


Рис. 19

8.260. $b(t) = a(t) \to q(t-1)$, $q(t) = a(t) \cdot \overline{q(t-1)}$. **8.261.** Функция $\overline{\varphi}$ несет информацию о том, в какое состояние перейдет автомат, если на его вход будут поступать последовательно несколько букв из алфавита A. Действительно, если в какой-либо момент автомат находится в состоянии q, а на его вход поступает последовательность символов $a_{i_1}, a_{i_2}, \ldots, a_{i_k}$, то будут осуществляться следующие переходы в другие состояния: $q \to \varphi(q, a_{i_1}) \to \varphi(\varphi(q, a_{i_1}), a_{i_2}) \to \ldots \to \varphi(\varphi(\ldots\varphi(q, a_{i_1}), a_{i_2}), \ldots a_{i_k})$, т. е. в конце концов автомат окажется в состоянии $\overline{\varphi}(q, a_{i_1} \ldots a_{i_k})$. Аналогичным образом интерпретируется функция $\overline{\psi}$, а именно: $\overline{\psi}(q, a_{i_1} \ldots a_{i_k}) = b_{j_1} b_{j_2} \ldots b_{j_k}$, где b_{j_m} — символ, который будет выдан автоматом на m-м шаге. **8.262.** а) q_2; б) q_2; в) q_1; г) 00; д) 00001. **8.263.** а) q_4; б) q_3; в) q_1; г) 01; д) 00111. **8.264.** а) q_1; б) $abaa$. **8.265.** а) q_2; б) 121. **8.266.** а) q_1; б) q_2; в) $bbaa$; г) a^2b^8. **8.267.** а) 1; б) 0010. **8.268.** а) 2; б) 0020. **8.269.** См. рис. 20. **8.270.** См. рис. 21. **8.271.** См. табл. 7. **8.272.** См. табл. 8. **8.273.** а) Для вывода о неотличимости этой информации мало; б) неотличимы; в) неотличимы. **8.274.** См. рис. 22. **8.275.** См. рис. 22. **8.276.** *Указание*. Учесть, что из вершины q_i должно исходить три ребра. **8.282.** См. рис. 23. **8.283.** См. рис. 24. **8.284.** См. рис. 25. **8.285.** См. рис. 26. **8.286.** Функция f является детерминированной, так как $b(i) = a(i-1)$ при $i \geq 2$ не

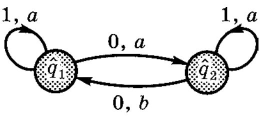


Рис. 20

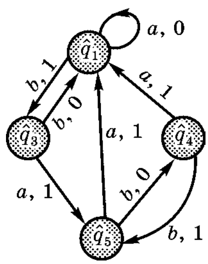


Рис. 21

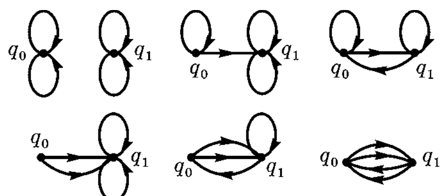
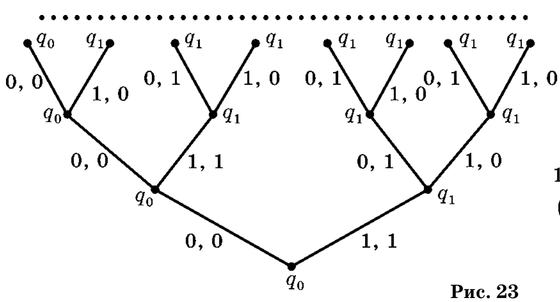


Рис. 22

Таблица 7

	$\hat{q}_1$	$\hat{q}_2$	$\hat{q}_3$
0	$\hat{q}_2$ / 0	$\hat{q}_1$ / 0	$\hat{q}_2$ / 1
1	$\hat{q}_1$ / 1	$\hat{q}_3$ / 0	$\hat{q}_1$ / 1



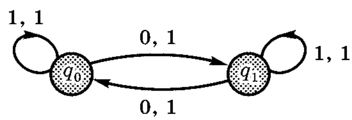
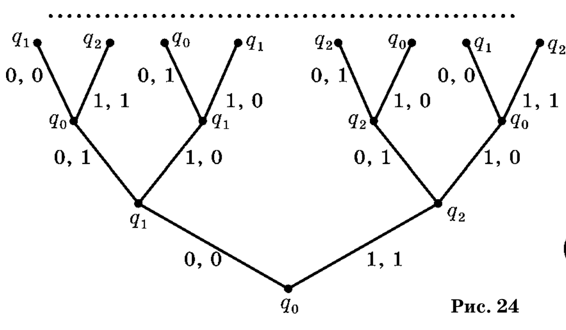


Рис. 23

Таблица 8

	$\hat{q}_1$	$\hat{q}_2$	$\hat{q}_4$
a	$\hat{q}_2$ / a	$\hat{q}_1$ / a	$\hat{q}_1$ / c
b	$\hat{q}_2$ / b	$\hat{q}_4$ / a	$\hat{q}_1$ / b



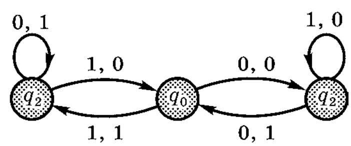


Рис. 24

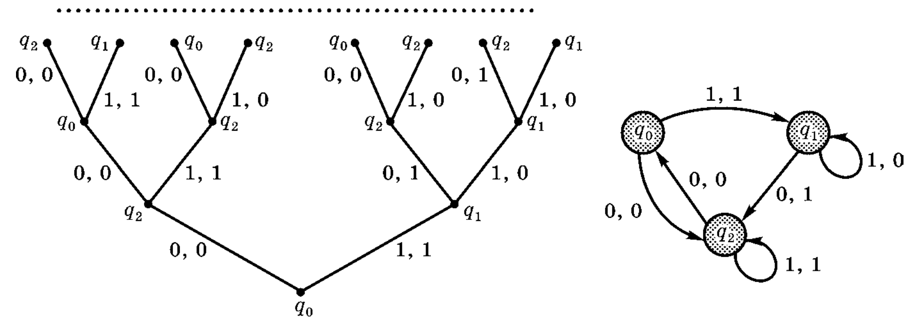


Рис. 25

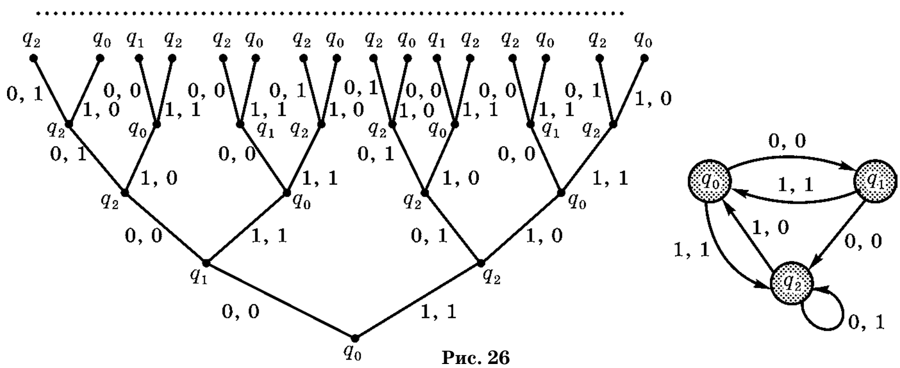


Рис. 26

зависит от $a(i+1)$, $a(i+2)$, ... **8.287.** Функция f не является детерминированной, так как $b(1)$ зависит от $a(2)$, которое неизвестно в момент времени $t = 1$. **8.288.** Функция f детерминированная, так как $b(i)=\begin{cases}0, \text{ если } i \text{ нечетно,}\\ a(i), \text{ если } i \text{ четно,}\end{cases}$ не зависит от $a(i+1)$, $a(i+2)$, ... **8.289.** Функция f детерминированной не является, так как выходная последовательность $b(1)b(2)b(3)\ldots$ определится только тогда, когда будут известны $a(i)$ для всех i. Другое объяснение: $000111\ldots1\ldots \xrightarrow{f} 000111\ldots$, $000000\ldots0\ldots \xrightarrow{f} 111111\ldots$, а это противоречит определению детерминированности. **8.290.** $f(a(1)a(2)a(3)\ldots) = b(1)b(2)b(3)\ldots$, где $b(i) = a(i) \to a(1)$ при $i \geq 1$. Функция f детерминированная, так как выход при всяком t определяется значениями входящего символа в моменты времени 1 и t. **8.291.** Является. **8.292.** Не является. **8.293.** Является. **8.294.** 3. **8.295.** 4. **8.296.** 4.

8.297. $\begin{cases}b(t)=q(t-1)\to a(t),\\ q(t)=a(t),\ q(0)=0.\end{cases}$

8.298. $\begin{cases}b(t)=q(t-1),\\ q(t)=a(t)\,|\,q(t-1),\ q(0)=0.\end{cases}$

8.299. См. рис. 27*а*.

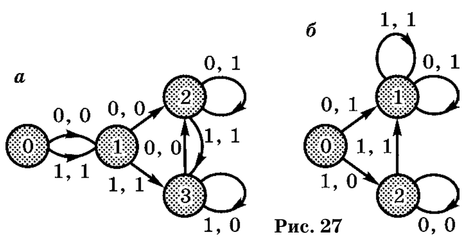


Рис. 27

8.300. См. рис. 27*б*. **8.301.** $\begin{cases}q(t)=x(t)\cdot\overline{q}(t-1),\\ u(t)=x(t)\cdot\overline{q}(t),\\ q(0)=0,\end{cases}$ 10101... . **8.302.** $\begin{cases}q(t)=x(t-1),\\ u(t)=x(t)\cdot q(t),\\ q(0)=0,\end{cases}$

00000... . **8.303.** а) $u(t)=y(t)\vee\overline{x}(t)u(t-1)$; б) $u(1)u(2)u(3)\ldots = 011\ldots$.

ГЛАВА 9

9.1. Концентрические окружности с центром в начале координат: $x^2 + y^2 = C$, $C \geq 0$; через точку P проходит окружность $x^2 + y^2 = 100$. **9.2.** Концентрические окружности с центром в точке $(1, -2)$: $(x-1)^2 + (y+2)^2 = C$, $C \geq 0$; через точку P проходит окружность $(x-1)^2 + (y+2)^2 = 25$. **9.3.** Параболы $y = x^2 + C$; через точку P проходит парабола $y = x^2 + 1$. **9.4.** Параболы $x = y^2 + C$; через точку P проходит парабола $x = y^2 - 3$. **9.5.** Гиперболы $\frac{x^2}{C} - \frac{y^2}{C} = 1$, $C \neq 0$; прямые $y = \pm x$. Через точку P проходит гипербола $\frac{x^2}{7} - \frac{y^2}{7} = 1$. **9.6.** Гиперболы $xy = C$, $C \neq 0$; прямые $x = 0$ и $y = 0$. Через точку P проходит гипербола $xy = 6$. **9.7.** Прямые $y = Cx$, $x \neq 0$; через точку P проходит прямая $y = -3x$. **9.8.** Параллельные плоскости $x + y + z + C = 0$; через точку P проходит плоскость $x + y + z + 1 = 0$. **9.9.** Параллельные плоскости $3x - 2y + z + C = 0$; через точку P проходит плоскость $3x - 2y + z - 2 = 0$. **9.10.** Сферы с центром в точке $(1, 0, 0)$: $(x - 1)^2 + y^2 + z^2 = C$, $C \geq 0$; через точку P проходит сфера $(x-1)^2 + y^2 + z^2 = 4$ радиуса 2. **9.11.** Эллипсоиды $\frac{x^2}{C} + \frac{y^2}{C/2} + \frac{z^2}{C/3} = 1$, $C > 0$; точка $(0, 0, 0)$ для $C = 0$. Через точку P проходит эллипсоид $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{2} + \frac{z^2}{4/3} = 1$. **9.12.** Параболоиды вращения $z = x^2 + y^2 + C$; через точку P проходит параболоид $z = x^2 + y^2 - 8$. **9.13.** Эллиптические параболоиды $z = \frac{x^2}{5/2} + \frac{y^2}{5/3} + C$; через точку P проходит параболоид $z = \frac{x^2}{5/2} + \frac{y^2}{5/3} + 1$. **9.14.** Однополостные гиперболоиды $\frac{x^2}{C} + \frac{y^2}{C} - \frac{z^2}{C} = 1$ при $C > 0$; двуполостные гиперболоиды $\frac{x^2}{-C} + \frac{y^2}{-C} - \frac{z^2}{-C} = -1$ при $C < 0$; конус $x^2 + y^2 - z^2 = 0$ при $C = 0$. Через точку P проходит конус $x^2 + y^2 - z^2 = 0$. **9.15.** Прямые, проходящие через начало координат: $y = Cx$; $x = 0$. Через точку P проходит векторная линия $y = -3x$. **9.16.** Параболы $y = \frac{x^2}{2} + C$; через точку P проходит парабола $y = \frac{x^2}{2}$. **9.17.** Концентрические окружности с центром в начале координат: $x^2 + y^2 = C$, $C \geq 0$. Через точку P проходит векторная линия $x^2 + y^2 = 25$ — окружность радиуса 5. **9.18.** Гиперболы $y = \frac{C}{x}$, $C \neq 0$; прямые $x = 0$ и $y = 0$. Через точку P проходит векторная линия $y = \frac{1}{x}$. **9.19.** Прямые, проходящие через начало координат: $\frac{x}{1} = \frac{y}{C_1} = \frac{z}{C_2}$, $C_1 \neq 0$, $C_2 \neq 0$; $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$. Через точку P проходит векторная линия $\frac{x}{1} = \frac{y}{2} = \frac{z}{-2}$. **9.20.** Линии пересечения параболических цилиндров $y = \frac{x^2}{2} + C_1$ и плоскостей $y + z + C_2 = 0$. Через точку P проходит векторная линия $y = \frac{x^2}{2} - 1$, $y + z - 5 = 0$. **9.21.** Линии пересечения гиперболических цилиндров $x^2 - y^2 = C_1$ и гиперболических цилиндров $y^2 - z^2 = C_2$. Через точку P проходит векторная линия $x^2 - y^2 = 1$, $z^2 - y^2 = 1$. **9.22.** $2+\sqrt{3}$. **9.23.** 0. **9.24.** $3/\sqrt{2}$. **9.25.** $2/\sqrt{5}$. **9.26.** $4/\sqrt{5}$. **9.27.** $4/\sqrt{3}$. **9.28.** $\frac{6}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}$. **9.29.** $\frac{\mathbf{r}}{|\mathbf{r}|}$. **9.30.** $\frac{\mathbf{r}}{|\mathbf{r}|^2}$. **9.31.** $\mathbf{a}$. **9.32.** $\mathbf{a}(\mathbf{b}, \mathbf{r}) + \mathbf{b}(\mathbf{a}, \mathbf{r})$. **9.33.** а) *Указание*. Использовать равенство (9.4). **9.41.** а) $\left(\frac{3}{2}, 2, 3\right)$, $\left(\frac{1}{2}, 2, 3\right)$;

б) $\left(1, \frac{5}{2}, 3\right)$, $\left(1, \frac{3}{2}, 3\right)$; в) $\left(1, 2, \frac{13}{4}\right)$, $\left(1, 2, \frac{11}{4}\right)$; г) $\left(1 \pm \frac{1}{2\sqrt{5}}, 0, 3 \pm \frac{1}{2\sqrt{5}}\right)$. **9.42.** P_2; 8. **9.43.** P_1; $\sqrt{74}$. **9.44.** P_1; 32. **9.45.** $\pm\frac{1}{7}(6\mathbf{i}+3\mathbf{j}+2\mathbf{k})$. *Указание*. Рассмотреть указанную поверхность как одну из поверхностей уровня скалярного поля $u = xyz$ и воспользоваться известным свойством градиента. **9.46.** $\pm\frac{\sqrt{3}}{3}(\mathbf{i}+\mathbf{j}+\mathbf{k})$. **9.47.** $\pm\frac{\sqrt{2}}{10}(3\mathbf{i}+4\mathbf{j}-5\mathbf{k})$. **9.48.** $\pm\frac{3}{7}\left(\mathbf{i}+2\mathbf{j}-\frac{2}{3}\mathbf{k}\right)$. **9.53.** $17\sqrt{2}/6$. **9.54.** $7\sqrt{5}/3$. **9.55.** $2\sqrt{2}$. **9.56.** $\sqrt{2}$. **9.57.** $\frac{1}{144}(\sqrt{17^3}-1)$. **9.58.** $-\frac{\sqrt[3]{2}}{216}(\sqrt{37^3}-1)$. **9.59.** 38/5. **9.60.** $\sqrt{14}/2$. **9.61.** $1/\sqrt{2}$. **9.62.** 2π. **9.63.** $\pi a^2/4$. **9.64.** 384π. **9.65.** 4/3. **9.66.** $2\pi - 4$. **9.67.** $1+\sqrt{2}$. **9.68.** $(2a)^{\frac{3}{2}}\pi$. **9.69.** $3a^2$. **9.70.** $\frac{9}{256}\pi a^3$. **9.71.** $\frac{a^2}{3}[(1+4\pi^2)^{\frac{3}{2}}-1]$. **9.72.** $a\sqrt{3}/2$. **9.73.** $\pi a^2/4$. **9.74.** $\sqrt{2}a^{\frac{3}{2}}\pi$. **9.75.** $2\sqrt{2}/3$. **9.76.** 38/5. **9.77.** $1/\sqrt{2}$. **9.78.** $\frac{9}{64}\pi a^3$. **9.79.** $(2a)^{\frac{3}{2}}\pi$. **9.80.** $\pi a^2 Q$. **9.81.** 1/3. **9.82.** $-\frac{15}{2}-4\pi$. **9.83.** 1. **9.84.** 2. **9.85.** 0. *Указание*. Использовать параметрическое задание кривой: $x = \cos t$, $y = \sin t$, $0 \le t \le \frac{\pi}{2}$. **9.86.** $-8\pi/3$. **9.87.** -6π. *Указание*. Использовать параметрическое задание кривой: $x = 2\cos t$, $y = 3\sin t$, $0 \le t \le \pi$. **9.88.** π. **9.89.** $2\pi^2$. **9.90.** 91/60. **9.91.** а) 0; б) −2; в) 2. **9.92.** а) 2; б) 4; в) −4. **9.93.** а) 2/3; б) 2/3; в) 2/3. **9.94.** а) 2/3; б) 0,7; в) 0,7; г) 1; д) 1. **9.95.** 1. **9.96.** 0. **9.97.** 9π. **9.98.** 0. **9.99.** 0. **9.100.** -2π. **9.101.** 0. **9.102.** 1. **9.103.** 6π. **9.104.** π. **9.105.** 8π. **9.106.** 4/3. **9.107.** -4π. **9.108.** $\pi r^2/2$. **9.109.** $-2\pi ab$. **9.110.** −1. **9.111.** 0. **9.112.** 3π. **9.113.** 5. **9.114.** 3. **9.115.** 4. **9.116.** −2. **9.117.** 62. **9.118.** −1. **9.119.** 11. **9.120.** −2. **9.121.** $2\left(\frac{16}{e}-1\right)$. **9.122.** 7. **9.123.** 3. **9.124.** 4/5. **9.125.** а) $mg(z_0 - z_1)$; б) $c\left(\frac{1}{\sqrt{x_1^2+y_1^2+z_1^2}}-\frac{1}{\sqrt{x_0^2+y_0^2+z_0^2}}\right)$. **9.126.** $\sqrt{3}/360$. **9.127.** $81\sqrt{3}/40$. **9.128.** $\sqrt{6}/48$. **9.129.** $\frac{5^4\sqrt{14}}{2^5\cdot 3^3}$. **9.130.** 49/6. **9.131.** $\sqrt{3}\left(\ln 2-\frac{1}{2}\right)$. **9.132.** $\frac{2\sqrt{2}\pi}{3}$. **9.133.** $81\pi/\sqrt{2}$. **9.134.** $32\sqrt{2}/9$. **9.135.** 2π. **9.136.** $\frac{4}{3}\pi R^3$. **9.137.** $4\pi/3$. **9.138.** 0. **9.139.** $\frac{2\pi}{15}(6\sqrt{3}+1)$. **9.140.** 0. **9.141.** $\frac{8c}{15}(\sqrt{2}+1)$. **9.142.** $\frac{\pi a^4 c\sqrt{2}}{2}$. **9.143.** $\frac{\pi c}{3}(3\sqrt{3}-1)$. **9.144.** $\frac{\pi c}{4}a^{\frac{5}{2}}(3\sqrt{2}-\ln(1+\sqrt{2}))$. **9.145.** 1. **9.146.** $4\pi a$. **9.147.** 32/5. **9.148.** 8/3. **9.149.** −1/8. **9.150.** $16\pi/3$. **9.151.** $3\pi/16$. **9.152.** $3+\frac{\pi}{2}$. **9.153.** $-2\pi/3$. **9.154.** 2π. **9.155.** $2\pi/3$. **9.156.** 3π. **9.157.** $4\pi/3$. **9.158.** $\pi/2$. **9.159.** $8a^3$. **9.160.** π. **9.161.** −1/3. **9.162.** 0. **9.163.** $x + y + z$. **9.164.** 3. **9.165.** $2/r$. **9.166.** 0. **9.167.** $-\frac{2}{(x+y+z)^{5/3}}$. **9.168.** 0. **9.169.** $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}$. **9.170.** 0. **9.171.** 0. **9.177.** 36. **9.178.** $-a^5$. **9.179.** $4\pi/5$. **9.180.** 16π. **9.181.** 2π. *Указание*. Из интеграла по полной поверхности тела вычесть интегралы по ее частям, ограничивающим тело сверху и снизу. **9.182.** π. **9.183.** -4π. **9.184.** $\pi/2$. **9.185.** π. **9.190.** 0. **9.191.** $-(\mathbf{i} + \mathbf{j} + \mathbf{k})$. **9.192.** 0. **9.193.** $x(z - y)\mathbf{i} + y(x - z)\mathbf{j} + z(y - x)\mathbf{k}$.

9.194. $x(z^2-y^2)\mathbf{i}+y(x^2-z^2)\mathbf{j}+z(y^2-x^2)\mathbf{k}$. **9.195.** 0. **9.196.** $2(\mathbf{i}+\mathbf{j}+\mathbf{k})$. **9.197.** $-2y\mathbf{i}+2x\mathbf{j}-2(3x+2y)\mathbf{k}$. **9.198.** 2ω. *Указание*. Скорость $\mathbf{v}$ точки $P(\mathbf{r})$, вращающейся с угловой скоростью ω вокруг начала координат, равна $[\omega, \mathbf{r}]$. **9.199.** $-3/2$. **9.200.** 11. **9.201.** π.

9.202. $4\pi/3$. **9.203.** $1/3$. **9.204.** $u=e^x\sin y+C$. **9.205.** $u=x^3+\dfrac{y^3}{3}+C$.

9.206. $u=xy^2\cos 2x+x^2+C$. **9.207.** $u=x^3y-xy^3+C$. **9.208.** $u=(x+y)^2(x-y)+C$.

9.209. $u=x^2ye^x+xy^2e^y+C$. **9.210.** $u=xe^z\cos y+C$. **9.211.** $u=xyz-\dfrac{x^2y}{2}+\dfrac{y^2z^2}{2}+C$.

9.212. $u=yz+xz^2+xy^2+C$. **9.213.** $u=\dfrac{y}{x}+\dfrac{z}{y}+\dfrac{x}{z}+C$. **9.214.** $u=\dfrac{xy}{z}+\dfrac{yz}{x}+\dfrac{xz}{y}+C$.

9.215. $u=\dfrac{yz}{x^2}+\dfrac{xz}{y^2}-\dfrac{xy}{z^2}+C$. **9.217.** Да. **9.218.** Нет. **9.219.** Да. **9.220.** Да. **9.221.** Нет.

9.222. Нет. **9.223.** Да. **9.224.** Нет. **9.227.** Нет. **9.228.** Да. **9.229.** Да. **9.230.** Нет. **9.231.** Да. **9.232.** Нет. **9.233.** Нет. **9.234.** Да. **9.235.** Нет. **9.236.** Только при $a+c=0$. **9.237.** Только при $a_{11}+a_{22}+a_{33}=0$. **9.238.** $v\,\mathrm{grad}\,u+u\,\mathrm{grad}\,v$. **9.239.** $\mathrm{div}(\mathbf{c}u)=(\mathbf{c}, \mathrm{grad}\,u)$.
9.240. $\mathrm{div}(\mathbf{a}u)=u\,\mathrm{div}\,\mathbf{a}+(\mathbf{a}, \mathrm{grad}\,u)$. **9.241.** $\mathrm{div}[\mathbf{a}, \mathbf{c}]=(\mathbf{c}, \mathrm{rot}\,\mathbf{a})$.
9.242. $\mathrm{div}[\mathbf{a}, \mathbf{b}]=(\mathbf{b}, \mathrm{rot}\,\mathbf{a})-(\mathbf{a}, \mathrm{rot}\,\mathbf{b})$. **9.243.** $\mathrm{rot}(\mathbf{c}u)=[\mathrm{grad}\,u, \mathbf{c}]$.
9.244. $\mathrm{rot}(\mathbf{a}u)=u\,\mathrm{rot}\,\mathbf{a}+[\mathrm{grad}\,u, \mathbf{a}]$. **9.245.** 0. **9.246.** 0. **9.247.** $\mathrm{rot}\,\mathrm{rot}\,\mathbf{a}=\mathrm{grad}\,\mathrm{div}\,\mathbf{a}-\nabla^2\mathbf{a}$, где $\nabla^2\mathbf{a}=(\nabla^2a_x)\mathbf{i}+(\nabla^2a_y)\mathbf{j}+(\nabla^2a_z)\mathbf{k}$, $\nabla^2=\Delta$ — оператор Лапласа. *Указание*. Использовать формулу $[\mathbf{a}, [\mathbf{b}, \mathbf{c}]]=\mathbf{b}(\mathbf{a}, \mathbf{c})-\mathbf{c}(\mathbf{a}, \mathbf{b})$ для двойного векторного произведения векторов. **9.248.** $\mathrm{div}\,\mathrm{grad}\,uv=u\,\mathrm{div}\,\mathrm{grad}\,v+v\,\mathrm{div}\,\mathrm{grad}\,u+2(\mathrm{grad}\,u, \mathrm{grad}\,v)$. **9.249.** $\mathrm{rot}\,\mathrm{rot}(u\mathbf{c})=(\mathbf{c}, \nabla)\,\mathrm{grad}\,u-\mathbf{c}\nabla^2u$, где $(\mathbf{c}, \nabla)\mathbf{b}=(\mathbf{c}, \mathrm{grad}\,b_x)\mathbf{i}+(\mathbf{c}, \mathrm{grad}\,b_y)\mathbf{j}+(\mathbf{c}, \mathrm{grad}\,b_z)\mathbf{k}$.

ГЛАВА 10

10.1. $S=1$. *Указание*. Воспользоваться равенством $\dfrac{1}{n(n+1)}=\dfrac{1}{n}-\dfrac{1}{n+1}$. **10.2.** $S=1/3$. **10.3.** $S=2/3$. **10.4.** $S=2/3$. **10.5.** $S=1-\sqrt{2}$. *Указание*. Воспользоваться равенством $\sqrt{n+2}-2\sqrt{n+1}+\sqrt{n}=(\sqrt{n+2}-\sqrt{n+1})-(\sqrt{n+1}-\sqrt{n})$. **10.6.** Расходится. **10.7.** Расходится. **10.8.** Расходится. **10.9.** Расходится. **10.10.** Сходится. **10.11.** Сходится. **10.12.** Сходится. *Указание*. Воспользоваться критерием Коши и неравенством $\dfrac{1}{n^2}<\dfrac{1}{n(n-1)}=\dfrac{1}{n-1}-\dfrac{1}{n}$. **10.16.** Расходится. **10.17.** Расходится. **10.18.** Сходится. **10.19.** Сходится. **10.20.** Сходится. **10.21.** Расходится. **10.22.** Сходится. **10.23.** Сходится. **10.24.** Расходится. **10.25.** Сходится. **10.26.** Расходится. **10.27.** Сходится. **10.28.** Сходится. **10.29.** Сходится. *Указание*. Использовать неравенство $\dfrac{\ln n}{n^2\sqrt{n}}<\dfrac{1}{n\sqrt{n}}$, $n\ge 1$. **10.30.** Сходится. *Указание*. Использовать неравенство $e^{-n^2+n}\le e^{-n}$, $n\ge 2$. **10.31.** Сходится. **10.32.** Сходится. **10.33.** Сходится. **10.34.** Сходится. **10.35.** Сходится. **10.36.** Сходится. **10.37.** Сходится. **10.38.** Расходится. **10.39.** Расходится. **10.40.** Расходится. **10.41.** Сходится. **10.42.** Сходится. **10.43.** Сходится. **10.44.** Сходится. **10.45.** Сходится. **10.46.** Сходится. **10.47.** Расходится. **10.48.** Расходится. **10.49.** Сходится. **10.50.** Сходится. **10.51.** Сходится. **10.52.** Сходится. **10.53.** Сходится. **10.54.** Сходится. **10.55.** Расходится. **10.56.** Расходится. **10.57.** Сходится. **10.58.** Сходится при $\beta>1$ и расходится при $\beta\le 1$. **10.59.** Сходится при $\gamma>1$ и расходится при $\gamma\le 1$. **10.60.** Сходится. *Указание*. Использовать предельный признак сравнения и результат решения задачи 10.58. **10.61.** Расходится. **10.62.** Сходится. **10.63.** Расходится. **10.64.** Сходится. **10.65.** Сходится. **10.66.** Сходится. **10.67.** Сходится. **10.68.** Расходится. **10.69.** Сходится. **10.70.** Сходится.

10.71. Сходится. **10.72.** Сходится. **10.73.** Сходится. **10.74.** Сходится. **10.75.** Сходится. **10.76.** Сходится. **10.77.** Сходится. **10.78.** Расходится. **10.79.** Сходится. **10.80.** Сходится. **10.81.** Расходится. **10.82.** Сходится. **10.83.** Сходится. **10.84.** Сходится. **10.85.** Сходится условно. **10.86.** Сходится абсолютно. **10.87.** Расходится. **10.88.** Сходится абсолютно. **10.89.** Расходится. **10.90.** Сходится условно. **10.91.** Сходится абсолютно. **10.92.** Сходится условно. **10.93.** Сходится абсолютно. **10.94.** Сходится условно. **10.95.** Сходится абсолютно. **10.96.** Сходится абсолютно при $\alpha > 1$; сходится условно при $0 < \alpha \le 1$; расходится при $\alpha \le 0$. **10.97.** Сходится абсолютно. **10.98.** Сходится условно. **10.99.** Расходится. **10.100.** Сходится абсолютно. **10.101.** Сходится абсолютно. **10.102.** Сходится условно. **10.103.** Сходится условно. **10.104.** Расходится. **10.105.** Сходится абсолютно. **10.106.** Сходится абсолютно. **10.107.** Сходится условно. **10.108.** Сходится условно. **10.109.** Сходится абсолютно. **10.110.** Сходится абсолютно. **10.111.** Расходится. **10.112.** Сходится условно. **10.114.** Сходится. **10.115.** Сходится. **10.116.** Сходится. **10.117.** Сходится. **10.118.** Сходится при $\alpha \ne 2m\pi$; расходится при $\alpha = 2m\pi$, $m \in \mathbb{Z}$. *Указание*. Использовать признак Дирихле аналогично тому, как это сделано в примере 10.14. **10.119.** Сходится. **10.120.** Сходится. *Указание*. Убедиться в абсолютной сходимости данного ряда с помощью признака сравнения. **10.121.** Сходится. **10.122.** Сходится. **10.123.** Сходится, сходится абсолютно при $x \in (-\infty; +\infty)$. **10.124.** $\varnothing$ (расходится при всех x). **10.125.** Сходится, сходится абсолютно при $x \in (-\infty; +\infty)$. **10.126.** Сходится, сходится абсолютно при $x \in (-\infty; -3) \bigcup (-1; +\infty)$. **10.127.** Сходится при $x \in (-\infty; 0]$, сходится абсолютно при $x \in (-\infty; 0)$. **10.128.** Сходится, сходится абсолютно при $x \in (-\infty; -1)$. **10.129.** Сходится, сходится абсолютно при $x \in (-3; 3)$. **10.130.** Сходится, сходится абсолютно при $x \in \left[\frac{1}{e}; e\right)$. **10.131.** Сходится, сходится абсолютно при $x \in (-\infty; 0]$. **10.132.** Сходится при $x \in (-2; 0]$, сходится абсолютно при $x \in (-2; 0)$. **10.133.** Сходится, сходится абсолютно при $x \in [1; 3]$. **10.134.** Сходится, сходится абсолютно при $x \in (-\infty; +\infty)$. **10.135.** Сходится, сходится абсолютно при $x \in (-\infty; +\infty)$. **10.136.** $\varnothing$ (расходится при всех x). **10.137.** Сходится при $x \in (-\infty; -2] \bigcup [1; +\infty)$, сходится абсолютно при $x \in (-\infty; -2) \bigcup (1; +\infty)$. **10.138.** Сходится при $x \in (-\infty; -1) \bigcup [1; +\infty)$, сходится абсолютно при $x \in (-\infty; -1) \bigcup (1; +\infty)$. **10.139.** Сходится, сходится абсолютно при $x \in (-\infty; 0) \bigcup (0; +\infty)$. **10.140.** Сходится, сходится абсолютно при $x = 0$. **10.141.** Сходится, сходится абсолютно при $x \in (-1; 1)$. **10.142.** Сходится при $x \in \left(-\infty; -\frac{1}{e}\right] \bigcup \left(\frac{1}{e}; +\infty\right)$, сходится абсолютно при $x \in \left(-\infty; -\frac{1}{e}\right) \bigcup \left(\frac{1}{e}; +\infty\right)$. *Указание*. При исследовании сходимости в граничных точках области сходимости использовать формулу Стирлинга. **10.143.** Сходится, сходится абсолютно при $x \in (-1; 1)$. **10.144.** Сходится, сходится абсолютно при $x \in (-\infty; -1) \bigcup (1; +\infty)$. **10.145.** Сходится, сходится абсолютно при $x \in (0; 1)$. **10.146.** Сходится, сходится абсолютно при $x \in (0; +\infty)$. **10.147.** Сходится, сходится абсолютно при $x \in (-\infty; -3) \bigcup (3; +\infty)$. **10.148.** Сходится, сходится абсолютно при $x \in (-\infty; -5) \bigcup (-5; +\infty)$. **10.149.** Сходится при $x \in [-2; 1]$, сходится абсолютно при $x \in (-2; 1)$. **10.150.** а) Сходится неравномерно; б) сходится равномерно. **10.151.** Сходится равномерно. **10.152.** а) Сходится неравномерно; б) сходится равномерно. *Указание*. Использовать разложение функции e^x по формуле Тейлора. **10.153.** Сходится неравномерно. **10.154.** Сходится равномерно. **10.155.** Сходится равномерно. **10.156.** а) Сходится неравномерно; б) сходится равномерно. *Указание*. $\frac{x}{(nx+1)((n+1)x+1)} = \frac{1}{nx+1} - \frac{1}{(n+1)x+1}$. **10.157.** Сходится равномерно при $x \in (-\infty; +\infty)$.

10.158. Сходится равномерно при $x \in (-\infty; +\infty)$. **10.159.** Сходится при $x \in (0; +\infty)$, сходится равномерно при $x \in (\varepsilon; +\infty)$, $\varepsilon > 0$. **10.160.** Сходится при $x \in (-\infty; 0) \cup [2; +\infty)$; сходится равномерно при $x \in (-\infty; -\varepsilon] \cup [2; +\infty)$, $\varepsilon > 0$. **10.161.** Сходится при $x \in \in (-\infty; -2) \cup (0; +\infty)$; сходится равномерно при $x \in (-\infty; -2-\varepsilon_1] \cup [\varepsilon_2; +\infty)$, $\varepsilon_1 > 0$, $\varepsilon_2 > 0$. **10.162.** Сходится при $x \in (-\infty; 0]$; сходится равномерно при $x \in (-\infty; \varepsilon]$, $\varepsilon > 0$. **10.174.** $(1; 3)$. **10.175.** $(-6; 0)$. **10.176.** $(1; 7)$. **10.177.** $[-3; 1]$. **10.178.** $(-\infty; +\infty)$. **10.179.** $(-\infty; +\infty)$. **10.180.** $[-3; 5)$. **10.181.** $[-2; 0]$. **10.182.** $(1; 7]$. **10.183.** $[-2; 2]$. **10.184.** $(-2; 4)$. **10.185.** $[0; 4)$. **10.186.** $(-6; 2)$. **10.187.** $(-4; -2)$. **10.188.** $[-4; 2)$. **10.189.** $(1; 9)$.

10.190. $(-\infty; +\infty)$. **10.191.** $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{3^n}{2^{n+1}}x^n$, $x\in\left(-\frac{2}{3}; \frac{2}{3}\right)$. **10.192.** $\sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{5^{n+1}}{4^{n+1}}x^n$, $x\in\left(-\frac{4}{5}; \frac{4}{5}\right)$.

10.193. $\sum\limits_{n=10}^{\infty}x^n$, $x \in (-1; 1)$. **10.194.** $\sum\limits_{n=0}^{\infty}x^{2n+1}$, $x \in (-1; 1)$. **10.195.** $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{3^{n-1}}{2^n}x^n$, $x\in\left(-\frac{2}{3}; \frac{2}{3}\right)$. **10.196.** $\sum\limits_{n=0}^{\infty}((-3)^n-1)x^n$, $x\in\left(-\frac{1}{3}; \frac{1}{3}\right)$. **10.197.** $\sum\limits_{n=0}^{\infty}(3^{-n}+2^{-n})x^n$, $x\in\left(-\frac{1}{2}; \frac{1}{2}\right)$.

10.198. $\sum\limits_{n=0}^{\infty}((-1)^n-1-2^n)\frac{3^{n-1}}{2^n}x^n$, $x\in\left(-\frac{1}{2}; \frac{1}{2}\right)$. **10.199.** $\sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{2n}}{n!}$, $x \in \mathbb{R}$.

10.200. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{2^{2n-1}}{(2n)!}x^{2n}$, $x \in \mathbb{R}$. *Указание.* $\sin^2 x=\frac{1-\cos 2x}{2}$.

10.201. $1+\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{2^{2n-1}}{(2n)!}x^{2n}$, $x \in \mathbb{R}$. **10.202.** $\ln 5+\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{x^{2n}}{5^n n}$, $x\in[-\sqrt{5};\sqrt{5}]$.

Указание. $\ln(5+x^2)=\ln\left[5\left(1+\frac{x^2}{5}\right)\right]=\ln 5+\ln\left(1+\frac{x^2}{5}\right)$.

10.203. $\sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{3^{2n+1}}{2n+1}x^{6n+3}$, $x\in\left[-\frac{1}{\sqrt[3]{3}}; \frac{1}{\sqrt[3]{3}}\right]$. **10.204.** $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$, $x \in \mathbb{R}$.

10.205. $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{x^{2n}}{(2n)!}$, $x \in \mathbb{R}$. **10.206.** $\sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{2n+1}{(2n)!}x^{2n}$, $x \in \mathbb{R}$. *Указание.* $f(x) = (x\cos x)'$.

10.207. $\sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{2^{2n+2}(n+1)}{(2n+1)!}x^{2n+1}$, $x \in \mathbb{R}$. **10.208.** $\sum\limits_{n=0}^{\infty}(n+1)(n+2)x^n$, $x \in (-1; 1)$.

Указание. $f(x)=\left(\frac{1}{1-x}\right)''$. **10.209.** $\sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^{n+1}(n+1)(n+2)(n+3)x^n$, $x \in (-1; 1)$.

10.210. $\sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{2n+1}$, $x \in [-1; 1]$. *Указание.* $f(x)=\int\limits_0^x\frac{dt}{1+t^2}$.

10.211. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{x^n}{n}$, $x \in (-1; 1]$. *Указание.* $f(x)=\int\limits_0^x\frac{dt}{1+t}$.

10.212. $x+\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{1\cdot 3\cdot\ldots\cdot(2n-1)}{2^n n!(2n+1)}x^{2n+1}$, $x \in [-1; 1]$. *Указание.* $f(x)=\int\limits_0^x\frac{dt}{\sqrt{1+t^2}}=\int\limits_0^x(1+t^2)^{-\frac{1}{2}}dt$.

10.213. $\ln 2+\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{1+2^{-n}}{n}x^n$, $x\in(-1;\,1]$.

Указание. $\ln(x^2+3x+2)=\ln(1+x)+\ln(2+x)$. **10.214.** $\ln 2+\sum_{n=1}^{\infty}\left[(-1)^{n+1}+\frac{1}{2^n}\right]\frac{x^n}{n}$, $x\in(-1;\,1]$.

10.210. $\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{2^n n!(2n+1)}$, $x\in\mathbb{R}$. **10.216.** $\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{4n+2}}{2(2n+1)!(2n+1)}$, $x\in\mathbb{R}$.

10.217. $(x+1)\ln(x+1)-x$, $x\in(-1;\,1]$. **10.218.** $\frac{x}{(1-x)^2}$, $x\in(-1;\,1)$.

10.219. $x\cdot\operatorname{arctg}x-\frac{1}{2}\ln(1+x^2)$, $x\in[-1;\,1]$. **10.220.** $\frac{1}{2}\ln\frac{1+x}{1-x}$, $x\in(-1;\,1)$.

10.221. $1+\frac{1-x}{x}\ln(1-x)$, $x\in[-1;\,1]$. **10.222.** $\frac{x(1-x)}{(1+x)^3}$, $x\in(-1;\,1)$. *Указание*. Применить почленное интегрирование рядов дважды. **10.223.** $\frac{2x}{(1-x)^3}$, $x\in(-1;\,1)$. **10.224.** 7. *Указание*. Остаточный член в форме Лагранжа формулы Тейлора разложения функции $f(x)$ по степеням $(x-x_0)$ имеет вид $R_{n+1}(x)=\frac{f^{(n+1)}(x_0+\theta(x-x_0))}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}$, $0<\theta<1$. При $x_0=0$ (формула Маклорена) $R_{n+1}(x)=\frac{f^{(n+1)}(\theta x)}{(n+1)!}x^{n+1}$, а для $f(x)=e^x$ и $x=\frac{1}{2}$ имеем

$$\left|R_{n+1}\left(\frac{1}{2}\right)\right|=R_{n+1}\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{e^{\frac{\theta}{2}}}{(n+1)!}\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}<\frac{e^{\frac{1}{2}}}{2^{n+1}(n+1)!}<\frac{2}{2^{n+1}(n+1)!}=\frac{1}{2^n(n+1)!}<10^{-6}.$$

10.225. 9. *Указание*. Разложение для $f(x)=e^x$ при $x=-1$ является знакочередующимся рядом, поэтому для остатка ряда справедлива оценка $|R_{n+1}(-1)|\le\frac{1}{(n+1)!}$. **10.226.** 6. **10.227.** 4. **10.228.** 5. **10.229.** 2. **10.230.** 10^6-1. **10.231.** 10. **10.232.** $2\cdot10^{-4}$. **10.233.** $|x|\le 0{,}9068$. **10.234.** 1/512. **10.235.** 1,6487. **10.236.** 0,3679. **10.237.** 0,4339. **10.238.** 0,1736. **10.239.** 0,5403. **10.240.** 3,8730. *Указание*. $\sqrt{15}=\sqrt{16-1}=4\left(1-\frac{1}{16}\right)^{\frac{1}{2}}$. **10.241.** 3,0171. *Указание*. $\sqrt[5]{252}=\sqrt[5]{243+9}=3\cdot\sqrt[5]{1+\frac{9}{243}}=3\cdot\sqrt[5]{1+\frac{1}{27}}=3\left(1+\frac{1}{27}\right)^{\frac{1}{5}}$. **10.242.** 0,4055.

10.243. 0,6435. **10.244.** $\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^{k+1}\frac{x^{2k}}{2k^2}$. **10.245.** $\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\frac{x^{4k+2}}{2(2k+1)(2k+1)!}$.

10.246. $\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\frac{x^{4k+1}}{(4k+1)(2k)!}$. **10.247.** $\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\frac{(2k+1)!!\,x^{3k+1}}{2^k k!(3k+1)}$. **10.248.** 0,2800.

10.249. 0,1991. **10.250.** 0,4802. **10.251.** 0,6225. **10.252.** 0,7714. **10.253.** 0,9461.

10.254. $f(x)=\frac{3\pi}{4}+\sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{(1-(-1)^k)}{\pi k^2}\cos kx-\frac{(-1)^k}{k}\sin kx\right)$. Графики частичных сумм показаны на рис. 1.

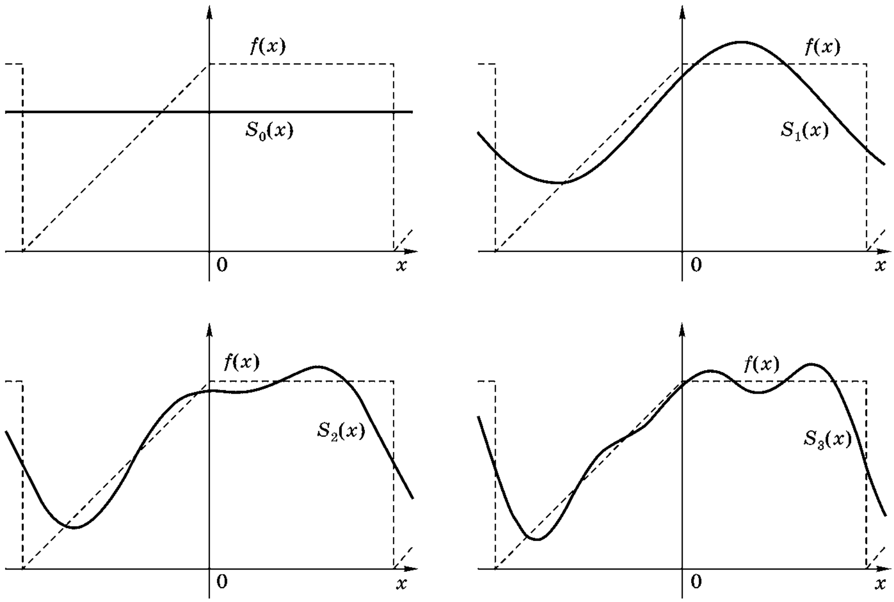


Рис. 1

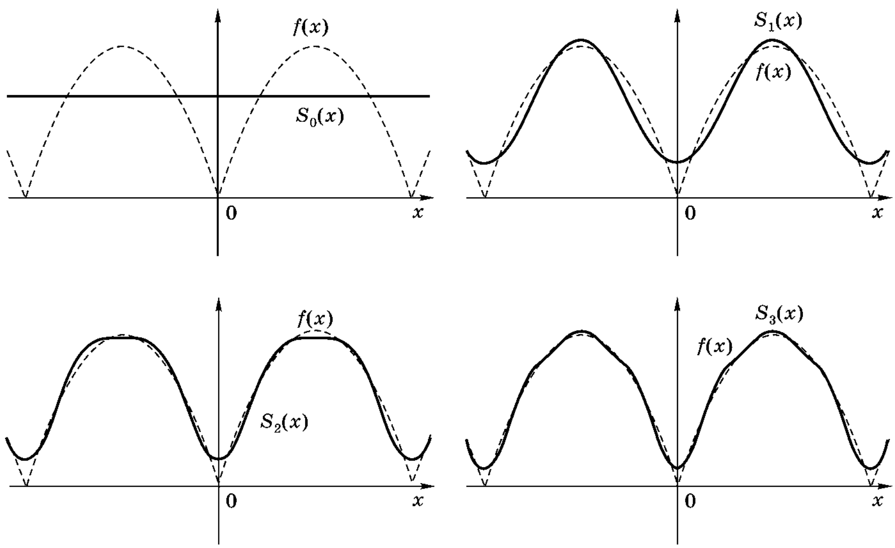


Рис. 2

10.255. $f(x)=\dfrac{\pi^2}{6}-\sum\limits_{k=1}^{\infty}\dfrac{1}{k^2}\cos 2kx.$ Графики частичных сумм показаны на рис. 2.

10.256. $f(x)=\dfrac{\pi^2}{3}+\sum\limits_{k=1}^{\infty}(-1)^k\dfrac{4}{k^2}\cos kx.$ Графики частичных сумм показаны на рис. 3.

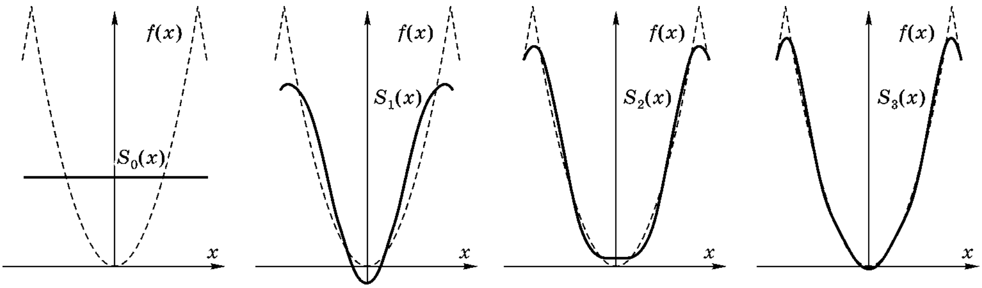


Рис. 3

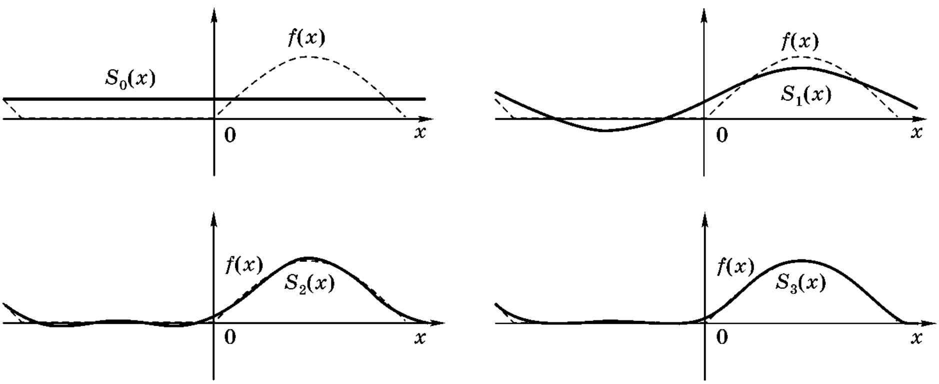


Рис. 4

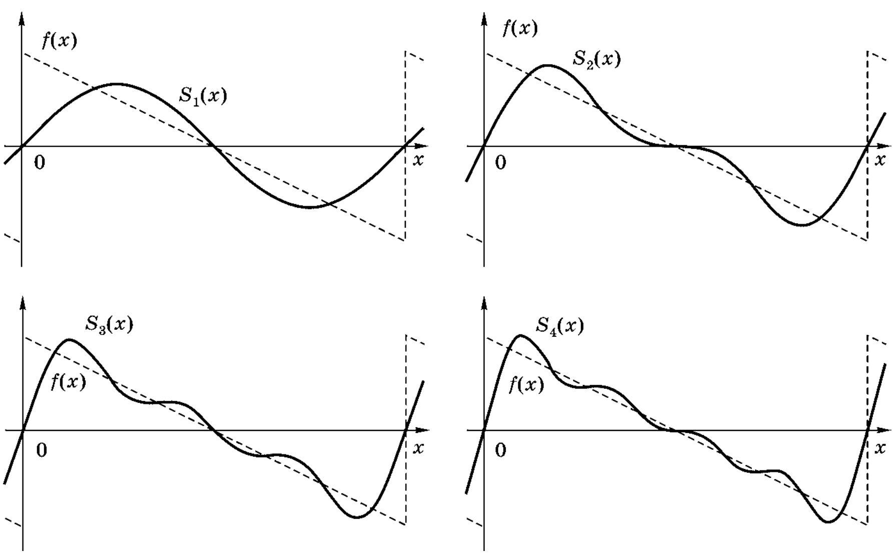


Рис. 5

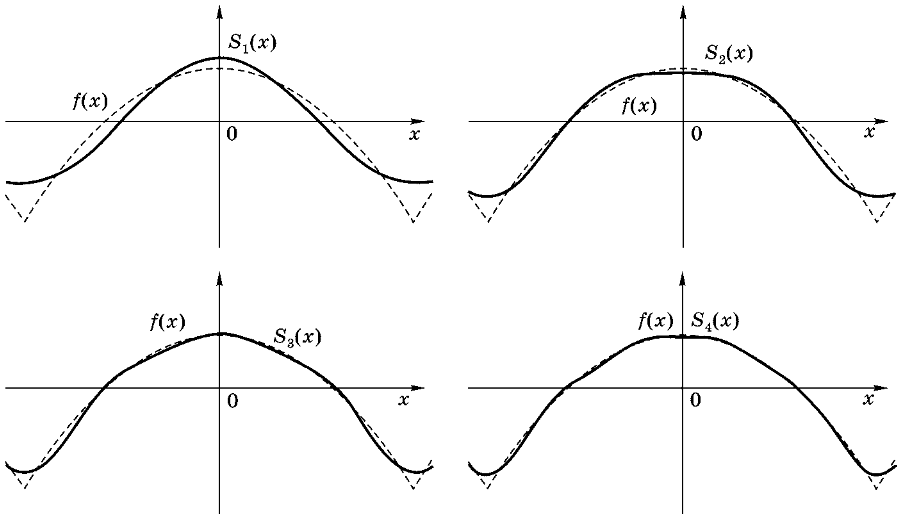


Рис. 6

10.257. $f(x)=\frac{1}{\pi}+\frac{1}{2}\sin x-\frac{2}{\pi}\sum\limits_{k=1}^{\infty}\frac{1}{4k^2-1}\cos 2kx$. Графики частичных сумм показаны на рис. 4. **10.258.** $f(x)=\sum\limits_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k}\sin kx$. Графики частичных сумм показаны на рис. 5.

10.259. $f(x)=\sum\limits_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^{k+1}}{k^2}\cos kx$. Графики частичных сумм показаны на рис. 6.

10.260. $f(x)=-\frac{4}{\pi}\sum\limits_{k=1}^{\infty}\frac{1}{2k-1}\sin(2k-1)\pi x$. **10.261.** $f(x)=\frac{5}{2}+\sum\limits_{k=1}^{\infty}\frac{6}{\pi(2k-1)}\sin\frac{(2k-1)\pi x}{2}$.

10.262. $f(x)=\frac{A+B}{2}+2\frac{B-A}{\pi}\sum\limits_{k=1}^{n}\frac{\sin(2k-1)x}{2k-1}$.

10.263. $f(x)=\frac{4}{3}+\sum\limits_{k=1}^{\infty}\left[\frac{1}{\pi k}\sin\frac{2\pi k}{3}\cos\frac{2\pi kx}{3}+\frac{1}{\pi k}\left(1-\cos\frac{2\pi k}{3}\right)\sin\frac{2\pi kx}{3}\right]$.

10.264. $f(x)=-\frac{5}{3}+\frac{4}{\pi}\sum\limits_{k=1}^{\infty}\left[\frac{1}{k}\sin\frac{2\pi k}{3}\cos\frac{2\pi kx}{3}+\frac{1}{k}\left(1-\cos\frac{2\pi k}{3}\right)\sin\frac{2\pi kx}{3}\right]$.

10.265. $f(x)=\pi-2\sum\limits_{k=1}^{\infty}\frac{\sin kx}{k}$. **10.266.** $f(x)=3-\frac{6}{\pi}\sum\limits_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k}\sin\frac{2k\pi x}{3}$.

10.267. $f(x)=-\frac{1}{2}-\frac{1}{\pi}\sum\limits_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k}\sin 2k\pi x$. **10.268.** $f(x)=\frac{3}{2}-\sum\limits_{k=1}^{\infty}\frac{1}{\pi k}\sin\pi kx$.

10.269. $f(x)=\frac{2}{\pi}-\frac{4}{\pi}\sum\limits_{k=1}^{\infty}\frac{1}{4k^2-1}\cos 2kx$. **10.270.** $f(x)=\frac{2}{\pi}+\frac{4}{\pi}\sum\limits_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^{k+1}}{4k^2-1}\cos 2kx$.

10.271. $f(x)=\frac{1}{2}+\sum\limits_{k=1}^{\infty}\left[\frac{-4}{\pi^2(2k-1)^2}\cos(2k-1)\pi x+\frac{2(-1)^{k+1}}{\pi k}\sin k\pi x\right]$.

10.272. $f(x)=\frac{1}{2}+\sum_{k=1}^{\infty}\left[\frac{4}{\pi^2(2k-1)^2}\cos\frac{(2k-1)\pi x}{2}-\frac{2}{\pi k}\sin\frac{k\pi x}{2}\right]$.

10.273. $f(x)=\frac{8}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{k}{4k^2-1}\sin 2kx$. **10.274.** $f(x)=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\cos(2k-1)x}{(2k-1)^2}$.

10.275. $f(x)=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\sin(2k-1)x}{(2k-1)^3}$. **10.276.** $f(x)=2\pi\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^{k+1}\frac{\sin kx}{k}-\frac{8}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\sin(2k-1)x}{(2k-1)^2}$.

10.277. $f(x)=\frac{5}{2}+\sum_{k=1}^{\infty}\left[\frac{2}{\pi^2(2k-1)^2}\cos(2k-1)\pi x+\frac{2(-1)^k-5}{\pi k}\sin k\pi x\right]$.

10.278. $f(x)=\frac{4}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^k}{(2k-1)^2}\sin(2k-1)x$. **10.279.** $f(x)=\frac{4}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\cos(2k-1)x}{(2k-1)^2}$.

10.280. а) $f(x)=\frac{4}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{(2k-1)^2}\cos(2k-1)x$; б) $f(x)=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k}\sin 2kx$.

10.281. а) $f(x)=\pi-\frac{4}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{(2k-1)^2}\cos(2k-1)x$; б) $f(x)=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1-3(-1)^k}{k}\sin kx$.

10.282. а) $f(x)=\frac{1}{2}+\frac{4}{\pi^2}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^{k+1}}{(2k-1)^2}\cos(2k-1)\pi x$; б) $f(x)=-\frac{2}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k}\sin k\pi x$.

10.283. а) $f(x)=2+\frac{8}{\pi^2}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^{k+1}}{(2k-1)^2}\cos(2k-1)\pi x$; б) $f(x)=\frac{2}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{3-(-1)^k}{k}\sin k\pi x$.

10.284. а) $f(x)=\frac{\pi^2}{6}-\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^2}\cos 2kx$; б) $f(x)=\frac{8}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{(2k-1)^3}\sin(2k-1)x$.

10.285. а) $f(x)=\frac{1}{3}+\frac{4}{\pi^2}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^k}{k^2}\cos\pi kx$; б) $f(x)=\frac{2}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty}\left[\frac{(-1)^{k+1}}{k}+\frac{2((-1)^k-1)}{k^3\pi^2}\right]\sin\pi kx$.

10.286. а) $f(x)=\frac{1}{2}-\frac{2}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k}\sin\frac{\pi k}{2}\cos\frac{\pi kx}{2}$; б) $f(x)=\frac{2}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k}\left((-1)^k-\cos\frac{\pi k}{2}\right)\sin\frac{\pi kx}{2}$.

10.287. а) $f(x)=-\frac{1}{2}+\frac{10}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k}\sin\frac{\pi k}{2}\cos\frac{\pi kx}{2}$; б) $f(x)=\frac{2}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k}\left(2+3(-1)^k-5\cos\frac{\pi k}{2}\right)\sin\frac{\pi kx}{2}$.

10.288. а) $f(x)=\frac{2}{\pi}+\frac{8}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^{k+1}}{4k^2-1}\cos 2kx$; б) $f(x)=\frac{16}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{k}{4k^2-1}\sin 2kx$.

10.289. а) $f(x)=\frac{2}{\pi}-\frac{4}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{4k^2-1}\cos 4kx$; б) $f(x)=\frac{8}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^{k+1}k}{4k^2-1}\sin 4kx$.

10.290. а) $f(x)=\frac{3}{4}+\frac{4}{\pi^2}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^2}\left(\cos\frac{\pi k}{2}-(-1)^k\right)\cos\frac{\pi kx}{2}$; б) $f(x)=\sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{2}{\pi k}+\frac{4}{\pi^2k^2}\sin\frac{\pi k}{2}\right)\sin\frac{\pi kx}{2}$.

10.291. а) $f(x)=1-\frac{1}{2}\cos x+2\sum_{k=2}^{\infty}\frac{(-1)^k}{k^2-1}\cos kx$; б) $f(x)=\frac{\pi}{2}\sin x-\frac{16}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{k}{(4k^2-1)^2}\sin 2kx$.

10.292. $1/2$. **10.293.** $\pi\sqrt{2}/16$. **10.294.** $\pi^3/32$. **10.295.** $-\pi^2/12$. **10.296.** $\frac{\pi^2}{16}-\frac{1}{2}$.

10.297. $\pi^2/64$. **10.298.** $\pi^6/960$. **10.299.** $\pi^4/90$. **10.306.** $\hat{f}(\omega)=\frac{1}{2\pi(1+i\omega)}$.

10.307. $\hat{f}(\omega)=\dfrac{1}{\pi(1+\omega^2)}$; $\hat{f}_c(\omega)=\dfrac{2}{\pi(1+\omega^2)}$. **10.308.** $\hat{f}(\omega)=\dfrac{a}{\pi\omega}\sin A\omega$; $\hat{f}_c(\omega)=\dfrac{2a}{\pi\omega}\sin A\omega$.

10.309. $\hat{f}(\omega)=\dfrac{a}{\pi\omega}e^{-i\frac{A+B}{2}\omega}\sin\dfrac{B-A}{2}\omega$. **10.310.** $\hat{f}(\omega)=\dfrac{2}{\pi i\omega}\sin^2\dfrac{\omega}{2}$; $\hat{f}_s(\omega)=\dfrac{4}{\pi\omega}\sin^2\dfrac{\omega}{2}$.

10.311. $\hat{f}(\omega)=\dfrac{a}{2\pi}\left(\dfrac{\sin\frac{\omega}{2}}{\frac{\omega}{2}}\right)^2$; $\hat{f}_c(\omega)=\dfrac{a}{\pi}\left(\dfrac{\sin\frac{\omega}{2}}{\frac{\omega}{2}}\right)^2$. **10.312.** $\hat{f}(\omega)=\dfrac{1}{\pi\omega}(\sin\omega+\sin 2\omega)$.

10.313. $\hat{f}(\omega)=\dfrac{1}{2\pi(1+i\omega)^2}$. **10.314.** $\hat{f}(\omega)=\dfrac{i\omega(e^{-\pi i\omega}-1)}{2\pi(1-\omega^2)}$. **10.310.** $\hat{f}(\omega)=\dfrac{-1}{2\pi(1-i\omega)^2}$.

10.316. $\hat{f}(\omega)=\dfrac{1}{\pi\omega^2}(\omega\sin\omega+i\omega\cos\omega-i\sin\omega)$. **10.317.** $\hat{f}(\omega)=\dfrac{e^{-\pi i\omega}+1}{2\pi(1-\omega^2)}$.

10.318. $\hat{f}(\omega)=\dfrac{\sin\omega}{\pi\omega}+\dfrac{2\cos\omega}{\pi\omega^2}+\dfrac{2\sin\omega}{\pi\omega^3}$. **10.319.** $\hat{f}(\omega)=\dfrac{2b\alpha^3}{\pi(\omega^2+\alpha^2)^2}$, $\hat{f}_c(\omega)=\dfrac{4b\alpha^3}{\pi(\omega^2+\alpha^2)^2}$.

Указание. $\hat{f}(\omega)=J-\dfrac{\partial J}{\partial\alpha}$, где $J(\alpha,\omega)=\dfrac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}be^{-\alpha|x|}e^{-i\omega x}\,dx=\dfrac{b\alpha}{\pi(\alpha^2+\omega^2)}$ (см. пример 10.33).

10.320. $\hat{f}(\omega)=\dfrac{8b\alpha^5}{3\pi(\omega^2+\alpha^2)^3}$, $\hat{f}_c(\omega)=\dfrac{16b\alpha^5}{3\pi(\omega^2+\alpha^2)^3}$. *Указание.* $\hat{f}(\omega)=J-\dfrac{\partial J}{\partial\alpha}+\dfrac{\alpha^2}{3}\dfrac{\partial^2 J}{\partial^2\alpha}$, где

$J(\alpha,\omega)=\dfrac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}be^{-\alpha|x|}e^{-i\omega x}\,dx=\dfrac{b\alpha}{\pi(\alpha^2+\omega^2)}$ (см. пример 10.33).

ГЛАВА 11

11.15. 1) и 3) истинны; 2) ложно. **11.16.** $E_1=A\bar{B}\bar{C}+\bar{A}B\bar{C}+\bar{A}\bar{B}C$; $F_1=AB\bar{C}+A\bar{B}C+\bar{A}BC$. **11.17.** $E_2=A+B+C$; $F_2=F_1+ABC$. **11.18.** $E_3=\bar{A}\bar{B}\bar{C}$, $F_3=F_2$, $G=\bar{A}+\bar{B}+\bar{C}=\overline{ABC}$. **11.19.** $A=A_1\bar{A}_2\bar{A}_3+\bar{A}_1A_2\bar{A}_3+\bar{A}_1\bar{A}_2A_3$, $B=A_1+A_2+A_3$, $C=\bar{A}_1+\bar{A}_2+\bar{A}_3$, $D=\bar{A}_1A_2A_3+$ $+A_1\bar{A}_2A_3+A_1A_2\bar{A}_3$, $E=\bar{A}_1\bar{A}_2$. **11.20.** P(A) = 0,01; P(B) = 0,2; P(C) = 5/144. **11.21.** 7/9.

11.22. $\dfrac{1}{m^{n-1}}$. **11.23.** Выбор без возвращения и без упорядочивания — сочетания: $\Omega=\{ab, ac, bc\}$, $N(\Omega)=3=C_3^2$. Выбор без возвращения и с упорядочиванием — размещения: $\Omega=\{ab, ba, ac, ca, bc, cb\}$, $N(\Omega)=6=A_3^2$. Выбор с возвращением и без упорядочивания — сочетания с повторениями: $\Omega=\{aa, bb, cc, ab, ac, bc\}$, $N(\Omega)=6=C_4^2$. Выбор с возвращением и с упорядочиванием — размещения с повторениями: $\Omega=\{aa, bb, cc, ab, ba, ac, ca, bc, cb\}$, $N(\Omega)=9=3^2$. **11.24.** $E=\{aa, ab, ac, ba, bb, bc\}$, $p=1/3$. **11.25.** а) 1/2; б) $\dfrac{n-1}{2n}$. **11.26.** $N(\Omega)=10^6$, $p=0{,}72\cdot10^{-3}$. **11.27.** P(A) = 1/380.

11.28. $\mathrm{P}(A)=\dfrac{1}{9!}\approx 2{,}7\cdot10^{-6}$, P($B$) = 1/9, P($C$) = 1/12, P($D$) = 1/126. **11.29.** 2/7.

11.30. $\mathrm{P}(A)=\dfrac{(n-m)(n-m-1)}{n(n-1)}$, $\mathrm{P}(B)=\dfrac{C_m^k}{C_n^k}$. **11.31.** $\dfrac{(n+1)(n!)^2}{(2n)!}$. **11.32.** 10/19.

11.33. $\mathrm{P}(A)=\dfrac{C_{20}^4C_{80}^6}{C_{100}^{10}}$, $\mathrm{P}(B)=\dfrac{C_{80}^{10}}{C_{100}^{10}}$. **11.34.** P($A$) ≈ $0{,}26\cdot10^{-2}$, P(B) ≈ 0,2813; P(C) ≈ 0,2135. **11.35.** $\mathrm{P}(A)=\dfrac{1}{C_{49}^6}\approx 0{,}715\cdot10^{-7}$, P($B$) = 259 · P($A$).

11.36. 0,0016. **11.37.** $P(A)=\left(\frac{5}{6}\right)^{10}\approx 0{,}1615$, $P(B)\approx 0{,}8385$; $P(C)\approx 0{,}155$. **11.38.** 1/15.

11.39. $\frac{2!3!2!}{10!}\approx 6{,}6\cdot 10^{-6}$. **11.40.** а) $1/n$; б) $1/n$. **11.41.** $P(A) = 14/323$; $P(B) = 125/969$.

11.42. $P(A)=\frac{4!48!(13!)^4}{(12!)^4\cdot 52!}\approx 0{,}105$; $P(B)=\frac{16\cdot 39!\cdot(13!)^4}{(13!)^3\cdot 52!}\approx 0{,}84\cdot 10^{-11}$.

11.43. $P(C)\approx 0{,}01056$; $P(D)\approx 0{,}0552$. **11.44.** $P(A)=\frac{25}{91}$, $P(B)=\frac{24}{91}$. **11.45.** 1/6.

11.46. 2/3. **11.47.** 3/4. **11.48.** $P(C)=\begin{cases}a^2, \text{ если } 0<a\le 1,\\ 1, \text{ если } 1<a,\end{cases}$ $P(D) = a(2 - a)$. **11.49.** 7/16.

11.50. $P(C)=\frac{\tau}{30}-\left(\frac{\tau}{60}\right)^2$; $P(D)=\begin{cases}\frac{3}{4}-\left(1-\frac{\tau}{60}\right)^2, \text{ если } \tau>30,\\ \frac{\tau}{60}, \text{ если } \tau\le 30.\end{cases}$

11.51. $P(A) = 2/3$, $P(B) = 1/12$. **11.52.** 1/4. **11.53.** 1/8. **11.54.** 1/4. **11.55.** $\frac{2l}{\pi a}$. *Указание*. Положение иглы характеризуется двумя координатами (r, φ), где r — расстояние от центра иглы до ближайшей прямой линии; φ — угол между направлением иглы и прямой линией. Показать, что $\Omega = \{(r, \varphi)\,|\,0 \le r \le a, 0 \le \varphi \le \pi\}$, $A = \{(r, \varphi)\,|\,0 \le \varphi \le \pi, r \le l\sin\varphi\}$. **11.57.** 1/3. **11.58.** $P(B/A) = 0{,}5$; $P(A/B) = 60/91$. **11.59.** 0,89. **11.64.** Пары событий A и B, F и B — независимы; события A и F — зависимы. **11.65.** 1/3. **11.69.** а) 0,216; б) 1/6. **11.70.** $P(BF) = 2/9$; $P(AF) = 1/9$, $P(ABF) = 1/18$. **11.71.** $P(B + F) = 13/18$, $P(F - A) = 1/3$, $P(F - AB) = 7/18$. **11.72.** $1/n$. **11.73.** 1/8. **11.74.** 0,305. **11.75.** $P(A) = p_1 + p_2 - p_1p_2$, $P(B) = p_1 + p_2 - 2p_1p_2$. **11.76.** $P(A) = 1/2$, $P(B) = 3/4$, $P(C) = 1/2$. **11.77.** $n \ge 25$. **11.78.** 1/3. **11.80.** $p_1p_4(1 - q_2q_3)$. **11.81.** $(1 - q_1q_2)(1 - q_3q_4)$. **11.82.** $p_5(1 - q_1q_2)(1 - q_3q_4) + q_5(p_1p_3 + p_2p_4 + p_1p_2p_3p_4)$. **11.83.** 0,278. **11.84.** 3/8. **11.85.** 0,122. **11.86.** Шансы одинаковы. **11.87.** 0,5. **11.88.** $1 - npq_1q^{n-1} - q^n$, где $q = 1 - p$, $q_1 = 1 - p_1$. **11.89.** 9/29. **11.90.** Ко второй группе. **11.91.** $\approx 0{,}286$. **11.92.** 11/122. **11.93.** 0,4.

11.94.

x_k	0	1
p_k	$1-p$	p

$F_{I_A}(x)=\begin{cases}0, & x\le 0,\\ 1-p, & 0<x\le 1,\\ 1, & x>1.\end{cases}$ **11.95.** $F_X(x)=\begin{cases}0, & x\le 0,\\ \frac{20}{29}, & 0<x\le 1,\\ \frac{85}{87}, & 1<x\le 2,\\ 1, & x>2.\end{cases}$

11.96. $F_X(0{,}5) = F_X(-0{,}5) = 0{,}5$. **11.97.** $P\{X \ge 3{,}5\} = 1/2$, $P\{|X| < 2{,}5\} = 0{,}3$.

11.98.

x_i	2	3	4
p_i	0,3	0,2	0,5

11.99. $m_X=\frac{45}{16}$, $D_X=11-\left(\frac{45}{16}\right)^2\approx 8{,}1875$; $\sigma_X\approx 2{,}8614$.

11.101. $m_X = p$, $D_X = p(1 - p)$, $\sigma_X=\sqrt{p(1-p)}$.
11.102. $c = 0{,}7$; $P\{X > 0{,}7\} = 0{,}9$; $m_X = 1{,}6$; $D_X = 0{,}44$; $\sigma_X = 0{,}663$.

11.103.

X	1	2	3
P	0,2	0,3	0,5

11.104.

X	1	2	3
P	0,8	0,16	0,04

$m_X = 1{,}24$; $D_X = 0{,}2624$.

11.105.

X	0	1	2
P	0,3	0,6	0,1

$m_X = 4/5$, $D_X = 9/25$. **11.106.** $\approx 0{,}0579$. **11.107.** $\approx 0{,}2$.

11.108. Два попадания с вероятностью $\approx 0{,}302$. **11.109.** $\approx 0{,}6513$. **11.110.** $1-(pt+q)^n$. **11.111.** $n \ge 59$. **11.112.** $\mathrm{P}\{X \ge m_X\} \approx 0{,}5638$; один или два прибора. **11.113.** $m_X = 5$; $\mathrm{P}\{X = 0\} \approx 6{,}738 \cdot 10^{-3}$. **11.114.** $\approx 0{,}26424$. **11.115.** $\approx 0{,}14288$. **11.116.** Две опечатки с вероятностью $\approx 0{,}251$. **11.117.** $1 - e^{-0{,}2} \approx 0{,}1813$. **11.118.** $\dfrac{1}{\sqrt{e}} \approx 0{,}606$. **11.119.** $1 - 3 \cdot e^{-2} \approx 0{,}594$. **11.120.** $\mathrm{P}(A) \approx 0{,}018$; $\mathrm{P}(B) \approx 0{,}092$. **11.121.** $\mathrm{P}(C) \approx 0{,}18$; $\mathrm{P}(D) \approx 0{,}062$. **11.122.** $\mathrm{P}\{X > m_X\} = \mathrm{P}\{X > 3\} = 1 - p \cdot (1 + q + q^2) = 8/27$. **11.123.** $m_X = 20$, $F_X(3) = 0{,}0975$. **11.124.** 36 карт; $\approx 0{,}945$. **11.125.** 20 человек; $\approx 0{,}401$. **11.126.** 1000 изделий; $\mathrm{P}\{X > 3m_X\} \approx 0{,}0498$. **11.127.** Не являются функциями плотности $f_1(x)$ и $f_2(x)$.

11.128. $a = 1$; $f_X(x) = \begin{cases} 0, & x \le 0, \\ 2x, & 0 < x \le 1, \\ 0, & x > 1; \end{cases}$ $\mathrm{P}\{0{,}25 \le X < 0{,}5\} = 0{,}1175$.

11.129. $a = 0{,}5$; $m_X = 0$; $D_X = \dfrac{\pi^2}{4} - 2$; $F_X(x) = \begin{cases} 0, & x \le -\pi/2, \\ (\sin x + 1)/2, & -\pi/2 < x \le \pi/2, \\ 1, & x > \pi/2. \end{cases}$ **11.130.** $d_X = 1$.

11.131. $d_X = \dfrac{2\sqrt{3}}{3} \approx 1{,}155$; $h_X \approx 0{,}356$. **11.132.** $a = 2/9$; $m_X = d_X = h_X = 1{,}5$; $D_X = 0{,}45$.

11.133. $h_X = 2$; $x_{2/3} = 3$; m_X не существует. **11.134.** $\mathrm{P}\{X \le 3\sigma_X\} = 1$; $x_{0,9} = 1{,}6$. **11.135.** $1/3$.

11.136. а) $\dfrac{1}{\sqrt{3}} \approx 0{,}577$; б) $1 - \dfrac{1}{\sqrt{3}} \approx 0{,}423$. **11.137.** $1 - e^{-6} \approx 0{,}998$. **11.138.** $\mathrm{P}(A) = e^{-0{,}5} - e^{-1{,}5} \approx 0{,}3834$; $\mathrm{P}(B) = e^{-2} \approx 0{,}135$. **11.139.** $e^{-10} \approx 0{,}454 \cdot 10^{-4}$. **11.140.** $m_X = \sigma_X = 5{,}36$; $D_X = 28{,}735$; $\alpha_2 = 57{,}47$. **11.141.** $\mathrm{P}\{|X - m| \le 10\} \approx 0{,}8472$. **11.142.** $\ge 0{,}5128$. **11.143.** а) $p \approx 0{,}9190$; б) 92 шарика. **11.144.** $D_X = 156{,}25$. **11.145.** $\approx 0{,}9087$.

11.146.

X	0	1	2
P	25/36	5/18	1/36

Y	0	1	2
P	1/4	1/2	1/4

$\mathrm{P}\{X < Y\} = 7/12$; $(m_X, m_Y) = (2; 2{,}5)$; $\rho_{X,Y} = \sqrt{\dfrac{6}{17}} \approx 0{,}594$. **11.147.** $(m_X, m_Y) = (0, 0)$; $D_X = 4$; $D_Y = 5/12$; $\rho_{X,Y} = 0$.

11.148.

X \ Y	0	1	2
0	9/36	12/36	4/36
1	0	6/36	4/36
2	0	0	1/36

11.149. $\mathrm{P}\{X \ge Y\} = 4/9$; $F_X(x) = \begin{cases} 0, & x \le 0, \\ 25/36, & 0 < x \le 1, \\ 35/36, & 1 < x \le 2, \\ 1, & 2 < x. \end{cases}$

11.150. $\rho_{X,Y} = \dfrac{27}{\sqrt{781}} \approx 0{,}966$. **11.151.** 2,5%; $\rho_{X,Y} = 0{,}669$.

11.152. 0,0111; $\rho_{X,Y} = 0{,}066$. **11.153.** $\dfrac{\sqrt{3} - \sqrt{2}}{4}$. **11.154.** $\approx 0{,}1077$. **11.155.** $a = \dfrac{1}{4}$;

$f_X(x) = \begin{cases} 0, & x \notin [0, 2], \\ \dfrac{1}{2}x, & x \in [0, 2]. \end{cases}$ **11.156.** $X \sim Ex(\lambda)$, $Y \sim Ex(\mu)$.

11.157. 1) $f_{X,Y}(x, y) = \begin{cases} 2^{-x-y}(\ln 2)^2, & x \ge 0,\ y \ge 0, \\ 0, & \text{в иных случаях.} \end{cases}$ 2) $\approx 0{,}0208$.

11.158. $a = 1/27$; $m_X = m_Y = = 7/4$; $D_X = D_Y = 11/16$; $\sigma_X = \sigma_Y = \sqrt{11}/4$; $K_{X,Y} = -1/16$; $\rho_{X,Y} = -1/11$; $\mathrm{P}\{(X, Y) \in Q\} = 1/9$. **11.159.** $\rho_{X,Y} = 0$. **11.160.** $\rho_{X,Y} = 0$. **11.161.** Компоненты независимы. **11.162.** $c = 1/6$; компоненты независимы. **11.163.** а) Зависимы; б) некоррелированы. **11.165.** 1) 1; 2) −1. **11.166.** Зависимы; $\rho_{X,Y} = -2/3$. **11.167.** Независимы. **11.168.** $M[(X-4)(5-X)] = -16$; $D[3-2X] = 1$. **11.169.** $m_S = 7$; $D_S = 35/6$. **11.170.** 9. **11.171.** 0. **11.172.** $M[X+Y] = 1$; $D[X+Y] = 1{,}5$. **11.173.** $M[X+Y] = 1{,}5$; $M[X-Y] = 0{,}5$; $M[X^2+Y^2] = 5/3$; $M[XY] = 0{,}5$. **11.174.** $D[X+Y] = D[X-Y] = 5/12$; $D[XY] = 7/36$.

11.175. $M[S]=\dfrac{ab}{\pi}$; $D[S]=\dfrac{a^2b^2}{8}\left(1-\dfrac{8}{\pi^2}\right)$. **11.176.** $a/3$. **11.177.** $D[3X-4Y+5] = 144$.

11.178. $M[X^2+Y^2]=\dfrac{a^2+b^2}{3}$; $D[X^2+Y^2]=\dfrac{4}{45}(a^4+b^4)$. **11.179.** $\dfrac{2}{15}\pi a^3$.

11.180. $Y \sim N(m_Y, \sigma_Y)$, где $m_Y = ma + b$, $\sigma_Y = |a|\sigma$.

11.181. $f_Y(y)=\dfrac{1}{3\pi}\cdot\dfrac{1}{\sqrt[3]{(y-2)^2}}\cdot\dfrac{1}{\left(1+\sqrt[3]{(y-2)^2}\right)}$. **11.182.**

Y	$\sqrt{2}/2$	1
P	0,3	0,7

11.183. 1. **11.184.** $F_Y(y)=\begin{cases}0, & y\le -4,\\ F_X\left(\dfrac{\sqrt{4+y}}{3}\right)-F_X\left(-\dfrac{\sqrt{4+y}}{3}\right), & -4<y;\end{cases}$

$F_Z(z)=\begin{cases}0, & z\le 0,\\ F_X(1+z)-F_X(1-z), & 0<z;\end{cases}$ $F_V(v)=\begin{cases}0, & v\le 0,\\ 1-F_X\left(\dfrac{1}{2}\ln\dfrac{1}{v}\right), & 0<v.\end{cases}$

11.185. $f_Y(y)=\begin{cases}0, & y\le 0,\\ 2\lambda y e^{-\lambda y^2}, & y>0;\end{cases}$ $f_Z(z)=\begin{cases}0, & z\le 0,\\ \dfrac{\lambda}{2\sqrt{z}}e^{-\lambda\sqrt{z}}, & z>0;\end{cases}$ $f_V(v)=\begin{cases}0, & u\notin(0,1],\\ 1, & u\in(0,1].\end{cases}$

11.186. $F_Y(y)=\begin{cases}0, & y\le 0,\\ y^2, & 0<y\le 1,\\ 1, & y>1.\end{cases}$ **11.187.** $F_Y(y)=\begin{cases}1+\Phi\left(\dfrac{1-\sqrt{1-y}}{2}\right)-\Phi\left(\dfrac{1+\sqrt{1-y}}{2}\right), & y\le 1,\\ 1, & y>1.\end{cases}$

11.188.

u_k	0	1	2	3
p_k	0,3	0,4	0,25	0,05

v_k	–1	0	3
p_k	0,35	0,55	0,10

11.189. $f_Z(z)=\begin{cases}0, & z\notin(0,a),\\ \dfrac{2z}{a^2}, & z\in(0,a).\end{cases}$ **11.190.** $f_R(r)=\begin{cases}0, & r\le 0,\\ \dfrac{r}{\sigma^2}\exp\left\{-\dfrac{r^2}{2\sigma^2}\right\}, & 0<r.\end{cases}$

11.191.

u_k	–2	–1	0	1	2
p_k	0,05	0,15	0,35	0,35	0,10

v_k	1	2	4	5
p_k	0,3	0,5	0,05	0,15

11.192.

z_k	0	1	2	3	4
p_k	$\frac{1}{4}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{17}{64}$	$\frac{3}{32}$	$\frac{1}{64}$

11.193. 0,2381. **11.194.** 73/243.

11.195. $f_Z(z)=\dfrac{1}{\sqrt{80\pi}}e^{-\frac{z^2}{80}}$. **11.196.** $f_Z(z)=\begin{cases}0, & z\notin(0,4],\\ z, & 0<z\le 2,\\ z-4, & 2<z\le 4.\end{cases}$ **11.197.** $P\{Z=k\} = (k-1)p^2q^{k-2}$, $k = 2, 3, \ldots$. **11.198.** 0,8115. **11.199.** $P\{X \ge 2\} \le 1$. **11.200.** $P\{X < 80\} \ge 0{,}75$. **11.201.** 0,75. **11.202.** а) $\le 1/6$; б) 1/32. **11.203.** $\ge 0{,}5$. **11.204.** $\ge 0{,}585$. **11.205.** *Указание*. Учесть, что случайные величины X_i в последовательности $\{X_i\}$, $i = 1, 2, \ldots$, независимые, одинаково распределенные по закону $G(p)$ при $p = 0,5$. **11.206.** $\frac{\sigma_Y}{m_Y} = \frac{1}{3}\frac{\sigma_X}{m_X} = \frac{0,02}{3}$. Относительная точность сборки в три раза выше относительной точности изготовления отдельной детали. **11.207.** Применим. **11.208.** Применим. **11.209.** Не применим. **11.210.** а) $\mathrm{P}\{X = 35\} \approx 0,00089$; б) $\mathrm{P}\{40 \le X \le 65\} \approx 0,9765$. **11.211.** $n \ge 20608$. **11.212.** $\approx 0,95$. **11.213.** а) $p \ge 0,306$; б) $p \approx 0,76986$. **11.214.** 0,99984. **11.215.** $n \ge 11172$. **11.216.** 0,056. **11.217.** а) 0,98274; б) 0,9932. **11.218.** 0,0008. **11.219.** $\mathrm{P}(A) = 0,5$; $\mathrm{P}(B) = 0,9742$.

ГЛАВА 12

12.1. а) 2, 2, 2, 3, 4, 4, 5, 5, 5, 7, 7, 7, 7, 10, 10; б)

z_i	2	3	4	5	7	10
n_i	3	1	2	3	4	2

12.2. $F_n^*(x) = \begin{cases} 0, & x \le 1, \\ 0,2, & 1 < x \le 4, \\ 0,5, & 4 < x \le 6, \\ 1, & x > 6. \end{cases}$ **12.3.** График эмпирической функции распределения изображен на рис. 1, гистограмма частот — на рис. 2, полигон частот — на рис. 3. **12.4.** График эмпирической функции распределения изображен на рис. 4, гисто-

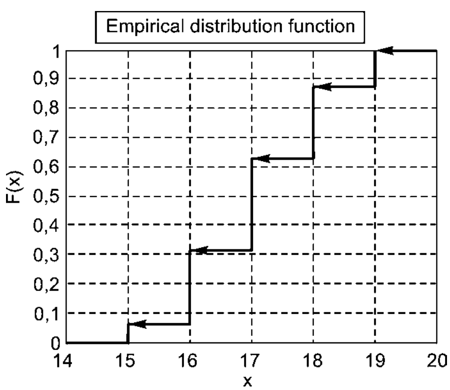


Рис. 1

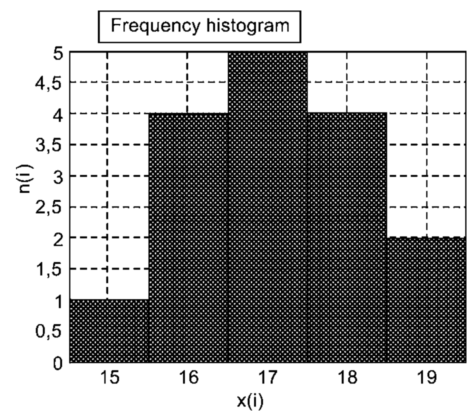


Рис. 2

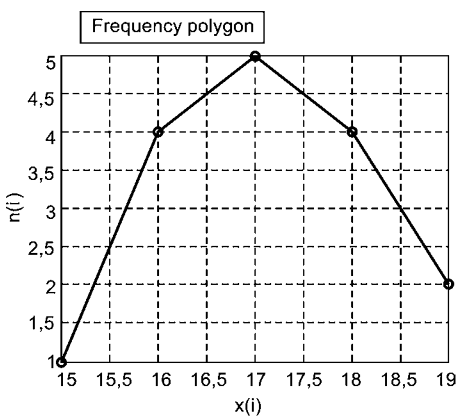


Рис. 3

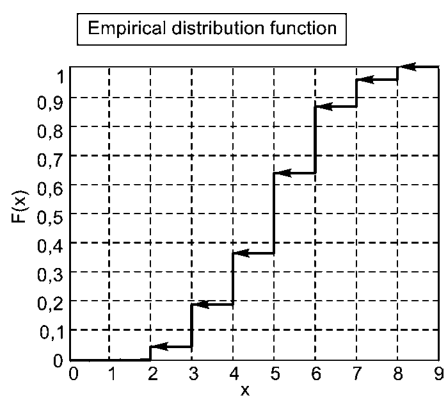


Рис. 4

грамма частот — на рис. 5, полигон частот — на рис. 6. **12.5.** График эмпирической функции распределения изображен на рис. 7, гистограмма частот — на рис. 8, полигон частот — на рис. 9.

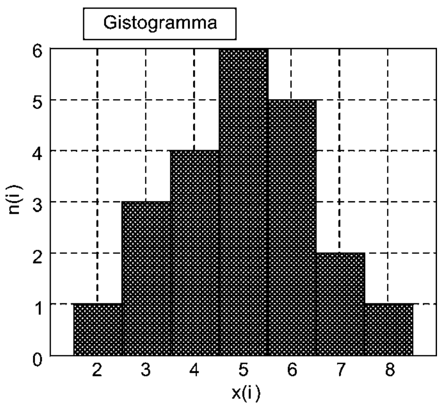


Рис. 5

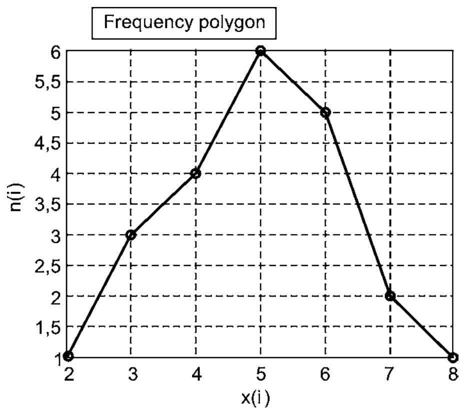


Рис. 6

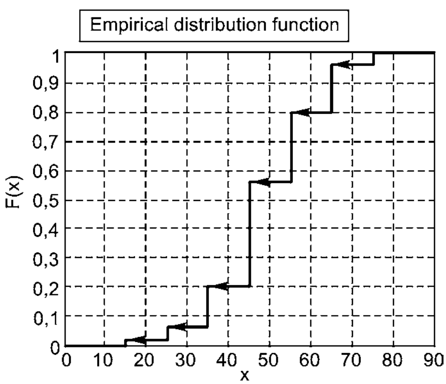


Рис. 7

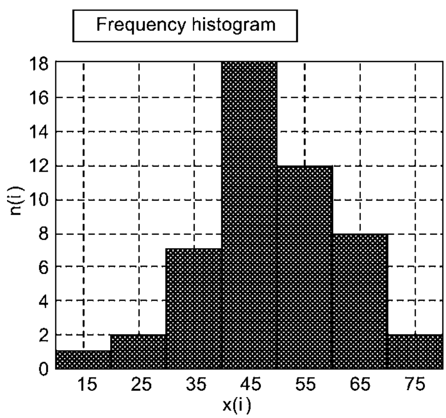


Рис. 8

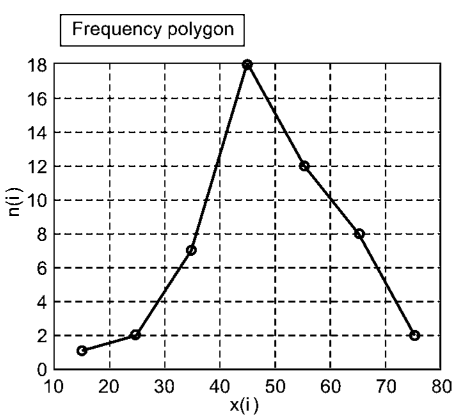


Рис. 9

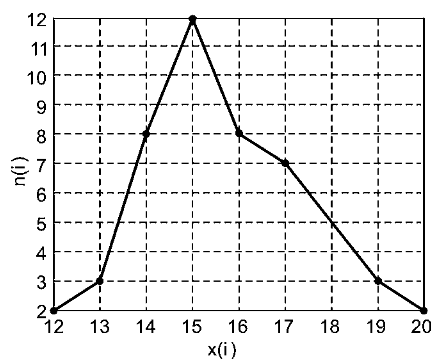


Рис. 10

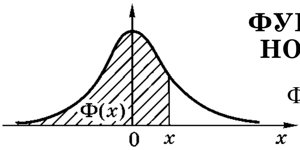
12.6. Статистический ряд:

z_i	12	13	14	15	16	17	18	19	20
n_i	2	3	8	12	8	7	5	3	2

; полигон частот изображен на рис. 10. **12.7.** $d_X^* = h_X^* = 3$; $\bar{x} = 3{,}5$; $D_X^* = 3{,}65$. **12.8.** $d_X^* = 3{,}1$; $h_X^* = 2{,}5$; $\bar{x} \approx 2{,}39$; $D_X^* \approx 0{,}43$. **12.9.** $\bar{x} \approx 10{,}49$; $d_X^* = 10$; $h_X^* = 10$; $D_X^* \approx 6{,}29$. **12.10.** $\bar{x} = 49$; $S^2 = 156$. **12.11.** $\bar{x} = 15{,}78$; $S^2 = 3{,}7316$. **12.12.** $a_X^* \approx -0{,}03$; $e_X^* \approx -1{,}09$. **12.17.** $\tilde{\lambda} = \bar{x}$; оценка несмещенная и состоятельная. **12.18.** $\tilde{p} = \frac{k}{n}$; оценка несмещенная и состоятельная. **12.19.** $\tilde{p} = \frac{k}{n}$. **12.20.** $\tilde{\lambda} = \bar{x}$. **12.21.** $\tilde{m} = \bar{x}$; $\widetilde{\sigma^2} = S^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2$. **12.22.** $\tilde{\lambda} = \frac{1}{\bar{x}}$.

12.27. (18,35; 21,64). **12.28.** (498,35; 501,64). **12.29.** (28,14; 31,86). **12.30.** (16,63; 19,37). **12.31.** $n \geq 385$. **12.34.** $\beta = 0{,}9$: $10{,}55 < \sigma^2 < 27{,}8$; $\beta = 0{,}95$: $9{,}75 < \sigma^2 < 30{,}97$. **12.35.** $3{,}27 < \sigma^2 < 53{,}73$. **12.36.** $21{,}192 < m < 26{,}808$; $20{,}520 < \sigma^2 < 76{,}608$; $0{,}1204 < \sigma < 8{,}753$. **12.37.** $4{,}424 < m < 4{,}64$; $0{,}0145 < \sigma^2 < 0{,}0832$; $0{,}1204 < \sigma < 0{,}2884$. **12.38.** $3{,}805 \cdot 10^{-2} < p < 6{,}195 \cdot 10^{-2}$. **12.39.** $n \geq 168$. **12.40.** (0,736; 0,881). **12.41.** (0,39; 0,41). **12.42.** Не свидетельствуют: батарейки удовлетворяют стандарту. При $\alpha = 0{,}025$ основная гипотеза принимается с большей надежностью. **12.43.** а) Нельзя; б) нельзя. **12.44.** Основная гипотеза H_0 отвергается: новичок работает неритмично. **12.45.** а), б) Гипотеза H_0 принимается. **12.46.** а) Гипотеза H_0 отклоняется; б) гипотеза H_0 принимается. **12.47.** Образец троса удовлетворяет техническим условиям. **12.48.** Ожидания конструкторов подтверждаются на данном уровне значимости. **12.49.** Вероятность ошибки первого рода $\alpha = \mathrm{P}\{\bar{x} < 9{,}44 | H_0\} = \Phi(-1{,}4) \approx 0{,}08$; вероятность ошибки второго рода $\beta = \mathrm{P}\{\bar{x} > 9{,}44 | H_1\} = 1 - \Phi(1{,}1) \approx 0{,}136$. **12.50.** а) Не следует; б) следует. **12.51.** Да. **12.52.** Да, знания студентов улучшились. **12.53.** По крайней мере для 90 пациентов. **12.54.** Основная гипотеза H_0 о правильности монеты отклоняется. **12.55.** H_0 отвергается. **12.56.** H_0 отвергается. **12.57.** Можно считать. **12.58.** а) Гипотеза H_0 принимается; б) гипотеза H_0 отклоняется. **12.59.** Нельзя. **12.60.** Нельзя. **12.61.** Можно. **12.62.** 1) Согласуются; 2) не согласуются. **12.63.** Нельзя. **12.64.** Гипотеза H_0 принимается. **12.65.** Нет, не согласуются. **12.66.** Гипотеза H_0 отклоняется. **12.67.** H_0 принимается; $Z_{\text{выб}} = 6{,}22 < \chi^2_{0,99}(3) = 11{,}3$ (первые два интервала объединяются). **12.68.** Да, можно: данные согласуются с гипотезой о равномерном распределении значащих цифр числа π. **12.71.** 0,866. **12.72.** 0,44. **12.73.** а) Незначима; б) незначима. **12.74.** а) Значима; б) незначима; в) значима. **12.75.** $\alpha_0 = 0{,}005$; $r_{\text{кр}} = 0{,}31$. **12.76.** $r = -0{,}8992$; компоненты зависимы. **12.77.** $r = 0{,}7165$; линейная связь значима. **12.78.** $\tilde{y}(x) = -1{,}7802 \cdot x + 250{,}6778$. **12.79.** $\tilde{y}(x) = 0{,}0012 \cdot x - 0{,}7889$; $\tilde{x}(y) = 440{,}619 \cdot y + 736{,}329$. **12.80.** $\tilde{y}(x) = 0{,}87 \cdot x + 67{,}53$. **12.81.** $\tilde{a}_0 = 101{,}4$; $\tilde{a}_1 = -2{,}58$; $\tilde{a}_2 = 0{,}022$; 50,6%. **12.82.** $\beta^* = 5{,}619$; линейная регрессия значима. **12.83.** $r = -0{,}979$; $\beta^* = -1{,}06$; 1) корреляция значима; 2) линейная регрессия значима. **12.84.** $r = 0{,}953$; $\beta^* = 1{,}66$; 1) корреляция значима; 2) линейная регрессия значима.

ПРИЛОЖЕНИЕ 1



ФУНКЦИЯ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ $\Phi(x)$ НОРМАЛЬНОГО ЗАКОНА $N(0, 1)$;

$$\Phi(-x) = 1 - \Phi(x), \quad \Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x} e^{-t^2/2} dt$$

x	0,00	0,01	0,02	0,03	0,04	0,05	0,06	0,07	0,08	0,09
0,0	0,5000	0,5040	0,5080	0,5120	0,5160	0,5199	0,5239	0,5279	0,5319	0,5359
0,1	0,5398	0,5438	0,5478	0,5517	0,5557	0,5596	0,5636	0,5675	0,5714	0,5753
0,2	0,5793	0,5832	0,5871	0,5910	0,5948	0,5987	0,6026	0,6064	0,6103	0,6141
0,3	0,6179	0,6217	0,6255	0,6293	0,6331	0,6368	0,6406	0,6443	0,6480	0,6517
0,4	0,6554	0,6591	0,6628	0,6664	0,6700	0,6736	0,6772	0,6808	0,6844	0,6879
0,5	0,6915	0,6950	0,6985	0,7019	0,7054	0,7088	0,7123	0,7157	0,7190	0,7224
0,6	0,7257	0,7291	0,7324	0,7357	0,7389	0,7422	0,7454	0,7486	0,7517	0,7549
0,7	0,7580	0,7611	0,7642	0,7673	0,7704	0,7734	0,7764	0,7794	0,7823	0,7852
0,8	0,7881	0,7910	0,7939	0,7967	0,7995	0,8023	0,8051	0,8078	0,8106	0,8133
0,9	0,8159	0,8186	0,8212	0,8238	0,8264	0,8289	0,8315	0,8340	0,8365	0,8389
1,0	0,8413	0,8438	0,8461	0,8485	0,8508	0,8531	0,8554	0,8577	0,8599	0,8621
1,1	0,8643	0,8665	0,8686	0,8708	0,8729	0,8749	0,8770	0,8790	0,8810	0,8830
1,2	0,8849	0,8869	0,8888	0,8907	0,8925	0,8944	0,8962	0,8980	0,8997	0,9015
1,3	0,9032	0,9049	0,9066	0,9082	0,9099	0,9115	0,9131	0,9147	0,9162	0,9177
1,4	0,9192	0,9207	0,9222	0,9236	0,9251	0,9265	0,9279	0,9292	0,9306	0,9319
1,5	0,9332	0,9345	0,9357	0,9370	0,9382	0,9394	0,9406	0,9418	0,9429	0,9441
1,6	0,9452	0,9463	0,9474	0,9484	0,9495	0,9505	0,9515	0,9525	0,9535	0,9545
1,7	0,9554	0,9564	0,9573	0,9582	0,9591	0,9599	0,9608	0,9616	0,9625	0,9633
1,8	0,9641	0,9649	0,9656	0,9664	0,9671	0,9678	0,9686	0,9693	0,9699	0,9706
1,9	0,9713	0,9719	0,9726	0,9732	0,9738	0,9744	0,9750	0,9756	0,9761	0,9767
2,0	0,9772	0,9778	0,9783	0,9788	0,9793	0,9798	0,9803	0,9808	0,9812	0,9817
2,1	0,9821	0,9826	0,9830	0,9834	0,9838	0,9842	0,9846	0,9850	0,9854	0,9857
2,2	0,9861	0,9864	0,9868	0,9871	0,9875	0,9878	0,9881	0,9884	0,9887	0,9890
2,3	0,9893	0,9896	0,9898	0,9901	0,9904	0,9906	0,9909	0,9911	0,9913	0,9916
2,4	0,9918	0,9920	0,9922	0,9925	0,9927	0,9929	0,9931	0,9932	0,9934	0,9936
2,5	0,9938	0,9940	0,9941	0,9943	0,9945	0,9946	0,9948	0,9949	0,9951	0,9952
2,6	0,9953	0,9955	0,9956	0,9957	0,9959	0,9960	0,9961	0,9962	0,9963	0,9964
2,7	0,9965	0,9966	0,9967	0,9968	0,9969	0,9970	0,9971	0,9972	0,9973	0,9974
2,8	0,9974	0,9975	0,9976	0,9977	0,9977	0,9978	0,9979	0,9979	0,9980	0,9981
2,9	0,9981	0,9982	0,9982	0,9983	0,9984	0,9984	0,9985	0,9985	0,9986	0,9986
3,0	0,9987	0,9987	0,9987	0,9988	0,9988	0,9989	0,9989	0,9989	0,9990	0,9990
3,1	0,9990	0,9991	0,9991	0,9991	0,9992	0,9992	0,9992	0,9992	0,9993	0,9993
3,2	0,9993	0,9993	0,9994	0,9994	0,9994	0,9994	0,9994	0,9995	0,9995	0,9995
3,3	0,9995	0,9995	0,9995	0,9996	0,9996	0,9996	0,9996	0,9996	0,9996	0,9997
3,4	0,9997	0,9997	0,9997	0,9997	0,9997	0,9997	0,9997	0,9997	0,9997	0,9998

Квантили u_p нормального распределения $N(0; 1)$:

p	0,90	0,95	0,975	0,99	0,995	0,999	0,9995
u_p	1,282	1,645	1,960	2,326	2,576	3,090	3,291

ПРИЛОЖЕНИЕ 2

ЗНАЧЕНИЯ ФУНКЦИИ ПЛОТНОСТИ НОРМАЛЬНОГО РАСПРЕДЕЛЕНИЯ $N(0,\ 1)$ $f(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-x^2/2}$

x	0,00	0,01	0,02	0,03	0,04	0,05	0,06	0,07	0,08	0,09
0,0	0,3989	0,3989	0,3989	0,3988	0,3986	0,3984	0,3982	0,3980	0,3977	0,3973
0,1	0,3970	0,3965	0,3961	0,3956	0,3951	0,3945	0,3939	0,3932	0,3925	0,3918
0,2	0,3910	0,3902	0,3894	0,3885	0,3876	0,3867	0,3857	0,3847	0,3836	0,3825
0,3	0,3814	0,3802	0,3790	0,3778	0,3765	0,3752	0,3739	0,3725	0,3712	0,3697
0,4	0,3683	0,3668	0,3653	0,3637	0,3621	0,3605	0,3589	0,3572	0,3555	0,3538
0,5	0,3521	0,3503	0,3485	0,3467	0,3448	0,3429	0,3410	0,3391	0,3372	0,3352
0,6	0,3332	0,3312	0,3292	0,3271	0,3251	0,3230	0,3209	0,3187	0,3166	0,3144
0,7	0,3123	0,3101	0,3079	0,3056	0,3034	0,3011	0,2989	0,2966	0,2943	0,2920
0,8	0,2897	0,2874	0,2850	0,2827	0,2803	0,2780	0,2756	0,2732	0,2709	0,2685
0,9	0,2661	0,2637	0,2613	0,2589	0,2565	0,2541	0,2516	0,2492	0,2468	0,2444
1,0	0,2420	0,2396	0,2371	0,2347	0,2323	0,2299	0,2275	0,2251	0,2227	0,2203
1,1	0,2179	0,2155	0,2131	0,2107	0,2083	0,2059	0,2036	0,2012	0,1989	0,1965
1,2	0,1942	0,1919	0,1895	0,1872	0,1849	0,1826	0,1804	0,1781	0,1758	0,1736
1,3	0,1714	0,1691	0,1669	0,1647	0,1626	0,1604	0,1582	0,1561	0,1539	0,1518
1,4	0,1497	0,1476	0,1456	0,1435	0,1415	0,1394	0,1374	0,1354	0,1334	0,1315
1,5	0,1295	0,1276	0,1257	0,1238	0,1219	0,1200	0,1182	0,1163	0,1145	0,1127
1,6	0,1109	0,1092	0,1074	0,1057	0,1040	0,1023	0,1006	0,0989	0,0973	0,0957
1,7	0,0940	0,0925	0,0909	0,0893	0,0878	0,0863	0,0848	0,0833	0,0818	0,0804
1,8	0,0790	0,0775	0,0761	0,0748	0,0734	0,0721	0,0707	0,0694	0,0681	0,0669
1,9	0,0656	0,0644	0,0632	0,0620	0,0608	0,0596	0,0584	0,0573	0,0562	0,0551
2,0	0,0540	0,0529	0,0519	0,0508	0,0498	0,0488	0,0478	0,0468	0,0459	0,0449
2,1	0,0440	0,0431	0,0422	0,0413	0,0404	0,0396	0,0387	0,0379	0,0371	0,0363
2,2	0,0355	0,0347	0,0339	0,0332	0,0325	0,0317	0,0310	0,0303	0,0297	0,0290
2,3	0,0283	0,0277	0,0270	0,0264	0,0258	0,0252	0,0246	0,0241	0,0235	0,0229
2,4	0,0224	0,0219	0,0213	0,0208	0,0203	0,0198	0,0193	0,0189	0,0184	0,0180
2,5	0,0175	0,0171	0,0167	0,0163	0,0158	0,0154	0,0151	0,0147	0,0143	0,0139
2,6	0,0136	0,0132	0,0129	0,0126	0,0122	0,0119	0,0116	0,0113	0,0110	0,0107
2,7	0,0104	0,0101	0,0099	0,0096	0,0093	0,0091	0,0088	0,0086	0,0084	0,0081
2,8	0,0079	0,0077	0,0075	0,0073	0,0071	0,0069	0,0067	0,0065	0,0063	0,0061
2,9	0,0060	0,0058	0,0056	0,0055	0,0053	0,0051	0,0050	0,0048	0,0047	0,0046
3,0	0,0044	0,0043	0,0042	0,0040	0,0039	0,0038	0,0037	0,0036	0,0035	0,0034
3,1	0,0033	0,0032	0,0031	0,0030	0,0029	0,0028	0,0027	0,0026	0,0025	0,0025
3,2	0,0024	0,0023	0,0022	0,0022	0,0021	0,0020	0,0020	0,0019	0,0018	0,0018
3,3	0,0017	0,0017	0,0016	0,0016	0,0015	0,0015	0,0014	0,0014	0,0013	0,0013
3,4	0,0012	0,0012	0,0012	0,0011	0,0011	0,0010	0,0010	0,0010	0,0009	0,0009
3,5	0,0009	0,0008	0,0008	0,0008	0,0008	0,0007	0,0007	0,0007	0,0007	0,0006
3,6	0,0006	0,0006	0,0006	0,0005	0,0005	0,0005	0,0005	0,0005	0,0005	0,0004
3,7	0,0004	0,0004	0,0004	0,0004	0,0004	0,0004	0,0003	0,0003	0,0003	0,0003
3,8	0,0003	0,0003	0,0003	0,0003	0,0003	0,0002	0,0002	0,0002	0,0002	0,0002
3,9	0,0002	0,0002	0,0002	0,0002	0,0002	0,0002	0,0002	0,0002	0,0001	0,0001
4,0	0,0001	0,0001	0,0001	0,0001	0,0001	0,0001	0,0001	0,0001	0,0001	0,0001

ПРИЛОЖЕНИЕ 3

РАСПРЕДЕЛЕНИЕ ПУАССОНА $\mathrm{P}\{X=k\}=\dfrac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda}$

k \ λ	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9
0	0,90484	0,81873	0,74082	0,67032	0,60653	0,54881	0,49659	0,44933	0,40657
1	0,09048	0,16375	0,22223	0,26813	0,30327	0,32929	0,34761	0,25946	0,36591
2	0,00452	0,01638	0,03334	0,05363	0,07582	0,09879	0,12166	0,14379	0,16466
3	0,00015	0,00109	0,00333	0,00715	0,01204	0,01976	0,02839	0,03834	0,04940
4		0,00006	0,00025	0,00072	0,00158	0,00296	0,00497	0,00767	0,01112
5			0,00002	0,00006	0,00016	0,00036	0,00070	0,00123	0,00200
6					0,00001	0,00004	0,00008	0,00016	0,00030
7							0,00001	0,00002	0,00004

k \ λ	1,0	2,0	3,0	4,0	5,0
0	0,36788	0,13534	0,04979	0,01832	0,00674
1	0,36788	0,27067	0,14936	0,07326	0,03369
2	0,18394	0,27067	0,22404	0,14653	0,08422
3	0,06131	0,18045	0,22404	0,19537	0,14037
4	0,01533	0,09022	0,16803	0,19537	0,17547
5	0,00307	0,03609	0,10082	0,15629	0,17547
6	0,00051	0,01203	0,05041	0,10419	0,14622
7	0,00007	0,00344	0,02160	0,05954	0,10445
8	0,00001	0,00086	0,00810	0,02977	0,06528
9		0,00019	0,00270	0,01323	0,03627
10		0,00004	0,00081	0,00529	0,01813
11		0,00001	0,00022	0,00193	0,00824
12			0,00006	0,00064	0,00343
13			0,00001	0,00020	0,00132
14				0,00006	0,00047
15				0,00002	0,00016
16					0,00005
17					0,00001

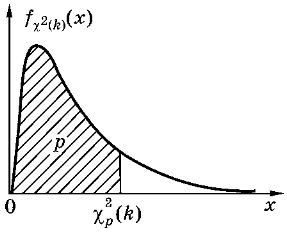
ПРИЛОЖЕНИЕ 4

СУММАРНЫЕ ВЕРОЯТНОСТИ ДЛЯ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ ПУАССОНА $\mathrm{P}\{X \geq x\} = \sum_{k=x}^{\infty} \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}$

k \ λ	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7
0	1,00000	1,00000	1,00000	1,00000	1,00000	1,00000	1,00000
1	0,09516	0,18127	0,25918	0,32968	0,39347	0,45119	0,50341
2	0,00468	0,01752	0,03694	0,06155	0,09020	0,12190	0,15580
3	0,00016	0,00115	0,00360	0,00793	0,01439	0,02312	0,03414
4		0,00006	0,00027	0,00078	0,00175	0,00396	0,00575
5			0,00002	0,00006	0,00017	0,00039	0,00079
6					0,00001	0,00004	0,00009
7							0,00001

k \ λ	0,8	0,9	1,0	2,0	4,0	6,0	8,0
0	1,00000	1,00000	1,00000	1,00000	1,00000	1,00000	1,00000
1	0,55067	0,59343	0,63212	0,86466	0,98168	0,99752	0,99966
2	0,19121	0,22752	0,26424	0,59399	0,90842	0,98265	0,99698
3	0,04742	0,06286	0,08030	0,32332	0,76190	0,93803	0,98625
4	0,00908	0,01346	0,01899	0,14288	0,56653	0,84880	0,95762
5	0,00141	0,00234	0,00366	0,05265	0,37116	0,71494	0,90037
6	0,00018	0,00034	0,00059	0,01656	0,21487	0,55432	0,80876
7	0,00002	0,00004	0,00008	0,00453	0,11067	0,39370	0,68663
8		0,00001	0,00002	0,00110	0,05113	0,25602	0,54704
9				0,00024	0,02136	0,15276	0,40745
10				0,00005	0,00823	0,08392	0,28338
11				0,00001	0,00284	0,04262	0,18411
12					0,00092	0,02009	0,11192
13					0,00027	0,00883	0,06380
14					0,00008	0,00363	0,03418
15					0,00002	0,00140	0,01726
16					0,00001	0,00051	0,00823
17						0,00017	0,00372
18						0,00006	0,00159
19						0,00002	0,00065
20						0,00001	0,00025
21							0,00009
22							0,00003
23							0,00001
24							0,00000

ПРИЛОЖЕНИЕ 5

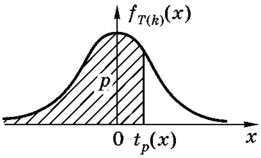


КВАНТИЛИ χ-КВАДРАТ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ $\chi_p^2(k)$

k \ p	0,005	0,10	0,025	0,05	0,10	0,20	0,30	0,70	0,80	0,90	0,95	0,975	0,990	0,995	0,999
1	$0{,}0^4393$	$0{,}0^3157$	$0{,}0^3982$	$0{,}0^2393$	0,0158	0,0642	0,148	0,07	1,64	2,71	3,84	5,02	6,63	7,88	10,8
2	0,0108	0,201	0,0506	0,103	0,211	0,446	0,713	2,41	3,22	4,61	5,99	7,38	9,21	10,6	13,8
3	0,0717	0,115	0,216	0,352	0,584	1,00	1,42	3,67	4,64	6,25	7,81	9,35	11,3	12,8	16,3
4	0,207	0,297	0,484	0,711	1,06	1,65	2,19	4,88	5,99	7,78	9,49	11,1	13,3	14,9	18,5
5	0,412	0,554	0,831	1,15	1,61	2,34	3,00	6,06	7,29	9,24	11,1	12,8	15,1	16,7	20,5
6	0,676	0,872	1,24	1,64	2,20	3,07	3,83	7,23	8,56	10,6	12,6	14,4	16,8	18,5	22,5
7	0,989	1,24	1,69	2,17	2,83	3,82	4,67	8,38	9,80	12,0	14,1	16,0	18,5	20,3	24,3
8	1,34	1,65	2,18	2,73	3,49	4,59	5,53	9,52	11,0	13,4	15,5	17,5	20,1	22,0	26,1
9	1,73	2,09	2,70	3,33	4,17	5,38	6,39	10,7	12,2	14,7	16,9	19,0	21,7	23,6	27,9
10	2,16	2,56	3,25	3,94	4,87	6,18	7,27	11,8	13,4	16,0	18,3	20,5	23,2	25,2	29,6
11	2,60	3,05	3,82	4,57	5,58	6,99	8,15	12,9	14,6	17,3	19,7	21,9	24,7	26,8	31,3
12	3,07	3,57	4,40	5,23	6,30	7,81	9,03	14,0	15,8	18,5	21,0	23,3	26,2	28,3	32,9
13	3,57	4,11	5,01	5,89	7,04	8,63	9,93	15,1	17,0	19,1	22,4	24,7	27,7	29,8	34,5
14	4,07	4,66	5,63	6,57	7,79	9,47	10,8	16,2	18,2	21,1	23,7	26,1	29,1	31,3	36,1
15	4,60	5,23	6,26	7,26	8,55	10,3	11,7	17,3	19,3	22,3	25,0	27,5	30,6	32,8	37,7
16	5,14	5,81	6,91	7,96	9,31	11,2	12,6	18,4	20,5	23,5	26,3	28,8	32,0	34,3	39,3
17	5,70	6,41	7,56	8,67	10,1	12,0	13,5	19,5	21,6	24,8	27,6	30,2	33,4	35,7	40,8
18	6,26	7,01	8,23	9,39	10,9	12,9	14,4	20,6	22,8	26,0	28,9	31,5	34,8	37,2	42,3
19	6,84	7,63	8,91	10,1	11,7	13,7	15,4	21,7	23,9	27,2	30,1	32,9	36,2	38,6	43,8
20	7,43	8,26	9,59	10,9	12,4	14,6	16,3	22,8	25,0	28,4	31,4	34,2	37,6	40,0	45,3
21	8,03	8,90	10,3	11,6	13,2	15,4	17,2	23,9	26,9	29,6	32,7	35,5	38,9	41,4	46,8
22	8,64	9,54	11,0	12,3	14,0	16,3	18,1	24,9	27,3	30,8	33,9	36,8	40,3	42,8	48,3
23	9,26	10,2	11,7	13,1	14,8	17,2	19,0	26,0	28,4	32,0	35,2	38,1	41,6	44,2	49,7
24	9,89	10,9	12,4	13,8	15,7	18,1	19,9	27,1	29,6	33,2	36,4	39,4	43,0	45,6	51,2
25	10,5	11,5	13,1	14,6	16,5	18,9	20,9	28,2	30,7	34,4	37,7	40,6	44,3	46,9	52,6
26	11,2	12,2	13,8	15,4	17,3	19,8	21,8	29,2	31,8	35,6	38,9	41,9	45,6	48,3	54,1
27	11,8	12,9	14,6	16,2	18,1	20,7	22,7	30,3	32,9	36,7	40,1	43,2	47,0	49,6	55,5
28	12,5	13,6	15,3	16,9	18,9	21,6	23,6	31,4	34,0	37,9	41,3	44,5	48,3	51,0	56,9
29	13,1	14,3	16,0	17,7	19,8	22,5	24,6	32,5	35,1	39,1	42,6	45,7	49,6	52,3	58,3
30	13,8	15,0	16,8	18,5	20,6	23,4	25,5	33,5	36,3	40,3	43,8	47,0	50,9	53,7	59,7
35	17,2	18,5	20,6	22,5	24,8	27,8	30,2	38,9	41,8	46,1	49,8	53,2	57,3	60,3	66,6
40	20,7	22,2	24,4	26,5	29,1	32,3	34,9	44,2	47,3	51,8	55,8	59,3	63,7	66,8	73,4
45	24,3	25,9	28,4	30,6	33,4	36,9	39,6	49,5	52,7	57,5	61,7	65,4	70,0	73,2	80,1
50	28,0	29,7	32,4	34,8	37,7	41,4	44,3	54,7	58,2	63,2	67,5	71,4	76,2	79,5	86,7
75	47,2	49,5	52,9	56,1	59,8	64,5	68,1	80,9	85,1	91,1	96,2	100,8	106,4	110,3	118,6
100	67,3	70,1	74,2	77,9	82,4	87,9	92,1	106,9	111,7	118,5	124,3	129,6	135,6	140,2	149,4

Примечание. $0{,}0^4393$ означает 0,0000393

ПРИЛОЖЕНИЕ 6



КВАНТИЛИ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ СТЬЮДЕНТА $t_p(k)$

k \ p	0,750	0,900	0,950	0,975	0,990	0,995	0,999
1	1,000	3,078	6,314	12,796	31,821	63,657	318
2	0,816	1,886	2,920	4,303	6,965	9,925	22,3
3	0,765	1,638	2,353	3,182	4,541	5,841	10,2
4	0,741	1,533	2,132	2,776	3,747	4,604	7,173
5	0,727	1,476	2,015	2,571	3,365	4,032	5,893
6	0,718	1,440	1,943	2,447	3,143	3,707	5,208
7	0,711	1,415	1,895	2,365	2,998	3,499	4,785
8	0,706	1,397	1,860	2,306	2,896	3,355	4,501
9	0,703	1,373	1,833	2,262	2,821	3,250	4,297
10	0,700	1,372	1,812	2,228	2,764	3,169	4,144
11	0,697	1,363	1,796	2,201	2,718	3,106	4,025
12	0,695	1,356	1,782	2,179	2,681	3,055	3,930
13	0,694	1,350	1,771	2,160	2,650	3,012	3,852
14	0,692	1,345	1,761	2,145	2,624	2,977	3,787
15	0,691	1,341	1,753	2,131	2,602	2,947	3,733
16	0,690	1,337	1,746	2,120	2,583	2,921	3,686
17	0,689	1,333	1,740	2,110	2,567	2,898	3,646
18	0,688	1,330	1,734	2,101	2,552	2,878	3,610
19	0,688	1,328	1,729	2,093	2,539	2,861	3,579
20	0,687	1,325	1,725	2,086	2,528	2,845	3,552
21	0,686	1,323	1,721	2,080	2,518	2,831	3,527
22	0,686	1,321	1,717	2,074	2,508	2,819	3,505
23	0,685	1,319	1,714	2,069	2,500	2,807	3,485
24	0,685	1,318	1,711	2,064	2,492	2,797	3,467
25	0,684	1,316	1,708	2,060	2,485	2,787	3,450
26	0,684	1,315	1,706	2,056	2,479	2,779	3,435
27	0,684	1,314	1,703	2,052	2,473	2,771	3,421
28	0,683	1,313	1,701	2,048	2,467	2,763	3,408
29	0,683	1,311	1,699	2,045	2,462	2,756	3,398
30	0,683	1,310	1,697	2,042	2,457	2,750	3,385
40	0,681	1,303	1,684	2,021	2,423	2,704	3,307
60	0,679	1,296	1,671	2,000	2,390	2,660	3,232
120	0,677	1,289	1,658	1,980	2,358	2,617	3,160
∞	0,674	1,282	1,645	1,960	2,326	2,576	3,090

ПРИЛОЖЕНИЕ 7

КВАНТИЛИ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ ФИШЕРА $F_p(k_1, k_2)$

$p = 0,9$

k_2 \ k_1	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	12	15	20	24	30	40	60	120
1	39,86	49,50	53,59	55,83	57,24	58,20	58,91	59,44	59,86	60,19	60,71	61,22	61,74	62,00	62,26	62,53	62,79	63,06
2	8,53	9,00	9,16	9,24	9,29	9,33	9,35	9,37	9,38	9,39	9,41	9,42	9,44	9,45	9,46	9,47	9,47	9,48
3	5,54	5,46	5,39	5,34	5,31	5,28	5,27	5,25	5,24	5,23	5,22	5,20	5,18	5,18	5,17	5,16	5,15	5,14
4	4,54	4,32	4,19	4,11	4,05	4,01	3,98	3,95	3,94	3,92	3,90	3,87	3,84	3,83	3,82	3,80	3,79	3,78
5	4,06	3,78	3,62	3,52	3,45	3,40	3,37	3,34	3,32	3,30	3,27	3,24	3,21	3,19	3,17	3,16	3,14	3,12
6	3,78	3,46	3,29	3,18	3,11	3,05	3,01	2,98	2,96	2,94	2,90	2,87	2,84	2,82	2,80	2,78	2,76	2,74
7	3,59	3,26	3,07	2,96	2,88	2,83	2,78	2,75	2,72	2,70	2,67	2,63	2,59	2,58	2,56	2,54	2,51	2,49
8	3,46	3,11	2,92	2,81	2,73	2,67	2,62	2,59	2,56	2,54	2,50	2,46	2,42	2,40	2,38	2,36	2,34	2,32
9	3,36	3,01	2,81	2,69	2,61	2,55	2,51	2,47	2,44	2,42	2,38	2,34	2,30	2,28	2,25	2,23	2,21	2,18
10	3,29	2,92	2,73	2,61	2,52	2,46	2,41	2,38	2,35	2,32	2,28	2,24	2,20	2,18	2,16	2,13	2,11	2,08
11	3,23	2,86	2,66	2,54	2,45	2,39	2,34	2,30	2,27	2,25	2,21	2,17	2,12	2,10	2,08	2,05	2,03	2,00
12	3,18	2,81	2,61	2,48	2,39	2,33	2,28	2,24	2,21	2,19	2,15	2,10	2,06	2,04	2,01	1,99	1,96	1,93
13	3,14	2,76	2,56	2,43	2,35	2,28	2,23	2,20	2,16	2,14	2,10	2,05	2,01	1,98	1,96	1,93	1,90	1,88
14	3,10	2,73	2,52	2,39	2,31	2,24	2,19	2,15	2,12	2,10	2,05	2,01	1,96	1,94	1,91	1,89	1,86	1,83
15	3,07	2,70	2,49	2,36	2,27	2,21	2,16	2,12	2,09	2,06	2,02	1,97	1,92	1,90	1,87	1,85	1,82	1,79
16	3,05	2,67	2,46	2,33	2,24	2,18	2,13	2,09	2,06	2,03	1,99	1,94	1,89	1,87	1,84	1,81	1,78	1,75
17	3,03	2,64	2,44	2,31	2,22	2,15	2,10	2,06	2,03	2,00	1,96	1,91	1,86	1,84	1,81	1,78	1,75	1,72
18	3,01	2,62	2,42	2,29	2,20	2,13	2,08	2,04	2,00	1,98	1,93	1,89	1,84	1,81	1,78	1,75	1,72	1,69
19	2,99	2,61	2,40	2,27	2,18	2,11	2,06	2,02	1,98	1,96	1,91	1,86	1,81	1,79	1,76	1,73	1,70	1,67
20	2,97	2,59	2,38	2,25	2,16	2,09	2,04	2,00	1,96	1,94	1,89	1,84	1,79	1,77	1,74	1,71	1,68	1,64
21	2,96	2,57	2,36	2,23	2,14	2,08	2,02	1,98	1,95	1,92	1,87	1,83	1,78	1,75	1,72	1,69	1,66	1,62
22	2,95	2,56	2,35	2,22	2,13	2,06	2,01	1,97	1,93	1,90	1,86	1,81	1,76	1,73	1,70	1,67	1,64	1,60
23	2,94	2,55	2,34	2,21	2,11	2,05	1,99	1,95	1,92	1,89	1,84	1,81	1,74	1,72	1,69	1,66	1,62	1,59
24	2,93	2,54	2,33	2,19	2,10	2,04	1,98	1,94	1,91	1,88	1,83	1,78	1,73	1,70	1,67	1,64	1,61	1,57
25	2,92	2,53	2,32	2,18	2,09	2,02	1,97	1,93	1,89	1,87	1,82	1,77	1,72	1,69	1,66	1,63	1,59	1,56
26	2,91	2,52	2,31	2,17	2,08	2,01	1,96	1,92	1,88	1,86	1,81	1,76	1,71	1,68	1,65	1,61	1,58	1,54
27	2,90	2,51	2,30	2,17	2,07	2,00	1,95	1,91	1,87	1,85	1,80	1,75	1,70	1,67	1,64	1,60	1,57	1,53
28	2,89	2,50	2,29	2,16	2,06	2,00	1,94	1,90	1,87	1,84	1,79	1,74	1,69	1,66	1,63	1,59	1,56	1,52
29	2,89	2,50	2,28	2,15	2,06	1,99	1,93	1,89	1,86	1,83	1,78	1,73	1,68	1,65	1,62	1,58	1,55	1,51
30	2,88	2,49	2,28	2,14	2,05	1,98	1,93	1,88	1,85	1,82	1,77	1,72	1,67	1,64	1,61	1,57	1,54	1,50
40	2,84	2,44	2,23	2,09	2,00	1,93	1,87	1,83	1,79	1,76	1,71	1,66	1,61	1,57	1,54	1,51	1,47	1,42
60	2,79	2,39	2,18	2,04	1,95	1,87	1,82	1,77	1,74	1,71	1,66	1,60	1,54	1,51	1,48	1,44	1,40	1,35
120	2,75	2,35	2,13	1,99	1,90	1,82	1,77	1,72	1,68	1,65	1,60	1,55	1,48	1,45	1,41	1,37	1,32	1,26
∞	2,71	2,30	2,08	1,94	1,85	1,77	1,72	1,67	1,63	1,60	1,55	1,49	1,42	1,38	1,34	1,30	1,24	1,17

$p = 0{,}95$																		
$k_2 \backslash k_1$	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	12	15	20	24	30	40	60	120
1	161,4	199,5	215,7	224,6	230,2	234,0	236,8	238,9	240,5	241,9	243,9	245,9	248,0	249,1	250,1	251,1	252,2	253,3
2	18,51	19,00	19,16	19,25	19,30	19,33	19,35	19,37	19,38	19,40	19,41	19,43	19,45	19,45	19,46	19,47	19,48	19,49
3	10,13	9,55	9,28	9,12	9,01	8,94	8,89	8,85	8,81	8,79	8,74	8,70	8,66	8,64	8,62	8,59	8,57	8,55
4	7,71	6,94	6,59	6,39	6,26	6,16	6,09	6,04	6,00	5,96	5,91	5,86	5,80	5,77	5,75	5,72	5,69	5,66
5	6,61	5,79	5,41	5,19	5,05	4,95	4,88	4,82	4,77	4,74	4,68	4,62	4,56	4,53	4,50	4,46	4,43	4,40
6	5,99	5,14	4,76	4,53	4,39	4,28	4,21	4,15	4,10	4,06	4,00	3,94	3,87	3,84	3,81	3,77	3,74	3,70
7	5,59	4,74	4,35	4,12	3,97	3,87	3,79	3,73	3,68	3,64	3,57	3,51	3,44	3,41	3,38	3,34	3,30	3,27
8	5,32	4,46	4,07	3,84	3,69	3,58	3,50	3,44	3,39	3,35	3,28	3,22	3,15	3,12	3,08	3,04	3,01	2,97
9	5,12	4,26	3,86	3,63	3,48	3,37	3,29	3,23	3,18	3,14	3,07	3,01	2,94	2,90	2,86	2,83	2,79	2,75
10	4,96	4,10	3,71	3,48	3,33	3,22	3,14	3,07	3,02	2,98	2,91	2,85	2,77	2,74	2,70	2,66	2,62	2,58
11	4,84	3,98	3,59	3,36	3,20	3,09	3,01	2,95	2,90	2,85	2,79	2,72	2,65	2,61	2,57	2,53	2,49	2,45
12	4,75	3,89	3,49	3,26	3,11	3,00	2,91	2,85	2,80	2,75	2,69	2,62	2,54	2,51	2,47	2,43	2,38	2,34
13	4,67	3,81	3,41	3,18	3,03	2,92	2,83	2,77	2,71	2,67	2,60	2,53	2,46	2,42	2,38	2,34	2,30	2,25
14	4,60	3,74	3,34	3,11	2,96	2,85	2,76	2,70	2,65	2,60	2,53	2,46	2,39	2,35	2,31	2,27	2,22	2,18
15	4,54	3,68	3,29	3,06	2,90	2,79	2,71	2,64	2,59	2,54	2,48	2,40	2,33	2,29	2,25	2,20	2,16	2,11
16	4,49	3,63	3,24	3,01	2,85	2,74	2,65	2,59	2,54	2,49	2,42	2,35	2,28	2,24	2,19	2,15	2,11	2,06
17	4,45	3,59	3,20	2,96	2,81	2,70	2,61	2,55	2,49	2,45	2,38	2,31	2,23	2,19	2,15	2,10	2,06	2,01
18	4,41	3,55	3,16	2,93	2,77	2,66	2,58	2,51	2,46	2,41	2,34	2,27	2,19	2,15	2,11	2,06	2,02	1,97
19	4,38	3,52	3,13	2,90	2,74	2,63	2,54	2,48	2,42	2,38	2,31	2,23	2,16	2,11	2,07	2,03	1,98	1,93
20	4,35	3,49	3,10	2,87	2,71	2,60	2,51	2,45	2,39	2,35	2,28	2,20	2,12	2,08	2,04	1,99	1,95	1,90
21	4,32	3,47	3,07	2,84	2,68	2,57	2,49	2,42	2,37	2,32	2,25	2,18	2,10	2,05	2,01	1,96	1,92	1,87
22	4,30	3,44	3,05	2,82	2,66	2,55	2,46	2,40	2,34	2,30	2,23	2,15	2,07	2,03	1,98	1,94	1,89	1,84
23	4,28	3,42	3,03	2,80	2,64	2,53	2,44	2,37	2,32	2,27	2,20	2,13	2,05	2,01	1,96	1,91	1,86	1,81
24	4,26	3,40	3,01	2,78	2,62	2,51	2,42	2,36	2,30	2,25	2,18	2,11	2,03	1,98	1,94	1,89	1,84	1,79
25	4,24	3,39	2,99	2,76	2,60	2,49	2,40	2,34	2,28	2,24	2,16	2,09	2,01	1,96	1,92	1,87	1,82	1,77
26	4,23	3,37	2,98	2,74	2,59	2,47	2,39	2,32	2,27	2,22	2,15	2,07	1,99	1,95	1,90	1,85	1,80	1,75
27	4,21	3,35	2,96	2,73	2,57	2,46	2,37	2,31	2,25	2,20	2,13	2,06	1,97	1,93	1,88	1,84	1,79	1,73
28	4,20	3,34	2,95	2,71	2,56	2,45	2,36	2,29	2,24	2,19	2,12	2,04	1,96	1,91	1,87	1,82	1,77	1,71
29	4,18	3,33	2,93	2,70	2,55	2,43	2,35	2,28	2,22	2,18	2,10	2,03	1,94	1,90	1,85	1,81	1,75	1,70
30	4,17	3,32	2,92	2,69	2,53	2,42	2,33	2,27	2,21	2,16	2,09	2,01	1,93	1,89	1,84	1,79	1,74	1,68
40	4,08	3,23	2,84	2,61	2,45	2,34	2,25	2,18	2,12	2,08	2,00	1,92	1,84	1,79	1,74	1,69	1,64	1,58
60	4,00	3,15	2,76	2,53	2,37	2,25	2,17	2,10	2,04	1,99	1,92	1,84	1,75	1,70	1,65	1,59	1,53	1,47
120	3,92	3,07	2,68	2,45	2,29	2,17	2,09	2,02	1,96	1,91	1,83	1,75	1,66	1,61	1,55	1,50	1,43	1,35
∞	3,84	3,00	2,60	2,37	2,21	2,10	2,01	1,94	1,88	1,83	1,75	1,67	1,57	1,52	1,46	1,39	1,32	1,22

$p = 0{,}975$																		
k_2 \ k_1	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**	**10**	**12**	**15**	**20**	**24**	**30**	**40**	**60**	**120**
1	647,8	799,5	864,6	899,6	921,8	917,1	948,2	956,7	963,3	968,6	976,7	984,9	993,1	997,2	1001	1006	1010	1014
2	38,51	39,00	39,17	39,25	39,30	39,33	39,36	39,37	39,39	39,40	39,41	39,43	39,45	39,46	39,46	39,47	39,48	39,49
3	17,44	16,04	15,44	15,10	14,88	14,73	14,62	14,54	14,47	14,42	14,34	14,25	14,17	14,12	14,08	14,04	13,99	13,95
4	12,22	10,65	9,98	9,60	9,36	9,20	9,07	8,98	8,90	8,84	8,75	8,66	8,56	8,51	8,46	8,41	8,36	8,31
5	10,01	8,43	7,76	7,39	7,15	6,98	6,85	6,76	6,68	6,62	6,52	6,43	6,33	6,28	6,23	6,18	6,12	6,07
6	8,81	7,26	6,60	6,23	5,99	5,82	5,70	5,60	5,52	5,46	4,37	5,27	5,17	5,12	5,07	5,01	4,96	4,90
7	8,07	6,54	5,89	5,52	5,29	5,12	4,99	4,90	4,82	4,76	4,67	4,57	4,47	4,42	4,36	4,31	4,25	4,20
8	7,57	6,06	5,42	5,05	4,82	4,65	4,53	4,43	4,36	4,30	4,20	4,10	4,00	3,95	3,89	3,84	3,78	3,73
9	7,21	5,71	5,08	4,72	4,48	4,32	4,20	4,10	4,03	3,96	3,87	3,77	3,67	3,61	3,56	3,51	3,45	3,39
10	6,94	5,46	4,83	4,47	4,24	4,07	3,95	3,85	3,78	3,72	3,62	3,52	3,42	3,37	3,31	3,26	3,20	3,14
11	6,72	5,26	4,63	4,28	4,04	3,88	3,76	3,66	3,59	3,53	3,43	3,33	3,23	3,17	3,12	3,06	3,00	2,94
12	6,55	5,10	4,47	4,12	3,89	3,73	3,61	3,51	3,44	3,37	3,28	3,18	3,07	3,02	2,96	2,91	2,85	2,79
13	6,41	4,97	4,35	4,00	3,77	3,60	3,48	3,39	3,31	3,25	3,15	3,05	2,95	2,89	2,84	2,78	2,72	2,66
14	6,30	4,86	4,24	3,89	3,66	3,50	3,38	3,29	3,21	3,15	3,05	2,95	2,84	2,79	2,73	2,67	2,61	2,55
15	6,20	4,77	4,15	3,80	3,58	3,41	3,29	3,20	3,12	3,06	2,96	2,86	2,76	2,70	2,64	2,59	2,52	2,46
16	6,12	4,69	4,08	3,73	3,50	3,34	3,22	3,12	3,05	2,99	2,89	2,79	2,68	2,63	2,57	2,51	2,45	2,38
17	6,04	4,62	4,01	3,66	3,44	3,28	3,16	3,06	2,98	2,92	2,82	2,72	2,62	2,56	2,50	2,44	2,38	2,32
18	5,98	4,56	3,95	3,61	3,38	3,22	3,10	3,01	2,93	2,87	2,77	2,67	2,56	2,50	2,44	2,38	2,32	2,26
19	5,92	4,51	3,90	3,56	3,33	3,17	3,05	2,96	2,88	2,82	2,72	2,62	2,51	2,45	2,39	2,33	2,27	2,20
20	5,87	4,46	3,86	3,51	3,29	3,13	3,01	2,91	2,84	2,77	2,68	2,57	2,46	2,41	2,35	2,29	2,22	2,16
21	5,83	4,42	3,82	3,48	3,25	3,09	2,97	2,87	2,80	2,73	2,64	2,53	2,42	2,37	2,31	2,25	2,18	2,11
22	5,79	4,38	3,78	3,44	3,22	3,05	2,93	2,84	2,76	2,70	2,60	2,50	2,39	2,33	2,27	2,21	2,14	2,08
23	5,75	4,35	3,75	3,41	3,18	3,02	2,90	2,81	2,73	2,67	2,57	2,47	2,36	2,30	2,24	2,18	2,11	2,04
24	5,72	4,32	3,72	3,38	3,15	2,99	2,87	2,78	2,70	2,64	2,54	2,44	2,33	2,27	2,21	2,15	2,08	2,01
25	5,69	4,29	3,69	3,35	3,13	2,97	2,85	2,75	2,68	2,61	2,51	2,41	2,30	2,24	2,18	2,12	2,05	1,98
26	5,66	4,27	3,67	3,33	3,10	2,94	2,82	2,73	2,65	2,59	2,49	2,39	2,28	2,22	2,16	2,09	2,03	1,95
27	5,63	4,24	3,65	3,31	3,08	2,92	2,80	2,71	2,63	2,57	2,47	2,36	2,25	2,19	2,13	2,07	2,00	1,93
28	5,61	4,22	3,63	3,29	3,06	2,90	2,78	2,69	2,61	2,55	2,45	2,34	2,23	2,17	2,11	2,05	1,98	1,91
29	5,59	4,20	3,61	3,27	3,04	2,88	2,76	2,67	2,59	2,53	2,43	2,32	2,21	2,15	2,09	2,03	1,96	1,89
30	5,57	4,18	3,59	3,25	3,03	2,87	2,75	2,65	2,57	2,51	2,41	2,31	2,20	2,14	2,07	2,01	1,94	1,87
40	5,42	4,05	3,46	3,13	2,90	2,74	2,62	2,53	2,45	2,39	2,29	2,18	2,07	2,01	1,94	1,88	1,80	1,72
60	5,29	3,93	3,34	3,01	2,79	2,63	2,51	2,41	2,33	2,27	2,17	2,06	1,94	1,88	1,82	1,74	1,67	1,58
120	5,15	3,80	3,23	2,89	2,67	2,52	2,39	2,30	2,22	2,16	2,05	1,94	1,82	1,76	1,69	1,61	1,53	1,43
∞	5,02	3,69	3,12	2,79	2,57	2,41	2,29	2,19	2,11	2,05	1,94	1,83	1,71	1,64	1,57	1,48	1,39	1,27

$p = 0,99$																		
k_2 \ k_1	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**	**10**	**12**	**15**	**20**	**24**	**30**	**40**	**60**	**120**
1	4052	4999,5	5403	5625	5764	5859	5928	5982	6022	6056	6106	6157	6209	6235	6261	6287	6313	6339
2	98,50	99,00	99,17	99,25	99,30	99,33	99,36	99,37	99,39	99,40	99,42	99,43	99,45	99,46	99,47	99,47	99,48	99,49
3	34,12	30,82	29,46	28,71	28,24	27,91	27,67	27,49	27,35	27,23	27,05	26,87	26,69	26,60	26,50	26,41	26,32	26,22
4	21,20	18,00	16,69	15,98	15,52	15,21	14,98	14,80	14,66	14,55	14,37	14,20	14,02	13,93	13,84	13,75	13,65	13,56
5	16,26	13,27	12,06	11,39	10,97	10,67	10,46	10,29	10,16	10,05	9,89	9,72	9,55	9,47	9,38	9,29	9,20	9,11
6	13,75	10,92	9,78	9,15	8,75	8,47	8,26	8,10	7,98	7,87	7,72	7,56	7,40	7,31	7,23	7,14	7,06	6,97
7	12,25	9,55	8,45	7,85	7,46	7,19	6,99	6,84	6,72	6,62	6,47	6,31	6,16	6,07	5,99	5,91	5,82	5,74
8	11,26	8,65	7,59	7,01	6,63	6,37	6,18	6,03	5,91	5,81	5,67	5,52	5,36	5,28	5,20	5,12	5,03	4,95
9	10,56	8,02	6,99	6,42	6,06	5,80	5,61	5,47	5,35	5,26	5,11	4,96	4,81	4,73	4,65	4,57	4,48	4,40
10	10,04	7,56	6,55	5,99	5,64	5,39	5,20	5,06	4,94	4,85	4,71	4,56	4,41	4,33	4,25	4,17	4,08	4,00
11	9,65	7,21	6,22	5,67	5,32	5,07	4,89	4,74	4,63	4,54	4,40	4,25	4,10	4,02	3,94	3,86	3,78	3,69
12	9,33	6,93	5,95	5,41	5,06	4,82	4,64	4,50	4,39	4,30	4,16	4,01	3,86	3,78	3,70	3,62	3,54	3,45
13	9,07	6,70	5,74	5,21	4,86	4,62	4,44	4,30	4,19	4,10	3,96	3,82	3,66	3,59	3,51	3,43	3,34	3,25
14	8,86	6,51	5,56	5,04	4,69	4,46	4,28	4,14	4,03	3,94	3,80	3,66	3,51	3,43	3,35	3,27	3,18	3,09
15	8,68	6,36	5,42	4,89	4,56	4,32	4,14	4,00	3,89	3,80	3,67	3,52	3,37	3,29	3,21	3,13	3,05	2,96
16	8,53	6,23	5,29	4,77	4,44	4,20	4,03	3,89	3,78	3,69	3,55	3,41	3,26	3,18	3,10	3,02	2,93	2,84
17	8,40	6,11	5,18	4,67	4,34	4,10	3,93	3,79	3,68	3,59	3,46	3,31	3,16	3,08	3,00	2,92	2,83	2,75
18	8,29	6,01	5,09	4,58	4,25	4,01	3,84	3,71	3,60	3,51	3,37	3,23	3,08	3,00	2,92	2,84	2,75	2,66
19	8,18	5,93	5,01	4,50	4,17	3,94	3,77	3,63	3,52	3,43	3,30	3,15	3,00	2,92	2,84	2,76	2,67	2,58
20	8,10	5,85	4,94	4,43	4,10	3,87	3,70	3,56	3,46	3,37	3,23	3,09	2,94	2,86	2,78	2,69	2,61	2,52
21	8,02	5,78	4,87	4,37	4,04	3,81	3,64	3,51	3,40	3,31	3,17	3,03	2,88	2,80	2,72	2,64	2,55	2,46
22	7,95	5,72	4,82	4,31	3,99	3,76	3,59	3,45	3,35	3,26	3,12	2,98	2,83	2,75	2,67	2,58	2,50	2,40
23	7,88	5,66	4,76	4,26	3,94	3,71	3,54	3,41	3,30	3,21	3,07	2,93	2,78	2,70	2,62	2,54	2,45	2,35
24	7,82	5,61	4,72	4,22	3,90	3,67	3,50	3,36	3,26	3,17	3,03	2,89	2,74	2,66	2,58	2,49	2,40	2,31
25	7,77	5,57	4,68	4,18	3,85	3,63	3,46	3,32	3,22	3,13	2,99	2,85	2,70	2,62	2,54	2,45	2,36	2,27
26	7,72	5,53	4,64	4,14	3,82	3,59	3,42	3,29	3,18	3,09	2,96	2,81	2,66	2,58	2,50	2,42	2,33	2,23
27	7,68	5,49	4,60	4,11	3,78	3,56	3,39	3,26	3,15	3,06	2,93	2,78	2,63	2,55	2,47	2,38	2,29	2,20
28	7,64	5,45	4,57	4,07	3,75	3,53	3,36	3,23	3,12	3,03	2,90	2,75	2,60	2,52	2,44	2,35	2,26	2,17
29	7,60	5,42	4,54	4,04	3,73	3,50	3,33	3,20	3,09	3,00	2,87	2,73	2,57	2,49	2,41	2,33	2,23	2,14
30	7,56	5,39	4,51	4,02	3,70	3,47	3,30	3,17	3,07	2,98	2,84	2,70	2,55	2,47	2,39	2,30	2,21	2,11
40	7,31	5,18	4,31	3,83	3,51	3,29	3,12	2,99	2,89	2,80	2,66	2,52	2,37	2,29	2,20	2,11	2,02	1,92
60	7,08	4,98	4,13	3,65	3,34	3,12	2,95	2,82	2,72	2,63	2,50	2,35	2,20	2,12	2,03	1,94	1,84	1,73
120	6,85	4,79	3,95	3,48	3,17	2,96	2,79	2,66	2,56	2,47	2,34	2,19	2,03	1,95	1,86	1,76	1,66	1,53
∞	6,63	4,61	3,78	3,32	3,02	2,80	2,64	2,51	2,41	2,32	2,18	2,04	1,88	1,79	1,70	1,59	1,47	1,32

$p = 0{,}995$																		
k_2 \ k_1	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**	**10**	**12**	**15**	**20**	**24**	**30**	**40**	**60**	**120**
1	16211	20000	21615	22500	23056	23437	23715	23925	24091	24224	24426	24630	24836	24940	25044	25148	25253	25359
2	198,5	199,0	199,2	199,2	199,3	199,3	199,4	199,4	199,4	199,4	199,4	199,4	199,4	199,5	199,5	199,5	199,5	199,5
3	55,55	49,80	47,47	46,19	45,39	44,84	44,43	44,13	43,88	43,69	43,39	43,08	42,78	42,62	42,47	42,31	42,15	41,99
4	31,33	26,28	24,26	23,15	22,46	21,97	21,62	21,35	21,14	20,97	20,70	20,44	20,17	20,03	19,89	19,75	19,61	19,47
5	22,78	18,31	16,53	15,56	14,94	14,51	14,20	13,96	13,77	13,62	13,38	13,15	12,90	12,78	12,66	12,53	12,40	12,27
6	18,64	14,54	12,92	12,03	11,46	11,07	10,79	10,57	10,39	10,25	10,03	9,81	9,59	9,47	9,36	9,24	9,12	9,00
7	16,24	12,40	10,88	10,05	9,52	9,16	8,89	8,68	8,51	8,38	8,18	7,97	7,75	7,65	7,53	7,42	7,31	7,19
8	14,69	11,04	9,60	8,81	8,30	7,95	7,69	7,50	7,34	7,21	7,01	6,81	6,61	6,50	6,40	6,29	6,18	6,06
9	12,61	10,11	8,72	7,96	7,47	7,13	6,88	6,69	6,54	6,42	6,23	6,03	5,83	5,73	5,62	5,52	5,41	5,30
10	12,83	9,43	8,08	7,34	6,87	6,54	6,30	6,12	5,97	5,85	5,66	5,47	5,27	5,17	5,07	4,97	4,86	4,75
11	12,23	8,91	7,60	6,88	6,42	6,10	5,86	5,68	5,54	5,42	5,24	5,05	4,86	4,76	4,65	4,55	4,44	4,34
12	11,75	8,51	7,23	6,52	6,07	5,76	5,52	5,35	5,20	5,09	4,91	4,72	4,53	4,43	4,33	4,23	4,12	4,01
13	11,37	8,19	6,93	6,23	5,79	5,48	5,25	5,08	4,94	4,82	4,64	4,46	4,27	4,17	4,07	3,97	3,87	3,26
14	11,06	7,92	6,68	6,00	5,56	5,26	5,03	4,86	4,72	4,60	4,43	4,25	4,06	3,96	3,86	3,76	3,66	3,55
15	10,80	7,70	6,48	5,80	5,37	5,07	4,85	4,67	4,54	4,42	4,25	4,07	3,88	3,79	3,69	3,58	3,48	3,37
16	10,58	7,51	6,30	5,64	5,21	4,91	4,69	4,52	4,38	4,27	4,10	3,92	3,73	3,64	3,54	3,44	3,33	3,22
17	10,38	7,35	6,16	5,50	5,07	4,78	4,56	4,39	4,25	4,14	3,97	3,79	3,61	3,51	3,41	3,31	3,21	3,10
18	10,22	7,21	6,03	5,37	4,96	4,66	4,44	4,28	4,14	4,03	3,86	3,68	3,50	3,40	3,30	3,20	3,10	2,99
19	10,07	7,09	5,92	5,27	4,85	4,56	4,34	4,18	4,04	3,93	3,76	3,59	3,40	3,31	3,21	3,11	3,00	2,89
20	9,94	6,99	5,82	5,17	4,76	4,47	4,26	4,09	3,96	3,85	3,68	3,50	3,32	3,22	3,12	3,02	2,92	2,81
21	9,83	6,89	5,73	5,09	4,68	4,39	4,18	4,01	3,88	3,77	3,60	3,43	3,24	3,15	3,05	2,95	2,84	2,73
22	9,73	6,81	5,65	5,02	4,61	4,32	4,11	3,94	3,81	3,70	3,54	3,36	3,18	3,08	2,98	2,88	2,77	2,66
23	9,63	6,73	5,58	4,95	4,54	4,26	4,05	3,88	3,75	3,64	3,47	3,30	3,12	3,02	2,92	2,82	2,71	2,60
24	9,55	6,66	5,52	4,89	4,49	4,20	3,99	3,83	3,69	3,59	3,42	3,25	3,06	2,97	2,87	2,77	2,66	2,55
25	9,48	6,60	5,46	4,84	4,43	4,15	3,94	3,78	3,64	3,54	3,37	3,20	3,01	2,92	2,82	2,72	2,61	2,50
26	9,41	6,54	5,41	4,79	4,38	4,10	3,89	3,73	3,60	3,49	3,33	3,15	2,97	2,87	2,77	2,67	2,56	2,45
27	9,34	6,49	5,36	4,74	4,34	4,06	3,85	3,69	3,56	3,45	3,28	3,11	2,93	2,83	2,73	2,63	2,52	2,41
28	9,28	6,44	5,32	4,70	4,30	4,02	3,81	3,65	3,52	3,41	3,25	3,07	2,89	2,79	2,69	2,59	2,48	2,37
29	9,23	6,40	5,28	4,66	4,26	3,98	3,77	3,61	3,48	3,38	3,21	3,04	2,86	2,76	2,66	2,56	2,45	2,33
30	9,18	6,35	5,24	4,62	4,23	3,95	3,74	3,58	3,45	3,34	3,18	3,01	2,82	2,73	2,63	2,52	2,42	2,30
40	8,83	6,07	4,98	4,37	3,99	3,71	3,51	3,35	3,22	3,12	2,95	2,78	2,60	2,50	2,40	2,30	2,18	2,06
60	8,49	5,79	4,73	4,14	3,76	3,49	3,29	3,13	3,01	2,90	2,74	2,57	2,39	2,29	2,19	2,08	1,96	1,83
120	8,18	5,54	4,50	3,92	3,55	3,28	3,09	2,93	2,81	2,71	2,54	2,37	2,19	2,09	1,98	1,87	1,75	1,61
∞	7,88	5,30	4,28	3,72	3,35	3,09	2,90	2,74	2,62	2,52	2,36	2,19	2,00	1,90	1,79	1,67	1,53	1,36

$p = 0{,}999$																	
k_2 \ k_1	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**	**10**	**12**	**15**	**20**	**24**	**30**	**40**	**60**	**120**
1	4053^+	5000^+	5404^+	5625^+	5764^+	5859^+	5929^+	5981^+	6023^+	6056^+	6107^+	6158^+	6209^+	6235^+	6261^+	6287^+	6313^+	6340^+
2	998,5	999,0	999,2	999,2	999,3	999,3	999,4	999,4	999,4	999,4	999,4	999,4	999,4	999,5	999,5	999,5	999,5	999,5
3	167,0	148,5	141,1	137,1	134,6	132,8	131,6	130,6	129,9	129,2	128,3	127,4	126,4	125,9	125,4	125,0	124,5	124,0
4	74,14	61,25	56,18	53,44	51,71	50,53	49,66	49,00	48,47	48,05	47,41	46,76	46,10	45,77	45,43	45,09	44,75	44,40
5	47,18	37,12	33,20	31,09	29,75	28,84	28,16	27,64	27,24	26,92	26,42	25,91	25,39	25,14	24,87	24,60	24,33	24,06
6	35,51	27,00	23,20	21,92	20,81	20,03	19,46	19,03	18,69	18,41	17,99	17,56	17,12	16,89	16,67	16,44	16,21	15,99
7	29,25	21,69	18,77	17,19	16,21	15,52	15,02	14,63	14,33	14,08	13,71	13,32	12,93	12,73	12,53	12,33	12,12	11,91
8	25,42	18,49	15,83	14,39	13,49	12,86	12,40	12,04	11,77	11,54	11,19	10,84	10,48	10,30	10,11	9,92	9,73	9,53
9	22,86	16,29	13,90	12,56	11,71	11,13	10,70	10,37	10,11	9,89	9,57	9,24	8,90	8,72	8,55	8,37	8,19	8,00
10	21,04	14,91	12,55	11,28	10,48	9,92	9,52	9,20	8,96	8,75	8,45	8,13	7,80	7,64	7,47	7,30	7,12	6,94
11	19,69	13,81	11,56	10,35	9,58	9,05	8,66	8,35	8,12	7,92	7,61	7,32	7,01	6,85	6,68	6,52	6,35	6,17
12	18,64	12,97	10,80	9,63	8,89	8,38	8,00	7,71	7,48	7,29	7,00	6,71	6,40	6,25	6,09	5,93	5,76	5,59
13	17,81	12,31	10,21	9,07	8,35	7,86	7,49	7,21	6,98	6,80	6,52	6,23	5,93	5,78	5,63	5,47	5,30	5,14
14	17,14	11,78	9,73	8,62	7,92	7,43	7,08	6,80	6,58	6,40	6,13	5,85	5,56	5,41	5,25	5,10	4,94	4,77
15	16,50	11,34	9,34	8,25	7,57	7,09	6,74	6,47	6,26	6,08	5,81	5,54	5,25	5,10	4,95	4,80	4,64	4,47
16	16,12	10,97	9,00	7,94	7,27	6,81	6,46	6,19	5,98	5,81	5,55	5,27	4,99	4,85	4,70	4,54	4,39	4,21
17	15,72	10,66	8,73	7,68	7,02	6,56	6,22	5,96	5,75	5,58	5,32	5,05	4,78	4,63	4,48	4,33	4,18	4,02
18	15,38	10,39	8,49	7,46	6,81	6,35	6,02	5,76	5,56	5,39	5,13	4,87	4,59	4,45	4,30	4,15	4,00	3,84
19	15,08	10,16	8,28	7,26	6,62	6,18	5,85	5,59	5,39	5,22	4,97	4,70	4,43	4,29	4,14	3,99	3,84	3,68
20	14,82	9,95	8,10	7,10	6,46	6,02	5,69	5,44	5,24	5,08	4,82	4,56	4,29	4,15	4,00	3,86	3,70	3,54
21	14,59	9,77	7,94	6,95	6,32	5,88	5,56	5,31	5,11	4,95	4,70	4,44	4,17	4,03	3,88	3,74	3,58	3,42
22	14,38	9,61	7,80	6,81	6,19	5,76	5,44	5,19	4,99	4,83	4,58	4,33	4,06	3,92	3,78	3,63	3,48	3,32
23	14,19	9,47	7,67	6,69	6,08	5,65	5,33	5,09	4,99	4,71	4,48	4,23	3,96	3,82	3,68	3,53	3,38	3,22
24	14,03	9,34	7,55	6,59	5,98	5,55	5,23	4,99	4,80	4,64	4,39	4,14	3,87	3,74	3,59	3,45	3,29	3,14
25	13,88	9,22	7,45	6,49	5,88	5,46	5,15	4,91	4,71	4,56	4,31	4,06	3,79	3,66	3,52	3,37	3,22	3,06
26	13,74	9,12	7,36	6,41	5,80	5,38	5,07	4,83	4,64	4,48	4,24	3,99	3,72	3,59	3,44	3,30	3,15	2,99
27	13,61	9,02	7,27	6,33	5,73	5,31	5,00	4,76	4,57	4,41	4,17	3,92	3,66	3,52	3,38	3,23	3,08	2,92
28	13,50	8,93	7,19	6,25	5,66	5,24	4,93	4,69	4,50	4,35	4,11	3,86	3,60	3,46	3,32	3,18	3,02	2,86
29	13,39	8,85	7,12	6,19	5,59	5,18	4,87	4,64	4,45	4,29	4,05	3,80	3,54	3,41	3,27	3,12	2,97	2,81
30	13,29	8,77	7,05	6,12	5,53	5,12	4,82	4,58	4,39	4,24	4,00	3,75	3,49	3,36	3,22	3,07	2,92	2,76
40	12,61	8,25	6,60	5,70	5,13	4,73	4,44	4,21	4,02	3,87	3,64	3,40	3,15	3,01	2,87	2,73	2,57	2,41
60	11,97	7,76	6,17	5,31	4,76	4,37	4,09	3,87	3,69	3,54	3,31	3,08	2,83	2,69	2,55	2,41	2,25	2,08
120	11,38	7,32	5,79	4,95	4,42	4,04	3,77	3,55	3,38	3,24	3,02	2,78	2,53	2,40	2,26	2,11	1,95	1,76
∞	10,83	6,91	5,42	4,62	4,10	3,74	3,47	3,27	3,10	2,96	2,74	2,51	2,27	2,13	1,99	1,84	1,66	1,45

Примечание. 4053^+ означает $4053 \cdot 10^2$

ОГЛАВЛЕНИЕ

Глава 4
ИНТЕГРАЛЬНОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ ФУНКЦИИ ОДНОЙ ПЕРЕМЕННОЙ

Глава 5
ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ ФУНКЦИЙ НЕСКОЛЬКИХ ПЕРЕМЕННЫХ

Глава 6
КРАТНЫЕ ИНТЕГРАЛЫ

Глава 7
ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ

Глава 8
ДИСКРЕТНАЯ МАТЕМАТИКА