

**ЛИНЕЙНЫЕ  
РАДИО-  
ТЕХНИЧЕСКИЕ  
ЦЕПИ**

**А. К. АРСЕН**

**А. К. Л О С Е В**

# **ЛИНЕЙНЫЕ РАДИО- ТЕХНИЧЕСКИЕ ЦЕПИ**

**ОСНОВЫ ТЕОРИИ**

Допущено  
Министерством  
высшего и среднего  
специального  
образования  
СССР  
в качестве  
учебника  
для студентов  
специальности  
«Техническая  
эксплуатация  
авиационного  
радиооборудования»  
высших учебных  
заведений



**ИЗДАТЕЛЬСТВО  
«ВЫСШАЯ ШКОЛА»  
МОСКВА — 1971**



6Ф2  
Л79  
УДК 621.396.2

**Лосев А. К.**

Л79 **Линейные радиотехнические цепи.** Учебник для радиотехн. специальностей вузов. М., «Выш. школа», 1971.

560 с. с илл.

В книге рассмотрены следующие вопросы: основные принципы и задачи радиотехники; основы теории радиотехнических цепей с сосредоточенными и распределенными параметрами и методы их расчета; принципы синтеза двухполюсников и четырехполюсников; электрические и электромеханические фильтры с сосредоточенными и распределенными параметрами; сигналы и их спектры; переходные процессы в линейных цепях, а также прохождение сигналов через линейные цепи.

Кроме студентов радиотехнических специальностей, учебник могут использовать инженеры, работающие в области эксплуатации авиационного радиооборудования.

$\frac{3-4-1}{90-71}$

6Ф2

Рецензенты:

Кафедра теоретической радиотехники Киевского института инженеров гражданской авиации; д-р техн. наук проф. В. А. Дьяков (Военно-воздушная инженерная академия им. Н. Е. Жуковского).

**Лосев Алексей Константинович**  
**ЛИНЕЙНЫЕ РАДИОТЕХНИЧЕСКИЕ ЦЕПИ**

Редактор Т. И. Артемова  
Технический редактор Н. В. Яшукова  
Художеств. редактор Т. М. Скворцова  
Корректор В. А. Орлова

Т-11960. Сдано в набор 15/VI-70 г. Подписано к печати 31/VIII-71 г. Формат 60×90<sup>1</sup>/<sub>16</sub>.  
Объем 35 печ. л. Уч.-изд. л. 29. Изд. № ЭР-81. Заказ № 1770. Тираж 33 000 экз.  
Цена 1 руб. 23 коп.

План выпуска литературы для вузов и техникумов изд-ва «Высшая школа» на 1971 г.  
Позиция № 90.

Москва, К-51, Неглинная ул., д. 29/14,  
Издательство «Высшая школа»

*Книга выпущена по оригиналу-макету, изготовленному в типографии «Печатный Двор»*

Ордена Трудового Красного Знамени Ленинградская типография № 1 «Печатный Двор»  
им. А. М. Горького Главполиграфпрома Комитета по печати при Совете Министров СССР,  
г. Ленинград, Гатчинская ул., 26.

## ПРЕДИСЛОВИЕ

Радиотехнические факультеты исторически возникали обычно на базе политехнических вузов, выделяясь в ряде случаев из состава электротехнических факультетов. Традиции этих вузов накладывали свой отпечаток на учебные планы радиотехнических факультетов. Сторонники политехнической подготовки радистов считали, что выпускнику радиотехнического факультета вообще нельзя выдавать диплом инженера, если он не изучал сопромата. В силу указанных традиций даже курс теоретических основ электротехники строился без должного учета специфики подготовки радистов.

В настоящее время учебные планы радиотехнических факультетов перестроены. В них не только сокращен цикл механических дисциплин. Заодно из плана изъят курс теоретических основ электротехники, а также курс теоретических основ радиотехники — слишком уж сильно дублировали они друг друга. Зато теперь вместо этих курсов радисты изучают теорию линейных радиотехнических цепей, что не менее интересно и даже более полезно.

Курс линейных радиотехнических цепей еще не вполне устоялся. Существуют различные точки зрения на структуру этого курса. Не вполне свободен он и от внутренних противоречий. Некоторые вопросы, изучавшиеся раньше в других дисциплинах, пришлось механически присоединить к курсу линейных радиотехнических цепей. Другие вопросы, возможно, вообще выпали из поля зрения составителей новых учебных планов и программ. Однако первые годы работы по новым учебным планам показали, что в основном курс линейных радиотехнических цепей лучше готовит студентов к изучению специальных дисциплин, чем прежние курсы.

Сравнительно новому курсу линейных радиотехнических цепей и посвящен настоящий учебник, который написан по материалам лекций, читавшихся автором в Рижском Краснознаменном институте инженеров гражданской авиации и в Рижском политехническом институте. В учебнике использованы также материалы книги автора «Линейные радиотехнические цепи» (изд. Рижского Краснознаменного высшего инженерно-авиационного военного училища, 1958).



Хотя учебник написан применительно к программе подготовки инженеров по эксплуатации авиационного радиооборудования, им могут пользоваться студенты и других радиотехнических специальностей. Учебник будет полезен также при изучении курса линейных электрических цепей студентами факультетов связи, поскольку программа этого курса мало отличается от программы курса линейных радиотехнических цепей.

В учебнике собственно теории цепей предпослано введение, которое по сути дела является общим введением в радиотехнику. Этот раздел позволяет студентам систематизировать знания, почерпнутые из дополнительной литературы.

Без такого введения студент не всегда понимает, зачем он учится, а иногда сомневается, стоит ли учить все, что ему преподносят на лекциях. Некоторые из этих сомнений рассеиваются, как убедился автор, если студент предварительно знакомится с предметом своей будущей специальности.

Автор надеется, что все студенты будут работать над учебником с карандашом в руках. Всем им автор желает хороших успехов в изучении курса.

При написании учебника существенную помощь оказали рецензенты проф. В. А. Дьяков и доц. К. Б. Круковский-Синевич, которым автор выражает свою глубокую признательность. За помощь в работе над учебником автор благодарит также сотрудников кафедры теоретической радиотехники РКИИ ГА, особенно С. А. Артемову и Л. В. Рудневу.

Автор заранее выражает благодарность всем читателям, которые пришлют свои замечания, пожелания и отзывы на книгу по адресу: Москва, К-51, Неглинная ул., д. 29/14, издательство «Высшая школа».

*Автор*

# Г Л А В А 1

## ВВЕДЕНИЕ

### § 1.1. ОСНОВНЫЕ ПРИНЦИПЫ ПЕРЕДАЧИ СИГНАЛОВ

#### 1. Первый принцип — использование свободных электромагнитных волн

Человеческое общество не может существовать без связи. На первых порах возможно было только непосредственное общение между людьми при помощи речи, криков, мимики и жестов. Но такие формы связи не могли удовлетворить даже пещерного человека. Уже первобытное общество нуждалось в технических средствах связи, которые позволяли бы передавать информацию на большие расстояния в кратчайшие сроки. А эта задача не могла быть решена в полной мере даже с зарождением письменности и организацией почтовой связи. Поэтому на протяжении всей истории человеческого общества велись поиски быстрых и удобных способов связи. Звуковая и оптическая сигнализация, костры и факелы, водяной и semaфорный телеграфы — таковы этапы, ознаменовавшие успехи человека в этих поисках.

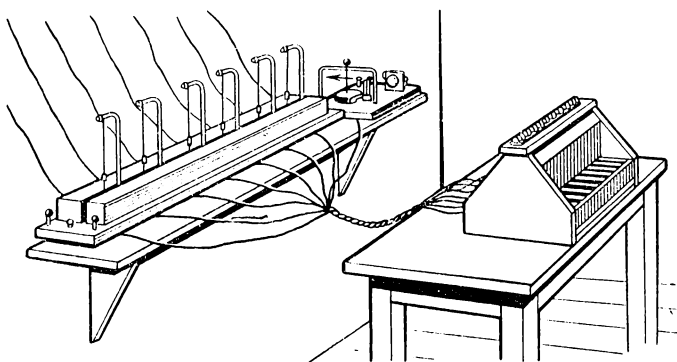
С возникновением и развитием учения об электричестве стали разрабатываться способы электрической связи. Первой вехой на этом пути был телеграф, предложенный баварским анатомом Земмерингом в 1809 г. В нем для индикации послышки сигнала использовалось явление электролиза. Ввиду сложности и неэффективности такой электрохимический телеграф не нашел практического применения.



Изобретатель электромагнитного телеграфа П. Л. Шиллинг (1786—1837 гг.)



На практике впервые был реализован электромагнитный телеграф. Датой рождения электромагнитного телеграфа является 1832 г., когда русский офицер П. Л. Шиллинг продемонстрировал в Петербурге работу изобретенного им устройства связи. Отличительной особенностью этого устройства являлось использование магнитного действия тока. Соответствующие определенным буквам алфавита магнитные стрелки помещались в катушках. При прохождении через катушку тока, подведенного по проводам из передающего пункта, соответствующая стрелка поворачивалась, сигнализируя о передаче определенной буквы. Второй особенностью этого устройства являлось использование специального кода,



Телеграфная станция П. Л. Шиллинга (1832 г.)

благодаря чему для передачи всего алфавита требовалось только шесть магнитных стрелок и восемь проводов. Впоследствии, усложнив код, П. Л. Шиллинг обходился одной стрелкой, что позволило применить только одну пару передающих проводов.

В 1842 г. американский художник Самуэль Морзе разработал конструкцию электромагнитного телеграфа и телеграфный код (азбуку Морзе), которые быстро завоевали всеобщее признание вследствие их простоты и эффективности\*.

В 1876 г. появился телефон, запатентованный американским изобретателем Грэхемом Беллом.

Таким образом, к концу прошлого века провода электрической связи уже не являлись диковинкой. Однако проводная связь не могла удовлетворить запросы быстро растущей техники, торговли, транспорта и в первую очередь судоходства, так как проводная связь с судами не могла быть осуществлена.

---

\* Хотя патент на изобретение получил С. Морзе, конструкция аппарата и телеграфный код были разработаны им совместно с техническим экспертом Альфредом Вайлом.

В истории техники было немало попыток осуществить беспроводную связь с помощью статических или медленно изменяющихся во времени электрических и магнитных полей.

Еще в позапрошлом веке и в начале прошлого века французский ученый Клод Шапп, а вслед за ним женевский физик Жорж Лезаж пытались осуществить связь с помощью электрического поля заряженного тела. В 80-х годах прошлого века английский инженер Прис пытался передавать телеграфные сигналы с помощью магнитного поля, возникающего вокруг проводника при протекании по нему тока.

Однако все подобные попытки были обречены на неудачу. Дело в том, что напряженность статического электрического или магнитного поля в свободном пространстве убывает пропорционально квадрату расстояния. Вследствие же влияния побочных факторов напряженность таких полей в реальных условиях убывает пропорционально кубу расстояния. Поэтому на больших расстояниях от источника напряженность поля статических электрических и магнитных полей получается ничтожно малой, и связь с их помощью оказывается невозможной.

Дальняя беспроводная связь стала возможной только с помощью электромагнитного поля, представляющего собой совокупность взаимосвязанных переменных электрического и магнитного полей. Электромагнитное поле может быть образовано в пространстве с помощью проводника, по которому протекает переменный ток.

Основные положения теории электромагнитного поля были математически разработаны английским ученым Дж. К. Максвеллом в его труде «Трактат об электричестве и магнетизме», опубликованном в 1873 г.

Впервые электромагнитные волны были получены и их свойства экспериментально исследованы немецким физиком Генрихом Герцем, который опубликовал результаты своих опытов в 1888 г.



Основоположник теории электромагнитного поля Дж. К. Максвелл (1831—1879 гг.)



Эксперименты Герца показали способность электромагнитных волн преломляться на границе двух сред и отражаться от металлических поверхностей.

Опыты Герца были воспроизведены и усовершенствованы многими физиками того времени.

Особых успехов добился английский физик Лодж, который применил для обнаружения электромагнитных волн стеклянную трубку с металлическими опилками, соприкасающимися с контак-



Изобретатель радио А. С. Попов (1859—1905 гг.)

тами, помещенными на конце трубки. Свойство такой трубки, названной когерером, заключается в том, что проводимость между контактами в обычном состоянии очень мала вследствие большого переходного сопротивления между отдельными частицами опилок. Но при наличии электромагнитного поля в каждой частице наводится электродвижущая сила; при этом между отдельными частицами возникают элементарные электрические разряды, которые как бы «спекают» опилки, и проводимость между контактами резко возрастает. Для восстановления нормального состояния когерера его надо встряхнуть, нарушив связь между опилками.

Однако опыты Герца, Лоджа и других экспериментаторов были направлены на изучение и демонстрацию свойств электромагнитного поля. Ни один из них не видел возможности практического использования электромагнитных волн.

Мысль о применении электромагнитных волн для осуществления беспроводной связи впервые высказал в 1889 г. А. С. Попов — преподаватель электротехники в Минном офицерском классе в Кронштадте. Видя непосредственно острую потребность флота в беспроводной связи, он настойчиво экспериментировал, проверяя идею использования электромагнитных волн для целей связи. И он же первый воплотил ее в жизнь.

Какие же свойства электромагнитного поля обусловили его применение для осуществления беспроводной связи?

Если статическое поле неразрывно связано со своим источником и исчезает вместе с исчезновением заряда или тока, то электромагнитное поле существует в пространстве, будучи не связанным со своим источником. Это свойство следует из самой природы элект-

ромагнитного поля, в котором изменение магнитной составляющей приводит к появлению соответствующего переменного электрического поля и наоборот. Благодаря этому электромагнитное поле распространяется в пространстве со скоростью  $c = 3 \cdot 10^8$  м/сек в виде волны, не связанной со своим источником.

Такие электромагнитные волны, не связанные с направляющими системами (например, с проводной линией), получили название свободных электромагнитных волн, или радиоволн.

Отрываясь от источника (излучателя), электромагнитные волны уносят с собой некоторую энергию. Рассмотрим энергию  $N$ , безвозвратно потерянную источником излучения за некоторое время  $\Delta t$ . В свободном пространстве эта энергия распределяется внутри сферического слоя, имеющего толщину  $h = c\Delta t$  и радиус, равный расстоянию  $D$  до источника излучения. При распространении волны поверхность сферического слоя увеличивается пропорционально квадрату расстояния  $D$ . При этом в участке сферического слоя с единичной

поверхностью заключена энергия  $N_0 = \frac{N}{4\pi D^2}$ . Таким

образом, удельная энергия  $N_0$  и удельная мощность

$P_0 = \frac{N_0}{\Delta t} = \frac{N}{4\pi \Delta t D^2}$  в некоторой точке пространства

получаются обратно пропорциональными квадрату расстояния до источника излучения. Поскольку же указанная мощность прямо пропорциональна квадрату напряженности поля, напряженность электромагнитного поля в отличие от статического убывает пропорционально первой степени расстояния до источника излучения. Благодаря этому и стала возможной дальняя беспроводная связь.

Итак, *первым принципом передачи электрических сигналов без проводов является использование свободных электромагнитных волн.*

В простейшем случае свободные электромагнитные волны образуются с помощью проводника, по которому протекает переменный ток от некоторого источника  $I$  (рис. 1.1).

Один из концов излучающего проводника через источник соединяется с землей  $З$  (заземляется). Такое устройство для получения свободных электромагнитных волн называется передающей антенной ( $A$ ). Заземление антенны создает условия для протекания в ней тока: этот ток замыкается через емкость, которая образуется между землей и излучающим проводником.

Современные передающие антенны значительно сложнее по конструкции, чем простой излучающий проводник. Различные конструкции передающих антенн, как и теория излучения свободных электромагнитных волн, изучаются в курсе антенных устройств.

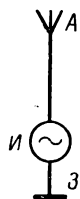


Рис. 1.1. Передающая антенна



## 2. Второй принцип — использование высокочастотных колебаний

Само по себе применение электромагнитных волн еще не решает задачу дальней беспроводной связи. Оказывается, что напряженность поля излучения зависит от частоты сигнала. Это легко понять, если вспомнить, что согласно закону электромагнитной индукции при движении проводника в магнитном поле в этом проводнике наводится тем большая э. д. с., чем больше скорость его перемещения. Обобщая этот закон, можно сказать, что в проводнике, помещенном в переменном магнитном поле, наводится э. д. с., пропорциональная скорости изменения поля.

Аналогично этому и напряженность электрической составляющей поля излучения растет при увеличении скорости изменения его магнитной составляющей. Магнитная же составляющая пропорциональна току в проводнике, создающем поле излучения. Таким образом, напряженность поля излучения получается пропорциональной не только величине тока в излучающем проводнике, но и скорости его изменения, т. е. в конечном счете частоте этого тока  $f = \frac{1}{T}$  ( $T$  — период колебаний).

Чтобы оценить значение этого фактора, воспользуемся формулой, доказываемой в теории электромагнитного поля. В свободном пространстве амплитуда напряженности поля излучения

$$\bar{E}_m (\text{в/м}) = 60\pi \frac{I_m (a) l (м)}{D (м) \lambda (м)}. \quad (1.1)$$

Здесь  $I_m$  — амплитуда тока в излучающем проводнике;

$l$  — длина проводника;

$D$  — расстояние от проводника до точки приема;

$\lambda$  — длина волны, определяемая как расстояние, проходимое волной за один период колебаний:

$$\lambda = cT = \frac{c}{f}. \quad (1.2)$$

Из формул (1.1), (1.2) видно, что чем больше длина волны, т. е. чем меньше частота, тем меньше эффективность излучения. Поскольку же длина излучающего проводника и величина тока в нем ограничены и не могут быть сделаны сколь угодно большими, эффективность излучения низкочастотных колебаний получается незначительной. Таким образом, напряженность медленно изменяющегося во времени поля излучения, как и напряженность статического поля, оказывается на больших расстояниях ничтожно малой. Но сигналы, подлежащие передаче, представляют собой колебания именно низкой частоты. Например, речи соответствуют сигналы

с частотами приблизительно от 200 до 2000 гц. При такой низкой частоте сигнала беспроводную связь осуществить невозможно.

Поясним сказанное следующим примером. Пусть частота сигнала  $f = 500$  гц ( $\lambda = 600$  км). Тогда при  $I_m = 10$  а и  $l = 10$  м напряженность поля излучения на расстоянии  $D = 1000$  км получается равной  $\bar{E}_m = 31,4 \cdot 10^{-3}$  квв/м. Столь слабое поле не может быть использовано для целей связи вследствие влияния помех, которые возникают в результате действия посторонних источников поля. Например, естественным источником электромагнитных волн являются грозовые разряды в атмосфере. Напряженность поля, создаваемого грозовыми разрядами, даже при благоприятных условиях достигает величины порядка единиц микровольт на метр. На фоне таких помех слабый сигнал не может быть обнаружен. Увеличение же тока и длины излучающего проводника в разумных пределах не привело бы в этом случае к существенному увеличению напряженности поля сигнала.

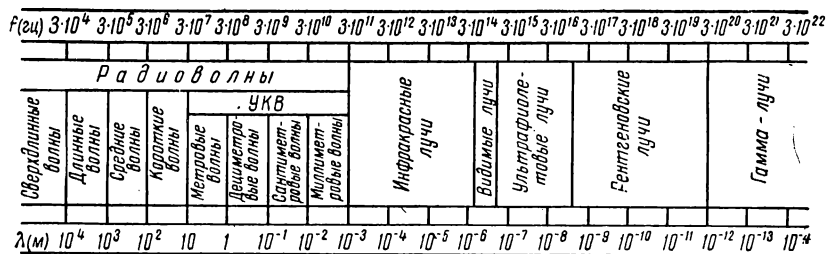


Рис. 1.2. Диапазоны электромагнитных колебаний

Осуществление беспроводной связи с помощью поля излучения стало бы возможным, если бы для излучения были использованы не низкочастотные сигналы, а какие-либо высокочастотные колебания. Например, при тех же условиях, что и в предыдущем примере, но при частоте сигнала  $f = 500$  кгц ( $\lambda = 600$  м) напряженность поля становится равной  $E_m = 31,4$  квв/м, что является уже достаточным для обнаружения сигнала на фоне помех.

Использование высокочастотных колебаний является вторым принципом передачи электрических сигналов без проводов.

На рис. 1.2 показан частотный диапазон используемых в настоящее время радиоволн и их место в ряду электромагнитных колебаний различного вида. На этом рисунке УКВ — диапазон ультракоротких радиоволн ( $\lambda < 10$  м), которому соответствует диапазон сверхвысоких частот — СВЧ ( $f > 3 \cdot 10^7$  гц = 30 Мгц).

Разбивка радиоволн на диапазоны производится с учетом различных условий их распространения над земной поверхностью. На распространение радиоволн оказывают влияние как Земля, так и ионосфера — верхний слой атмосферы, ионизирующийся под

действием солнечной радиации и других факторов. В ионосфере радиоволны преломляются и могут вследствие этого возвращаться к Земле. Однако преломление волн получается тем меньше, чем больше частота. В частности, ультракороткие волны ( $f > 30 \text{ МГц}$ ) преломляются в ионосфере настолько слабо, что не возвращаются на Землю и уходят в космическое пространство. Поэтому они и выделены в отдельный диапазон. Аналогично выделяются в отдельные диапазоны и другие радиоволны.

Разбивка радиоволн на диапазоны является до некоторой степени условной, поскольку резкой границы между отдельными

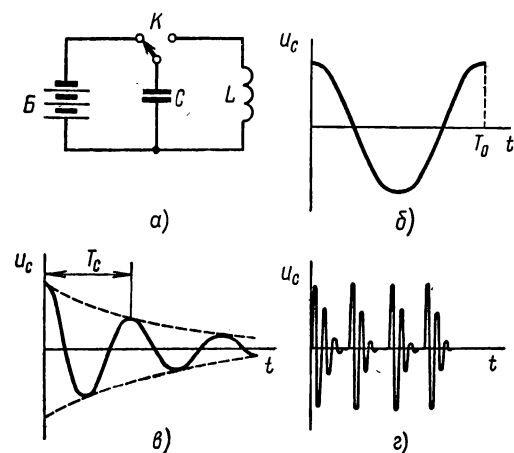


Рис. 1.3. Образование свободных колебаний в  $LC$ -контуре

ности  $L$ . Если конденсатор зарядить, например, от батареи  $B$  (рис. 1.3,а), то в его электрическом поле накопится некоторая энергия. Переведя теперь ключ  $K$  в правое положение, получим колебательный контур, в котором конденсатор будет разряжаться через индуктивность. При этом энергия из электрического поля конденсатора полностью переходит в магнитное поле катушки, а затем возвращается обратно. Когда в момент времени  $T_0$  энергия полностью возвратится в электрическое поле конденсатора, на нем установится первоначальное напряжение (рис. 1.3,б). Следовательно, рассмотренный процесс после момента  $T_0$  должен периодически повторяться: время  $T_0$  является периодом этого процесса.

Таким образом, при разряде конденсатора через катушку индуктивности возникают периодические (косинусоидальные) колебания с частотой  $f_0 = \frac{1}{T_0}$ , которые называются собственными колебаниями контура.

диапазонами не существует. Подробное рассмотрение условий распространения волн различных диапазонов производится в курсе антенных устройств.

Из рис. 1.2 видно, что для целей связи используются частоты порядка десятков килогерц и выше — вплоть до диапазона СВЧ.

Колебания столь высокой частоты могут быть получены с помощью так называемого колебательного контура. Этот контур состоит из конденсатора  $C$  и катушки индуктивности  $L$ .

Если рассмотренный процесс проанализировать более тщательно, то окажется, что в действительности он не является периодическим. По мере перехода из электрического поля в магнитное и обратно, энергия частично расходуется необратимо (переходя, например, в тепловую энергию). За счет этого амплитуда колебаний уменьшается с течением времени (рис. 1.3,б), т. е. собственные колебания контура являются затухающими. При этом несколько изменяется и интервал  $T_c$ , который условно может быть назван периодом затухающих колебаний. Частота собственных колебаний (собственная частота контура) определяется приближенно следующим образом:

$$f_c = \frac{1}{T_c} \approx \frac{1}{2\pi \sqrt{LC}}. \quad (1.3)$$

Из этой формулы видно, что при надлежащем выборе параметров  $L$  и  $C$  контура могут быть получены высокочастотные колебания. Например; при типовом конденсаторе с емкостью  $C = 100 \text{ нф} = 10^{-10} \text{ ф}$  и катушке с сотней витков, имеющей индуктивность  $L = 100 \text{ мкГн} = 10^{-4} \text{ Гн}$ , частота собственных колебаний контура  $f_c = 1,59 \cdot 10^6 \text{ Гц} = 1,59 \text{ МГц}$ .

Для осуществления связи необходимо иметь длительный колебательный процесс. Собственные же колебания контура затухают практически полностью уже в немногие доли секунды. Поэтому в первых устройствах для получения высокочастотных колебаний ключ  $K$  (см. рис. 1.3,а) периодически переключался на заряд и разряд конденсатора. Это осуществлялось автоматически с помощью электромагнитного реле звонкового типа, в котором якорь переключал контакты ключа. При этом получалась серия высокочастотных затухающих колебаний (рис. 1.3,б), которые и были использованы А. С. Поповым.

Впоследствии научились компенсировать потери в колебательном контуре. При такой компенсации с помощью колебательного контура можно получать обычные синусоидальные (незатухающие) колебания. В современных устройствах, которые называются генераторами, для получения (генерирования) высокочастотных колебаний указанная компенсация потерь осуществляется с помощью электронной лампы. Ламповый генератор синусоидальных колебаний был изобретен в 1913 г. немецким ученым А. Мейснером.

Принцип действия ламповых генераторов высокочастотных колебаний заключается в том, что конденсатор в колебательном контуре подзаряжается до первоначального напряжения каждый полупериод колебаний. За счет такого толчкообразного поступления энергии в колебательный контур возникшие в нем колебания становятся незатухающими (полезно вспомнить аналогичный пример: незатухающие колебания качелей могут поддерживаться периодическими толчками). Роль регулятора, автоматически поддерживающего



необходимый ритм подачи энергии в контур, и выполняет электронная лампа (или полупроводниковый прибор).

Описанный принцип генерирования синусоидальных колебаний не является единственно возможным. В частности, в диапазоне СВЧ для генерирования колебаний применяются особые устройства (клистроны, магнетроны и др.) со своеобразным механизмом поддержания незатухающих колебаний. Один из таких своеобразных принципов возбуждения колебаний используется в так называемых параметрических генераторах, в которых колебания возбуждаются не за счет разряда конденсатора, а за счет периодического изменения параметров контура (отсюда и происходит название параметрических генераторов). Такие параметрические генераторы были изобретены советскими радиофизиками академиками Л. И. Мандельштамом и Н. Д. Папалекси.

Современная техника позволяет генерировать колебания даже в оптическом диапазоне волн. Создатели первых образцов таких оптических квантовых генераторов Н. Г. Басов и А. М. Прохоров были удостоены Ленинской премии в 1959 г. Этим же ученым вместе с американским ученым Ч. Таунсом была присуждена в 1964 г. Нобелевская премия за выдающиеся исследования в области квантовой радиифизики.

Различные типы генераторов синусоидальных колебаний рассматриваются в ряде курсов. Процессы в таких генераторах изучаются в курсе нелинейных и параметрических цепей, а практические схемы ламповых генераторов — в курсе радиопередающих устройств. Этому предшествует изучение электронных ламп и полупроводниковых устройств в курсе электронных приборов.

### **3. Третий принцип — модуляция высокочастотных колебаний**

Итак, высокочастотные колебания получены. Возникает вопрос: как же передавать телеграфные и телефонные сигналы, частоты которых не превышают нескольких килогерц? Ведь полученные высокочастотные колебания не имеют никакого отношения к низкочастотному сигналу, подлежащему передаче.

Предложив использовать для целей связи высокочастотные колебания, А. С. Попов одновременно решил задачу передачи с их помощью низкочастотных сигналов. Для этого А. С. Попов с помощью телеграфного ключа  $K$  замыкал и размыкал цепь антенны  $A$ , к которой подводились высокочастотные колебания от генератора  $G$  (рис. 1.4,а). При этом ток в антенне изменялся в соответствии с рис. 1.4,б. Таким образом получались сигналы в виде телеграфных посылок высокочастотных импульсов.

В современных устройствах, где применяются незатухающие высокочастотные колебания, описанный процесс выглядит несколько иначе. Рассмотрим этот вопрос подробнее.

Высокочастотные колебания

$$u_{\omega} = U_{m0} \sin(\omega_0 t + \psi_0) \quad (1.4)$$

однозначно характеризуются тремя параметрами — амплитудой напряжения  $U_{m0}$ , круговой частотой  $\omega_0 = 2\pi f_0$  и начальной фазой  $\psi_0$ . Такие синусоидальные колебания при их излучении в виде свободных электромагнитных волн не несут с собой никакой информации (за исключением информации о том, что включен источник излучения).

Однако рассматриваемые колебания можно заставить передавать информацию, заключенную в низкочастотном сигнале. Для этого какой-либо из указанных выше параметров высокочастотных колебаний нужно изменять пропорционально величине низкочастот-

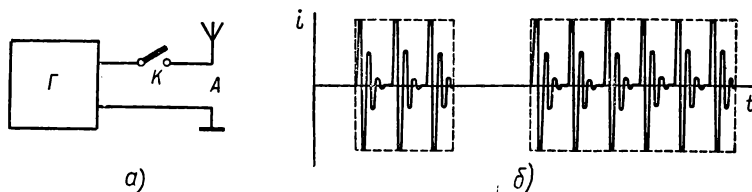


Рис. 1.4. Образование телеграфных высокочастотных сигналов

ного сигнала  $u_{\Omega}(t)$ . При этом вместо постоянных параметров  $U_{m0}$ ,  $\omega_0$ ,  $\psi_0$  будут получаться изменяющиеся во времени параметры:

$$\begin{aligned} U_m(t) &= U_{m0} + au_{\Omega}(t), \\ \omega(t) &= \omega_0 + au_{\Omega}(t), \\ \psi(t) &= \psi_0 + au_{\Omega}(t), \end{aligned} \quad (1.5)$$

где  $a$  — некоторый коэффициент пропорциональности.

Такой процесс изменения параметров высокочастотных колебаний по закону изменения низкочастотного сигнала называется модуляцией. При модуляции высокочастотных колебаний передаваемая информация отображается законом модуляции, т. е. законом изменения во времени модулируемого параметра высокочастотных колебаний.

*Модуляция высокочастотных колебаний является третьим принципом передачи электрических сигналов без проводов.*

В зависимости от того, какой из параметров высокочастотных колебаний изменяется при модуляции, различают амплитудную, частотную и фазовую модуляцию. При последних двух видах мо-

дуляции вместе с изменяющейся частотой  $\omega(t)$  или фазой  $\psi(t)$  меняется соответственно и фазовый угол  $\Phi$  колебаний  $u = U_m \sin \Phi$ . Поэтому частотную и фазовую модуляцию часто объединяют под общим названием угловой модуляции.

Полученные в результате модуляции высокочастотные колебания с изменяющимися параметрами называются модулированными сигналами, или радиосигналами. В соответствии с видом модуляции различают амплитудно-модулированные, частотно-модулированные и фазо-модулированные сигналы (АМ-, ЧМ- и ФМ-сигналы).

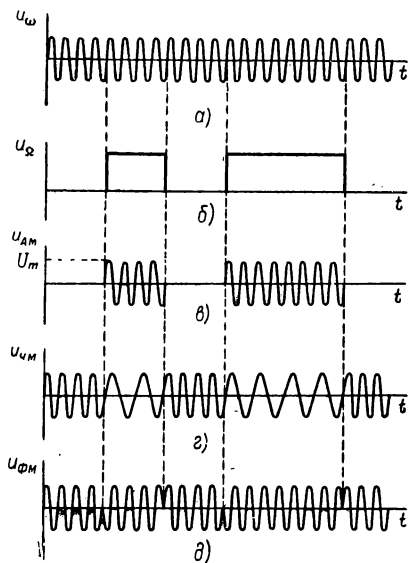


Рис. 1.5. Изменение параметров колебаний при модуляции

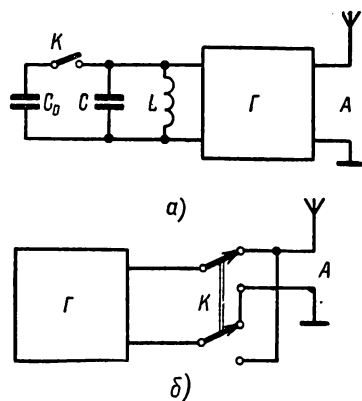


Рис. 1.6. Способы угловой манипуляции

Низкочастотные сигналы, с помощью которых осуществляется управление параметрами высокочастотных колебаний, называются управляющими сигналами.

Для примера на рис. 1.5 показаны высокочастотные колебания  $u_\omega$  с начальной фазой  $\psi_0 = 0$ , управляющий телеграфный сигнал  $u_\Omega$  и соответствующие ему модулированные сигналы  $u_{AM}$ ,  $u_{CM}$  и  $u_{FM}$ . В случае телеграфного АМ-сигнала его амплитуда изменяется скачками между нулем и значением  $U_m$  (рис. 1.5,б) в соответствии с изменением управляющего сигнала. Аналогично скачками изменяется в этом случае частота ЧМ-сигнала на некоторую величину  $\Delta\omega$  (рис. 1.5,в) и начальная фаза ФМ-сигнала на величину  $\pi$  (рис. 1.5,г).

Такое скачкообразное изменение параметров высокочастотных колебаний называется телеграфной модуляцией, или манипуляцией.

Простейший способ амплитудной манипуляции был рассмотрен выше (см. рис. 1.4). Таким же образом можно получить и АМ-сигнал, изображенный на рис. 1.5, в. При этом в схеме рис. 1.4, а надо использовать генератор незатухающих колебаний в отличие от устройства А. С. Попова, где применялся генератор затухающих колебаний.

Простейшие способы угловой манипуляции показаны на рис. 1.6.

На рис. 1.6, а показан способ получения телеграфного ЧМ-сигнала. Здесь отдельно изображен контур, состоящий из индуктивности  $L$  и емкости  $C$ , которые и определяют частоту генерируемых колебаний (1.3). При нажатом ключе емкость контура меняется скачком от  $C$  до  $C + C_0$  и соответственно уменьшается частота (1.3).

На рис. 1.6, б показан способ получения телеграфного ФМ-сигнала, заключающийся в простом переключении концов антенны с помощью двоянного телеграфного ключа.

При более сложных управляющих сигналах соответственно усложняется и способ осуществления модуляции. Например, при передаче речи для получения АМ-сигнала вместо телеграфного ключа  $K$  (см. рис. 1.4, а) можно поставить микрофон. В этом случае при изменении звукового давления  $p$  на мембрану микрофона будет соответственно меняться его сопротивление  $R$  и амплитуда тока в антенне  $I_m$  (рис. 1.7). Таким образом, в соответствии с формулой (1.1) будет излучаться модулированный сигнал.

Рассмотренные примеры получения модулированных сигналов служат лишь для разъяснения самой идеи модуляции.

На практике для осуществления модуляции используются более сложные устройства, называемые модуляторами. Модуляторы изучаются в курсе радиопередающих устройств. Этому предшествует изучение самого процесса модуляции в курсе нелинейных и параметрических цепей, поскольку модуляция является или параметрическим, или нелинейным процессом. Это означает, что модулированный сигнал не может быть получен путем простого линейного сложения двух колебаний ( $u \neq u_\Omega + u_\omega$ ), как это было видно из рассмотренных примеров.

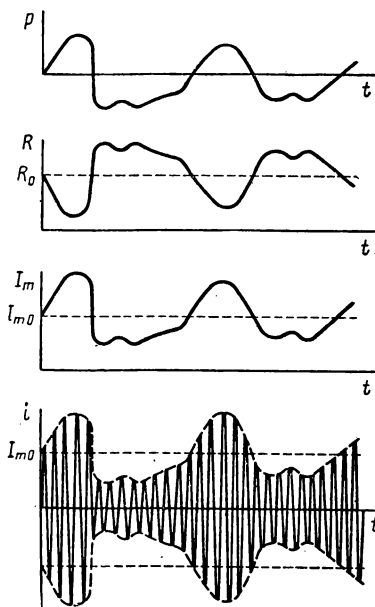


Рис. 1.7. Образование амплитудно-модулированного сигнала



Поэтому и математически модулированный сигнал надо описывать не путем сложения управляющего сигнала

$$u_{\Omega}(t) = U_{m\Omega} \cos \Omega t \quad (1.6)$$

и высокочастотных колебаний

$$u_{\omega}(t) = U_{m0} \cos \omega_0(t), \quad (1.7)$$

а путем преобразования функции (1.7) в соответствии с выражениями (1.5).

Например, в случае амплитудной модуляции по закону (1.6) (рис. 1.8, а) амплитуда АМ-сигнала меняется в соответствии с рис. 1.8, б. При этом вместо высокочастотных колебаний (1.7) получается АМ-сигнал

$$u(t) = U_m(t) \cos \omega_0 t. \quad (1.8)$$

Из рис. 1.8, б видно, что в этом случае

$$U_m(t) = U_{m0} + a u_{\Omega} t = U_{m0} + \Delta U_m \cos \Omega t, \quad (1.9)$$

где  $\Delta U_m = a U_{m\Omega}$  — максимальное приращение амплитуды АМ-сигнала.

Из соотношений (1.8) и (1.9) получаем математическое описание АМ-сигнала при гармоническом законе модуляции (1.6):

$$u = U_{m0} (1 + m \cos \Omega t) \cos \omega_0 t. \quad (1.10)$$

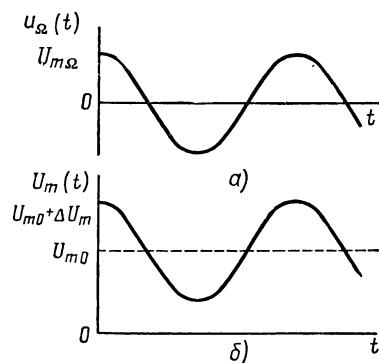


Рис. 1.8. Изменение амплитуды АМ-сигнала при гармонической модуляции

Введенная здесь величина

$$m = \frac{\Delta U_m}{U_{m0}} = a \frac{U_{m\Omega}}{U_{m0}} \quad (1.11)$$

называется коэффициентом, или глубиной модуляции.

Из рис. 1.8, б и определения (1.11) видно, что минимальное значение коэффициента модуляции ( $m = 0$ ) соответствует отсутствию модуляции. Максимальное же его значение не может превышать единицу ( $m \leq 1$ ). Если бы значение  $m$  стало больше единицы ( $\Delta U_m > U_{m0}$ ), то амплитуда АМ-сигнала в отдельные интервалы времени приняла бы отрицательное значение. Это явление, называемое перемодуляцией, означало бы в конечном счете нарушение закона модуляции. Таким образом, при перемодуляции изменение амплитуды АМ-сигнала не повторяет закона изменения управляющего сигнала, т. е. происходит искажение закона модуляции.

## § 1.2. ОСНОВНЫЕ ПРИНЦИПЫ ПРИЕМА СИГНАЛОВ

### 1. Первый принцип — использование приемной антенны

Разработав основные принципы передачи электрических сигналов без проводов, А. С. Попов должен был решить и задачу их приема. Способы индикации электромагнитного поля, применявшиеся Герцем, Лоджем и другими экспериментаторами, были не пригодны для приема слабых радиосигналов на фоне помех.

Эту задачу А. С. Попов решил с помощью приемника (рис. 1.9), который был назван грозоотметчиком, поскольку в первых экспе-

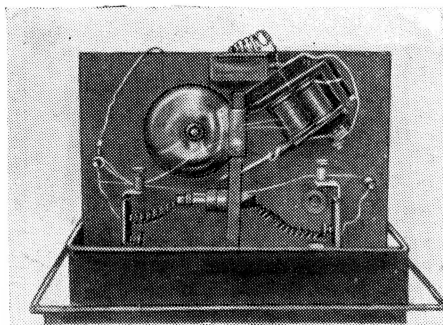
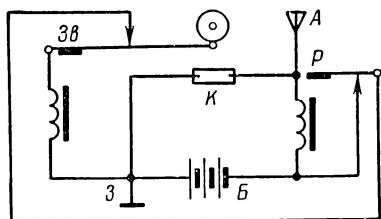


Рис. 1.9. Схема грозоотметчика  
А. С. Попова

Внешний вид грозоотметчика А. С. Попова (1895 г.)

риментах он испытывался на приеме электромагнитных волн, создаваемых грозowymi разрядами.

Передачу и прием радиотелеграфных сигналов с помощью грозоотметчика А. С. Попов публично продемонстрировал 24 марта 1896 г. При этом для записи принимаемых сигналов в грозоотметчике к электромагниту звонка был подключен телеграфный аппарат. Впервые же грозоотметчик А. С. Попова был публично продемонстрирован на заседании Русского физико-химического общества 7 мая 1895 г. Этот день вошел в историю как день изобретения радио\*.

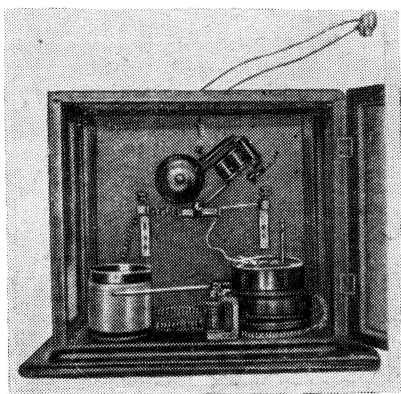
\* Небезынтересно отметить, что итальянец Маркони, пытавшийся оспаривать приоритет А. С. Попова в изобретении радио, подал патентную заявку на «свое» изобретение лишь в июне 1896 г. При этом он засекретил схему своего устройства. Но когда летом 1897 г. была опубликована схема примененного им приемника, обнаружилось, что она идентична схеме, опубликованной А. С. Поповым в январском номере «Журнала русского физико-химического общества» за 1896 г.

Несмотря на простоту схемы грозоотметчика, в нем были воплощены все основные принципы приема радиосигналов.

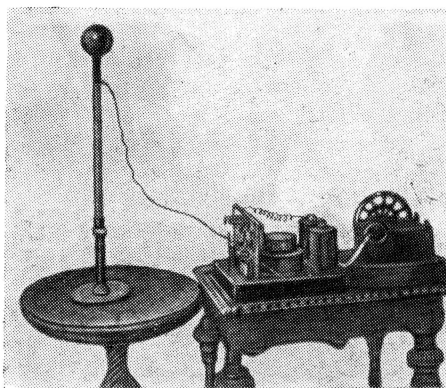
Можно назвать четыре таких основных принципа.

*Первым принципом приема радиосигналов является применение приемной антенны.*

В простейшем случае приемной антенной может служить, как и у А. С. Попова, обычный проводник, подобный передающей антенне (см. рис. 1.1). При этом между приемным проводом А (см. рис. 1.9) и заземлением З включается нагрузка, в данном случае когерер К.



Грозоотметчик А. С. Попова с регистрирующим прибором (1896 г.)



Радиоприемная установка А. С. Попова с телеграфным аппаратом (1896 г.)

При воздействии электромагнитного поля в приемной антенне наводится э. д. с. с амплитудой

$$E_m = h_o \bar{E}_m,$$

где  $h_o$  — коэффициент пропорциональности, называемый действующей высотой антенны и зависящий от ее размеров и устройства.

При достаточно большой действующей высоте э. д. с. в антенне легко регистрируется, что способствует приему слабых радиосигналов.

В настоящее время применяются и более сложные приемные антенны, которые изучаются в курсе антенных устройств. Однако уже сейчас полезно отметить, что широкое применение находят, в частности, антенны направленного действия, которые хорошо принимают радиоволны, распространяющиеся только в каком-либо определенном направлении \*. Простейшей направленной антенной

\* Антенны направленного действия могут использоваться и в качестве передающих антенн. При этом интенсивность излучения в разные стороны получается различной.

является рамочная антенна (рис. 1.10), на выходе которой получается максимальная э. д. с. в случае приема радиоволн, распространяющихся в плоскости рамки. Если же радиоволны распространяются в направлении, перпендикулярном к плоскости рамки, то рамочная антенна совсем их не принимает. Это происходит потому, что э. д. с., наводимые при этом в противоположных сторонах рамки, получаются одинаковыми, но со встречной полярностью. Таким образом, происходит компенсация указанных э. д. с., а суммарная э. д. с. на выходе рамочной антенны получается равной нулю.

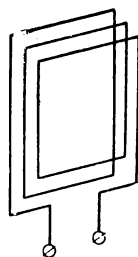


Рис. 1.10.  
Рамочная  
антенна

## 2. Второй принцип — селекция сигналов

Выше отмечалось, что приему сигналов мешают различные посторонние электромагнитные излучения, называемые радиопомехами. Радиопомехи бывают трех видов: атмосферные, космические и промышленные.

К атмосферным радиопомехам относятся электромагнитные излучения, создаваемые грозовыми разрядами, и некоторые другие. В частности, к атмосферным помехам на самолете относятся помехи, создаваемые разрядами, которые возникают вследствие электризации самолета при трении его о воздух. К атмосферным радиопомехам относятся также ионосферные помехи, возникающие вследствие движения зарядов в ионосфере и изменения их плотности.

Космические радиопомехи возникают в результате электромагнитного излучения различных астрономических тел и вследствие некоторых других процессов в космосе. К промышленным радиопомехам относятся излучения посторонних радиостанций и излучения, создаваемые различными электроустановками (электромоторы, осветительная сеть, рентгеновская аппаратура и др.).

Кроме того, приему сигналов препятствуют различные паразитные колебания, возникающие внутри самого приемника, например внутри электронных ламп из-за неупорядоченного движения электронов. Такие помехи называются внутренними шумами.

Таким образом, возникает проблема борьбы с помехами радиоприему. В некоторых случаях эта борьба может вестись в направлении уменьшения самого уровня радиопомех в месте их возникновения. Например, на самолетах для устранения скапливающихся при электризации статических зарядов к плоскостям прикрепляют специальные стекатели зарядов в виде кисточек. Для устранения же разрядов между изолированными друг от друга частями самолета между ними ставят гибкие металлические перемычки (металлизацию).

Для борьбы с промышленными радиопомехами применяют специальные искрогасящие приспособления, а источники помех поме-

щают в металлические экраны (экранируют). Экранировка электрических систем применяется, в частности, и на самолетах.

Однако основным видом борьбы с радиопомехами является их подавление и выделение полезного сигнала в самом радиоприемном устройстве. Отделение полезного сигнала от помех называется селекцией, или фильтрацией сигнала. Иногда этот процесс называют также фильтрацией помех.

*Селекция является вторым принципом приема радиосигналов.* Существуют различные виды селекции, а сами селективные системы непрерывно совершенствуются. Можно без преувеличения сказать, что одной из движущих сил развития радиотехники является необходимость борьбы с радиопомехами и совершенствования селективных систем. Исследования, направленные на повышение помехоустойчивости радиоприема, ведутся широким фронтом и в настоящее время. Среди этих исследований следует отметить фундаментальные работы акад. В. А. Котельникова.

Селекция может быть основана на любом различии между сигналом и помехой. В приемнике А. С. Попова селекция была основана на различии в длительности сигнала и помехи. Учитывая, что длительность грозовых помех не превышает долей секунды, А. С. Попов применил телеграфные сигналы (точки и тире) с продолжительностью в несколько секунд. При этом телеграфный аппарат, записывающий принятые сигналы, может быть отрегулирован так, что вследствие инерционности он будет реагировать только на длительные сигналы и не будет записывать кратковременные грозовые разряды. Но и без специальной регулировки телеграфного аппарата продолжительные телеграфные сигналы легко отличить от кратковременных грозовых помех.

Селекция, примененная А. С. Поповым, по своему принципу может быть названа временной. Временная селекция в различных ее формах применяется и по настоящий день.

Растяжение сигналов во времени, использованное А. С. Поповым, применяется также в современных устройствах, но уже не как разновидность временной селекции, а как средство, облегчающее селекцию сигналов другими способами. Например, высокое качество снимков лунной поверхности, переданных по радиоканалу советской станцией «Луна-9», было обеспечено тем, что в этом радиоканале было применено растяжение сигнала во времени. С этой целью одна строка телевизионной развертки фотографии лунной поверхности передавалась на Землю в течение одной секунды. В обычном же телевизионном канале за одну секунду передается 25 кадров, каждый из которых состоит из 625 строк, т. е. передается 15 625 строк в секунду.

При таком растяжении сигнала улучшается качество частотной селекции, основанной на различии в частоте сигнала и помех. Этот вид селекции используется сейчас наиболее широко. Для осуществления

частотной селекции применяются специальные устройства, называемые частотными фильтрами, или просто фильтрами \*.

Различные виды селективных систем изучаются в курсе теории передачи информации. Основной вид селекции — частотный — основан на некоторых свойствах линейных цепей, изучаемых в настоящем курсе. Рассмотрению систем частотной селекции посвящена отдельная глава настоящего учебника (см. гл. 9). Там же, кстати, выясняется, почему увеличение длительности сигнала облегчает частотную селекцию.

### 3. Третий принцип — детектирование

Информация, заключенная в высокочастотном модулированном сигнале, не может быть воспринята непосредственно. Например, если АМ-сигнал подвести к телефону, то мембрана вследствие своей инерционности вообще не будет реагировать на высокочастотные колебания.

Чтобы извлечь информацию из высокочастотного модулированного сигнала, его надо преобразовать с целью получения низкочастотного сигнала, повторяющего форму управляющего сигнала. Такое преобразование модулированного сигнала называется детектированием.

*Детектирование является третьим принципом приема радиосигналов.*

Детектирование, как и модуляция, относится к классу нелинейных преобразований сигнала. Для осуществления такого преобразования применяются специальные устройства, называемые детекторами.

В приемнике А. С. Попова детектирование осуществлялось с помощью когерера  $K$  (см. рис. 1.9). При появлении высокочастотных колебаний сопротивление когерера резко падает, как отмечалось выше, и он начинает пропускать постоянный ток от батареи  $B$ . Таким образом возникают послышки постоянного тока, т. е. образуется управляющий телеграфный сигнал.

Впоследствии А. С. Поповым был изобретен угле-сталистый детектор, которым был заменен когерер. Подобные кристаллические детекторы широко используются и в современной аппаратуре.

Действие таких детекторов основано на их способности проводить ток только в одном направлении. При этом возможно детектирование не только телеграфных сигналов, как с помощью когерера, но и сигналов с произвольным законом модуляции.

---

\* В более широком смысле слова фильтрами называются селективные системы, работа которых основана на любом принципе селекции.



Различные способы детектирования изучаются в курсе радиоприемных устройств, а основы теории нелинейного процесса детектирования — в курсе нелинейных радиотехнических цепей.

#### **4. Четвертый принцип — усиление сигналов**

Принятые слабые сигналы не обладают мощностью, достаточной для приведения в действие регистрирующего прибора (звонка, телеграфного аппарата, телефонов и т. д.). Поэтому в радиоприемниках принятые радиосигналы, а также управляющие сигналы, полученные после детектирования, усиливаются.

Усилением называется увеличение мощности сигналов с сохранением их формы (в отличие от трансформации сигнала, при которой может быть увеличено напряжение сигнала без увеличения его мощности).

*Усиление сигналов является четвертым принципом радиоприема.*

Усиление осуществляется за счет энергии местного источника питания с помощью схемы, содержащей наряду с источником нагрузки и управляющий элемент. Этот элемент регулирует прохождение тока от источника через нагрузку в соответствии с изменением усиливаемого сигнала. Такая схема называется усилительным каскадом.

В приемнике А. С. Попова было применено два усилительных каскада (см. рис. 1.9). Первый каскад образован батареей *Б*, когерером *К*, который наряду с детектированием выполняет функции управляющего элемента, и обмоткой реле *Р*, являющейся нагрузкой. При воздействии принятого сигнала когерер пропускает ток от батареи через обмотку реле, и якорь реле притягивается. Это реле является управляющим элементом второго усилительного каскада, в котором нагрузкой служит электромагнит звонка *Зв*, питающийся от той же батареи *Б*. При срабатывании реле *Р* цепь звонка замыкается, и он сигнализирует о принятом сигнале. Одновременно молоточек звонка, ударяя по когереру, восстанавливает его большое сопротивление, как только прекращается сигнал. При этом приемник возвращается в первоначальное состояние и становится готовым к приему очередного сигнала.

Наибольшее влияние на развитие средств радиотехники оказало изобретение электронной лампы. Еще в 1904 г. английский ученый Флеминг сконструировал двухэлектродную электронную лампу (диод), которая стала использоваться в качестве детектора. В 1906 г. американский радионинженер Ли-де-Форест изобрел трехэлектродную лампу — триод. Управляющее действие третьего электрода (сетки) позволило использовать триод в качестве управляющего элемента в усилителях (вместо электромеханических управляющих элементов — реле).

Ламповые усилители позволяют усиливать не только телеграфные сигналы, но и сигналы любой сложной формы. При этом возможно усиление не только низкочастотных сигналов, но и высокочастотных колебаний, поскольку электронная лампа как управляющий элемент почти не обладает инерционностью.

Развитие электронной техники позволило разработать и другие типы управляющих элементов. В настоящее время используются не только ламповые, но и полупроводниковые (транзисторные) усилители; на СВЧ применяются электронно-волновые усилители и др. Особо следует отметить класс параметрических усилителей, в которых, как и в параметрических генераторах, используются элементы с переменными параметрами.

Различные типы усилителей нашли широкое применение не только в приемниках, но и в передатчиках, а также во многих других устройствах современной техники — в измерительных приборах, в системах управления и автоматического регулирования, в медицинской аппаратуре и т. д.

Различные типы усилителей изучаются в курсе усилительных устройств, а некоторые специальные типы усилителей — в ряде других курсов.

## § 1.3. РАДИОТЕХНИКА И ЕЕ ЗАДАЧИ

### 1. Функциональные схемы радиoliniи

Из предыдущего рассмотрения следует, что для осуществления электрической связи без проводов необходимо построить беспроводную линию связи, или радиoliniю, которая должна состоять из передатчика радиосигналов (радиопередающего устройства) и приемника радиосигналов (радиоприемного устройства), связанных между собой свободными электромагнитными волнами (рис. 1.11, а).

Если антенна  $A$  удалена от передатчика  $Прд$  и приемника  $Прм$ , она подсоединяется с помощью проводной линии связи, называемой фидером  $\Phi$ .

Для получения двусторонней связи оба пункта связи должны иметь как радиопередатчик, так и радиоприемник (рис. 1.11, б). Переход с передачи на прием и обратный переход осуществляются путем соответствующего переключения антенны при помощи переключателя  $П$ .

В соответствии с рассмотренными принципами передачи радиосигналов на рис. 1.12 изображена функциональная схема радиопередающего устройства.

На входе радиопередатчика ставится преобразователь  $Пр$ , преобразующий первичный сигнал, подлежащий передаче, в электри-

ческий управляющий сигнал. В зависимости от целей связи таким преобразователем может быть телеграфный ключ, микрофон и другие устройства.

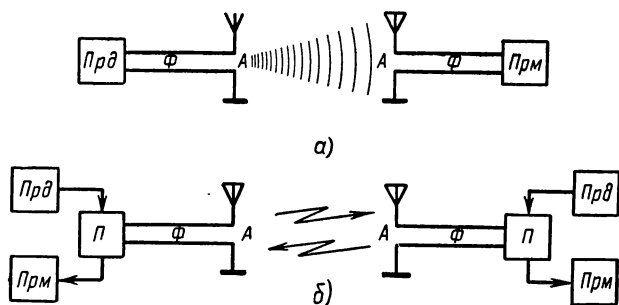


Рис. 1.11. Функциональные схемы радиосвязи

Слабый управляющий сигнал обычно усиливается с помощью усилителя низкой частоты УНЧ. Высокочастотные колебания, создаваемые генератором  $G$ , модулируются управляющим сигналом в модуляционном устройстве  $M$ . Необходимая мощность модулированного сигнала обеспечивается усилителем высокой частоты, который часто выполняется из двух частей — предварительного усилителя  $ПУ$  и мощного усилителя, который называется усилителем мощности  $УМ$ .

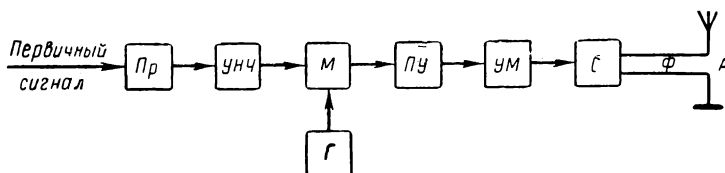


Рис. 1.12. Функциональная схема радиопередающего устройства

В процессе модуляции могут возникать паразитные колебания, которые, излучаясь с основным сигналом, создают дополнительные радиопомехи. Для предотвращения таких побочных излучений в передатчике ставится селективное устройство  $C$ .

В соответствии с рассмотренными принципами приема радиосигналов на рис. 1.13, а изображена функциональная схема радиоприемного устройства.

Принятый с помощью антенны  $A$  радиосигнал очищается от помех в селективном устройстве  $C$ . После усилителя высокой частоты  $УВЧ$  высокочастотный модулированный сигнал подается на детектор  $D$ . Полученный в результате детектирования низкочастотный управляю-

щий сигнал усиливается с помощью усилителя низкой частоты *УНЧ*. Затем управляющий сигнал на выходе приемника преобразуется в соответствующий первичный сигнал с помощью преобразователя *Пр*. В зависимости от природы первичного сигнала таким преобразователем может быть телеграфный аппарат, телефон и другие устройства.

Отличительной особенностью рассмотренной функциональной схемы радиоприемника является селекция и усиление высокочастотных модулированных колебаний на частоте принятого сигнала. Эффективность такой селекции и такого усиления часто оказывается недостаточной. Поэтому в современных радиоприемниках основное усиление и селекцию осуществляют обычно на частоте, отличающейся от частоты принятого сигнала. С этой целью частота принятого сигнала преобразуется, как показано на рис. 1.13, б.

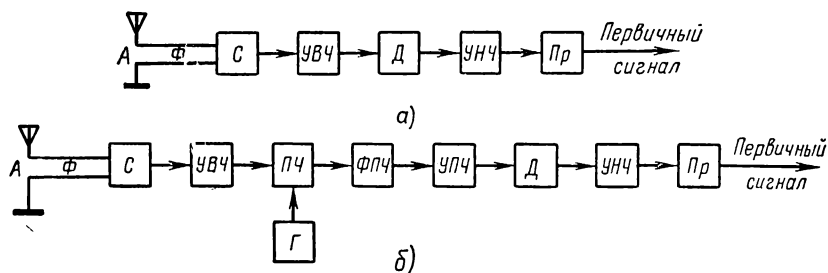


Рис. 1.13. Функциональные схемы радиоприемных устройств

Преобразование частоты осуществляется следующим образом. Сначала производится предварительная селекция (преселекция) принятого сигнала в преселекторе *С* и его предварительное усиление в усилителе *УВЧ* (последнее не обязательно). Затем высокочастотный сигнал с частотой  $f$  подводится к преобразователю частоты *ПЧ*. К этому же преобразователю от вспомогательного высокочастотного генератора (гетеродина) *Г* подводятся колебания с частотой  $f_r$ .

В результате сложения колебаний с разными частотами  $f$  и  $f_r$  образуются, как известно из курса физики, биения. Частота биений  $f_{пр} = f - f_r$ , называемая промежуточной частотой, делается постоянной за счет соответствующей перестройки гетеродина при изменении частоты принимаемого сигнала.

Колебания с фиксированной промежуточной частотой  $f_{пр}$  формируются из биений аналогично тому, как в детекторе из модулированных колебаний формируется управляющий сигнал. Промежуточная частота является высокой; ее стандартное значение  $f_{пр} = 465$  кГц.

Полученный таким образом сигнал промежуточной частоты фильтруется в основном селективном устройстве — фильтре проме-

жуточной частоты *ФПЧ* и усиливается в усилителе промежуточной частоты *УПЧ*.

Радиоприемник с такой функциональной схемой (рис. 1.13, б) называется супергетеродинным приемником. В отличие от него радиоприемник с обычной функциональной схемой (рис. 1.13, а) называется приемником прямого усиления.

Преобразование частоты, как и детектирование, является нелинейным процессом. Возможно также параметрическое преобразование частоты, при котором используются элементы с переменными параметрами. Поэтому теория преобразования частоты изучается в курсе нелинейных и параметрических цепей. Конкретные же схемы преобразователей частоты изучаются в курсе радиоприемных устройств, чему предшествует рассмотрение специальных частотопреобразовательных ламп в курсе электронных приборов.

Из приведенного краткого обзора видно, что основные принципы приема радиосигналов, использованные в приемнике А. С. Попова, реализуются в современных радиоприемных устройствах не только с помощью более совершенных технических средств, но и при помощи более совершенных методов обработки принятых радиосигналов. Среди изобретателей, разрабатывавших новые методы радиоприема, следует отметить американского ученого Э. Х. Армстронга, советского ученого Е. Г. Момота и др. Развитию методов и техники радиоприема в значительной мере содействовали также работы чл.-корр. АН СССР В. И. Сифорова.

## **2. Отрасли радиотехники**

Первоначально радиотехника возникла как средство для осуществления телеграфной беспроводной электрической связи.

Первая публичная радиопередача (24 марта 1896 г.) была осуществлена на расстояние в 250 м. В 1889 г. А. С. Попов построил первую в мире телеграфную радиолинию протяженностью в 43 версты (52 км). Эта радиолиния между о. Гогланд и г. Котка была построена для организации спасательных работ по снятию с мели броненосца «Генерал-адмирал Апраксин».

Интересно отметить, что первая радиограмма, переданная 5 февраля 1900 г. накануне открытия радиолинии, содержала приказание ледоколу «Ермак» оказать помощь рыбакам, унесенным в море на оторвавшейся от берега льдине. Таким образом, одно из первых практических применений радио послужило для спасения человеческих жизней.

Своими дальнейшими работами А. С. Попов совместно со своим ассистентом П. Н. Рыбкиным значительно увеличил дальность радиосвязи, доведя ее в 1901 г. до 148 км.

Увеличению дальности радиосвязи способствовало изобретение А. С. Поповым угле-сталистого детектора и открытие П. Н. Рыб-

киным возможности слухового приема радиотелеграфных сигналов. Такой слуховой прием широко используется и в настоящее время.

Несмотря на то, что в России жил и работал творец радио, царское правительство в силу своей косности не развивало отечественную радиопромышленность и заказывало радиоаппаратуру иностранным фирмам. Последние же были вынуждены неоднократно обращаться за помощью к А. С. Попову. Некоторые из этих фирм пытались даже склонить его перейти к ним на службу. Но А. С. Попов был патриотом, считавшим, что как русский человек все свои знания и труд он имеет право отдать только своей родине. А. С. Попову не привелось увидеть дальнейшего прогресса радиотехники. Он скончался 31 декабря 1905 г., будучи в полном расцвете творческих сил. Косвенной причиной его преждевременной смерти явилось одно из неприятных объяснений с министром внутренних дел по поводу революционных выступлений студентов электротехнического института, директором которого был избран А. С. Попов.

После смерти А. С. Попова развитие радиотехники характеризуется прежде всего переходом от радиотелеграфии к радиотелефонии, который стал возможен с появлением электронной лампы.

Радиотелефонные станции стали практически применяться в годы первой мировой войны.

Таким образом сформировалась *первая отрасль современной радиотехники — радиосвязь*, содержанием которой является передача и прием телеграфных и телефонных сигналов в виде свободных электромагнитных волн.

Радиосвязь в настоящее время широко используется во всех отраслях народного хозяйства. Особенно широко применяется она в морском флоте, авиации и космонавтике, где другие виды связи просто невозможны.

Особой разновидностью радиосвязи является радиовещание, ведущее передачи публицистических, художественных и научно-технических программ для массового радиослушателя. В этом случае передача ведется лишь в одном направлении (см. рис. 1.11, а).

Радиовещание родилось в Советской России. Отставание России в развитии радиопромышленности, продолжавшееся вплоть до Октябрьской социалистической революции, сменилось при Советской власти бурным развитием отечественной радиотехники.

Еще в годы гражданской войны В. И. Лениным было подписано несколько декретов Совнаркома об организации радиолaborатории в Нижнем Новгороде, строительстве мощных радиостанций и т. д.

Благодаря заботе В. И. Ленина у нас впервые в мире была построена радиовещательная станция, которая провела первую передачу 17 сентября 1922 г. С тех пор Советский Союз прочно удерживает первенство не только по мощности отдельных радиовещательных станций, но и по их суммарной мощности.



С развитием технических средств радиоэлектроники радиотехника находит новые области применения.

*Второй отраслью современной радиотехники является телевидение*, которое осуществляет передачу и прием изображений с помощью радиотехнических средств.

Преобразование изображения в электрический сигнал и обратное преобразование основано на принципе строчной развертки изображения, который применялся еще для передачи изображений по проводным линиям связи. Для целей телевидения преобразование изображения в электрический управляющий сигнал возможно, например, путем прочерчивания передаваемой картины тонким световым (например, лазерным) лучом. При этом отраженный свет, падая на фотоэлемент, преобразуется в соответствующие электрические колебания. На выходе приемника преобразователь с помощью управляющего сигнала должен модулировать яркость светового луча, который, перемещаясь синхронно с развертывающим лучом передатчика, воссоздает на экране передаваемую картину.

Высококачественные телевизионные передачи стали возможны благодаря применению электроннолучевой трубки. Электронная система телевидения, в которой применялся фотоэлемент и электроннолучевая трубка, была изобретена в 1907 г. профессором Петербургского технологического института Б. Л. Розингом.

В приемной телевизионной трубке изображение создается не световым, а электронным лучом, перемещающимся по специальному экрану, светящемуся при бомбардировке его электронами. В передающей телевизионной трубке изображение проецируется на специальный экран, составленный из множества мельчайших фотоэлементов. При этом в различных точках экрана создаются заряды, пропорциональные силе падающего света; электронный же луч, перемещающийся по экрану, компенсирует эти заряды, создавая ток соответствующей величины (электрический управляющий сигнал).

Из сказанного видно, что функциональная схема телевизионного радиоканала в принципе не должна отличаться от функциональной схемы линии радиосвязи (см. рис. 1.11—1.13). Необходимо лишь применять специальные электрооптические или электронно-оптические преобразователи на входе передатчика и на выходе приемника. Однако некоторые специфические особенности телевидения, в частности необходимость синхронизации развертки в приемнике и передатчике, передача звукового сопровождения и др., приводят к усложнению функциональной схемы передатчика и приемника.

Телевидение сейчас широко проникло не только в быт, но также в промышленность и на транспорт, помогая управлять производственными процессами и службой движения. Телевидение незаменимо при многих научных исследованиях — в физике и технике, медицине и космонавтике и т. д. Начинает практиковаться использование телевизионных передач в учебном процессе — в хирургических

клиниках, в авиационных училищах (на летных тренажерах) и т. д. Широкие перспективы интенсификации движения самолетов открываются в связи с применением телевидения в диспетчерской службе аэропортов.

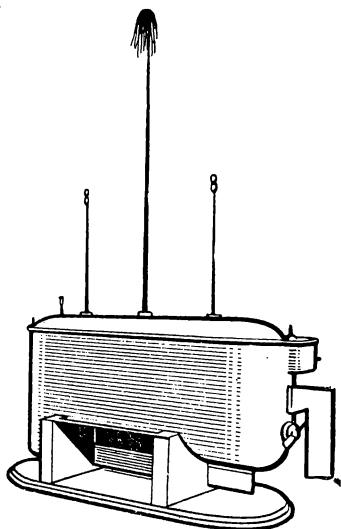
*Третьей отраслью современной радиотехники является радиотелемеханика.* Разновидностью радиотелемеханики является радиотелеуправление, в задачу которого входит управление на расстоянии различными объектами с помощью радиотехнических средств.

Функциональная схема радиолинии телеуправления принципиально не отличается от функциональной схемы линии радиосвязи (см. рис. 1.11—1.13). Отличительные же особенности этой схемы, обусловленные спецификой радиотелеуправления, заключаются в следующем. Преобразователь *Пр* на входе передатчика должен специальным образом кодировать команды управления, преобразуя их в электрические управляющие сигналы; преобразователь же *Пр* на выходе приемника должен разделять сигналы управления для приведения в действие соответствующих сервомеханизмов, управляющих объектом. Таким образом, радиолиния телеуправления должна содержать дополнительные селективные устройства для разделения сигналов управления. При этом селекция может быть основана на частотном, временном и других принципах разделения сигналов.

Первые опыты по радиотелеуправлению были проведены американским ученым сербского происхождения Н. Тесла. Его радиуправляемая модель корабля демонстрировалась на Нью-Йоркской ежегодной электротехнической выставке в сентябре 1898 г.

Радиотелемеханика в настоящее время широко используется для управления космическими кораблями и аппаратурой космических станций. Перспективным является использование радиотелеуправления в авиации для автоматизации посадки самолетов.

Близко к радиотелеуправлению примыкает другая разновидность радиотелемеханики — радиотелеизмерение, задачей которого является передача с помощью радиотехнических средств показаний различных измерительных приборов. Для осуществления радиотелеизмерений в качестве преобразователей на входе передатчика и выходе приемника используются соответствующие измерительные датчики и регистрирующие приборы.



Радиуправляемая модель корабля Н. Тесла (1898 г.)

Примерами использования радиотелеизмерения могут служить применение метеорологических радиозондов и ракет для измерения температуры, влажности и давления воздуха на разных высотах, передача различных измерительных данных по телеизмерительным радиоприемам с борта космических станций и др.

Некоторые свойства электромагнитных волн обусловили использование радиотехнических средств в специфических целях. Еще летом 1897 г., наблюдая отражение радиоволн от кораблей во время опытов по радиосвязи на Балтийском флоте, А. С. Попов указал на возможность использования этого явления для целей навигации.

*Радионавигация, обеспечивающая навигацию на флоте и в авиации с помощью радиотехнических средств, является четвертой отраслью современной радиотехники.*

Существуют различные радионавигационные средства. Простейшими радионавигационными приборами являются радиомаяки, которыми А. С. Попов рекомендовал дополнять обычные световые маяки. Радиомаяк представляет собой радиопередатчик, имеющий свои опознавательные сигналы. Радиомаяк, или приводная радиостанция, служит ориентиром для кораблей и самолетов, снабженных соответствующими радиоприемниками. В качестве радиомаяков могут использоваться и радиовещательные станции.

Выдерживать курс на радиомаяк можно с помощью другого радионавигационного устройства — радиополукомпаса. Радиополукомпас представляет собой радиоприемник, снабженный рамочной антенной направленного действия, которая закрепляется на самолете или корабле в определенном положении. О правильности курса на радиомаяк можно судить по показаниям стрелочного прибора на выходе радиополукомпаса.

Радиокompас в отличие от радиополукомпаса снабжен подвижной рамочной антенной и позволяет определять направление на радиомаяк при любом курсе самолета.

Еще одним радионавигационным средством является радиопеленгатор, устанавливаемый неподвижно на земле\*. Радиопеленгатор позволяет с помощью подвижной рамочной антенны определить направление на радиопередаточную станцию (пеленг радиостанции). По пеленгам двух радиопеленгаторов можно установить местонахождение потерявшего ориентировку самолета или корабля.

В настоящее время применяются специальные радионавигационные системы, которые позволяют решать и более сложные задачи: определять скорость движения корабля или самолета, вести автоматическую прокладку его курса, обеспечивать заход на посадку и непосредственно посадку самолета при отсутствии видимости земли.

---

\* Военные радиопеленгаторы разведывательного назначения с целью мобильности устанавливаются на автомашинах.

Навигацию помогает осуществлять также *радиолокация*, которая является пятой отраслью современной радиотехники. Задачей радиолокации является обнаружение и определение пространственных координат различных объектов с помощью радиотехнических средств.

В основе радиолокации лежит то же явление, которое А. С. Попов рекомендовал использовать для целей навигации, — отражение радиоволн от различных объектов. Первый радиолокатор (под названием телемобилоскоп) был описан в патентной заявке немецким инженером Х. Хилсмейером в 1904 г.

Принцип действия радиолокационной станции заключается в следующем. Радиолокационный передатчик посылает в пространство радиоволны, которые, отражаясь от какого-либо объекта, попадают в приемник, установленный рядом с передатчиком. Зная скорость распространения радиоволны  $c$ , по интервалу времени  $\Delta t$  между посылкой и возвращением радиосигнала можно измерить расстояние до этого объекта  $D = \frac{c\Delta t}{2}$ . При этом направ-

ление на обнаруженный объект можно определить, применяя остронаправленные антенны. Для удобства отсчета моментов посылки и возвращения радиолокационных сигналов последние формируются в виде кратковременных импульсов (существуют радиолокационные системы и с непрерывным излучением радиоволн). Изобретателем импульсной радиолокации является акад. Ю. Б. Кобзарев, который начал исследования в этом направлении в 1934 г.\*.

В качестве радиолокационных объектов, подлежащих обнаружению, могут служить, например, корабли на море, самолеты в воздухе, различные сооружения и предметы на земле; спутники Земли и межпланетные станции в космосе, различные астрономические тела и, в частности, планеты.

Радиолокация планет позволяет существенно уточнить их параметры (например, расстояние от Земли и скорость вращения), состояние атмосферы и т. д. Такие исследования, приобретающие особо важное значение в связи с развитием космических полетов, проводятся в нашей стране под руководством акад. В. А. Котельникова.

В авиации с помощью радиолокационных средств можно не только осуществлять навигацию, но и уточнять метеорологическую обстановку, выявляя грозовые фронты, а также получать на экране электроннолучевой трубки радиолокационное изображение земной поверхности при отсутствии видимости. Радиолокационные выото-

---

\* Следует отметить, что импульсные радиосигналы используются сейчас не только в радиолокации, но и в других отраслях радиотехники. Изучению способов формирования и преобразования импульсных сигналов посвящен курс импульсных устройств.

меры, устанавливаемые на самолете, позволяют с большой точностью определять истинную высоту полета.

Радиолокационные системы в авиации служат также для управления воздушным движением. Чтобы при необходимости можно было определить принадлежность обнаруженного самолета, его снабжают специальным радиолокационным ответчиком, который при приеме радиолокационных импульсов посылает свой закодированный импульсный ответ.

Из рассмотрения различных отраслей радиотехники видно, что радиотехнические устройства любого целевого назначения работают по общей функциональной схеме, изображенной на рис. 1.11, а (или рис. 1.11, б). При этом соответствующие радиопередающие и радиоприемные устройства работают по функциональным схемам, изображенным на рис. 1.12, 1.13.

Основываясь на общности функциональных схем, можно дать общее определение радиотехники: *радиотехникой называется отрасль науки и техники, задачей которой является получение высокочастотных модулированных сигналов и их передача в виде свободных электромагнитных волн, а также прием этих сигналов и их использование в соответствии с целевым назначением.*

Наряду с отраслями радиотехники, полностью отвечающими этому определению, во многих областях народного хозяйства используются в большей или меньшей степени различные принципы, методы и средства радиотехники. Некоторые из них выделились в самостоятельные отрасли науки и техники.

Широко известны, например, многообразные применения электронной, в частности, полупроводниковой и лазерной техники, получившей свое развитие прежде всего как одно из средств радиотехники. Усилители в дальней проводной связи и в проводном вещании, звукозапись и кино, ультразвуковая и электрическая дефектоскопия, аппаратура для физических, акустических и механических измерений, гидролокаторы для подводных лодок и каротажные локаторы для геофизических исследований, вычислительная техника, медицинская аппаратура — таков далеко не полный перечень применений электронной техники. Столь же широко применяются другие средства и методы радиотехники.

Работа гидролокаторов и некоторых типов ультразвуковых дефектоскопов, например, целиком основана на принципах и методах радиолокации. Развитые в радиотехнике методы модуляции используются сейчас в высокочастотной проводной телефонии. Детектирование используется в измерительной аппаратуре, селекция — в акустических исследованиях, частотные фильтры — в электромузыкальных инструментах, в устройствах блокировки и сигнализации на железной дороге и т. д. Импульсные устройства нашли применение не только в радиотехнике, но и в цифровых вычислительных машинах, в системах автоматического управления и т. д.

В качестве областей науки и техники, зародившихся на базе радиотехники и выделившихся в самостоятельные отрасли, можно привести радиоастрономию, задачей которой является изучение естественных радиоизлучений небесных тел. Радиоастрономию нельзя рассматривать как отрасль радиотехники, поскольку она не связана с получением и передачей модулированных сигналов.

Развилась и выделилась в самостоятельную отрасль также техника токов высокой частоты, которые используются в лечебных целях, для консервирования, пастеризации и приготовления пищевых продуктов, для сушки и склейки древесины, для закалки стальных изделий, для плавки металлов и для многих других целей. Советский Союз является ведущей в мире державой по промышленному использованию токов высокой частоты, применение которых не только резко повышает производительность труда, но и в значительной мере облегчает труд рабочего. Достаточно указать, что впервые в нашей стране оборудован кузнечный цех, в котором вся термическая обработка металла осуществляется с помощью токов высокой частоты. За разработку и внедрение высокочастотной поверхностной закалки металлических изделий группа конструкторов во главе с радистом чл.-корр. АН СССР В. П. Вологдиным удостоена в 1943 г. Государственной премии.

Специальные высокочастотные генераторы используются в ускорителях ядерных частиц (синхрофазотронах и др.). Такие устройства разрабатываются под руководством акад. А. Л. Минца.

Можно указать также на радиотехнический (интерференционный) метод особо точного определения расстояний, который лежит в основе одного из направлений радиолокации и используется при геодезических исследованиях. Изобретение и внедрение этого метода являются заслугой академиков Л. И. Мандельштама и Н. Д. Папалекси.

Перечень подобных примеров можно продолжать неограниченно. Но и приведенных примеров достаточно, чтобы оценить грандиозность величественного здания современной радиотехники, фундамент которого заложил наш соотечественник Александр Степанович Попов.

## **§ 1.4. ПРЕДМЕТ И ЗАДАЧИ КУРСА**

### **1. Сигналы и их свойства**

Поскольку задачей радиотехники является передача и прием сигналов, инженеру-радисту необходимо прежде всего изучить свойства этих сигналов.

Из предыдущей главы известно, что сигналы, используемые в радиотехнике, подразделяются на модулированные и управляющие. Первые являются высокочастотными, вторые — преимущест-

венно низкочастотными. И те и другие сигналы предназначены для переноса информации.

Информация, заключенная в управляющем сигнале, отображается законом его изменения во времени  $u_{\Omega}(t)$ . Информация, переносимая модулированным сигналом, определяется законом модуляции, т. е. законом изменения во времени модулируемого параметра высокочастотных колебаний  $U_m(t)$ ,  $\omega(t)$  или  $\psi(t)$ .

Таким образом, как управляющие, так и модулированные сигналы являются сложными колебаниями в отличие от гармонических (синусоидальных) колебаний, которые не включают в себе никакой информации (за исключением информации о том, что существует некоторый источник синусоидальных колебаний).

Однако сложные сигналы можно представить в виде суммы простейших гармонических колебаний. На такое свойство модулированных сигналов впервые обратил внимание в 1916 г. инженер (впоследствии академик) М. В. Шулейкин.

Это свойство легко устанавливается при анализе выражения (1.10), которое можно записать следующим образом:

$$u = U_{m0} \cos \omega_0 t + m U_{m0} \cos \omega_0 t \cos \Omega t.$$

Преобразуя произведение косинусов по известной тригонометрической формуле, получим

$$u = U_{m0} \cos \omega_0 t + \frac{m}{2} U_{m0} \cos (\omega_0 - \Omega) t + \frac{m}{2} U_{m0} \cos (\omega_0 + \Omega) t. \quad (1.12)$$

Таким образом, АМ-сигнал представляется в виде суммы трех высокочастотных гармонических колебаний с частотами  $\omega_0$ ,  $\omega_0 - \Omega$  и  $\omega_0 + \Omega$ .

Совокупность гармонических колебаний, образующих в сумме сложный сигнал, называется спектром этого сигнала, а сами колебания — спектральными, или гармоническими составляющими сигнала.

В спектре АМ-сигнала, как видно из соотношения (1.12), колебания с частотой управляющего сигнала  $\Omega$  вообще отсутствуют. Информация же, заключенная в АМ-сигнале, отображается колебаниями с частотами  $\omega_0 - \Omega$  и  $\omega_0 + \Omega$ , возникающими в процессе модуляции. Эти частоты, располагающиеся симметрично (по бокам) относительно частоты  $\omega_0$ , называются боковыми частотами, а соответствующие спектральные составляющие — боковыми составляющими. Частота  $\omega_0$  получила название несущей частоты, а соответствующая спектральная составляющая — несущей составляющей.

Возникает вопрос, насколько реальным является существование спектра сложного сигнала. Действительно ли при прохождении АМ-сигнала через радиотехнические устройства они должны пропускать не только колебания с несущей частотой, но и колебания

с боковыми частотами, или существование боковых гармонических составляющих АМ-сигнала есть математическая абстракция?

Ведь сложный сигнал можно представить математически не только в виде суммы гармонических составляющих, но и в виде, например, суммы прямоугольных колебаний. Какое же разложение на составляющие является правильным?

На вопрос, поставленный в такой форме, можно ответить, что правильными являются оба способа разложения, поскольку искомые колебания могут быть получены — и это можно проверить хотя бы графическим построением, — как суммированием гармонических составляющих, так и суммированием прямоугольных составляющих. Поэтому нужно говорить не о правильности того или иного разложения, а о его физической целесообразности.

Аналогично этому, например, лист железа может быть представлен как в виде суммы полосок (рис. 1.14, а), так и в виде суммы Ш-образных пластин (рис. 1.14, б).

И то и другое «спектральное разложение» является безусловно правильным. Вопрос только в том, какое из них считать целесообразным. Если производству нужны перемычки для трансформаторных сердечников, то целесообразно первое «разложение», если же требуются Ш-образные пластины для тех же сердечников, то предпочтительнее второе «разложение».

Существует большой класс радиотехнических устройств, которые обладают тем свойством, что при воздействии на их входе синусоидальных колебаний на выходе получаются также синусоидальные колебания с той же частотой. Это обстоятельство, существенно упрощая анализ работы таких устройств, свидетельствует о целесообразности представления сложных сигналов в виде суммы гармонических, а не каких-либо других составляющих. Сказанное относится не только к АМ-сигналам, но и к любым модулированным сигналам, а также к управляющим сигналам.

Вернемся к вопросу о реальности существования спектра сигнала. Подобно тому как «спектральное разложение» полосы железа определяется формой штампа, физическая реальность гармонических составляющих сложных сигналов обуславливается физическими свойствами системы, с которой взаимодействуют эти сигналы.

Если устройство, на входе которого действуют колебания с частотой  $\omega_0$  и меняющейся амплитудой, не пропускает колебаний

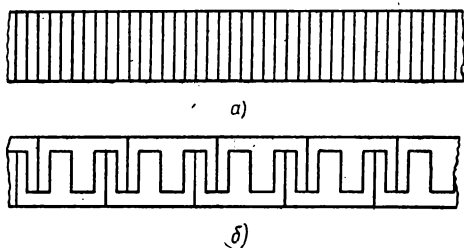


Рис. 1.14. «Спектральное разложение» полосы железа



с боковыми частотами, то на выходе этого устройства получатся гармонические (немодулированные) колебания с той же частотой  $\omega_0$ , но с постоянной амплитудой. При этом будет потеряна информация, отображаемая законом изменения амплитуды, т. е. информация, заключенная в боковых составляющих. Тем самым подтверждается реальность существования гармонических составляющих сигнала в рассматриваемом случае. Поэтому радиотехнические устройства должны обладать такими свойствами, чтобы они пропускали весь спектр сложного сигнала, модулированного или управляющего.

В то же время могут существовать такие устройства, которые физически реализуют не гармонические, а, например, прямоугольные колебания, являющиеся составляющими того же сложного сигнала. В этом случае следует говорить о реальном существовании спектра, состоящего из прямоугольных, а не синусоидальных колебаний. Однако готовых физических систем с такими свойствами нет, и их нужно создавать искусственно. Физические же системы, реакция которых при гармоническом воздействии проявляется также в виде синусоидальных колебаний с той же частотой и которые при определенных условиях могут выделять из сложных сигналов гармонические составляющие, встречаются повсеместно. Поэтому впредь будем полагать, что любые сложные сигналы состоят из гармонических составляющих разных частот, причем такой спектр существует реально в определенных физических системах, а не является математической абстракцией.

Интересно отметить, что реальность существования спектра сложных колебаний оспаривалась разными специалистами, в том числе и видными учеными, такими, как немецкий физик М. Планк, французский математик А. Пуанкаре и др. Однако такие взгляды ведут только в тупик. Недаром А. Пуанкаре, отрицавший реальность спектра, дошел вообще до отрицания реальности объективного мира, сформулировав свою точку зрения следующим образом: «Все, что не есть мысль, есть чистое ничто, ибо мы не можем мыслить ничего, кроме мысли». В. И. Ленин в связи с этим уничижительно замечает: «Ошибаетесь, г. Пуанкаре: ваши произведения доказывают, что есть люди, которые могут мыслить только бессмыслицу» \*.

## 2. Искажения и преобразования сигналов

При прохождении через радиотехнические устройства сигналы претерпевают различные изменения: вместо сигнала  $u_{вх} = u(t)$ , действующего на входе устройства, на его выходе получается сигнал  $u_{вых} = u'(t) \neq u(t)$ .

Любые изменения сигнала сопровождаются соответствующим изменением его спектра. При этом возможны два принципиально

---

\* В. И. Ленин. Собр. соч., т. 18, стр. 310.

различных вида изменения спектра. При одних изменениях сигнала, называемых нелинейными, в составе спектра появляются гармонические составляющие с новыми частотами, которых не было на входе устройства (при этом, разумеется, имеется в виду, что внутри самого устройства отсутствуют источники каких-либо колебаний). В другом случае, когда в составе спектра не появляются гармонические составляющие с новыми частотами, изменения сигнала называются линейными.

Типичным примером нелинейных изменений сигнала является изменение формы синусоидальных колебаний. Пусть синусоидальные колебания, изменившись по форме, превратились, например, в прямоугольные колебания. Эти новые колебания, как и любой сигнал сложной формы, могут быть представлены в виде суммы гармонических колебаний разных частот. Таким образом, в составе спектра измененного сигнала появились гармонические составляющие с новыми частотами, что и означает нелинейные изменения сигнала.

В случае линейных изменений сигнала могут изменяться амплитуды и начальные фазы его гармонических составляющих при сохранении их синусоидальной формы. Очевидно, что при таких изменениях спектра в его составе не появляются составляющие с новыми частотами.

Выше указывалось, что сигналы переносят заключенную в них информацию. Эта информация может нарушаться или оставаться неизменной при различных изменениях сигналов.

Изменения сигнала, приводящие к нарушению заключенной в нем информации, называются искажениями сигнала. Если же информация, заключенная в сигнале, остается неизменной, то происходящие при этом изменения называются преобразованиями сигнала.

Преобразования сигнала являются полезными изменениями и повсеместно применяются в различных радиотехнических устройствах. Что касается искажений сигналов, то они или вообще недопустимы, или не должны превышать некоторой предельной величины, зависящей от целевого назначения сигналов.

Если, например, при телеграфной или телефонной связи искажается смысл телеграммы или устного сообщения, то такие искажения безусловно недопустимы. Недопустимо также, чтобы в результате искажений сигналов в линии телеуправления, например, исполнительный механизм обрабатывал другую команду. В то же время при телефонной связи допустимо в ряде случаев, что знакомые абоненты не узнают друг друга по голосу, хотя смысл разговора не искажается. Аналогично в телевидении допустимы некоторые искажения изображения на экране, если они не нарушают зрительного восприятия. В радиолокации некоторые ошибки в определении координат цели, происходящие в результате искажений сигналов, также являются допустимыми, если они не превышают заданной нормы, и т. д.

В соответствии с приведенной классификацией сигналы при прохождении через то или иное радиотехническое устройство могут претерпевать линейные и нелинейные искажения или подвергаться линейным и нелинейным преобразованиям. Рассмотрим подробнее эти виды изменений сигнала.

Типичным примером изменения сигнала является изменение его амплитуды:  $u'(t) = Ku(t)$ , где  $K$  — некоторый постоянный коэффициент. Другим примером является любой сдвиг сигнала во времени:  $u'(t) = u(t + \tau)$ , где  $\tau$  — произвольная постоянная величина (при запаздывании сигнала  $\tau < 0$ ). В обоих примерах информация, заключенная в сигнале, может оставаться неизменной.

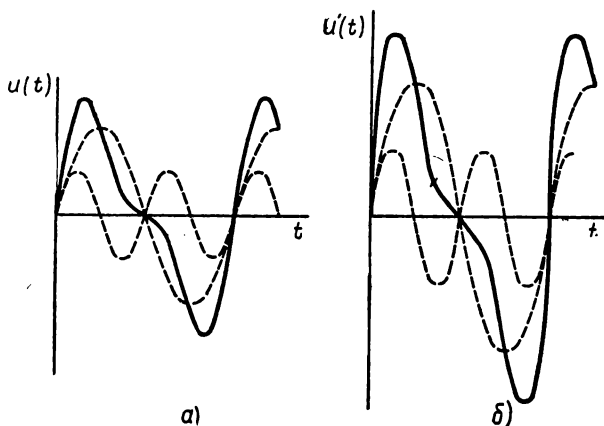


Рис. 1.15. Изменение амплитуды сигнала

Поэтому изменение амплитуды сигнала и сдвиг его во времени могут относиться к категории преобразований сигнала. Покажем теперь, что такие преобразования сигнала могут быть линейными.

На рис. 1.15, а показан некоторый сигнал  $u(t)$  и пунктиром изображены его гармонические составляющие [сигнал  $u(t)$  может быть получен простым сложением по точкам синусоидальных кривых]. На рис. 1.15, б амплитуды гармонических составляющих увеличены в 1,5 раза (без изменения состава спектра), что привело к соответствующему изменению амплитуды сигнала  $u'(t)$  в сравнении с амплитудой сигнала  $u(t)$ .

На рис. 1.16, а повторен тот же сигнал, что и на рис. 1.15, а. На рис. 1.16, б изменены начальные фазы его гармонических составляющих (без изменения состава спектра), что привело к запаздыванию сигнала на время  $\tau$ .

Итак, доказано, что изменение амплитуды сигнала и его сдвиг во времени *могут* быть отнесены к линейным преобразованиям сигнала. Пока остается недоказанным, что рассмотренные изменения

должны быть отнесены к линейным преобразованиям. Такое доказательство требует более детального рассмотрения вопроса, что и является одной из задач настоящего курса.

Можно также привести пример линейного преобразования АМ-сигнала. Если в выражении (1.12) изменить начальные фазы

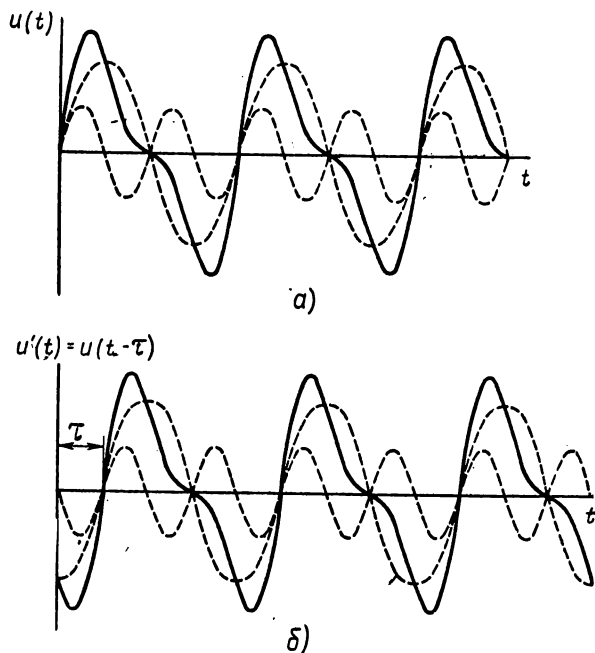


Рис. 1.16. Сдвиг сигнала во времени

всех спектральных составляющих на произвольную одинаковую величину  $\psi$ , то АМ-сигнал изменится следующим образом:

$$u = U_{m0} \cos(\omega_0 t + \psi) + \frac{m}{2} U_{m0} \cos(\omega_0 t + \psi - \Omega t) + \\ + \frac{m}{2} U_{m0} \cos(\omega_0 t + \psi + \Omega t),$$

или

$$u = U_{m0} (1 + m \cos \Omega t) \cos(\omega_0 t + \psi). \quad (1.13)$$

Из сравнения выражений (1.10) и (1.13) видно, что рассматриваемые сигналы отличаются лишь начальной фазой несущей, а закон модуляции для них остается одинаковым. Следовательно, при изменении начальных фаз всех спектральных составляющих на одинаковую величину нарушения информации не происходит, поскольку в модулированном сигнале информация отображается

законом модуляции. Поэтому такие изменения относятся к линейным преобразованиям сигнала.

Примерами нелинейных преобразований сигналов могут являться модуляция и детектирование. При амплитудной модуляции, например, на входе модулирующего устройства спектр содержит колебания с частотами  $f_0$  и  $F$ , а на выходе — с частотами  $f_0$  и  $f_0 \pm \pm F$ . При детектировании АМ-сигнала, содержащего составляющие с частотами  $f_0$  и  $f_0 \pm F$ , получается управляющий сигнал с частотой  $F$ . В обоих случаях в составе спектра преобразованного сигнала появляются составляющие с новыми частотами, но информация, заключенная в сигнале, сохраняется неизменной (хотя она отображается различным образом в управляющем и модулированном сигналах). Поэтому модуляцию и детектирование следует отнести к нелинейным преобразованиям сигналов.

Рассмотрим теперь искажения сигналов. Из предыдущего изложения следует, что к категории нелинейных искажений сигнала относятся такие искажения, которые сопровождаются изменением формы его гармонических составляющих. В частности, если изменение формы синусоидальных колебаний связано с изменением информации, заключенной в этих колебаниях, то такое изменение является нелинейным искажением \*.

Если же изменения спектра, приводящие к искажениям сигнала, происходят без изменения формы гармонических составляющих, то получающиеся при этом искажения называются линейными. Причиной искажений сигнала в этом случае могут явиться, например, изменения амплитуд отдельных гармонических составляющих сигнала. Это наглядно видно из рис. 1.17, где пунктирными линиями показаны гармонические составляющие сложного сигнала, а сплошными линиями — сам сигнал, являющийся суммой этих составляющих. На рис. 1.17, б гармонические составляющие сигнала на выходе изменены по амплитуде относительно тех же составляющих на входе (рис. 1.17, а). При этом сложение измененных гармонических составляющих дает на выходе цепи сигнал измененной формы по сравнению с сигналом на входе. Это и означает искажение сигнала, если информация отображается формой сигнала.

Линейные искажения сложных сигналов, вызванные изменением амплитуд гармонических составляющих разных частот, называются амплитудно-частотными, или частотными, искажениями. Последнее название более распространено, хотя и является менее удачным. Необходимо подчеркнуть, что термин «частотные искажения» не означает изменения частоты сигнала, как это следует из определения. Действительно, при линейных искажениях, разновидностью которых

---

\* Здесь имеются в виду синусоидальные колебания, продолжающиеся ограниченное время, в отличие от гармонических колебаний, неограниченных во времени ( $-\infty \leq t \leq \infty$ ), поскольку такие гармонические колебания не заключают в себе никакой информации.

являются и частотные искажения, состав спектра не меняется, гармонические составляющие с новыми частотами не возникают и, следовательно, частота сигнала не меняется. Это видно и из рис. 1.17, где период сигнала  $T$  и соответственно его частота  $F = \frac{1}{T}$  остаются без изменения при частотных искажениях.

Итак, при частотных искажениях частота сигнала не меняется. Однако имеется частный случай, когда частотные искажения сопровождаются изменением состава спектра и соответственно изменением частоты сигнала. Это происходит в том случае, когда при прохождении сигнала через цепь отдельные гармонические составляющие сигнала исчезают, т. е. их амплитуда изменяется от некоторого конечного значения до нуля. Например, при исчезновении гармо-

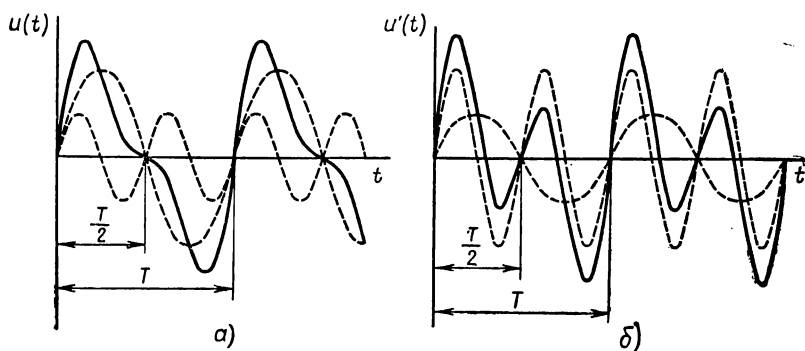


Рис. 1.17. Частотные искажения сложного сигнала

нической составляющей с периодом  $T$  (см. рис. 1.17, а) оставшаяся на выходе спектральная составляющая с периодом  $T' = \frac{T}{2}$  представляет собой колебания с частотой  $F' = \frac{1}{T'} = \frac{2}{T} = 2F$ .

Кроме изменения амплитуд спектральных составляющих сигнала, причиной линейных искажений могут являться и изменения начальных фаз этих составляющих.

Линейные искажения сложных сигналов, обусловленные изменением начальных фаз гармонических составляющих разных частот, называются фазо-частотными, или фазовыми искажениями.

Возникновение фазовых искажений показано на рис. 1.18. На рис. 1.18, а изображен такой же входной сигнал, как и на рис. 1.17, а. Изменение формы сигнала на рис. 1.18, б обусловлено изменением начальной фазы спектральной составляющей с периодом  $\frac{T}{2}$  при неизменных амплитудах обеих составляющих сигнала. Отож-

дествляя изменение формы сигнала с нарушением заключенной в нем информации, приходим к выводу о появлении фазовых искажений сигнала.

В общем случае линейные искажения бывают обусловлены одновременным изменением амплитуд и начальных фаз спектральных составляющих сигнала.

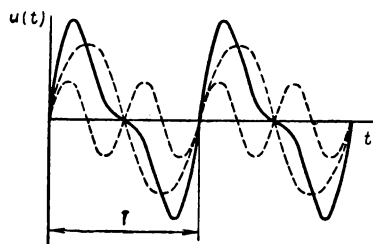
Выше было использовано понятие формы сигнала, которое полезно рассмотреть более подробно. О различных сигналах  $u(t)$  и  $u'(t')$  говорят, что они имеют одинаковую форму, если при графическом изображении они могут быть совмещены друг с другом в случае линейного преобразования координат  $u'$  и  $t'$  ( $u$  и  $t$ ), т. е. при соответствующем изменении масштаба и переносе по координатным осям одного из сигналов.

Другими словами, если соблюдаются условия

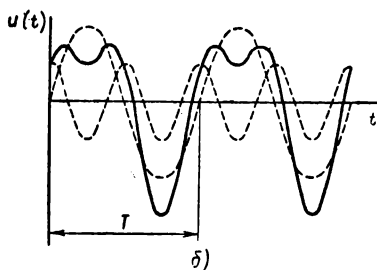
$$u'(t') = U + Ku(t'), \quad t' = kt + \tau, \quad (1.14)$$

$$U = \text{const}, \quad K = \text{const} \neq 0, \quad k = \text{const} \neq 0,$$

$$\tau = \text{const},$$



a)



b)

Рис. 1.18. Фазовые искажения сложного сигнала

то сигналы  $u'(t')$  и  $u(t)$  имеют одинаковую форму. Таким образом, под формой сигнала  $u(t)$  следует понимать закон его изменения во времени, отображенный произвольной линейной модификацией (1.14).

Если информация, заключенная в сигнале, отображается его формой, то изменение формы сигнала означает искажения. Такое соответствие между формой сигнала и его искажениями соблюдается для большинства управляющих сигналов. Однако существуют и такие сигналы, изменение формы которых не приводит к искажениям. Например, если в АМ-сигнале синусоидальные колебания с пе-

ременной амплитудой преобразуются по форме в треугольные колебания с тем же законом изменения амплитуды, то информация, заключенная в сигнале, при этом не нарушается, т. е. искажения отсутствуют. Таким образом, изменение формы сигнала может относиться как к искажениям, так и к преобразованиям сигнала.

С другой стороны, изменения формы сигнала могут происходить как при линейных, так и при нелинейных изменениях сигнала. Примером могут служить линейные искажения сложных сигналов и изменения формы синусоидальных колебаний, относящиеся к категории нелинейных изменений. В то же время линейные и нелинейные изменения сигналов могут не сопровождаться изменением их формы, как, например, при сдвиге сигналов во времени и изменении частоты синусоидальных колебаний (без нарушения их синусоидальной формы).

Из приведенных примеров видно, что при различных, но сходных изменениях спектра сигнал может или искажаться или пре-

терпевать некоторые преобразования без нарушения информации. Как же сформулировать условия, при соблюдении которых отсутствуют искажения сигналов?

Ответить на это поможет настоящий курс, в котором рассматриваются свойства различных сигналов и их изменения при прохождении через радиотехнические устройства. Эти вопросы изложены в гл. 10, 11 и 12, которым предшествует изучение свойств радиотехнических устройств, влияющих на прохождение сигналов.

### **3. Электрические и радиотехнические цепи**

В предыдущем параграфе было показано, что в авиации используются радиотехнические устройства различного назначения — связные, навигационные и др. Поэтому инженер по эксплуатации авиационного радиооборудования должен быть специалистом широкого профиля, т. е. должен знать все отрасли радиотехники. Для этого необходимо прежде всего изучить общие свойства элементов, из которых komponуются радиотехнические устройства, а также свойства различных соединений этих элементов независимо от их конкретного использования.

Абстрагируясь от конкретных радиотехнических устройств, будем рассматривать в общем виде электрические и радиотехнические цепи, из которых состоят эти устройства.

Электрической цепью называется совокупность соединенных между собой источников и потребителей электрической энергии. Источники и потребители энергии называются элементами цепи.

Физическая природа элементов цепи может быть самой различной. Например, к источникам энергии относятся химические источники постоянного тока (электрические батареи, аккумуляторы) и источники управляющих сигналов в радиопередатчиках (микрофоны), машинные генераторы переменного тока, устанавливаемые на электростанциях, и приемные антенны, являющиеся источником сложных электрических сигналов для любого радиоприемного устройства. Примерами потребителей энергии могут служить осветительная лампа и телефон, электрический мотор и передающая антенна и т. д.

При рассмотрении процессов в электрических цепях не является существенным, какова физическая природа источников и потребителей энергии. Например, при анализе работы цепей с триодом безразлично, подводятся ли постоянные напряжения к его электродам от батарей или от выпрямителя, если эти напряжения одинаковы. Аналогично при определении тока в цепи, содержащей некоторый источник, безразлично, какова физическая природа потребителей энергии, если в количественном отношении энергия потреб-



ляется ими одинаково. При этом потребителем может служить и элемент типа осветительной лампы, в которой энергия расходуется на нагрев спирали, и устройство в виде передающей антенны, в которой энергия «улетучивается» вместе с излучаемыми электромагнитными волнами.

Из приведенных примеров можно сделать вывод о том, что между электрическими и радиотехническими цепями нет принципиального различия, поскольку процессы в цепи могут быть совершенно одинаковыми, если она содержит и такой сугубо радиотехнический элемент, как передающая антенна, и такой элемент классической электротехники, как осветительная лампа. Таким образом, если и существует какое-то различие между электрическими и радиотехническими цепями, то его нельзя свести лишь к различию в физической природе используемых элементов. Не является определяющим при оценке такого различия и целевое назначение электрических и радиотехнических цепей.

Однако между электрическими и радиотехническими цепями имеется и существенное различие, которое заключается в разном характере протекающих в них процессов, в разном режиме их работы. В электрических цепях используются преимущественно постоянные и синусоидальные напряжения и токи, причем переменные напряжения и токи имеют, как правило, низкую частоту: 50 *гц* — в промышленных электросетях, 400 *гц* — в электрических бортовых сетях самолета и др.

В радиотехнических цепях определяющим является использование напряжений и токов сложной формы (управляющих и модулированных сигналов). При этом существенное значение имеют различные искажения и преобразования сигналов, с которыми не приходится сталкиваться в электрических цепях. Кроме того, в отличие от электрических цепей в радиотехнических цепях используются переменные напряжения и токи более высоких частот, в частности высокочастотные колебания. Повышение же частоты колебаний может привести к принципиально новым особенностям, как это следует, например, из рассмотрения излучающего проводника.

Таким образом, под радиотехническими цепями следует понимать совокупность соединенных между собой источников и потребителей электрической энергии, работающих в широком диапазоне частот переменных напряжений и токов, имеющих сложную форму.

При определении же электрических цепей следует принять во внимание, что используемые в них постоянные и синусоидальные напряжения и токи можно рассматривать как частный случай сигналов сложной формы, в состав спектра которых входят и синусоидальные колебания, и постоянная составляющая. Поэтому в дальнейшем изложении электрические цепи рассматриваются как частный случай радиотехнических цепей.

#### 4. Классификация цепей по видам элементов

Элементы цепи, даже имеющие одинаковую физическую природу, могут обладать различными свойствами. Свойства элементов характеризуются определенными параметрами, например величиной сопротивления, которое оказывает элемент протекающему через него току. Эти свойства и параметры рассматриваются в гл. 2. Однако и без конкретного рассмотрения параметров элементов можно охарактеризовать некоторые их общие свойства, которые положены в основу классификации элементов и цепей.

Одним из основных свойств элементов является характер их реакции на протекающий через них ток или приложенное к ним напряжение.

Если свойства (параметры) элементов зависят от величины и направления (или полярности) тока или напряжения, то такие элементы называются нелинейными. Нелинейными цепями называются цепи, содержащие хотя бы один нелинейный элемент.

В настоящем курсе изучаются линейные цепи, которые состоят только из линейных элементов. Линейными называются такие элементы, свойства (параметры) которых не зависят от величины и направления (или полярности) тока или напряжения. Иногда такие элементы (и составленные из них цепи) называют линейными элементами (цепями) с постоянными параметрами, подчеркивая тем самым, что их свойства (параметры) не изменяются во времени.

Однако существуют и такие линейные элементы, свойства (параметры) которых изменяются во времени под воздействием каких-либо факторов, не связанных непосредственно с протекающими токами или приложенными напряжениями. Такие элементы называются линейными элементами с переменными параметрами, или параметрическими элементами. Цепи, содержащие хотя бы один параметрический элемент, называются линейными цепями с переменными параметрами, или параметрическими цепями. Параметрические цепи обладают рядом свойств, сходных со свойствами нелинейных цепей. Например, нелинейные преобразования сигналов возможны как в нелинейных, так и в параметрических цепях. Поэтому нелинейные и параметрические цепи изучаются вместе в отдельном курсе.

Следует, однако, отметить, что нелинейные и параметрические цепи содержат также линейные элементы с постоянными параметрами. Поэтому изучение нелинейных и параметрических цепей невозможно без знания линейных цепей с постоянными параметрами, которые рассматриваются в настоящем курсе.

Как отмечалось, с переменными токами, протекающими через элементы цепи, связано переменное электромагнитное поле, имеющее волновой характер. Если все три линейных размера, которыми характеризуется любой физический элемент ( $l_1$ ,  $l_2$ ,  $l_3$ ),

пренебрежимо малы в сравнении с длиной волны  $\lambda = \frac{c}{f}$  ( $l_1 \ll \lambda$ ,  $l_2 \ll \lambda$ ,  $l_3 \ll \lambda$ ), то такой элемент получается как бы сосредоточенным

в одной точке связанного с ним волнового поля. Такие элементы (и состоящие из них цепи) называются элементами (цепями) с сосредоточенными параметрами. Свойства цепей с сосредоточенными параметрами изучаются в гл. 4, 5 и 7, которым предшествует рассмотрение методов расчета таких цепей в гл. 3.

Если для одного из линейных размеров элемента указанное выше соотношение с длиной волны не выполняется, то различные сечения элемента в соответствующем направлении оказываются под воздействием поля разной величины (так как поле волнообразно изменяется в пространстве). Это существенно влияет на характер процессов в элементе, который в данном случае называется элементом с линейно-распределенными параметрами, или просто элементом с распределенными параметрами.

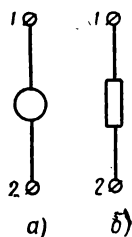


Рис. 1.19.  
Условное  
изображение  
элементов  
цепи

Следует учитывать, что в цепи с сосредоточенными параметрами и соединительные провода между элементами не должны образовывать систему с распределенными параметрами, т. е. размеры этих проводов и расстояние между ними должны быть пренебрежимо малы по сравнению с длиной волны. Если же цепь содержит хотя бы один элемент с распределенными параметрами или соединительные провода образуют систему с распределенными параметрами, то получается цепь с распределенными параметрами. К таким цепям относятся, в частности, фидеры. Цепи с распределенными параметрами изучаются в гл. 8.

Существуют также элементы, у которых два или все три линейных размера не являются пренебрежимо малыми в сравнении с длиной волны. Такие элементы и содержащие их цепи называются системами с объемно-распределенными параметрами. При анализе систем с объемно-распределенными параметрами необходимо рассматривать не напряжения и токи, а параметры, характеризующие электромагнитное поле, связанное с этими системами. Поэтому системы с объемно-распределенными параметрами изучаются в курсе теории электромагнитного поля.

Поскольку физическая природа элементов не является существенной при анализе процессов в цепях, все источники энергии объединяются под названием активных элементов и обозначаются в соответствии с рис. 1.19, а. Потребители энергии независимо от их физической природы называются пассивными элементами и обозначаются в соответствии с рис. 1.19, б. Для пассивных элементов разного вида применяются специальные обозначения, которые рассматриваются ниже.

Концы элементов, обозначенные на рис. 1.19 цифрами 1 и 2, называются зажимами, или полюсами элементов.

Цепи, содержащие хотя бы один активный элемент, называются активными. Ряд свойств цепей можно рассматривать и без включения источников энергии. Цепи, состоящие только из пассивных элементов, называются пассивными.

Пассивные элементы различаются по способу потребления ими энергии.

Пассивные элементы, в которых энергия расходуется (рассеивается) необратимо, называются диссипативными элементами\*. Иногда используется также старое название таких элементов — активное сопротивление (не смешивать с активным элементом!). Расход энергии в диссипативных элементах обусловлен ее необратимым переходом в другие виды энергии (тепловую, световую и т. д.). Для диссипативного элемента принято такое же обозначение, как и для пассивного элемента в общем случае (рис. 1.20, а).

Цепи, в которых происходит необратимое расходование энергии, т. е. цепи, содержащие хотя бы один диссипативный элемент, называются диссипативными цепями, или цепями с потерями.

Любые реальные цепи являются диссипативными. Однако во многих случаях при исследовании процессов в цепях потерями энергии пренебрегают. В этих случаях говорят об идеальных пассивных элементах, в которых энергия источника не расходуется необратимо, а накапливается и может затем возвращаться в цепь. Накопление энергии осуществляется либо в электрическом поле элемента (например, в конденсаторах), либо в магнитном поле элемента (например, в катушках индуктивности). Такие элементы называются реактивными.

Реактивный элемент с накоплением энергии в электрическом поле называется емкостью, а также электрическим, или емкостным накопителем (элементом). Условное обозначение емкостного элемента показано на рис. 1.20, б.

Реактивный элемент с накоплением энергии в магнитном поле называется индуктивностью, а также магнитным, или индуктивным накопителем (элементом). Условное обозначение индуктивного элемента показано на рис. 1.20, в.

Цепи, содержащие только реактивные элементы, называются реактивными.

Реактивные цепи с сосредоточенными и распределенными параметрами составляют основу устройств частотной селекции (частотных фильтров), которые изучаются в гл. 9.

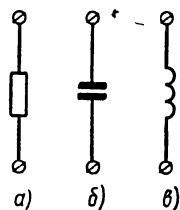


Рис. 1.20. Условное изображение пассивных элементов

\* От слова «dissipate» (англ.) — рассеивать.

## 5. Классификация цепей по видам соединений элементов

Соединения элементов в цепях бывают весьма многообразными. Для примера на рис. 1.21 показана сложная цепь, состоящая из 13 элементов.

Места электрического соединения элементов (проводов) обозначаются на схеме точками (точки *а—з*). Пересечение проводов, не отмеченное точкой, означает, что электрическое соединение элементов в этом месте отсутствует (например, в точке пересечения проводов от элементов 7 и 8 на рис. 1.21).

Если подобные пересечения в схеме могут быть устранены (без изменения электрических соединений), то схема называется планарной (плоской). Например, схема рис. 1.21 является планарной,

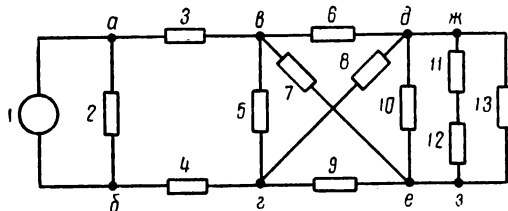


Рис. 1.21. Схема сложной цепи

поскольку элемент 7, через который соединяются точки *в* и *е*, можно расположить во внешней части схемы, проведя соединительный провод вокруг элементов 6 и 13. Однако не всякая схема может быть представлена в планарном виде. Непланарной, например, является рассматриваемая ниже схема на рис. 1.25.

Точка, в которой электрически соединяются три и более элементов, называется узлом цепи. На рис. 1.21 узлами цепи являются точки *а*, *б*, *в*, *г*, *д — ж*, *е — з*. Пара точек *д — ж* образует узел, в котором соединяются элементы 6, 8, 10, 11, 13. Аналогично пара точек *е — з* также образует один узел. Таким образом, на схеме не всегда обозначенное точкой соединение эквивалентно узлу. Один узел может образовываться несколькими точками, соединенными проводниками накоротко между собой.

Участок цепи между двумя узлами, не разделенный каким-либо третьим узлом, содержащий элементы, по которым протекает один и тот же ток, называется ветвью. На рис. 1.21, например, между узлами *а* и *б* включены две ветви, содержащие элементы 1 и 2; участок же, соединяющий узлы *а* и *б* через элементы 3, 5, 4, не является ветвью, так как указанные элементы разделены узлами *в* и *г*. Узлы *д(ж)* и *е(з)* соединены тремя ветвями с элементами 10, 11—12 и 13.

Совокупность ветвей, образующих замкнутый путь для тока, называется контуром цепи. На рис. 1.21, например, контуры образуются ветвями с элементами 1—2, 1—3—5—4, 1—3—6—8—4, 1—3—7—9—4, 1—3—6—10—9—4, 1—3—6—11—12—9—4, 1—3—6—13—9—4, 2—3—5—4, 2—3—6—8—4 и т. д. (всего 27 контуров).

В любых сложных цепях всегда можно выделить группы элементов, соединенных между собой простейшим образом — по определенным правилам. К таким простейшим соединениям относятся последовательное и параллельное соединения, а также соединения звездой и многоугольником.

Последовательным называется такое соединение элементов, при котором через них протекает один и тот же ток  $i$ , как показано на рис. 1.22, а для пассивной цепи и на рис. 1.22, б — для активной цепи. На рис. 1.21 последовательно соединены элементы 11 и 12.

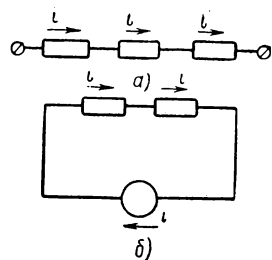


Рис. 1.22. Последовательное соединение элементов

Последовательно соединенные элементы могут разделяться группой других элементов. Например, на рис. 1.21 последовательно соединенные элементы 3 и 4 разделены группой элементов 1 и 2.

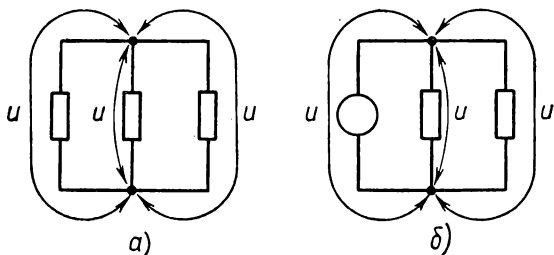


Рис. 1.23. Параллельное соединение элементов

При таком последовательном соединении ток, протекающий через элемент 3, разветвляется в точке  $a$ . Составные части этого тока, пройдя через элементы 1 и 2, вновь сливаются в точке  $b$ , образуя прежний ток, который и протекает через элемент 4. Таким образом, через элементы 3 и 4 протекает один и тот же ток, что свидетельствует об их последовательном соединении.

Параллельным называется такое соединение элементов, при котором к их зажимам приложено одно и то же напряжение  $u$ , как показано на рис. 1.23, а для пассивной цепи и на рис. 1.23, б — для активной цепи. Параллельное соединение можно определять так же, как такое соединение элементов, при котором их зажимы соединяются попарно. На рис. 1.21 параллельно соединены элементы 1

и 2, а также элементы 10 и 13. В последнем случае разделение элементов 10 и 13 группой элементов 11 и 12 не нарушает параллельности соединения.

При определении типа соединения элементов некоторые студенты не видят различия в терминах «один и тот же» и «одинаковый». Таким студентам рекомендуем внимательно рассмотреть схему на рис. 1.21. В силу симметрии этой схемы через элементы 6 и 9 может протекать одинаковый ток. Но эти элементы не соединены последовательно. Аналогично они не соединены и параллельно, хотя к ним может быть приложено одинаковое напряжение.

Соединение звездой образуют элементы, соединенные в одном узле и не имеющие других общих узлов (рис. 1.24).

Цепь, изображенная на рис. 1.21, содержит две четырехлучевые звезды, образованные элементами 3, 5, 6, 7 и 4, 5, 8, 9. Элементы 1, 2, 3, соединенные в узле *a*, не образуют звезду, так как элементы 1

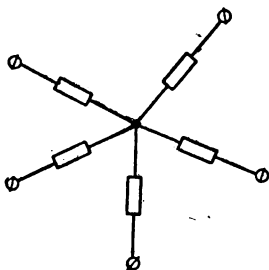


Рис. 1.24. Соединение элементов звездой

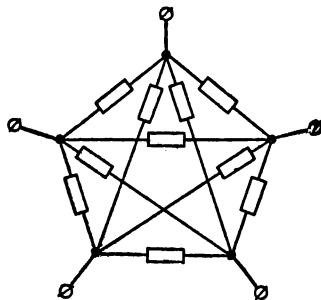


Рис. 1.25. Соединение элементов многоугольником

и 2 имеют второй общий узел *b*. В узлах  $\partial(j)$  и  $e(z)$  также невозможно выделить звезду, поскольку здесь имеются элементы 10 и 13 с двумя общими узлами \*.

Многоугольником называется часть цепи, содержащая три и более узлов, которые попарно соединены ветвями во всех возможных сочетаниях. При этом каждая пара узлов должна соединяться одной ветвью \*\*.

Пример соединения элементов многоугольником показан на рис. 1.25. На рис. 1.21 многоугольник образуют элементы 5, 6, 7, 8, 9, 10 (или 13, или 11—12).

Если в схеме имеются элементы, соединенные несколькими простейшими способами, то такое соединение называется смешан-

\* После объединения параллельно соединенных элементов 10, 13 методом, рассмотренным в гл. 2, выделение звезды в этих узлах становится возможным.

\*\* При наличии параллельных ветвей, соединяющих два узла, они могут быть объединены в одну ветвь (см. гл. 2).

ным, а цепь — сложноразветвленной. Методы расчета сложноразветвленных цепей описываются в гл. 3.

Из предыдущего рассмотрения видно, что различные участки цепи могут иметь разное число зажимов или узлов, через которые текут и вытекают токи или к которым подводится напряжение. В простейшем случае схема (участок цепи) имеет два зажима (полюса), как, например, на рис. 1.22, а и 1.23, а. Такие цепи называются двухполюсниками и условно изображаются так же, как и пассивные элементы (см. рис. 1.19, б). Двухполюсниками являются, в частности, все ветви любой цепи; в общем случае двухполюсником может быть и сложноразветвленная цепь. Свойства двухполюсников с сосредоточенными и распределенными параметрами изучаются соответственно в гл. 5 и 8.

В наиболее общем случае схема (участок цепи) имеет  $n$  входных и выходных зажимов (полюсов). Такие цепи называются  $n$ -полюсниками, или многополюсниками. Примерами многополюсников являются звезда (см. рис. 1.24) и многоугольник (см. рис. 1.25).

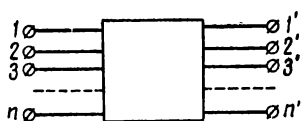


Рис. 1.26. Условное изображение  $2n$ -полюсника

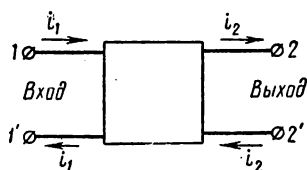


Рис. 1.27. Условное изображение четырехполюсника ( $2 \times 2$ -полюсника)

Практически важными являются такие случаи, когда многополюсник имеет одинаковое число входных и выходных зажимов. Условное обозначение таких многополюсников, называемых  $2n$ -полюсниками, показано на рис. 1.26.

В радиотехнике наиболее часто встречаются четырехполюсники с парой входных и парой выходных зажимов ( $2 \times 2$ -полюсники). Условное обозначение такого четырехполюсника показано на рис. 1.27.

Отличительной особенностью четырехполюсников с парными входными и выходными зажимами является равенство втекающих и вытекающих токов как на входе, так и на выходе цепи.

Общие свойства подобных четырехполюсников рассматриваются в гл. 6. При этом рассмотрение четырехполюсников с парными зажимами распространяется и на случай  $2n$ -полюсников. Конкретные виды четырехполюсников с сосредоточенными и распределенными параметрами изучаются соответственно в гл. 7 и 8. В дальнейшем изложении четырехполюсники с парными зажимами ( $2 \times 2$ -полюсники) называются просто четырехполюсниками.



В общем случае в четырехполюснике с непарными зажимами втекающие и вытекающие токи могут быть произвольными. Например, четырехполюсник в виде четырехлучевой звезды, как на рис. 1.21 (элементы 3, 5, 6, 7), может иметь различные сочетания втекающих и вытекающих токов, в частности, один втекающий и три вытекающих тока. Методы расчета таких четырехполюсников, как и многополюсников общего вида, рассматриваются в гл. 3.

Таким образом, задачей настоящего курса является изучение методов расчета и свойств линейных радиотехнических цепей с сосредоточенными и распределенными параметрами, а также свойств сигналов и методов анализа прохождения сигналов через линейные радиотехнические цепи.

## Г Л А В А 2

### ОСНОВЫ ТЕОРИИ ЛИНЕЙНЫХ ЦЕПЕЙ

#### § 2.1. МЕТОДЫ ИССЛЕДОВАНИЯ ЛИНЕЙНЫХ ЦЕПЕЙ

##### 1. Задачи исследования линейных цепей

Под исследованием линейной цепи подразумевается определение каких-либо неизвестных величин, характеризующих эту цепь. Для такого определения должны быть, очевидно, известны некоторые исходные величины, характеризующие линейную цепь. При этом исходными и искомыми величинами могут являться токи и напряжения в различных участках цепи, а также параметры цепи и элементов, из которых она составлена.

Параметрами элементов и цепи называются величины, определяющие соответственно свойства элементов цепи или всей цепи в целом.

В зависимости от того, какие величины являются исходными и искомыми, при исследовании различают два типа задач.

Если при исследовании заданными являются параметры элементов и схема их соединения (схема цепи), а определению подлежат токи и напряжения в различных участках цепи или параметры цепи, то решение такой задачи называется анализом цепи.

Если при исследовании необходимо определить схему цепи и параметры ее элементов по заданным напряжениям и токам или параметрам цепи, то решение такой обратной задачи называется синтезом цепи.

Задачу анализа приходится решать при исследовании свойств различных цепей, а задачу синтеза — при конструировании цепей с заданными свойствами. Целью анализа цепи может являться, например, определение формы сигнала на выходе цепи при воздействии на ее входе заданного сигнала, т. е. определение  $u_{\text{вых}}(t)$  при известном  $u_{\text{вх}}(t)$ . В задачу же синтеза может входить, например, создание цепи, на выходе которой получается вполне определенный сигнал  $u_{\text{вых}}(t)$  при заданном входном сигнале  $u_{\text{вх}}(t)$ .

## 2. Временный метод исследования

При решении задач анализа цепи необходимо знать, как связаны между собой токи и напряжения в различных участках цепи. При этом можно составить уравнения, в которые входят как неизвестные напряжения  $u(t)$  и токи  $i(t)$ , так и известные величины — параметры элементов цепи, напряжения и т. д. При решении этих уравнений определяются искомые значения  $u(t)$  и  $i(t)$ .

Связи между напряжениями и токами и методы составления указанных уравнений рассматриваются в последующих параграфах настоящей главы. Однако уже сейчас необходимо подчеркнуть, что эти уравнения должны связывать между собой не только токи и напряжения, изменяющиеся во времени, но также скорости их изменения, т. е. производные  $\frac{du}{dt}$  и  $\frac{di}{dt}$ .

Таким образом, уравнения, описывающие процессы в цепи, являются дифференциальными уравнениями следующего, например, вида:

$$a_1 \frac{du}{dt} + a_2 u = u_0 \quad (2.1)$$

или

$$b_1 \frac{di}{dt} + b_2 i = u_0. \quad (2.2)$$

Здесь  $u, i$  — неизвестные значения напряжения и тока;

$u_0$  — заданное значение напряжения;

$a_1, a_2, b_1, b_2$  — коэффициенты, являющиеся функциями параметров цепи.

В общем случае приведенные дифференциальные уравнения являются более сложными и содержат производные высших порядков.

В других случаях эти уравнения могут содержать и интегралы от искомых функций. Например, при рассмотрении зарядов  $q = \int i dt$  указанные уравнения являются интегро-дифференциальными.

При решении задачи в подобном виде исследуются и определяются временные функции  $u(t)$  и  $i(t)$ , называемые также мгновенными значениями напряжения и тока. Поэтому такой способ решения задачи анализа называется временным методом исследования.

Анализ процессов в цепях временным методом, связанный с решением дифференциальных или интегро-дифференциальных уравнений, является довольно сложным. Еще сложнее получается синтез цепи временным методом. Задача синтеза по существу не отличалась бы от задачи анализа, если бы ее решение сводилось к определению неизвестных параметров элементов цепи из заданных уравнений. Однако синтез значительно сложнее анализа, поскольку при неизвестной схеме цепи становятся неизвестными

также уравнения, связывающие между собой напряжения и токи в этой цепи. Поэтому требуются специальные способы решения задачи синтеза временным методом.

### 3. Спектральный метод исследования

Исследование цепи существенно упрощается, если вместо временных зависимостей  $u(t)$  и  $i(t)$ , т. е. вместо сигналов  $u(t)$  и  $i(t)$ , рассматривать их спектры. Такой метод исследования называется спектральным.

При спектральном методе исследования, так же как и при временном методе, необходимо знать связи между напряжениями и токами и составлять соответствующие уравнения. Однако при рассмотрении спектров сигналов вместо самих сигналов закон изменения гармонических составляющих во времени является известным. В этом случае анализ сводится к определению изменения начальных фаз и амплитуд различных гармонических составляющих при их прохождении через цепь. За счет этого и упрощается решение задачи анализа по сравнению с временным методом исследования.

Упрощение получается в конечном итоге вследствие того, что упрощаются уравнения, связывающие между собой гармонические составляющие в различных участках цепи. Действительно, из этих уравнений можно исключить время как независимую переменную, поскольку закон изменения во времени для гармонических составляющих известен. При этом в оставшиеся уравнения будут входить только постоянные величины — параметры цепи и ее элементов, а также амплитуды и начальные фазы гармонических составляющих. Такие уравнения являются обычными алгебраическими уравнениями, решение которых несравненно проще, чем решение дифференциальных уравнений при временном методе исследования.

При спектральном методе исследования, так же как и при временном методе, может быть определен закон изменения во времени искомого сигнала  $u(t)$  или  $i(t)$ . В этом случае спектральный метод решения задачи анализа распадается на три этапа: первый этап — определение спектра сигнала на входе цепи; второй этап — определение изменения амплитуд и начальных фаз гармонических составляющих при их прохождении через заданную цепь; третий этап — определение по найденному спектру сигнала на выходе цепи самого выходного сигнала  $u(t)$  или  $i(t)$ .

При спектральном методе анализа может и не ставиться задача определения временного закона  $u(t)$  или  $i(t)$ . Если, например, заданы некоторые допустимые искажения сигнала, то может ставиться вопрос, не превышают ли фактические искажения сигнала в цепи допустимые нормы. При такой постановке задачи третий этап спектрального метода анализа может быть вообще опущен.

Для ответа на поставленный вопрос достаточно определить величину вносимых цепью изменений амплитуд и начальных фаз гармонических составляющих (второй этап спектрального метода), по которым можно судить и о степени искажений сигнала. При этом указанные изменения достаточно определить в диапазоне частот, занимаемом спектром сигнала, который определяется на первом этапе спектрального метода анализа.

При использовании спектрального метода исследования упрощается также решение задачи синтеза. В этом случае можно вообще не рассматривать параметры гармонических составляющих сигналов, а задавать только параметры цепи, определяющие изменения этих составляющих. По заданным параметрам определяется схема цепи и параметры ее элементов.

Учитывая преимущества спектрального метода исследования, будем пользоваться им на протяжении первых глав курса, временной же метод будет использован в двух последних главах.

#### 4. Метод комплексных амплитуд

При использовании спектрального метода исследования любая задача сводится к рассмотрению прохождения через цепь гармонических колебаний.

Гармонические колебания можно записывать как в синусоидальной [см. формулу (1.4)], так и в косинусоидальной форме:

$$u = U_m \cos(\omega t + \psi), \quad (2.3)$$

или

$$u = U_m \cos \Phi, \quad (2.4)$$

где

$$\Phi = \omega t + \psi \quad (2.5)$$

— фаза колебаний, меняющаяся с течением времени.

В зависимости от формы записи гармонических колебаний меняется лишь начало отсчета на оси времени (на величину  $\frac{T}{4}$ ), т. е. меняется начальная фаза колебаний на величину  $\Delta\psi = \omega \frac{T}{4} = \frac{\pi}{2}$ . Для определенности отсчета начальной фазы условимся впредь пользоваться формой записи (2.3).

Ограничиваясь рассмотрением лишь гармонических колебаний, постоянные напряжения будем считать разновидностью этих колебаний при  $\omega = 0$ . При этом понятие фазы колебаний теряет смысл, и в уравнении (2.3) следует также принять  $\psi = 0$ . Тогда

$$u_{\text{пост}} = U_m = \text{const} = U. \quad (2.6)$$

Аналогичное обозначение примем для постоянных токов:

$$i_{\text{пост}} = I_m = \text{const} = I. \quad (2.7)$$

Выше отмечалось, что из уравнений, описывающих гармонические процессы в цепях, можно исключить время как независимую переменную. Такое упрощение уравнений достигается при использовании символического метода. Символическим методом называется способ описания гармонических процессов, при котором вместо гармонических величин рассматриваются их комплексные (символические) отображения.

Для выяснения сущности символического метода отвлечемся от гармонических колебаний и рассмотрим выражение (2.4), в котором величину  $\Phi$  будем считать некоторым заданным углом (рис. 2.1).

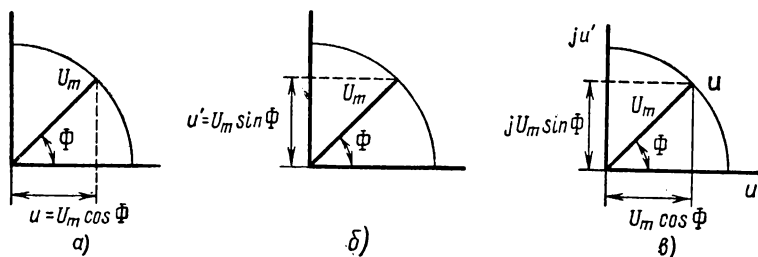


Рис. 2.1. Переход от гармонических напряжений к комплексному напряжению

В соответствии с определением тригонометрических функций косинусоида (2.4) является проекцией радиуса  $U_m$  на горизонтальную ось (рис. 2.1, а), а синусоида

$$u' = U_m \sin \Phi \quad (2.8)$$

— проекцией того же радиуса на вертикальную ось (рис. 2.1, б).

Условимся вместо косинусоиды (2.4) или синусоиды (2.8) рассматривать комплексную величину

$$\mathbf{u} = u + ju', \quad (2.9)$$

где  $j = \sqrt{-1}$  — мнимая единица.

Эта комплексная величина может быть изображена на комплексной плоскости, как показано на рис. 2.1, в.

Учитывая значения функций (2.4) и (2.8), можно воспользоваться тригонометрической формой для описания комплексной величины (2.9):

$$\mathbf{u} = U_m \cos \Phi + jU_m \sin \Phi. \quad (2.9a)$$

Согласно формуле Эйлера  $\cos \Phi + j \sin \Phi = e^{j\Phi}$ , и комплексная величина (2.9a) может быть представлена в показательной форме:

$$\mathbf{u} = U_m e^{j\Phi}. \quad (2.10)$$

Теперь вспомним, что в формуле (2.10) угол  $\Phi$  является функцией времени. Согласно формуле (2.5) фазовый угол  $\Phi$  линейно растет с течением времени и соотношение (2.10) может быть переписано в следующем виде:

$$\mathbf{u} = U_m e^{j(\omega t + \psi)}. \quad (2.10a)$$

Эту величину можно рассматривать как некоторое комплексное напряжение, являющееся символическим отображением напряжения (2.3). Из соотношений (2.3) — (2.5) и (2.9)—(2.10a) следует, что мгновенное напряжение (2.3) может быть найдено как вещественная часть комплексной величины (2.10a):

$$u = \operatorname{Re} \mathbf{u}, \quad (2.11)$$

или

$$u = \operatorname{Re} [U_m \cos(\omega t + \psi) + j U_m \sin(\omega t + \psi)] = U_m \cos(\omega t + \psi). \quad (2.11a)$$

Таким образом, в уравнениях, описывающих гармонические процессы, напряжения вида (2.3) можно заменять их символическими отображениями вида (2.10a). После решения указанных уравнений относительно комплексных напряжений должен быть совершен обратный переход к мгновенным напряжениям в соответствии с формулой (2.11) или (2.11a). В этом и заключается символический метод исследования гармонических процессов. Разумеется, он одинаково используется для описания не только напряжений, но также токов и любых других гармонических величин.

Следует подчеркнуть, что при использовании символического метода можно производить только линейные операции сложения и вычитания напряжений и токов. При этом, например, сложению напряжений  $u_1$  и  $u_2$  соответствует сложение комплексных напряжений  $\mathbf{u}_1 = u_1 + j u'_1$  и  $\mathbf{u}_2 = u_2 + j u'_2$ , поскольку  $\mathbf{u} = u + j u' = \mathbf{u}_1 + \mathbf{u}_2 = (u_1 + u_2) + j (u'_1 + u'_2)$ , откуда  $u = u_1 + u_2$ . Перемножению же напряжения  $u$  и тока  $i$  не соответствует перемножение их символических отображений, поскольку

$$\begin{aligned} \mathbf{u}i &= (u + j u')(i + j i') = (ui - u'i') + j (ui' + u'i) \\ &\text{и } ui \neq ui - u'i'. \end{aligned}$$

Покажем теперь, что применение символического метода упрощает исследование гармонических процессов. Соотношение (2.10a) можно переписать в виде

$$\mathbf{u} = U_m e^{j\psi} e^{j\omega t}. \quad (2.12)$$

Входящие в это выражение множители  $e^{j\psi}$  и  $e^{j\omega t}$  называются соответственно фазовым и временным множителем\*.

\* Следует иметь в виду, что модуль фазового множителя всегда равен единице:

$$|e^{j\psi}| = |\cos \psi + j \sin \psi| = \sqrt{\cos^2 \psi + \sin^2 \psi} = 1.$$

Полезно также помнить следующие значения фазовых множителей:

$$e^{j0} = e^{j2\pi} = 1, \quad e^{j\frac{\pi}{2}} = j, \quad e^{-j\frac{\pi}{2}} = -j, \quad e^{\pm j\pi} = -1.$$

Таким образом, зависимость комплексного напряжения (2.12) от времени выражается через временной множитель в отличие от мгновенного напряжения (2.3), зависимость которого от времени выражается через тригонометрическую функцию. Благодаря этому при замене в уравнениях мгновенных напряжений вида (2.3) их символическими отображениями (2.12) все члены этих уравнений будут содержать одинаковый временной множитель  $e^{j\omega t}$ , на который можно произвести сокращение. Тем самым из уравнений исключается переменная  $t$ , как это отмечалось выше.

Следует отметить, что при использовании символического метода сокращение временного множителя происходит не только в алгебраических, но и в интегро-дифференциальных уравнениях. Действительно, если в операции дифференцирования  $\frac{du}{dt}$  заменить напряжение его символическим отображением (2.12), то получим

$$\frac{du}{dt} = U_m e^{j\psi} \frac{de^{j\omega t}}{dt} = U_m e^{j\psi} j\omega e^{j\omega t}. \quad (2.13)$$

Аналогично при операции интегрирования  $\int_0^t u dt$  применение символического метода приводит к следующему выражению:

$$\int_0^t u dt = U_m e^{j\psi} \int_0^t e^{j\omega t} dt = U_m e^{j\psi} \frac{1}{j\omega} e^{j\omega t}. \quad (2.14)$$

Таким образом, в интегро-дифференциальных уравнениях члены, содержащие производные и интегралы, будучи записанными в символической форме, также содержат временной множитель  $e^{j\omega t}$ , на который производится сокращение.

Не менее существенным является и то обстоятельство, что интегро-дифференциальные уравнения при использовании символического метода переходят в алгебраические уравнения, как это следует из соотношений (2.13) и (2.14). При этом операция дифференцирования заменяется умножением на оператор  $j\omega$ , а операция интегрирования — делением на тот же оператор. Действительно, соотношения (2.13) и (2.14) могут быть переписаны в виде

$$\frac{du}{dt} = j\omega u, \quad (2.13a)$$

$$\int_0^t u dt = \frac{1}{j\omega} u. \quad (2.14a)$$

Это еще более упрощает исследование гармонических процессов символическим методом.



Из соотношений (2.12)—(2.14) видно, что любые уравнения в символической форме наряду с одинаковым временным множителем содержат фазовые множители, которые для разных напряжений и токов неодинаковы. Для упрощения записи уравнений указанные фазовые множители могут быть объединены с амплитудой. При этом комплексное напряжение (2.14) можно представить в виде

$$\mathbf{u} = \dot{U}_m e^{j\omega t}, \quad (2.15)$$

где комплексная величина

$$\dot{U}_m = U_m e^{j\psi} = U_m \cos \psi + j U_m \sin \psi \quad (2.16)$$

называется комплексной амплитудой.

Аналогично комплексному напряжению обозначается и комплексный ток

$$\mathbf{i} = \dot{I}_m e^{j\omega t} \quad (2.17)$$

с комплексной амплитудой

$$\dot{I}_m = I_m e^{j\psi} = I_m \cos \psi + j I_m \sin \psi, \quad (2.18)$$

являющийся символическим отображением тока

$$i = I_m \cos (\omega t + \psi). \quad (2.19)$$

При использовании обозначений (2.15)—(2.18) в уравнениях, описывающих гармонический процесс, после сокращения на временной множитель  $e^{j\omega t}$  вместо комплексных напряжений и токов остаются их комплексные амплитуды (2.16) и (2.18). Поэтому символический метод называется также методом комплексных амплитуд.

Покажем применение метода комплексных амплитуд на примере сложения двух колебаний  $u_1 = U_{m1} \cos (\omega t + \psi_1)$  и  $u_2 = U_{m2} \cos (\omega t + \psi_2)$ . Вводя вместо этих колебаний комплексные напряжения  $\mathbf{u}_1 = \dot{U}_{m1} e^{j\omega t}$  и  $\mathbf{u}_2 = \dot{U}_{m2} e^{j\omega t}$ , где  $\dot{U}_{m1} = U_{m1} e^{j\psi_1}$ ,  $\dot{U}_{m2} = U_{m2} e^{j\psi_2}$ , находим

$$\mathbf{u} = \mathbf{u}_1 + \mathbf{u}_2 = \dot{U}_{m1} e^{j\omega t} + \dot{U}_{m2} e^{j\omega t} = \dot{U}_m e^{j\omega t}.$$

Отсюда, сокращая на временной множитель  $e^{j\omega t}$ , определяем, что комплексная амплитуда результирующих колебаний равна сумме комплексных амплитуд складываемых колебаний:  $\dot{U}_m = \dot{U}_{m1} + \dot{U}_{m2}$ .

При сложении комплексных амплитуд и других действиях с ними все преобразования и вычисления производят как с обычными комплексными числами. При этом переход к мгновенным значениям напряжения и тока (см. формулы (2.3) и (2.19)) производится после представления комплексной амплитуды в показательной форме, как в первых равенствах соотношений (2.16) и (2.18).

## 5. Векторные диаграммы гармонических колебаний

В соответствии с методом комплексных амплитуд гармонические колебания можно отображать с помощью векторных диаграмм. Для построения таких диаграмм рассмотрим геометрическую интерпретацию символического метода.

Выше отмечалось, что в соответствии с выражением (2.5) фазовый угол линейно растет с течением времени. Это означает, что радиус  $U_m$  на рис. 2.1, *в*, где отображено комплексное напряжение (2.10) или (2.10а), должен равномерно вращаться против направления движения часовой стрелки. Поэтому вместо радиуса  $U_m$  на комплексной плоскости принято изображать вращающийся радиус-вектор, величина которого равна амплитуде колебаний  $U_m$  (рис. 2.2, *а*). Угловая скорость вращения этого радиуса-вектора

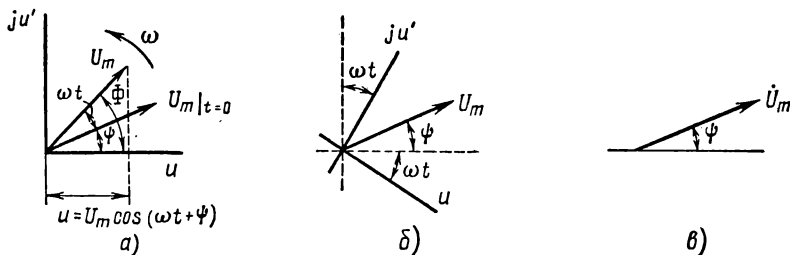


Рис. 2.2. Отображение гармонических колебаний на комплексной плоскости

совпадает с круговой частотой  $\omega$ , а его начальное положение определяется начальной фазой  $\psi = \Phi|_{t=0}$ .

Символическое отображение напряжения в виде радиуса-вектора, вращающегося на комплексной плоскости, позволяет легко найти мгновенное напряжение, являющееся вещественной величиной. Поскольку для гармонических величин была выбрана форма записи (2.3), мгновенное напряжение на рис. 2.2, *а* определяется как проекция вращающегося радиуса-вектора на горизонтальную (вещественную) ось, что соответствует формулам (2.11) и (2.11а). В этом заключается геометрический смысл символического метода описания гармонических величин.

Оперирование с вращающимся радиусом-вектором является не очень удобным приемом. Однако графическое изображение комплексного напряжения можно упростить. Для этого достаточно принять, что в начальный момент времени  $t = 0$  координатная система ( $u, ju'$ ) начала вращаться с угловой скоростью  $\omega$  в направлении движения часовой стрелки (рис. 2.2, *б*). При этом радиус-вектор  $U_m$  будет оставаться неподвижным относительно наблюдателя и в любой момент времени будет составлять с горизонтальной осью угол  $\psi$ .

Теперь остается лишь отказаться от изображения координатной системы ( $u, ju'$ ), которая загромождает чертеж. Тогда на графике останется один радиус-вектор  $U_m$  и горизонтальная ось в качестве начальной линии отсчета углов (рис. 2.2, в). При этом не следует забывать, что радиус-вектор изображается на комплексной плоскости. Поэтому его проекции на горизонтальную и вертикальную оси ( $U_m \cos \psi$  и  $jU_m \sin \psi$ ) представляют не что иное, как вещественную и мнимую части комплексной амплитуды (2.16). Следовательно,

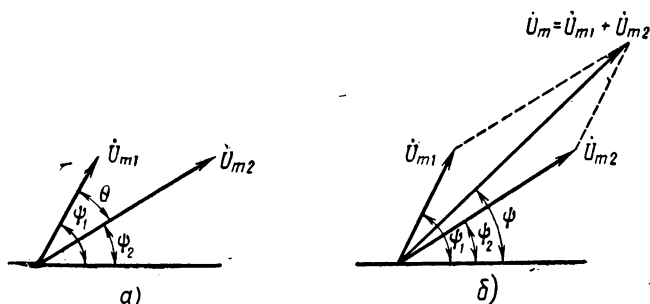


Рис. 2. 3. Векторное изображение гармонических колебаний

радиус-вектор на рис. 2.2. является комплексной амплитудой  $\dot{U}_m$ , как это и показано на рис. 2.2, в.

Таким образом, при рассмотрении различных гармонических напряжений и токов в какой-либо цепи может быть построена их векторная диаграмма. Эта диаграмма представляет собой совокупность радиусов-векторов, отображающих на комплексной плоскости комплексные амплитуды гармонических колебаний.

Векторные диаграммы дают наглядное представление о сдвиге фаз между рассматриваемыми напряжениями (или токами) (рис. 2.3, а). Кроме того, с помощью векторных диаграмм можно производить сложение гармонических колебаний (их комплексных амплитуд) по обычным правилам сложения векторов. При этом легко определяется амплитуда  $U_m$  и начальная фаза  $\psi$  результирующих (суммарных) колебаний (рис. 2.3, б).

## § 2.2. ОСНОВНЫЕ ЗАКОНЫ ТОКОПРОХОЖДЕНИЯ

### 1. Закон Ома

Выше указывалось, что для составления уравнений, описывающих процессы в цепи, надо знать связь между напряжениями и токами в различных участках цепи.

Первая такая связь устанавливается законом Ома, определяющим зависимость между током и напряжением для произвольного линей-

ного двухполюсника, являющегося составной частью любой сложно-разветвленной цепи.

Напряжение и ток в линейном двухполюснике связаны линейными уравнениями, например, вида (2.2). Представим это уравнение в символической форме, приняв  $i = I_m e^{j\omega t}$ ,  $u_0 = U_m e^{j\omega t}$ , где  $I_m = I_m e^{j\psi_i}$ ,  $U_m = U_m e^{j\psi_u}$ .

Тогда

$$b_1 \frac{di}{dt} + b_2 i = u_0,$$

или

$$j\omega b_1 I_m e^{j\psi_i} e^{j\omega t} + b_2 I_m e^{j\psi_i} e^{j\omega t} = U_m e^{j\psi_u} e^{j\omega t}.$$

Отсюда

$$\dot{U}_m = (j\omega b_1 + b_2) \dot{I}_m.$$

Таким образом, в линейном двухполюснике комплексные амплитуды напряжения и тока пропорциональны друг другу, причем коэффициент пропорциональности является некоторой постоянной комплексной величиной. Это свойство линейных двухполюсников и составляет содержание закона Ома, который записывается в следующем виде:

$$\dot{U}_m = \dot{Z} \dot{I}_m = \frac{\dot{I}_m}{\dot{Y}}, \quad (2.20)$$

или

$$\dot{I}_m = \dot{Y} \dot{U}_m = \frac{\dot{U}_m}{\dot{Z}}. \quad (2.21)$$

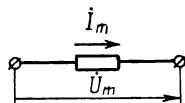


Рис. 2.4. Выбор положительных направлений отсчета напряжения и тока

При записи этих соотношений предполагается, что положительные направления отсчета напряжения и тока совпадают, как показано на рис. 2.4.

Коэффициенты пропорциональности

$$\dot{Z} = \frac{1}{\dot{Y}} = \frac{\dot{U}_m}{\dot{I}_m} \quad (2.22)$$

и

$$\dot{Y} = \frac{1}{\dot{Z}} = \frac{\dot{I}_m}{\dot{U}_m}, \quad (2.23)$$

входящие в соотношения (2.20) и (2.21), являются параметрами двухполюсника и называются соответственно его комплексным сопротивлением и комплексной проводимостью.

Соотношения (2.22) и (2.23) наряду с формулами (2.20) и (2.21) можно рассматривать как различные математические формы записи закона Ома. Формулы (2.20)—(2.23) позволяют определить одну из неизвестных величин — напряжение, ток или сопротивление (проводимость) — по двум другим известным величинам.

Следует иметь в виду, что  $\dot{Z} \neq \frac{u}{i}$  и  $\dot{Y} \neq \frac{i}{u}$ , хотя  $\dot{Z} = \frac{u}{i}$  и  $\dot{Y} = \frac{i}{u}$  (поскольку  $\frac{u}{i} = \frac{\dot{U}_m e^{j\omega t}}{I_m e^{j\omega t}} = \frac{U_m}{I_m}$ , но  $\frac{u}{i} \neq \frac{u}{i}$ ).

Сопротивление двухполюсника (2.22), как и любая комплексная величина, может быть представлено в виде

$$\dot{Z} = R + jX = Ze^{j\varphi}. \quad (2.24)$$

Здесь

$$R = Z \cos \varphi \quad (2.25)$$

— вещественная часть комплексного сопротивления, называемая активным сопротивлением;

$$X = Z \sin \varphi \quad (2.26)$$

— мнимая часть комплексного сопротивления, называемая реактивным сопротивлением;

$$\dot{Z} = |\dot{Z}| = \sqrt{R^2 + X^2} \quad (2.27)$$

— модуль комплексного сопротивления;

$$\varphi = \arg \dot{Z} = \arccos \frac{R}{Z} = \arcsin \frac{X}{Z} = \operatorname{arctg} \frac{X}{R} \quad (2.28)$$

— аргумент комплексного сопротивления.

Полагая  $\dot{U}_m = U_m e^{j\psi_u}$  и  $\dot{I}_m = I_m e^{j\psi_i}$ , из формул (2.22) и (2.24) получим:

$$Ze^{j\varphi} = \frac{U_m e^{j\psi_u}}{I_m e^{j\psi_i}} = \frac{U_m}{I_m} e^{j(\psi_u - \psi_i)}.$$

Отсюда следует, что

$$Z = \frac{U_m}{I_m} \quad (2.29)$$

и

$$\varphi = \psi_u - \psi_i, \quad (2.30)$$

т. е. модуль сопротивления двухполюсника равен отношению вещественных амплитуд напряжения и тока, а аргумент этого сопротивления равен разности (сдвигу) начальных фаз между напряжением и током.

Из формул (2.27) и (2.29) видно, что  $Z$  всегда является вещественной положительной величиной, как это и должно быть по смыслу модуля комплексной величины. Аргумент же  $\varphi$  может быть и положительной и отрицательной величиной, как это видно из соотношения (2.30). Положительное или отрицательное значение  $\varphi$  означает, что напряжение опережает по фазе ток или отстает от него.

Ниже будет показано, что в реальных двухполюсниках всегда  $R > 0$ , а в идеальном случае  $R = 0$ . При этом, как видно из соот-

ношения (2.25), значение аргумента сопротивления ограничено пределами  $-\frac{\pi}{2} \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2}$ . В соответствии с этими значениями  $\varphi$  и формулой (2.26) реактивное сопротивление  $X$  может быть и положительной и отрицательной величиной.

Согласно формулам (2.20) и (2.24) напряжение на двухполюснике может быть представлено в виде суммы двух составляющих:

$$\dot{U}_m = \dot{U}_{mR} + \dot{U}_{mX},$$

где  $\dot{U}_{mR} = R \dot{I}_m = R \dot{I}_m e^{j\psi_i}$ ,

$$\dot{U}_{mX} = jX \dot{I}_m = X \dot{I}_m e^{j(\psi_i + \frac{\pi}{2})}.$$

Этим уравнениям соответствует векторная диаграмма, изображенная на рис. 2.5, а. Поскольку на этой диаграмме все векторы

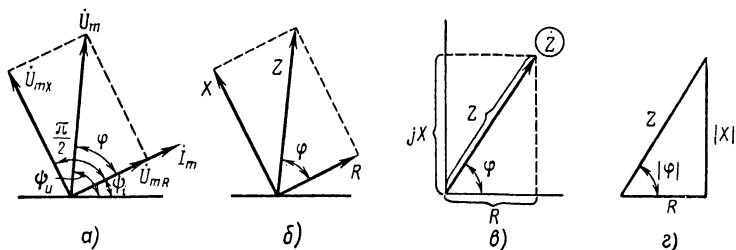


Рис. 2.5. Построение треугольника сопротивлений

напряжений пропорциональны амплитуде тока  $I_m$ , то, разделив их на величину этой амплитуды, получим геометрическое построение, показанное на рис. 2.5, б. Это построение, устанавливающее связь между составляющими комплексного сопротивления, аналогично графику, изображающему комплексное сопротивление на плоскости комплексного переменного  $\dot{Z}$  (рис. 2.5, в), но свободно от множителя  $j$ . Вместо построений графиков, изображенных на рис. 2.5, б и в, принято строить эквивалентный им треугольник сопротивлений (рис. 2.5, г), отображающий связь между составляющими комплексного сопротивления.

Аналогично сопротивлению можно представить и проводимость (2.23) как комплексную величину

$$\dot{Y} = G + jB = Y e^{j\chi}. \quad (2.31)$$

Здесь

$$G = Y \cos \chi \quad (2.32)$$

— активная проводимость;

$$B = Y \sin \chi \quad (2.33)$$

— реактивная проводимость;

$$Y = |\dot{Y}| = \sqrt{G^2 + B^2} = \frac{I_m}{U_m} \quad (2.34)$$

— модуль комплексной проводимости;

$$\chi = \arg \dot{Y} = \arccos \frac{G}{Y} = \arcsin \frac{B}{Y} = \arctg \frac{B}{G} = \psi_i - \psi_u \quad (2.35)$$

— аргумент комплексной проводимости.

Смысл модуля и аргумента комплексной проводимости устанавливается из последних равенств в соотношениях (2.34) и (2.35).

Связь между составляющими комплексной проводимости отображается треугольником проводимостей, построение которого показано на рис. 2.6 (аналогично построениям, показанным на рис. 2.5, в и г).

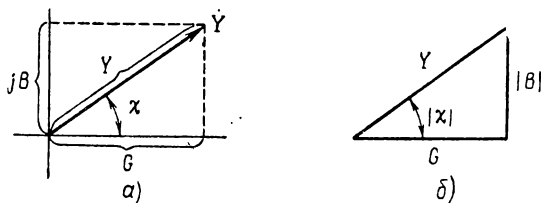


Рис. 2.6. Построение треугольника проводимостей

Связь между составляющими сопротивления и проводимости двухполюсника устанавливается непосредственно из формул (2.22), (2.23) и (2.24), (2.31). Поскольку

$$\dot{Z} = \frac{1}{\dot{Y}} = \frac{1}{Y} e^{-j\chi} = \frac{1}{G + jB} = \frac{G - jB}{(G + jB)(G - jB)} = \frac{G}{G^2 + B^2} - j \frac{B}{G^2 + B^2}$$

и аналогично

$$\dot{Y} = \frac{1}{\dot{Z}} = \frac{1}{Z} e^{-j\varphi} = \frac{1}{R + jX} = \frac{R - jX}{(R + jX)(R - jX)} = \frac{R}{R^2 + X^2} - j \frac{X}{R^2 + X^2},$$

то

$$R = \frac{G}{G^2 + B^2} = \frac{G}{Y^2}, \quad X = -\frac{B}{G^2 + B^2} = -\frac{B}{Y^2}, \quad (2.36)$$

$$Z = \frac{1}{Y}, \quad \varphi = -\chi$$

и

$$G = \frac{R}{R^2 + X^2} = \frac{R}{Z^2}, \quad B = -\frac{X}{R^2 + X^2} = -\frac{X}{Z^2}, \quad (2.37)$$

$$Y = \frac{1}{Z}, \quad \chi = -\varphi.$$

В радиотехнической практике часто встречаются такие сопротивления, для которых  $R^2 \ll X^2$  и соответственно  $G^2 \ll B^2$ . При этом

первые два равенства в соотношениях (2.36) и (2.37) могут быть представлены в следующем приближенном виде:

$$R \approx \frac{G}{B^2}, \quad X \approx -\frac{1}{B} \quad (2.38)$$

и

$$G \approx \frac{R}{X^2}, \quad B \approx -\frac{1}{X}. \quad (2.39)$$

При решении различных задач пользуются понятиями сопротивления или проводимости в зависимости от удобства конкретных расчетов. При этом переход от одного понятия к другому производится по формулам (2.22), (2.23) и (2.36)—(2.39).

В заключение следует подчеркнуть, что активные и реактивные сопротивления и проводимости могут складываться двояко. Во-первых, их можно складывать по правилам сложения комплексных чисел, т. е. складывать алгебраически на комплексной плоскости, как в формулах (2.24), (2.31) и на рис. 2.5, в, 2.6, а. Во-вторых, их можно складывать геометрически на вещественной плоскости, как в формулах (2.27), (2.34) и на рис. 2.5, г, 2.6, б. Однако эти сопротивления и проводимости нельзя складывать арифметически:  $R + X$  и  $G + B$  — это абсурд!

## 2. Первый закон Кирхгофа

Закон Ома устанавливает связь между напряжением и током в любой ветви цепи, поскольку ветвь является двухполюсником. Связь между напряжениями и токами в различных ветвях цепи устанавливается законами Кирхгофа.

Первый закон Кирхгофа устанавливает связь между токами в различных ветвях, имеющих общий узел (рис. 2.7). Притекание токов  $i_1, i_2, \dots, i_n$  к узлу  $a$  означает перемещение зарядов к этому узлу. Заряды же не могут скапливаться в узле, который является по существу математической точкой, а не физическим телом, способным накапливать заряды. Поэтому в любой момент времени лишь некоторые токи (например,  $i_1, i_2, \dots, i_l$ ) могут притекать к узлу. Остальные же токи ( $i_{l+1}, i_{l+2}, \dots, i_n$ ) в тот же момент времени должны оттекать от этого узла. При этом сумма всех зарядов  $q_1, q_2, \dots, q_l$ , переносимых токами  $i_1, i_2, \dots, i_l$  к узлу  $a$ , должна равняться сумме зарядов  $q_{l+1}, q_{l+2}, \dots, q_n$ , переносимых соответствующими токами от узла  $a$ :

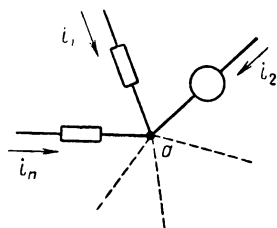


Рис. 2.7. Ветви цепи с общим узлом

$$\sum_{k=1}^l q_k = \sum_{k=l+1}^n q_k. \quad (2.40)$$



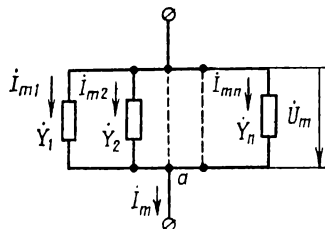
Учитывая, что  $i = \frac{dq}{dt}$ , продифференцируем по времени уравнение (2.40). При этом получим

$$\sum_{k=1}^l i_k = \sum_{k=l+1}^n i_k.$$

Приписывая оттекающим токам положительный знак, а притекающим токам — отрицательный знак \*, окончательно получаем

$$\sum_{k=1}^n i_k = 0. \quad (2.41)$$

Переходя в уравнении (2.41) от токов  $i_k$  к их символическим изображениям  $\dot{i}_k = \dot{I}_k e^{j\omega t}$  и сокращая полученное уравнение на временной множитель  $e^{j\omega t}$ , находим соотношение между комплексными амплитудами токов, сходящихся в некотором произвольном узле:



$$\sum_{k=1}^n \dot{I}_{mk} = 0. \quad (2.42)$$

Рис. 2.8. Параллельное соединение двухполюсников

Уравнения (2.40)—(2.42) являются различными математическими выражениями первого закона Кирхгофа, согласно которому сумма токов в ветвях, имеющих общий узел, равна нулю.

Из первого закона Кирхгофа следует, в частности, что общий ток двухполюсника, составленного из  $n$  параллельно соединенных двухполюсников (рис. 2.8), равен сумме токов, протекающих через эти  $n$  двухполюсников:

$$I_m = \sum_{k=1}^n I_{mk}. \quad (2.43)$$

Действительно, согласно уравнению (2.42) в узле  $a$

$$I_m - I_{m1} - I_{m2} - \dots - I_{mn} = 0,$$

что равносильно уравнению (2.43).

Если обозначить через  $\dot{Y} = G + jB$  проводимость двухполюсника, изображенного на рис. 2.8, то в соответствии с формулой (2.21)

$$\dot{I}_m = \dot{Y} \dot{U}_m$$

\* Знак притекающих и оттекающих токов является условным, и можно считать положительными не оттекающие, а притекающие токи.

и

$$\begin{aligned} i_{m1} &= \dot{Y}_1 \dot{U}_m, \\ i_{m2} &= \dot{Y}_2 \dot{U}_m, \\ &\dots \dots \dots \\ i_{mn} &= \dot{Y}_n \dot{U}_m. \end{aligned}$$

Подставляя эти значения токов в уравнение (2.43) и сокращая на  $\dot{U}_m$ , найдем, что проводимость двухполюсника, составленного из  $n$  параллельно соединенных двухполюсников, равна сумме их проводимостей:

$$\dot{Y} = \sum_{k=1}^n \dot{Y}_k. \quad (2.44)$$

Сложению проводимостей  $Y_k = G_k + jB_k$  соответствует сложение их составляющих, так что соотношение (2.44) эквивалентно следующим равенствам:

$$G = \sum_{k=1}^n G_k, \quad B = \sum_{k=1}^n B_k. \quad (2.45)$$

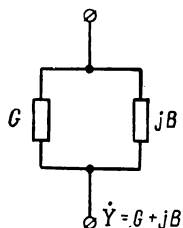


Рис. 2.9. Эквивалентная схема двухполюсника с комплексной проводимостью

В частном, практически часто встречающемся случае, когда параллельно соединяются два двухполюсника, формула (2.44) принимает следующий вид:

$$\dot{Y} = \dot{Y}_1 + \dot{Y}_2,$$

или

$$\frac{1}{\dot{Z}} = \frac{1}{\dot{Z}_1} + \frac{1}{\dot{Z}_2}.$$

Отсюда определяется сопротивление  $\dot{Z}$  двухполюсника, составленного из двух параллельно соединенных двухполюсников с сопротивлениями  $\dot{Z}_1$  и  $\dot{Z}_2$ :

$$\dot{Z} = \frac{\dot{Z}_1 \dot{Z}_2}{\dot{Z}_1 + \dot{Z}_2}. \quad (2.46)$$

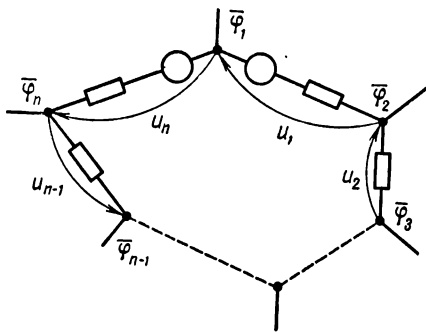
Итак, при параллельном соединении двухполюсников складывать их сопротивления нельзя, при этом суммируются их проводимости. Можно сделать и обратный вывод о том, что сложению проводимостей некоторых двухполюсников соответствует параллельное соединение этих двухполюсников. Отсюда, в частности, следует, что любой двухполюсник с комплексной проводимостью (2.31) может быть представлен в виде параллельного соединения двухполюсников с активной и реактивной проводимостью, как показано на рис. 2.9.

### 3. Второй закон Кирхгофа

Второй закон Кирхгофа устанавливает связь между напряжениями на различных ветвях цепи, образующих замкнутый контур. На рис. 2.10, где изображен такой контур, через  $\bar{\varphi}$  обозначены потенциалы узлов.

Является очевидным следующее тождество:

$$\underbrace{\bar{\varphi}_1 - \bar{\varphi}_1 + \bar{\varphi}_2 - \bar{\varphi}_2 + \bar{\varphi}_3 - \bar{\varphi}_3 + \dots + \bar{\varphi}_{n-1} - \bar{\varphi}_{n-1} + \bar{\varphi}_n - \bar{\varphi}_n}_{=0} = 0.$$



Группируя здесь члены, как показано скобками, представим это тождество в виде

$$(\bar{\varphi}_2 - \bar{\varphi}_1) + (\bar{\varphi}_3 - \bar{\varphi}_2) + \dots + (\bar{\varphi}_n - \bar{\varphi}_{n-1}) + (\bar{\varphi}_1 - \bar{\varphi}_n) = 0.$$

Поскольку разность потенциалов есть по определению напряжение между соответствующими точками, отсюда следует:

$$\sum_{k=1}^n u_k = 0. \quad (2.47)$$

Рис. 2.10. Ветви цепи, образующие замкнутый контур

Переходя к символическим отображениям напряжения и сокращая на временной множитель, получим

$$\sum_{k=1}^n \dot{U}_{mk} = 0. \quad (2.48)$$

Уравнения (2.47) и (2.48) являются математическим выражением второго закона Кирхгофа, согласно которому сумма напряжений на ветвях, образующих замкнутый контур, равна нулю.

Из второго закона Кирхгофа следует, в частности, что общее напряжение на двухполюснике, составленном из  $n$  последовательно соединенных двухполюсников (рис. 2.11), равно сумме напряжений на этих  $n$  двухполюсниках:

$$\dot{U}_m = \sum_{k=1}^n \dot{U}_{mk}. \quad (2.49)$$

Действительно, согласно уравнению (2.48) в замкнутом контуре, образованном мысленно стрелками на рис. 2.11,

$$\dot{U}_{m1} + \dot{U}_{m2} + \dots + \dot{U}_{mn} - \dot{U}_m = 0,$$

что равносильно уравнению (2.49).

Если обозначить через  $\dot{Z} = R + jX$  сопротивление двухполюсника, изображенного на рис. 2.11, то согласно формуле (2.20)

$$\dot{U}_m = \dot{Z} \dot{I}_m$$

и

$$\dot{U}_{m1} = \dot{Z}_1 \dot{I}_m,$$

$$\dot{U}_{m2} = \dot{Z}_2 \dot{I}_m,$$

$$\dots \dots \dots$$

$$\dot{U}_{mn} = \dot{Z}_n \dot{I}_m.$$

Подставив эти значения напряжений в уравнение (2.49) и сократив на  $\dot{I}_m$ , найдем, что общее сопротивление двухполюсника,

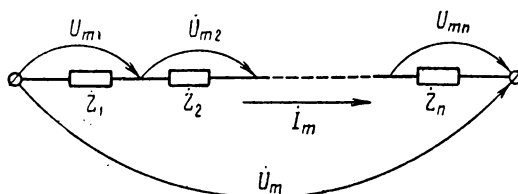


Рис. 2.11. Последовательное соединение двухполюсников

составленного из  $n$  последовательно соединенных двухполюсников с сопротивлениями  $\dot{Z}_k = R_k + jX_k$ , равно сумме этих сопротивлений:

$$\dot{Z} = \sum_{k=1}^n \dot{Z}_k \quad (2.50)$$

и соответственно

$$R = \sum_{k=1}^n R_k, \quad X = \sum_{k=1}^n X_k. \quad (2.51)$$

При последовательном соединении двух двухполюсников с проводимостями  $\dot{Y}_1$  и  $\dot{Y}_2$  общая проводимость  $\dot{Y}$  двухполюсника определяется в соответствии с формулой (2.50) следующим образом:

$$\frac{1}{\dot{Y}} = \frac{1}{\dot{Y}_1} + \frac{1}{\dot{Y}_2},$$

т. е.

$$\dot{Y} = \frac{\dot{Y}_1 \dot{Y}_2}{\dot{Y}_1 + \dot{Y}_2}. \quad (2.52)$$

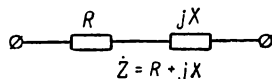


Рис. 2.12. Эквивалентная схема двухполюсника с комплексным сопротивлением

Таким образом, при последовательном соединении двухполюсников складывать их проводимости нельзя, при этом суммируются их сопротивления. Наоборот, сложение сопротивлений некоторых двухполюсников означает последовательное соединение этих двух-

полюсников. Отсюда следует, что любому двухполюснику с комплексным сопротивлением (2.24) соответствует эквивалентная схема, изображенная на рис. 2.12.

#### 4. Закон суперпозиции

Законы Кирхгофа и Ома устанавливают связь между напряжениями и токами в цепи независимо от того, какими причинами они вызваны. Практически напряжения и токи могут быть обусловлены действием одного или нескольких источников энергии. При этом важно установить, каким образом токи и напряжения, обусловленные действием нескольких источников, связаны с токами и напряжениями, вызванными действием каждого источника в отдельности.

Характер указанной связи получается различным для линейных и нелинейных цепей. Для линейных цепей справедлив закон, или принцип суперпозиции, который заключается в следующем: ток (напряжение) в цепи, обусловленный действием нескольких источников, равен сумме токов (напряжений), вызванных действием каждого источника в отдельности.

Закон суперпозиции является прямым следствием линейности уравнений, описывающих процессы в линейных цепях, поскольку эти уравнения можно складывать почленно, приводя подобные члены.

В случае же нелинейных уравнений, описывающих процессы в нелинейных цепях, такая операция невозможна. Действительно, при изменении напряжений и токов в нелинейных цепях меняются и коэффициенты в соответствующих нелинейных уравнениях. Поэтому в рассматриваемых уравнениях подобные члены отсутствуют и закон суперпозиции не имеет места.

Докажем это на примере уравнений (2.1) и (2.2). Пусть под действием источника  $I_1$ , создающего заданное напряжение  $u_{01}$ , через некоторый элемент протекает ток  $i_1$ , а напряжение на этом элементе равно  $u_1$ . Под действием же источника  $I_2$  указанные величины имеют значения соответственно  $u_{02}$ ,  $i_2$ ,  $u_2$ . Тогда в соответствии с уравнениями (2.1) и (2.2) эти напряжения и токи связаны следующим образом:

$$a_1 \frac{du_1}{dt} + a_2 u_1 = u_{01}, \quad a_1 \frac{du_2}{dt} + a_2 u_2 = u_{02}, \quad (2.1a)$$

$$b_1 \frac{di_1}{dt} + b_2 i_1 = u_{01}, \quad b_1 \frac{di_2}{dt} + b_2 i_2 = u_{02}. \quad (2.2a)$$

Поскольку совместное действие источников  $I_1$  и  $I_2$  означает суммирование заданных напряжений  $u_{01}$ ,  $u_{02}$ , сложим уравнения (2.1 а), (2.2 а). При этом получим:

$$a_1 \frac{d(u_1 + u_2)}{dt} + a_2 (u_1 + u_2) = u_{01} + u_{02},$$

$$b_1 \frac{d(i_1 + i_2)}{dt} + b_2 (i_1 + i_2) = u_{01} + u_{02}.$$

С другой стороны, поскольку новые значения напряжения  $u$  и тока  $i$  под действием суммарного напряжения  $u_0 = u_{01} + u_{02}$  удовлетворяют уравнениям (2.1) и (2.2), то отсюда следует, что  $u = u_1 + u_2$  и  $i = i_1 + i_2$ . Тем самым под-

тверждается закон суперпозиции. Аналогично доказывается принцип суперпозиции и в более общем случае, когда дифференциальные уравнения, описывающие процессы в цепи, содержат производные высших порядков.

Приведенное доказательство основано на том, что в каждой паре уравнений (2.1а) и (2.2а) фигурируют одинаковые коэффициенты  $a_1$ ,  $a_2$  и  $b_1$ ,  $b_2$ . Это обстоятельство справедливо только для линейных цепей, поскольку параметры линейных элементов и указанные коэффициенты, являющиеся функцией этих параметров, не зависят от напряжений и токов.

В случае же нелинейных цепей при смене источников, т. е. при изменении напряжений и токов, коэффициенты в уравнениях (2.1) и (2.2) изменяются вместе с изменением параметров нелинейных элементов. Поэтому в случае нелинейных цепей вместо уравнений (2.1а) и (2.2а) получаются следующие уравнения:

$$a'_1 \frac{du_1}{dt} + a'_2 u_1 = u_{01}, \quad a''_1 \frac{du_2}{dt} + a''_2 u_2 = u_{02}, \quad (2.1б)$$

$$b'_1 \frac{di_1}{dt} + b'_2 i_1 = u_{01}, \quad b''_1 \frac{di_2}{dt} + b''_2 i_2 = u_{02}. \quad (2.2б)$$

При совместном действии источников  $H_1$  и  $H_2$ , когда складываются заданные напряжения  $u_{01}$  и  $u_{02}$ , из уравнений (2.1 б) и (2.2 б) получаем:

$$u_{01} + u_{02} = a_1 \frac{du}{dt} + a_2 u = a'_1 \frac{du_1}{dt} + a''_1 \frac{du_2}{dt} + a'_2 u_1 + a''_2 u_2,$$

$$u_{01} + u_{02} = b_1 \frac{di}{dt} + b_2 i = b'_1 \frac{di_1}{dt} + b''_1 \frac{di_2}{dt} + b'_2 i_1 + b''_2 i_2.$$

Здесь напряжению  $u$  и току  $i$ , обусловленным действием суммарного напряжения  $u_{01} + u_{02}$ , соответствуют новые значения коэффициентов  $a_1 \neq a'_1 \neq a''_1$ ,  $a_2 \neq a'_2 \neq a''_2$  и  $b_1 \neq b'_1 \neq b''_1$ ,  $b_2 \neq b'_2 \neq b''_2$ . Поэтому на основании полученных уравнений невозможно сделать выводы о виде связи между напряжениями  $u$ ,  $u_1$ ,  $u_2$  или токами  $i$ ,  $i_1$ ,  $i_2$ .

Существенно отметить, что замена сигнала его спектром, лежащая в основе спектрального метода исследования цепей, эквивалентна замене одного источника этого сигнала несколькими источниками гармонических колебаний. Таким образом, при спектральном методе исследования рассматриваются токи (напряжения) в цепи, обусловленные действием нескольких источников. При этом необходимо складывать гармонические составляющие на выходе цепи, т. е. токи (напряжения), обусловленные каждым в отдельности источником гармонических колебаний. Такое сложение возможно именно в силу закона суперпозиции, справедливого только для линейных цепей. Поэтому спектральный метод исследования можно использовать лишь при исследовании процессов в линейных цепях.

## § 2.3. ЭНЕРГЕТИЧЕСКИЕ СООТНОШЕНИЯ В ЦЕПЯХ

### 1. Мощность и энергия в двухполюснике с активным сопротивлением

Как известно из курса физики, работа, совершаемая при перемещении элементарного заряда  $dq$  под действием разности потенциалов  $u = \bar{\varphi}_1 - \bar{\varphi}_2$ , равна

$$dN = u dq.$$

Отсюда получаем мощность, затрачиваемую в некоторой цепи, по которой протекает ток  $i = \frac{dq}{dt}$  под действием напряжения  $u$ :

$$p = \frac{dN}{dt} = ui. \quad (2.53)$$

Поскольку в этом уравнении фигурируют мгновенные значения напряжения  $u$  и тока  $i$ , мощность  $p$  называется мгновенной мощностью.

Рассмотрим мгновенную мощность в двухполюснике, имеющем чисто активное сопротивление  $Z = Z = R$  ( $X = 0$ ). Аргумент такого сопротивления равен нулю ( $\varphi = \arg R = 0$ ) и, следовательно [см. формулу (2.30)], напряжение на двухполюснике совпадает по фазе с током, протекающим через двухполюсник. Примем для простоты  $\psi_u = 0$ , что не нарушает общности выводов. Тогда

$$\begin{aligned} u &= U_m \cos \omega t, \\ i &= I_m \cos \omega t. \end{aligned} \quad (2.54)$$

Здесь в соответствии с законом Ома (2.21)

$$I_m = \frac{U_m}{R}. \quad (2.55)$$

Подставляя значения напряжения и тока из соотношений (2.54) в формулу (2.53), получим

$$p = U_m I_m \cos^2 \omega t,$$

или

$$p = \frac{1}{2} U_m I_m + \frac{1}{2} U_m I_m \cos 2\omega t. \quad (2.56)$$

Из этого соотношения видно, что мгновенная мощность в активном сопротивлении состоит из постоянной и переменной составляющих. Переменная составляющая мгновенной мощности изменяется по гармоническому закону, как и ток, но с удвоенной частотой. Амплитуда этой переменной составляющей равна постоянной составляющей мощности. Поэтому обе составляющие в сумме образуют пульсирующую мощность, которая в любой момент времени является положительной (или равной нулю), как показано на рис. 2.13.

На рисунке изображены графики изменения мгновенной мощности (2.56), ее постоянная составляющая  $p_-$  и переменная составляющая  $p_+$ , а также для сравнения приведены графики изменения напряжения и тока (2.54).

Положительный знак у пульсирующей мгновенной мощности означает, что она расходуется необратимо. Поэтому в соответствии с классификацией цепей рассматриваемый двухполюсник с активным сопротивлением является диссипативным двухполюсником. Сама же расходуемая необратимо пульсирующая мощность называется мгновенной активной мощностью.

Расходуемая в двухполюснике энергия (работа) определяется из формулы (2.53):

$$N = \int_0^t p dt = \int_0^t ui dt. \quad (2.57)$$

Представляет интерес определение энергии, расходуемой не за произвольное время  $t$ , как в формуле (2.57), а за период колебаний  $T$ :

$$N_0 = \int_0^T p dt. \quad (2.58)$$

Отсюда может быть определена энергия, расходуемая за единицу времени, т. е. средняя за период мощность:

$$P_a = \frac{N_0}{T}. \quad (2.59)$$

Это среднее значение мощности, расходуемой необратимо за период колебаний, является количественной характеристикой

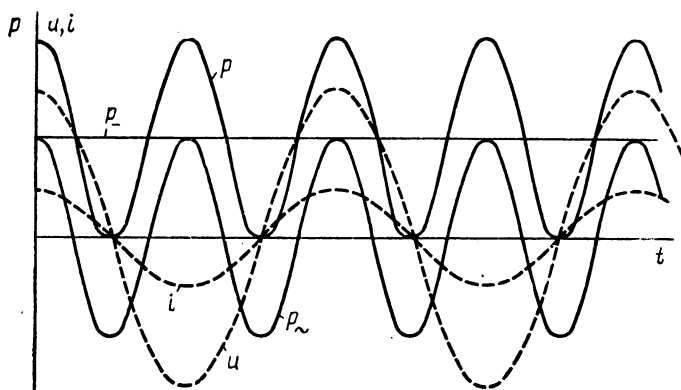


Рис. 2.13. Изменение мгновенной мощности в двухполюснике с активным сопротивлением

мгновенной (переменной) активной мощности (2.56). Поэтому постоянная величина (2.59) также называется активной мощностью.

Найдем активную мощность (2.59), расходуемую в рассматриваемом двухполюснике. Подставив в формулу (2.58) значение мощности из соотношения (2.56), найдем, что за период расходуется энергия

$$N_0 = \frac{1}{2} U_m I_m T.$$



Отсюда в соответствии с определением (2.59) находим активную мощность

$$P_a = \frac{1}{2} U_m I_m = \frac{1}{2} \frac{U_m^2}{R} = \frac{1}{2} R I_m^2. \quad (2.60)$$

Последние равенства написаны здесь с учетом формулы (2.55). В этих равенствах вместо сопротивления  $R$  может быть использована активная проводимость рассматриваемого двухполюсника  $G = \frac{1}{R}$ .

Из соотношений (2.56) и (2.60) видно, что активная мощность численно равна постоянной составляющей (среднему значению) мгновенной активной мощности. Это объясняется тем, что среднее за период значение гармонической составляющей мгновенной активной мощности равно нулю.

## 2. Мощность и энергия в двухполюснике с реактивным сопротивлением

Рассмотрим мгновенную мощность в двухполюснике, имеющем чисто реактивное сопротивление  $Z = jX$ , ( $R = 0$ ,  $Z = |X|$ ). Величина  $X$  может быть как положительной, так и отрицательной. Поэтому аргумент рассматриваемого сопротивления равен  $\varphi = \arg jX = \pm \frac{\pi}{2}$ . Учитывая это значение аргумента, напряжение и ток в двухполюснике запишем в следующем виде:

$$\begin{aligned} u &= U_m \cos \omega t, \\ i &= I_m \sin \omega t, \end{aligned} \quad (2.61)$$

где в соответствии с законом Ома (2.21)

$$I_m = \frac{U_m}{X}. \quad (2.62)$$

Амплитуда  $I_m$  в рассматриваемом случае может быть и положительной (при  $X > 0$ ,  $\varphi = \frac{\pi}{2}$ ) и отрицательной (при  $X < 0$ ,  $\varphi = -\frac{\pi}{2}$ ) величиной. Отрицательное значение амплитуды означает изменение фазы колебаний на угол  $\pi$ .

Подставив значения напряжения и тока из (2.61) в формулу (2.53), найдем мгновенную мощность

$$p = U_m I_m \sin \omega t \cos \omega t,$$

или

$$p = \frac{1}{2} U_m I_m \sin 2\omega t. \quad (2.63)$$

Графики изменения этой мощности при  $X > 0$ , а также графики изменения напряжения и тока показаны на рис. 2.14. Аналогичный вид имеет и график изменения мощности при  $X < 0$ .

Из соотношения (2.63) и рис. 2.14 видно, что мгновенная мощность не имеет постоянной составляющей и изменяется по гармоническому закону с удвоенной частотой. При этом на протяжении части периода мгновенная мощность является положительной ( $p > 0$ ), а на протяжении другой части периода — отрицательной ( $p < 0$ ).

Отрицательный знак у мощности означает, что она не расходуется и энергия вообще не поступает в двухполюсник, а, наоборот, возвращается из двухполюсника в источник. Такой возврат энергии

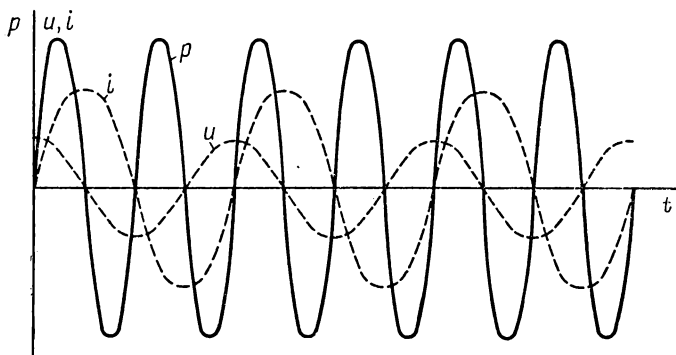


Рис. 2.14. Изменение мгновенной мощности в двухполюснике с реактивным сопротивлением

возможен только в том случае, если при  $p > 0$  мощность не расходуется необратимо, а накапливается в двухполюснике. При этом количество накопленной энергии должно равняться количеству возвращаемой энергии.

Действительно, из формул (2.58) и (2.63) находим, что расходуемая за период энергия в рассматриваемом случае равна нулю ( $N_0 = 0$ ). При этом и активная мощность (2.59) равна нулю.

Мощность вида (2.63), которая периодически поступает в двухполюсник и, не расходуясь в нем, возвращается обратно в источник, называется мгновенной реактивной мощностью. Двухполюсник же с реактивным сопротивлением, в котором происходит описанное накопление и возврат энергии, является по классификации цепей реактивным двухполюсником.

Мгновенная реактивная мощность (2.63) определяется количественно ее амплитудой:

$$P_r = \frac{1}{2} U_m I_m = \frac{1}{2} \frac{U_m^2}{X} = \frac{1}{2} X I_m^2. \quad (2.64)$$

Эта постоянная величина также называется реактивной мощностью. Реактивная мощность (2.64) может быть и положительной и отрицательной величиной в зависимости от знака  $X$  (знака  $I_m$ ).

Последние равенства в соотношении (2.64) написаны с учетом формулы (2.62). В этих равенствах вместо сопротивления  $X$  может быть использована реактивная проводимость двухполюсника  $B = -\frac{1}{X}$ .

### 3. Мощность и энергия в двухполюснике с комплексным сопротивлением

Рассмотрим общий случай, когда двухполюсник имеет комплексное сопротивление вида (2.24). При этом

$$\begin{aligned} u &= U_m \cos \omega t, \\ i &= I_m \cos (\omega t - \varphi), \end{aligned} \quad (2.65)$$

где амплитуды напряжения и тока связаны соотношением (2.29).

Подставив значения напряжения и тока из (2.65) в формулу (2.53), найдем мгновенную мощность двухполюсника:

$$p = U_m I_m \cos \omega t \cos (\omega t - \varphi),$$

или

$$p = \frac{1}{2} U_m I_m \cos \varphi + \frac{1}{2} U_m I_m \cos (2\omega t - \varphi). \quad (2.66)$$

Как и в случае двухполюсника с активным сопротивлением, эта мощность состоит из постоянной и переменной составляющих, причем последняя изменяется по гармоническому закону с удвоенной частотой. Среднее за период значение гармонической составляющей по-прежнему равно нулю. Поэтому активная мощность, определяемая по выражениям (2.59), (2.58), (2.66), равна постоянной составляющей мгновенной мощности:

$$P_a = \frac{1}{2} U_m I_m \cos \varphi. \quad (2.67)$$

Эта формула отличается от первого равенства в соотношениях (2.60) наличием множителя  $\cos \varphi$ . Таким образом, в случае двухполюсника с комплексным сопротивлением расходуемая мощность определяется не только амплитудами напряжения и тока, но и значением  $\cos \varphi$ , который получил название коэффициента мощности.

Коэффициент мощности изменяется в пределах от нуля до единицы в зависимости от значения аргумента  $\varphi$ . Так как по смыслу всегда  $P_a \geq 0$ , то из формулы (2.67) следует, что значение аргумента комплексного сопротивления может изменяться в пределах  $-\frac{\pi}{2} \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2}$ , как это и отмечалось при рассмотрении закона Ома.

Значения аргумента  $\varphi$  в указанных пределах определяются соотношением величин  $X$  и  $R$ , как это видно из формул (2.28). Если  $X = 0$ , то  $\varphi = 0$ , коэффициент мощности максимален ( $\cos \varphi = 1$ ) и формула (2.67) совпадает с формулой (2.60). Если  $R = 0$ , то равна нулю и расходуемая мощность (2.67), поскольку при этом  $\varphi = \pm \frac{\pi}{2}$  и  $\cos \varphi = 0$ .

Используя соотношения (2.29) и (2.25), формулу (2.67) можно представить в виде

$$P_a = \frac{1}{2} R I_m^2. \quad (2.67 \text{ а})$$

Из этой формулы, совпадающей с последним равенством в соотношении (2.60), следует, что в силу  $P_a \geq 0$  всегда  $R \geq 0$ , как это отмечалось при рассмотрении закона Ома.

Кроме мгновенной активной мощности, в двухполюснике с комплексным сопротивлением имеется мгновенная реактивная мощность. Она не определяется целиком вторым слагаемым в соотношении (2.66), как это можно было бы предположить по аналогии с формулой (2.63). Действительно, переменная мощность в выражении (2.66) может быть представлена в виде суммы двух составляющих:

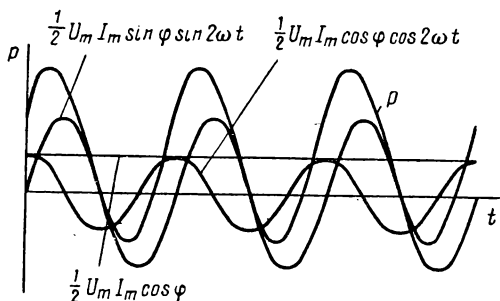


Рис. 2.15. Изменение мгновенной мощности в двухполюснике с комплексным сопротивлением

$$p = \frac{1}{2} U_m I_m \cos \varphi + \frac{1}{2} U_m I_m \cos \varphi \cos 2\omega t + \frac{1}{2} U_m I_m \sin \varphi \sin 2\omega t. \quad (2.68)$$

Эта мощность и ее составляющие графически изображены на рис. 2.15.

Второе слагаемое в уравнении (2.68) описывает гармоническую составляющую мгновенной мощности, имеющую амплитуду, равную постоянной составляющей этой мощности. Поэтому оба первых слагаемых в уравнении (2.68) образуют в сумме пульсирующую мощность, которая в любой момент времени является положительной (или равной нулю). Таким образом, получается полная аналогия с мгновенной активной мощностью (2.56). В этих двух случаях имеется лишь количественное различие за счет коэффициента мощности, входящего в соотношение (2.68). По смыслу же пульсирующая мощность по-прежнему определяет расходуемую необратимо энергию.

которую можно определить по формуле (2.57), подставив в нее значение рассматриваемой пульсирующей мощности. Таким образом, эта пульсирующая мощность является мгновенной активной мощностью.

Итак, мгновенная активная мощность в двухполюснике с комплексным сопротивлением описывается первыми двумя слагаемыми соотношения (2.68), а ее среднее за период значение определяется по формулам (2.67) и (2.67 а). Третье же слагаемое соотношения (2.68) соответствует энергии, которая периодически накапливается в рассматриваемом двухполюснике, когда  $\sin 2\omega t \geq 0$  (соответственно при  $\sin \varphi \geq 0$ ), и возвращается обратно в источник, когда  $\sin 2\omega t \leq 0$  (при  $\sin \varphi \geq 0$ ). По определению это и есть мгновенная реактивная мощность. Количественной мерой этой мощности является по-прежнему амплитуда синусоидальной составляющей мгновенной мощности, также называемая реактивной мощностью:

$$P_r = \frac{1}{2} U_m I_m \sin \varphi. \quad (2.69)$$

Эта формула тождественна первому равенству в соотношении (2.64) при  $\varphi = \pm \frac{\pi}{2}$ , ( $R=0$ ).

С учетом выражений (2.29) и (2.26) формула (2.69) может быть представлена в таком же виде, как и последнее равенство в соотношении (2.64):

$$P_r = \frac{1}{2} X I_m^2. \quad (2.69 \text{ а})$$

Если вместо комплексного сопротивления двухполюсника рассматривать его комплексную проводимость, то вместо формул (2.67а) и (2.69 а) получаются следующие соотношения:

$$P_a = \frac{1}{2} G U_m^2, \quad (2.67 \text{ б})$$

$$P_r = -\frac{1}{2} B U_m^2. \quad (2.69 \text{ б})$$

Для полной характеристики мощности в двухполюснике с комплексным сопротивлением (комплексной проводимостью) вводится понятие комплексной мощности

$$\dot{P} = P_a + jP_r = P \cos \varphi + jP \sin \varphi = P e^{j\varphi}. \quad (2.70)$$

Аналогично, но с учетом знака, эта мощность выражается через аргумент комплексной проводимости  $\chi = -\varphi$ .

Модуль комплексной мощности

$$P = \sqrt{P_a^2 + P_r^2} \quad (2.71)$$

называется полной, или кажущейся мощностью.

В соответствии с формулами (2.67), (2.67 а), (2.67 б) и (2.69), (2.69 а), (2.69 б), учитывая определения (2.70) и (2.71), получим:

$$\dot{P} = \frac{1}{2} U_m I_m e^{j\varphi} = \frac{1}{2} U_m I_m e^{-j\chi} = \frac{1}{2} \dot{U}_m I_m^* = \frac{1}{2} \dot{Z} I_m^* = \frac{1}{2} \dot{Y}^* U_m^* \quad (2.70 \text{ а})$$

$$P = \frac{1}{2} U_m I_m = \frac{1}{2} Z I_m^2 = \frac{1}{2} Y U_m^2 \quad (2.71 \text{ а})$$

$$P_a = \frac{1}{2} \operatorname{Re} \dot{U}_m I_m^* = P \cos \varphi, \quad (2.67 \text{ в})$$

$$P_r = \frac{1}{2} \operatorname{Im} \dot{U}_m I_m^* = P \sin \varphi. \quad (2.69 \text{ в})$$

Здесь и ниже звездочкой отмечаются комплексно сопряженные величины ( $I_m^* = I_m e^{-j\varphi_i}$ ,  $\dot{Y}^* = G - jB$ ).

Рассмотренный выше коэффициент мощности с учетом определения (2.70) характеризует соотношение между активной и полной мощностью:

$$\cos \varphi = \frac{P_a}{P} = \frac{R}{Z}. \quad (2.72)$$

Этот коэффициент удобно использовать при характеристике силовых электрических систем (промышленных электроустановок, цепей питания радиотехнических устройств и т. д.). В радиотехнических же цепях, таких, например, как селективные системы, активная мощность является не полезной, а вредной мощностью потерь, которая ухудшает селективные свойства системы\*. В подобных случаях полезной является не активная, а реактивная мощность. Поэтому в радиотехнической практике пользуются другими энергетическими коэффициентами, характеризующими соотношение между реактивной и активной мощностью:

$$Q = \frac{|P_r|}{P_a} = \frac{|X|}{R} = \frac{|B|}{G}, \quad (2.73)$$

$$d = \frac{1}{Q} = \frac{P_a}{|P_r|} = \frac{R}{|X|} = \frac{G}{|B|}. \quad (2.74)$$

Эти коэффициенты называются соответственно добротностью и затуханием цепи.

При расчете добротности бывает удобно выражать ее не через реактивную мощность, а через максимальную энергию, накапливаемую в цепи. Максимальная энергия  $N_{\max}$  накапливается в цепи за время, пока  $\sin 2\omega t$  в третьем слагаемом соотношении (2.68) сохраняет неизменный знак, т. е. в интервале от 0 до  $\frac{T}{4}$ . Подставив

\* Иногда, впрочем, и в радиотехнических устройствах получают некоторые полезные эффекты, увеличивая расходуемую активную мощность, хотя селективность при этом ухудшается.

это слагаемое в формулу (2.57) и приняв  $t = \frac{T}{4}$ , с учетом формулы (2.69) получим после интегрирования:

$$N_{\max} = \frac{|P_r|}{\omega}. \quad (2.75)$$

Подставив отсюда значение  $P_r$  в формулу (2.73), найдем окончательно:

$$Q = \omega \frac{N_{\max}}{P_a} = 2\pi \frac{N_{\max}}{N_0}. \quad (2.76)$$

Последнее равенство написано с учетом определения (2.59).

Из формулы (2.76) видно, что добротность цепи зависит от частоты. Поэтому при прохождении через цепь сложных, например, модулированных сигналов добротность цепи на частотах различных гармонических составляющих получается неодинаковой. Чтобы внести определенность в значение добротности, ее обычно рассматривают на некоторой фиксированной частоте, например на несущей частоте  $\omega_0$ .

#### 4. Действующее и среднее значения гармонических величин

В двухполюснике, через который протекает постоянный ток (2.7) под действием постоянного напряжения (2.6), мгновенная мощность (2.53) является постоянной положительной величиной, т. е. ее можно рассматривать как активную мощность:

$$p = P_a = UI. \quad (2.77)$$

В этом случае понятие реактивной мощности теряет смысл и, следовательно, двухполюсник может иметь только активное сопротивление  $\dot{Z} = R$ , ( $X = 0$ ). При этом закон Ома (2.20) приобретает вид

$$U = RI = \frac{I}{G}. \quad (2.78)$$

С учетом этого равенства мощность (2.77) может быть выражена через сопротивление двухполюсника:

$$P_a = RI^2 = \frac{U^2}{R}. \quad (2.79)$$

Если через двухполюсник проходит гармонический ток, то активная мощность определяется формулами (2.60). Сопоставляя формулы (2.60) и (2.79), находим, что в обоих случаях активная мощность получается одинаковой, если выполняются следующие условия:

$$\begin{aligned} U &= \frac{U_m}{\sqrt{2}} \approx 0,707 U_m, \\ I &= \frac{I_m}{\sqrt{2}} \approx 0,707 I_m. \end{aligned} \quad (2.80)$$

Эти величины постоянного напряжения и тока называются действующими, или эффективными значениями гармонического напряжения  $u$  и тока  $i$ , которые с учетом формул (2.58) и (2.59) можно рассматривать как результат их квадратического усреднения:

$$U = \sqrt{\frac{1}{T} \int_0^T u^2 dt},$$

$$I = \sqrt{\frac{1}{T} \int_0^T i^2 dt}.$$
(2.80 а)

Можно производить также не квадратичное, а линейное усреднение гармонических величин. При этом надо учитывать не среднее за период значение гармонической величины, которое равно нулю, а ее среднее за полпериода значение:

$$U_{\text{ср}} = \frac{2}{T} \int_0^{\frac{T}{2}} u dt,$$

$$I_{\text{ср}} = \frac{2}{T} \int_0^{\frac{T}{2}} i dt.$$
(2.81)

Подставляя сюда значения гармонического напряжения и тока, найдем после интегрирования:

$$U_{\text{ср}} = \frac{2}{\pi} U_m \approx 0,637 U_m,$$

$$I_{\text{ср}} = \frac{2}{\pi} I_m \approx 0,637 I_m.$$
(2.81 а)

Эти значения гармонических напряжений и токов называются их средними значениями.

## § 2.4. АКТИВНЫЕ ЭЛЕМЕНТЫ ЦЕПИ

### 1. Идеальные источники напряжения и тока

Источники электрической энергии, или активные элементы, можно характеризовать мощностью, отдаваемой ими в нагрузку, т. е. в пассивную цепь, являющуюся потребителем энергии. Эта мощность определяется напряжением на зажимах источника и током, посылаемым источником в нагрузку.

Указанные напряжение и ток называются соответственно напряжением и током источника. Их называют также активным



напряжением и током в отличие от пассивного напряжения (падения напряжения) и тока в пассивных элементах цепи. Напряжение и ток источника, заданные раздельно, более полно характеризуют источник, поскольку их различным значениям может соответствовать одинаковая мощность, отдаваемая в нагрузку.

При изменении нагрузки, подключенной к источнику, в общем случае меняется как активный ток, так и активное напряжение. Однако практически удобнее рассматривать источники, в которых при изменении нагрузки меняется только активный ток или только активное напряжение. Такие активные элементы называются идеальными источниками.

Идеальным источником напряжения называется такой активный элемент, у которого при изменении нагрузки напряжение источника остается неизменным. Напряжение такого источника называется задающим напряжением, или электродвижущей силой (э. д. с.).

Мгновенное значение задающего напряжения обозначается  $e$ , а его комплексная амплитуда  $\dot{E}_m$ .

Условное изображение идеального источника напряжения показано на рис. 2.16, а, где стрелкой обозначено положительное направление отсчета задающего напряжения. Задающее напряжение считается положительным, если потенциал возрастает в направлении, указанном стрелкой, т. е. потенциал верхнего зажима больше потенциала нижнего зажима источника.

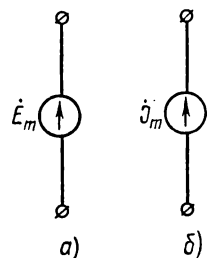


Рис. 2.16. Идеальные источники напряжения и тока

Идеальный источник напряжения в отличие от пассивного двухполюсника не обладает сопротивлением; т. е. его сопротивление равно нулю (проводимость равна бесконечности). Действи-

тельно, при сопротивлении источника, отличном от нуля, изменение тока источника означало бы изменение падения напряжения на этом сопротивлении. Другими словами, при этом менялось бы напряжение на зажимах активного элемента, что противоречит определению идеального источника напряжения.

Отсутствие сопротивления у идеального источника напряжения означает, что в нем нет потерь энергии, т. е. полная мощность источника целиком поступает в нагрузку и не выделяется внутри источника.

При последовательном соединении идеальных источников напряжения их задающие напряжения складываются подобно сложению напряжений по формуле (2.49):

$$\dot{E}_m = \sum_{k=1}^n \dot{E}_{mk}. \quad (2.82)$$

Таким образом, при последовательном соединении идеальных источников напряжения они могут быть заменены одним идеальным

источником с задающим напряжением вида (2.82). Поскольку в формуле (2.82) производится алгебраическое сложение, при встречном включении источников их э. д. с. вычитаются.

Параллельное соединение идеальных источников напряжения лишено смысла, так как при этом каждый из источников, имея сопротивление, равное нулю, будет замыкать накоротко остальные источники.

Идеальным источником тока называется такой активный элемент, в котором ток источника остается неизменным при изменении нагрузки. Ток такого источника называется задающим током. Мгновенное значение задающего тока будем обозначать  $J$ , а его комплексную амплитуду  $j_m$ .

Условное изображение идеального источника тока приведено на рис. 2.16, б, где стрелкой показано положительное направление отсчета задающего тока. Задающий ток считается положительным, если он протекает в направлении, указанном стрелкой.

Идеальный источник тока не обладает проводимостью, т. е. его проводимость равна нулю (сопротивление равно бесконечности). Действительно, при конечном сопротивлении такого источника через него могли бы протекать токи других источников. При этом результирующий ток источника мог бы меняться, что противоречит определению идеального источника тока.

Таким образом, последовательное соединение идеальных источников тока лишено смысла, поскольку каждый из них, имея бесконечно большое сопротивление, представляет собой разрыв цепи для тока других источников.

При параллельном соединении идеальных источников тока их задающие токи складываются подобно сложению токов по формуле (2.43):

$$j_m = \sum_{k=1}^n j_{mk}. \quad (2.83)$$

Таким образом, при параллельном соединении идеальных источников тока они могут быть заменены одним идеальным источником с задающим током вида (2.83). При встречном включении источников их задающие токи вычитаются, поскольку в формуле (2.83) производится алгебраическое сложение.

Как и в случае идеального источника напряжения, в идеальном источнике тока потери энергии отсутствуют (вследствие равенства нулю проводимости источника).

## 2. Реальные источники напряжения и тока

Некоторые реальные источники электрической энергии по своим свойствам бывают близки к идеальным источникам, т. е. в них активное напряжение или ток почти не меняются при изменении

нагрузки. В этих случаях можно пренебрегать изменением напряжения или тока источника. Такой источник отображается эквивалентной схемой в виде идеального источника напряжения или тока.

Как правило, при изменении нагрузки невозможно пренебрегать изменением напряжения и тока источника. В подобных случаях реальный источник отображается эквивалентной схемой, в которую наряду с идеальным источником напряжения или тока должен входить некоторый пассивный двухполюсник. Сопротивление (проводимость) этого двухполюсника является в общем случае комплексной величиной и называется внутренним сопротивлением  $\dot{Z}_i = R_i + jX_i$  (внутренней проводимостью  $\dot{Y}_i = G_i + jB_i$ ). В частном случае внутреннее сопротивление (проводимость) может быть чисто активным, т. е.  $X_i = 0$  ( $B_i = 0$ ) и  $\dot{Z}_i = R_i$  ( $\dot{Y}_i = G_i$ ).

Наличие пассивного двухполюсника в эквивалентной схеме источника означает, что в нем происходят потери энергии. Однако

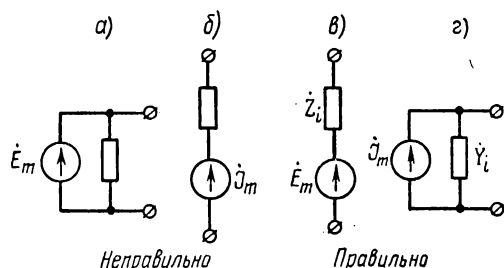


Рис. 2.17. Реальные источники напряжения и тока

не при любом включении указанного двухполюсника отображаются свойства реального источника. Так, включение пассивного двухполюсника по схеме рис. 2.17, а и б не отображает свойств реальных источников. Действительно, в этих схемах на зажимах источника сохраняется неизменное задающее напряжение или неиз-

менный задающий ток, хотя потери энергии здесь имеются. Правильными являются эквивалентные схемы реальных источников, показанные на рис. 2.17, в и г.

В реальном источнике напряжения, схема которого приведена на рис. 2.17, в, при изменении нагрузки меняется как ток, так и напряжение источника. Покажем это, применив второй закон Кирхгофа к схеме рис. 2.18, а. Здесь нагрузка отображена двухполюсником с сопротивлением  $\dot{Z}$ .

Применяя формулу (2.48) к контуру, содержащему и пассивные и активные элементы, необходимо учитывать правило знаков, оговоренное выше. Пассивный ток считается положительным, если он протекает от точки с большим потенциалом к точке с меньшим потенциалом. Напряжение  $u = \bar{\varphi}_1 - \bar{\varphi}_2$  является положительным при  $\bar{\varphi}_1 > \bar{\varphi}_2$ . Поэтому при обходе контура на рис. 2.18, а в направлении тока  $\dot{I}_m$  падения напряжения  $\dot{U}_{mi}$  и  $\dot{U}_m$  следует считать положительными. Переход же через источник в выбранном направлении означает переход от точки с меньшим потенциалом к точке с большим потенциалом, как было условлено. При этом задающее напря-

жение  $\dot{E}_m$  надо было бы подставить в уравнение (2.48) с отрицательным знаком, что противоречит правилу знаков. Во избежание указанного противоречия задающие напряжения в уравнении (2.48) перенесем из левой части равенства в правую:

$$\sum_{k=1}^n \dot{U}_{mk} = \dot{E}_m. \quad (2.84)$$

В этом уравнении пассивные напряжения имеют положительный знак, если контур обходится в положительном направлении тока, а задающее напряжение  $\dot{E}_m$  считается положительным, если направление  $\dot{E}_m$  совпадает с направлением обхода контура.

Второй закон Кирхгофа (2.84) будем применять для любого замкнутого контура, содержащего источники напряжения.

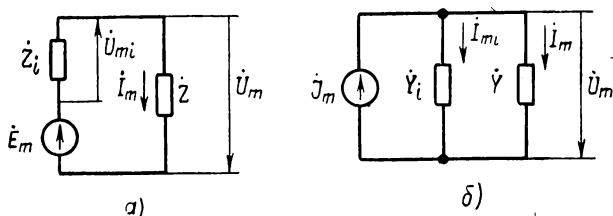


Рис. 2.18. Подключение нагрузки к реальным источникам напряжения и тока

При этом согласно выражению (2.82) под величиной  $\dot{E}_m$  будем понимать сумму всех э. д. с. в контуре.

В соответствии с уравнением (2.84) для рассматриваемого контура (см. рис. 2.18, а)

$$\dot{U}_{mi} + \dot{U}_m = \dot{E}_m,$$

или

$$\dot{U}_m = \dot{E}_m - \dot{Z}_i \dot{I}_m, \quad (2.85)$$

так как  $\dot{U}_{mi} = \dot{Z}_i \dot{I}_m$ .

Из формулы (2.85) видно, что напряжение реального источника  $\dot{U}_m$  не равно задающему напряжению  $\dot{E}_m$ . При этом изменение нагрузочного сопротивления  $\dot{Z}$  влечет за собой изменение не только тока  $\dot{I}_m$ , но и напряжения  $\dot{U}_m$  реального источника (при неизменном задающем напряжении).

Рассмотрим теперь реальный источник тока (см. рис. 2.17, б). Подключение к такому источнику нагрузки в виде двухполюсника с проводимостью  $\dot{Y}$  показано на рис. 2.18, б. Свойства приведенной схемы можно установить, применив к ней первый закон Кирхгофа.

Условимся о правиле знаков в уравнении (2.42) при наличии задающих токов. Рассмотрим это правило на примере схемы, изображенной на рис. 2.18, б. Здесь принято, что потенциал верхнего узла выше потенциала нижнего узла, когда задающий ток притекает к верхнему узлу (т. е. положительные заряды переносятся к верхнему узлу). В соответствии с правилом знаков для пассивных токов токи  $\dot{I}_{mi}$  и  $\dot{I}_m$ , оттекающие от верхнего узла с большим потенциалом, следует считать положительными. Однако, если считать отрицательным задающий ток, притекающий к верхнему узлу, то это будет противоречить правилу знаков, установленному выше для задающих токов.

Во избежание этого противоречия задающие токи в уравнении (2.42) перенесем из левой части равенства в правую:

$$\sum_{k=1}^n \dot{I}_{mk} = \dot{J}_m. \quad (2.86)$$

Будем считать положительными пассивные токи, оттекающие от узла, и задающий ток, притекающий к узлу. При этом в соответствии с формулой (2.83) под задающим током  $\dot{J}_m$  будем понимать сумму всех задающих токов, притекающих к узлу.

Согласно уравнению (2.86) для верхнего узла схемы рис. 2.18, б

$$\dot{I}_{mi} + \dot{I}_m = \dot{J}_m.$$

или

$$\dot{I}_m = \dot{J}_m - \dot{Y}_i \dot{U}_m, \quad (2.87)$$

так как  $\dot{I}_{mi} = \dot{Y}_i \dot{U}_m$ .

Из формулы (2.87) видно, что при изменении проводимости нагрузки  $\dot{Y}$  меняется не только напряжение  $\dot{U}_m$ , но и ток реального источника (при неизменном задающем токе).

### 3. Отдача активной мощности реальным источником

Рассмотрим отдачу активной мощности в нагрузку на примере реального источника напряжения (см. рис. 2.18, а). Используя закон Ома, найдем активную мощность в нагрузке с сопротивлением  $\dot{Z} = R + jX$ . Так как для данной схемы полное сопротивление цепи равно

$$\dot{Z} + \dot{Z}_i = (R + R_i) + j(X + X_i)$$

и

$$|\dot{Z} + \dot{Z}_i| = \sqrt{(R + R_i)^2 + (X + X_i)^2},$$

то, подставив в формулу (2.67) значение  $\dot{I}_m = \frac{E_m}{|\dot{Z} + \dot{Z}_i|}$ , получим

$$P_a = \frac{E_m^2}{2} \cdot \frac{R}{(R + R_i)^2 + (X + X_i)^2}. \quad (2.88)$$

Из этого уравнения видно, что при фиксированном значении  $X_i$  активная мощность зависит от выбора реактивного сопротивления нагрузки  $X$ . График этой зависимости показан на рис. 2.19.

Из рис. 2.19 и формулы (2.88) видно, что активная мощность в нагрузке становится максимальной, когда

$$X + X_i = 0, \quad (2.89)$$

или

$$X = -X_i. \quad (2.89 \text{ а})$$

При этом

$$P_{a \max} = \frac{E_m^2}{2} \cdot \frac{R}{(R + R_i)^2}. \quad (2.90)$$

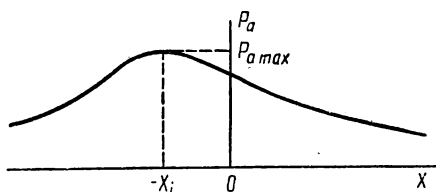
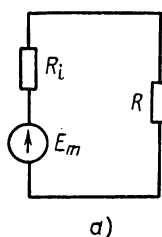


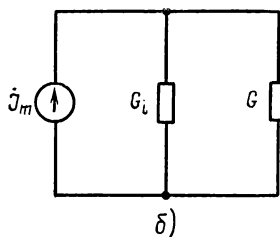
Рис. 2.19. Изменение активной мощности, отдаваемой в нагрузку, при изменении реактивного сопротивления нагрузки

Явление, при котором реактивные сопротивления цепи взаимно компенсируются, называется резонансом. Условием резонанса для рассматриваемой цепи является критерий (2.89) или (2.89 а).

При резонансе цепь имеет чисто активное сопротивление, как показано на рис. 2.20, а. В этом случае величина сопротивления



а)



б)

Рис. 2.20. Схемы цепи при резонансе

получается минимальной ( $Z = Z_{\min} = R + R_i$ ), в цепи протекает максимальный ток  $I_{m \max} = \frac{E_m}{R + R_i}$ , что и является причиной выделения максимальной активной мощности в нагрузке.

Аналогичная картина наблюдается и в случае

реального источника тока (см. рис. 2.18, б): при компенсации реактивных проводимостей, когда

$$B = -B_i, \quad (2.91)$$

получается схема с активной проводимостью (рис. 2.20, б). При этом в нагрузке также выделяется максимальная активная мощность, равная

$$P_{a \max} = \frac{J_m^2}{2} \cdot \frac{G}{(G + G_i)^2}. \quad (2.90 \text{ а})$$

По аналогии с резонансом в цепи рис. 2.18, а компенсация реактивных проводимостей в схеме рис. 2.18, б также должна быть названа резонансом. Чтобы отличать друг от друга эти два вида резонансов, резонанс при последовательном соединении элементов, когда компенсируются реактивные сопротивления, будем называть

последовательным резонансом, а резонанс при параллельном соединении элементов, когда компенсируются реактивные проводимости,— параллельным резонансом.

При последовательном резонансе максимальная активная мощность (2.90) имеет различную величину при разных значениях  $R$  (и фиксированном значении  $R_i$ ). Эта максимальная мощность стремится к нулю как при  $R \rightarrow 0$ , так и при  $R \rightarrow \infty$  (рис. 2.21), имея, следовательно, максимальное значение при некотором оптимальном значении сопротивления  $R = R_{\text{opt}}$ . При максимальном значении мощности  $P_{a \text{ max}}$  она называется мощностью maximum maximum

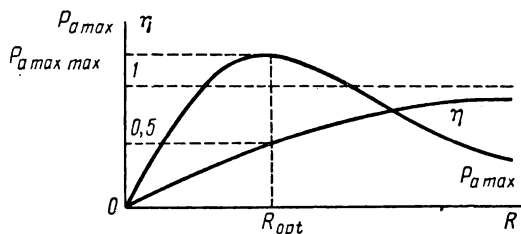


Рис. 2.21. Изменение максимальной активной мощности, отдаваемой в нагрузку, при изменении активного сопротивления нагрузки

и имеет обозначение  $P_{a \text{ max max}}$ . Существование такой мощности обусловлено тем, что при  $R = 0$  равно нулю напряжение на нагрузке, а при  $R \rightarrow \infty$  стремится к нулю ток в цепи.

Оптимальное значение нагрузочного сопротивления определяется из уравнения

$$\frac{dP_{a \text{ max}}}{dR} = 0. \quad \text{Подста-}$$

вив сюда значение  $P_{a \text{ max}}$  из формулы (2.90), найдем

$$R_{\text{opt}} = R_i. \quad (2.92)$$

Аналогично для схемы на рис. 2.20, б

$$G_{\text{opt}} = G_i. \quad (2.92 \text{ а})$$

Учитывая эти значения оптимальной нагрузки, из формул (2.90), (2.90 а) получаем

$$P_{a \text{ max max}} = \frac{E_m^2}{8R_i} = \frac{J_m^2}{8G_i}. \quad (2.93)$$

Мощность (2.93) получается при одновременном выполнении двух условий (2.89 а), (2.92) или (2.91), (2.92 а), которые можно записать в виде одного критерия:

$$\dot{Z} = \dot{Z}_{\text{opt}} = \dot{Z}_i^* \quad (2.94)$$

или

$$\dot{Y} = \dot{Y}_{\text{opt}} = \dot{Y}_i^*. \quad (2.94 \text{ а})$$

Нагрузка, удовлетворяющая условию (2.94) или (2.94 а), называется согласованной.

Если нагрузка является фиксированной, то можно согласовывать не нагрузку с источником, а источник с нагрузкой. При этом крите-

рий согласования (2.94), (2.94 а) следует представить в другом виде:

$$\dot{Z}_i = \dot{Z}_{i \text{ opt}} = \dot{Z}^*, \quad (2.94 \text{ б})$$

$$\dot{Y}_i = \dot{Y}_{i \text{ opt}} = \dot{Y}^*. \quad (2.94 \text{ в})$$

Для суммарной активной мощности, расходуемой источником на полном сопротивлении цепи  $R + R_i$  (см. рис. 2.20, а), получается выражение, аналогичное формуле (2.90):

$$P_{a0} = \frac{E_m^2}{2} \cdot \frac{R + R_i}{(R + R_i)^2} = \frac{E_m^2}{2(R + R_i)}.$$

Отсюда с учетом формулы (2.90) находим коэффициент полезного действия (к.п.д.) схемы при резонансе:

$$\eta = \frac{P_{a \text{ max}}}{P_{a0}} = \frac{R}{R + R_i} = \frac{1}{1 + \frac{R_i}{R}}. \quad (2.95)$$

График изменения к.п.д. показан на рис. 2.21. Из этого графика и формулы (2.95) видно, что при согласовании источника и нагрузки к.п.д. получается небольшим:  $\eta = 0,5$ . При увеличении же сопротивления  $R$ , когда к.п.д. приближается к единице, уменьшается мощность  $P_{a \text{ max}}$ .

В радиотехнических устройствах различным образом выбирают нагрузку в зависимости от назначения устройства и его характеристик. В мощных установках, например в мощных радиопередатчиках, усилителях и т. д., каждый процент потерь мощности приводит к существенным экономическим потерям. Поэтому в таких устройствах выбирают  $R > R_{\text{opt}}$ , стремясь к увеличению к.п.д. в разумных пределах, пока отдаваемая мощность уменьшается не слишком сильно. В маломощных же установках потеря даже нескольких десятков процентов мощности экономически мало ощутима. Поэтому в маломощных передатчиках, например, где особенно важно получить мощность  $P_{a \text{ max max}}$  для увеличения дальности связи, выбирают согласованную нагрузку.

#### 4. Отдача полной мощности реальным источником

В радиотехнических устройствах, где происходят различные преобразования маломощных сигналов (селекция и др.), величина активной мощности в нагрузке может вообще не представлять интереса. В подобных случаях существенной при анализе процесса может оказаться величина полной (кажущейся), а не активной мощности.



Рассмотрим отдачу полной мощности в нагрузку также на примере реального источника напряжения (см. рис. 2.18. а). Согласно второй формуле в соотношениях (2.71 а) и закону Ома эта мощность равна

$$P = \frac{E_m^2}{2} \cdot \frac{Z}{|Z + Z_i|^2} = \frac{E_m^2}{2Z_i^2} \cdot \frac{Z}{\left|1 + \frac{Z}{Z_i}\right|^2}.$$

Учитывая, что  $\dot{Z} = Z e^{j\varphi}$  и  $\dot{Z}_i = Z_i e^{j\varphi_i}$ , и введя обозначения  $\frac{Z}{Z_i} = M$ ,  $\varphi - \varphi_i = \Delta\varphi$ , после несложных преобразований получим

$$P = \frac{E_m^2}{2Z_i^2} \cdot \frac{Z}{|1 + M \cos \Delta\varphi + jM \sin \Delta\varphi|^2},$$

или

$$P = \frac{E_m^2}{2Z_i^2} \cdot \frac{M}{1 + 2M \cos \Delta\varphi + M^2}.$$

Считая  $\Delta\varphi$  постоянной величиной ( $\varphi = \text{const}$  и  $\varphi_i = \text{const}$ ), исследуем зависимость полной мощности от параметра  $M$ . Из уравнения  $\frac{dP}{dM} = 0$  найдем, что при  $M = 1$ , т. е. при

$$Z = Z_i, \quad (2.96)$$

полная мощность получается максимальной и равной

$$P_{\max} = \frac{E_m^2}{4Z_i(1 + \cos \Delta\varphi)}. \quad (2.97)$$

При выполнении критерия (2.96) нагрузка и источник считаются согласованными в смысле получения максимальной полной мощности (2.97).

Максимальная мощность (2.97) может иметь различную величину при разных значениях  $\Delta\varphi$ , т. е. при различных значениях  $\varphi$  и  $\varphi_i$ . В частном случае, когда  $\varphi = \varphi_i$  и  $\Delta\varphi = 0$ , вместо общего критерия согласования (2.96) получаем частный критерий

$$\dot{Z} = \dot{Z}_i, \quad (2.96 \text{ а})$$

при соблюдении которого

$$P_{\max} = \frac{E_m^2}{8Z_i}. \quad (2.97 \text{ а})$$

Из последней формулы (2.28) видно, что в другом частном случае, когда  $X = -X_i$  и  $R = R_i = 0$ , получается  $\Delta\varphi = \pm \pi$  и  $\cos \Delta\varphi = -1$ . При этом согласно выражению (2.97)  $P_{\max \max} = \infty$ . Поскольку в реальной цепи всегда имеются необратимые потери энергии ( $R + R_i \neq 0$ ), получение полной мощности  $P_{\max \max}$  лишено физического смысла.

## § 2.5. ПАССИВНЫЕ ЭЛЕМЕНТЫ ЦЕПИ

### 1. Диссипативные элементы

Как уже говорилось, диссипативные элементы необратимо расходуют электрическую энергию. В § 2.3 было показано, что подобное расходование энергии происходит в двухполюснике, имеющем чисто активное сопротивление  $\dot{Z} = R$ .

Таким образом, диссипативными элементами являются любые элементарные двухполюсники с активным сопротивлением  $R$ . Такие элементы, используемые в качестве деталей радиотехнических устройств, называются сопротивлениями, или резисторами \*. Изображаются они стандартно (см. рис. 1.19, б и 1.20, а) и обозначаются  $R$ .

Расходование активной мощности может происходить также в устройствах, которые для этого не предназначены — в соединительных проводах, конденсаторах и т. д. Потери в этих устройствах отображаются диссипативным элементом (см. рис. 1.20, а), который называется сопротивлением потерь и обозначается  $R$  (при параллельном включении) и  $r$  (при последовательном включении). При этом используется соответствующий индекс:  $R_c$  — сопротивление потерь конденсатора,  $r_k$  — сопротивление потерь в некотором контуре и т. д.

Если потери активной мощности происходят внутри источников электрической энергии или внутри электронных ламп, то, как и в предыдущем параграфе, они отображаются в эквивалентной схеме источника или лампы с помощью диссипативного элемента, называемого внутренним сопротивлением  $R_i$ .

С диссипативным элементом можно встретиться и в других, подчас самых неожиданных случаях, например, при рассмотрении излучения антенны. Ведь энергия, уносимая излучаемыми электромагнитными волнами, является для антенны потерянной безвозвратно. Поэтому такие потери энергии тоже могут быть отображены в эквивалентной схеме антенны с помощью диссипативного элемента, называемого сопротивлением излучения и обозначаемого  $R_\Sigma$ .

Активное сопротивление диссипативного элемента, как уже отмечалось, имеет аргумент  $\varphi = 0$ , так что напряжение и ток в этом элементе совпадают по фазе (рис. 2.22). При этом закон Ома (2.22) получается справедливым и для мгновенных значений напряжений и токов:

$$\frac{u}{i} = \frac{\dot{U}_m}{\dot{i}_m} = R. \quad (2.98)$$

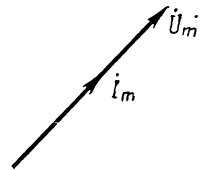


Рис. 2.22. Векторная диаграмма напряжения и тока для диссипативного элемента

\* От слова «resist» (англ.) — сопротивляться, «resistor» — сопротивление.

В соответствии с первыми формулами (2.51) и (2.45) при последовательном соединении диссипативных элементов складываются их сопротивления, а при параллельном — их проводимости. В случае параллельного соединения двух диссипативных элементов формула (2.46) принимает вид

$$R = \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2}. \quad (2.99)$$

По определению линейных элементов с постоянными параметрами сопротивление рассматриваемого диссипативного элемента удовлетворяет условию  $R = \text{const}$ . При  $R = R(t)$  диссипативный элемент является параметрическим, а при  $R = R(u, i)$  — нелинейным элементом.

## 2. Емкостные элементы

Емкостным реактивным элементом может быть конденсатор, в электрическом поле которого происходит накопление энергии. При этом идеальный емкостный накопитель не должен расходовать активную мощность, т. е. сопротивление потерь в нем должно отсутствовать.

Для идеального емкостного элемента (см. рис. 1.20, б) накапливаемый заряд  $q$  пропорционален напряжению на элементе:

$$q = Cu, \quad (2.100)$$

где  $C$  — параметр элемента, называемый емкостью.

Из формулы (2.100) устанавливается связь между напряжением и емкостным током:

$$i = \frac{dq}{dt} = C \frac{du}{dt} + u \frac{dC}{dt}. \quad (2.101)$$

Для параметрической емкости  $C = C(t)$  и  $\frac{dC}{dt} \neq 0$ . Для нелинейной емкости  $C = C(u)$  и  $\frac{dC}{dt} = \frac{dC}{du} \frac{du}{dt} \neq 0$ . Для линейного емкостного элемента с постоянными параметрами  $C = \text{const}$ ,  $\frac{dC}{dt} = 0$  и уравнение (2.101) упрощается:

$$i = C \frac{du}{dt}. \quad (2.102)$$

Это уравнение позволяет установить закон Ома для емкостного элемента. Переходя в формуле (2.102) к символическим отображениям напряжения и тока, получим

$$I_m e^{j\omega t} = C \frac{d}{dt} (U_m e^{j\omega t}).$$

Отсюда

$$\dot{I}_m = \dot{Y}_C \dot{U}_m, \quad (2.103)$$

$$\dot{Y}_C = jB_C = j\omega C, \quad B_C = \omega C, \quad \chi_C = \arg \dot{Y}_C = \frac{\pi}{2}, \quad (2.104)$$

или

$$\dot{U}_m = \dot{Z}_C \dot{I}_m, \quad (2.105)$$

$$\dot{Z}_C = jX_C = \frac{1}{j\omega C} = -j\frac{1}{\omega C}, \quad X_C = -\frac{1}{\omega C}, \quad \varphi_C = \arg \dot{Z}_C = -\frac{\pi}{2}. \quad (2.106)$$

Таким образом, сопротивление и проводимость идеального емкостного элемента являются чисто реактивными, как это и должно быть при накоплении в элементе реактивной мощности. Эта мощность согласно соотношению (2.696) и второй формуле (2.104) равна

$$P_r = -\frac{1}{2} \omega C U_m^2. \quad (2.107)$$

Подставляя полученное значение мощности в формулу (2.75), определим максимальную энергию, запасаемую в электрическом поле конденсатора:

$$N_{\max} = \frac{1}{2} C U_m^2. \quad (2.108)$$

Максимальная энергия получается в моменты времени, когда напряжение на конденсаторе достигает максимума, т. е. принимает амплитудное значение.

В соответствии с формулами (2.103) — (2.106) ток в емкостном элементе опережает по фазе напряжение на угол  $\frac{\pi}{2}$  (рис. 2.23).

Емкостная проводимость увеличивается, а емкостное сопротивление соответственно уменьшается с ростом частоты и емкости. Это объясняется тем, что при фиксированном значении амплитуды напряжения с ростом емкости увеличивается заряд, а с ростом частоты — скорость его перемещения. При этом увеличивается заряд, протекающий в цепи за единицу времени, что означает увеличение амплитуды тока  $i = \frac{dq}{dt}$  и соответствующее уменьшение сопротивления.

График частотной зависимости сопротивления и проводимости емкостного элемента показан на рис. 2.24.

Согласно второй формуле (2.45) при параллельном соединении емкостных элементов

$$\omega C = \sum_{k=1}^n \omega C_k,$$

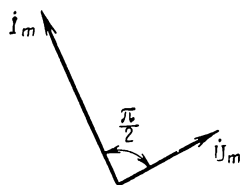


Рис. 2.23. Векторная диаграмма напряжения и тока для емкостного элемента

т. е. такое соединение можно заменить одним элементом с суммарной емкостью

$$C = \sum_{k=1}^n C_k. \quad (2.109)$$

Согласно второй формуле (2.51) аналогично получаем, что при последовательном соединении емкостных элементов суммарная емкость определяется из условия

$$\frac{1}{C} = \sum_{k=1}^n \frac{1}{C_k}. \quad (2.110)$$

В частности, при последовательном соединении двух емкостей формула (2.52) принимает следующий вид:

$$C = \frac{C_1 C_2}{C_1 + C_2}. \quad (2.111)$$

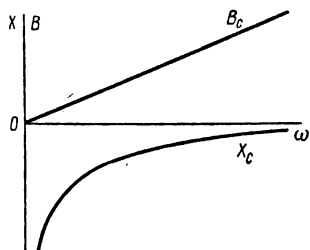


Рис. 2.24. График частотной зависимости сопротивления и проводимости емкостного элемента

При расходовании в конденсаторе активной мощности потери энергии происходят в диэлектрике конденсатора и зависят от напряженности поля в диэлектрике, т. е. определяются напряжением на конденсаторе. Отсюда следует, что по аналогии с рис. 2.9 эквивалентная схема конденсатора с потерями должна содержать диссипативный элемент, к которому приложено полное напряжение конденсатора, как на рис. 2.25, а.

Для такой эквивалентной схемы конденсатора в соответствии с рис. 2.6, б можно построить треугольник проводимостей (рис. 2.25, б).

Согласно второй формуле (2.60) на сопротивлении потерь  $R_C$  (проводимости потерь  $G_C = \frac{1}{R_C}$ ) выделяется активная мощность

$$P_a = \frac{1}{2} \frac{U_m^2}{R_C} = \frac{1}{2} G_C U_m^2. \quad (2.112)$$

Из соотношений (2.76), (2.108) и (2.112) находим добротность и затухание конденсатора с потерями:

$$\begin{aligned} Q_C &= \omega C R_C = \frac{\omega C}{G_C} = \operatorname{tg} \varphi = \operatorname{ctg} \delta, \\ d_C &= \frac{1}{Q_C} = \frac{1}{\omega C R_C} = \frac{G_C}{\omega C} = \operatorname{ctg} \varphi = \operatorname{tg} \delta. \end{aligned} \quad (2.113)$$

Эти же соотношения могут быть получены с помощью формулы (2.73) или (2.74), а также выражений (2.104) и (2.106).

Входящий в формулы (2.113) угол  $\delta$  является дополнительным к углу  $\varphi$  (см. рис. 2.25, б) и называется углом потерь. Понятие угла потерь часто используется для оценки свойств реального конденсатора вместо добротности и затухания. Для воздушных, слюдяных и керамических конденсаторов \*  $\delta \ll 1$  и соответственно

$$d_c \ll 1 \text{ и } Q_c \gg 1, \text{ т. е. } R_c \gg \frac{1}{\omega C} \text{ и } G_c \ll \omega C.$$

При таком соотношении параметров в соответствии с формулами (2.38) и (2.39) вместо параллельной эквивалентной схемы конденсатора (см. рис. 2.25, а) можно построить последовательную эквивалентную схему (рис. 2.25, в), для которой

$$r_c = \frac{G_c}{\omega^2 C^2} = \frac{1}{\omega^2 C^2 R_c}. \quad (2.114)$$

Треугольник сопротивлений для этой эквивалентной схемы показан на рис. 2.25, з.

С учетом формулы (2.114) соотношения (2.113) могут быть представлены в следующем виде:

$$Q_c = \operatorname{ctg} \delta = \frac{1}{\omega C r_c},$$

$$d_c = \operatorname{tg} \delta = \omega C r_c. \quad (2.113 \text{ а})$$

Выбор между формулами (2.113) и (2.113 а), как и выбор между двумя разновидностями эквивалентных схем конденсатора, определяется удобством расчета при заданных конкретных схемах цепей с конденсатором. Однако необходимо учитывать, что при  $R_c = \text{const}$  сопротивление  $r_c$  зависит от частоты, как это следует из формулы (2.114). Во многих случаях сопротивление  $R_c$ , называемое также сопротивлением утечки, действительно мало меняется в достаточно широком диапазоне частот. С этой точки зрения эквивалентная схема конденсатора, изображенная на рис. 2.25, а, является более точной, чем схема рис. 2.25, в, если сопротивление потерь считать постоянным в диапазоне частот.

Следует иметь в виду, что сопротивления потерь  $r_c$  или  $R_c$  не могут быть измерены непосредственно, а вычисляются по формулам (2.113), (2.113а). Для этого должен быть известен угол

\* С типами, конструкцией и параметрами конденсаторов следует ознакомиться в лаборатории.

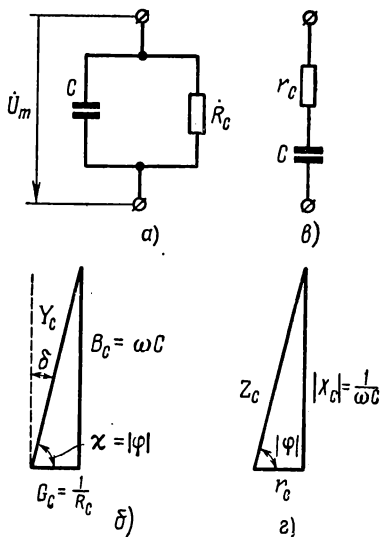


Рис. 2.25. Эквивалентные схемы конденсатора с потерями, треугольники проводимостей и сопротивлений

потерь, который дается в паспорте конденсатора, или добротность, определяемая экспериментально с помощью специальных измерительных приборов —  $Q$ -метров.

### 3. Индуктивные элементы

Согласно определению индуктивного накопителя и энергетическим соотношениям в двухполюснике с реактивным сопротивлением индуктивным элементом может являться катушка, в которой отсутствуют необратимые потери энергии. В такой катушке накопление энергии происходит в магнитном поле, которое характеризуется величиной магнитного потока  $\Phi$ .

По закону электромагнитной индукции при переменном магнитном потоке  $\Phi$ , пронизывающем виток катушки, в последнем наводится э. д. с. самоиндукции

$$e_{\text{в}} = - \frac{d\Phi}{dt}.$$

При этом в катушке, имеющей  $\omega$  витков, получается в  $\omega$  раз большая э. д. с. самоиндукции, которая уравнивает напряжение  $u$  на катушке:

$$u = - e = \frac{d\Psi}{dt}. \quad (2.115)$$

Здесь величина  $\Psi = \Phi \omega$ , характеризующая сцепление линий поля с витками катушки, называется потоком сцепления.

Из соотношения (2.115) видно, что э. д. с. самоиндукции и соответственно напряжение зависят не только от величины магнитного потока, но и от скорости его изменения (от скорости пересечения витков катушки магнитными силовыми линиями).

Магнитный поток  $\Phi$  и, следовательно, потокосцепление пропорциональны току в катушке:

$$\Psi = Li. \quad (2.116)$$

Коэффициент пропорциональности  $L$ , являющийся параметром индуктивного элемента, называется индуктивностью.

Из формул (2.115) и (2.116) устанавливается связь между напряжением и током для индуктивного элемента:

$$u = L \frac{di}{dt} + i \frac{dL}{dt}. \quad (2.117)$$

Для параметрической индуктивности

$$L = L(t) \quad \text{и} \quad \frac{dL}{dt} \neq 0.$$

Для нелинейной индуктивности

$$L = L(i) \quad \text{и} \quad \frac{dL}{di} = \frac{dL}{di} \cdot \frac{di}{dt} \neq 0.$$

Для линейного индуктивного элемента с постоянными параметрами  $L = \text{const}$ ,  $\frac{dL}{dt} = 0$  и формула (2.117) упрощается:

$$u = L \frac{di}{dt}. \quad (2.118)$$

Из формулы (2.118) устанавливается закон Ома для индуктивного элемента. Переходя к символическим отображениям напряжения и тока, получим

$$\dot{U}_m e^{j\omega t} = L \frac{d}{dt} (I_m e^{j\omega t}).$$

Отсюда

$$\dot{U}_m = \dot{Z}_L \dot{I}_m, \quad (2.119)$$

$$\dot{Z}_L = jX_L = j\omega L, \quad X_L = \omega L, \quad \varphi_L = \arg \dot{Z}_L = \frac{\pi}{2}, \quad (2.120)$$

или

$$\dot{I}_m = \dot{Y}_L \dot{U}_m, \quad (2.121)$$

$$\dot{Y}_L = jB_L = \frac{1}{j\omega L} = -j \frac{1}{\omega L}, \quad B_L = -\frac{1}{\omega L}, \quad \chi_L = \arg \dot{Y}_L = -\frac{\pi}{2}. \quad (2.122)$$

Таким образом, сопротивление и проводимость идеального индуктивного элемента являются чисто реактивными, и в нем накапливается реактивная мощность. Согласно уравнению (2.69а) и второй формуле (2.120) эта мощность равна

$$P_r = \frac{1}{2} \omega L I_m^2. \quad (2.123)$$

Отсюда в соответствии с равенством (2.75) определяется максимальная энергия, запасаемая в магнитном поле катушки:

$$N_{\max} = \frac{1}{2} L I_m^2. \quad (2.124)$$

Эта энергия получается в моменты времени, когда ток максимален, т. е. принимает амплитудное значение.

Из соотношений (2.119) — (2.122) видно, что ток в индуктивном элементе отстает по фазе от приложенного напряжения на угол  $\frac{\pi}{2}$  (рис. 2.26).

Индуктивное сопротивление увеличивается, а индуктивная проводимость уменьшается с ростом частоты и индуктивности. Это объясняется тем, что при фиксированном значении амплитуды тока э. д. с. самоиндукции, препятствующая протеканию тока, возрастает при увеличении магнитного потока и скорости его изменения. При этом соответственно увеличивается напряжение и сопротивление.

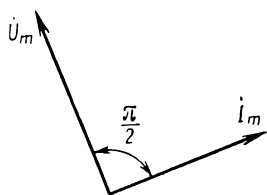


Рис. 2.26. Векторная диаграмма напряжения и тока для индуктивного элемента



График частотной зависимости сопротивления и проводимости индуктивного элемента показан на рис. 2.27.

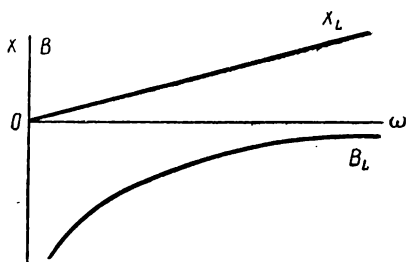
Согласно второй формуле (2.51) при последовательном соединении индуктивных элементов

$$\omega L = \sum_{k=1}^n \omega L_k,$$

т. е. такое соединение может быть заменено одним элементом с суммарной индуктивностью

$$L = \sum_{k=1}^n L_k. \quad (2.125)$$

Если же индуктивные элементы соединяются параллельно, из второй формулы (2.45) аналогично находим, что результирующая индуктивность определяется из условия



$$\frac{1}{L} = \sum_{k=1}^n \frac{1}{L_k}. \quad (2.126)$$

В частности, при параллельном соединении двух индуктивностей формула (2.46) принимает следующий вид:

$$L = \frac{L_1 L_2}{L_1 + L_2}. \quad (2.127)$$

Рис. 2.27. График частотной зависимости сопротивления и проводимости индуктивного элемента

При затрачивании активной мощности в катушке основное рассеяние энергии происходит за счет выделения тепла в проводе катушки. Некоторые потери энергии могут возникать также в каркасе катушки, если он не является идеальным диэлектриком. Кроме того, если катушка экранирована, то часть энергии может теряться в экране. Все эти потери, зависящие от тока катушки, должны отображаться в ее эквивалентной схеме, составленной по типу двухполюсника, изображенного на рис. 2.12. В такой эквивалентной схеме потери учитываются количественно с помощью диссипативного элемента, или сопротивления потерь  $r_L$ , как показано на рис. 2.28, где приведен также соответствующий треугольник сопротивлений.

Из физической природы потерь энергии в катушке видно, что сопротивление потерь  $r_L$  зависит от конструкции катушки \* и может иметь разные значения на различных частотах. Поэтому, как и в слу-

\* С типами катушек индуктивности и их конструкцией следует ознакомиться в лаборатории.

чае конденсатора, сопротивление потерь нельзя измерить непосредственно. При необходимости его рассчитывают с помощью справочников по эмпирическим и полуэмпирическим формулам. Экспериментально же можно определить добротность катушки и по ней вычислить сопротивление потерь.

Для определения добротности найдем в соответствии с последней формулой (2.60) активную мощность, выделяющуюся на сопротивлении потерь:

$$P_a = \frac{1}{2} r_L I_m^2. \quad (2.128)$$

Из соотношений (2.76), (2.124), (2.128) или (2.73), (2.74) определяются добротность и затухание катушки с потерями:

$$Q_L = \frac{\omega L}{r_L}, \quad (2.129)$$

$$d_L = \frac{r_L}{\omega L}. \quad (2.130)$$

Как и для конденсатора, для катушек, используемых в радиотехнических устройствах на высоких частотах, выполняются обычно неравенства  $Q_L \gg 1$  и  $d_L \ll 1$ . Однако в катушках потери получают существенно больше, чем в высокодобротных конденсаторах, так что  $Q_L \ll Q_C$  и  $d_L \gg d_C$ .

Аналогично конденсатору катушка с потерями может отображаться эквивалентными схемами двух видов — последовательной (рис. 2.28, а) и параллельной (см. рис. 2.9). При этом в случае высокодобротных катушек ( $Q_L \gg 1$ ), для которых в соответствии с формулой (2.129)  $X_L \gg r_L$  параметры могут пересчитываться по формулам (2.38) и (2.39).

Следует иметь в виду, что из двух эквивалентных схем катушек индуктивности одна является более точной, если сопротивление потерь считать постоянным в диапазоне частот (как и для конденсатора). Для катушек индуктивности более точной в диапазоне частот является схема, изображенная на рис. 2.28, а.

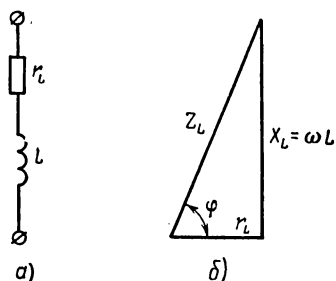


Рис. 2.28. Эквивалентная схема катушки с потерями (а) и треугольник сопротивлений (б)

#### 4. Элементы взаимной индукции

Если две катушки индуктивности расположены рядом или намотаны на общем сердечнике, то магнитный поток одной катушки будет полностью или частично пронизывать витки другой катушки. Такие катушки индуктивности с общим (взаимным) магнитным полем называются связанными (индуктивно связанными). При отсутствии

потерь связанные катушки образуют элементарный реактивный четырехполюсник, называемый элементом взаимной индукции (взаимоиндуктивности).

Элемент взаимной индукции изображен схематически на рис. 2.29, а, где  $L_1$  и  $L_2$  — индуктивности связанных катушек, имеющих в общем случае разное число витков  $\omega_1$  и  $\omega_2$ ,  $M$  — рассматриваемый ниже параметр, который характеризует величину связи между катушками.

Элемент взаимной индукции может включаться в схеме различным образом. При этом связь между катушками обозначается стрелками, как на рис. 2.29, б и в. На рис. 2.29, г показано включение элемента взаимной индукции как реактивного четырехполюсника. Здесь  $i_1$

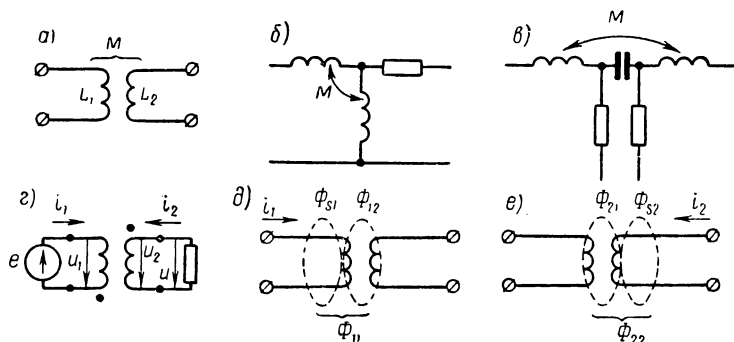


Рис. 2.29. Элемент взаимной индукции

и  $i_2$  — токи в цепи катушек,  $u_1$  и  $u_2$  — напряжения на катушках, которые согласно второму закону Кирхгофа связаны с э. д. с.  $e$  и напряжением на нагрузке  $u$  следующим образом:

$$u_1 = e, \quad u_2 - u = 0. \quad (2.131)$$

На рис. 2.29, д и е показаны схематически магнитные потоки, образуемые током  $i_1$  при  $i_2 = 0$  и током  $i_2$  при  $i_1 = 0$ . Токи каждой катушки образуют магнитные потоки, состоящие из двух частей:

$$\Phi_{11} = \Phi_{s1} + \Phi_{12}, \quad \Phi_{22} = \Phi_{s2} + \Phi_{21}. \quad (2.132)$$

За счет магнитных потоков  $\Phi_{12}$  и  $\Phi_{21}$ , являющихся общими для катушек, и образуется связь между ними. Магнитные потоки  $\Phi_{s1}$  и  $\Phi_{s2}$ , не являющиеся общими для связанных катушек, называются потоками рассеяния.

Указанные магнитные потоки образуют потокосцепления, пропорциональные числу витков катушки, с которой они сцепляются, и вызвавшим их токам:

$$\Psi_{11} = \omega_1 \Phi_{11} = L_1 i_1, \quad \Psi_{22} = \omega_2 \Phi_{22} = L_2 i_2, \quad (2.133)$$

$$\Psi_{s1} = \omega_1 \Phi_{s1} = L_{s1} i_1, \quad \Psi_{s2} = \omega_2 \Phi_{s2} = L_{s2} i_2, \quad (2.134)$$

$$\Psi_{12} = \omega_2 \Phi_{12} = M_{12} i_1, \quad \Psi_{21} = \omega_1 \Phi_{21} = M_{21} i_2. \quad (2.135)$$

Коэффициенты пропорциональности  $M_{12}$  и  $M_{21}$ , являющиеся параметрами элемента взаимной индукции, называются коэффициентами взаимной индукции, а коэффициенты  $L_{s1}$  и  $L_{s2}$  — индуктивностями рассеяния.

Магнитные потоки прямо пропорциональны намагничивающей силе (количеству ампер-витков) и обратно пропорциональны магнитному сопротивлению  $R_\mu$  магнитной цепи. Поэтому

$$\Phi_{12} = \frac{i_1 w_1}{R_{\mu 12}}, \quad \Phi_{21} = \frac{i_2 w_2}{R_{\mu 21}}.$$

Поскольку для взаимных магнитных потоков магнитная цепь является общей,  $R_{\mu 12} = R_{\mu 21}$ . Отсюда с учетом соотношения (2.135) находим

$$\frac{\Phi_{12}}{\Phi_{21}} = \frac{i_1 w_1}{i_2 w_2} = \frac{M_{12}}{M_{21}} \cdot \frac{i_1 w_1}{i_2 w_2},$$

т. е.

$$M_{12} = M_{21} = M.$$

Во всех последующих соотношениях для элемента взаимной индукции учитывается это равенство.

Подставляя значения потоков из соотношений (2.133) — (2.135) в равенства (2.132), находим связь между параметрами элемента взаимной индукции:

$$L_1 = L_{s1} + \frac{1}{n} M, \quad L_2 = L_{s2} + n M, \quad (2.136)$$

где

$$n = \frac{w_2}{w_1} \quad (2.137)$$

— параметр элемента взаимной индукции, называемый коэффициентом трансформации.

Значения полных магнитных потоков, сцепленных с каждой из катушек, зависят от направления отдельных потоков:

$$\Phi_1 = \Phi_{11} \pm \Phi_{21}, \quad \Phi_2 = \Phi_{22} \pm \Phi_{12}. \quad (2.138)$$

Сложение или вычитание потоков зависит как от направления намотки катушек, так и от направления токов в катушках. Если потоки складываются при втекании токов в некоторые концы катушек, то эти концы называются одноименными. Если же при этом потоки вычитаются, то соответствующие концы катушек называются разноименными. В случае необходимости одноименные концы катушек обозначаются на схеме каким-либо одинаковым значком, например точкой, как на рис. 2.29, а.

Если токи, проходящие в заданном положительном направлении, втекают в одноименные концы катушек, то такое включение катушек называется согласным, и в равенствах (2.138) надо брать положительный знак. Если же токи, проходящие в положительном направ-

лении, втекают в разноименные концы катушек, то такое их включение называется встречным, и в равенствах (2.138) надо брать отрицательный знак.

Полным потокам вида (2.138) соответствуют потокоцепления

$$\Psi_1 = \omega_1 \Phi_1 = \Psi_{11} \pm \Psi_{21}, \quad \Psi_2 = \omega_2 \Phi_2 = \Psi_{22} \pm \Psi_{12}, \quad (2.139)$$

которыми определяются э. д. с. индукции  $e_1$  и  $e_2$ , уравнивающие напряжения на катушках:

$$u_1 = -e_1 = \frac{d\Psi_1}{dt}, \quad u_2 = -e_2 = \frac{d\Psi_2}{dt}.$$

Подставляя сюда значения потокоцеплений из соотношений (2.139), (2.133), (2.135) и полагая, что элемент взаимной индукции имеет постоянные параметры ( $L_1 = \text{const}$ ,  $L_2 = \text{const}$ ,  $M = \text{const}$ ), получим уравнения связи между напряжениями и токами в таком элементе:

$$u_1 = L_1 \frac{di_1}{dt} \pm M \frac{di_2}{dt}, \quad u_2 = L_2 \frac{di_2}{dt} \pm M \frac{di_1}{dt}.$$

Переходя в этих уравнениях к символическим отображениям напряжения и тока, после сокращения на временной множитель найдем

$$\dot{U}_{m1} = \dot{Z}_{L1} \dot{I}_{m1} \pm \dot{Z}_M \dot{I}_{m2}, \quad \dot{U}_{m2} = \dot{Z}_{L2} \dot{I}_{m2} \pm \dot{Z}_M \dot{I}_{m1}. \quad (2.140)$$

Здесь  $\dot{Z}_{L1}$  и  $\dot{Z}_{L2}$  — индуктивные сопротивления первой и второй катушек вида (2.120), а  $\dot{Z}_M$  — сопротивление взаимной индукции.

Величина  $\dot{Z}_M$  определяется следующими соотношениями:

$$\dot{Z}_M = jX_M = j\omega M, \quad X_M = \omega M, \quad \varphi_M = \arg \dot{Z}_M = \frac{\pi}{2}. \quad (2.141)$$

Равенства (2.140) можно записать иначе:

$$\dot{U}_{m1} = \dot{U}_{mL1} \pm \dot{U}_{mM1}, \quad \dot{U}_{m2} = \dot{U}_{mL2} \pm \dot{U}_{mM2}, \quad (2.142)$$

где

$$\dot{U}_{mL1} = \dot{Z}_{L1} \dot{I}_{m1}, \quad \dot{U}_{mL2} = \dot{Z}_{L2} \dot{I}_{m2}, \quad (2.143)$$

$$\dot{U}_{mM1} = \dot{Z}_M \dot{I}_{m2}, \quad \dot{U}_{mM2} = \dot{Z}_M \dot{I}_{m1}. \quad (2.144)$$

Соотношения (2.143) являются обычным выражением закона Ома для индуктивности. Соотношения (2.144) по аналогии можно считать выражением закона Ома для взаимной индуктивности. Особенностью этого закона Ома является то, что он устанавливает связь между напряжением и током в разных ветвях цепи. Поэтому сопротивление взаимной индукции  $\dot{Z}_M$ , определяющее эту связь, называется также сопротивлением связи.

Равенства (2.142) аналогичны уравнению (2.49), выражающему второй закон Кирхгофа. Таким образом, связь между напряжениями в цепях индуктивно связанных катушек устанавливается вторым законом Кирхгофа. Токи же в таких цепях не связаны первым

законом Кирхгофа, если эти цепи изолированы и не имеют общих узлов, как на рис. 2.29, *г*. При наличии общих узлов в индуктивно связанных не изолированных цепях (см. рис. 2.29, *б* и *в*) первый закон Кирхгофа остается справедливым для этих цепей.

В соответствии с равенствами (2.142) при обходе некоторых замкнутых контуров, содержащих связанные катушки, надо к обычным падениям напряжения (2.143) прибавлять напряжения взаимной индукции (2.144). При этом имеется в виду алгебраическое сложение напряжений: их суммирование при согласном включении катушек и вычитание — при встречном включении катушек. Например, для схемы рис. 2.29, г, учитывая встречное включение катушек, равенства (2.131) можно представить в таком виде:

$$\begin{aligned}\dot{U}_{m_1} &= \dot{U}_{mL_1} - \dot{U}_{mM_1} = \dot{E}_m, \\ \dot{U}_{m_2} - \dot{U}_m &= \dot{U}_{mL_2} - \\ &- \dot{U}_{mM_2} - \dot{U}_m = 0.\end{aligned}\quad (2.145)$$

Векторная диаграмма напряжений и токов, построенная для рассматриваемого случая по соотношениям (2.143) — (2.145), показана на рис. 2.30.

Построение этой диаграммы надо начинать с векторов  $-\dot{U}_{m2} = -\dot{U}_m$  и  $\dot{I}_{m2}$ , значения которых связаны законом Ома при заданном нагрузочном сопротивлении  $\dot{Z} = -\frac{\dot{U}_m}{\dot{I}_{m2}}$ .

Отрицательный знак поставлен здесь с учетом противоположного направления отсчета напряжения  $u$  и тока  $i_2$  (см. рис. 2.29,  $g$ ).

Остальные векторы на рис. 2.30 откладываются в следующей последовательности:

$$\begin{aligned} \dot{U}_{mL_2} &= jX_{L_2} \dot{I}_{m_2}, \quad \dot{U}_{mM_2} = \dot{U}_{mL_2} - \dot{U}_m, \quad I_{m_1} = -j \frac{\dot{U}_{mM_2}}{X_M}, \\ \dot{U}_{mL_1} &= jX_{L_1} \dot{I}_{m_1}, \quad -\dot{U}_{mM_1} = -jX_M \dot{I}_{m_2}, \quad \dot{U}_{m_1} = \dot{U}_{mL_1} - \dot{U}_{mM_1}. \end{aligned}$$

При последовательном соединении индуктивно связанных катушек (рис. 2.31) через них протекает одинаковый ток  $i_{m1} = i_{m2} = i_m$ , и равенства (2.140) принимают вид

$$\dot{U}_{m1} = (\dot{Z}_{L1} \pm \dot{Z}_M) \dot{I}_m, \quad \dot{U}_{m2} = (\dot{Z}_{L2} \pm \dot{Z}_M) \dot{I}_m.$$

Отсюда определяется общее напряжение на катушках

$$\dot{U}_m = \dot{U}_{m_1} + \dot{U}_{m_2} = (\dot{Z}_{L_1} + \dot{Z}_{L_2} \pm 2\dot{Z}_M) i_m$$

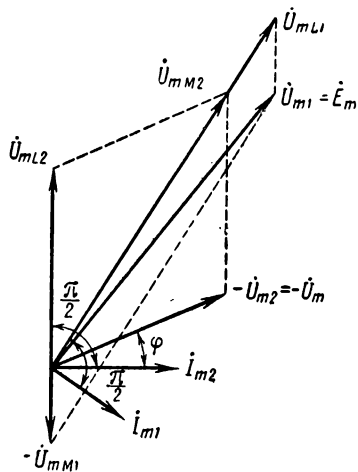


Рис. 2.30. Векторная диаграмма напряжений и токов для элемента взаимной индукции

и их общее сопротивление

$$\dot{Z} = \frac{\dot{U}_m}{\dot{I}_m} = \dot{Z}_{L_1} + \dot{Z}_{L_2} \pm 2\dot{Z}_M. \quad (2.146)$$

Разделив обе части равенства (2.146) на  $j\omega$ , найдем общую индуктивность при последовательном соединении двух связанных катушек:

$$L = L_1 + L_2 \pm 2M. \quad (2.147)$$

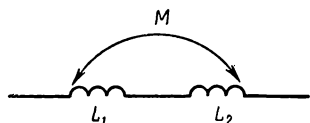


Рис. 2.31. Последовательное соединение индуктивно связанных катушек

На этом свойстве основано действие вариометра, который применяется в качестве регулируемой индуктивности для настройки передатчика. Вариометр представляет собой две последовательно соединенные связанные катушки, одна из которых может поворачиваться на

$180^\circ$ . При этом их включение меняется от согласного до встречного, и в соответствии с формулой (2.147) индуктивность вариометра меняется от  $L_{\max} = L_1 + L_2 + 2M$  до  $L_{\min} = L_1 + L_2 - 2M$ .

В общем случае элемент взаимоиндукции может состоять не из двух, а из большего числа индуктивно связанных катушек. Для примера на рис. 2.32 изображен элемент взаимоиндукции с тремя связанными катушками (здесь точками, кружками и крестиками отмечены одноименные концы катушек).

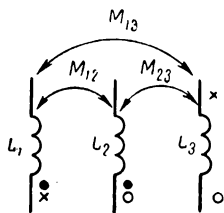


Рис. 2.32. Элемент взаимоиндукции с тремя индуктивно связанными катушками

В этом случае при составлении уравнений по второму закону Кирхгофа в каждом замкнутом контуре, содержащем связанные катушки, надо учитывать все напряжения взаимоиндукции (по числу индуктивных связей). Например, для каждой из катушек, изображенных на рис. 2.32, следует в уравнения вида (2.145) подставлять по два напряжения взаимоиндукции.

# Г Л А В А 3

## МЕТОДЫ РАСЧЕТА ЛИНЕЙНЫХ ЦЕПЕЙ

### § 3.1. ПРЯМЫЕ МЕТОДЫ РАСЧЕТА

#### 1. Расчет делителей напряжения и тока

К прямым методам расчета цепей относятся методы, в которых непосредственно используются основные законы токопрохождения. При прямых методах расчета схема цепи рассматривается в заданном виде и не подвергается никаким преобразованиям.

Прямые методы расчета получаются наиболее простыми в случае последовательного или параллельного соединения различных двухполюсников.

Для расчета схемы, состоящей из последовательно соединенных двухполюсников (см. рис. 2.11), непосредственно используются соотношения (2.20) — (2.23) и (2.49) — (2.51), с помощью которых определяется также напряжение на любом  $k$ -м двухполюснике:

$$\dot{U}_{mk} = \frac{\dot{Z}_k}{\dot{Z}} \dot{U}_m \quad (3.1)$$

или

$$\dot{U}_{mk} = \frac{\dot{Z}_k}{\dot{Z}_l} \dot{U}_{ml}. \quad (3.2)$$

В силу свойств (3.1) и (3.2) цепочка из последовательно соединенных двухполюсников называется делителем напряжения.

В тех случаях, когда необходимо плавно менять амплитуду выходного напряжения  $\dot{U}_{m \text{ вых}}$  при заданном входном напряжении  $\dot{U}_{m \text{ вх}}$ , используют делители напряжения в виде потенциометра, в котором регулировка напряжения осуществляется перемещением подвижного контакта  $K$  по проволочному или угольному сопротивлению  $R$  (рис. 3.1, а).

Эта же конструкция может применяться в качестве переменного сопротивления (реостата) для регулировки амплитуды тока  $I_m$  при заданном напряжении  $\dot{U}_m$  (рис. 3.1, б).

Поскольку в делитель напряжения могут входить произвольные сопротивления, как это видно из формулы (3.1), на практике используют также емкостные делители (рис. 3.2).



Для емкостного делителя напряжения из формул (3.1), (2.106) и (2.111) получаем следующие расчетные соотношения:

$$\dot{U}_{m1} = \frac{C_2}{C_1 + C_2} \dot{U}_m, \quad \dot{U}_{m2} = \frac{C_1}{C_1 + C_2} \dot{U}_m. \quad (3.3)$$

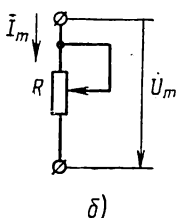
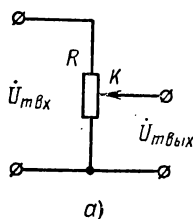


Рис. 3.1. Схема потенциометра

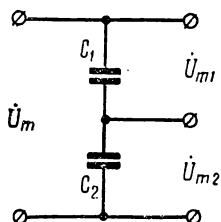
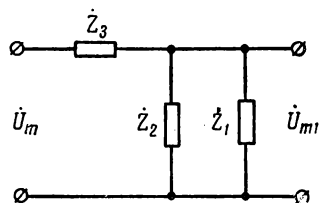


Рис. 3.2. Емкостный делитель напряжения

Для расчета схемы, состоящей из параллельно соединенных двухполюсников (см. рис. 2.8), непосредственно используются формулы (2.20) — (2.23) и (2.43) — (2.45), с помощью которых определяется также ток в любом  $k$ -м двухполюснике:



$$\dot{I}_{mk} = \frac{\dot{Y}_k}{\dot{Y}} \dot{I}_m = \frac{\dot{Z}}{\dot{Z}_k} \dot{I}_m \quad (3.4)$$

$$\dot{I}_{mk} = \frac{\dot{Y}_k}{\dot{Y}_l} \dot{I}_{ml} = \frac{\dot{Z}_l}{\dot{Z}_k} \dot{I}_{ml}. \quad (3.5)$$

Рис. 3.3. Разветвленная схема делителя напряжения

В силу свойств (3.4) и (3.5) цепочка из параллельно соединенных двухполюсников называется делителем тока.

С помощью расчетных формул для делителей напряжения и тока можно рассчитывать и простейшие из разветвленных цепей. Например, выходное напряжение в схеме, изображенной на рис. 3.3, следует определять в соответствии с формулой (3.1):

$$\dot{U}_{m1} = \frac{\dot{Z}}{\dot{Z}_3 + \dot{Z}} \dot{U}_m, \quad (3.1a)$$

где  $\dot{Z}$  находят по формуле (2.46).

## 2. Метод токов ветвей

При расчете сложноразветвленных цепей такого, например, вида, как и на рис. 1.21, неизвестными величинами, подлежащими определению, могут являться токи в ветвях цепи и напряжения

на этих ветвях. После определения напряжений на ветвях цепи напряжения на отдельных элементах (например, 11 и 12 на рис. 1.21) можно найти по формуле (3.1). Напряжения же на ветвях могут быть определены по закону Ома (2.20), если известны токи в этих ветвях.

Помимо расчета напряжения и токов, при расчете цепей может ставиться задача об определении сопротивления или проводимости некоторого участка цепи или всей цепи как двухполюсника. Этот двухполюсник может содержать цепочки из последовательно и параллельно соединенных элементов, а также элементы, соединенные звездой и многоугольником. В простейших случаях расчет сопротивлений и проводимостей производится по формулам (2.50) и (2.44). Последовательное применение этих формул позволяет рассчитывать также сопротивление относительно простых разветвленных цепей. Например, для схемы, изображенной на рис. 3.3, сопротивление цепи между левыми зажимами определяется как сумма сопротивлений  $\dot{Z}_3 + \dot{Z}$ , где  $\dot{Z}$  находят по формуле (2.46).

В более сложных случаях применение формул (2.44) и (2.50) становится невозможным, например, при определении сопротивления двухполюсника в виде «куба» (рис. 3.4).

При этом определении сопротивления можно свести к нахождению неизвестного тока. Действительно, можно задать произвольное напряжение  $\dot{U}_m$  на зажимах «куба» и решить задачу об определении тока  $\dot{I}_m$ . При этом по формуле (2.22) находят искомое сопротивление  $\dot{Z}$ .

Таким образом, любая задача расчета сколь угодно сложно разветвленных цепей сводится к определению токов в ветвях. Метод расчета, заключающийся в непосредственном определении этих токов с помощью законов Ома и Кирхгофа, называется методом токов ветвей.

Рассмотрим цепь, содержащую  $n_v$  ветвей и  $n_u$  узлов. Для такой цепи имеется  $n = n_v$  неизвестных токов ветвей. Для их определения можно воспользоваться уравнениями (2.42). Составляя эти уравнения для каждого узла схемы, будем иметь  $n_u$  уравнений. Следует учесть, что каждый неизвестный ток  $\dot{I}_{mk}$  фигурирует в этих уравнениях дважды. Действительно, каждый из этих токов, вытекая из одного узла, должен втекать в другой узел (рис. 3.5). Поэтому ток  $\dot{I}_{mk}$  входит в уравнения (2.42), составленные и для  $k$ -го и для  $l$ -го узла схемы. При этом в соответствии с правилом знаков в первое

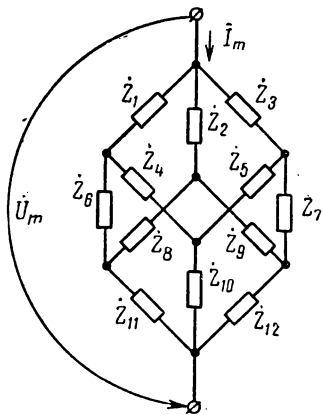


Рис. 3.4. Определение сопротивления «куба»

из упомянутых уравнений ток будет входить со знаком «+», а во второе — со знаком «—».

Отсюда следует, что при сложении всех  $n_y$  уравнений каждый из токов  $I_{mk}$  приводится, и получается тождество вида  $0 = 0$ . Это означает, что одно из  $n_y$  уравнений является следствием других.

Таким образом, для определения  $n$  неизвестных токов можно составить по первому закону Кирхгофа только

$$n_1 = n_y - 1 \quad (3.6)$$

независимых уравнений (независимые узлы при этом выбираются произвольно).

Следовательно, для определения  $n = n_b$  неизвестных токов недостает  $n - n_1 = n_b - (n_y - 1)$  уравнений. Эти

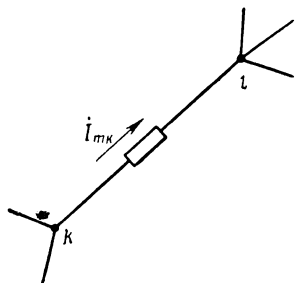
$$n_2 = n_b - n_y + 1 \quad (3.7)$$

уравнений составляются для некоторых контуров цепи по второму закону Кирхгофа и имеют вид (2.84). Обычно схема содержит больше чем  $n_2$  контуров. Например, для схемы, изображенной на рис. 1.21,  $n_2 = 12 - 6 + 1 = 7$ , но она содержит 27 контуров, как отмечалось выше. Если уравнения составлять для всех контуров, то часть из них будет являться следствием других.

Таким образом, соотношение (3.7) определяет число независимых контуров, для которых следует составлять уравнения по второму закону Кирхгофа. Эти независимые контуры можно выбирать произвольно.

Число независимых контуров можно определить и без формулы (3.7). Это особенно просто сделать для планарной схемы по аналогии с рыбацкой сетью. Действительно, схема планарной цепи напоминает рыбацкую сеть, и число

Рис. 3.5. Ток ветви между двумя узлами



независимых контуров равно как раз числу ячеек в такой сети.

Чтобы в уравнения Кирхгофа, составляемые для независимых контуров, неизвестные токи входили в явном виде, напряжения ветвей  $\dot{U}_{mk}$  выражаются через токи  $I_{mk}$  по закону Ома (2.20). Итак, метод токов ветвей сводится к решению следующей системы уравнений:

$$\sum_{k=1}^{m_1} I_{mk} = 0 \quad (n_1 \text{ уравнений}), \quad (3.8)$$

$$\sum_{k=1}^{m_2} Z_k I_{mk} = \dot{E}_{ml} \quad (l = 1, 2, \dots, n_2).$$

Здесь  $\dot{Z}_k$  — сопротивление  $k$ -й ветви, по которой протекает ток  $\dot{I}_{mk}$ ;  
 $m_1$  — число ветвей, сходящихся в рассматриваемом узле;  
 $m_2$  — число ветвей, входящих в рассматриваемый контур.

Для примера на рис. 3.6 показана схема, содержащая согласно формулам (3.6) и (3.7) один независимый узел и два независимых контура. Выбирая верхний узел и контуры, обозначенные стрелками  $\dot{I}_{m12}$ ,  $\dot{I}_{m23}$ , получим в соответствии с (3.8) следующую систему уравнений:

$$\begin{aligned} -\dot{I}_{m1} - \dot{I}_{m2} + \dot{I}_{m3} &= 0, \\ \dot{Z}_1 \dot{I}_{m1} - \dot{Z}_2 \dot{I}_{m2} &= \dot{E}_{m1} - \dot{E}_{m2}, \\ \dot{Z}_2 \dot{I}_{m2} + \dot{Z}_3 \dot{I}_{m3} &= \dot{E}_{m2}. \end{aligned} \quad (3.8a)$$

Если какие-либо ветви содержат идеальный источник тока, то некоторые из  $n_1$  уравнений в системе (3.8) принимают вид (2.86). При этом число неизвестных сокращается на число ветвей  $n_J$ , содержащих источники тока, поскольку задающие токи являются известными. На это число  $n_J$  следует уменьшить число уравнений, составляемых по второму закону Кирхгофа, так что вместо соотношения (3.7) получаем

$$n_2 = n_n - n_y - n_J + 1. \quad (3.9)$$

При этом каждое из  $n_2$  уравнений в системе (3.8) должно составляться для тех контуров, в которые не входят ветви с источниками тока. Поэтому, пользуясь аналогией с рыбацкой сетью, не следует забывать, что эта сеть должна быть порвана в местах, где стоят идеальные источники тока (ведь недаром же сопротивление такого источника равно бесконечности!). При таком подсчете число ячеек как раз будет соответствовать формуле (3.9).

Для примера на рис. 3.7 показана цепь с тремя ветвями и двумя узлами, как и на рис. 3.6. Но согласно формуле (3.9) эта цепь имеет только один независимый контур при одном независимом узле. В качестве этого независимого контура не может быть выбран, например, контур, отмеченный стрелкой  $\dot{J}_m$ . Таким образом, выбирая второй контур, отмеченный стрелкой  $\dot{I}_{m12}$ , и верхний узел, получим в соответствии с (3.8) систему уравнений

$$\begin{aligned} -\dot{I}_{m1} + \dot{I}_{m2} &= \dot{J}_m, \\ \dot{Z}_1 \dot{I}_{m1} + \dot{Z}_2 \dot{I}_{m2} &= \dot{E}_m, \end{aligned} \quad (3.8б)$$

из которой определяются два неизвестных тока ветви.

Выше говорилось, что при наличии индуктивных связей в цепи могут появиться изолированные участки, не имеющие общих узлов,

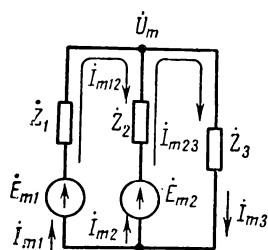


Рис. 3.6. Цепь с двумя источниками напряжения, работающими на общую нагрузку

и токи в этих участках не связаны первым законом Кирхгофа. Появление каждого такого изолированного участка в дополнение к исходной схеме, которая сама является изолированным участком цепи, приводит к исчезновению одного уравнения, связывающего токи по первому закону Кирхгофа. Таким образом, при  $n_i$  изолированных участках схемы с индуктивными связями исчезает  $n_i - 1$  уравнений, составленных по первому закону Кирхгофа. Поэтому

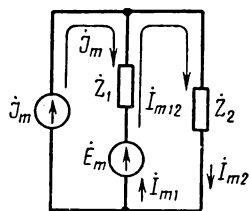


Рис. 3.7. Цепь с источниками тока и напряжения, работающими на общую нагрузку

на  $n_i - 1$  должно быть увеличено число уравнений, составляемых по второму закону Кирхгофа. Таким образом, при наличии в схеме  $n_i$  изолированных участков с индуктивными связями вместо соотношения (3.9) необходимо пользоваться формулой

$$n_2 = n_b - n_y - n_J + n_i. \quad (3.10)$$

Она справедлива и при отсутствии индуктивных связей, поскольку в этом случае  $n_i = 1$  и соотношение (3.10) приобретает вид (3.9).

При использовании формулы (3.10) следует иметь в виду, что согласно определению ветви при отсутствии узлов в схеме в ней отсутствуют и ветви. Например, для схемы рис. 2.29,  $n_y = n_b = n_J = 0$  и  $n_2 = n_i = 2$ . Таким образом, формула (3.10) является наиболее универсальной.

### 3. Метод контурных токов

При расчете цепей методом токов ветвей необходимо решить систему из  $n_b$  уравнений. Число уравнений можно сократить, если вместо токов ветвей ввести понятие контурных токов, которые следует рассматривать как новые неизвестные величины. К понятию контурных токов можно прийти, расщепляя токи ветвей (рис. 3.8, а) на две составляющие (рис. 3.8, б):

$$\dot{I}_{mk} = \dot{I}'_{mk} + \dot{I}''_{mk}$$

или

$$\dot{I}_{mk} = \dot{I}'_{mk} - \dot{I}''_{mk}.$$

При этом как токи ветвей, так и их составляющие удовлетворяют первому закону Кирхгофа. Например, для узла, изображенного на рис. 3.8,

$$-\dot{I}_{m1} - \dot{I}_{m2} + \dot{I}_{m3} + \dot{I}_{m4} + \dot{I}_{m5} = 0$$

и

$$-\dot{I}'_{m1} + \dot{I}''_{m1} - \dot{I}'_{m2} - \dot{I}''_{m2} + \dot{I}'_{m3} - \dot{I}''_{m3} + \dot{I}'_{m4} - \dot{I}''_{m4} + \dot{I}'_{m5} + \dot{I}''_{m5} = 0.$$

Если принять, что составляющие токов, объединенные скобками, равны ( $\dot{I}'_{mk} = \dot{I}''_{mk} = \dot{I}_{mk}$ ), то последнее равенство не нарушится,

обращаясь в тождество вида  $0 = 0$ . При этом одинаковые составляющие токов, изображенные на рис. 3.8, б могут быть объединены в один ток  $\dot{I}_{mkl}$ , как показано на рис. 3.8, в. Токи  $\dot{I}_{mkl}$  можно рассматривать как токи, протекающие в некоторых замкнутых контурах, в которые входят ветви, сходящиеся в рассматриваемом узле. Поэтому токи  $\dot{I}_{mkl}$  называются контурными токами.

Если в результате решения задачи будут найдены контурные токи, то неизвестные токи ветвей определяются как сумма или разность соответствующих контурных токов. Такой метод решения задачи называется методом контурных токов.

Выше было показано, что уравнения, составленные по первому закону Кирхгофа, при переходе к контурным токам обращаются

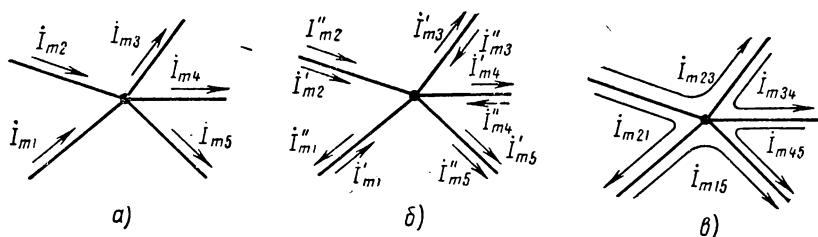


Рис. 3.8. Образование контурных токов

в тождества. Это означает, что для определения контурных токов надо составлять уравнения только по второму закону Кирхгофа. При этом вместо  $n = n_b$  уравнений достаточно составить  $n_2$  уравнений, где  $n_2$  определяется прежней универсальной формулой (3.10). Действительно, число независимых контуров не зависит от перехода к контурным токам. Следовательно, при этом остается  $n_2$  независимых контуров и соответственно имеется  $n_2$  независимых контурных токов.

Эти независимые контуры должны выбираться уже не столь произвольно, как в методе токов ветвей. Обязательным условием выбора независимых контуров является отсутствие ветвей, не охваченных каким-либо из выбранных контуров. При этом можно рекомендовать такой выбор независимых контуров, при котором ветви с искомыми токами входят только в один из выбранных контуров. Такой выбор контуров, возможный в тех случаях, когда не все токи ветвей подлежат определению, сокращает объем вычислительной работы.

При произвольном выборе независимых контуров (с оговоренными ограничениями) в схеме могут встретиться такие ветви, через которые протекает не два, а больше контурных токов. Это означает, что соответствующий ток ветви должен определяться как алгебраическая сумма всех контурных токов, протекающих через эту ветвь.

После выбора независимых контуров следует наметить положительные направления контурных токов, которые могут быть произвольными. Можно, однако, рекомендовать выбор одинаковых направлений для всех контурных токов, например, по направлению вращения часовой стрелки. При этом любой ток ветви равняется разности соответствующих контурных токов, если схема является планарной, и не приходится задумываться о выборе знаков.

После разметки контурных токов составляются уравнения вида (2.84), в которых напряжения выражаются через контурные токи по закону Ома (2.20). Например, для схемы, изображенной на рис. 3.6, выбрав два независимых контура, отмеченных стрелками  $\dot{I}_{m12}$ ,  $\dot{I}_{m23}$ , получим следующие уравнения:

$$\begin{aligned}\dot{Z}_1 \dot{I}_{m12} + \dot{Z}_2 (\dot{I}_{m12} - \dot{I}_{m23}) &= \dot{E}_{m1} - \dot{E}_{m2}, \\ \dot{Z}_2 (\dot{I}_{m23} - \dot{I}_{m12}) + \dot{Z}_3 \dot{I}_{m23} &= \dot{E}_{m2},\end{aligned}$$

или после приведения подобных членов

$$\begin{aligned}(\dot{Z}_1 + \dot{Z}_2) \dot{I}_{m12} - \dot{Z}_2 \dot{I}_{m23} &= \dot{E}_{m1} - \dot{E}_{m2}, \\ -\dot{Z}_2 \dot{I}_{m12} + (\dot{Z}_2 + \dot{Z}_3) \dot{I}_{m23} &= \dot{E}_{m2}.\end{aligned}\quad (3.11)$$

Если цепь имеет источники тока, то, как и в методе токов ветвей, выбираемые независимые контуры не должны содержать ветвей с этими источниками. Однако при составлении уравнений по методу контурных токов задающие токи должны учитываться при определении падения напряжения в ветвях цепи. При этом контуры, по которым протекают задающие токи, намечаются произвольно. Например, для схемы, изображенной на рис. 3.7, выбрав независимый контур, отмеченный стрелкой  $\dot{I}_{m12}$ , и произвольно наметив стрелкой  $\dot{J}_m$  путь задающего тока, получим уравнение

$$\dot{Z}_1 (\dot{I}_{m12} - \dot{J}_m) + \dot{Z}_2 \dot{I}_{m12} = \dot{E}_m,$$

или

$$(\dot{Z}_1 + \dot{Z}_2) \dot{I}_{m12} = \dot{E}_m + \dot{Z}_1 \dot{J}_m. \quad (3.12)$$

Здесь член с током  $\dot{J}_m$  перенесен в правую часть равенства как известная величина.

Установив на частных примерах правила составления уравнений, покажем теперь, что эти правила могут быть использованы и в случае произвольной цепи сколь угодно сложной конфигурации.

Действительно, из уравнений (3.11) и (3.12) нетрудно установить простой алгоритм, по которому должны составляться уравнения контурных токов. Для произвольной схемы, содержащей  $n = n_2$  независимых контуров, этот алгоритм выражается следующей системой уравнений:

$$\begin{aligned}\dot{Z}_{11} \dot{I}_{m1} + \dot{Z}_{12} \dot{I}_{m2} + \dot{Z}_{13} \dot{I}_{m3} + \dots + \dot{Z}_{1n} \dot{I}_{mn} &= \dot{E}_{m1}, \\ \dot{Z}_{21} \dot{I}_{m1} + \dot{Z}_{22} \dot{I}_{m2} + \dot{Z}_{23} \dot{I}_{m3} + \dots + \dot{Z}_{2n} \dot{I}_{mn} &= \dot{E}_{m2}, \\ \dot{Z}_{31} \dot{I}_{m1} + \dot{Z}_{32} \dot{I}_{m2} + \dot{Z}_{33} \dot{I}_{m3} + \dots + \dot{Z}_{3n} \dot{I}_{mn} &= \dot{E}_{m3}, \\ \vdots &\vdots \\ \dot{Z}_{n1} \dot{I}_{m1} + \dot{Z}_{n2} \dot{I}_{m2} + \dot{Z}_{n3} \dot{I}_{m3} + \dots + \dot{Z}_{nn} \dot{I}_{mn} &= \dot{E}_{mn},\end{aligned}\quad (3.13)$$

где

$$\dot{E}_{ml} = \dot{E}'_{ml} + \dot{E}''_{ml}, \quad (3.14)$$

$$\dot{E}'_{ml} = \sum_{k=1}^{m_1} \dot{E}_{mlk}, \quad (3.15)$$

$$\dot{E}''_{ml} = \sum_{k=1}^{m_2} \dot{Z}_{lk} j_{mk}; \quad (3.16)$$

$m_1$  — число источников напряжения  $\dot{E}_{mlk}$  в  $l$ -м контуре;

$m_2$  — число источников тока, задающие токи  $j_{mk}$  которых протекают через сопротивления  $\dot{Z}_{lk}$   $l$ -го контура.

В системе уравнений (3.13) номер строки соответствует номеру рассматриваемого контура, а через  $\dot{I}_{ml}$  обозначен контурный ток  $l$ -го контура ( $l = 1, 2, 3, \dots, n$ ). В левых частях этих уравнений стоит алгебраическая сумма всех падений напряжения в  $l$ -м контуре, а в правых частях — алгебраически складывается суммарное задающее напряжение  $\dot{E}'_{ml}$ , действующее в этом контуре, и дополнительная э. д. с.  $\dot{E}''_{ml}$ .

Через  $\dot{Z}_{ll}$  здесь обозначена сумма сопротивлений всех ветвей  $l$ -го контура. Это сопротивление, называемое собственным сопротивлением  $l$ -го контура, фигурирует в уравнениях (3.11), (3.12) в виде сумм  $\dot{Z}_1 + \dot{Z}_2$  и  $\dot{Z}_2 + \dot{Z}_3$ .

В равенствах (3.13), (3.16) через  $\dot{Z}_{lk}$  обозначены сопротивления ветвей, которые входят одновременно в  $k$ -й и  $l$ -й контуры, так что  $\dot{Z}_{kl} = \dot{Z}_{lk}$ . Такими сопротивлениями, называемыми сопротивлениями связи, в уравнениях (3.11) и (3.12) являются соответственно сопротивления  $\dot{Z}_2$  и  $\dot{Z}_1$ .

При наличии в схеме индуктивных связей под сопротивлениями связи следует понимать также сопротивления взаимной индукции. Это соответствует принятому выше названию и структуре равенств (2.140), которая совпадает со структурой уравнений (3.13).

При отсутствии общего сопротивления у  $k$ -го и  $l$ -го контуров и индуктивных связей между ними соответствующее сопротивление связи  $\dot{Z}_{kl}$  равно нулю. Если же через некоторое сопротивление  $\dot{Z}$  проходят контурные токи трех и более контуров ( $i$ -го,  $k$ -го,  $l$ -го и т. д.), то сопротивление  $\dot{Z}$  входит в состав сопротивлений связи всех этих контуров ( $\dot{Z}_{ik}$ ,  $\dot{Z}_{il}$ ,  $\dot{Z}_{kl}$  и т. д.). В частности, если связь между указанными контурами осуществляется только через сопротивление  $\dot{Z}$ , то  $\dot{Z} = \dot{Z}_{ik} = \dot{Z}_{il} = \dot{Z}_{kl}$ .

Сопротивление связи вошло в уравнения (3.11) с отрицательным знаком, что объясняется разным направлением контурных токов, протекающих через это сопротивление. Нетрудно видеть, что при изменении, например, направления контурного тока  $\dot{I}_{m23}$  сопротивление связи вошло бы в уравнения (3.11) с положительным знаком. Отсюда следует, что и в обобщенных уравнениях (3.13) сопротивления связи должны браться с положительным или отрицательным знаком в зависимости от совпадения или несовпадения



направлений контурных токов в этих сопротивлениях. В частности, при одинаковых направлениях всех контурных токов в планарной схеме (например, по часовой стрелке) сопротивления связи должны входить в уравнения (3.13) с отрицательным знаком.

Как и в уравнении (3.12), дополнительные э. д. с. (3.16) появляются в уравнениях (3.13) в результате падения напряжения на сопротивлениях связи при протекании через них задающих токов. Число слагаемых  $m_2$  в равенстве (3.16) определяется числом сопротивлений связи, объединяющих рассматриваемый  $l$ -й контур с контурами, содержащими источники тока. Знак сопротивления связи в равенстве (3.16) является положительным, когда задающий ток протекает через него навстречу контурному току, и отрицательным при совпадении направлений токов.

Итак, алгоритм составления уравнений (3.13) рассмотрен полностью. Теперь можно сделать вывод о том, что при решении задач методом контурных токов составление этих уравнений является ненужным процессом, а их выписывание — пустой тратой времени.

Действительно, целью решения задачи является определение контурных токов. А любой контурный ток  $I_{ml}$  может быть определен на основании решения системы уравнений (3.13) через определители:

$$I_{ml} = \frac{\Delta_{Zl}}{\Delta_Z}, \quad (3.17)$$

где

$$\Delta_Z = \begin{vmatrix} \dot{Z}_{11} & \dot{Z}_{12} & \dot{Z}_{13} & \dots & \dot{Z}_{1n} \\ \dot{Z}_{21} & \dot{Z}_{22} & \dot{Z}_{23} & \dots & \dot{Z}_{2n} \\ \dot{Z}_{31} & \dot{Z}_{32} & \dot{Z}_{33} & \dots & \dot{Z}_{3n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dot{Z}_{n1} & \dot{Z}_{n2} & \dot{Z}_{n3} & \dots & \dot{Z}_{nn} \end{vmatrix} \quad (3.18)$$

— определитель сопротивлений цепи;

$$\Delta_{Zl} = \begin{vmatrix} \dot{Z}_{11} & \dot{Z}_{12} & \dot{Z}_{13} & \dots & \dot{Z}_{1(l-1)} & \dot{E}_{m1} & \dot{Z}_{1(l+1)} & \dots & \dot{Z}_{1n} \\ \dot{Z}_{21} & \dot{Z}_{22} & \dot{Z}_{23} & \dots & \dot{Z}_{2(l-1)} & \dot{E}_{m2} & \dot{Z}_{2(l+1)} & \dots & \dot{Z}_{2n} \\ \dot{Z}_{31} & \dot{Z}_{32} & \dot{Z}_{33} & \dots & \dot{Z}_{3(l-1)} & \dot{E}_{m3} & \dot{Z}_{3(l+1)} & \dots & \dot{Z}_{3n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dot{Z}_{n1} & \dot{Z}_{n2} & \dot{Z}_{n3} & \dots & \dot{Z}_{n(l-1)} & \dot{E}_{mn} & \dot{Z}_{n(l+1)} & \dots & \dot{Z}_{nn} \end{vmatrix} \quad (3.19)$$

— контурный определитель, полученный из определителя сопротивлений  $\Delta_Z$  путем замены в нем элементов  $l$ -го столбца суммарными э. д. с. (3.14).

Таким образом, не составляя систему уравнений (3.13), можно непосредственно определить контурные токи по соотношениям (3.17) — (3.19). Неискушенным студентам, однако, не рекомендуется при решении задач методом контурных токов пренебрегать этапом составления уравнений.

#### 4. Метод узловых напряжений

В любой схеме, содержащей  $n_y$  узлов, можно измерить напряжения всех узлов относительно одного узла, называемого базисным. Если на рис. 3.9 принять в качестве базисного нулевой узел с потенциалом  $\bar{\varphi}_0$ , то указанные напряжения будут иметь значения  $u_1 = \bar{\varphi}_1 - \bar{\varphi}_0$ ,  $u_2 = \bar{\varphi}_2 - \bar{\varphi}_0$  и т. д. Эти величины получили название узловых напряжений.

Для определения всех напряжений и токов в схеме достаточно знать узловые напряжения. Действительно, напряжение  $u_{kl}$  на некоторой ветви между  $k$ -м и  $l$ -м узлами равно разности между соответствующими узловыми напряжениями:  $u_{kl} = \bar{\varphi}_k - \bar{\varphi}_l = (\bar{\varphi}_k - \bar{\varphi}_0) - (\bar{\varphi}_l - \bar{\varphi}_0) = u_k - u_l$ . Зная же напряжение на ветви, по закону Ома можно определить и ток ветви. Таким образом, любую задачу расчета цепи можно свести к определению узловых напряжений.

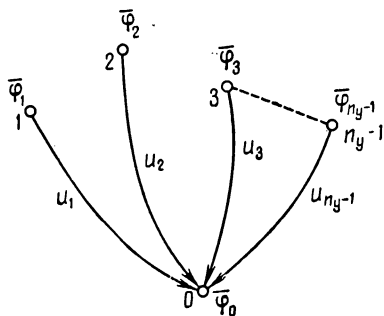


Рис. 3.9. Определение узловых напряжений

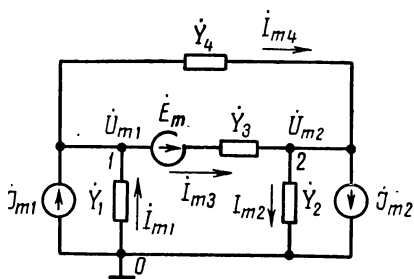


Рис. 3.10. Сложноразветвленная цепь с источниками тока и напряжения

Так как в схеме с  $n_y$  узлами имеется  $n_1 = n_y - 1$  независимых узлов и столько же неизвестных узловых напряжений, то их можно определить из уравнений, составленных по первому закону Кирхгофа. Такой метод решения задач называется методом узловых напряжений.

Поскольку потенциал базисного узла может быть принят равным нулю, то узловые напряжения при этом будут равняться потенциалам соответствующих узлов. Поэтому метод узловых напряжений называют иногда методом узловых потенциалов.

Рассмотрим способ составления уравнений по методу узловых напряжений на примере схемы, изображенной на рис. 3.10.

Выбрав в этой схеме заземленный узел (0) в качестве базисного и пронумеровав произвольно независимые узлы 1 и 2, намечаем узловые напряжения  $\dot{U}_{m1}$ ,  $\dot{U}_{m2}$  и токи ветвей  $\dot{I}_{m1} \div \dot{I}_{m4}$ .

Согласно закону Ома (2.21)  $\dot{I}_{m1} = -\dot{Y}_1 \dot{U}_{m1}$ ,  $\dot{I}_{m2} = \dot{Y}_2 \dot{U}_{m2}$ ,  $\dot{I}_{m4} = \dot{Y}_4 (\dot{U}_{m1} - \dot{U}_{m2})$  и согласно формуле (2.85)

$$\dot{U}_{m2} - \dot{U}_{m1} = \dot{E}_m - \frac{\dot{I}_{m3}}{\dot{Y}_3}, \text{ откуда } \dot{I}_{m3} = \dot{Y}_3 (\dot{U}_{m1} - \dot{U}_{m2} + \dot{E}_m).$$

Подставляя эти значения токов в уравнения вида (2.86), составленные для первого и второго узлов, получим:

$$\begin{aligned} \dot{Y}_1 \dot{U}_{m1} + \dot{Y}_3 (\dot{U}_{m1} - \dot{U}_{m2} + \dot{E}_m) + \dot{Y}_4 (\dot{U}_{m1} - \dot{U}_{m2}) &= \dot{J}_{m1}, \\ \dot{Y}_2 \dot{U}_{m2} - \dot{Y}_3 (\dot{U}_{m1} - \dot{U}_{m2} + \dot{E}_m) - \dot{Y}_4 (\dot{U}_{m1} - \dot{U}_{m2}) &= -\dot{J}_{m2}, \end{aligned}$$

или после приведения подобных членов

$$\begin{aligned} (\dot{Y}_1 + \dot{Y}_3 + \dot{Y}_4) \dot{U}_{m1} - (\dot{Y}_3 + \dot{Y}_4) \dot{U}_{m2} &= \dot{J}_{m1} - \dot{Y}_3 \dot{E}_m, \\ -(\dot{Y}_3 + \dot{Y}_4) \dot{U}_{m1} + (\dot{Y}_2 + \dot{Y}_3 + \dot{Y}_4) \dot{U}_{m2} &= -\dot{J}_{m2} + \dot{Y}_3 \dot{E}_m. \end{aligned} \quad (3.20)$$

Здесь член  $\dot{Y}_3 \dot{E}_m$  перенесен в правую часть уравнений как известная величина.

Таким образом, в окончательном виде уравнения, составленные по методу узловых напряжений, содержат в левой части слагаемые, пропорциональные узловым напряжениям каждого из узлов.

В уравнении, составленном для первого узла, при узловом напряжении  $\dot{U}_{m1}$  стоит множителем сумма проводимостей всех ветвей, сходящихся в этом узле:  $\dot{Y}_{11} = \dot{Y}_1 + \dot{Y}_3 + \dot{Y}_4$ . Аналогично во втором уравнении при узловом напряжении  $\dot{U}_{m2}$  стоит сумма проводимостей всех ветвей, сходящихся во втором узле:  $\dot{Y}_{22} = \dot{Y}_2 + \dot{Y}_3 + \dot{Y}_4$ . Такие суммарные проводимости называются собственными проводимостями узлов и обозначаются для произвольного  $l$ -го узла через  $\dot{Y}_{ll}$ .

В обоих уравнениях при узловых напряжениях смежных узлов ( $\dot{U}_{m2}$  в уравнении для первого узла и  $\dot{U}_{m1}$  в уравнении для второго узла) стоит множителем суммарная проводимость ветвей, включенных между рассматриваемым и смежным узлами:  $\dot{Y}_{12} = \dot{Y}_{21} = \dot{Y}_3 + \dot{Y}_4$ . Такая суммарная проводимость между произвольными  $k$ -м и  $l$ -м узлами называется взаимной проводимостью узлов и обозначается через  $\dot{Y}_{kl} = \dot{Y}_{lk}$ . Взаимная проводимость входит в рассматриваемые уравнения с отрицательным знаком.

В правые части уравнений (3.20), помимо задающих токов, входят слагаемые в виде произведения э. д. с. источника напряжения, включенного в ветви, подходящей к рассматриваемому узлу, на проводимость этой ветви. При этом для первого узла указанное слагаемое имеет отрицательный знак, а для второго — положительный. Такие знаки обусловлены, очевидно, тем, что задающее напряжение  $\dot{E}_m$  направлено от первого узла ко второму.

Распространяя уравнения (3.20) на случай произвольной схемы с  $n = n_1$  независимыми узлами, представим обобщенные уравнения узловых напряжений в следующем виде:

$$\begin{aligned} \dot{Y}_{11}\dot{U}_{m1} + \dot{Y}_{12}\dot{U}_{m2} + \dot{Y}_{13}\dot{U}_{m3} + \dots + \dot{Y}_{1n}\dot{U}_{mn} &= j_{m1}, \\ \dot{Y}_{21}\dot{U}_{m1} + \dot{Y}_{22}\dot{U}_{m2} + \dot{Y}_{23}\dot{U}_{m3} + \dots + \dot{Y}_{2n}\dot{U}_{mn} &= j_{m2}, \\ \dot{Y}_{31}\dot{U}_{m1} + \dot{Y}_{32}\dot{U}_{m2} + \dot{Y}_{33}\dot{U}_{m3} + \dots + \dot{Y}_{3n}\dot{U}_{mn} &= j_{m3}, \\ \vdots &\vdots \\ \dot{Y}_{a1}\dot{U}_{m1} + \dot{Y}_{n2}\dot{U}_{m2} + \dot{Y}_{n3}\dot{U}_{m3} + \dots + \dot{Y}_{nn}\dot{U}_{mn} &= j_{mn}, \end{aligned} \quad (3.21)$$

где

$$\dot{j}_{ml} = \dot{j}'_{ml} + \dot{j}''_{ml}, \quad (3.22)$$

$$j'_{ml} = \sum_{k=1}^{m_l} j_{mlk}, \quad (3.23)$$


$$j''_{ml} = \sum_{k=1}^{m_2} \dot{Y}'_{lk} \dot{E}_{mk}; \quad (3.24)$$

$m_1$  — число источников тока, задающие токи  $j_{mlk}$  которых протекают к  $l$ -му узлу;

$m_2$  — число ветвей с источниками напряжения, сходящихся в  $l$ -м узле;

 $\dot{Y}_{lk}$  — проводимости ветвей с источниками напряжения.

В соответствии с правилами знаков, взаимные проводимости  $\dot{Y}_{kl}$  входят в уравнения (3.21) с отрицательным знаком, а задающие токи  $\dot{J}_{mlk}$  и задающие напряжения  $\dot{E}_{mk}$  — с положительным знаком, если они направлены в сторону рассматриваемого узла, и с отрицательным знаком, если они направлены от этого узла (при положительных знаках  $\dot{Y}_{lk}$ ).



Уравнения (3.21) теряют смысл при наличии в схеме идеальных источников напряжения, поскольку для ветвей с такими источниками  $\dot{Y}_{lk} = \infty$ . Однако и в этом случае можно воспользоваться методом узловых напряжений, если схема содержит один идеальный источник напряжения или любое число  $n_E$  таких источников, имеющих общий узел.

Действительно, при включении идеального источника напряжения  $\dot{E}_m$  между двумя узлами узловое напряжение одного из них однозначно определяется через узловое напряжение другого узла (рис. 3.11). Поэтому удобно принять в качестве базисного тот узел цепи, к которому подключены все имеющиеся в схеме идеальные источники напряжения. Тогда можно не составлять уравнения для остальных

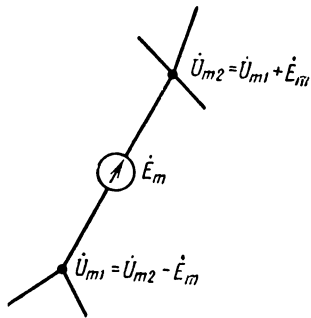


Рис. 3.11. Включение идеального источника напряжения между двумя узлами цепи

узлов, соединенных с этими источниками, поскольку их узловые напряжения известны. При этом необходимое число уравнений сокращается до значения

$$n_1 = n_y - 1 - n_E, \quad (3.25)$$

а в уравнении (3.24) под величиной  $\dot{Y}'_{lk}$  следует понимать взаимную проводимость между  $l$ -м узлом и  $k$ -м узлом, к которому подключен идеальный источник напряжения  $\dot{E}_{mk}$ .

В тех случаях, когда хотя бы один идеальный источник напряжения не имеет общего узла с другими идеальными источниками, использование метода узловых напряжений становится нецелесообразным, так как алгоритм составления уравнений при этом существенно усложняется.

Как и при пользовании методом контурных токов, составление уравнений (3.21) не является обязательным. Искомые узловые напряжения могут быть найдены непосредственно из общего решения системы уравнений (3.21):

$$\dot{U}_{ml} = \frac{\Delta_{yl}}{\Delta_y}, \quad (3.26)$$

где

$$\Delta_y = \begin{vmatrix} \dot{Y}_{11} & \dot{Y}_{12} & \dot{Y}_{13} & \dots & \dot{Y}_{1n} \\ \dot{Y}_{21} & \dot{Y}_{22} & \dot{Y}_{23} & \dots & \dot{Y}_{2n} \\ \dot{Y}_{31} & \dot{Y}_{32} & \dot{Y}_{33} & \dots & \dot{Y}_{3n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dot{Y}_{n1} & \dot{Y}_{n2} & \dot{Y}_{n3} & \dots & \dot{Y}_{nn} \end{vmatrix} \quad (3.27)$$

— определитель проводимостей цепи;

$$\Delta_{yl} = \begin{vmatrix} \dot{Y}_{11} & \dot{Y}_{12} & \dot{Y}_{13} & \dots & \dot{Y}_{1(l-1)} & \dot{j}_{m1} & \dot{Y}_{1(l+1)} & \dots & \dot{Y}_{1n} \\ \dot{Y}_{21} & \dot{Y}_{22} & \dot{Y}_{23} & \dots & \dot{Y}_{2(l-1)} & \dot{j}_{m2} & \dot{Y}_{2(l+1)} & \dots & \dot{Y}_{2n} \\ \dot{Y}_{31} & \dot{Y}_{32} & \dot{Y}_{33} & \dots & \dot{Y}_{3(l-1)} & \dot{j}_{m3} & \dot{Y}_{3(l+1)} & \dots & \dot{Y}_{3n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dot{Y}_{n1} & \dot{Y}_{n2} & \dot{Y}_{n3} & \dots & \dot{Y}_{n(l-1)} & \dot{j}_{mn} & \dot{Y}_{n(l+1)} & \dots & \dot{Y}_{nn} \end{vmatrix} \quad (3.28)$$

— узловой определитель, полученный из определителя проводимостей  $\Delta_y$  путем замены в нем элементов  $l$ -го столбца суммарными задающими токами (3.22).

Таким образом, решение задачи методом узловых напряжений получается аналогичным ее решению методом контурных токов. Поэтому выбор между этими методами определяется соотношением между величинами  $n_1$  и  $n_2$  в соответствии с формулами (3.25) и (3.9). При  $n_2 < n_1$  предпочтительнее метод контурных токов, при  $n_1 < n_2$  — метод узловых напряжений.

Например, для схемы, изображенной на рис. 3.6, по методу контурных токов требовалось составлять два уравнения, а по методу

узловых напряжений требуется только одно уравнение (для верхнего узла)

$$\left(\frac{1}{\dot{Z}_1} + \frac{1}{\dot{Z}_2} + \frac{1}{\dot{Z}_3}\right) \dot{U}_m = \frac{\dot{E}_{m1}}{\dot{Z}_1} + \frac{\dot{E}_{m2}}{\dot{Z}_2},$$

из которого непосредственно определяется искомое напряжение  $\dot{U}_m$  на нагрузочном сопротивлении  $\dot{Z}_3$ .

## 5. Метод наложения

Используя закон суперпозиции для линейных цепей, можно разработать простой алгоритм решения задач, который называется методом суперпозиции, или методом наложения.

В соответствии с этим методом для произвольной линейной цепи, содержащей несколько источников, любой ток или напряжение определяют в несколько этапов.

Сначала выключают все источники, кроме первого, и определяют напряжение или ток в том участке цепи, где это необходимо. Затем выключают первый, включают второй источник и находят напряжение или ток в том же участке цепи под воздействием этого источника. Далее операция повторяется аналогичным образом и для всех остальных источников. При этом искомое напряжение или ток определяется как сумма напряжений или токов, обусловленных действием каждого источника в отдельности.

Говоря о выключении источников, следует подчеркнуть, что исключению подлежат задающие напряжения и токи, а внутренние сопротивления и проводимости источников не должны исключаться из схемы. При этом под выключением источника напряжения понимается исключение задающего напряжения при коротком замыкании зажимов идеального источника (рис. 3.12, а), под выключением источника тока — размыкание ветви с идеальным источником (рис. 3.12, б).

Для иллюстрации метода наложения определим узловое напряжение  $\dot{U}_m$  в схеме, изображенной на рис. 3.6:

$$\dot{U}_m = \dot{U}_{m1} + \dot{U}_{m2},$$

где согласно формулам (3.1) и (2.46)

$$\begin{aligned} \dot{U}_{m1} &= \frac{\dot{Z}'}{\dot{Z}_1 + \dot{Z}'} \dot{E}_{m1}, & \dot{Z}' &= \frac{\dot{Z}_2 \dot{Z}_3}{\dot{Z}_2 + \dot{Z}_3}, \\ \dot{U}_{m2} &= \frac{\dot{Z}''}{\dot{Z}_2 + \dot{Z}''} \dot{E}_{m2}, & \dot{Z}'' &= \frac{\dot{Z}_1 \dot{Z}_3}{\dot{Z}_1 + \dot{Z}_3}. \end{aligned}$$

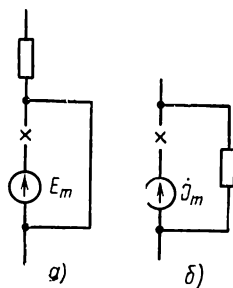


Рис. 3.12. Выключение источника напряжения и источника тока

Применение метода наложения для расчета токов в линейных цепях можно обосновать и с помощью формулы (3.17). Например, при определении  $l$ -го контурного тока, разворачивая определитель (3.19) по элементам  $l$ -го столбца, соотношение (3.17) можно представить в следующем виде:

$$i_{ml} = i_{ml1} + i_{ml2} + \dots + i_{mln}, \quad (3.29)$$

где

$$i_{mlk} = \frac{\dot{E}_{mk}}{\dot{Z}_{(kl)}} \quad (3.30)$$

— контурный ток, протекающий в  $l$ -м контуре под действием задающего напряжения  $\dot{E}_{mk}$  в  $k$ -м контуре;

$$\dot{Z}_{(kl)} = \frac{\Delta z}{A_{kl}} \quad (3.31)$$

— сопротивление передачи, которое аналогично закону Ома (2.22) связывает задающее напряжение  $\dot{E}_{mk}$ , действующее в  $k$ -м контуре, с обусловленным им током  $i_{mlk}$  в  $l$ -м контуре;

$$A_{kl} = (-1)^{k+l} \Delta_{kl} \quad (3.32)$$

— алгебраическое дополнение элемента  $\dot{Z}_{kl}$  в определителе сопротивлений  $\Delta z$ ;

$\Delta_{kl}$  — минор элемента  $\dot{Z}_{kl}$ , образованный вычеркиванием  $k$ -й строки и  $l$ -го столбца в определителе  $\Delta z$ .

При  $k = l$  сопротивление  $\dot{Z}_{kk}$  называется входным сопротивлением цепи. Входное сопротивление рассматривается подробнее в последующем изложении.

Для линейной цепи сопротивление передачи  $\dot{Z}_{kl}$  не зависит от действующих напряжений и токов. Поэтому равенство (3.29) можно рассматривать как обоснование метода наложения в рассматриваемом случае. Тем самым доказывается и закон суперпозиции, выражением которого является метод наложения.

Аналогично с помощью соотношения (3.26) можно обосновать закон суперпозиции и применение метода наложения для расчета напряжений в линейных цепях.

## § 3.2. КОСВЕННЫЕ МЕТОДЫ РАСЧЕТА

### 1. Метод преобразования сопротивлений

Пользуясь основными законами токопрохождения, можно устанавливать различные свойства цепей и доказывать вспомогательные соотношения, описывающие эти свойства. Косвенные методы расчета цепей основаны на использовании таких вспомогательных

соотношений. При косвенных методах расчета схема подвергается различным эквивалентным преобразованиям.

Эквивалентными называются такие преобразования, при которых схема или какая-либо ее часть заменяется другой схемой без изменения токов и напряжений на внешних зажимах измененного участка цепи. При этом цепи, которые могут заменять друг друга без изменения токов и напряжений на их внешних зажимах, называются взаимозаменяемыми, или эквивалентными цепями.

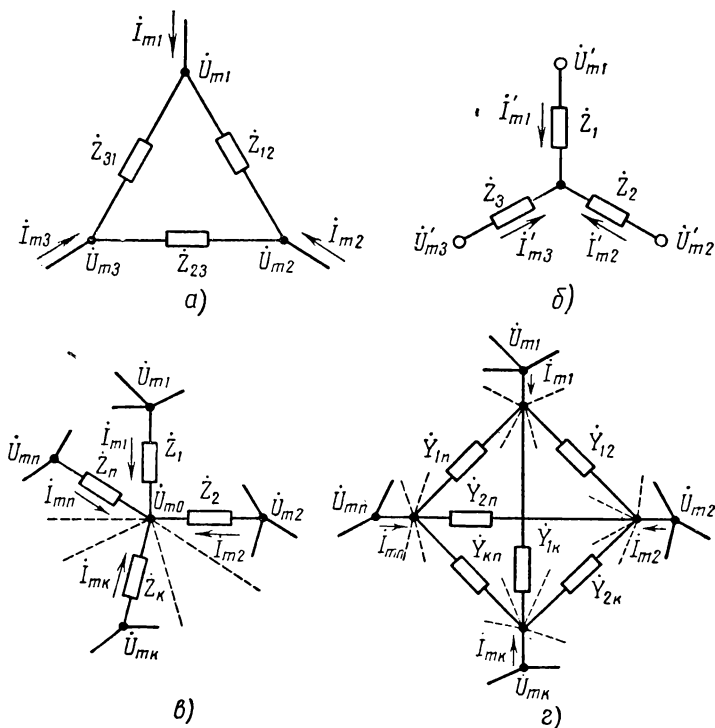


Рис. 3.13. Эквивалентные многополюсники

Таковыми эквивалентными цепями могут быть, например, схемы, изображенные на рис. 3.13, а, б, если  $\dot{U}'_{m1} = \dot{U}_{m1}$ ,  $\dot{U}'_{m2} = \dot{U}_{m2}$ ,  $\dot{U}'_{m3} = \dot{U}_{m3}$  и  $\dot{I}'_{m1} = \dot{I}_{m1}$ ,  $\dot{I}'_{m2} = \dot{I}_{m2}$ ,  $\dot{I}'_{m3} = \dot{I}_{m3}$ . Если в более общем случае  $n$ -лучевая звезда (рис. 3.13, в) может быть заменена  $n$ -угольником (рис. 3.13, г) с сохранением неизменных значений  $\dot{U}_{m1}$ ,  $\dot{U}_{m2}$ , ...,  $\dot{U}_{mn}$  и  $\dot{I}_{m1}$ ,  $\dot{I}_{m2}$ , ...,  $\dot{I}_{mn}$ , то такие  $n$ -полюсники являются эквивалентными, а их замена относится к эквивалентным преобразованиям.

Понятие эквивалентности цепей можно формулировать и иначе, если не рассматривать отдельные зажимы в схеме. В этом случае



под эквивалентными цепями следует понимать такие цепи, в которых одинаковы токи и напряжения на всех элементах, не подвергнутых преобразованию. Это определение вытекает непосредственно из предыдущего.

Метод расчета цепей, при котором производится эквивалентное преобразование пассивных схем, называется методом преобразования сопротивлений.

Одним из методов преобразования сопротивлений является эквивалентная замена двухполюсников с параллельным и последовательным соединением сопротивлений (см. рис. 2.9 и 2.12) при помощи формул (2.36), (2.37) или (2.38), (2.39). Такое эквивалентное преобразование производилось выше при построении эквивалентных схем конденсатора.

Более общее эквивалентное преобразование относится к схемам  $n$ -полюсников, о которых говорилось выше. Докажем, что  $n$ -лучевая звезда и  $n$ -угольник, изображенные на рис. 3.13,  $\theta$  и  $z$ , являются эквивалентными, если проводимости их ветвей связаны определенной зависимостью.

Для доказательства будем считать заданными узловые напряжения  $\dot{U}_{m1}, \dot{U}_{m2}, \dots, \dot{U}_{mn}$ . При этом для схемы звезды (см. рис. 3.13,  $\theta$ )

$$\begin{aligned} i_{m1} &= \dot{Y}_1 (\dot{U}_{m1} - \dot{U}_{m0}), \\ i_{m2} &= \dot{Y}_2 (\dot{U}_{m2} - \dot{U}_{m0}), \\ &\dots \dots \dots \\ i_{mn} &= \dot{Y}_n (\dot{U}_{mn} - \dot{U}_{m0}). \end{aligned}$$

Сложив эти равенства, найдем из уравнения (2.42) неизвестное напряжение  $\dot{U}_{m0}$ :

$$\dot{U}_{m0} = \frac{\sum_{v=1}^n \dot{Y}_v \dot{U}_{mv}}{\sum_{v=1}^n \dot{Y}_v}. \quad (3.33)$$

Отсюда определяется ток, притекающий к некоторому  $l$ -му узлу ( $l = 1, 2, \dots, n$ ):

$$\begin{aligned} i_{ml} &= \dot{Y}_l (\dot{U}_{ml} - \dot{U}_{m0}) = \\ &= \dot{Y}_l \left( \dot{U}_{ml} - \frac{\sum_{v=1}^n \dot{Y}_v \dot{U}_{mv}}{\sum_{v=1}^n \dot{Y}_v} \right) = \dot{Y}_l \frac{\dot{U}_{ml} \sum_{v=1}^n \dot{Y}_v - \sum_{v=1}^n \dot{Y}_v \dot{U}_{mv}}{\sum_{v=1}^n \dot{Y}_v}. \end{aligned}$$

Приведя подобные члены в числителе этого выражения, получим окончательно:

$$i_{ml} = \frac{\dot{Y}_l \dot{Y}_1}{\sum_{v=1}^n \dot{Y}_v} (\dot{U}_{ml} - \dot{U}_{m1}) + \frac{\dot{Y}_l \dot{Y}_2}{\sum_{v=1}^n \dot{Y}_v} (\dot{U}_{ml} - \dot{U}_{m2}) + \dots + \frac{\dot{Y}_l \dot{Y}_n}{\sum_{v=1}^n \dot{Y}_v} (\dot{U}_{ml} - \dot{U}_{mn}). \quad (3.34)$$

Для схемы  $n$ -угольника (см. рис. 3.13, *г*) ток, притекающий к тому же узлу, выражается через оттекающие токи ветвей согласно первому закону Кирхгофа (2.42):

$$i_{ml} = \dot{Y}_{l1} (\dot{U}_{ml} - \dot{U}_{m1}) + \dot{Y}_{l2} (\dot{U}_{ml} - \dot{U}_{m2}) + \dots + \dot{Y}_{ln} (\dot{U}_{ml} - \dot{U}_{mn}). \quad (3.35)$$

Токи в уравнениях (3.34) и (3.35) равны друг другу, если выполняется условие

$$\dot{Y}_{lk} = \frac{\dot{Y}_l \dot{Y}_k}{\sum_{v=1}^n \dot{Y}_v}. \quad (3.36)$$

Используя это условие эквивалентности, можно производить замену произвольной  $n$ -лучевой звезды эквивалентным  $n$ -угольником. Обратная эквивалентная замена невозможна в случае произвольного  $n$ -угольника. Действительно, при определении из соотношений (3.36) значений  $\dot{Y}_1, \dot{Y}_2, \dots, \dot{Y}_n$  при заданных проводимостях  $\dot{Y}_{lk}$  уравнений получается больше, чем неизвестных ( $C_n^2 > n$ ), т. е. система уравнений получается несовместной при произвольных значениях  $\dot{Y}_{lk}$ . Поэтому такая обратная замена возможна только при ограниченных значениях  $\dot{Y}_{lk}$ , а также в случае треугольника с произвольными проводимостями ветвей, поскольку при этом  $C_3^2 = 3$ .

Согласно условию (3.36) треугольник (см. рис. 3.13, *а*) и трехлучевая звезда (см. рис. 3.13, *б*) являются эквивалентными при

$$\dot{Z}_{12} = \dot{Z}_1 + \dot{Z}_2 + \frac{\dot{Z}_1 \dot{Z}_2}{\dot{Z}_3}, \quad \dot{Z}_{23} = \dot{Z}_2 + \dot{Z}_3 + \frac{\dot{Z}_2 \dot{Z}_3}{\dot{Z}_1}, \quad \dot{Z}_{31} = \dot{Z}_3 + \dot{Z}_1 + \frac{\dot{Z}_3 \dot{Z}_1}{\dot{Z}_2} \quad (3.37)$$

и

$$\dot{Z}_1 = \frac{\dot{Z}_{12} \dot{Z}_{13}}{\dot{Z}_{12} + \dot{Z}_{23} + \dot{Z}_{31}}, \quad \dot{Z}_2 = \frac{\dot{Z}_{21} \dot{Z}_{23}}{\dot{Z}_{12} + \dot{Z}_{23} + \dot{Z}_{31}}, \quad \dot{Z}_3 = \frac{\dot{Z}_{31} \dot{Z}_{32}}{\dot{Z}_{12} + \dot{Z}_{23} + \dot{Z}_{31}}.$$

Здесь для большей наглядности формул переставлены индексы ( $\dot{Z}_{kl} = \dot{Z}_{lk}$ ).

Метод преобразования сопротивлений, как и другие косвенные методы расчета, применяется обычно для упрощения расчета цепей. Например, при необходимости рассчитать сопротивление

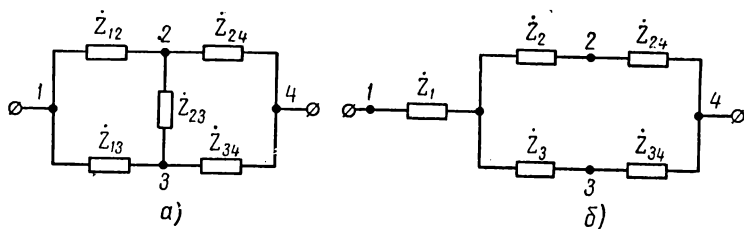


Рис. 3.14. Упрощение схемы при эквивалентном преобразовании сопротивлений

двухполюсника, изображенного на рис. 3.14, а, преобразование треугольника в звезду по формулам (3.38) приводит к простой схеме (рис. 3.14, б), сопротивление которой определяется элементарно.

## 2. Метод преобразования источников

Выше отмечалось, что любой реальный источник электрической энергии может быть отображен эквивалентной схемой как в виде источника напряжения, так и в виде источника тока. Отсюда следует, что при определенных условиях реальные источники напряжения и тока могут быть эквивалентными друг другу.

Для определения условий эквивалентности источников представим равенство (2.87) в виде

$$\dot{U}_m = \frac{\dot{J}_m}{\dot{Y}_i} - \frac{1}{\dot{Y}_i} \dot{I}_m. \quad (3.39)$$

Сопоставляя выражения (3.39) и (2.85), приходим к выводу, что напряжения  $\dot{U}_m$  и токи  $\dot{I}_m$  на внешних зажимах источников напряжения и тока получаются одинаковыми при выполнении условий

$$\dot{E}_m = \frac{\dot{J}_m}{\dot{Y}_i}, \quad \dot{Z}_i = \frac{1}{\dot{Y}_i}. \quad (3.40)$$

Аналогично, представив формулу (2.85) в виде равенства

$$\dot{I}_m = \frac{\dot{E}_m}{\dot{Z}_i} - \frac{1}{\dot{Z}_i} \dot{U}_m, \quad (3.41)$$

приравняем напряжения и токи в соотношениях (2.87) и (3.41). При этом получим следующие условия эквивалентности источников тока и напряжения:

$$j_m = \frac{\dot{E}_m}{\dot{Z}_i}, \quad \dot{Y}_i = \frac{1}{\dot{Z}_i}. \quad (3.42)$$

Таким образом, по формулам (3.40) могут быть найдены параметры источника напряжения, эквивалентного заданному источнику тока, а по формулам (3.42) — параметры источника тока, эквивалентного заданному источнику напряжения.

Эквивалентная замена источников напряжения и тока позволяет упрощать решение задач. Пусть, например, необходимо определить напряжение на нагрузке в схеме, изображенной на рис. 3.7. Замена источника напряжения источником тока приводит к схеме, изображенной на рис. 3.15.

В этой схеме выходное напряжение определяется непосредственно по закону Ома:

$$\dot{U}_m = \frac{\dot{Z}_1 \dot{Z}_2}{\dot{Z}_1 + \dot{Z}_2} (\dot{j}_m + \dot{j}'_m).$$

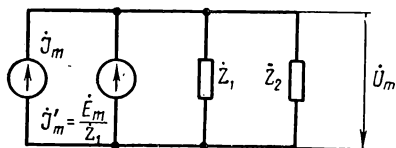


Рис. 3.15. Упрощение схемы, изображенной на рис. 3.7

Некоторые эквивалентные преобразования идеальных источников напряжения основаны на следующем свойстве цепей.

Если две схемы отличаются друг от друга только идеальными источниками напряжения, то они являются эквивалентными при условии, что во всех независимых контурах этих схем сумма контурных э. д. с. одинакова.

Действительно, обе схемы содержат независимые контуры с одинаковыми собственными сопротивлениями и сопротивлениями связи. Следовательно, определители сопротивлений (3.18) для этих схем одинаковы.

По условию равенства контурных э. д. с. равны также контурные определители (3.19) для обеих схем. Отсюда следует равенство всех контурных токов (3.17) и соответственно токов ветвей и напряжений на всех элементах рассматриваемых схем.

Доказанное свойство эквивалентности лежит в основе эквивалентного преобразования цепей, называемого методом переноса и расщепления источников напряжения. Рассмотрим это преобразование на примере схемы рис. 3.16, а. Эта схема имеет шесть независимых контуров, и для ее расчета методом контурных токов требуется шесть уравнений. При расчете же данной цепи методом узловых напряжений требуется только три уравнения. Однако алгоритм составления этих уравнений усложнен из-за наличия в схеме двух идеальных источников напряжения без общих узлов. Поэтому целесообразно осуществить эквивалентное преобразование

рассматриваемой схемы. Этой схеме эквивалентна цепь, изображенная на рис. 3.16, б, так как во всех шести независимых контурах обеих схем сумма контурных э. д. с. одинакова. Расчет новой цепи производится через определители третьего порядка и не вызывает затруднений, поскольку эта схема вообще не содержит идеальных источников напряжений. Таким образом, решение задачи упрощается.

Из рис. 3.16 видно, что преобразованная схема имеет по три источника  $\dot{E}_{m1}$  и  $\dot{E}_{m2}$ , а исходная схема только по одному такому источнику. Кроме того, эти источники располагаются в различных

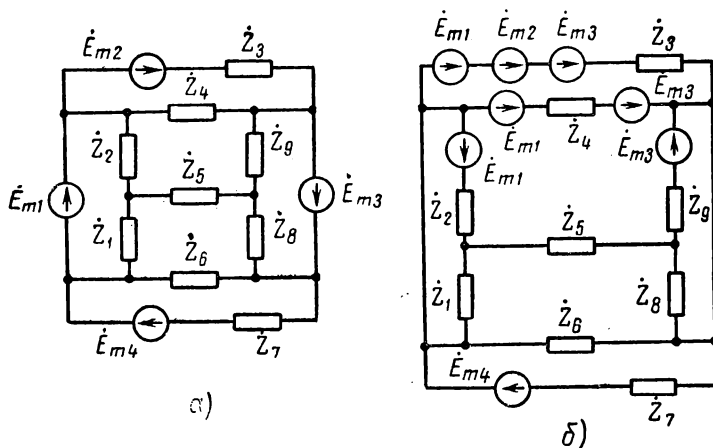


Рис. 3.16. Перенос и расщепление источников напряжения

ветвях эквивалентных схем. Поэтому рассмотренный метод эквивалентного преобразования и называется методом переноса и расщепления источников напряжения.

Практически такое преобразование производится следующим образом. Сначала идеальные источники, подлежащие преобразованию, переносятся в произвольные ветви с конечным сопротивлением (например, в ветви с сопротивлением  $\dot{Z}_2$  и  $\dot{Z}_9$  на рис. 3.16). Затем устанавливается, как изменились контурные э. д. с., и включаются новые источники, компенсирующие изменившиеся контурные э. д. с. (на рис. 3.16, б включаются источники в ветвь с сопротивлением  $\dot{Z}_4$  для компенсации дополнительной контурной э. д. с. в контуре  $\dot{Z}_2 - \dot{Z}_4 - \dot{Z}_9 - \dot{Z}_5$ , а затем включаются источники в ветвь с сопротивлением  $\dot{Z}_3$ , для компенсации дополнительной э. д. с. в контуре  $\dot{Z}_3 - \dot{Z}_4$ ). На последнем этапе преобразований следует объединить источники, если это возможно (на рис. 3.16, б можно

поставить один источник  $\dot{E}_m' = \dot{E}_{m1} + \dot{E}_{m3}$  в ветви с сопротивлением  $\dot{Z}_4$  и один источник  $\dot{E}_m'' = \dot{E}_{m1} + \dot{E}_{m2} + \dot{E}_{m3}$  в ветви с сопротивлением  $\dot{Z}_3$ ).

Иногда при переносе источников напряжения их можно не расщеплять, а объединять, что также упрощает расчет цепей. Например, на рис. 3.6 при  $\dot{E}_{m1} = \dot{E}_{m2} = \dot{E}_m$  вместо двух источников можно поставить один источник напряжения  $\dot{E}_m$  в ветви с сопротивлением  $\dot{Z}_3$ .

Аналогично переносу и расщеплению источников напряжения можно преобразовывать источники тока. Такое преобразование основывается на следующем свойстве цепей.

Если две схемы отличаются друг от друга только идеальными источниками тока, то они являются эквивалентными при условии,

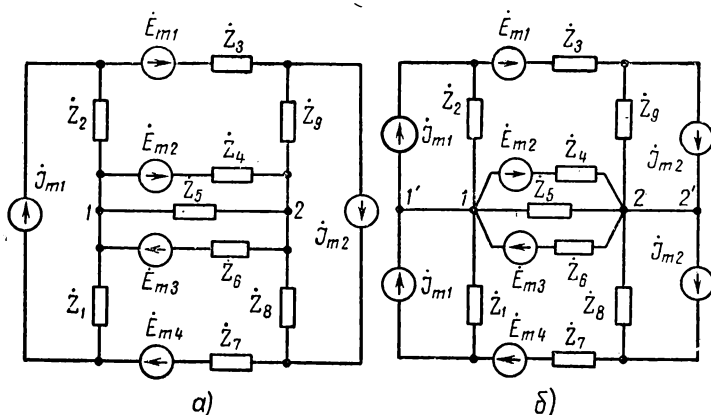


Рис. 3.17. Перенос и расщепление источников тока

что во всех независимых узлах этих схем сумма задающих токов одинакова.

Это свойство вытекает непосредственно из первого закона Кирхгофа и может быть доказано с помощью соотношений (3.26) — (3.28).

Рассмотрим эквивалентное преобразование источников тока на примере схем рис. 3.17. Расчет цепи, изображенной на рис. 3.17, а, требует составления пяти уравнений методом узловых напряжений и четырех уравнений методом контурных токов. Однако число уравнений можно значительно сократить, применив метод преобразования источников.

Согласно рассмотренному свойству схемы, изображенные на рис. 3.17, являются эквивалентными, так как во всех узлах, в том числе в узлах 1 и 2, сумма задающих токов одинакова. Если в схеме рис. 3.17, б дополнительно заменить источники тока источниками напряжения в соответствии с условиями (3.40), то получится цепь с двумя узлами, для расчета которой требуется составление только одного уравнения методом узловых напряжений.

Из рис. 3.17 видно, что преобразование источников приводит к появлению новых источников тока. Поэтому рассмотренный метод эквивалентного преобразования схемы называется методом переноса и расщепления источников тока.

Практически указанное преобразование производится следующим образом. В ветвях с идеальными источниками тока включается еще по одному такому же источнику с тем же направлением задающих токов. Затем общие зажимы старых и новых источников ( $1'$  и  $2'$  на рис. 3.17, б) соединяются с какими-либо узлами цепи ( $1$  и  $2$  на рис. 3.17, б). На последнем этапе преобразований следует объединить источники, если это возможно (на рис. 3.17, б) после преобразования источников тока в источники напряжения последние можно объединить с источниками  $\dot{E}_{m1}$  и  $\dot{E}_{m4}$ .

### 3. Метод компенсации

При эквивалентных преобразованиях схем можно заменять не только пассивные цепи пассивными цепями и источниками источниками, но также пассивный двухполюсник идеальным источником напряжения. Возможность такой замены устанавливается приводимой ниже теоремой.

**Теорема.** Если в одной из цепей имеется двухполюсник с сопротивлением  $\dot{Z}$ , через который протекает ток  $\dot{I}_m$ , а другая цепь отличается от первой тем, что вместо двухполюсника в ней включен идеальный источник напряжения

$$\dot{E}_m = -\dot{Z}\dot{I}_m, \quad (3.43)$$

то такие цепи являются эквивалентными.

**Доказательство.** В цепи с пассивным двухполюсником выберем  $n$ -й независимый контур так, чтобы через сопротивление  $\dot{Z}$  протекал только один контурный ток  $\dot{I}_{mn} = \dot{I}_m$ . При этом сопротивление  $\dot{Z}$  входит только в состав собственного сопротивления  $n$ -го контура:

$$\dot{Z}_{nn} = \dot{Z}'_{nn} + \dot{Z}.$$

Таким образом, последнее уравнение в системе (3.13) можно переписать в следующем виде:

$$\dot{Z}_{n1}\dot{I}_{m1} + \dot{Z}_{n2}\dot{I}_{m2} + \dots + (\dot{Z}'_{nn} + \dot{Z})\dot{I}_{mn} = \dot{E}_{mn}, \quad (3.44)$$

или

$$\dot{Z}_{n1}\dot{I}_{m1} + \dot{Z}_{n2}\dot{I}_{m2} + \dots + \dot{Z}'_{nn}\dot{I}_{mn} = \dot{E}_{mn} - \dot{Z}\dot{I}_{mn} = \dot{E}_{mn} + \dot{E}_m. \quad (3.45)$$

Уравнение (3.44) соответствует исходной цепи, содержащей двухполюсник с сопротивлением  $\dot{Z}$ . Уравнение же (3.45) соответствует

цепи, в которой такого двухполюсника нет, но в  $n$ -м контуре которой в отличие от исходной цепи появилась дополнительная э. д. с.  $\dot{E}_m$ , определяемая соотношением (3.43).

Так как уравнения (3.44) и (3.45) тождественны, а остальные уравнения системы (3.13) одинаковы для обеих цепей, то в этих цепях все контурные токи равны. Соответственно равны токи ветвей и напряжения на всех элементах рассматриваемых схем, т. е. эти схемы являются эквивалентными. Таким образом, теорема доказана.

В физическом смысле содержание этой теоремы можно трактовать следующим образом.

Пассивный двухполюсник в цепи оказывает сопротивление (противодействие) протекающему току  $\dot{I}_m$ . Степень этого противодействия можно количественно охарактеризовать как сопротивлением  $\dot{Z}$ , так и падением напряжения  $\dot{U}_m = \dot{Z}\dot{I}_m$ .

Источник напряжения  $\dot{E}_m = -\dot{Z}\dot{I}_m$  тоже оказывает противодействие току  $\dot{I}_m$ , поскольку э. д. с. направлена навстречу току  $\dot{I}_m$  (знак «—»). Количественно это противодействие оценивается величиной э. д. с.  $\dot{E}_m = -\dot{U}_m$ .

Таким образом, в рассматриваемых эквивалентных схемах исключение из схемы одного противодействия компенсируется введением другого противодействия той же величины, но другой физической природы. Поэтому доказанная теорема называется теоремой компенсации.

Основанный на этой теореме метод расчета цепей, называемый методом компенсации, позволяет в ряде случаев упростить исследование и уменьшить объем вычислительной работы.

Покажем это на примере. Пусть в некоторых контурах произвольной цепи протекают токи  $\dot{I}_{mk}$  и  $\dot{I}_{ml}$  (рис. 3.18, а). При изменении сопротивления в  $k$ -м контуре все токи в цепи изменятся на некоторую величину (рис. 3.18, б). Требуется определить приращения токов  $\Delta\dot{I}_{mk}$  и  $\Delta\dot{I}_{ml}$  в  $k$ -м и  $l$ -м контурах.

Эту задачу можно решать непосредственно методом контурных токов. Разделив исходные и новые токи, можно найти их разность. При этом надо вычислять определители сопротивлений (3.18) и контурные определители (3.19) как для исходной цепи (см. рис. 3.18, а), так и для новой цепи (см. рис. 3.18, б). Однако трудность решения задачи заключается не только в его громоздкости. Возможен такой практически важный случай, когда  $\Delta Z \ll Z_k$  и соответственно  $\Delta\dot{I}_{mk} \ll \dot{I}_{mk}$  и  $\Delta\dot{I}_{ml} \ll \dot{I}_{ml}$ . При этом непосредственное решение задачи с помощью логарифмической линейки попросту невозможно, так как точность линейки для этого недостаточна.

Решение задачи существенно упрощается, если использовать метод компенсации. Представив приращение сопротивления  $\Delta Z$  в качестве сопротивления отдельного двухполюсника (рис. 3.18, в), заменим последний идеальным источником напряжения (рис. 3.18, г). Полученная при этом схема имеет тот же определитель сопротивлений (3.18), что и исходная схема (см. рис. 3.18, а). Тем самым уменьшается объем вычислительной работы.

Кроме того, для полученной схемы (см. рис. 3.18, г) возникает возможность применения метода наложения. Это не только уменьшает объем вычислений, но и позволяет получить расчетные формулы для непосредственного определения приращения токов.



Действительно, токи  $\dot{I}_{mk}$  и  $\dot{I}_{ml}$  обусловлены действием внутренних источников напряжения  $\dot{E}_{mi}$  и тока  $\dot{J}_{mi}$ . Поэтому, выключив эти источники (рис. 3.18, а), в соответствии с методом наложения найдем, что под действием компенсирующей э. д. с.  $\dot{E}_m$  в контурах протекают искомые токи  $\Delta \dot{I}_{mk}$  и  $\Delta \dot{I}_{ml}$ . Эти токи можно определить и с помощью логарифмической линейки, сколь бы малы они ни были.

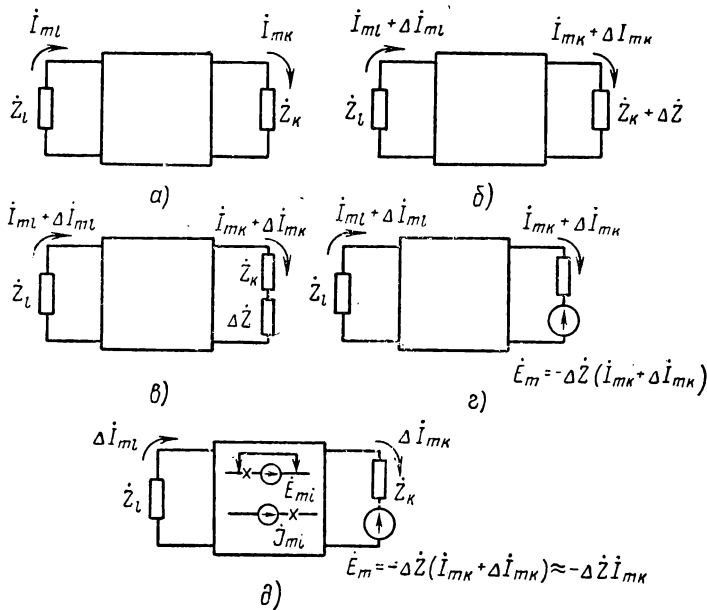


Рис. 3.18. Определение приращения тока методом компенсации

Ограничившись случаем малых приращений ( $\Delta \dot{I}_{mk} \ll \dot{I}_{mk}$ ,  $\Delta \dot{I}_{ml} \ll \dot{I}_{ml}$ ,  $\dot{E}_m \approx -\Delta \dot{Z} \dot{I}_{mk}$ ), определим искомые токи по формулам (3.30) и (3.17):

$$\Delta \dot{I}_{mk} = \frac{\dot{E}_m}{\dot{Z}_{(kk)}} \approx -\frac{\Delta \dot{Z}}{\dot{Z}_{(kk)}} \dot{I}_{mk},$$

$$\Delta \dot{I}_{ml} = \frac{\dot{E}_m}{\dot{Z}_{(kl)}} \approx -\frac{\Delta \dot{Z}}{\dot{Z}_{(kl)}} \dot{I}_{mk},$$

или

$$\Delta \dot{I}_{mk} \approx -\frac{\Delta \dot{Z}}{\dot{Z}_{(kk)}} \cdot \frac{\Delta \dot{Z}_k}{\Delta \dot{Z}}, \quad (3.46)$$

$$\Delta \dot{I}_{ml} \approx -\frac{\Delta \dot{Z}}{\dot{Z}_{(kl)}} \cdot \frac{\Delta \dot{Z}_k}{\Delta \dot{Z}}. \quad (3.47)$$

Уравнения (3.46) и (3.47) составляют содержание так называемой теоремы вариации, которая в общем случае формулируется для произвольных значений приращения (вариации) сопротивления.

#### 4. Метод эквивалентного источника

Одним из наиболее общих методов эквивалентного преобразования схем является метод, основанный на применении теоремы об эквивалентном источнике напряжения, или теоремы об эквивалентном генераторе, как ее часто называют.

Для рассмотрения этой теоремы введем некоторые понятия. Если к внешней паре зажимов некоторой цепи не подключена никакая нагрузка, то такой режим работы цепи называется режимом холостого хода.

Если цепь является активной, то напряжение на ее внешних зажимах в режиме холостого хода называется напряжением холостого хода  $\dot{U}_{\text{мхх}}$  (рис. 3.19, а). При этом на выходе цепи ток холостого хода равен нулю.

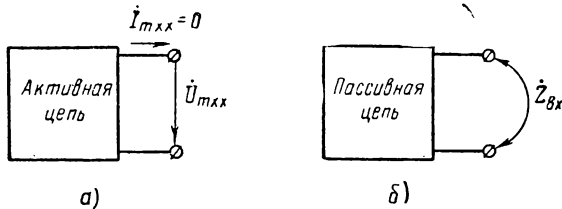


Рис. 3.19. Определение напряжения холостого хода активной цепи и входного сопротивления пассивной цепи

Если цепь является пассивной, то сопротивление между ее внешними зажимами в режиме холостого хода называется входным сопротивлением цепи  $\dot{Z}_{\text{вх}}$  (рис. 3.19, б). Под входным сопротивлением активной цепи понимают ее входное сопротивление при выключенных источниках, т. е. при превращении этой цепи в пассивную. При этом выключение источников производится так же, как и в случае использования метода наложения (см. рис. 3.12).

Теперь докажем теорему об эквивалентном источнике напряжения.

**Теорема.** Реальный источник напряжения и произвольная активная цепь с парой внешних зажимов являются эквивалентными, если задающее напряжение и внутреннее сопротивление источника равны соответственно напряжению холостого хода и входному сопротивлению цепи:

$$\dot{E}_m = \dot{U}_{\text{мхх}}, \quad (3.48)$$

$$\dot{Z}_i = \dot{Z}_{\text{вх}}. \quad (3.49)$$

**Доказательство.** Пусть через нагрузку с сопротивлением  $\dot{Z}$ , подключенную к внешним зажимам цепи, протекает ток  $\dot{I}_m$  (рис. 3.20, а). Включим в цепи нагрузки вспомогательную э. д. с.,

направив ее навстречу току  $\dot{I}_m$  (рис. 3.20, б). Под действием этой э. д. с. через нагрузку пойдет дополнительный ток  $\dot{I}'_m$ . Выберем величину э. д. с.  $\dot{E}'_m$  так, чтобы

$$\dot{I}'_m = \dot{I}_m. \quad (3.50)$$

При этом суммарный ток через нагрузку будет равен нулю, что эквивалентно установлению режима холостого хода цепи ( $\dot{I}_{mxx} = \dot{I}_m - \dot{I}'_m = 0$ ).

Следовательно, при включении э. д. с.  $\dot{E}'_m$  выходное напряжение цепи изменяется от значения  $\dot{U}_m$  (см. рис. 3.20, а) до значения

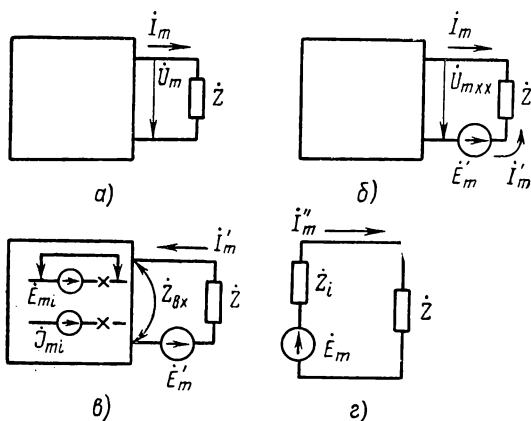


Рис. 3.20. Замена произвольной активной цепи эквивалентным источником напряжения

напряжения холостого хода  $\dot{U}_{mxx}$  (см. рис. 3.20, б). При этом отсутствие тока в цепи нагрузки означает, что указанные напряжения взаимно компенсируются:

$$\dot{E}'_m = U_{mxx}. \quad (3.51)$$

Выразим теперь дополнительный ток  $\dot{I}'_m$  через э. д. с.  $\dot{E}'_m$ . В соответствии с принципом суперпозиции при выключении всех источников внутри цепи ток  $\dot{I}_m$  станет равным нулю, и через нагрузку будет протекать только ток  $\dot{I}'_m$ , обусловленный действием э. д. с.  $\dot{E}'_m$ . При выключении источников цепь становится пассивной с входным сопротивлением  $\dot{Z}_{вх}$ , и ток  $\dot{I}'_m$  определяется в соответствии с законом Ома (рис. 3.20, в):

$$\dot{I}'_m = \frac{\dot{E}'_m}{\dot{Z}_{вх} + \dot{Z}}.$$

Подставив сюда значения тока и э. д. с. из соотношений (3.50) и (3.51), окончательно получим:

$$i_m = \frac{\dot{U}_{mxx}}{\dot{Z}_{вх} + \dot{Z}}. \quad (3.52)$$

При подключении источника напряжения к той же нагрузке с сопротивлением  $\dot{Z}$  (рис. 3.20, з) ток через эту нагрузку определяется законом Ома:

$$i_m'' = \frac{\dot{E}_m}{\dot{Z}_i + \dot{Z}}. \quad (3.53)$$

Сопоставив уравнения (3.52) и (3.53), находим, что  $i_m'' = i_m$  при соблюдении условий (3.48) и (3.49). Тем самым теорема доказана.

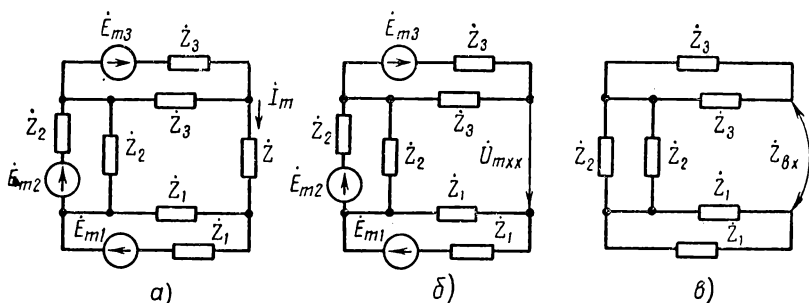


Рис. 3.21. Решение задачи методом эквивалентного источника напряжения

Замена сложноразветвленных активных цепей эквивалентным источником напряжения позволяет в ряде случаев существенно упростить исследование и расчет цепей. В качестве примера рассмотрим определение тока  $i_m$  в схеме рис. 3.21, а. При решении задачи методом контурных токов требуется вычислять определители четвертого порядка, при решении задачи методом узловых напряжений — определители третьего порядка. При решении задачи методом преобразования источников требуется двойное преобразование: источников напряжения в источники тока и обратное преобразование. Методом же эквивалентного источника задача решается наиболее просто.

Из рис. 3.21, б видно, что в режиме холостого хода образуется последовательное соединение трех элементарных делителей напряжения, в которых э. д. с. источников делится пополам. Таким образом,

$$\dot{U}_{mxx} = \frac{1}{2} (\dot{E}_{m1} + \dot{E}_{m2} + \dot{E}_{m3}).$$

Из рис. 3.21, в видно, что входное сопротивление цепи складывается из сопротивлений  $\frac{\dot{Z}_1}{2}$ ,  $\frac{\dot{Z}_2}{2}$  и  $\frac{\dot{Z}_3}{2}$ , которые образуются при параллельном соединении одинаковых сопротивлений:

$$\dot{Z}_{\text{вх}} = \frac{1}{2} (\dot{Z}_1 + \dot{Z}_2 + \dot{Z}_3).$$

Таким образом, по формуле (3.52) определяется искомый ток

$$i_m = \frac{\dot{E}_{m1} + \dot{E}_{m2} + \dot{E}_{m3}}{\dot{Z}_1 + \dot{Z}_2 + \dot{Z}_3 + 2\dot{Z}}.$$

## 5. Метод обращения

Расчет цепей методом обращения базируется на теореме обратимости, или взаимности, доказываемой ниже.

**Теорема.** В произвольной цепи ток  $\dot{I}_{ml}$ , протекающий в  $l$ -м контуре под воздействием э. д. с.  $\dot{E}_{mk}$ , включенной в  $k$ -м контуре, и ток  $\dot{I}_{mk}$ , протекающий в  $k$ -м контуре под воздействием э. д. с.  $\dot{E}_{ml}$ , включенной в  $l$ -м контуре, связаны соотношением

$$\frac{\dot{I}_{ml}}{\dot{I}_{mk}} = \frac{\dot{E}_{mk}}{\dot{E}_{ml}}. \quad (3.54)$$

**Доказательство.** Согласно формуле (3.30)

$$\frac{\dot{I}_{ml}}{\dot{I}_{mk}} = \frac{\dot{E}_{mk}}{\dot{E}_{ml}} \cdot \frac{\dot{Z}_{(lk)}}{\dot{Z}_{(kl)}}.$$

Это соотношение с учетом формул (3.31) и (3.32) принимает следующий вид:

$$\frac{\dot{I}_{ml}}{\dot{I}_{mk}} = \frac{\dot{E}_{mk}}{\dot{E}_{ml}} \cdot \frac{\Delta_{kl}}{\Delta_{lk}}, \quad (3.55)$$

где

$$\Delta_{kl} = \begin{vmatrix} \dot{Z}_{11} & \dot{Z}_{12} & \dots & \dot{Z}_{1(k-1)} & \dot{Z}_{1k} & \dot{Z}_{1(k+1)} & \dots & \dot{Z}_{1(l-1)} & \dot{Z}_{1(l+1)} & \dots & \dot{Z}_{1n} \\ \dot{Z}_{21} & \dot{Z}_{22} & \dots & \dot{Z}_{2(k-1)} & \dot{Z}_{2k} & \dot{Z}_{2(k+1)} & \dots & \dot{Z}_{2(l-1)} & \dot{Z}_{2(l+1)} & \dots & \dot{Z}_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dot{Z}_{(k-1)1} & \dot{Z}_{(k-1)2} & \dots & \dot{Z}_{(k-1)(k-1)} & \dot{Z}_{(k-1)k} & \dot{Z}_{(k-1)(k+1)} & \dots & \dot{Z}_{(k-1)(l-1)} & \dot{Z}_{(k-1)(l+1)} & \dots & \dot{Z}_{(k-1)n} \\ \dot{Z}_{(k+1)1} & \dot{Z}_{(k+1)2} & \dots & \dot{Z}_{(k+1)(k-1)} & \dot{Z}_{(k+1)k} & \dot{Z}_{(k+1)(k+1)} & \dots & \dot{Z}_{(k+1)(l-1)} & \dot{Z}_{(k+1)(l+1)} & \dots & \dot{Z}_{(k+1)n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dot{Z}_{(l-1)1} & \dot{Z}_{(l-1)2} & \dots & \dot{Z}_{(l-1)(k-1)} & \dot{Z}_{(l-1)k} & \dot{Z}_{(l-1)(k+1)} & \dots & \dot{Z}_{(l-1)(l-1)} & \dot{Z}_{(l-1)(l+1)} & \dots & \dot{Z}_{(l-1)n} \\ \dot{Z}_{l1} & \dot{Z}_{l2} & \dots & \dot{Z}_{l(k-1)} & \dot{Z}_{lk} & \dot{Z}_{l(k+1)} & \dots & \dot{Z}_{l(l-1)} & \dot{Z}_{l(l+1)} & \dots & \dot{Z}_{ln} \\ \dot{Z}_{(l+1)1} & \dot{Z}_{(l+1)2} & \dots & \dot{Z}_{(l+1)(k-1)} & \dot{Z}_{(l+1)k} & \dot{Z}_{(l+1)(k+1)} & \dots & \dot{Z}_{(l+1)(l-1)} & \dot{Z}_{(l+1)(l+1)} & \dots & \dot{Z}_{(l+1)n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dot{Z}_{n1} & \dot{Z}_{n2} & \dots & \dot{Z}_{n(k-1)} & \dot{Z}_{nk} & \dot{Z}_{n(k+1)} & \dots & \dot{Z}_{n(l-1)} & \dot{Z}_{n(l+1)} & \dots & \dot{Z}_{nn} \end{vmatrix} \quad (3.56)$$

$$\Delta_{lk} = \begin{vmatrix} \dot{Z}_{11} & \dot{Z}_{12} & \dots & \dot{Z}_{1(k-1)} & \dot{Z}_{1(k+1)} & \dots & \dot{Z}_{1(l-1)} & \dot{Z}_{1l} & \dot{Z}_{1(l+1)} & \dots & \dot{Z}_{1n} \\ \dot{Z}_{21} & \dot{Z}_{22} & \dots & \dot{Z}_{2(k-1)} & \dot{Z}_{2(k+1)} & \dots & \dot{Z}_{2(l-1)} & \dot{Z}_{2l} & \dot{Z}_{2(l+1)} & \dots & \dot{Z}_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dot{Z}_{(k-1)1} & \dot{Z}_{(k-1)2} & \dots & \dot{Z}_{(k-1)(k-1)} & \dot{Z}_{(k-1)(k+1)} & \dots & \dot{Z}_{(k-1)(l-1)} & \dot{Z}_{(k-1)l} & \dot{Z}_{(k-1)(l+1)} & \dots & \dot{Z}_{(k-1)n} \\ \dot{Z}_{k1} & \dot{Z}_{k2} & \dots & \dot{Z}_{k(k-1)} & \dot{Z}_{k(k+1)} & \dots & \dot{Z}_{k(l-1)} & \dot{Z}_{kl} & \dot{Z}_{k(l+1)} & \dots & \dot{Z}_{kn} \\ \dot{Z}_{(k+1)1} & \dot{Z}_{(k+1)2} & \dots & \dot{Z}_{(k+1)(k-1)} & \dot{Z}_{(k+1)(k+1)} & \dots & \dot{Z}_{(k+1)(l-1)} & \dot{Z}_{(k+1)l} & \dot{Z}_{(k+1)(l+1)} & \dots & \dot{Z}_{(k+1)n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dot{Z}_{(l-1)1} & \dot{Z}_{(l-1)2} & \dots & \dot{Z}_{(l-1)(k-1)} & \dot{Z}_{(l-1)(k+1)} & \dots & \dot{Z}_{(l-1)(l-1)} & \dot{Z}_{(l-1)l} & \dot{Z}_{(l-1)(l+1)} & \dots & \dot{Z}_{(l-1)n} \\ \dot{Z}_{(l+1)1} & \dot{Z}_{(l+1)2} & \dots & \dot{Z}_{(l+1)(k-1)} & \dot{Z}_{(l+1)(k+1)} & \dots & \dot{Z}_{(l+1)(l-1)} & \dot{Z}_{(l+1)l} & \dot{Z}_{(l+1)(l+1)} & \dots & \dot{Z}_{(l+1)n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dot{Z}_{n1} & \dot{Z}_{n2} & \dots & \dot{Z}_{n(k-1)} & \dot{Z}_{n(k+1)} & \dots & \dot{Z}_{n(l-1)} & \dot{Z}_{nl} & \dot{Z}_{n(l+1)} & \dots & \dot{Z}_{nn} \end{vmatrix} \quad (3.57)$$

Из этих выражений видно, что строки определителя (3.56) равны столбцам определителя (3.57), так как  $\dot{Z}_{ij} = \dot{Z}_{ji}$ . Следовательно,  $\Delta_{kl} = \Delta_{lk}$  и из соотношения (3.55) вытекает условие (3.54). Таким образом, теорема доказана.

Цепи, для которых справедлива теорема обратимости, называются обратимыми цепями. Из доказательства следует, в частности, что обратимыми являются любые линейные пассивные цепи.

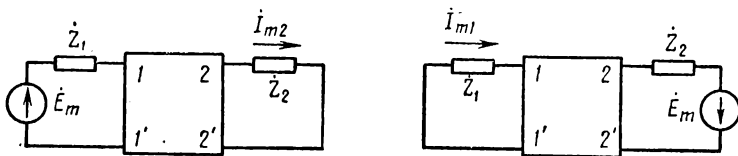


Рис. 3.22. Изменение направления передачи через четырехполюсник

Используя доказанное свойство обратимых цепей, можно при их расчете сокращать объем вычислительной работы и упрощать исследование.

Такой метод расчета и исследования цепей называется методом обращения. Методом обращения можно, в частности, пользоваться при изменении направления передачи через четырехполюсник, что очень часто встречается на практике. Изменение направления передачи через четырехполюсники показано на рис. 3.22, где положительное направление токов и напряжений совпадает с направлением обхода контуров цепи по ходу часовой стрелки.

При определении тока  $\dot{I}_{m1}$  в этом случае используется следствие из теоремы обратимости.

**Следствие.** При изменении направления передачи через обратимый четырехполюсник на его входе протекает такой же ток, какой протекал на выходе четырехполюсника до изменения направления передачи.

**Доказательство.** Входную и выходную цепи четырех-полюсника можно рассматривать как независимые контуры цепи, которые выбраны так, что через них протекает только один контурный ток  $\dot{I}_{mk} = \dot{I}_{m1}$  и  $\dot{I}_{ml} = \dot{I}_{m2}$  (см. рис. 3.22). Поскольку перенос э. д. с. при изменении направления передачи означает, что в соотношении (3.54)  $\dot{E}_{mk} = \dot{E}_{ml} = \dot{E}_m$ , то отсюда следует равенство токов:  $\dot{I}_{m1} = \dot{I}_{m2}$ . Таким образом, следствие доказано.

Это следствие будет использовано при изучении свойств четырех-полюсников.

### § 3.3. РАСЧЕТ ПОСТОЯННЫХ НАПРЯЖЕНИЙ И ТОКОВ

#### 1. Общие методы расчета

При описании метода комплексных амплитуд отмечалось, что постоянные напряжения и токи можно рассматривать как вырожденные гармонические колебания в случае  $\omega = 0$ . При этом для постоянных напряжений и токов были введены обозначения (2.6) и (2.7).

Из сказанного вытекает, что для цепей постоянного тока остаются справедливыми все основные законы токопрохождения, в которых необходимо лишь соответствующим образом изменить обозначения. Учитывая, что рассмотренные методы расчета цепей базируются на основных законах токопрохождения, все эти методы можно использовать также при расчете постоянных напряжений и токов (изменив соответственно обозначения).

Говоря о цепях постоянного тока, следует подчеркнуть следующие особенности.

1. Так как  $\omega = 0$ , то сопротивление емкости  $X_C = -\frac{1}{\omega C} = -\infty$ .

Следовательно, согласно закону Ома  $(I_C = \frac{U_C}{X_C})$  в ветвях цепи, содержащих емкость, при постоянном напряжении ток равен нулю:  $I_C = 0$ . Поэтому в цепях с емкостью расчет постоянных напряжений нельзя производить как обычно. Особенности расчета таких цепей приводятся в п. 2 данного параграфа.

2. Поскольку при  $\omega = 0$  индуктивное сопротивление также равно нулю, при постоянном токе падение напряжения на индуктивности отсутствует:  $U_L = 0$ .

3. Так как при  $I_C = 0$  и  $U_L = 0$  реактивная мощность не выделяется, то энергетические соотношения в цепях постоянного тока определяются только потерями активной мощности.

4. Из п. 3 следует, что любые конечные сопротивления в цепи постоянного тока являются вещественными (активными). Следовательно, в основных законах токопрохождения и в любых других

расчетных формулах для постоянного тока вместо комплексного сопротивления  $\hat{Z}$  следует пользоваться активным сопротивлением  $R$ .

5. Из предыдущих пунктов следует, что при наличии в цепи постоянного тока сопротивления  $R$  и емкости  $C$ , включенных параллельно индуктивности  $L$ , напряжение на всех этих элементах равно нулю:  $U_R = U_C = U_L = 0$ . Это эквивалентно короткому замыканию, и такие элементы могут быть устранены из схемы (рис. 3.23).

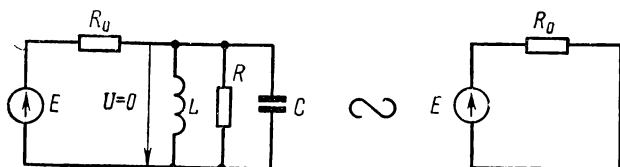


Рис. 3.23. Устранение элементов в цепи постоянного тока, содержащей индуктивность

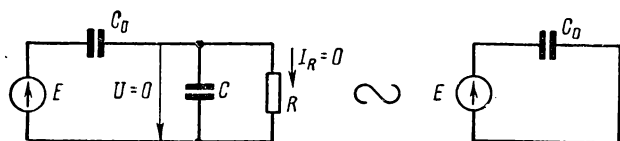


Рис. 3.24. Устранение элементов в цепи постоянного тока, содержащей сопротивление  $R$  при  $I_R = 0$

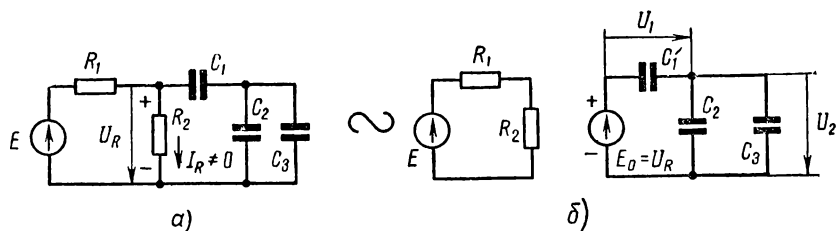


Рис. 3.25. Разделение цепи постоянного тока, содержащей сопротивление  $R$  при  $I_R \neq 0$

6. Из предыдущих пунктов следует, что при наличии в цепи постоянного тока сопротивления  $R$ , включенного последовательно с емкостью, падение напряжения на этом сопротивлении равно нулю:  $U_R = IR = 0$  (так как  $I = 0$ ). Это эквивалентно короткому замыканию, и такие сопротивления могут быть устранены из схемы. При этом соответственно из схемы устраняются и другие элементы, включенные параллельно сопротивлению  $R$  (рис. 3.24).

7. Если в цепи постоянного тока имеются емкости  $C$ , соединенные параллельно с сопротивлением  $R$ , ток через которое не равен



нулю ( $I_R \neq 0$ ), то напряжение на этих емкостях равно напряжению на сопротивлении  $U_R = I_R R$  (рис. 3.25, а). Поскольку сами емкости при этом не влияют на токопрохождение в схеме, их можно устранить при расчете токов и напряжений и рассчитать отдельно после определения  $U_R$  (рис. 3.25, б).

При расчетах цепей постоянного тока следует предварительно упрощать схему в соответствии с изложенными особенностями. Если после всех упрощений остается схема, содержащая одни емкости, то она рассчитывается по правилам, рассматриваемым в следующем пункте.

## 2. Расчет цепей с емкостями

Наиболее просто рассчитываются цепи с емкостями в случае простейших видов соединения элементов — последовательного и параллельного. Если при этом образуется емкостный делитель напряжения (см. рис. 3.2), то используются прежние расчетные формулы (3.3) с учетом новых обозначений.

$$U_1 = \frac{C_2}{C_1 + C_2} U, \quad U_2 = \frac{C_1}{C_1 + C_2} U. \quad (3.58)$$

Эти формулы вытекают из соотношения (3.1), которое при емкостных сопротивлениях справедливо на всех частотах, в том числе и на частоте  $\omega = 0$ .

Если имеется разветвленная схема емкостного делителя напряжения, подобная схеме делителя на рис. 3.3, то аналогичные расчетные формулы можно получить из соотношения (3.1, а) или непосредственно из формул (3.58). При этом в обозначениях рис. 3.25, б получаются следующие расчетные формулы:

$$U_1 = \frac{C}{C_1 + C} E_0, \quad U_2 = \frac{C_1}{C_1 + C} E_0, \quad (3.59)$$

где  $C = C_2 + C_3$ .

Простота расчета емкостных делителей напряжения постоянного тока обусловлена тем, что при этом непосредственно используется второй закон Кирхгофа, в котором на постоянном токе изменяются только обозначения. При расчетах же более сложных (сложноразветвленных) цепей с емкостями, когда необходимо применять первый закон Кирхгофа, невозможно использовать уравнение (2.41) для узлов, через которые не протекают токи (такие узлы называются изолированными). Однако в этом случае можно воспользоваться равенством (2.40), которое является исходным соотношением при формулировке первого закона Кирхгофа. При этом под зарядами  $q_k$  следует понимать не заряды, протекающие в цепи, а неподвижные (статические) заряды, скопившиеся на емкостях.

Таким образом, вместо первого закона Кирхгофа для любого изолированного узла цепи с емкостями справедливо следующее уравнение:

$$\sum_{k=1}^n q_k = 0, \quad (3.60)$$

где  $q_k$  — статические заряды на емкостях, соединенных в общий узел;

$n$  — число ветвей с емкостями, имеющих общий узел.

Уравнение (3.60) для цепей с емкостями является лишь частным законом, справедливым в тех случаях, когда соединяемые в узле емкости не были предварительно заряжены. Если же эти емкости до их соединения уже обладали начальными зарядами, то вместо уравнения (3.60) необходимо пользоваться равенством

$$\sum_{k=1}^n q_k = q_0, \quad (3.61)$$

где  $q_0$  — алгебраическая сумма всех начальных зарядов.

Чтобы совместно с уравнениями (3.60), (3.61) можно было использовать и второй закон Кирхгофа (2.47), его следует переписать с учетом соотношения (2.100). При этом, учитывая наличие источников э. д. с., согласно уравнению (2.84) получим

$$\sum_{k=1}^n \frac{q_k}{C_k} = E, \quad (3.62)$$

где  $E$  — алгебраическая сумма всех постоянных задающих напряжений в рассматриваемом контуре.

При использовании уравнений (3.60) — (3.62) во избежание путаницы в знаках рекомендуется предварительно размечать полярность зарядов подобно тому, как в методе токов ветвей размечалось направление токов.

Например, для схемы рис. 3.26 получается следующая система уравнений (3.61) и (3.62) — для верхнего узла и контуров 1 и 2 при обходе их по направлению стрелок:

$$-q_1 - q_2 + q_3 = -q_{01} - q_{02},$$

$$\frac{q_1}{C_1} - \frac{q_2}{C_2} = E,$$

$$\frac{q_2}{C_2} + \frac{q_3}{C_3} = 0.$$

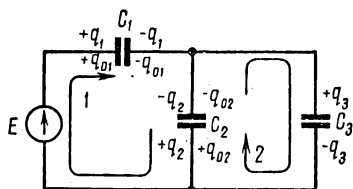


Рис. 3.26. Расчет цепи с емкостями методом зарядов ветвей

Рассмотренный метод составления уравнений для зарядов цепи с емкостью аналогичен методу токов ветвей и может быть назван методом зарядов ветвей. Этим методом удобно пользоваться при наличии начальных зарядов в схеме.

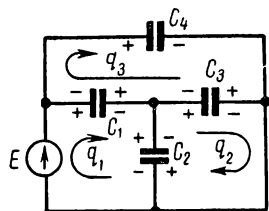


Рис. 3.27. Расчет цепи с емкостями методом контурных зарядов

При отсутствии начальных зарядов по аналогии с методом контурных токов можно пользоваться методом контурных зарядов. Под контурным зарядом следует понимать часть полного заряда, которая является одинаковой для всех емкостей, входящих в замкнутый контур. При этом полный заряд на любой емкости определяется как алгебраическая сумма соответствующих контурных зарядов.

Например, для схемы рис. 3.27, выбрав направление обхода контуров, размечаем полярность контурных зарядов  $q_1, q_2, q_3$  для каждой емкости согласно выбранным направлениям. Затем составляем систему уравнений:

$$\frac{q_1 - q_3}{C_1} + \frac{q_1 - q_2}{C_2} = E,$$

$$\frac{q_2 - q_1}{C_2} + \frac{q_2 - q_3}{C_3} = 0,$$

$$\frac{q_3}{C_4} + \frac{q_3 - q_2}{C_3} + \frac{q_3 - q_1}{C_1} = 0,$$

решив которую, находим искомые заряды  $q_{C1} = q_1 - q_3$ ,  $q_{C2} = q_1 - q_2$ ,  $q_{C3} = q_2 - q_3$ ,  $q_{C4} = q_3$  и искомые напряжения  $U_{Ck} = \frac{q_{Ck}}{C_k}$ .

При составлении уравнений по методу контурных зарядов можно воспользоваться алгоритмом, подобным тому, который был установлен для метода контурных токов.

# Г Л А В А 4

## МНОГОФАЗНЫЕ ЦЕПИ

### § 4.1. ОБЩИЕ СВЕДЕНИЯ О МНОГОФАЗНЫХ ЦЕПЯХ

#### 1. Основные определения

Многофазные цепи являются многополюсниками. С этой точки зрения их следовало бы изучать после двухполюсников и четырехполюсников. Однако многофазные цепи применяются преимущественно в электрических сетях, с которыми радиисту достаточно ознакомиться лишь в той мере, в какой это необходимо для усвоения основных правил эксплуатации установок, питающихся от электрических сетей. Для изучения многофазных цепей в указанном объеме не требуется специальных знаний в области теории многополюсников. Поэтому можно уже сейчас, используя рассмотренные методы расчета цепей, ознакомиться с основными свойствами многофазных цепей.

Многофазными цепями называются цепи, в которых действует несколько источников гармонических колебаний одинаковой частоты и амплитуды с фиксированным сдвигом фаз между различными задающими напряжениями или токами. Обычно в качестве таких источников служат машинные генераторы, близкие по своим свойствам к идеальным источникам напряжения, которые и рассматриваются в дальнейшем изложении. В многофазном машинном генераторе применяется несколько жестко связанных одинаковых обмоток, вращающихся в магнитном поле, с которых снимаются задающие напряжения одинаковой амплитуды и частоты. При расположении этих обмоток под углом друг к другу создается фиксированный сдвиг фаз между задающими напряжениями, как это и требуется по определению многофазных цепей.

В двухфазных цепях, предложенных Н. Тесла в 1887 г., используется сдвиг фаз между задающими напряжениями, равный  $\frac{\pi}{2}$ , а в многофазных цепях при большем числе фаз  $n$  — сдвиг фаз  $\frac{2\pi}{n}$ .

В некоторых устройствах автоматики и телемеханики наряду с двухфазными используются шестифазные и двенадцатифазные цепи.

В настоящее время в силовых электрических системах используются преимущественно трехфазные цепи, предложенные русским инженером М. О. Доливо-Добровольским в 1891 г. Это обусловлено экономическими выгодами, облегченным при определенных условиях режимом работы трехфазных генераторов и простотой конструкции трехфазных двигателей. Указанные преимущества трехфазных цепей рассматриваются в дальнейшем изложении, где основное внимание уделяется трехфазным цепям.

В многофазных цепях наряду с фазой колебаний используется понятие фаз цепи, под которыми понимают участки цепи с напряжениями и токами различных фаз. Зажимы фаз цепи обозначают буквами *A, B, C, ...* в порядке отставания фазы колебаний. Такими же буквенными индексами отмечают соответствующие напряжения и токи.

Фазами источника (генератора) называются ветви источника (генератора) с задающими напряжениями различных фаз.

Двухполюсники, применяемые в качестве нагрузки, называются фазами нагрузки.

Провода, связывающие различные фазы источника и нагрузки, называются фазами линии передачи, или линейными проводами. Если фазы источника имеют один общий узел, то провод линии передачи, соединенный с этим узлом, называется нулевым, или нейтральным проводом.

Напряжения и токи различных фаз источника называются фазными напряжениями и токами генератора. Эти же напряжения называются фазными э. д. с., или фазными задающими напряжениями.

Напряжения и токи в фазах нагрузки называются фазными напряжениями и токами.

Напряжения между линейными проводами и токи в них называются линейными напряжениями и токами.

## **2. Способы соединения фаз цепи**

Если бы каждая фаза нагрузки соединялась с источником отдельной парой проводов, то у многофазных цепей не было бы никаких экономических преимуществ по сравнению с однофазными цепями. Эти преимущества возникают за счет соединения фаз нагрузки в общий узел (узлы). При этом получается экономия в числе проводов и соответственно в количестве меди, т. е. в общих затратах на сооружение линии передачи. Например, для двухфазной цепи, изображенной на рис. 4.1, требуется только три провода вместо четырех.

Наибольшая экономия в числе проводов получается в случае трехфазной цепи, для которой требуется четыре или даже три провода (как и для двухфазной цепи, но при большем числе фаз

цепи). Необходимое число проводов при этом зависит прежде всего от способа соединения фаз цепи. Фазы нагрузки и фазы источника могут соединяться звездой или треугольником. При этом возможны пять вариантов соединений

(рис. 4.2). Здесь показаны также линейные и фазные напряжения и токи, которые подробнее рассматриваются ниже.

Из рис. 4.2 видно, что при всех способах соединения, кроме первого (рис. 4.2, а), требуется только три провода. Первые два варианта соединения отличаются именно наличием или отсутствием этого четвертого (нулевого) провода  $OO'$ .

В отношении соединения фаз генератора треугольником (рис. 4.2, в и д) возникает вопрос, не замыкается ли накоротко каждая из этих фаз другими фазами источника

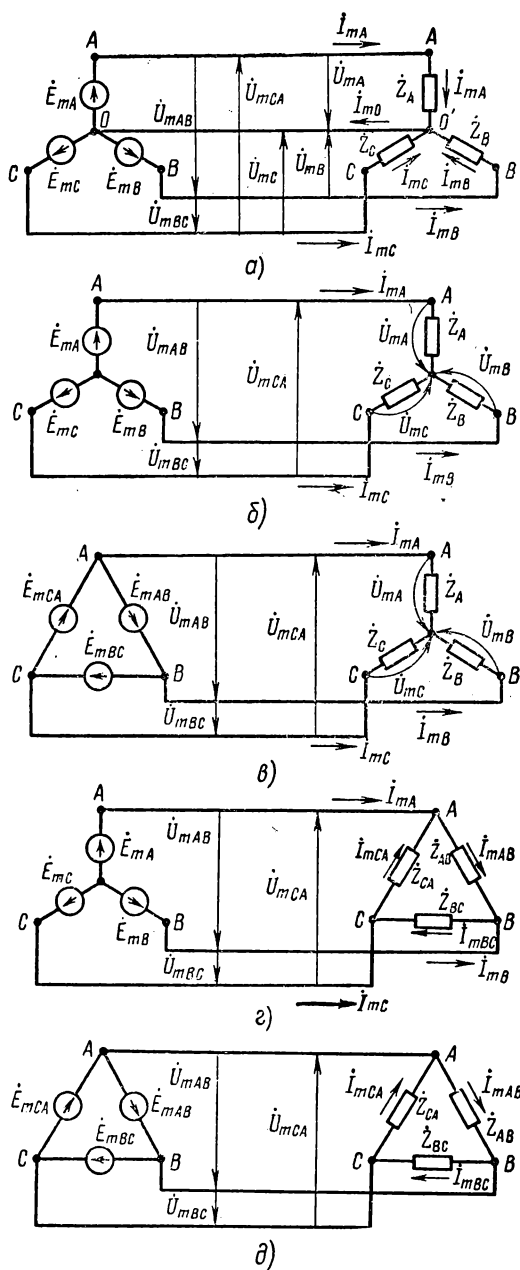
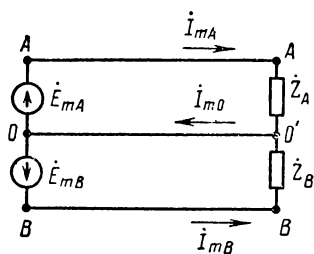


Рис. 4.1. Двухфазная цепь

Рис. 4.2. Трехфазные цепи

с нулевым сопротивлением, не будет ли при этом трехфазный генератор работать, не посылая тока в нагрузку. Этого опасаться не приходится, так как в контуре генератора суммарная контурная э. д. с. равна нулю. Такой результат получается вследствие сдвига фаз между фазными э. д. с. на угол  $\frac{2\pi}{3}$ , что наглядно видно из векторной диаграммы, построенной на рис. 4.3 в двух вариантах.

Вследствие отсутствия контурной э. д. с. ток в треугольном контуре генератора равен нулю в режиме холостого хода, когда

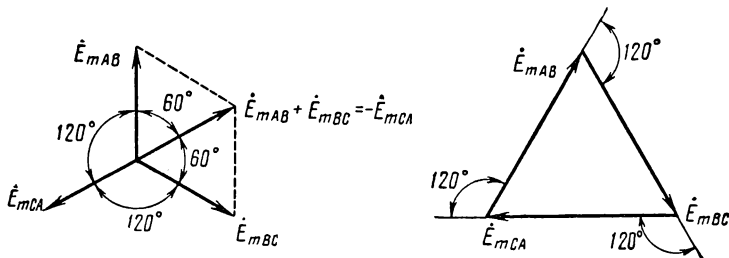


Рис. 4.3. Векторная диаграмма фазных э.д.с.

фазы нагрузки разомкнуты. При нагруженном же генераторе в его фазах протекают токи, обусловленные потреблением мощности нагрузкой.

При любых соединениях фаз генератора линейные напряжения определяются следующим образом:

$$\dot{U}_{mAB} = \dot{E}_{mAB}, \quad \dot{U}_{mBC} = \dot{E}_{mBC}, \quad \dot{U}_{mCA} = \dot{E}_{mCA}, \quad (4.1)$$

причем при соединении фаз генератора звездой (см. рис. 4.2, а, б и г)

$$\dot{E}_{mAB} = \dot{E}_{mA} - \dot{E}_{mB}, \quad \dot{E}_{mBC} = \dot{E}_{mB} - \dot{E}_{mC}, \quad \dot{E}_{mCA} = \dot{E}_{mC} - \dot{E}_{mA}. \quad (4.2)$$

### 3. Вращающееся магнитное поле

Простое представление о вращающемся магнитном поле даст поле вращающегося постоянного магнита (рис. 4.4). Аналогично можно получить такое поле, вращая катушку, по которой протекает постоянный ток. Однако в многофазных системах вращающееся магнитное поле можно создать и без механического вращения источника поля. Если, например, две катушки расположить под углом  $90^\circ$  друг к другу (рис. 4.5, а), то их магнитные поля в пространстве будут складываться векторно, как показано на рис. 4.5, б:

$$\Phi = \sqrt{\Phi_A^2 + \Phi_B^2}. \quad (4.3)$$

Если эти катушки питать переменными токами, сдвинутыми по фазе на угол  $\frac{\pi}{2}$ , то соответственно будут меняться и магнитные поля (рис. 4.6, а):

$$\begin{aligned} \Phi_A &= \Phi_0 \cos \Omega t, \\ \Phi_B &= \Phi_0 \cos \left( \Omega t - \frac{\pi}{2} \right) = \Phi_0 \sin \Omega t. \end{aligned} \quad (4.4)$$

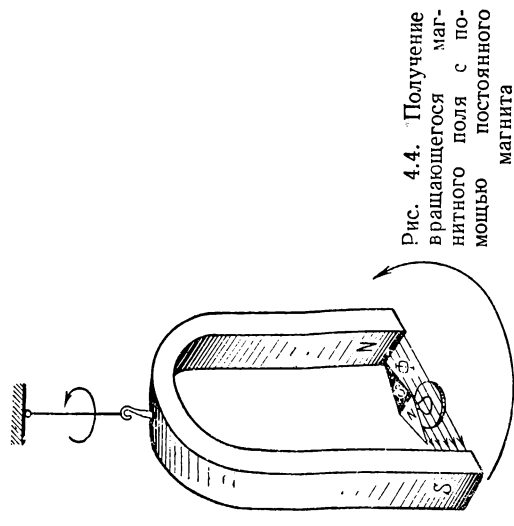


Рис. 4.4. Получение вращающегося магнитного поля с помощью постоянного магнита

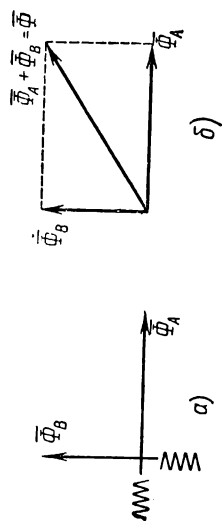


Рис. 4.5. Векторное сложение перпендикулярных магнитных полей

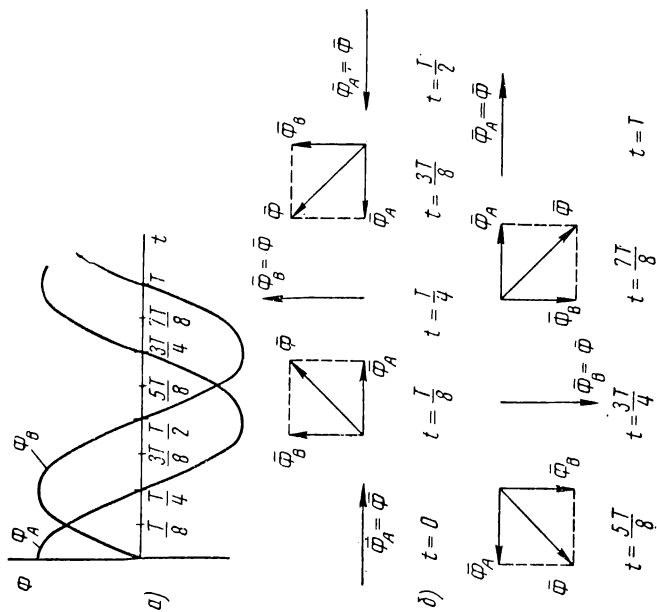


Рис. 4.6. Образование вращающегося магнитного поля в двухфазной системе



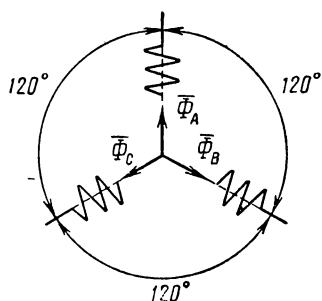


Рис. 4.7. Сложение трех магнитных полей

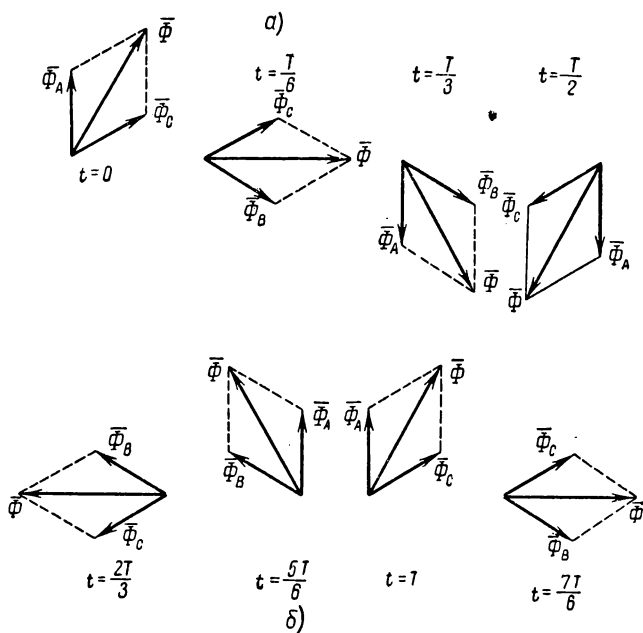
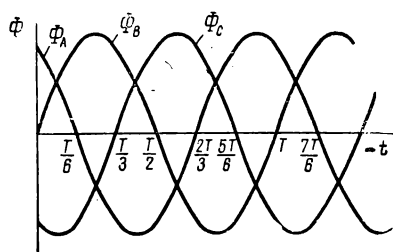


Рис. 4.8. Образование вращающегося магнитного поля в трехфазной системе

На рис. 4.6, б построены пространственные векторные диаграммы магнитного поля для различных моментов времени. Значения  $\vec{\Phi}_A$  и  $\vec{\Phi}_B$  в эти моменты времени получены из рис. 4.6, а.

Из векторных диаграмм видно, что результирующий вектор магнитного поля  $\vec{\Phi}$  с течением времени поворачивается, совершая полный оборот за период колебаний  $T = \frac{2\pi}{\Omega}$ . При этом величина вектора  $\vec{\Phi}$  не меняется, так как согласно соотношениям (4.3) и (4.4)

$$\Phi = \sqrt{\Phi_0^2 \cos^2 \Omega t + \Phi_0^2 \sin^2 \Omega t} = \Phi_0.$$

Таким образом, используя рассмотренные катушки в двухфазной цепи, можно получить магнитное поле постоянной интенсивности, равномерно вращающееся в пространстве с угловой скоростью  $\Omega = \frac{2\pi}{T}$  \*.

Аналогично можно получить вращающееся магнитное поле и в трехфазной системе. Для этого надо три катушки расположить под углом  $120^\circ$  друг к другу (рис. 4.7) и питать их фазными токами трехфазной цепи.

При этом поля трех катушек будут меняться в соответствии с рис. 4.8, а. В результате векторного сложения этих трех полей в пространстве образуется вращающееся магнитное поле, как показано на рис. 4.8, б.

Подобным образом может быть создано вращающееся магнитное поле и в других многофазных системах. Такие вращающиеся магнитные поля используются в многофазных, в частности, в трехфазных двигателях. Простота получения вращающегося магнитного поля в этих двигателях обусловила и простоту их конструкции, что явилось одной из причин повсеместного использования трехфазных систем.

## § 4.2. ТРЕХФАЗНЫЕ ЦЕПИ

### 1. Симметричные трехфазные цепи

Симметричными называются трехфазные цепи с одинаковыми фазами нагрузки:  $\dot{Z}_A = \dot{Z}_B = \dot{Z}_C = \dot{Z}$ .

Рассмотрим связь между фазными и линейными напряжениями и токами в симметричных цепях. Вид этой связи зависит от способа соединения.

В схеме «звезда — звезда» (см. рис. 4.2, а) фазные напряжения равны фазным э. д. с.:  $\dot{U}_{rA} = \dot{E}_{mA}$ ,  $\dot{U}_{rB} = \dot{E}_{mB}$ ,  $\dot{U}_{rC} = \dot{E}_{mC}$ . Поэтому фазные токи  $\dot{I}_{mA} = \frac{\dot{E}_{mA}}{\dot{Z}}$ ,  $\dot{I}_{mB} = \frac{\dot{E}_{mB}}{\dot{Z}}$  и  $\dot{I}_{mC} = \frac{\dot{E}_{mC}}{\dot{Z}}$  получаются при любых значениях  $\dot{Z}$  одинаковыми по амплитуде и сдвинутыми по фазе на угол  $\frac{2\pi}{3}$ , как и фазные э. д. с. Следовательно, сумма этих токов равна нулю (рис. 4.9), и в соответствии с первым законом Кирхгофа равен также нулю ток  $\dot{I}_{m0}$ .

Таким образом, в симметричной трехфазной цепи при соединении типа «звезда — звезда» нулевой провод не нужен и схема

\* Тот же результат можно получить и в однофазной цепи, обеспечив должный фазовый сдвиг между токами, питающими катушки. Однако в многофазных системах это достигается проще.

рис. 4.2, а без нарушения режима работы цепи может быть заменена схемой рис. 4.2, б.

Такая же симметрия фазных напряжений  $\dot{U}_{mA}$ ,  $\dot{U}_{mB}$ ,  $\dot{U}_{mC}$  и фазных токов  $\dot{I}_{mA}$ ,  $\dot{I}_{mB}$ ,  $\dot{I}_{mC}$  сохраняется и для схемы «треугольник—звезда» (см. рис. 4.2, в), хотя они в этом случае иначе связаны с фазными э. д. с.

Из рис. 4.2, а, б и в видно, что при соединении фаз нагрузки звездой соответствующие линейные и фазные токи равны друг другу:  $\dot{I}_{mAл} = \dot{I}_{mAф}$ ,  $\dot{I}_{mBл} = \dot{I}_{mBф}$  и  $\dot{I}_{mCл} = \dot{I}_{mCф}$ . При этом, в силу симметрии, их амплитуды равны, как отмечалось выше, и можно записать общее равенство безотносительно к фазам:

$$I_{мл} = I_{мф}. \quad (4.5)$$

Из рис. 4.2, а, б и в следует также, что при соединении фаз нагрузки звездой линейные напряжения  $\dot{U}_{mAB}$ ,  $\dot{U}_{mBC}$ ,  $\dot{U}_{mCA}$  связаны с фазными напряжениями таким образом:

$$\dot{U}_{mAB} = \dot{U}_{mA} - \dot{U}_{mB}, \quad \dot{U}_{mBC} = \dot{U}_{mB} - \dot{U}_{mC}, \quad \dot{U}_{mCA} = \dot{U}_{mC} - \dot{U}_{mA}, \quad (4.6)$$

что соответствует равенствам (4.2).

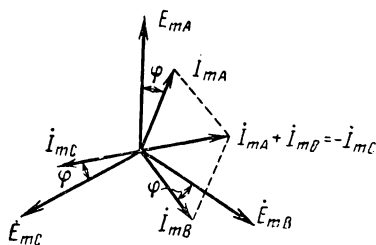


Рис. 4.9. Векторная диаграмма фазных токов и э.д.с.

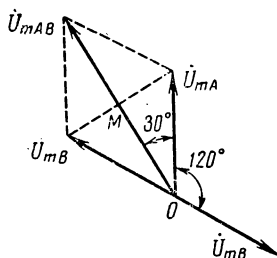


Рис. 4.10. Векторная диаграмма линейных и фазных напряжений

Векторная диаграмма, построенная по первому равенству (4.6), показана на рис. 4.10. Аналогичный вид имеют векторные диаграммы для других линейных и фазных напряжений.

Из построения на рис. 4.10 видно, что

$$\overline{OM} = \frac{U_{mAB}}{2} = U_{mA} \cos 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2} U_{mA}.$$

Таким образом, в симметричной трехфазной цепи при соединении фаз нагрузки звездой линейные и фазные напряжения связаны зависимостью

$$U_{мл} = \sqrt{3} U_{мф}. \quad (4.7)$$

При таком соотношении получаются следующие значения напряжений, используемые на практике:  $U_{\phi} = 127$  в, если  $U_{л} = 220$  в, и  $U_{\phi} = 220$  в, если  $U_{л} = 380$  в.

Так как при соединении фаз генератора звездой  $U_{\text{мф}} = E_{\text{мф}}$ , то с учетом формулы (4.7) устанавливается также связь между линейными напряжениями и фазными э. д. с. В этом случае

$$U_{\text{мл}} = \sqrt{3} E_{\text{мф}}. \quad (4.8)$$

Рассмотрим теперь соединение фаз нагрузки треугольником. Из рис. 4.2, *г* и *д* видно, что в этом случае соответствующие линейные и фазные напряжения  $\dot{U}_{\text{тAB}}, \dot{U}_{\text{тBC}}, \dot{U}_{\text{тCA}}$  равны, т. е.

$$U_{\text{мл}} = U_{\text{мф}}. \quad (4.9)$$

Линейные же токи  $\dot{I}_{\text{тA}}, \dot{I}_{\text{тB}}, \dot{I}_{\text{тC}}$  связаны с фазными токами соотношениями

$$\dot{I}_{\text{тA}} = \dot{I}_{\text{тAB}} - \dot{I}_{\text{тCA}}, \quad \dot{I}_{\text{тB}} = \dot{I}_{\text{тBC}} - \dot{I}_{\text{тAB}}, \quad \dot{I}_{\text{тC}} = \dot{I}_{\text{тCA}} - \dot{I}_{\text{тBC}}. \quad (4.10)$$

Эти соотношения аналогичны равенствам (4.6), и для линейных и фазных токов получается векторная диаграмма, подобная диаграмме на рис. 4.10.

Поэтому можно записать общее соотношение безотносительно к фазам:

$$I_{\text{мл}} = \sqrt{3} I_{\text{мф}}. \quad (4.11)$$

Из этого соотношения видно, что сечение линейных проводов в трехфазной системе должно быть больше, чем в однофазной системе с такой же нагрузкой (так как плотность тока в проводах не должна превышать определенную норму). Однако проводов в трехфазной системе вдвое меньше, чем в однофазной системе, а  $I_{\text{мл}} < < 2I_{\text{мф}}$ . Поэтому в трехфазной системе получается экономия не только в числе проводов, но и в количестве меди, потребной для линии передачи.

Из соотношений (4.5), (4.7) и (4.9), (4.11) следует, что в симметричных трехфазных цепях при любом типе соединения фаз нагрузки

$$U_{\text{мл}} I_{\text{мл}} = \sqrt{3} U_{\text{мф}} I_{\text{мф}}. \quad (4.12)$$

Это соотношение потребуется при рассмотрении мощности в трехфазной цепи.

## 2. Несимметричные трехфазные цепи

В несимметричных трехфазных цепях, когда  $\dot{Z}_{\text{A}} \neq \dot{Z}_{\text{B}} \neq \dot{Z}_{\text{C}}$ , при соединениях типа «звезда — звезда» с нулевым проводом (см. рис. 4.2, *а*), «звезда — треугольник» (см. рис. 4.2, *г*) и «треугольник — треугольник» (см. рис. 4.2, *д*) асимметрия нагрузки не влияет на симметрию фазных напряжений, амплитуды которых получаются одинаковыми в разных фазах нагрузки. Действительно, из рис. 4.2 видно, что в этих случаях при наличии нулевого провода

$\dot{U}_{mA} = \dot{E}_{mA}$ ,  $\dot{U}_{mB} = \dot{E}_{mB}$ ,  $\dot{U}_{mC} = \dot{E}_{mC}$ , а при отсутствии нулевого провода  $\dot{U}_{mAB} = \dot{E}_{mAB}$ ,  $\dot{U}_{mBC} = \dot{E}_{mBC}$ ;  $\dot{U}_{mCA} = \dot{E}_{mCA}$ . Таким образом,

$$U_{mA} = U_{mB} = U_{mC} \quad (4.13)$$

или

$$U_{mAB} = U_{mBC} = U_{mCA}. \quad (4.13a)$$

Это свойство является преимуществом указанных типов соединений, так как изменение сопротивлений в разных фазах нагрузки не влияет на фазные напряжения.

Соединение фаз нагрузки звездой при отсутствии нулевого провода (см. рис. 4.2, б и в) приводит к асимметрии фазных напряжений в случае неодинаковых фаз нагрузки. Действительно, в этом

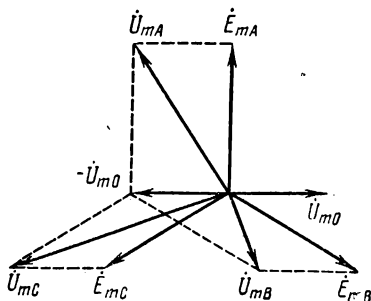


Рис. 4.11. Векторная диаграмма фазных напряжений в несимметричной цепи

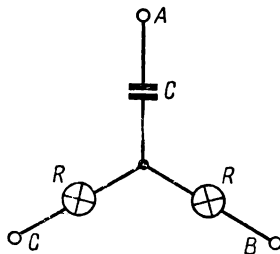


Рис. 4.12. Приспособление для определения последовательности чередования фаз

случае напряжение узла  $O'$  (узловое напряжение) согласно формуле (3.33) равно

$$U_{m0} = \frac{\dot{Y}_A \dot{E}_{mA} + \dot{Y}_B \dot{E}_{mB} + \dot{Y}_C \dot{E}_{mC}}{\dot{Y}_A + \dot{Y}_B + \dot{Y}_C}, \quad (4.14)$$

где  $\dot{E}_{mA}$ ,  $\dot{E}_{mB}$ ,  $\dot{E}_{mC}$  — узловые напряжения полюсов  $A$ ,  $B$ ,  $C$ , равные соответствующим э. д. с.

Из формулы (4.14) следует, что в симметричных цепях ( $\dot{Y}_A = \dot{Y}_B = \dot{Y}_C = \dot{Y}$ )  $U_{m0} = 0$ , поскольку  $\dot{E}_{mA} + \dot{E}_{mB} + \dot{E}_{mC} = 0$  (см. рис. 4.3). В несимметричных же цепях  $U_{m0} \neq 0$ , и фазные напряжения

$$\dot{U}_{mA} = \dot{E}_{mA} - \dot{U}_{m0}, \quad \dot{U}_{mB} = \dot{E}_{mB} - \dot{U}_{m0}, \quad \dot{U}_{mC} = \dot{E}_{mC} - \dot{U}_{m0} \quad (4.15)$$

оказываются неодинаковыми по амплитуде (рис. 4.11):  $\dot{U}_{mA} \neq \dot{U}_{mB} \neq \dot{U}_{mC}$ .

Таким образом, по сравнению с другими типами соединений, для которых справедливы соотношения (4.13), (4.13a), соединение

фаз нагрузки звездой без нулевого провода имеет недостаток, заключающийся не только в различии амплитуд фазных напряжений [см. (4.15)]. Более существенным является то, что при изменении сопротивлений в фазах нагрузки меняется напряжение (4.14), при этом фазные напряжения (4.15) могут заметно изменяться.

Свойство (4.15) находит и полезное применение при определении последовательности чередования фаз в трехфазной цепи, что нужно знать при включении трехфазных двигателей.

На рис. 4.12 показано простое приспособление для этой цели, состоящее из конденсатора и двух одинаковых ламп накаливания. Если емкость конденсатора выбрать, например, так, чтобы  $B_C = \frac{1}{R}$ , то из формулы (4.14) получим

$$\dot{U}_{m0} = \frac{j\dot{E}_{mA} + \dot{E}_{mB} + \dot{E}_{mC}}{2 + j} = \frac{1 + j2}{5} \dot{E}_{mA} + \frac{2 - j}{5} (\dot{E}_{mB} + \dot{E}_{mC})$$

или

$$\dot{U}_{m0} = \dot{U}_{m1} + \dot{U}_{m2}, \quad (4.16)$$

где

$$\dot{U}_{m1} = \frac{\dot{E}_{mA}}{\sqrt{5}} e^{j \arctg 2}, \quad \dot{U}_{m2} = \frac{\dot{E}_{mB} + \dot{E}_{mC}}{\sqrt{5}} e^{-j \arctg 0,5}. \quad (4.17)$$

По соотношениям (4.16), (4.17) и (4.15) на рис. 4.13 построена векторная диаграмма, из которой видно, что  $U_{mB} > U_{mC}$ . Таким образом, по яркости свечения ламп, когда приспособление включено в трехфазную сеть, можно судить о последовательности чередования фаз (по направлению от «яркой» к «тусклой» лампе).

Представляет практический интерес вариант несимметричной трехфазной цепи, который возникает при перегорании предохранителя в одной из фаз. Из рис. 4.2, а видно, что при включении фаз звездой с нулевым проводом в этом случае просто отключается соответствующая фаза нагрузки, а остальные фазы нагрузки остаются под нормальным напряжением.

При включении фаз нагрузки треугольником, как видно из рис. 4.14, а, в случае перегорания, например, предохранителя  $Pr_A$  фаза  $\dot{Z}_{BA}$  остается под нормальным напряжением, а фазы  $\dot{Z}_{AB}$  и  $\dot{Z}_{CA}$

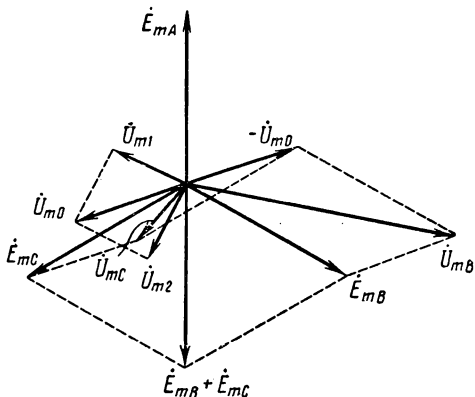


Рис. 4.13. Векторная диаграмма напряжений в приспособлении для определения последовательности чередования фаз

получаются включенными последовательно между линейными проводами  $B$  и  $C$ . При этом, если, например,  $\dot{Z}_{AB} = \dot{Z}_{CA}$ , то обе указанные фазы окажутся под напряжением, вдвое меньшим по сравнению с нормальным. Таким образом, ни одна из фаз нагрузки не выходит из строя полностью.

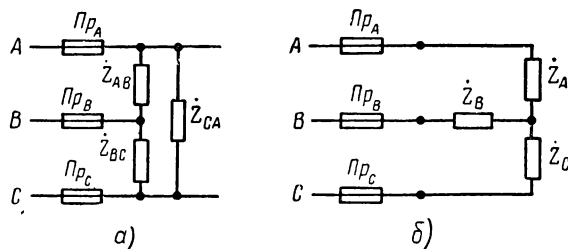


Рис. 4.14. Включение нагрузок в трехфазную цепь с предохранителями

При соединении фаз нагрузки звездой без нулевого провода перегорание одного из предохранителей ведет к отключению соответствующей фазы нагрузки, как видно из рис. 4.14, б. При этом две другие фазы нагрузки получают включенными последовательно между линейными проводами, и их фазные напряжения соответственно уменьшаются.

### 3. Энергетические соотношения

Рассмотрим активную мощность в симметричной трехфазной цепи.

В каждой из фаз нагрузки, согласно формуле (2.67), активная мощность

$$P_{a\phi} = \frac{1}{2} U_{m\phi} I_{m\phi} \cos \varphi.$$

Отсюда суммарная активная мощность в симметричной цепи

$$P_a = 3P_{a\phi} = \frac{3}{2} U_{m\phi} I_{m\phi} \cos \varphi. \quad (4.18)$$

При любом типе соединений в соответствии с (4.12) активную мощность можно выразить через линейные напряжения и токи:

$$P_a = \frac{\sqrt{3}}{2} U_{m\lambda} I_{m\lambda} \cos \varphi. \quad (4.19)$$

Следует иметь в виду, что в формулу (4.19) входит сдвиг фаз между фазными напряжением и током, который не равен сдвигу фаз между линейными напряжением и током.

Согласно формуле (4.18) для измерения суммарной активной мощности в симметричной трехфазной цепи достаточно измерить мощность в одной из фаз и утроить показания ваттметра. При этом ваттметр должен включаться в соответствии с рис. 4.15, а. Если же нулевой провод недоступен, то можно искусственно создать точку с нулевым потенциалом, относительно которой измеряется фазное напряжение (рис. 4.15, б).

При включении ваттметра по рис. 4.15, а и б исходят из предположения, что фазы нагрузки соединены звездой (ведь действительный способ включения нагрузки не всегда известен, а треугольник всегда может быть преобразован в эквивалентную звезду).

Для измерения суммарной активной мощности в несимметричной цепи можно было бы по прежним схемам (см. рис. 4.15, а и б) включить ваттметры в каждую фазу. Однако при этом можно обойтись и двумя ваттметрами.

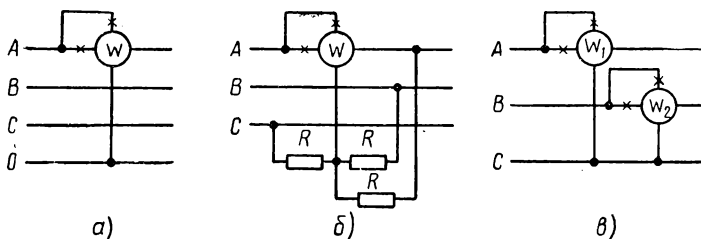


Рис. 4.15. Измерение активной мощности в трехфазной цепи

Покажем это, рассмотрев сначала суммарную комплексную мощность. Согласно формуле (2.70а)

$$\dot{P} = \dot{P}_A + \dot{P}_B + \dot{P}_C = \frac{1}{2} (\dot{U}_{mA} i_{mA}^* + \dot{U}_{mB} i_{mB}^* + \dot{U}_{mC} i_{mC}^*). \quad (4.20)$$

При отсутствии нулевого провода

$$i_{mA} + i_{mB} + i_{mC} = 0$$

и соответственно

$$i_{mA}^* + i_{mB}^* + i_{mC}^* = 0.$$

Подставив отсюда значение  $i_{mC}^* = -(i_{mA}^* + i_{mB}^*)$  в формулу (4.20), получим

$$\dot{P} = \frac{1}{2} (\dot{U}_{mA} - \dot{U}_{mC}) i_{mA}^* + \frac{1}{2} (\dot{U}_{mB} - \dot{U}_{mC}) i_{mB}^*,$$

или

$$\dot{P} = \frac{1}{2} \dot{U}_{mAC} i_{mA}^* + \frac{1}{2} \dot{U}_{mBC} i_{mB}^*. \quad (4.21)$$



Отсюда определяется активная мощность несимметричной цепи как сумма двух мощностей:

$$P_a = \operatorname{Re} \dot{P} = \frac{1}{2} \operatorname{Re} \dot{U}_{mAC} \dot{I}_{mA}^* + \frac{1}{2} \operatorname{Re} U_{mBC} \dot{I}_{mB}^*. \quad (4.22)$$

Каждая из этих мощностей измеряется ваттметром, включенным по схеме рис. 4.15, в, и показания ваттметров складываются.

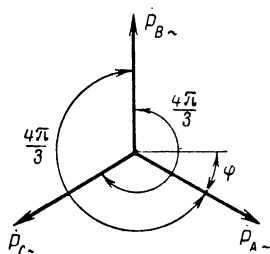
В заключение рассмотрим мгновенную мощность в симметричной трехфазной цепи.

Приняв фазные напряжения

$$u_A = U_{m\phi} \cos \omega t,$$

$$u_B = U_{m\phi} \cos \left( \omega t - \frac{2\pi}{3} \right),$$

$$u_C = U_{m\phi} \cos \left( \omega t + \frac{2\pi}{3} \right)$$



и фазные токи

$$i_A = I_{m\phi} \cos (\omega t - \varphi),$$

$$i_B = I_{m\phi} \cos \left( \omega t - \frac{2\pi}{3} - \varphi \right),$$

$$i_C = I_{m\phi} \cos \left( \omega t + \frac{2\pi}{3} - \varphi \right),$$

Рис. 4.16. Векторная диаграмма гармонических составляющих мгновенной мощности в симметричной трехфазной цепи

в соответствии с равенством (2.66) получим суммарную мгновенную мощность:

$$p = \frac{3}{2} U_{m\phi} I_{m\phi} \cos \varphi + \frac{1}{2} U_{m\phi} I_{m\phi} \left[ \cos (2\omega t - \varphi) + \cos \left( 2\omega t - \frac{4\pi}{3} - \varphi \right) + \cos \left( 2\omega t + \frac{4\pi}{3} - \varphi \right) \right]. \quad (4.23)$$

Последние три слагаемых в этом соотношении представляют собой гармонические составляющие мгновенной мощности в каждой из фаз. Из рис. 4.16 видно, что эти гармонические составляющие в сумме равны нулю (как и в случае векторной диаграммы на рис. 4.3). Поэтому из равенства (4.23) получаем окончательно:

$$p = P_a = \frac{3}{2} U_{m\phi} I_{m\phi} \cos \varphi. \quad (4.24)$$

Таким образом, в симметричной трехфазной цепи мгновенная мощность есть величина постоянная и равная суммарной активной мощности. Из этого следует, что при симметричном нагружении трехфазный генератор не испытывает пульсаций нагрузки, и режим его работы получается облегченным, как отмечалось выше.

# Г Л А В А 5

## ДВУХПОЛЮСНИКИ С СОСРЕДОТОЧЕННЫМИ ПАРАМЕТРАМИ

### § 5.1. РЕАКТИВНЫЕ ДВУХПОЛЮСНИКИ

#### 1. Двухэлементные двухполюсники

Если имеется произвольное число индуктивностей и емкостей, соединенных последовательно, то все индуктивности можно заменить одной индуктивностью согласно формуле (2.125), а все емкости — одной емкостью в соответствии с формулой (2.110). Аналогичное объединение реактивных элементов можно произвести при их параллельном соединении — в соответствии с формулами (2.109) и (2.126). При этом приходим к двухэлементным реактивным двухполюсникам, изображенным на рис. 5.1, а и з.

Первый из них будем называть последовательным, а второй — параллельным двухполюсником.

Сопротивление последовательного и проводимость параллельного двухполюсника согласно формулам (2.50), (2.106), (2.120) и (2.44), (2.104), (2.122) соответственно равны

$$\dot{Z} = jX = j\left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right) \quad (5.1)$$

и

$$\dot{Y}' = jB' = j\left(\omega C - \frac{1}{\omega L}\right). \quad (5.2)$$

Сопротивление (5.1) последовательного двухполюсника согласно формуле (2.23) может быть пересчитано на проводимость

$$\dot{Y} = \frac{1}{\dot{Z}} = jB = -j \frac{1}{\omega L - \frac{1}{\omega C}} = -j \frac{\omega C}{\omega^2 LC - 1}, \quad (5.3)$$

а проводимость (5.2) параллельного двухполюсника согласно формуле (2.22) — на сопротивление

$$\dot{Z}' = \frac{1}{\dot{Y}'} = jX' = -j \frac{1}{\omega C - \frac{1}{\omega L}} = -j \frac{\omega L}{\omega^2 LC - 1}. \quad (5.4)$$

Векторные диаграммы напряжений и токов в этих двухполюсниках, построенные в соответствии с рис. 2.23 и 2.26, показаны на рис. 5.1, б, в, д и е. Из диаграмм видно, что в последовательном двухполюснике напряжения на элементах, а в параллельном — токи элементов находятся в противофазе и, следовательно, вычитаются друг из друга. Такое вычитание напряжений и токов объяс-

няет вычитание сопротивлений и проводимостей в равенствах (5.1) и (5.2).

Из этих равенств видно, что при изменении частоты сопротивление и проводимость реактивных двухполюсников меняются в широких пределах. В частности, если на некоторой частоте  $\omega = \omega_0$  соблюдается равенство

$$\omega_0 L = \frac{1}{\omega_0 C}, \quad (5.5)$$

то сопротивление последовательного и проводимость параллельного двухполюсников становятся равными нулю. Это показано на рис. 5.2, а и в, где произведено графическое сложение сопротивлений и проводимостей в соответствии с формулами (5.1) и (5.2).

На рис. 5.2, б и г показаны также графики частотной зависимости проводимости (5.3) и сопротивления (5.4), которые могут быть получены

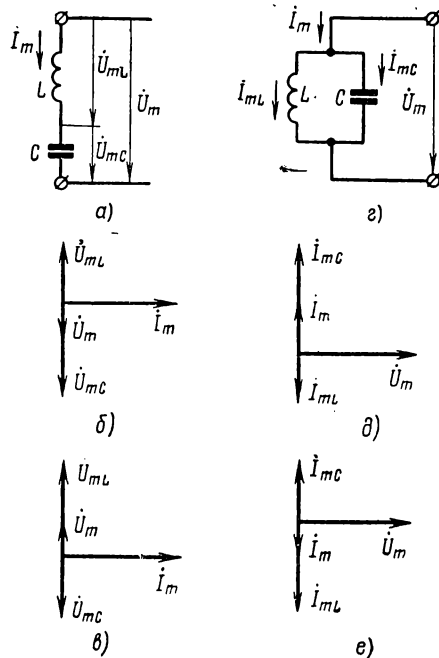


Рис. 5.1. Двухэлементные реактивные двухполюсники и векторные диаграммы напряжений и токов в этих двухполюсниках

и графически из рис. 5.2, а и в. При таком графическом (качественном) построении графиков следует руководствоваться двумя правилами. Во-первых, согласно формулам (5.1)—(5.4) положительным реактивным сопротивлениям  $X$  соответствуют отрицательные значения реактивной проводимости  $B$ , а отрицательным сопротивлениям — положительные проводимости. Во-вторых, нулям сопротивления ( $X = 0$ ) соответствуют полюсы проводимости ( $B = \pm \infty$ ), а полюсам сопротивления — нули проводимости.

Из рис. 5.2 видно, что сопротивления и проводимости двухэлементных двухполюсников, так же как сопротивления и проводимости отдельных реактивных элементов, описываются частотными характеристиками, имеющими положительный наклон на всех

частотах. Это важное свойство можно усмотреть и непосредственно из соотношений (5.1) — (5.4), а также (2.104), (2.106), (2.120), (2.122), из которых видно, что всегда

$$\frac{dX}{d\omega} > 0 \text{ и } \frac{dB}{d\omega} > 0.$$

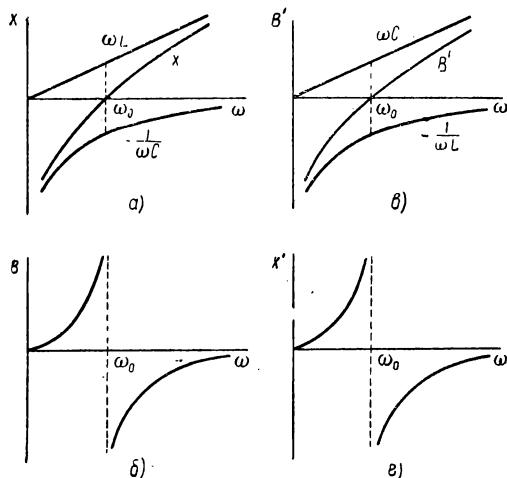


Рис. 5.2. Частотные характеристики сопротивлений и проводимостей двухэлементных реактивных двухполюсников

При рассмотрении отдачи активной мощности реальным источником было дано определение последовательного и параллельного резонансов как явления компенсации реактивных сопротивлений

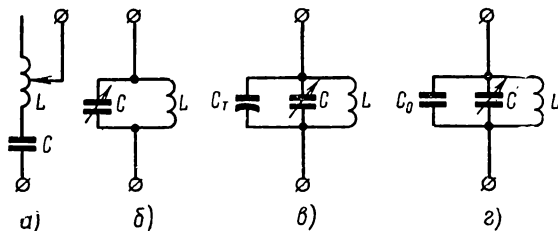


Рис. 5.3. Настраиваемые реактивные двухполюсники

или проводимостей. Это определение можно распространить на случай произвольных двухполюсников. В соответствии с этим определением на частоте  $\omega = \omega_0$  в последовательном двухполюснике получается последовательный резонанс, а в параллельном — параллельный резонанс. Как видно из рис. 5.2, последовательному

резонансу в двухполюснике соответствует нуль реактивного сопротивления и полюс реактивной проводимости, а параллельному резонансу — полюс сопротивления и нуль проводимости.

Частота  $\omega = \omega_0$ , называемая резонансной частотой, согласно равенству (5.5) однозначно определяется параметрами элементов двухполюсника:

$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}. \quad (5.6)$$

Явление резонанса широко используется в радиотехнике. В частности, используя реактивные двухполюсники в селективных устройствах, резонансную частоту изменяют таким образом, чтобы она совпала с несущей частотой модулированного сигнала. При этом говорят о настройке двухполюсника в резонанс с сигналом.

Из формулы (5.6) видно, что настройку двухполюсника можно осуществлять, изменяя его индуктивность и емкость, как показано на рис. 5.3, а и б. Для изменения емкости служат специальные конденсаторы переменной емкости (переменные конденсаторы), а для изменения индуктивности — катушки с подвижным контактом или вариометры. При необходимости регулировать резонансную частоту в небольших пределах применяют переменные конденсаторы с незначительным изменением емкости  $C_T$  (рис. 5.3, в), которые называются полупеременными, или подстроечными конденсаторами, или триммерами (с конструкциями таких элементов радиотехнических устройств следует ознакомиться в лаборатории).

Изменение резонансной частоты в заданных пределах от  $\omega_{0\min}$  до  $\omega_{0\max}$  невозможно обеспечить переменным конденсатором с заданными значениями  $C_{\max}$  и  $C_{\min}$ , если  $\frac{C_{\max}}{C_{\min}} \neq \frac{\omega_{0\max}^2}{\omega_{0\min}^2}$ .

Обычно всегда имеет место это неравенство, поскольку пределы изменения резонансной частоты задаются произвольно, а переменные конденсаторы стандартизованы. В этих случаях в двухполюснике ставится дополнительная начальная емкость  $C_0$  (рис. 5.3, г). При этом согласно формуле (5.6)

$$\omega_{0\min} = \frac{1}{\sqrt{L(C_{\max} + C_0)}}, \quad \omega_{0\max} = \frac{1}{\sqrt{L(C_{\min} + C_0)}}.$$

Отсюда определяются параметры двухполюсника:

$$C_0 = \frac{C_{\max} - k_{\partial}^2 C_{\min}}{k_{\partial}^2 - 1}, \quad L = \frac{k_{\partial}^2 - 1}{\omega_{0\max}^2 (C_{\max} - C_{\min})},$$

где

$$k_{\partial} = \frac{\omega_{0\max}}{\omega_{0\min}} = \frac{f_{0\max}}{f_{0\min}}$$

— коэффициент перекрытия заданного диапазона частот.

Двухполюсник, настроенный на несущую частоту  $\omega_0$  модулированного сигнала, относительно колебаний с другими частотами  $\omega \neq \omega_0$  является расстроенным (имеет расстройку). Степень расстройки характеризуют величиной

$$\Delta\omega = \omega - \omega_0, \quad (5.7)$$

или

$$\Delta f = f - f_0, \quad (5.7a)$$

которая называется абсолютной расстройкой.

Абсолютная расстройка не всегда дает достаточно точное представление о степени расстройки. Нетрудно видеть, что, например, при резонансной частоте  $f_0 = 100$  кГц может быть весьма ощутимой расстройка  $\Delta f = 100$  кГц, которая в этом случае составляет 100% от резонансной частоты. Но при настройке двухполюсника на частоту  $f_0 = 10^7$  кГц та же расстройка  $\Delta f = 100$  кГц составляет лишь 0,001% от резонансной частоты, что может оказаться несущественным для работы устройства.

Поэтому в ряде случаев более удобно пользоваться понятием относительной расстройки

$$\Delta = \frac{\Delta\omega}{\omega_0} = \frac{\Delta f}{f_0}. \quad (5.8)$$

Расстройка бывает положительной (при  $\omega > \omega_0$ ) и отрицательной (при  $\omega < \omega_0$ ). Из рис. 5.2, а и б и формул (5.1), (5.3) видно, что при отрицательных расстройках сопротивление и проводимость последовательного двухполюсника имеют емкостный характер, а при положительных расстройках — индуктивный. Это объясняется преобладанием напряжения на емкости или индуктивности в соответствии с векторными диаграммами рис. 5.1, б и в.

Аналогично для параллельного двухполюсника получается индуктивный характер сопротивления и проводимости при отрицательных расстройках и емкостный — при положительных расстройках (рис. 5.2, в и г). Это объясняется преобладанием индуктивного или емкостного тока в соответствии с векторными диаграммами рис. 5.1, д и е.

Расстройку называют малой, если  $|\Delta\omega| \ll \omega_0$  и соответственно  $|\Delta| \ll 1$ . В частности, двухполюсник, настроенный на несущую частоту модулированного сигнала, относительно боковых составляющих сигнала имеет малую расстройку.

Так как очень важным является прохождение боковых составляющих через радиотехнические цепи, то следует подробнее рассмотреть сопротивление двухполюсника при малых расстройках. С этой целью преобразуем уравнение (5.1), умножив и разделив его на  $\omega_0 L$ :

$$\dot{Z} = j\omega_0 L \left( \frac{\omega}{\omega_0} - \frac{1}{\omega\omega_0} \cdot \frac{1}{LC} \right),$$

или с учетом формулы (5.6)

$$\dot{Z} = j\omega_0 L \left( \frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\dot{\omega}_0}{\omega} \right). \quad (5.1a)$$

Для величин, входящих в это уравнение, введем специальные обозначения.

С учетом формул (5.5) и (5.6) сопротивления элементов двух-полюсника при резонансе равны друг другу и целиком определяются параметрами элементов:

$$\rho = \omega_0 L = \frac{1}{\omega_0 C} = \sqrt{\frac{L}{C}}. \quad (5.9)$$

Эта величина получила название характеристического сопротивления двухполюсника.

Примем также следующие обозначения:

$$\Omega = \frac{\omega}{\omega_0} = 1 + \Delta \quad (5.10)$$

— относительная частота,

$$\frac{1}{\Omega} = \frac{\omega_0}{\omega} = \frac{1}{1 + \Delta} \approx 1 - \Delta \quad (5.11)$$

— обратная относительная частота.

Последнее равенство в формуле (5.10) написано с учетом определений (5.7) и (5.8). Приближенное равенство в формуле (5.11) получено для случая малых расстройок ( $|\Delta| \ll 1$ ,  $|\Delta \omega| \ll \omega_0$ ) следующим образом:

$$\frac{1}{\Omega} = \frac{\omega_0}{\omega} = \frac{\omega - \Delta\omega}{\omega} = 1 - \frac{\Delta\omega}{\omega} = 1 - \frac{\Delta\omega}{\omega_0 + \Delta\omega} \approx 1 - \frac{\Delta\omega}{\omega_0} = 1 - \Delta.$$

Это приближенное равенство можно получить и иначе, раскладывая дробь в ряд и отбрасывая члены высшего порядка малости:

$$\frac{1}{1 + \Delta} = (1 + \Delta)^{-1} = 1 - \Delta + \Delta^2 - \Delta^3 + \dots \approx 1 - \Delta,$$

так как при  $|\Delta| \ll 1$  получается  $\Delta^2 \ll |\Delta|$ ,  $|\Delta^3| \ll \Delta^2$  и т. д.

Выражение в скобках уравнения (5.1a) согласно формулам (5.10) и (5.11) представляется в виде

$$v = \Omega - \frac{1}{\Omega} \approx 2\Delta. \quad (5.12)$$

При  $|\Delta| \ll 1$ , когда справедливо приближенное равенство (5.12), получается и  $|v| \ll 1$ . При резонансе эта величина обращается в нуль ( $\omega = \omega_0$ ,  $\Omega = \frac{1}{\Omega} = 1$ ,  $v = \Delta = 0$ ). Следовательно, величина  $v$  может служить мерой расстройки, поэтому будем называть ее нормированной расстройкой.

Через нормированную и относительную расстройки сопротивление (5.1а) и проводимость (5.3) последовательного двухполюсника выражаются следующим образом:

$$\dot{Z} = j\rho v \approx j2\rho\Delta, \quad (5.13)$$

$$\dot{Y} = \frac{1}{j\rho v} \approx -j\frac{1}{2\rho\Delta}. \quad (5.14)$$

Приближенные равенства (5.13), (5.14), как и приближенные равенства (5.11), (5.12), справедливы при малых расстройках ( $|\Delta| \ll 1$ ,  $|v| \ll 1$ ).

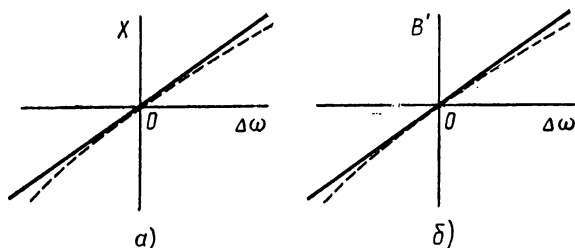


Рис. 5.4. Изменение сопротивления и проводимости реактивных двухполюсников в области малых расстройк

Аналогично через нормированную и относительную расстройки могут быть выражены проводимость (5.2) и сопротивление (5.4) параллельного двухполюсника:

$$\dot{Y}' = j\frac{v}{\rho} \approx j\frac{2}{\rho}\Delta, \quad (5.15)$$

$$\dot{Z}' = \frac{\rho}{jv} \approx -j\frac{\rho}{2}\frac{1}{\Delta}. \quad (5.16)$$

Согласно уравнениям (5.13), (5.15) сопротивление последовательного двухполюсника и проводимость параллельного двухполюсника в области малых расстройк изменяются линейно при изменении частоты, как показано на рис. 5.4, а и б. Пунктиром здесь показаны точные значения сопротивления и проводимости.

Пределы изменения расстроек, при которых указанная линейность характеристик выдерживается достаточно точно, рассматриваются ниже.

## 2. Трехэлементные и четырехэлементные двухполюсники

Если новые реактивные элементы в последовательном двухэлементном двухполюснике подсоединять последовательно, а в параллельном двухполюснике — параллельно, то новые элементы



объединяться со старыми одноименными элементами. Такое объединение одноименных элементов (индуктивностей или емкостей) соответствует приведению подобных членов в формулах для сопротивления или проводимости двухполюсника. По аналогии с приведением подобных членов в уравнении указанное объединение одноименных элементов будем также называть приведением элементов.

Чтобы получить в двухполюснике новые свойства, третий элемент должен добавляться таким образом, чтобы он не мог быть объединен с исходными элементами (не мог приводиться). При этом можно получить четыре разновидности схем трехэлементных двухполюсников (рис. 5.5).

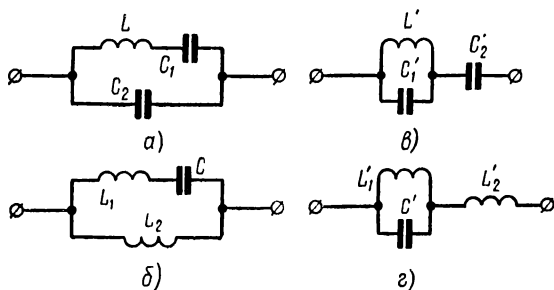


Рис. 5.5. Трехэлементные реактивные двухполюсники

Частотные характеристики сопротивления таких сложных двухполюсников удобно исследовать графически. Например, для двухполюсника, изображенного на рис. 5.5, а, построив согласно рис. 5.2, б и рис. 2.24 характеристики проводимости двух ветвей и сложив их (рис. 5.6, а), найдем проводимость всего двухполюсника  $B = B_{LC1} + B_{C2}$ . Затем по правилам, изложенным выше, получаем сопротивление двухполюсника  $X = -\frac{1}{B}$  (рис. 5.6, б).

В рассмотренном построении исходными являлись характеристики проводимости ветвей, поскольку эти ветви соединяются параллельно. В случае же двухполюсника, изображенного на рис. 5.5, в, в качестве исходных характеристик следует брать сопротивления параллельного двухполюсника  $L'C'_1$  (см. рис. 5.2, г) и емкости  $C'_2$  (см. рис. 2.24). Складывая эти сопротивления (рис. 5.7), получаем искомое сопротивление  $X = X_{LC1} + X_{C2}$  трехэлементного двухполюсника.

Из рис. 5.6 и 5.7 видно, что при добавлении к двухполюснику третьего неприводимого элемента неизбежно получается компенсация реактивных проводимостей или сопротивлений на некоторой новой частоте  $\omega'_0 \neq \omega_0$ . Неизбежность такой компенсации обусловлена тем, что при наличии последовательного или параллельного

резонанса на частоте  $\omega_0$  сопротивление или проводимость двухэлементного двухпроводника меняется в бесконечных пределах ( $\pm \infty$ ). При этом обязательно должна существовать частота, на которой конечное сопротивление или проводимость этого элемента удовлетворяет условию  $X_{C_2} = -X_{LC_1}$ , или  $B_{C_2} = -B_{LC_1}$ .

Таким образом, при добавлении третьего неприводимого элемента к двухэлементному двухполюснику в нем возникает дополнительный последовательный или параллельный резонанс на частоте  $\omega'_0 \neq \omega_0$ .

Этот вывод справедлив и для трехэлементных двухполюсников, изображенных на рис. 5.5, б и г, для которых частотная характеристика сопротивления

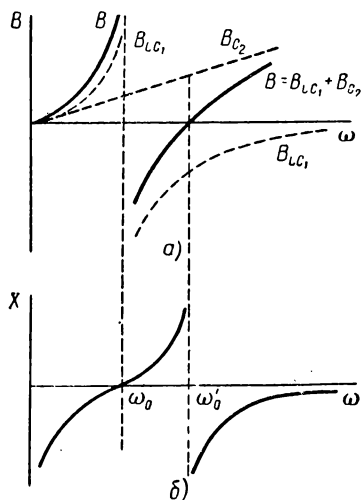


Рис. 5.6. Построение частотной характеристики сопротивления двухполюсника, изображенного на рис. 5.5, а

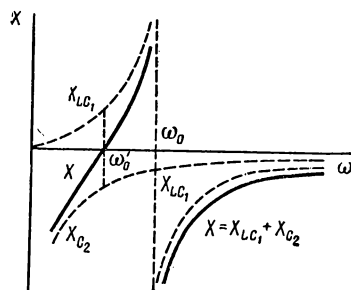


Рис. 5.7. Построение частотной характеристики сопротивления двухполюсника, изображенного на рис. 5.5, в

имеет такой вид, как на рис. 5.8. Эта характеристика может быть получена с помощью такого же построения, как и на рис. 5.6, 5.7. На рис. 5.8 резонансная частота  $\omega_{01}$  совпадает с частотой резонанса параллельного двухполюсника  $L'_1 C'$  (см. рис. 5.5, г), а резонансная частота  $\omega_{02}$  — с частотой резонанса последовательного двухполюсника  $L_1 C$  (см. рис. 5.5, б).

Интересно выяснить, остается ли справедливым вывод о появлении нового резонанса при большем числе элементов в двухполюснике. Если это так, то удастся сформулировать простое правило для определения вида частотной характеристики двухполюсника с любым числом элементов. Проверим это предположение. Если оно верно, то в четырехполюсниках, изображенных на рис. 5.9, а и б, должно быть три резонанса. Ведь эти двухполюсники получены добавлением четвертого элемента к трехэлементному двухполюснику, изображенному на рис. 5.5, а. Приступим к графическому построению.

Графическое построение частотной характеристики сопротивления двухполюсника с дополнительной индуктивностью (рис. 5.9, а) приведено на рис. 5.10, а. Пунктиром здесь показаны исходные характеристики сопротивлений, сплошными линиями — искомые характеристики. Из построения видно, что добавление четвертого

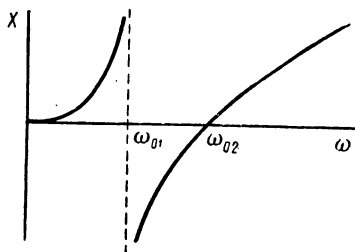


Рис. 5.8. Частотная характеристика сопротивления двухполюсников, изображенных на рис. 5.5, б и г

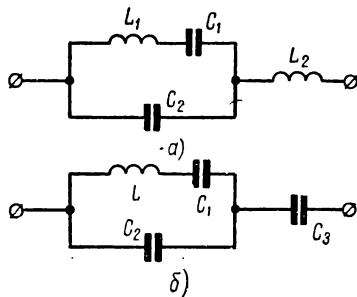


Рис. 5.9. Четырехэлементные реактивные двухполюсники

элемента привело, во-первых, к изменению резонансной частоты  $\omega_{01}$  до значения  $\omega'_{01}$ , а во-вторых (и это главное), — к появлению

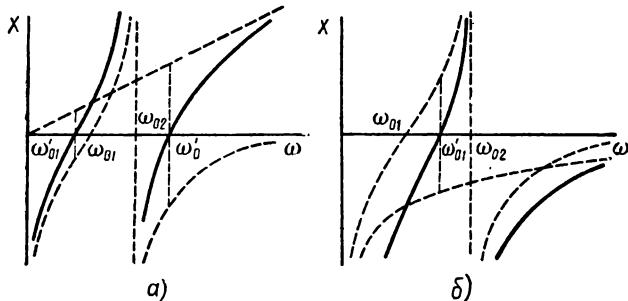


Рис. 5.10. Частотные характеристики сопротивления двухполюсников, изображенных на рис. 5.9

нового резонанса на частоте  $\omega'_0$  (!). Таким образом, предположение о появлении нового резонанса при добавлении четвертого элемента оправдалось.

Проверим теперь это предположение на примере двухполюсника, изображенного на рис. 5.9, б. Построение его частотной характеристики приведено на рис. 5.10, б. Из построения видно, что добавление четвертого элемента привело лишь к изменению резонансной частоты  $\omega_{01}$  до значения  $\omega'_{01}$ . Нового резонанса не появилось (!!).

Однако преждевременно делать какие-либо выводы. Следует еще проверить, возможно ли в рассматриваемом двухполоснике приведение элементов. Поскольку непосредственное приведение элементов здесь невозможно, надо попытаться произвести эквивалентное преобразование схемы, изображенной на рис. 5.9, б. Если звезду, составленную из емкостей  $C_1$ ,  $C_2$ ,  $C_3$ , преобразовать в треугольник, то никакого объединения элементов при этом не получится. Остается поискать новые виды эквивалентных преобразований двухполосников.

Согласно определению эквивалентности цепей двухполосники являются эквивалентными, если при одинаковых токах, протекающих через эти двухполосники, напряжения на них получаются также одинаковыми. В соответствии с законом Ома (2.22) и (2.23) это означает, что критерием эквивалентности двухполосников является равенство их сопротивлений или проводимостей во всем диапазоне частот. Если указанное равенство сопротивлений или проводимостей соблюдается в ограниченном диапазоне частот, то двухполосники являются эквивалентными в этом ограниченном диапазоне, т. е. являются ограниченно эквивалентными.

Из рис. 5.6 и 5.7 видно, что двухполосники, изображенные на рис. 5.5, а и в, имеют сходные характеристики: в обоих двухполосниках имеется два резонанса, причем частота последовательного резонанса меньше частоты параллельного резонанса. Аналогично двухполосники, изображенные на рис. 5.5, б и г, имеют одинаковый вид характеристики с нулем и полюсом сопротивления (см. рис. 5.8), причем частота последовательного резонанса больше частоты параллельного резонанса.

Двухполосники, имеющие одинаковый вид частотных характеристик сопротивления, называются потенциально эквивалентными двухполосниками.

При определенном выборе параметров элементов потенциально эквивалентные двухполосники могут стать эквивалентными. Условием такого выбора является прежде всего равенство соответствующих резонансных частот. В случае трехэлементных двухполосников это дает два уравнения для определения трех параметров элементов. Третье уравнение можно получить, приравняв сопротивления потенциально эквивалентных двухполосников на произвольной конечной частоте. Для получения третьего уравнения можно также приравнять крутизну частотных характеристик сопротивления на какой-либо частоте, например на резонансной. Выбор трех параметров элементов потенциально эквивалентных двухполосников по указанным трем уравнениям обеспечивает совпадение их характеристик сопротивления во всем диапазоне частот, т. е. превращает эти трехэлементные двухполосники в эквивалентные. Аналогично обращаются в эквивалентные и потенциально эквивалентные двухполосники с произвольным числом элементов.

Согласно сказанному, при определенном выборе параметров элементов двухполюсники, изображенные на рис. 5.5, *а* и *в*, являются эквивалентными. Поэтому, заменив параллельный трехэлементный двухполюсник на рис. 5.9, *б* эквивалентным двухполюсником, приходим к схеме, изображенной на рис. 5.11, *а*. Вот теперь-то и появилась возможность объединить элементы  $C'_2$  и  $C_3$ , как это сделано на рис. 5.11, *б*. Полученная схема не отличается в принципе от схемы рис. 5.5, *в*. Отсюда и отсутствие нового резонанса при добавлении четвертого элемента (этот элемент приводится).

Аналогичное же эквивалентное преобразование схемы рис. 5.9, *а* не позволяет осуществить приведение элементов, как это показано

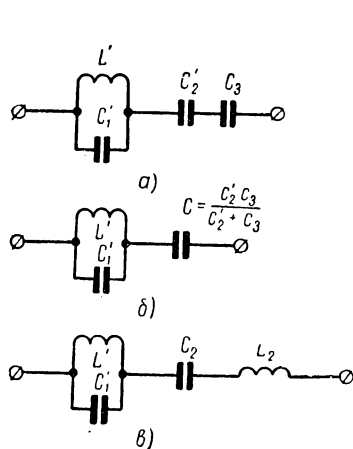


Рис. 5.11. Эквивалентное преобразование двухполюсников, изображенных на рис. 5.9

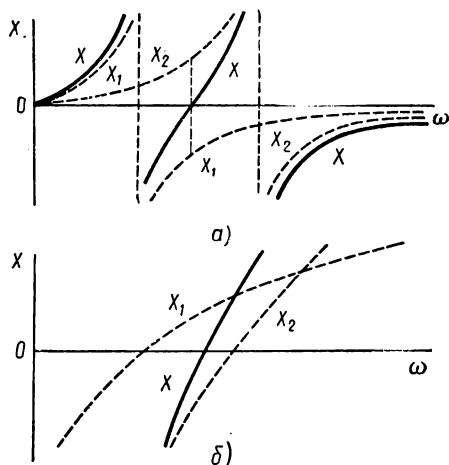


Рис. 5.12. Сложение двух характеристик с полюсами или нулями сопротивления

на рис. 5.11, *в*. Отсюда и новый резонанс при добавлении четвертого элемента.

Добавление четвертого элемента в остальных схемах, изображенных на рис. 5.5, показывает, что и в этих случаях дополнительный резонанс не возникает или возникает в зависимости от того, приводится или не приводится четвертый элемент при эквивалентном преобразовании двухполюсника.

Таким образом, высказанное выше предположение следует уточнить в том смысле, что появление нового резонанса при добавлении элемента в двухполюснике происходит в случае, если этот элемент не приводится при любых эквивалентных преобразованиях схемы двухполюсника.

Приведение элементов в схеме двухполюсника означает сокращение числа элементов. Следовательно, двухполюсники с непри-

водимыми элементами имеют минимальное число элементов при заданном числе резонансов. Для таких двухполосников анализ рассмотренных частотных характеристик сопротивления (см. рис. 5.2, а и г, 5.6, б, 5.8, 5.10, а) позволяет сделать следующие выводы о правилах построения этих характеристик:

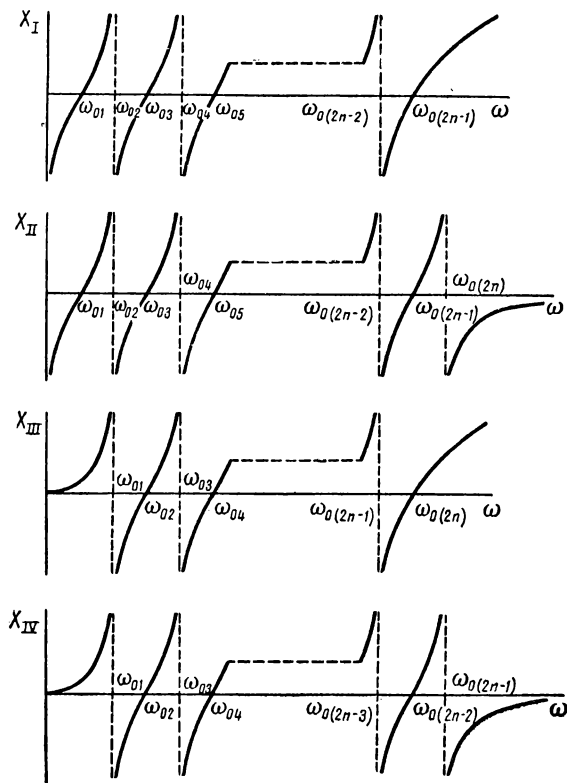


Рис. 5.13. Частотные характеристики сопротивления многоэлементных реактивных двухполосников

- 1) число резонансов в двухполоснике с неприводимыми элементами получается на единицу меньше числа элементов;
- 2) последовательные и параллельные резонансы в таких двухполосниках (нули и полюсы их характеристик сопротивления) следует поочередно друг за другом на оси частот;
- 3) если схема пропускает постоянный ток, то первым на оси частот является параллельный резонанс, а если не пропускает — то последовательный резонанс.

Второй вывод означает, что характеристика сопротивления не может иметь два рядом расположенных полюса, не разделенных нулем, или два нуля, не разделенных полюсом. Действительно, из рис. 5.10 видно, что между резонансными частотами  $\omega_{01}$  и  $\omega_{02}$  не может появиться ни новый нуль, ни новый полюс, какое бы сопротивление ни прибавлялось к первоначальному сопротивлению. Если же будут складываться сопротивления двухполюсников с рядом расположенными полюсами, как рис. 5.12, а, то между полюсами неизбежно возникает разделяющий их нуль. При сложении же сопротивлений двухполюсников с рядом расположенными нулями (рис. 5.12, б) в результате остается один смещенный нуль характеристики. Аналогично не может иметь смежных нулей или полюсов частотная характеристика проводимости двухполюсника, какие бы проводимости при этом ни складывались. Тем самым подтверждается вывод о чередовании нулей и полюсов.

Из факта чередования нулей и полюсов характеристики сопротивления следует и третий вывод, полученный выше, — о характере первого резонанса на оси частот.

Полученные выводы позволяют построить характеристики сопротивления для любых двухполюсников с минимальным числом элементов, в которых приведение элементов невозможно при любых эквивалентных преобразованиях схемы. Существуют четыре типа таких характеристик, отличающихся сочетанием нулей и полюсов сопротивления при  $\omega = 0$ , и  $\omega = \infty$ , как показано на рис. 5.13. Очевидно, что эти характеристики справедливы и для таких цепей, в которых не произведено возможное приведение элементов. В этих случаях лишь число резонансов и число элементов в схеме отличаются больше чем на единицу. Поэтому представляет интерес выявление признаков, по которым можно судить о возможности или невозможности приведения элементов в схеме. Этот вопрос рассматривается в последующем изложении.

### 3. Двухполюсники с произвольным числом элементов

В общем случае реактивный двухполюсник может иметь сколь угодно сложную схему с произвольным числом элементов. Сопротивление такого двухполюсника можно определить в общем виде, как указывалось при рассмотрении двухполюсника, изображенного на рис. 3.4. Для этого необходимо к пассивному двухполюснику (рис. 5.14) подключить источник напряжения и определить сопротивление по закону Ома (2.22).

Определим ток  $\dot{I}_m$ , протекающий через двухполюсник, методом контурных токов, полагая, что ветвь с источником входит в первый контур схемы. Тогда сопротивление двухполюсника

$$\dot{Z} = \frac{\dot{E}_m}{\dot{I}_m} = \frac{\Delta_Z}{\Delta_{11}}. \quad (5.17)$$

Здесь  $\Delta_Z$  — определитель сопротивлений (3.18);

$\Delta_{11}$  — минор элемента  $\dot{Z}_{11}$  этого определителя.

При дальнейшем анализе для удобства записи введем понятие мнимой частоты

$$p = j\omega. \quad (5.18)$$

При этом, например, сопротивления и проводимости (5.1) — (5.4) выражаются через мнимую частоту следующим образом:

$$\dot{Z} = pL + \frac{1}{pC}, \quad (5.19)$$

$$\dot{Y} = \frac{pC}{p^2LC + 1}, \quad (5.20)$$

$$\dot{Z}' = \frac{pL}{p^2LC + 1}, \quad (5.21)$$

$$\dot{Y}' = pC + \frac{1}{pL}. \quad (5.22)$$

Форма этих равенств свидетельствует об удобстве обозначения (5.18). Отмеченное выше свойство положительности производных  $\frac{dX}{d\omega}$  и  $\frac{dB}{d\omega}$  применительно к соотношениям (5.19) — (5.22) означает, что  $\frac{d\dot{Z}}{dp} > 0$

и  $\frac{d\dot{Y}}{dp} > 0$  при всех мнимых значениях  $p = j\omega$ .

Возвращаясь к рассмотрению многоэлементного двухполюсника, примем, что в общем случае все его ветви включают в себя как индуктивность, так и емкость. При этом все элементы определителей в соотношении (5.17) будут описываться формулой вида (5.19).

Представим теперь сопротивление (5.17) в виде

$$\dot{Z} = \frac{p^n \Delta_Z}{p^n \Delta_{11}} = \frac{\dot{\Delta}_Z}{p \dot{\Delta}'_{11}}, \quad (5.23)$$

где  $\dot{\Delta}_Z$  и  $\dot{\Delta}'_{11}$  — определители, полученные из определителей  $\Delta_Z$  и  $\Delta_{11}$  умножением всех их элементов на  $p$ .

Следовательно, вместо сопротивлений (5.19) определители  $\dot{\Delta}_Z$  и  $\dot{\Delta}'_{11}$  содержат в качестве элементов четные квадратичные полиномы

$$p\dot{Z}_{kl} = L_{kl}p^2 + \frac{1}{C_{kl}}. \quad (5.24)$$

Определитель  $\dot{\Delta}_Z$  является определителем  $n$ -го порядка, а  $\dot{\Delta}'_{11}$  — определителем  $(n - 1)$ -го порядка. Поэтому, раскрывая эти определители с учетом формулы (5.24), получим четные полиномы соответственно степени  $2n$  и  $2(n - 1)$ . При этом сопротивление (5.23) представляется в следующем виде:

$$\dot{Z}_1 = \frac{1}{p} \cdot \frac{a_n p^{2n} + a_{n-1} p^{2(n-1)} + \dots + a_1 p^2 + a_0}{b_{n-1} p^{2(n-1)} + b_{n-2} p^{2(n-2)} + \dots + b_1 p^2 + b_0}. \quad (5.25)$$

Здесь индекс у сопротивления  $\dot{Z}_1$  означает, что соотношение (5.25) описывает один из возможных видов частотной характеристики сопротивления двухполюсника. Второй возможный тип характеристики можно получить, если предположить, что во входном контуре двухполюсника отсутствуют индуктивности ( $L_{1k} = 0$ ). Тогда степень полиномов  $p\dot{Z}_{1k}$  в соответствии с формулой (5.24) понизится на две единицы. При этом степень полинома  $\dot{\Delta}_Z$  также понизится на две единицы и станет равной степени полинома  $\dot{\Delta}'_{11}$ . Следовательно, вместо выражения (5.25) получим

$$\dot{Z}_{11} = \frac{1}{p} \cdot \frac{a_n p^{2n} + a_{(n-1)} p^{2(n-1)} + \dots + a_1 p^2 + a_0}{b_n p^{2n} + b_{n-1} p^{2(n-1)} + \dots + b_1 p^2 + b_0}. \quad (5.26)$$

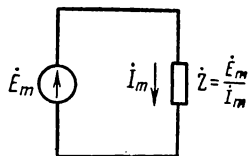


Рис. 5.14. Определение сопротивления пассивного двухполюсника



Здесь для общности записи старшая степень принята равной  $2n$  вместо  $2(n-1)$ .

Соотношениями (5.25) и (5.26) не исчерпываются возможные типы частотных характеристик сопротивления двухполюсника. Действительно, оба эти уравнения соответствуют двухполюсникам, не пропускающим постоянный ток, так как  $\dot{Z}_{\text{I}}|_{p=\omega=0} = \dot{Z}_{\text{II}}|_{p=\omega=0} = -j\infty$ . Поэтому, продолжая варьировать схему двухполюсника, можно получить еще два типа частотных характеристик. Однако к этим типам характеристик можно прийти и путем следующих простых рассуждений. Будем определять не сопротивление двухполюсника методом контурных токов, а его проводимость методом узловых напряжений. Тогда вследствие идентичности определителей  $\Delta z$  и  $\Delta y$  при замене сопротивления (5.19) на проводимость (5.22) для проводимости двухполюсника будут получены формулы такой же структуры, как соотношения (5.25) и (5.26). При этом для сопротивления как величины, обратной проводимости, вместо выражений (5.25) и (5.26) будут получены следующие соотношения:

$$\dot{Z}_{\text{III}} = p \frac{a_n p^{2n} + a_{n-1} p^{2(n-1)} + \dots + a_1 p^2 + a_0}{b_n p^{2n} + b_{n-1} p^{2(n-1)} + \dots + b_1 p^2 + b_0}, \quad (5.27)$$

$$Z_{\text{IV}} = p \frac{\dot{a}_{n-1} p^{2(n-1)} + a_{n-2} p^{2(n-2)} + \dots + a_1 p^2 + a_0}{b_n p^{2n} + b_{n-1} p^{2(n-1)} + \dots + b_1 p^2 + b_0}. \quad (5.28)$$

Нетрудно видеть, что эти соотношения соответствуют двухполюсникам, пропускающим постоянный ток, так как  $\dot{Z}_{\text{III}}|_{p=\omega=0} = \dot{Z}_{\text{IV}}|_{p=\omega=0} = 0$ .

Полученными функциями (5.25) — (5.28) описываются все возможные типы частотных характеристик реактивных двухполюсников, поэтому они получили название реактансных функций.

Не считая нулевого корня, числитель и знаменатель реактансной функции имеют по  $2m$  корней, где  $m = n$  или  $m = n - 1$ . Из этих  $2m$  корней  $m$  нулей реактансной функции соответствуют последовательным резонансам в двухполюснике, а  $m$  полюсов — параллельным резонансам. Таким образом, число последовательных и параллельных резонансов равно друг другу или отличается на единицу, а общее число резонансных частот в двухполюснике получается равным  $2n$  (при  $2n + 1$  элементах) или  $2n - 1$  (при  $2n$  элементах). При этом остальные корни числителя и знаменателя реактансной функции соответствуют отрицательным частотам и не имеют физического смысла.

С учетом этих особенностей реактансных функций по формулам (5.25) — (5.28) могут быть построены различные типы частотных характеристик реактивных двухполюсников, которые были получены выше путем обобщения частных результатов (см. рис. 5.13).

#### 4. Канонические схемы двухполюсников

Выше был поставлен вопрос о признаках, по которым можно судить, произведены ли в двухполюснике все возможные приведения элементов. Однозначно ответить на этот вопрос можно в том случае, когда в результате эквивалентных преобразований получается схема двухполюсника, составленная по определенным правилам (канонам). Такие схемы с неприводимыми элементами, составленные по определенным правилам, называются каноническими схе-

мами. Канонические схемы имеют минимальное число элементов при заданном числе резонансов, как это отмечалось для схем с неприводимыми элементами. Правила построения канонических схем могут быть установлены логически. Очевидно, что приведение элементов в схеме невозможно, если она образуется путем последовательного соединения взаимно расстроенных параллельных двухполюсников. Последовательное подключение таких цепочек к схемам, изображенным на рис. 5.5, в, г и 5.11, в, также приводит к схе-

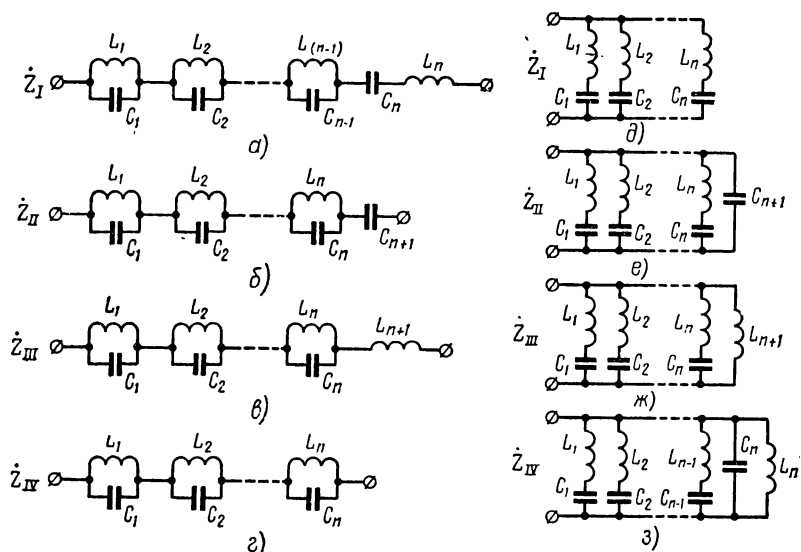


Рис. 5.15. Последовательные (а—г) и параллельные (д—з) канонические схемы реактивных двухполюсников

мам с неприводящимися элементами. При этом получаются так называемые последовательные канонические схемы, показанные на рис. 5.15, а—г. Аналогичные рассуждения позволяют получить другую разновидность схем с неприводимыми элементами — параллельные канонические схемы, показанные на рис. 5.15, д — з.

Канонические схемы можно построить и более строго, преобразовав соответствующим образом реактансные функции (5.25) — (5.28). Например, функцию (5.25) можно представить в следующем виде:

$$\dot{Z}_1 = \frac{A_1 p}{B_1 p^2 + 1} + \frac{A_2 p}{B_2 p^2 + 1} + \dots + \frac{A_{n-1} p}{B_{n-1} p^2 + 1} + A_n p + \frac{B_n}{p}. \quad (5.29)$$

В тождественности соотношений (5.25) и (5.29) нетрудно убедиться, если в последнем равенстве привести слагаемые к общему знаменателю.

Соотношение (5.29) представляет собой сумму  $(n - 1)$  сопротивлений типа (5.21) и одного сопротивления типа (5.19). Следовательно, двухполюсник с харак-

теристикой (5.25) или (5.29) может быть представлен в виде последовательно соединенных  $(n - 1)$  параллельных двухполюсников и одного последовательного двухполюсника (см. рис. 5.15, а).

Аналогично, преобразуя реактансные функции (5.26) — (5.28), приходим к схемам, изображенным на рис. 5.15, б, в и г.

Можно получить и другие канонические схемы двухполюсников с теми же типами характеристик (потенциально эквивалентные канонические двухполюсники). Для этого следует перейти от сопротивлений (5.26) — (5.28) к проводимостям  $\dot{Y}_1 = \frac{1}{\dot{Z}_1}, \dots, \dot{Y}_{1V} = \frac{1}{\dot{Z}_{1V}}$ . Преобразуя реактансные функции проводимости

двухполюсника описанным выше способом, получим сумму проводимостей типа (5.20). Это соответствует параллельному соединению последовательных двухполюсников. Таким образом приходим к параллельным каноническим схемам, изображенным на рис. 5.15, д — з.

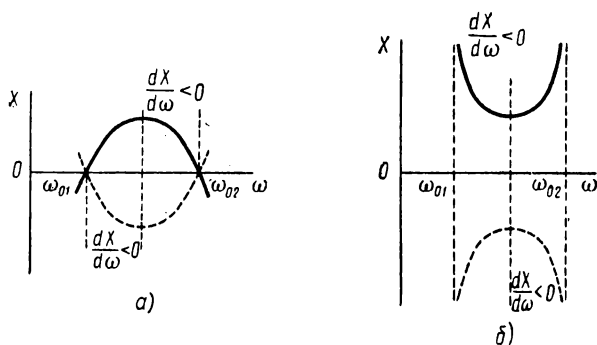


Рис. 5.16. Частотные характеристики сопротивления реактивных двухполюсников при смежном расположении нулей или полюсов

Поскольку реактансные функции (5.25) — (5.28) представляются в виде суммы сопротивлений или проводимостей элементарных двухполюсников, для них, как и для функций (5.19) — (5.22), справедливо свойство положительности производных:  $\frac{d\dot{Z}}{dp} > 0$ ,  $\frac{d\dot{Y}}{dp} > 0$  при всех мнимых частотах  $p = j\omega$ , или  $\frac{dX}{d\omega} > 0$ ,  $\frac{dB}{d\omega} > 0$  при всех вещественных частотах  $\omega$ .

Отсюда следует полученный выше вывод о невозможности смежного расположения нулей или полюсов реактансной функции. Действительно, при смежном расположении нулей или полюсов на некоторых частотах неизбежно будет  $\frac{dX}{d\omega} < 0$  (или  $\frac{dB}{d\omega} < 0$ ), как это видно из рис. 5.16, а и б.

Отмеченная положительность производной реактансных функций и является математическим выражением необходимости чередования нулей и полюсов этих функций.

Следует также подчеркнуть, что в канонической схеме не может быть последовательных или параллельных двухполюсников с одинаковыми резонансными частотами, так как такие двухполюсники могут быть объединены в один.

Существует еще один тип преобразования реактансных функций, приводящий к новым разновидностям канонических схем. Это преобразование заключается в представлении реактансной функции в виде цепной дроби.

Если, например, в равенстве (5.25) разделить числитель на знаменатель, то получим

$$\dot{Z}_1 = L_1 p + \dot{Z}_1, \quad (5.30)$$

где

$$\dot{Z}_1 = \frac{a'_{n-1} p^{2n-2} + a'_{n-2} p^{2n-4} + \dots + a'_1 p^2 + a'_0}{b_{n-1} p^{2n-1} + b_{n-2} p^{2n-3} + \dots + b_1 p^3 + b_0 p}. \quad (5.31)$$

Разделив теперь в равенстве (5.31) числитель и знаменатель на числитель, получим

$$\dot{Z}_1 = \frac{1}{C_1 p + Y_1}, \quad (5.32)$$

где

$$\dot{Y}_1 = \frac{b'_{n-2} p^{2n-3} + b'_{n-3} p^{2n-5} + \dots + b'_1 p^3 + b'_0 p}{a'_{n-1} p^{2n-2} + a'_{n-2} p^{2n-4} + \dots + a'_1 p^2 + a'_0}. \quad (5.33)$$

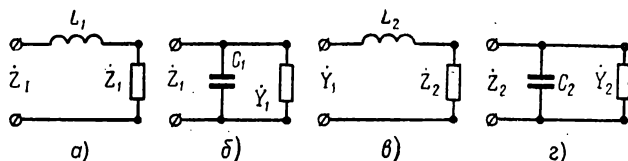


Рис. 5.17. Образование цепочечной схемы двухполюсника

Теперь опять в полученном равенстве (5.33) делим числитель и знаменатель на числитель и продолжаем этот процесс, пока деление возможно:

$$\dot{Y}_1 = \frac{1}{L_2 p + \dot{Z}_2}, \quad (5.34)$$

$$\dot{Z}_2 = \frac{1}{C_2 p + \dot{Y}_2} \quad (5.35)$$

и т. д.

Объединив равенства (5.30), (5.32), (5.34), (5.35) и т. д., получим цепную дробь

$$\dot{Z}_1 = L_1 p + \frac{1}{C_1 p + \frac{1}{L_2 p + \frac{1}{C_2 p + \dots + \frac{1}{L_n p + \frac{1}{C_n p}}}}}, \quad (5.36)$$

которую для краткости записывают символически:

$$\dot{Z}_1 = L_1 p + \frac{1}{C_1 p} + \frac{1}{L_2 p} + \frac{1}{C_2 p} + \dots + \frac{1}{L_n p} + \frac{1}{C_n p}. \quad (5.36a)$$

Цепной дроби соответствует цепочечная каноническая схема двухполюсника, к которой приходим следующим образом. Равенствам (5.30), (5.32), (5.34), (5.35) соответствуют схемы, изображенные на рис. 5.17, а—г. Объединяя и продолжая

эти схемы, приходим к цепочечной канонической схеме, изображенной на рис. 5.18, а, которая имеет характеристику типа (5.36) или (5.25). Аналогично получаются канонические схемы на рис. 5.18, б—г, соответствующие реактансным функциям (5.26) — (5.28).

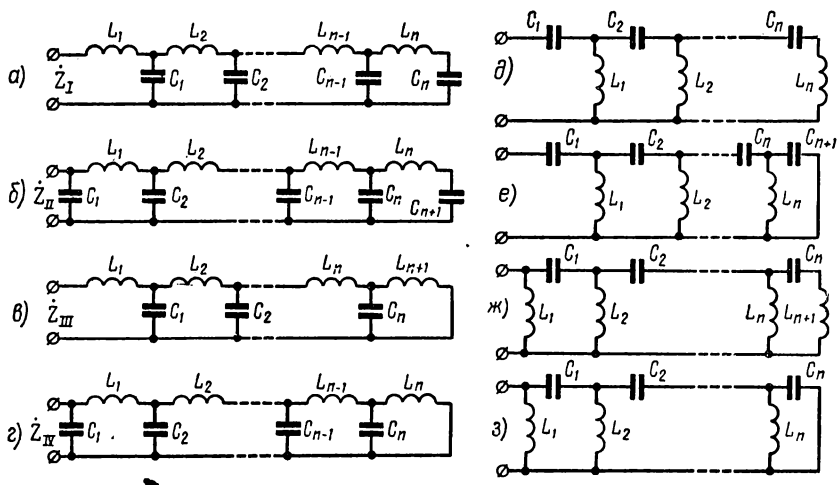


Рис. 5.18. Цепочечные канонические схемы реактивных двухполюсников

Раскладывая в цепную дробь реактансные функции проводимости двухполюсника, приходим к другой разновидности цепочечных канонических схем, изображенных на рис. 5.18, д — з.

## 5. Понятие о преобразовании и синтезе реактивных двухполюсников

При необходимости сократить число элементов в двухполюснике его схема приводится к каноническому виду. Приведение произвольных схем к каноническому виду производится в два этапа, которые периодически повторяются, пока не будет достигнута цель.

На первом этапе выделяется участок схемы канонического вида, который преобразуется в эквивалентную каноническую схему. На втором этапе производится возможное приведение элементов. Затем повторяется первый этап и т. д. Пример такого преобразования схемы был приведен выше (см. рис. 5.9, б, 5.11, а и б).

Если указанный способ преобразования невозможен, то необходимо определить реактансную функцию двухполюсника (методом контурных токов или любым другим методом). Затем по найденной реактансной функции следует построить каноническую схему любого вида.

При необходимости синтезировать двухполюсник с заданными резонансами задается реактансная функция двухполюсника. При этом должны быть учтены следующие особенности.

1. Реактансные функции описываются дробно-рациональными выражениями, в которых числитель и знаменатель представляют собой четные или нечетные полиномы от величины  $p$  со степенями, отличающимися на единицу. Следовательно, реактансные функции являются нечетными:  $\hat{Z}(-p) = -\hat{Z}(p)$ .

2. Из сопоставления выражений (5.29) и (5.19) — (5.22) видно, что коэффициенты  $A_k, B_k$ , а следовательно, и коэффициенты  $a_k, b_k$  в соотношениях (5.25) — (5.28) являются вещественными положительными числами.

В соответствии с этими и описанными выше свойствами реактансная функция должна быть нечетной дробно-рациональной функцией с вещественными положительными коэффициентами, которая не имеет кратных нулей и полюсов и производная которой положительна при мнимых значениях  $p$ . При синтезе двухполюсника его реактансная функция представляется, например, в виде цепной дроби типа (5.36). По коэффициентам этой дроби определяются параметры цепочечной канонической схемы.

Практическая проверка реактансной функции на соблюдение ее основных свойств в ряде случаев может оказаться затруднительной. Поэтому о реализуемости заданной функции сопротивления проще всего судить по коэффициентам цепной дроби, которые должны быть положительными.

## § 5.2. ДИССИПАТИВНЫЕ ДВУХПОЛЮСНИКИ

### 1. Последовательный двухполюсник с потерями

Реактивные двухполюсники являются идеализированными цепями. В реальных цепях всегда есть потери активной мощности, т. е. реальные двухполюсники являются диссипативными.

Рассмотрим последовательный двухполюсник (см. рис. 5.1, *а*) с учетом потерь в элементах (рис. 5.19, *а*). Принимая во внимание рис. 2.25, *а* и 2.28, *а*, эквивалентную схему последовательного двухполюсника с потерями можно изобразить в соответствии с рис. 5.19, *б*. Эта схема со смешанным соединением элементов неудобна для анализа. Поэтому целесообразно воспользоваться эквивалентной схемой рис. 2.25, *в*, при которой схема диссипативного последовательного двухполюсника принимает удобный вид (рис. 5.19, *в*). В этой схеме обычно  $r_c \ll r_L$ , как отмечалось выше, и можно считать  $r \approx r_L$ .

Согласно эквивалентной схеме диссипативного последовательного двухполюсника (см. рис. 5.19, *в*), его сопротивление на частоте (5.6) становится чисто вещественным ( $\dot{Z} = r$ ), так как сопротивление реактивного последовательного двухполюсника  $L, C$  обращается при этом в нуль. Таким образом, в последовательном двухполюснике с потерями наблюдается резонанс на той же частоте, что и в идеальном последовательном двухполюснике.

Определим добротность рассматриваемого двухполюсника. Как указывалось, добротность (2.76) определяется обычно на некоторой фиксированной частоте. Для последовательного двухполюсника, который характеризуется резонансной частотой (5.6), добротность определяется на этой резонансной частоте.

Из формул (2.107), (2.133) и (5.5) следует, что при резонансе реактивные мощности в индуктивности и емкости равны друг другу. При этом максимальная энергия (2.75) в двухполюснике сосредоточивается попеременно в магнитном поле катушки, когда  $i = I_m$ ,  $u_c = 0$ , или в электрическом поле конденсатора, когда  $u_c = U_{mc}$ ,  $i = 0$ , поскольку ток двухполюсника и напряжение на конденса-

торе сдвинуты по фазе на угол  $\frac{\pi}{2}$  (см. рис. 5.1, б и в). Таким образом, максимальная энергия в двухполоснике согласно формулам (2.108) и (2.124)

$$N_{\max} = \frac{CU_m^2}{2} = \frac{LI_m^2}{2}. \quad (5.37)$$

Мощность потерь в двухполоснике (см. рис. 5.19, в) определяется в соответствии с формулой (2.60):

$$P_a = \frac{rI_m^2}{2}. \quad (2.60a)$$

Таким образом, учитывая формулы (5.37), (2.60a) и (5.9), в соответствии с определениями (2.76) и (2.74) находим добротность и затухание последовательного двухполосника, вычисляемые на резонансной частоте:

$$Q = \frac{\omega_0 L}{r} = \frac{1}{\omega_0 C r} = \frac{1}{r} \sqrt{\frac{L}{C}} = \frac{\rho}{r}, \quad (5.38)$$

$$d = \frac{r}{\omega_0 L} = \omega_0 C r = r \sqrt{\frac{C}{L}} = \frac{r}{\rho}. \quad (5.39)$$

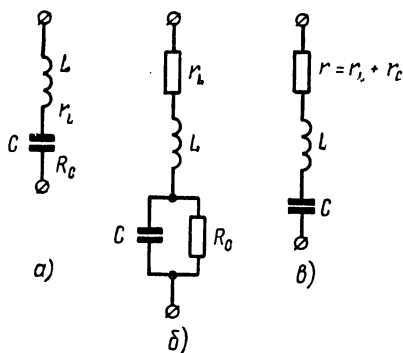


Рис. 5.19. Диссипативный последовательный двухполосник

Рассмотрим теперь сопротивление диссипативного последовательного двухполосника.

С учетом формулы (5.13) это сопротивление можно представить в следующем виде:

$$\hat{Z} = r + j\rho v \approx r + j2\rho\Delta, \quad (5.40)$$

или согласно формуле (5.38)

$$\hat{Z} = r(1 + jQv) = r(1 + j\xi) \approx r(1 + j2Q\Delta). \quad (5.40a)$$

Здесь для краткости записи введено обозначение

$$\xi = Qv \approx 2Q\Delta = 2\frac{\Delta}{d}. \quad (5.41)$$

Величину  $\xi$ , пропорциональную нормированной расстройке, а также относительной расстройке (при  $|\Delta| \ll 1$ ), будем называть обобщенной расстройкой.

Из уравнения (5.40a), учитывая обозначения (5.41), (5.39), (5.8), находим модуль и аргумент сопротивления последовательного двухполосника с потерями:

$$\frac{Z}{r} = \sqrt{1 + \xi^2} \approx \sqrt{1 + \frac{4Q^2}{\omega_0^2} (\Delta\omega)^2} = \sqrt{1 + \frac{4L^2}{r^2} (\Delta\omega)^2}, \quad (5.42)$$

$$\varphi = \arctg \xi \approx \arctg \frac{2Q}{\omega_0} \Delta\omega = \arctg \frac{2L}{r} \Delta\omega \approx \xi. \quad (5.43)$$

Точность последнего приближенного равенства оценивается ниже.

Из полученных соотношений видно, что частотные характеристики сопротивления  $Z(\omega)$  и аргумента  $\varphi(\omega)$  являются несимметричными относительно резонансной частоты  $\omega_0$ . Однако в области малых расстройк характеристика сопротивления обладает четной симметрией, а характеристика аргумента — нечетной симметрией:

$$Z(-\Delta\omega) = -Z(\Delta\omega), \quad \varphi(-\Delta\omega) = -\varphi(\Delta\omega). \quad (5.44)$$

В области особо малых расстройк, когда  $\xi < 0,5$ , характеристика аргумента представляет собой прямую линию.

Общий вид характеристик модуля (5.42) и аргумента (5.43) сопротивления показан на рис. 5.20.

Из рис. 5.20 и формул (5.42), (5.43) видно, что сопротивление последовательного двухполюсника с потерями является при резонансе минимальным по величине и активным по характеру:

$$Z|_{\omega=\omega_0} = Z_{\min} = r, \quad (5.45)$$

$$\varphi|_{\omega=\omega_0} = 0. \quad (5.46)$$

При расстройках же сопротивление двухполюсника возрастает по величине и становится комплексным, приобретая индуктивный характер при  $\omega > \omega_0$  и емкостный характер при  $\omega < \omega_0$ .

Подобная зависимость сопротивления последовательного двухполюсника от частоты свидетельствует о наличии у него селективных свойств. Такой двухполюсник может, например, хорошо пропускать колебания с частотами, близкими к резонансной частоте, заметно ослабляя ток при сильной расстройке. Действительно, при неизменной амплитуде напряжения  $U_m$  на двухполюснике ток

$$I_m = \frac{U_m}{Z}, \quad (5.47)$$

протекающий через двухполюсник, изменяется обратно пропорционально сопротивлению  $Z$ , достигая при резонансе максимального значения:

$$I_{m0} = I_{m \max} = \frac{U_m}{r}. \quad (5.48)$$

График зависимости  $I_m(\omega)$ , приведенный на рис. 5.21, называется резонансной характеристикой двухполюсника.

В соответствии с изменением характера сопротивления меняется и сдвиг фаз между напряжением  $\dot{U}_m$  и током  $\dot{I}_m$  в двухполюснике.

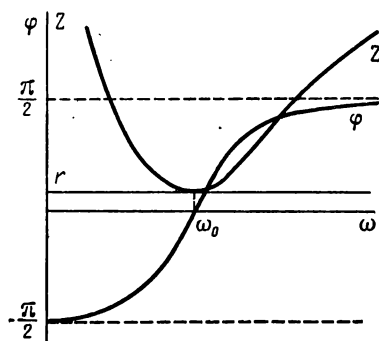


Рис. 5.20. Частотные характеристики модуля и аргумента сопротивления диссипативного последовательного двухполюсника



Этот ток совпадает по фазе с напряжением при резонансе (рис. 5.22, а), отстает по фазе от напряжения при  $\omega > \omega_0$  (рис. 5.22, б) и опережает по фазе напряжение при  $\omega < \omega_0$  (рис. 5.22, в).

Следует отметить, что фазовые соотношения в двухполюснике меняются при подключении диссипативного элемента к реактивному элементу (рис. 5.23). В частности, при резонансе в отсутствие резистора  $\dot{I}_m = \dot{I}_{mC}$  и  $\arg \dot{I}_m = \arg \dot{U}_m$ . При подключении же резистора  $\dot{I}_m = \dot{I}_{mC} + \dot{I}_{mR}$  и  $\arg \dot{I}_m \neq \arg \dot{U}_m$ . Это означает, что подключение резистора приводит к расстройке двухполюсника, и, следовательно, его резонансная частота является функцией сопротивления  $R$ . Формулу для резонансной частоты в этом случае можно получить, пересчитав параллельное соединение элементов  $R$ ,  $C$

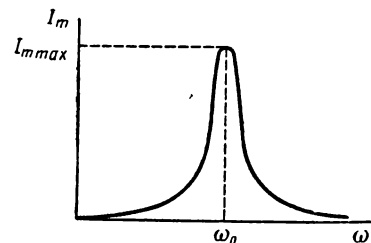


Рис. 5.21. Резонансная характеристика последовательного двухполюсника

на последовательное согласно формулам (2.36). Расстройкой можно пренебречь, если  $\bar{R} \gg X_C$ , так что согласно формуле (2.38) при пересчете параллельного соединения на последовательное емкость

на последовательное согласно формулам (2.36). Расстройкой можно пренебречь, если  $\bar{R} \gg X_C$ , так что согласно формуле (2.38) при пересчете параллельного соединения на последовательное емкость

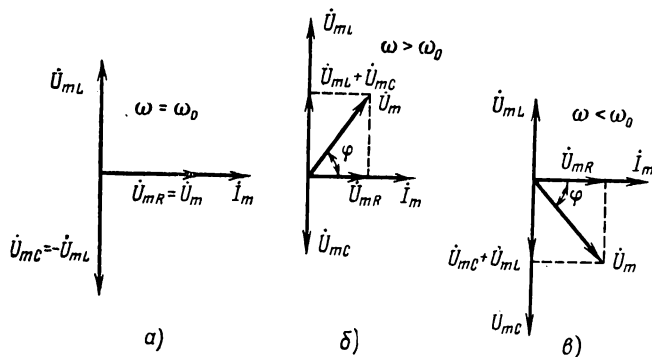


Рис. 5.22. Векторные диаграммы напряжений и тока в последовательном двухполюснике

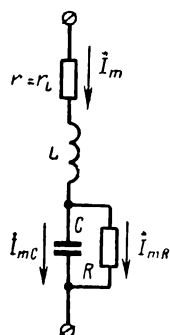


Рис. 5.23. Подключение резистора к емкости последовательного двухполюсника

остается практически неизменной (как в эквивалентных схемах конденсатора на рис. 2.25).

Влияние сопротивления  $R$  на резонансную частоту не рассматривается здесь количественно. Студентам предоставляется возможность самостоятельно получить соответствующую формулу и построить векторную диаграмму.

Рассмотрим влияние параметров двухполюсника на характеристики его сопротивления. На рис. 5.24 приведены графики зависимости модуля сопротивления (5.42) от расстройки.

Из этих графиков и равенств (5.42) можно сделать следующие выводы.

1. В обобщенных координатах (рис. 5.24, а) частотная характеристика сопротивления двухполюсника не зависит от его параметров.

2. Из двух двухполюсников с разным сопротивлением потерь (рис. 5.24, б) или разной индуктивностью (рис. 5.24, в) двухполюсник с меньшими потерями или большей индуктивностью при прочих

равных условиях имеет частотную характеристику сопротивления, которая более резко меняется при изменении абсолютной расстройки.

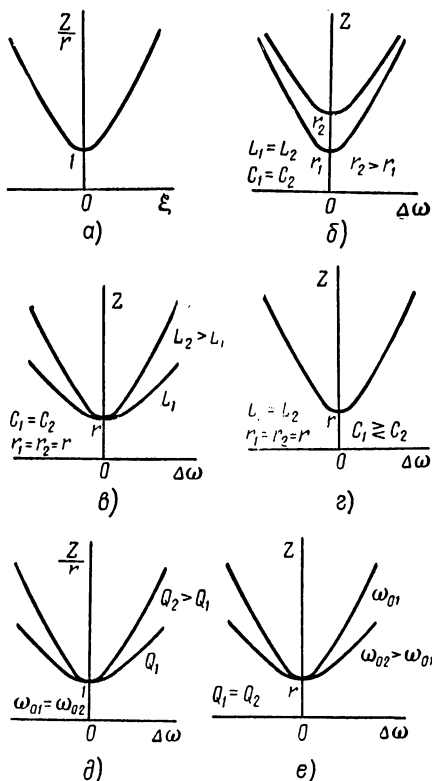


Рис. 5.24. Влияние параметров последовательного двухполюсника на характеристики модуля сопротивления

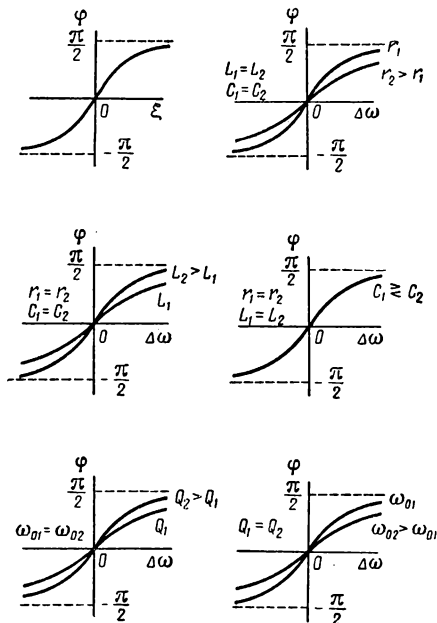


Рис. 5.25. Влияние параметров последовательного двухполюсника на характеристики аргумента сопротивления

3. При изменении емкости и неизменных прочих параметрах (рис. 5.24, з), например, при перестройке двухполюсника с помощью переменного конденсатора, форма его частотной характеристики сопротивления не меняется.

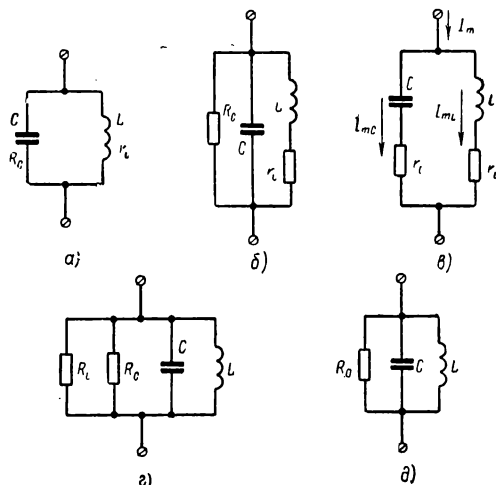
4. Из двух двухполюсников с разной добротностью (рис. 5.24, д) или разной резонансной частотой (рис. 5.24, е) двухполюсник с большей добротностью или меньшей резонансной частотой при прочих равных условиях имеет частотную характеристику сопротивления, которая более резко меняется при изменении абсолютной расстройки.

Аналогичные выводы можно сделать и в отношении влияния параметров двухполюсника на характеристику аргумента сопротивления (5.43). Эти выводы иллюстрируются графиками рис. 5.25.

Формулировку же этих выводов студентам предоставляется сделать самостоятельно.

## 2. Параллельный двухполюсник с потерями

Параллельный двухполюсник с потерями (рис. 5.26, а) согласно рис. 2.25, а и 2.28, а имеет эквивалентную схему, изображенную на рис. 5.26, б.



Эта эквивалентная схема является наиболее точной, если сопротивление потерь  $r_L$  и  $R_C$  считать постоянными в диапазоне частот.

Если же  $R_C \gg \frac{1}{\omega^2 C^2} \approx \rho^2$ , то эквивалентная схема диссипативного параллельного двухполюсника принимает вид, показанный на рис. 5.26, в, где согласно формулам (2.38)

$$r_C \approx \frac{\rho^2}{R_C}. \quad (5.49)$$

Рис. 5.26. Диссипативный параллельный двухполюсник

Эту величину можно рассматривать как сопротивление потерь, вносимое в замкнутый контур  $C, L, r_L$  (см. рис. 5.26, б) сопротивлением  $R_C$ . При этом сопротивление  $r_C$  является в схеме рис. 5.26, в составной частью полного сопротивления потерь

$$r = r_L + r_C \quad (5.50)$$

замкнутого контура  $L, C, r_C, r_L$ .

Если  $r_L \ll \omega^2 L^2 \approx \rho^2$ , то эквивалентная схема диссипативного параллельного двухполюсника принимает вид, показанный на

рис. 5.26, *г* или *д*, где согласно формулам (2.39) и (2.99)

$$R_L \approx \frac{\rho^2}{r_L}, \quad (5.51)$$

$$R_0 = \frac{R_L R_C}{R_L + R_C} = \frac{\rho^2}{r} = Q\rho, \quad (5.52)$$

а  $r$  и  $Q$  определяются прежними соотношениями (5.50), (5.49) и (5.38).

Из эквивалентных схем рис. 5.26, *г* и *д* видно, что на резонансной частоте (5.6), когда проводимость реактивного параллельного двухполюсника  $L$ ,  $C$  обращается в нуль, сопротивление диссипативного параллельного двухполюсника становится чисто активным и равным сопротивлению (5.52). Следовательно, в рассматриваемом двухполюснике наблюдается параллельный резонанс на той же частоте (5.6), что и в идеальном параллельном двухполюснике, отсюда также следует, что подключение резистора параллельно двухполюснику не влияет на значение резонансной частоты.

Однако при пользовании приближенной формулой (5.51) влияние потерь в схеме рис. 5.26, *д* учитывается недостаточно точно. Если исходить из более точной эквивалентной схемы, изображенной на рис. 5.26, *б*, то проводимость двухполюсника

$$\dot{Y} = \frac{1}{R_C} + j\omega C + \frac{1}{r_L + j\omega L}, \quad (5.53)$$

или

$$\dot{Y} = \frac{1}{R_C} + \frac{r_L}{r_L^2 + \omega^2 L^2} + j\omega \frac{C(r_L^2 + \omega^2 L^2) - L}{r_L^2 + \omega^2 L^2}. \quad (5.53a)$$

Отсюда видно, что в диссипативном параллельном двухполюснике резонанс наступает при

$$\omega \frac{C(r_L^2 + \omega^2 L^2) - L}{r_L^2 + \omega^2 L^2} = 0,$$

т. е. при

$$r_L^2 + \omega_0'^2 L^2 = \frac{L}{C} = \rho^2.$$

Следовательно, резонансная частота диссипативного параллельного двухполюсника получается равной

$$\omega_0' = \omega_0 \sqrt{1 - d_L^2} \approx \omega_0 \left(1 - \frac{d_L^2}{2}\right) \approx \omega_0, \quad (5.54)$$

где

$$d_L = \frac{r_L}{\rho}. \quad (5.55)$$

Если же исходить из эквивалентной схемы рис. 5.26, *в*, то резонансная частота

$$\omega_0'' = \omega_0 \sqrt{\frac{1 - d_L^2}{1 - d_C^2}} \approx \omega_0, \quad (5.56)$$

где

$$d_C = \frac{r_C}{\rho}. \quad (5.57)$$

Приближенные равенства (5.56) и (5.54) написаны в предположении, что  $d^2_C \ll d^2_L \ll 1$ .

Таким образом, потери в параллельном двухполюснике влияют на значение резонансной частоты, которую можно принять равной  $\omega_0$  только при  $d^2_L \ll 1$ . Поскольку это условие удовлетворяется в радиотехнических цепях, то в дальнейшем будем пользоваться последним приближенным равенством (5.54).

Исходя из этого приближенного равенства, получим, что энергетические соотношения при резонансе в параллельном двухполюснике аналогичны таким же соотношениям при резонансе в последовательном двухполюснике. При этом добротность диссипативного параллельного двухполюсника определяется прежними формулами (5.38), в которых учитывается полное сопротивление потерь (5.50).

Рассмотрим сопротивление диссипативного параллельного двухполюсника, исходя для простоты вычислений из эквивалентной схемы рис. 5.26, в.

$$\dot{Z} = \frac{(r_L + j\omega L) \left( r_C + \frac{1}{j\omega C} \right)}{r_L + r_C + j \left( \omega L - \frac{1}{\omega C} \right)}.$$

Если в числителе этого выражения пренебречь сопротивлениями потерь  $r_L, r_C$ , ничтожно малыми в сравнении с реактивными сопротивлениями  $\omega L, \frac{1}{\omega C}$  (в области резонанса) \*, то с учетом ранее принятых обозначений получим

$$\dot{Z} = R + jX = Ze^{j\varphi} = \frac{\rho^2}{r + j\rho v} = \frac{R_0}{1 + j\xi}. \quad (5.58)$$

Отсюда видно, что при резонансе ( $\xi = 0$ ) сопротивление двухполюсника  $\dot{Z} = R_0$  определяется прежним соотношением (5.52), полученным для эквивалентной схемы, изображенной на рис. 5.26, д.

Из уравнений (5.58) находим:

$$R = \frac{R_0}{1 + \xi^2} = \frac{\rho d}{d^2 + v^2} \approx \frac{\rho d}{d^2 + 4\Delta^2}, \quad (5.59)$$

$$X = -\frac{R_0 \xi}{1 + \xi^2} = \frac{\rho v}{d^2 + v^2} \approx -\frac{2\rho\Delta}{d^2 + 4\Delta^2}, \quad (5.60)$$

$$Z = \frac{R_0}{\sqrt{1 + \xi^2}} = \frac{\rho}{\sqrt{d^2 + v^2}} \approx \frac{\rho}{\sqrt{d^2 + 4\Delta^2}}, \quad (5.61)$$

$$\varphi = -\arctg \xi = -\arctg Qv \approx -\arctg 2Q\Delta \approx -\xi. \quad (5.62)$$

Графики частотной зависимости этих параметров двухполюсника приведены на рис. 5.27.

\* Этими же сопротивлениями потерь нельзя пренебрегать в знаменателе, где суммарное реактивное сопротивление обращается в нуль при резонансе.

Из рис. 5.27 и уравнений (5.60) видно, что в отличие от идеального двухполюсника, в котором при параллельном резонансе получается полюс реактивного сопротивления, в диссипативном параллельном двухполюснике реактивное сопротивление становится при резонансе равным нулю, как и при резонансе в последовательном двухполюснике. Следует, однако, учитывать, что, хотя для параллельного и последовательного резонансов получается общий критерий компенсации реактивных сопротивлений ( $X = 0$ ), при параллельном резонансе  $\frac{dX}{d\omega} < 0$  (см. рис. 5.27), в то время как при последовательном резонансе  $\frac{dX}{d\omega} > 0$  (см. рис. 5.2, а).

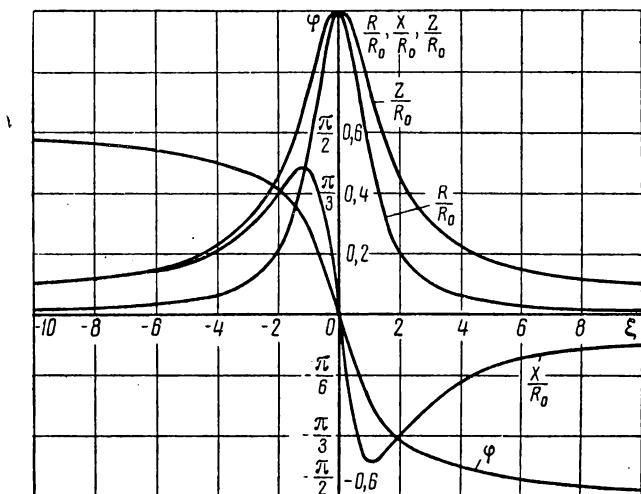


Рис. 5.27. Частотные характеристики сопротивления диссипативного параллельного двухполюсника

При этом в отличие от последовательного двухполюсника в параллельном двухполюснике реактивное сопротивление изменяется немонотонно, достигая максимума

$$|X|_{\max} = |X|_{\xi=\pm 1} = R|_{\xi=\pm 1} = \frac{R_0}{2}, \quad (5.63)$$

как это видно из уравнений (5.59) и (5.60).

Характер реактивного сопротивления диссипативного параллельного двухполюсника при разных расстройках такой же, как и в идеальном параллельном двухполюснике:  $X > 0$  при  $\omega < \omega_0$  и  $X < 0$  при  $\omega > \omega_0$ . Характером реактивного сопротивления определяется и знак аргумента сопротивления:  $\varphi > 0$  при  $\omega < \omega_0$  и  $\varphi < 0$  при  $\omega > \omega_0$ . Соответственно характеру реактивности

меняются при изменении расстройки и векторные диаграммы, которые приведены на рис. 5.28: Здесь токи  $i_{mL}$ ,  $i_{mC}$  в ветвях двухполюсника (см. рис. 5.26, в) меняются по величине при изменении частоты в соответствии с изменением реактивных сопротивлений ветвей.

Из рис. 5.27 и уравнений (5.61) видно, что при резонансе модуль сопротивления параллельного двухполюсника получается максимальным по величине в отличие от последовательного двухполюсника, в котором при резонансе сопротивление минимально. Такую частотную зависимость сопротивления тоже можно использовать в селективных цепях, например, для ослабления тока на резонансной частоте.

Следует отметить, что в отличие от последовательного двухполюсника, в котором активная составляющая сопротивления постоянна по величине и равна сопротивлению потерь, в параллельном двухполюснике при изменении частоты меняется также активная составляющая сопротивления, принимая максимальное значение при резонансе. Ряд других свойств параллельного двухполюсника совпадает со свойствами последовательного двухполюсника. В частности, свойства симметрии (5.44), а также свойство прямолинейности

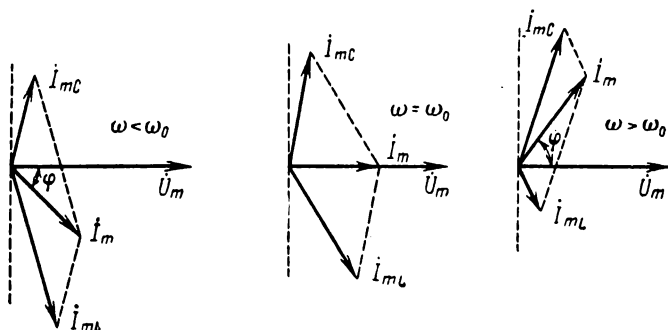


Рис. 5.28. Векторные диаграммы напряжения и токов в параллельном двухполюснике

характеристики  $\varphi(\Delta\omega)$  при малых значениях  $\xi$  остаются справедливыми и в случае параллельного двухполюсника, как это видно из уравнений (5.61), (5.62).

Влияние параметров параллельного двухполюсника на частотные характеристики его сопротивления также аналогично тому, что наблюдается в последовательном двухполюснике. Студентам предоставляется возможность самостоятельно построить соответствующие характеристики при разных параметрах двухполюсника подобно тому, как это было сделано на рис. 5.24 и 5.25 для диссипативного последовательного двухполюсника.

### 3. Фильтрация гармоник в параллельном двухполюснике

Известно, что в передатчиках тоже приходится осуществлять селекцию сигнала. При нелинейных искажениях сигнала, имеющего несущую частоту  $\omega_1 = \omega_0$ , возникают побочные колебания с кратными частотами  $\omega_2 = 2\omega_0$ ,  $\omega_3 = 3\omega_0$ , ...,  $\omega_n = n\omega_0$ , ... Эти колебания называются высшими гармониками сигнала. Подавление высших гармоник называется фильтрацией гармоник.

Фильтрацию гармоник по току можно производить в параллельном двухполюснике.

Пусть в двухполюснике и в его ветвях на частоте  $\omega_1 = \omega_0$  протекают токи  $I_{m0}$ ,  $I_{mL0}$ ,  $I_{mC0}$ , а на частоте  $n$ -й гармоники — токи  $I_{mn}$ ,  $I_{mLn}$ ,  $I_{mCn}$ , причем

$$k_0 = \frac{I_{m0}}{I_{mn}}, \quad k_L = \frac{I_{mL0}}{I_{mLn}}, \quad k_C = \frac{I_{mC0}}{I_{mCn}}. \quad (5.64)$$

Если  $k_L > k_0$  и  $k_C > k_0$ , то это и означает фильтрацию гармоник. Мерой такой фильтрации могут служить отношения коэффициентов (5.64):

$$F_L = \frac{k_L}{k_0} = \frac{I_{mL0}}{I_{m0}} \cdot \frac{I_{mn}}{I_{mLn}} \quad (5.65)$$

и

$$F_C = \frac{k_C}{k_0} = \frac{I_{mC0}}{I_{m0}} \cdot \frac{I_{mn}}{I_{mCn}}. \quad (5.66)$$

Эти параметры называются коэффициентами фильтрации.

Фильтрация гармоник обусловлена тем, что при резонансе, когда сопротивление двухполюсника максимально, получается максимальным и падение напряжения на нем. При этом ток в ветвях двухполюсника

$$I_{mL0} = I_{mC0} = \frac{R_0 I_{m0}}{\rho} = Q I_{m0}. \quad (5.67)$$

Здесь сопротивление ветвей двухполюсника при резонансе принято равным характеристическому сопротивлению в пренебрежении сопротивлениями потерь  $r_L$  и  $r_C$  (см. рис. 5.26, в). Так как обычно  $Q \gg 1$ , то при резонансе токи в ветвях двухполюсника существенно превышают ток самого двухполюсника:

$$\frac{I_{mL0}}{I_{m0}} = \frac{I_{mC0}}{I_{m0}} = Q. \quad (5.68)$$

При больших же расстройках, которые соответствуют частотам высших гармоник, сопротивление двухполюсника и падение напряжения на нем получаются малыми. При этом соответственно уменьшаются и токи в ветвях двухполюсника. Действительно, для высших гармоник

$$v_n = \frac{n\omega_0}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{n\omega_0} = n - \frac{1}{n} = \frac{n^2 - 1}{n}. \quad (5.69)$$



В этом случае  $\nu_n \gg d$  и согласно формулам (5.59) — (5.61)  $Z \approx |X| \gg R$ . Таким образом, пренебрегая в знаменателе формулы (5.60) величиной  $d^2$  в сравнении с  $\nu^2$ , получим

$$I_{mLn} \approx \frac{|X| I_{mn}}{n\omega_0 L} \approx \frac{I_{mn}}{n\nu_n}, \quad (5.70)$$

$$I_{mCn} \approx \frac{|X| I_{mn}}{\frac{1}{n\omega_0 C}} \approx \frac{n}{\nu_n} I_{mn}. \quad (5.71)$$

Сравнивая выражения (5.70) и (5.71) с формулой (5.67), находим, что резонансный ток в ветвях контура действительно получается значительно больше токов  $n$ -х гармоник. Степень этого выигрыша определяется коэффициентами фильтрации (5.65) и (5.66), значения которых можно найти с учетом формул (5.68) — (5.71).

Коэффициенты фильтрации получаются равными

$$F_L = Q(n^2 - 1), \quad F_C = Q \frac{n^2 - 1}{n^2}. \quad (5.72)$$

Таким образом, коэффициент фильтрации для индуктивной ветви двухполюсника получается в  $n^2$  раз больше, чем для емкостной ветви. Студентам предлагается самостоятельно дать объяснение такому различию в коэффициентах фильтрации.

#### 4. Многоэлементные двухполюсники с потерями

Потери в многоэлементном двухполюснике влияют на характеристики двухполюсника в области резонансов так же, как и в двухэлементных двухполюсниках. При этом резонансные частоты за счет влияния потерь несколько изменяются.

На основании сказанного, сопоставляя характеристики, приведенные на рис. 5.2, а и г и 5.20, 5.27, аналогичным образом изменяем характеристики многоэлементных двухполюсников (см. рис. 5.13). При этом для канонических схем с потерями получаем характеристики такого вида, как показано на рис. 5.29. Здесь римскими цифрами отмечены те же типы характеристик, что и в случае реактивных двухполюсников.

Соответственно с изменением сопротивлений  $R$  и  $X$  у многоэлементных диссипативных двухполюсников меняется и модуль сопротивления  $Z = \sqrt{R^2 + X^2}$ , который имеет минимум при последовательном резонансе и максимум при параллельном резонансе. Характеристики модуля сопротивления, соответствующие рис. 5.29, приведены на рис. 5.30.

Важно отметить, что в схеме с потерями сохраняются те же резонансы, что и в соответствующем реактивном двухполюснике, но только в тех случаях, когда добротность элементов диссипативного двухполюсника достаточно велика. Если добротность элементов мала, то отдельные резонансные максимумы характеристики будут

настолько притуплены, что в каноническом диссипативном двух-  
полюснике с  $n$  реактивными элементами может оказаться меньше  
чем  $n - 1$  резонансов.

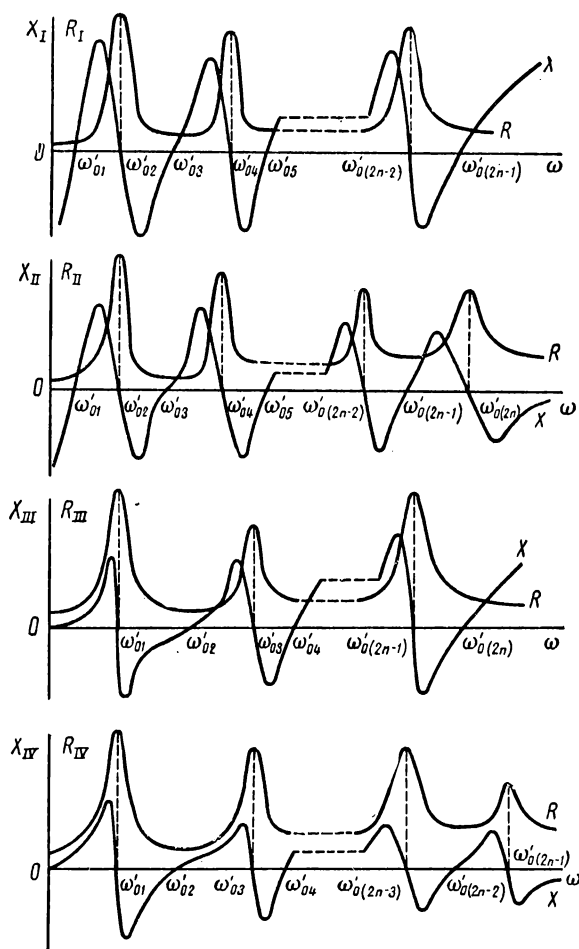


Рис. 5.29. Частотные характеристики составляющих  
сопротивления многоэлементных диссипативных двух-  
полюсников

Для примера рассмотрим четырехэлементный диссипативный  
двухполюсник с одинаковой настройкой последовательного и парал-  
лельного двухполюсников (рис. 5.31, а). В соответствии с рис. 5.2, а  
и 5.27 на рис. 5.31, б построены частотные характеристики реактив-  
ных сопротивлений  $X_1$  и  $X_2$  двухполюсников  $L_1C_1$  и  $L_2C_2$ . Пунктиром

здесь показано полное реактивное сопротивление четырехэлементного диссипативного двухполюсника.

Из рис. 5.31, б видно, что рассматриваемый канонический двухполюсник имеет три резонанса, как и должно быть при четырех реактивных элементах. При этом расстройкам  $\pm \Delta f_0$  соответствуют

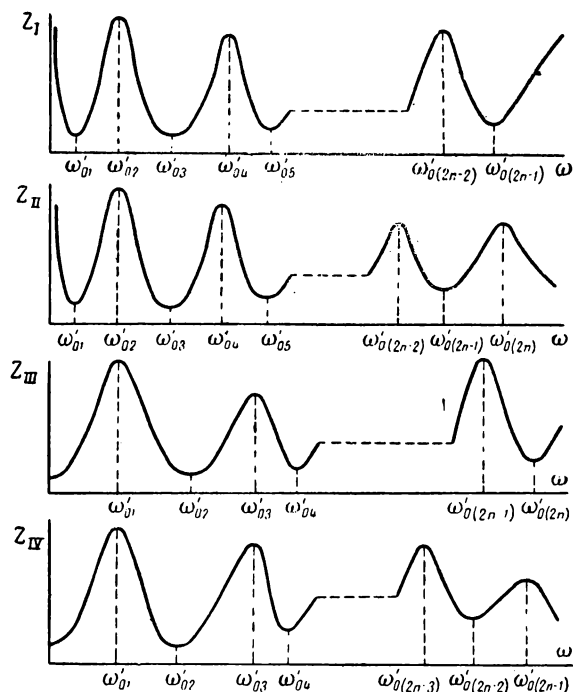


Рис. 5.30. Частотные характеристики модуля сопротивления многоэлементных диссипативных двухполюсников

последовательные резонансы, а нулевой расстройке — параллельный резонанс.

Пусть теперь увеличилось сопротивление потерь  $r_2$  или уменьшилось характеристическое сопротивление двухполюсника  $L_2 C_2$  при неизменной его настройке. При этом уменьшаются резонансное сопротивление (5.52) и соответственно крутизна характеристики  $X_2(\Delta f)$ , равная при нулевой расстройке  $\left| \frac{dX_2}{d\Delta f} \right|_{\Delta f=0} = \frac{2R_0 Q}{f_0}$ .

Если  $\left| \frac{dX_2}{d\Delta f} \right|_{\Delta f=0} < \left| \frac{dX_1}{d\Delta f} \right|_{\Delta f=0}$ , то компенсации реактивных сопротивлений не произойдет ни на каких частотах (рис. 5.31, в). В этом случае в схеме останется один последовательный резонанс при нулевой

расстройке, т. е. на той частоте, где был параллельный резонанс. Боковые же резонансы при этом исчезают.

Многоэлементные двухполюсники с потерями, помимо обычного использования в селективных системах, могут применяться в качестве резонансной системы, в которой при неизменной настройке осуществляется изменение резонансного сопротивления

двухполюсника. Такое изменение сопротивления может потребоваться, например, для согласования двухполюсника с источником напряжения в соответствии с условием (2.92).

На рис. 5.32, а показан двухполюсник, в котором регулировка сопротивления при резонансе осуществляется перемещением контакта вдоль витков катушки. Эквивалентная схема этого двухполюсника (с учетом влияния взаимной индукции на значения  $L_1$  и  $L_2$ ) изображена на рис. 5.32, б.

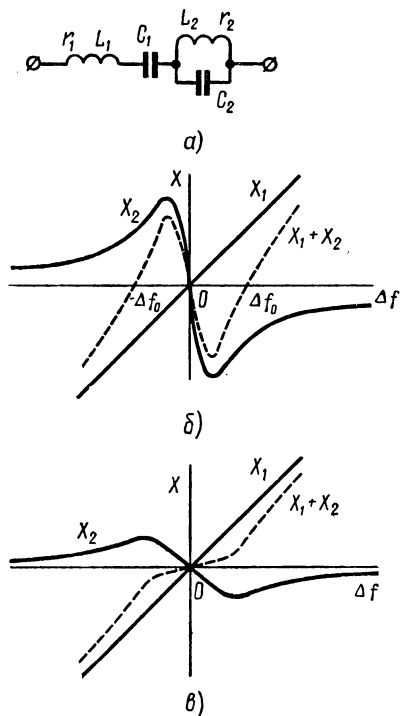


Рис. 5.31. Четырехэлементный двухполюсник с потерями и частотные характеристики его реактивного сопротивления

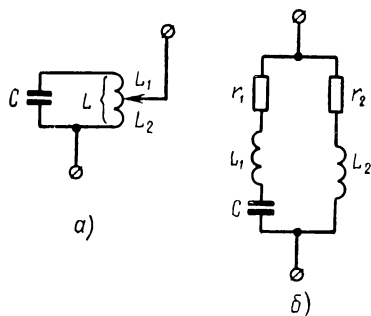


Рис. 5.32. Трехэлементный двухполюсник с потерями

Сопротивление рассматриваемого двухполюсника

$$\dot{Z} = \frac{(r_1 + jX_1)(r_2 + jX_2)}{r + j(X_1 + X_2)} \approx \frac{-X_1 X_2}{r + j(X_1 + X_2)},$$

где  $X_1$  — реактивное сопротивление левой ветви;  
 $X_2$  — реактивное сопротивление правой ветви;  
 $r = r_1 + r_2$  — полное сопротивление потерь двухполюсника.  
 При резонансе  $X_1 + X_2 = 0$  и  $X_2 = -X_1 X_0 = \omega_0 L_2$ .

Отсюда получаем резонансное сопротивление

$$\dot{Z}_0 = R_0' = \frac{X_0^2}{r} = \frac{\omega_0^2 L_2^2}{r}. \quad (5.73)$$

При крайнем верхнем положении контакта (см. рис. 5.32, а) согласно формулам (5.73) и (5.52)

$$\dot{Z}_0 = R_0 = \frac{\omega_0^2 L^2}{r}. \quad (5.74)$$

Введя обозначение

$$k = \frac{L_2}{L}, \quad (5.75)$$

из соотношений (5.73), (5.74) находим расчетную формулу

$$R_0' = k^2 R_0. \quad (5.76)$$

Следует отметить, что при перемещении контакта по виткам катушки (см. рис. 5.32, а) соотношение между индуктивностями и сопротивлениями потерь меняется неодинаково. Можно считать, что индуктивность пропорциональна квадрату числа витков  $w$ , а сопротивление потерь пропорционально числу витков катушки:

$$L = a_0 w^2, \quad L_1 = a w_1^2, \quad L_2 = a w_2^2, \quad (5.77)$$

$$r = a' w, \quad r_1 = a' w_1, \quad r_2 = a' w_2. \quad (5.78)$$

Здесь  $a \neq a_0$ , поскольку индуктивности  $L_1$  и  $L_2$  определяются с учетом взаимной индукции между витками  $w_1$  и  $w_2$ .

Отсюда с учетом равенств  $L = L_1 + L_2$ ,  $w = w_1 + w_2$  и обозначения (5.75) получаем

$$\frac{r_2}{r} = \frac{\sqrt{k}}{\sqrt{k} + \sqrt{1-k}}. \quad (5.79)$$

Это соотношение может быть использовано при расчетах двухполюсника с регулируемым резонансным сопротивлением.

## 5. Понятие о синтезе диссипативных двухполюсников

Количественный анализ характеристик диссипативных многоэлементных двухполюсников возможен при использовании уравнения (5.23), в котором элементы определителей (5.24) должны быть заменены на

$$p\dot{Z}_{kl} = p \left( R_{kl} + L_{kl}p + \frac{1}{C_{kl}p} \right),$$

или

$$p\dot{Z}_{kl} = L_{kl}p^2 + R_{kl}p + \frac{1}{C_{kl}}. \quad (5.80)$$

Таким образом, вместо реактансной функции сопротивление двухполюсника описывается дробно-рациональной функцией, числитель и знаменатель которой

содержат как четные, так и нечетные полиномы. Например, для сопротивления первого типа, учитывая соотношение (5.80), вместо уравнения (5.25) получаем

$$\dot{Z}_1 = \frac{P_1 + Q_1}{P_2 + Q_2}, \quad (5.81)$$

где

$$\begin{aligned} P_1 &= a_{2n}p^{2n} + a_{2(n-1)}p^{2(n-1)} + \dots + a_2p^2 + a_0, \\ Q_1 &= a_{2n-1}p^{2n-1} + a_{2n-3}p^{2n-3} + \dots + a_3p^3 + a_1p, \\ P_2 &= b_{2(n-1)}p^{2(n-1)} + b_{2(n-2)}p^{2(n-2)} + \dots + b_2p^2 + b_0, \\ Q_2 &= b_{2n-1}p^{2n-1} + b_{2n-3}p^{2n-3} + \dots + b_3p^3 + b_1p. \end{aligned} \quad (5.82)$$

При заданной функции сопротивления вида (5.81) определение параметров канонической схемы с потерями можно осуществить так же, как и в случае синтеза реактивных двухполосников. Разложив заданную функцию сопротивления в цепную дробь, по коэффициентам этой дроби можно определить искомые параметры.

Однако при этом возникает один весьма существенный вопрос. Если для реактивных двухполосников известны необходимые требования к реактансной функции, то в случае диссипативного двухполосника неизвестно, любая ли функция вида (5.81) годится для описания сопротивления этого двухполосника. Ведь при произвольно заданных коэффициентах в полиномах (5.82) функция (5.81) может оказаться физически нереализуемой. Поэтому уточним, каким условиям должно удовлетворять комплексное сопротивление, чтобы двухполосник с таким сопротивлением мог быть физически реализован.

С этой целью рассмотрим ток в произвольном контуре двухполосника, определяемый соотношением (3.17). Если к пассивному двухполоснику не подключены никакие источники ( $\dot{E}_{mk} = 0$ ), то контурный определитель (3.19) равен нулю и соответственно равен нулю ток (3.17). Предположим теперь, что вследствие каких-либо причин контурные токи в пассивном двухполоснике отличны от нуля, хотя источники отсутствуют. Такой причиной может явиться, например, энергия, оставшаяся в реактивных элементах после отключения источников, или тепловое движение зарядов в элементах двухполосника.

Токи, существующие при этих условиях, могут быть определены по уравнению (3.17), хотя определитель (3.19) и равен нулю. При этом возможен двоякий подход к решению задачи. Во-первых, действие указанных причин можно отобразить введением некоторых эквивалентных источников; в этом случае контурный определитель (3.19) станет отличным от нуля. Во-вторых, можно считать, что ток (3.17) отличен от нуля при равенстве нулю контурного определителя (3.19). Это возможно только тогда, когда равен нулю и определитель сопротивлений (3.18). При этом для определения тока получается неопределенность вида  $\frac{0}{0}$ . Этот ток может иметь некоторое конечное значение, что согласуется с математическим толкованием указанной неопределенности\*.

Итак, используя второй способ решения поставленной задачи, приходим к выводу, что определитель двухполосника  $\Delta_Z$  и соответственно его сопротивление (5.17) должны равняться нулю. Для сопротивления (5.81) первого типа это означает соблюдение следующего условия:

$$a_{2n}p^{2n} + a_{2n-1}p^{2n-1} + \dots + a_2p^2 + a_1p + a_0 = 0. \quad (5.83)$$

---

\* Математическая интерпретация рассматриваемого вопроса заключается в следующем. При равенстве нулю определителей (3.18) и (3.19) система однородных уравнений (3.13) является неполной, т. е. не все уравнения (3.13) можно считать взаимно независимыми. Такая система уравнений допускает бесконечное множество решений, отличных от нуля.

Выражение (5.83) называется характеристическим уравнением двухполосника. Корни характеристического уравнения соответствуют резонансам в двухполоснике, когда сопротивление (5.81) обращается в нуль. Однако сопротивление диссипативного двухполосника при резонансе отличается от нуля, как было показано выше. Получается противоречие, разрешающееся очень просто, если учесть, что отсутствие нулей сопротивления, т. е. отсутствие мнимых частот (5.18), на которых сопротивление (5.81) обращается в нуль, может означать, что корни характеристического уравнения (5.83) являются комплексными величинами:

$$p = \sigma + j\omega. \quad (5.84)$$

Таким образом, приходим к понятию комплексной частоты, которое является дальнейшим обобщением понятия мнимой частоты (5.18). Для выяснения смысла комплексной частоты предположим, что в диссипативном двухполоснике найден некоторый ток с комплексной амплитудой

$$i_m = I_m e^{j\psi}. \quad (5.85)$$

При отсутствии источников частота этого тока определяется параметрами самого двухполосника. Пусть эта частота равна одной из найденных резонансных частот:

$$p_0 = \sigma_0 + j\omega_0. \quad (5.86)$$

Согласно символическому методу из соотношений (5.85), (5.86) находим символическое отображение тока

$$i = i_m e^{p_0 t} = I_m e^{\sigma_0 t} e^{j(\omega_0 t + \psi)},$$

которому соответствует мгновенное значение тока

$$i = I_m e^{\sigma_0 t} \cos(\omega_0 t + \psi). \quad (5.87)$$

Таким образом, в описываемом случае вместо гармонических колебаний получается косинусоидальный ток (5.87), амплитуда которого изменяется во

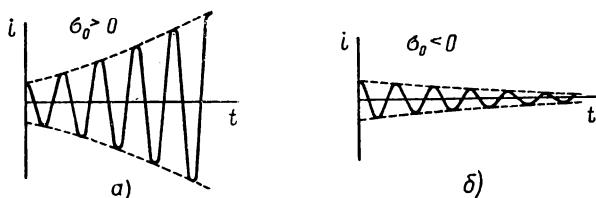


Рис. 5.33. Экспоненциальное изменение амплитуды косинусоидальных колебаний

времени по экспоненциальному закону. В зависимости от знака  $\sigma_0$  при этом получаются колебания или нарастающие по экспоненте (рис. 5.33, а), или убывающие (затухающие) по экспоненте (рис. 5.33, б). В цепи, не содержащей источников энергии, нарастание колебаний лишено физического смысла. В такой диссипативной цепи накопленный запас энергии может лишь расходоваться. При этом колебания, возникающие по любой причине, могут только затухать. Следовательно, величина  $\sigma_0$  должна быть отрицательной. Отсюда можно сделать, по крайней мере, два вывода.

Во-первых, наличие вещественной части комплексной частоты (5.84) свидетельствует о наличии потерь в цепи, приводящих к затуханию колебаний при отсутствии источников энергии. Тем самым объясняется смысл комплексной частоты.

Во-вторых, можно сделать вывод об условиях физической реализуемости заданной функции сопротивления диссипативного двухполосника: все нули

этой дробно-рациональной функции, т. е. все корни характеристического уравнения (5.83) должны быть комплексными и иметь отрицательную вещественную часть:

$$\sigma_{0k} < 0. \quad (5.88)$$

Однако этот критерий является не единственным условием физической реализуемости диссипативного двухполюсника. Все приведенные выше рассуждения можно повторить в отношении проводимости  $\dot{Y}_1 = \frac{1}{\dot{Z}_1}$ , рассматривая не токи,

а напряжения в цепи, воспользовавшись при этом методом узловых напряжений вместо метода контурных токов. Тогда придем ко второму характеристическому уравнению

$$b_{2n-1}p^{2n-1} + b_{2(n-1)}p^{2n-2} + \dots + b_2p^2 + b_1p + b_0 = 0, \quad (5.89)$$

комплексные корни которого определяют нули проводимости, т. е. полюсы сопротивления (5.81). Указанные корни также должны удовлетворять условию (5.88).

Таким образом, можно сделать окончательный вывод об условиях физической реализуемости заданной дробно-рациональной функции сопротивления диссипативного двухполюсника: все нули и полюсы этой функции должны быть комплексными величинами с отрицательными вещественными частями. Другими словами, корни характеристических уравнений (5.83), (5.89) физически реализуемого диссипативного двухполюсника должны удовлетворять условию (5.88).

Проверка критерия (5.88) может производиться различными способами. Одним из них является использование теоремы Гурвица, которая приводится в специальной литературе.

Пожалуй, наиболее простым способом проверки физической реализуемости заданной функции сопротивления (5.81) можно считать исследование дробей  $\frac{Q_1}{P_1}$  и  $\frac{Q_2}{P_2}$ . Если указанные дроби являются реактансными функциями, то это свидетельствует о соблюдении условия (5.88).



# Г Л А В А 6

## ОСНОВЫ ТЕОРИИ ЧЕТЫРЕХПОЛЮСНИКОВ

### § 6.1. МАТРИЧНЫЙ МЕТОД ИССЛЕДОВАНИЯ ЧЕТЫРЕХПОЛЮСНИКОВ

#### 1. Виды матриц четыреxpолyсников

Одним из методов исследования и расчета многополyсников ( $2n$ -полyсников) является матричный метод.

Рассмотрим применение матричного метода для исследования и расчета четырехполyсника.

Левые зажимы четырехполyсника будем считать входными, а правые — выходными. Четыреxpолyсник однозначно описывается входными и выходными напряжениями и токами, для которых примем обозначения и положительные направления в соответствии с рис. 6.1.

Между входными и выходными напряжениями и токами четырехполyсника существует определенная функциональная связь. Например, если заданы напряжения на зажимах четырехполyсника, то при известных схеме и параметрах элементов четырехполyсника можно определить его входной и выходной токи. В случае пассивных четырехполyсников, которые рассматриваются ниже, для мгновенных значений напряжений и токов указанная функциональная зависимость в общем виде может быть выражена следующим образом:

$$\begin{aligned} i_1 &= i_1(u_1, u_2), \\ i_2 &= i_2(u_1, u_2). \end{aligned} \quad (6.1)$$

Вид этих функциональных зависимостей определяется схемой четырехполyсника, однако их можно конкретизировать и не зная схемы четырехполyсника.

Если четырехполyсник линейный, то вместо соотношений (6.1) можно сразу рассмотреть связь между комплексными амплитудами токов и напряжений, показанными на рис. 6.1:

$$\begin{aligned} I_{m1} &= I_{m1}(\dot{U}_{m1}, \dot{U}_{m2}), \\ I_{m2} &= I_{m2}(\dot{U}_{m1}, \dot{U}_{m2}). \end{aligned} \quad (6.2)$$

Вид этой связи легко устанавливается методом наложения. Заменяем падения напряжений  $\dot{U}_{m1}$ ,  $\dot{U}_{m2}$  задающими напряжениями  $\dot{E}_{m1} = \dot{U}_{m1}$ ,  $\dot{E}_{m2} = -\dot{U}_{m2}$  (последняя замена соответствует теореме компенсации). Тогда согласно соотношениям (3.29), (3.30)

$$i_{m1} = \frac{\dot{E}_{m1}}{\dot{Z}_{(11)}} + \frac{\dot{E}_{m2}}{\dot{Z}_{(21)}}, \quad (6.3)$$

$$i_{m2} = \frac{\dot{E}_{m1}}{\dot{Z}_{(12)}} + \frac{\dot{E}_{m2}}{\dot{Z}_{(22)}}.$$

Здесь  $\dot{Z}_{(12)}$ ,  $\dot{Z}_{(21)}$  — соответствующие сопротивления передачи, определяемые по формуле (3.31);

$\dot{Z}_{(11)}$ ,  $\dot{Z}_{(22)}$  — соответствующие входные сопротивления четырехполюсника.

Учитывая значения  $\dot{E}_{m1} = \dot{U}_{m1}$ ,  $\dot{E}_{m2} = -\dot{U}_{m2}$ , введем для сокращения записи обозначения

$$y_{11} = \frac{1}{\dot{Z}_{(11)}}, \quad y_{12} = -\frac{1}{\dot{Z}_{(21)}},$$

$$y_{21} = \frac{1}{\dot{Z}_{(12)}}, \quad y_{22} = -\frac{1}{\dot{Z}_{(22)}}.$$

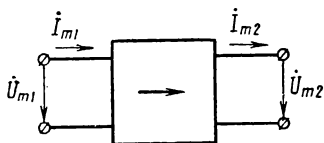


Рис. 6.1. Основные обозначения в четырехполюснике

Эти параметры, имеющие смысл не-  
которых проводимостей, называются па-  
раметрами четырехполюсника. Пара-  
метры четырехполюсника являются в общем случае комплекс-  
ными величинами, но для удобства записи в их обозначениях точки  
опущены.

Согласно принятым обозначениям уравнения (6.3) можно пере-  
писать в окончательном виде:

$$i_{m1} = y_{11}\dot{U}_{m1} + y_{12}\dot{U}_{m2}, \quad (6.4)$$

$$i_{m2} = y_{21}\dot{U}_{m1} + y_{22}\dot{U}_{m2}.$$

Уравнения четырехполюсника (6.4) могут быть также записаны  
символически в виде таблиц параметров, которые называются  
матрицами:

$$\begin{bmatrix} i_{m1} \\ i_{m2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_{11} & y_{12} \\ y_{21} & y_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{U}_{m1} \\ \dot{U}_{m2} \end{bmatrix}, \quad (6.5)$$

где

$$[y] = \begin{bmatrix} y_{11} & y_{12} \\ y_{21} & y_{22} \end{bmatrix} \quad (6.6)$$

— квадратная матрица проводимостей четырехполюсника;

$$[i_m] = \begin{bmatrix} i_{m1} \\ i_{m2} \end{bmatrix} \quad (6.7)$$

— матрица-столбец токов четырехполюсника;

$$[U_m] = \begin{bmatrix} \dot{U}_{m1} \\ \dot{U}_{m2} \end{bmatrix} \quad (6.8)$$

— матрица-столбец напряжений четырехполюсника.

Смысл матричной записи уравнений раскрывается ниже, а пока отметим, что, помимо матрицы проводимостей (6.6), существуют другие виды матриц четырехполюсника.

Например, если в уравнениях (6.4) токи считать известными величинами, а напряжения — неизвестными, то, решив эти уравнения относительно напряжений, получим

$$\begin{aligned} \dot{U}_{m1} &= \frac{y_{22}}{|y|} i_{m1} - \frac{y_{12}}{|y|} i_{m2}, \\ \dot{U}_{m2} &= -\frac{y_{21}}{|y|} i_{m1} + \frac{y_{11}}{|y|} i_{m2}, \end{aligned} \quad (6.9)$$

где

$$|y| = \begin{vmatrix} y_{11} & y_{12} \\ y_{21} & y_{22} \end{vmatrix} \quad (6.10)$$

— определитель системы уравнений (6.4), называемый также определителем матрицы  $[y]$ .

Уравнения (6.9) можно переписать в новых обозначениях:

$$\begin{aligned} \dot{U}_{m1} &= z_{11} i_{m1} + z_{12} i_{m2}, \\ \dot{U}_{m2} &= z_{21} i_{m1} + z_{22} i_{m2}, \end{aligned} \quad (6.9a)$$

где

$$z_{11} = \frac{y_{22}}{|y|}, \quad z_{12} = -\frac{y_{12}}{|y|}, \quad z_{21} = -\frac{y_{21}}{|y|}, \quad z_{22} = \frac{y_{11}}{|y|}. \quad (6.11)$$

Аналогично уравнениям (6.4) система уравнений (6.9a) может быть представлена в матричной форме:

$$[\dot{U}_m] = [z] [I_m], \quad (6.12)$$

где

$$[z] = \begin{bmatrix} z_{11} & z_{12} \\ z_{21} & z_{22} \end{bmatrix} \quad (6.13)$$

— матрица сопротивлений четырехполюсника.

Удобной является такая форма записи уравнений четырехполюсника, при которой входные переменные величины четырехполюсника выражаются через выходные величины. Полагая в уравнениях (6.4) и (6.9a)  $\dot{U}_{m2}$  и  $i_{m2}$  известными величинами, решим эти уравнения относительно неизвестных величин  $\dot{U}_{m1}$  и  $i_{m1}$ . Тогда

уравнения четырехполюсника могут быть представлены в следующем виде:

$$\begin{aligned} m_1 &= a_{11} \dot{U}_{m2} + a_{12} \dot{I}_{m2}, \\ \dot{I}_{m1} &= a_{21} \dot{U}_{m2} + a_{22} \dot{I}_{m2}. \end{aligned} \quad (6.14)$$

Как и прежде, система уравнений (6.14) может быть записана в матричной форме:

$$\begin{bmatrix} \dot{U}_{m1} \\ \dot{I}_{m1} \end{bmatrix} = [a] \begin{bmatrix} \dot{U}_{m2} \\ \dot{I}_{m2} \end{bmatrix}, \quad (6.15)$$

где

$$[a] = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \quad (6.16)$$

— цепочечная матрица четырехполюсника.

Связь коэффициентов (элементов)  $a_{kl}$  цепочечной матрицы с элементами матриц проводимостей и сопротивления устанавливается при указанном решении уравнений (6.4) и (6.9а). Эта связь может быть выражена в матричной форме, если учесть, что различные матрицы равны друг другу при равенстве одноименных матричных коэффициентов. В такой же матричной форме могут быть выражены и равенства (6.11), а также другие соотношения между матричными элементами, получаемые при решении уравнений (6.9а) и (6.14):

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{y_{22}}{y_{21}} & \frac{1}{y_{21}} \\ -\frac{|y|}{y_{21}} & \frac{y_{11}}{y_{21}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{z_{11}}{z_{21}} & -\frac{|z|}{z_{21}} \\ \frac{1}{z_{21}} & -\frac{z_{22}}{z_{21}} \end{bmatrix}, \quad (6.17)$$

$$\begin{bmatrix} z_{11} & z_{12} \\ z_{21} & z_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{y_{22}}{|y|} & -\frac{y_{12}}{|y|} \\ -\frac{y_{21}}{|y|} & \frac{y_{11}}{|y|} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{a_{11}}{a_{21}} & -\frac{|a|}{a_{21}} \\ \frac{1}{a_{21}} & -\frac{a_{22}}{a_{21}} \end{bmatrix}, \quad (6.18)$$

$$\begin{bmatrix} y_{11} & y_{12} \\ y_{21} & y_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{z_{22}}{|z|} & -\frac{z_{12}}{|z|} \\ -\frac{z_{21}}{|z|} & \frac{z_{11}}{|z|} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{a_{22}}{a_{12}} & -\frac{|a|}{a_{12}} \\ \frac{1}{a_{12}} & -\frac{a_{11}}{a_{12}} \end{bmatrix}. \quad (6.19)$$

Здесь

$$|z| = \begin{vmatrix} z_{11} & z_{12} \\ z_{21} & z_{22} \end{vmatrix} \quad (6.20)$$

— определитель матрицы сопротивлений (6.13);

$$|a| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} \quad (6.21)$$

— определитель цепочечной матрицы (6.16).

## 2. Основные действия с матрицами

Из сопоставления уравнений (6.4), (6.9а), (6.14) с матричными уравнениями (6.5), (6.12), (6.15) видно, что под умножением матриц в правой части матричных уравнений следует понимать операцию, производимую по специальному правилу.

Это правило, называемое правилом умножения строки на столбец, заключается в следующем. Для получения, например, первого уравнения (6.4) следует в уравнении (6.5) первую строку левой перемножаемой матрицы  $[y]$  поэлементно умножить на столбец правой перемножаемой матрицы  $[\dot{U}_m]$ : первый элемент  $y_{11}$  — на первый элемент  $\dot{U}_{m1}$ , второй элемент  $y_{12}$  — на второй элемент  $\dot{U}_{m2}$ . Затем полученные поэлементные произведения складываются.

Аналогично для получения второго уравнения (6.4) вторая строка матрицы  $[y]$  поэлементно умножается на матрицу-столбец  $[\dot{U}_m]$ .

Рассмотренное правило умножения строки на столбец распространяется и на случай перемножения квадратных матриц. При этом поэлементное умножение  $k$ -й строки левой перемножаемой матрицы на  $l$ -й столбец правой перемножаемой матрицы дает коэффициент  $\alpha_{kl}$  новой матрицы. Например, при перемножении двух цепочечных матриц в соответствии с рассмотренным правилом получим:

$$\begin{bmatrix} a'_{11} & a'_{12} \\ a'_{21} & a'_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a''_{11} & a''_{12} \\ a''_{21} & a''_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a'_{11}a''_{11} + a'_{12}a''_{21} & a'_{11}a''_{12} + a'_{12}a''_{22} \\ a'_{21}a''_{11} + a'_{22}a''_{21} & a'_{21}a''_{12} + a'_{22}a''_{22} \end{bmatrix}. \quad (6.22)$$

Это матричное произведение можно записать также в такой форме:

$$[a] = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} = [a'] [a''] = \begin{bmatrix} a'_{11}a''_{11} + a'_{12}a''_{21} & a'_{11}a''_{12} + a'_{12}a''_{22} \\ a'_{21}a''_{11} + a'_{22}a''_{21} & a'_{21}a''_{12} + a'_{22}a''_{22} \end{bmatrix}, \quad (6.23)$$

где

$$[a'] = \begin{bmatrix} a'_{11} & a'_{12} \\ a'_{21} & a'_{22} \end{bmatrix}, \quad [a''] = \begin{bmatrix} a''_{11} & a''_{12} \\ a''_{21} & a''_{22} \end{bmatrix}. \quad (6.24)$$

Следует подчеркнуть, что в соответствии с правилом умножения строки на столбец в произведении матриц множители нельзя менять местами, так как

$$[a'] [a''] \neq [a''] [a']. \quad (6.25)$$

В отличие от произведения матриц при умножении матрицы на число, под которым понимается умножение всех матричных коэффициентов на это число, множители можно менять местами:

$$\alpha [a] = [a] \alpha = \begin{bmatrix} \alpha a_{11} & \alpha a_{12} \\ \alpha a_{21} & \alpha a_{22} \end{bmatrix}. \quad (6.26)$$

Вясним смысл умножения матриц. При умножении цепочечной матрицы на число  $\alpha$  представляет интерес случай  $\alpha = -1$ . Как видно из уравнений (6.14) и (6.26), такое изменение знака цепочечной матрицы означает изменение на угол  $\pi$  фазы напряжения и тока на входе или на выходе четырехполюсника. Это эквивалентно скрещиванию полюсов четырехполюсника на входе или на выходе, как показано на рис. 6.2. Отсюда также следует, что при одновременном скрещивании полюсов на входе и на выходе четырехполюсника (рис. 6.2, *г*) его матрица не меняется.

Покажем теперь, что перемножение цепочечных матриц соответствует цепочечному соединению четырехполюсников (рис. 6.3).

Рассматриваемые четырехполюсники имеют матрицы (6.24) и, следовательно, описываются уравнениями

$$\begin{aligned} \dot{U}_{m1} &= a'_{11} \dot{U}_{m2} + a'_{12} \dot{I}_{m2}, \\ \dot{I}_{m1} &= a'_{21} \dot{U}_{m2} + a'_{22} \dot{I}_{m2} \end{aligned} \quad (6.27)$$

и

$$\begin{aligned} \dot{U}''_{m1} &= a''_{11} \dot{U}''_{m2} + a''_{12} \dot{I}''_{m2}, \\ \dot{I}''_{m1} &= a''_{21} \dot{U}''_{m2} + a''_{22} \dot{I}''_{m2}. \end{aligned} \quad (6.28)$$

Из рис. 6.3 видно, что  $\dot{U}_{m2} = \dot{U}''_{m1}$  и  $\dot{I}_{m2} = \dot{I}''_{m1}$ . Подставив эти значения напряжения и тока из соотношений (6.28) в уравнения (6.27), получим:

$$\begin{aligned} \dot{U}_{m1} &= a'_{11} (a''_{11} \dot{U}_{m2} + a''_{12} \dot{I}_{m2}) + a'_{12} (a''_{21} \dot{U}_{m2} + a''_{22} \dot{I}_{m2}), \\ \dot{I}_{m1} &= a'_{21} (a''_{11} \dot{U}_{m2} + a''_{12} \dot{I}_{m2}) + a'_{22} (a''_{21} \dot{U}_{m2} + a''_{22} \dot{I}_{m2}), \end{aligned}$$

или

$$\begin{aligned} \dot{U}_{m1} &= (a'_{11}a''_{11} + a'_{12}a''_{21}) \dot{U}_{m2} + (a'_{11}a''_{12} + a'_{12}a''_{22}) \dot{I}_{m2}, \\ \dot{I}_{m1} &= (a'_{21}a''_{11} + a'_{22}a''_{21}) \dot{U}_{m2} + (a'_{21}a''_{12} + a'_{22}a''_{22}) \dot{I}_{m2}. \end{aligned} \quad (6.29)$$

Приняв  $\dot{U}_{m1} = \dot{U}_{m1}$ ,  $\dot{I}_{m1} = \dot{I}_{m1}$  и  $\dot{U}_{m2} = \dot{U}_{m2}$ ,  $\dot{I}_{m2} = \dot{I}_{m2}$ , систему уравнений (6.29) можно записать в матричной форме (6.15), где матрица (6.16) определяется соотношениями (6.23).

Таким образом, два цепочно соединенные четырехполюсника (см. рис. 6.3) могут быть заменены одним эквивалентным четырехполюсником (см. рис. 6.1), цепочечная матрица (6.23) которого равна произведению цепочечных матриц (6.24) исходных четырехполюсников.

Аналогично доказывается, что параллельно соединенные четырехполюсники (рис. 6.4) можно

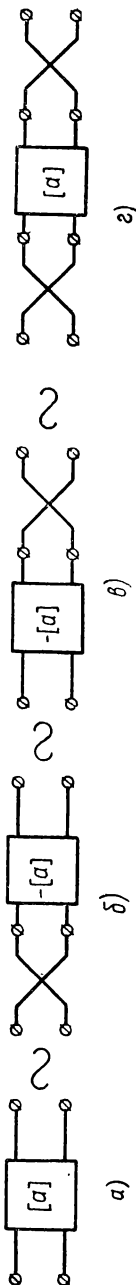


Рис. 6.2. Скрещивание полюсов четырехполюсника

заменить одним эквивалентным четырехполусником, матрица проводимостей которого равна сумме матриц проводимостей исходных четырехполусников. При этом под сложением матриц понимается сложение их одноименных элементов:

$$[y] = \begin{bmatrix} y_{11} & y_{12} \\ y_{21} & y_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y'_{11} & y'_{12} \\ y'_{21} & y'_{22} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} y''_{11} & y''_{12} \\ y''_{21} & y''_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y'_{11} + y''_{11} & y'_{12} + y''_{12} \\ y'_{21} + y''_{21} & y'_{22} + y''_{22} \end{bmatrix}. \quad (6.30)$$

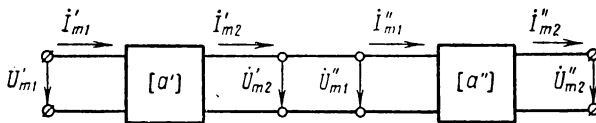


Рис. 6.3. Цепочное соединение четырехполусников

Это правило сложения матриц проводимостей вытекает из соотношений между напряжениями и токами (см. рис. 6.4):

$$\begin{aligned} \dot{U}'_{m1} = \dot{U}''_{m1} = \dot{U}_{m1}, \quad \dot{U}'_{m2} = \dot{U}''_{m2} = \dot{U}_{m2}, \\ \dot{I}'_{m1} + \dot{I}''_{m1} = \dot{I}_{m1}, \quad \dot{I}'_{m2} + \dot{I}''_{m2} = \dot{I}_{m2}. \end{aligned} \quad (6.31)$$

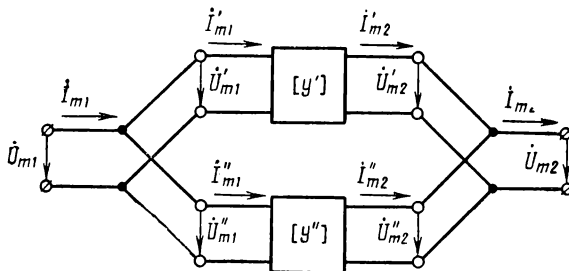


Рис. 6.4. Параллельное соединение четырехполусников

При последовательном соединении четырехполусников, показанном на рис. 6.5, складываются их матрицы сопротивлений:

$$[z] = \begin{bmatrix} z_{11} & z_{12} \\ z_{21} & z_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} z'_{11} & z'_{12} \\ z'_{21} & z'_{22} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} z''_{11} & z''_{12} \\ z''_{21} & z''_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} z'_{11} + z''_{11} & z'_{12} + z''_{12} \\ z'_{21} + z''_{21} & z'_{22} + z''_{22} \end{bmatrix}. \quad (6.32)$$

Это правило сложения также вытекает из соотношений между токами и напряжениями (см. рис. 6.5):

$$\begin{aligned} \dot{U}'_{m1} + \dot{U}''_{m1} = \dot{U}_{m1}, \quad \dot{U}'_{m2} + \dot{U}''_{m2} = \dot{U}_{m2}, \\ \dot{I}'_{m1} = \dot{I}''_{m1} = \dot{I}_{m1}, \quad \dot{I}'_{m2} = \dot{I}''_{m2} = \dot{I}_{m2}. \end{aligned} \quad (6.33)$$

Свойства (6.31), (6.33) и обусловили название рассмотренных типов соединений четырехполусников по аналогии с соответствующими соединениями двухполусников.

Из рис. 6.4 и 6.5 видно, что параллельное и последовательное соединение четырехполусников означает их параллельное и последовательное соединение как на входе, так и на выходе. Возможны

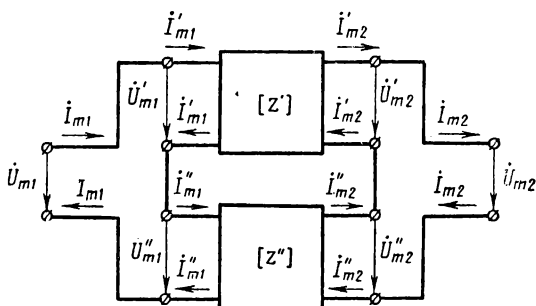


Рис. 6.5. Последовательное соединение четырехполусников

также комбинированные соединения четырехполусников на входе и на выходе (последовательно-параллельное и параллельно-последовательное). Таким комбинированным соединениям соответствует сложение специальных матриц, которые здесь не рассматриваются.

### 3. Матрицы простейших четырехполусников

Во многих случаях сложные цепи могут быть представлены в виде различных соединений простейших четырехполусников. Если знать матрицы этих четырехполусников, то по правилам, установленным выше, можно найти и матрицу сложной цепи как четырехполусника. Зная же матрицу этой цепи, можно рассчитать напряжения и токи по основным уравнениям четырехполусника, проанализировать свойства этой цепи и т. д. В этом и заключается матричный метод исследования и расчета цепей.

Таким образом, решение задачи расчета сводится к определению матриц различных четырехполусников. Определение матриц в простейших случаях можно производить, составляя основные уравнения четырехполусника (6.4) и (6.9а) или (6.14) с помощью законов Ома и Кирхгофа. Задача определения матриц еще больше упрощается, если установить смысл матричных коэффициентов.

Для этого надо двухполусник поставить в режим холостого хода ( $i_{m2} = 0$ ) или короткого замыкания ( $U_{m2} = 0$ ), как пока-



зано на рис. 6.6, а и б. Тогда из уравнений (6.14) устанавливается смысл коэффициентов цепочечной матрицы. Полагая  $i_{m2} = 0$  или  $\dot{U}_{m2} = 0$ , получим:

$$a_{11} = \frac{\dot{U}_{m1xx}}{\dot{U}_{m2xx}}, \quad a_{12} = \frac{\dot{U}_{m1kз}}{\dot{U}_{m2kз}}, \quad a_{21} = \frac{i_{m1xx}}{\dot{U}_{m2xx}}, \quad a_{22} = \frac{i_{m1kз}}{\dot{U}_{m2kз}}. \quad (6.34)$$

Таким образом, элемент матрицы  $a_{11}$  является коэффициентом трансформации (изменения) напряжения в режиме холостого хода,  $a_{12}$  — сопротивлением передачи в режиме короткого замыкания,  $a_{21}$  — проводимостью передачи в режиме холостого хода и  $a_{22}$  — коэффициентом трансформации тока в режиме короткого замыкания.

Аналогично устанавливается смысл коэффициентов матриц сопротивлений и проводимостей. При этом режим холостого хода

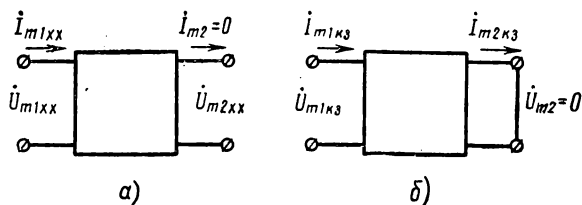


Рис. 6.6. Режимы холостого хода и короткого замыкания четырехполюсников

или короткого замыкания надо осуществлять не только на выходе, но и на входе четырехполюсника, изменив, разумеется, направление передачи.

Пользуясь свойствами (6.34), определим матрицы элементарных четырехполюсников, изображенных на рис. 6.7.

Нетрудно видеть, что для последовательного элементарного четырехполюсника (рис. 6.7, а) в режиме холостого хода ( $i_{m2} = 0$ )  $i_{m1xx} = 0$  и  $\dot{U}_{m1xx} = \dot{U}_{m2xx}$ , а в режиме короткого замыкания ( $\dot{U}_{m2} = 0$ )  $i_{m1kз} = i_{m2kз}$  и  $\dot{U}_{m1kз} = Z i_{m2kз}$ . Отсюда в соответствии с равенствами (6.34) находим цепочечную матрицу рассматриваемого четырехполюсника:

$$[a] = \begin{bmatrix} 1 & Z \\ 0 & 1 \end{bmatrix}. \quad (6.35)$$

Аналогично находим цепочечную матрицу параллельного элементарного четырехполюсника (рис. 6.7, б):

$$[a] = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ \dot{Y} & 1 \end{bmatrix}, \quad (6.36)$$

где  $\dot{Y} = \frac{1}{Z}$ .

Другие виды матриц элементарных четырехполюсников находят из уравнений связи (6.18) и (6.19) с помощью цепочечных матриц (6.35) и (6.36). Эти матрицы приведены в табл. П.1\*.

Как указывалось, матрицы более сложных четырехполюсников можно получить, разбивая их на элементарные четырехполюсники. Например, четырехполюсник 3 в табл. П.1 представляет собой цепочечное соединение последовательного и параллельного элементарных четырехполюсников. Поэтому его цепочечную матрицу можно найти, перемножив матрицы (6.35) и (6.36). Остальные типы матриц этого четырехполюсника определяются из уравнений связи (6.18) и (6.19). Аналогично путем перемножения цепочечных матриц соответствующих элементарных четырехполюсников определяются и матрицы четырехполюсников 4—8 в табл. П.1.

Для определения матриц четырехполюсника 9 в табл. П.1 он также разбивается на элементарные четырехполюсники, как показано на рис. 6.8. Сначала четырехполюсник 9 представляется

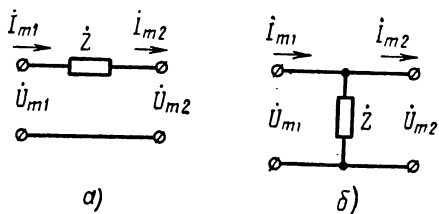


Рис. 6.7. Элементарные четырехполюсники

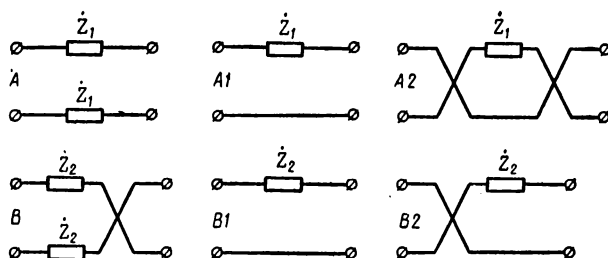


Рис. 6.8. Разбивка сложного четырехполюсника на элементарные четырехполюсники

в виде параллельного соединения четырехполюсников  $A$  и  $B$ . Затем четырехполюсники  $A$  и  $B$  представляются в виде цепочечного соединения элементарных четырехполюсников (соответственно  $A1$ ,  $A2$  и  $B1$ ,  $B2$ ).

При этом определение матрицы исходного четырехполюсника не представляет затруднений, если учесть изменение знака цепочечной матрицы элементарного четырехполюсника при скрещивании его полюсов (см. рис. 6.2, б и г).

\* Все таблицы помещены в приложении в конце книги.

#### 4. Основные свойства матричных коэффициентов

Определение матриц сложных четырехполосников упрощается, если учесть некоторые основные свойства матричных коэффициентов. Эти свойства заключаются в наличии определенной функциональной связи между различными матричными коэффициентами. Установим эту связь для обратимых четырехполосников.

С этой целью рассмотрим произвольный четырехполосник при передаче слева направо (см. рис. 6.1) и найдем для него значения  $\dot{U}_{m2}$  и  $\dot{I}_{m2}$ , решив уравнения (6.14):

$$\begin{aligned}\dot{U}_{m2} &= \frac{a_{22}}{|a|} \dot{U}_{m1} - \frac{a_{12}}{|a|} \dot{I}_{m1}, \\ \dot{I}_{m2} &= -\frac{a_{21}}{|a|} \dot{U}_{m1} + \frac{a_{11}}{|a|} \dot{I}_{m1}.\end{aligned}\quad (6.37)$$

Изменим теперь направление передачи через четырехполосник и примем обозначения в соответствии с рис. 6.9. Тогда, учитывая изменение положительного направления токов, уравнения (6.37) для случая измененного направления передачи можно переписать так:

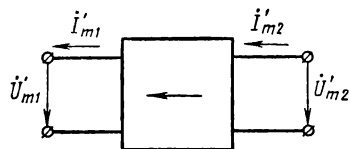


Рис. 6.9. Напряжения и токи в четырехполоснике при изменении направления передачи

$$\dot{U}'_{m2} = \frac{a_{22}}{|a|} \dot{U}'_{m1} + \frac{a_{12}}{|a|} \dot{I}'_{m1}, \quad (6.38)$$

$$\dot{I}'_{m2} = \frac{a_{21}}{|a|} \dot{U}'_{m1} + \frac{a_{11}}{|a|} \dot{I}'_{m1}.$$

Если рассматриваемый четырехполосник является обратимым, то согласно следствию из теоремы обратимости  $\dot{I}'_{m1} = \dot{I}_{m2}$  при  $\dot{U}'_{m2} = \dot{U}_{m1}$ . При этом первое уравнение (6.38) принимает вид

$$\dot{U}_{m1} = \frac{a_{22}}{|a|} \dot{U}'_{m1} + \frac{a_{12}}{|a|} \dot{I}_{m2}. \quad (6.39)$$

Сравним первое уравнение (6.14) и уравнение (6.39). Эти уравнения связывают между собой величины  $\dot{U}_{m1}$  и  $\dot{I}_{m2}$ . Поэтому при любых изменениях указанных величин связь, между ними по уравнениям (6.14) и (6.39) будет идентичной, если выполняются следующие условия:

$$a_{11} \dot{U}_{m2} = \frac{a_{22}}{|a|} \dot{U}'_{m1}, \quad (6.40)$$

$$a_{12} = \frac{a_{12}}{|a|}. \quad (6.41)$$

Из равенства (6.41) находим, что определитель цепочечной матрицы обратимого четырехполюсника равен единице:

$$|a| = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} = 1. \quad (6.42)$$

Отсюда следует, что коэффициенты матриц сопротивлений и проводимостей обратимого четырехполюсника связаны соотношениями

$$z_{12} = -z_{21} \quad (6.43)$$

и

$$y_{12} = -y_{21}, \quad (6.44)$$

которые вытекают непосредственно из уравнений связи (6.18) и (6.19) при  $|a| = 1$ .

Другое свойство матричных коэффициентов устанавливается для симметричных четырехполюсников, в которых напряжения и токи не меняются при изменении направления передачи (при перестановке местами входных и выходных зажимов). Признаком симметрии четырехполюсника является продольная симметрия его схемы, как у четырехполюсников 1, 2, 6, 8 и 9 в табл. П. 1.

Для обратимого четырехполюсника выражение (6.40) имеет вид

$$a_{11}\dot{U}_{m2} = a_{22}\dot{U}'_{m1}. \quad (6.45)$$

Если четырехполюсник симметричен, то при изменении направления передачи  $\dot{U}'_{m1} = \dot{U}_{m2}$ . Подставляя это равенство в соотношение (6.45), получаем условие симметрии четырехполюсника:

$$a_{11} = a_{22}. \quad (6.46)$$

Коэффициенты матриц сопротивлений и проводимостей симметричных обратимых четырехполюсников связаны соотношениями

$$z_{11} = -z_{22} \quad (6.47)$$

и

$$y_{11} = -y_{22}, \quad (6.48)$$

которые вытекают непосредственно из уравнений связи (6.18) и (6.19) при  $a_{11} = a_{22}$ .

Равенства (6.42)—(6.44) и (6.46)—(6.48) подтверждаются на примере матриц, приведенных в табл. П. 1.

Согласно этим равенствам из четырех матричных коэффициентов независимыми являются только три коэффициента у обратимых четырехполюсников и два коэффициента у симметричных обратимых четырехполюсников. Таким образом, определив три или два матричных коэффициента, по условиям обратимости (6.42)—(6.44) и условиям симметрии (6.46)—(6.48) можно найти остальные неизвестные коэффициенты матриц. Тем самым упрощается исследование и расчет четырехполюсников матричным методом.

Кроме того, независимость трех матричных коэффициентов у обратимых четырехполюсников позволяет сделать вывод о способах построения четырехполюсников с заданными свойствами.

Каковы бы ни были эти заданные свойства, четырехполюсник может содержать только три двухполюсника, сопротивления которых определяются тремя независимыми матричными коэффициентами. Этому требованию удовлетворяют Т- и П-образные четырехполюсники, приведенные в табл. П. 1 под номерами 5 и 7. Значения сопротивлений плеч этих четырехполюсников определяются через коэффициенты цепочечной матрицы:

$$\dot{Z}_1 = \frac{a_{11} - 1}{a_{21}}, \quad \dot{Z}_2 = \frac{1}{a_{21}}, \quad \dot{Z}_3 = \frac{a_{22} - 1}{a_{21}} \quad (6.49)$$

— для Т-образных четырехполюсников,

$$\dot{Z}_1 = a_{12}, \quad \dot{Z}_2 = \frac{a_{12}}{a_{22} - 1}, \quad \dot{Z}_3 = \frac{a_{12}}{a_{11} - 1} \quad (6.50)$$

— для П-образных четырехполюсников.

Для симметричных четырехполюсников остается два независимых сопротивления, соответствующих двум независимым матричным коэффициентам. Для таких симметричных Т- и П-образных четырехполюсников (см. 6 и 8 в табл. П. 1) формулы (6.49) и (6.50) принимают следующий вид:

$$\dot{Z}_1 = \frac{a_{11} - 1}{a_{21}}, \quad \dot{Z}_2 = \frac{1}{a_{21}}, \quad (6.49a)$$

$$\dot{Z}_1 = a_{12}, \quad \dot{Z}_2 = \frac{a_{12}}{a_{11} - 1}. \quad (6.50a)$$

Эти формулы используются при анализе свойств селективных систем.

## 5. Обобщение матричного метода на многополюсники

Матричный метод исследования и расчеты четырехполюсников можно распространить на многополюсники, в частности  $2n$ -полюсники (см. рис. 1.26.).

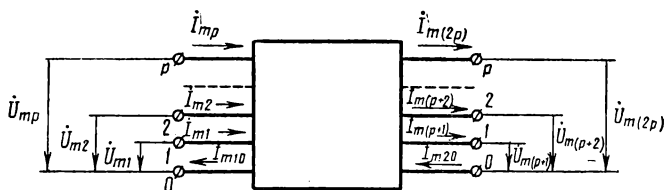


Рис. 6.10. Схема  $2(p+1)$ -полюсника

Познакомимся кратко с матричным методом расчета многополюсников. При этом ограничимся наиболее важным случаем  $2(p+1)$ -полюсника (рис. 6.10), у которого как на входе, так и на выходе напряжения  $p$  полюсов отсчитываются относительно одного

Как и в четырехполюснике, напряжения и токи в  $2(p+1)$ -полюснике линейно связаны друг с другом:

$$\begin{aligned} \dot{I}_{m_1} &= y_{11}\dot{U}_{m_1} + y_{12}\dot{U}_{m_2} + \dots + y_{1(2p)}\dot{U}_{m(2p)}, \\ \dot{I}_{m_2} &= y_{21}\dot{U}_{m_1} + y_{22}\dot{U}_{m_2} + \dots + y_{2(2p)}\dot{U}_{m(2p)}, \\ &\vdots \\ \dot{I}_{m_p} &= y_{p1}\dot{U}_{m_1} + y_{p2}\dot{U}_{m_2} + \dots + y_{p(2p)}\dot{U}_{m(2p)}, \\ \dot{I}_{m(p+1)} &= y_{(p+1)1}\dot{U}_{m_1} + y_{(p+1)2}\dot{U}_{m_2} + \dots + y_{(p+1)(2p)}\dot{U}_{m(2p)}, \\ &\vdots \\ \dot{I}_{m(2p)} &= y_{(2p)1}\dot{U}_{m_1} + y_{(2p)2}\dot{U}_{m_2} + \dots + y_{(2p)(2p)}\dot{U}_{m(2p)}. \end{aligned}$$

$$\begin{bmatrix} \dot{I}_{m1} \\ \dot{I}_{m2} \\ \vdots \\ \dot{I}_{m(2p)} \end{bmatrix} = [y] \begin{bmatrix} \dot{U}_{m1} \\ \dot{U}_{m2} \\ \vdots \\ \dot{U}_{m(2p)} \end{bmatrix},$$
$$[y] = \begin{bmatrix} y_{11} & y_{12} & \dots & y_{1p} & y_{1(p+1)} & y_{1(p+2)} & \dots & y_{1(2p)} \\ y_{21} & y_{22} & \dots & y_{2p} & y_{2(p+1)} & y_{2(p+2)} & \dots & y_{2(2p)} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ y_{p1} & y_{p2} & \dots & y_{pp} & y_{p(p+1)} & y_{p(p+2)} & \dots & y_{p(2p)} \\ y_{(p+1)1} & y_{(p+1)2} & \dots & y_{(p+1)p} & y_{(p+1)(p+1)} & y_{(p+1)(p+2)} & \dots & y_{(p+1)(2p)} \\ y_{(p+2)1} & y_{(p+2)2} & \dots & y_{(p+2)p} & y_{(p+2)(p+1)} & y_{(p+2)(p+2)} & \dots & y_{(p+2)(2p)} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ y_{(2p)1} & y_{(2p)2} & \dots & y_{(2p)p} & y_{(2p)(p+1)} & y_{(2p)(p+2)} & \dots & y_{(2p)(2p)} \end{bmatrix}$$

Аналогично матрицы проводимостей могут быть получены матрицы сопротивлений и цепочечные матрицы  $2(p+1)$ -полюсника. При этом все действия с этими матрицами при различных соединениях многополюсников совершаются по тем же правилам, что и в случае четырехполюсников.

$$[y] = \begin{bmatrix} Y_{11} & Y_{12} \\ Y_{21} & Y_{22} \end{bmatrix},$$

где

$$Y_{11} = \begin{bmatrix} y_{11} & y_{12} & \cdots & y_{1p} \\ y_{21} & y_{22} & \cdots & y_{2p} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ y_{p1} & y_{p2} & \cdots & y_{pp} \end{bmatrix}, \quad Y_{12} = \begin{bmatrix} y_{1(p+1)} & y_{1(p+2)} & \cdots & y_{1(2p)} \\ y_{2(p+1)} & y_{2(p+2)} & \cdots & y_{2(2p)} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ y_{p(p+1)} & y_{p(p+2)} & \cdots & y_{p(2p)} \end{bmatrix},$$

$$Y_{21} = \begin{bmatrix} y_{(p+1)1} & y_{(p+1)2} & \cdots & y_{(p+1)p} \\ y_{(p+2)1} & y_{(p+2)2} & \cdots & y_{(p+2)p} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ y_{(2p)1} & y_{(2p)2} & \cdots & y_{(2p)p} \end{bmatrix},$$

$$Y_{22} = \begin{bmatrix} y_{(p+1)(p+1)} & y_{(p+1)(p+2)} & \cdots & y_{(p+1)(2p)} \\ y_{(p+2)(p+1)} & y_{(p+2)(p+2)} & \cdots & y_{(p+2)(2p)} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ y_{(2p)(p+1)} & y_{(2p)(p+2)} & \cdots & y_{(2p)(2p)} \end{bmatrix}.$$

При этом матрицы-столбцы также следует представлять в виде составных матриц:

$$\begin{bmatrix} i_{m1} \\ i_{m11} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Y_{11} & Y_{12} \\ Y_{21} & Y_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{U}_{m1} \\ \dot{U}_{m11} \end{bmatrix},$$

где

$$i_{m1} = \begin{bmatrix} i_{m1} \\ i_{m2} \\ \vdots \\ i_{mp} \end{bmatrix}, \quad i_{m11} = \begin{bmatrix} i_{m(p+1)} \\ i_{m(p+2)} \\ \vdots \\ i_{m(2p)} \end{bmatrix},$$

$$\dot{U}_{m1} = \begin{bmatrix} \dot{U}_{m1} \\ \dot{U}_{m2} \\ \vdots \\ \dot{U}_{mp} \end{bmatrix}, \quad U_{m11} = \begin{bmatrix} \dot{U}_{m(p+1)} \\ \dot{U}_{m(p+2)} \\ \vdots \\ \dot{U}_{m(2p)} \end{bmatrix}.$$

В заключение следует заметить, что из  $4p^2$  матричных коэффициентов  $2(p+1)$ -полосника в случае обратимых многополосников независимыми являются только  $p(2p+1)$  коэффициентов.

## § 6.2. ОСНОВНЫЕ ПАРАМЕТРЫ И ХАРАКТЕРИСТИКИ ЧЕТЫРЕХПОЛЮСНИКОВ

### 1. Входное сопротивление

Одними из основных параметров четырехполосника, включенного между реальным источником и нагрузкой, являются его входные сопротивления:

$$\dot{Z}_{вх} = \dot{Z}_{вх1} = \frac{\dot{U}_{m1}}{i_{m1}}, \quad \dot{Z}_{вых} = \dot{Z}_{вх2} = \frac{\dot{U}'_{m2}}{i'_{m2}}. \quad (6.51)$$

На эти входные сопротивления получается нагруженным источник при передаче слева направо (рис. 6.11, а) и справа налево (рис. 6.11, б).

В формулах (6.51) напряжения и токи определяются соотношениями (6.14) и (6.38). Подставив эти значения напряжений и токов в равенства (6.51), найдем

$$\dot{Z}_{вх1} = \frac{a_{11}\dot{U}_{m2} + a_{12}\dot{I}_{m2}}{a_{21}\dot{U}_{m2} + a_{22}\dot{I}_{m2}}$$

и

$$\dot{Z}_{вх2} = \frac{a_{22}\dot{U}'_{m1} + a_{12}\dot{I}'_{m1}}{a_{21}\dot{U}'_{m1} + a_{11}\dot{I}'_{m1}}.$$

Разделив здесь числитель и знаменатель на ток  $I_{m2}$  или  $I'_{m1}$  и учитывая значения нагрузочных сопротивлений

$$\dot{Z}_{01} = \frac{\dot{U}'_{m1}}{\dot{I}'_{m1}}, \quad (6.52)$$

$$\dot{Z}_{02} = \frac{\dot{U}_{m2}}{\dot{I}_{m2}}, \quad (6.53)$$

окончательно получим:

$$\dot{Z}_{вх1} = \frac{a_{11}\dot{Z}_{02} + a_{12}}{a_{21}\dot{Z}_{02} + a_{22}}, \quad (6.54)$$

$$\dot{Z}_{вх2} = \frac{a_{22}\dot{Z}_{01} + a_{12}}{a_{21}\dot{Z}_{01} + a_{11}}. \quad (6.55)$$

Из формулы (6.54) видно, что в общем случае  $\dot{Z}_{вх1} \neq \dot{Z}_{02}$ . Следовательно, нагрузочное сопротивление источника меняется, если он подключается не непосредственно к нагрузке  $\dot{Z}_{02}$ , а через четырехполусник. Поэтому говорят о трансформации сопротивления четырехполусником и пользуются понятием коэффициента трансформации по сопротивлению

$$\dot{n}_Z = \frac{\dot{Z}_{02}}{\dot{Z}_{вх1}} = \frac{a_{22} + a_{21}\dot{Z}_{02}}{a_{11} + \frac{a_{12}}{\dot{Z}_{02}}}. \quad (6.56)$$

Из соотношения (6.56) следует, что в общем случае свойства четырехполусника как трансформатора сопротивления зависят не только от параметров четырехполусника, но и от параметров нагрузки  $\dot{Z}_{02}$ . В частном случае, когда  $a_{12} = a_{21} = 0$ , трансформи-

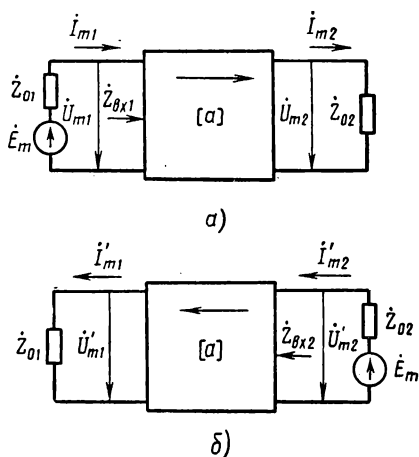


Рис. 6.11. Четырехполусники с передачей сигнала слева направо (а) и справа налево (б)



рующие свойства четырехполюсника не зависят от нагрузочного сопротивления:

$$\dot{n}_Z|_{a_{12}=a_{21}=0} = \frac{a_{22}}{a_{11}}. \quad (6.57)$$

При этом симметричный четырехполюсник не трансформирует сопротивлений:

$$\dot{n}_Z|_{\substack{a_{12}=a_{21}=0 \\ a_{11}=a_{22}}} = 1. \quad (6.58)$$

Если  $a_{11} = a_{22} = 0$ ,

$$\text{то} \quad \dot{n}_Z|_{a_{11}=a_{22}=0} = \frac{a_{12}}{a_{21}} \frac{1}{\dot{Z}_{02}}. \quad (6.59)$$

При предельных значениях нагрузочных сопротивлений входные сопротивления определяются, естественно, целиком параметрами четырехполюсника. Из соотношений (6.54) и (6.55) находим, что входные сопротивления четырехполюсника равны:

в режиме холостого хода ( $Z_{02} = \infty$  или  $Z_{01} = \infty$ )

$$\dot{Z}_{1xx} = \frac{a_{11}}{a_{21}}, \quad \dot{Z}_{2xx} = \frac{a_{22}}{a_{21}}, \quad (6.60)$$

в режиме короткого замыкания ( $\dot{Z}_{02} = 0$  или  $\dot{Z}_{01} = 0$ )

$$\dot{Z}_{1кз} = \frac{a_{12}}{a_{22}}, \quad \dot{Z}_{2кз} = \frac{a_{12}}{a_{11}}. \quad (6.61)$$

Поскольку полученные соотношения определяют параметры четырехполюсника в общем виде безотносительно к его структуре, они могут быть использованы для четырехполюсников как с сосредоточенными, так и с распределенными параметрами. Аналогично и последующие соотношения в настоящем параграфе имеют общий характер.

## 2. Меры передачи

Для непосредственного сравнения входного и выходного напряжений четырехполюсника (см. рис. 6.11, а) вводится понятие коэффициента трансформации по напряжению:

$$\dot{n}_U = \frac{\dot{U}_{m2}}{\dot{U}_{m1}}. \quad (6.62)$$

Подставив сюда значение  $\dot{U}_{m1}$  из первого уравнения (6.14), с учетом соотношения (6.53) получим

$$\dot{n}_U = \frac{1}{a_{11} + \frac{a_{12}}{\dot{Z}_{02}}} \cdot \frac{\dot{Z}_{02}}{a_{11}\dot{Z}_{02} + a_{12}}. \quad (6.63)$$

В режиме холостого хода ( $Z_{02} = \infty$ )

$$\dot{n}_{Uxx} = \frac{1}{a_{11}}. \quad (6.64)$$

Иногда пользуются также понятием коэффициента трансформации по току:

$$\dot{n}_I = \frac{i_{m1}}{i_{m2}}, \quad (6.65)$$

который согласно второму уравнению (6.14) и соотношению (6.53) равен

$$\dot{n}_I = a_{21}\dot{Z}_{02} + a_{22}. \quad (6.66)$$

Из формул (6.56), (6.63) и (6.66) определяется связь между коэффициентами трансформации по сопротивлению, напряжению и току:

$$\dot{n}_Z = \dot{n}_U \dot{n}_I. \quad (6.67)$$

Для непосредственного сравнения выходного напряжения с э. д. с. источника на входе четырехполосника используется понятие комплексного коэффициента передачи:

$$\dot{K} = K e^{j\Theta} = \frac{\dot{U}_{m2}}{\dot{E}_m}. \quad (6.68)$$

Здесь

$$K = |\dot{K}| = \frac{U_{m2}}{E_m} \quad (6.69)$$

— коэффициент передачи четырехполосника (модуль комплексного коэффициента передачи), показывающий, во сколько раз изменяется амплитуда напряжения гармонических колебаний при их прохождении через четырехполосник;

$$\Theta = \arg \dot{K} = \arg \dot{U}_{m2} - \arg \dot{E}_m \quad (6.70)$$

— фаза четырехполосника (аргумент комплексного коэффициента передачи), показывающая, на сколько изменяется фаза напряжения гармонических колебаний при их прохождении через четырехполосник.

Таким образом, наряду с понятием фазы колебаний (2.5) и фазы многофазных цепей (стр. 146) существует также понятие фазы как параметра четырехполосника.

Комплексный коэффициент передачи может быть выражен через матричные коэффициенты четырехполосника. С этой целью согласно второму закону Кирхгофа э. д. с. источника представим в следующем виде:

$$\dot{E}_m = \dot{Z}_{01} \dot{I}_{m1} + \dot{U}_{m1},$$

или с учетом уравнений (6.14)

$$\dot{E}_m = \dot{Z}_{01} (a_{21} \dot{U}_{m2} + a_{22} \dot{I}_{m2}) + a_{11} \dot{U}_{m2} + a_{12} \dot{I}_{m2}.$$

Подставив это значение э. д. с. в определение (6.68) и учитывая соотношение (6.53), после деления числителя и знаменателя дроби на  $\dot{I}_{m2}$  получим

$$\dot{K} = \frac{\dot{Z}_{02}}{a_{11}\dot{Z}_{02} + a_{12} + a_{21}Z_{01}\dot{Z}_{02} + a_{22}\dot{Z}_{01}}. \quad (6.71)$$

Для симметричного четырехполюсника ( $a_{11} = a_{22}$ ) при  $\dot{Z}_{01} = \dot{Z}_{02} = \dot{Z}_0$  это уравнение имеет вид

$$\dot{K} = \frac{1}{2} \frac{1}{a_{11} + \frac{1}{2} \left( \frac{a_{12}}{\dot{Z}_0} + a_{21}\dot{Z}_0 \right)}. \quad (6.71a)$$

Из соотношения (6.71) определяется комплексный коэффициент передачи при предельных значениях нагрузочных сопротивлений:

$$\dot{K}_{xx} = \dot{K} \big|_{Z_{02}=\infty} = \frac{1}{a_{11} + a_{21}\dot{Z}_{01}}, \quad (6.72)$$

$$\dot{K}_{k3} = \dot{K} \big|_{\dot{Z}_{01}=0} = \dot{n}_U = \frac{\dot{Z}_{02}}{a_{11}\dot{Z}_{02} + a_{12}}, \quad (6.73)$$

$$\dot{K}_{xx, k3} = \dot{K} \bigg|_{\substack{\dot{Z}_{02}=\infty \\ \dot{Z}_{01}=0}} = \dot{n}_{Uxx} = \frac{1}{a_{11}}. \quad (6.74)$$

Коэффициент передачи и фаза четырехполюсника являются функцией частоты. Графики частотной зависимости  $K(\omega)$  и  $\theta(\omega)$  называются соответственно частотной (амплитудно-частотной) и фазовой (фазо-частотной) характеристиками четырехполюсника. Один из возможных видов частотной и фазовой характеристик показан на рис. 6.12.

Из рис. 6.12 видно, что частотная характеристика может иметь максимум на некоторой оптимальной частоте  $f_{opt}$ . При этом

$$\dot{K} \big|_{\omega=\omega_{opt}} = \dot{K}_{max} = K_{max} e^{j\theta_0}. \quad (6.75)$$

Для удобства анализа свойств четырехполюсника принято пользоваться относительным значением комплексного коэффициента передачи:

$$A = A e^{j\Delta\theta} = \frac{\dot{K}}{\dot{K}_{max}}, \quad (6.76)$$

где

$$A = \frac{K}{K_{max}} \quad (6.77)$$

— относительный коэффициент передачи;

$$\Delta\theta = \theta - \theta_0 \quad (6.78)$$

— относительная фаза четырехполюсника.

Из определения (6.77) вытекает, что всегда

$$A_{max} = 1. \quad (6.79)$$

Частотная и фазовая характеристики, приведенные на рис. 6.12, показаны в относительном масштабе на рис. 6.13 (при  $\Theta_0 = \frac{\pi}{2}$ ).

Из рис. 6.13 видно, что четырехполосник с частотной характеристикой, имеющей максимум на некоторой оптимальной частоте, различным образом пропускает колебания разных частот. При этом колебания с частотами, сильно отличающимися от оптимальной, могут существенно ослабляться относительно колебаний с частотами, близкими к оптимальной частоте. Здесь имеется в виду относительное ослабление колебаний, так как, например, при  $A_1 \ll 1$  (см. рис. 6.13), когда имеет место сильное относительное ослабление, может быть  $K_1 = A_1 K_{\max} > 1$ , т. е. колебания с частотой  $f_1$  не уменьшаются, а возрастают по амплитуде.

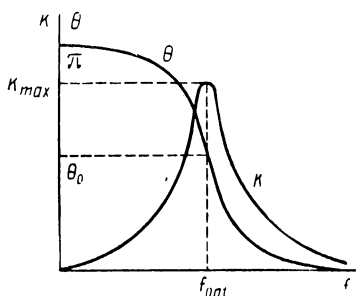


Рис. 6.12. Частотная и фазовая характеристики четырехполосника

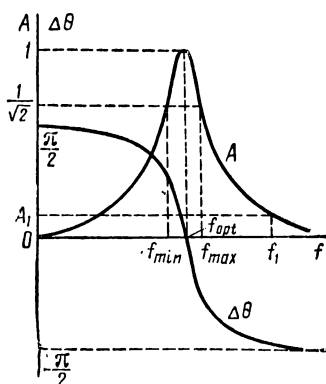


Рис. 6.13. Частотная и фазовая характеристики четырехполосника в относительном масштабе

Ввиду различного относительного ослабления колебаний вводится понятие полосы пропускания четырехполосника:

$$\Delta F = f_{\max} - f_{\min}, \quad (6.80)$$

где  $f_{\min} = f_{r1}$  и  $f_{\max} = f_{r2}$  — граничные частоты полосы пропускания (см. рис. 6.13), на которых относительный коэффициент передачи имеет значение

$$A_{\min} = A|_{f=f_{\min}} = A|_{f=f_{\max}} = \frac{1}{\sqrt{2}}. \quad (6.81)$$

Определяя таким образом полосу пропускания, исходят из того, что при изменении амплитуд гармонических составляющих сигнала не более чем в  $\sqrt{2}$  раз (по мощности — в 2 раза) частотные искажения сигнала получаются достаточно малыми.

При определении полосы пропускания вместо соотношения (6.81) принимают иногда

$$A_{\min} = \frac{1}{2}. \quad (6.82)$$

Для оценки свойств четырехполюсника используют также понятие относительной полосы пропускания:

$$\delta = \frac{\Delta F}{f_{cp}}, \quad (6.83)$$

где

$$f_{cp} = \frac{1}{2} (f_{r1} + f_{r2}) \quad (6.84)$$

— средняя частота полосы пропускания.

Существование полосы пропускания в четырехполюснике означает, что он пропускает сигналы, спектр которых не выходит за пределы этой полосы. Все же колебания (помехи), частоты которых лежат вне полосы пропускания, считаются подавленными. Разумеется, степень этого подавления получается различной на разных частотах. Фактически помехи получаются лишь частично ослабленными, причем тем сильнее, чем дальше отстоит частота помехи от полосы пропускания. Этот вопрос рассматривается подробнее в гл. 9, где изучаются селективные системы.

Говоря об относительном ослаблении колебаний в четырехполюснике, удобно пользоваться не комплексным коэффициентом передачи, а передаточной функцией

$$\dot{S} = \frac{1}{\dot{A}} = \text{Se}^{lb} = e^{a+lb} = e^{\dot{g}}, \quad (6.85)$$

где

$$S = |\dot{S}| = \frac{1}{\dot{A}} = e^a \quad (6.86)$$

— модуль передаточной функции, называемый ослаблением четырехполюсника;

$$a \text{ (nep)} = \ln S = \ln \frac{1}{\dot{A}} \quad (6.87)$$

— логарифмическая мера ослабления, называемая затуханием четырехполюсника (в неперах);

$$b = \arg \dot{S} = -\Delta\Theta \quad (6.88)$$

— аргумент передаточной функции, равный относительной фазе четырехполюсника с обратным знаком;

$$\dot{g} = a + jb = \ln \dot{S} = \ln \frac{1}{\dot{A}} \quad (6.89)$$

— логарифмический коэффициент передачи четырехполюсника, являющийся комплексной величиной.

Как видно из формулы (6.87), 1 непер соответствует ослаблению  $S = e = 2,718$ , т. е. относительному коэффициенту передачи  $A = \frac{1}{e} = 0,368$  (так как  $\ln e = 1$ ). При этом границе полосы пропускания, отсчитываемой на уровне  $A = \frac{1}{\sqrt{2}}$ , соответствует затухание  $a = \ln \sqrt{2} = 0,346$  непер (рис. 6.14).

Часто при определении затухания пользуются не натуральными, а десятичными логарифмами, логарифмируя не функцию  $S$ , а функцию  $S^2$ . Переход от логарифмирования  $S$  к логарифмированию  $S^2$  означает переход от сравнения колебаний по напряжению к их сравнению по мощности, поскольку мощность пропорциональна квадрату напряжения.

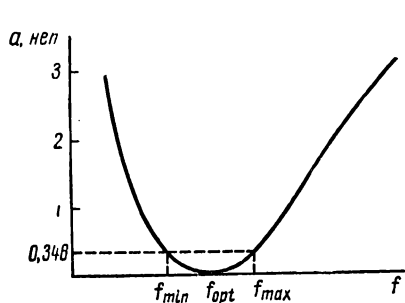


Рис. 6.14. Частотная характеристика затухания в неперах

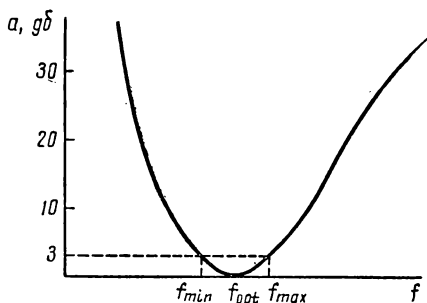


Рис. 6.15. Частотная характеристика затухания в децибелах

Определяемое таким образом затухание измеряется в белах. При этом вместо формулы (6.87) получается соотношение

$$a (\text{б}) = \lg S^2 = 2 \lg \frac{1}{A}. \quad (6.90)$$

На практике используются более мелкие единицы измерения затухания — децибелы ( $1 \text{ дб} = 0,1 \text{ б}$ ). В этом случае формула (6.90) принимает следующий вид:

$$a (\text{дб}) = 10 \lg S^2 = 20 \lg \frac{1}{A}. \quad (6.90a)$$

Из формул (6.90), (6.90a) видно, что 1 бел соответствует значениям  $S = \sqrt{10} = 3,16$  и  $A = \frac{1}{\sqrt{10}} = 0,316$ , а 1 децибел — значениям  $S = \sqrt{1,26} = 1,122$  и  $A = \frac{1}{\sqrt{1,26}} = 0,891$  (так как  $\lg 10 = 1$  и  $\lg 1,26 = 0,1$ ). Границе полосы пропускания, отсчитываемой на уровне  $A = \frac{1}{\sqrt{2}}$ , соответствует затухание  $a = 20 \lg \sqrt{2} = 3 \text{ дб}$  (рис. 6.15).

Учитывая, что  $\lg e = 0,434$ , из формул (6.87) и (6.90а) получаем связь между неперами и децибелами:

$$1 \text{ nep} = 8,68 \text{ db}. \quad (6.91)$$

Следует заметить, что затухание четырехполосника, определяемое по формулам (6.90) или (6.90а), не дает полного представления об изменении мощности колебаний при их прохождении через четырехполосник. Это получается вследствие зависимости мощности от сопротивления, на котором она выделяется. Сопротивления же не учитываются в формулах (6.90) и (6.90а). Для полной оценки изменения мощности в четырехполоснике вводится понятие рабочих мер передачи, которые используются при оценке свойств фильтров. Такие меры передачи рассматриваются в гл. 9.

# Г Л А В А 7

## ЧЕТЫРЕХПОЛЮСНИКИ С СОСРЕДОТОЧЕННЫМИ ПАРАМЕТРАМИ

### § 7.1. ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНЫЙ КОНТУР

#### 1. Коэффициент передачи

В настоящей главе изучаются простейшие четырехполюсники с сосредоточенными параметрами, которые находят широкое применение в различных радиотехнических устройствах. Более сложные четырехполюсники, использующиеся в селективных системах, рассматриваются в гл. 9.

Одним из простейших четырехполюсников является последовательный контур, состоящий из индуктивности и емкости, в котором выходное напряжение снимается с одного из элементов, обычно

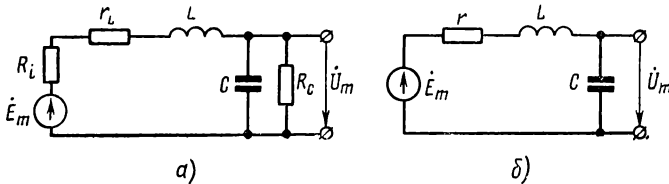


Рис. 7.1. Последовательный контур

с емкости (рис. 7.1, а). Последовательный контур широко используется в радиотехнических устройствах. Это обусловлено резонансными явлениями в последовательном двухполюснике, который и определяет свойства рассматриваемого четырехполюсника.

В последовательном контуре обычно  $d_C \ll d_L$ , как отмечалось выше для последовательного двухполюсника. Поэтому, пренебрегая потерями в конденсаторе, приходим к эквивалентной схеме четырехполюсника, изображенной на рис. 7.1, б. В этой схеме принято  $r = r_L + R_i$ , поскольку при определении коэффициента передачи такое объединение сопротивлений является правомерным. В сопротивление потерь  $r$ , как и в двухполюснике, можно включить сопротивление потерь конденсатора  $r_C$ :

$$r = r_L + r_C + R_i.$$



Однако при этом следует иметь в виду, что ниже всюду выходное напряжение рассматривается как напряжение на емкостном сопротивлении  $jX_C$ .

Выходное напряжение  $\dot{U}_m$  последовательного контура определяется как для делителя напряжения:

$$\dot{U}_m = \frac{\dot{Z}_C}{\dot{Z}} \dot{E}_m = -j \frac{1}{\omega C \dot{Z}} \dot{E}_m.$$

Здесь  $\dot{Z}$  — сопротивление последовательного двухполюсника (5.40) или (5.40а), для которого сопротивление потерь находят с учетом внутреннего сопротивления источника.

Зная выходное напряжение  $\dot{U}_m$ , определяем комплексный коэффициент передачи последовательного контура:

$$\dot{K} = \frac{\dot{U}_m}{\dot{E}_m} = -j \frac{1}{\omega C \dot{Z}},$$

или с учетом соотношений (5.40а) и (5.38)

$$\dot{K} = -j \frac{\omega_0}{\omega} \cdot \frac{Q}{1 + jQv}. \quad (7.1)$$

Отсюда получаем модуль и аргумент комплексного коэффициента передачи:

$$K = |\dot{K}| = \frac{\omega_0}{\omega} \cdot \frac{Q}{\sqrt{1 + Q^2 v^2}}, \quad (7.2)$$

$$\Theta = \arg \dot{K} = \arg(-j) - \arg(1 + jQv) = -\left(\frac{\pi}{2} + \varphi\right), \quad (7.3)$$

где  $\varphi$  — аргумент сопротивления последовательного двухполюсника (5.43).

## 2. Частотные характеристики

С учетом обозначений (5.10) и (5.12) уравнение частотной характеристики (7.2) принимает следующий вид:

$$K = \frac{1}{\sqrt{d^2 \Omega^2 + (\Omega^2 - 1)^2}}. \quad (7.2a)$$

Из этого уравнения видно, что

$$K|_{\omega=0} = 1,$$

$$K|_{\omega=\omega_0} = K_0 = \frac{1}{d} = Q > 1, \quad (7.4)$$

$$K|_{\omega \rightarrow \infty} \rightarrow 0.$$

Из формул (7.4) следует, что на некоторой частоте должен наблюдаться максимум частотной характеристики. Этот максимум

обусловлен, по-видимому, резонансными свойствами последовательного двухполюсника, резонансная кривая которого тоже имеет максимум (см. рис. 5.21).

Максимум частотной характеристики определяется из условия  $\frac{d}{d\Omega} \left( \frac{1}{K^2} \right) = 0$ , из которого, используя уравнение (7.2а), находим:

$$\omega_{\text{opt}} = \omega_0 \sqrt{1 - \frac{d^2}{2}} < \omega_0, \quad (7.5)$$

$$K|_{\omega=\omega_{\text{opt}}} = K_{\text{max}} = \frac{1}{d \sqrt{1 - \frac{d^2}{4}}} > Q. \quad (7.6)$$

Из формулы (7.5) видно, что максимум частотной характеристики получается не на резонансной, а на меньшей частоте. Это объясняется влиянием реактивного сопротивления емкости, с которой снимается выходное напряжение. Хотя с уменьшением частоты от резонансного значения ток в контуре уменьшается (см. рис. 5.21), сопротивление  $|X_c|$  при этом растет быстрее, пока расстройки невелики. Следовательно, при уменьшении частоты от резонансного значения выходное напряжение и коэффициент передачи растут, что и приводит к смещению оптимальной частоты относительно резонанса.

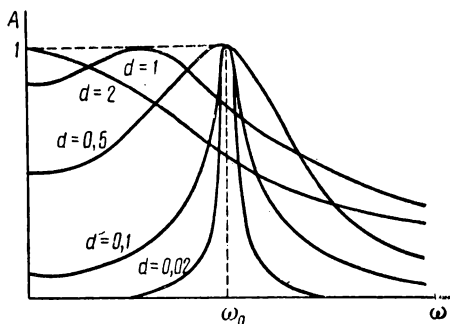


Рис. 7.2. Частотные характеристики последовательного контура

Этим же обстоятельством обусловлено также большее значение максимального коэффициента передачи (7.6) по сравнению с резонансным значением, которое определяется второй формулой (7.4).

Из уравнений (7.2а) и (7.6) находим относительный коэффициент передачи

$$A = \frac{K}{K_{\text{max}}} = d \sqrt{\frac{1 - \frac{d^2}{4}}{d^2 \Omega^2 + (\Omega^2 - 1)^2}}, \quad (7.7)$$

по которому построены частотные характеристики на рис. 7.2.

Из рис. 7.2 и уравнений (7.5) — (7.7) следует, что чем больше затухание контура, тем больше оптимальная частота отличается от резонансной частоты и тем слабее выражен максимум частотной характеристики. При  $d = \sqrt{2}$ , как видно из формулы (7.5), максимум получается на постоянном токе, а при  $d > \sqrt{2}$  оптимум характеристики вообще исчезает и она монотонно спадает по мере роста частоты от нуля. В этих случаях уравнение (7.7) становится недействительным, и надо пользоваться уравнением (7.2а), которое согласно

первой формуле (7.4) описывает при этом частотную характеристику в относительном масштабе.

Впрочем, в радиотехнической практике приходится иметь дело преимущественно с такими контурами, для которых  $Q \gg 1$  и  $d \ll 1$ . При этом уравнения (7.5) — (7.7) принимают следующий вид:

$$\omega_{\text{opt}} \approx \omega_0, \quad (7.5a)$$

$$K_{\text{max}} \approx K_0 = Q, \quad (7.6a)$$

$$A \approx \frac{1}{\sqrt{1 + Q^2 \xi^2}} = \frac{1}{\sqrt{1 + \xi^2}} \approx \frac{1}{\sqrt{1 + 4Q^2 \left(\frac{\Delta\omega}{\omega_0}\right)^2}} = \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{4L^2}{r^2} (\Delta\omega)^2}}. \quad (7.7a)$$

Частотная характеристика, построенная по уравнению (7.7a) в обобщенных координатах ( $A, \xi$ ), показана на рис. 7.3. Она является

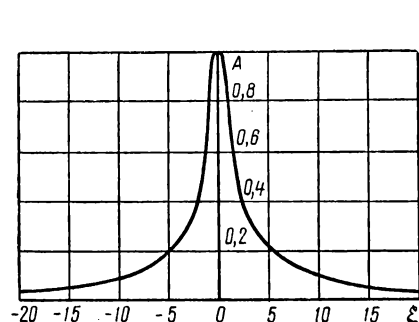


Рис. 7.3. Обобщенная частотная характеристика последовательного контура

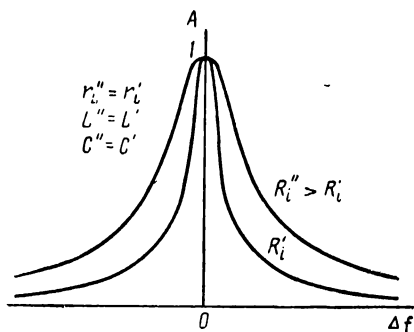


Рис. 7.4. Влияние внутреннего сопротивления источника на частотные характеристики последовательного контура

общей для любых последовательных контуров и не зависит от параметров контура. Однако в координатах ( $A, \Delta f$ ) частотная характеристика получается тем острее, чем больше добротность или индуктивность и чем меньше резонансная частота или сопротивление потерь контура (при прочих равных условиях). К этим выводам нетрудно прийти на основании вида уравнений (7.7a), которые являются обратными по отношению к уравнениям (5.42). Руководствуясь этим, можно построить частотные характеристики при разных параметрах последовательного контура подобно тому, как это сделано на рис. 5.24 для сопротивления последовательного двухполосника.

Здесь лишь подчеркнем, что внутреннее сопротивление источника  $R_i$ , входящее в полное сопротивление потерь контура  $r = r_L + R_i$ , влияет на частотные характеристики последовательного контура аналогично самому сопротивлению потерь (рис. 7.4). В частности, с ростом  $R_i$  увеличивается полоса пропускания контура, как это видно из рис. 7.4.

Для определения полосы пропускания следует обратить внимание на симметрию частотных характеристик (7.7а):

$$A(-\Delta f) = A(\Delta f). \quad (7.8)$$

Поэтому полоса пропускания (6.80) располагается симметрично около резонансной частоты (рис. 7.5), так что  $\Delta f_{r2} = -\Delta f_{r1} = \Delta f_r$ ,  $f_{\min} = f_0 - \Delta f_r$ ,  $f_{\max} = f_0 + \Delta f_r$  и согласно определению (6.84)  $f_{\text{ср}} = f_0$ .

Приняв в соответствии с условием (6.81)  $A = \frac{1}{\sqrt{2}}$  при  $\Delta f = \Delta f_r = \frac{\Delta F}{2}$ , из соотношений (7.7а) определяем полосу пропускания (6.80) последовательного контура и относительную полосу пропускания (6.83):

$$\Delta F = \frac{f_0}{Q} = \frac{r}{2\pi L}, \quad (7.9)$$

$$\delta = \frac{\Delta F}{f_0} = \frac{1}{Q} = d. \quad (7.10)$$

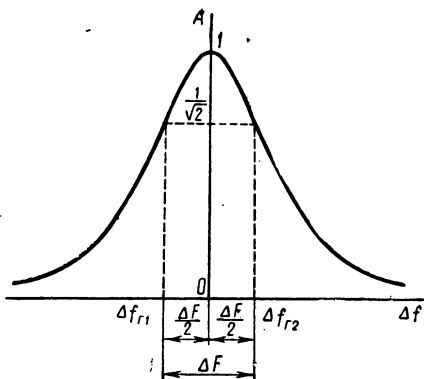


Рис. 7.5. Определение полосы пропускания последовательного контура

Согласно обозначениям (5.8), (5.41) и формулам (7.9), (7.10) обобщенная расстройка имеет следующий смысл:

$$\xi \approx 2 \frac{\Delta}{\delta} = \frac{2\Delta f}{\Delta F}. \quad (7.11)$$

Таким образом, на границах полосы пропускания последовательного контура, где  $\Delta f = \pm \frac{\Delta F}{2}$ , обобщенная расстройка имеет значения  $\xi = \xi_r = \pm 1$ .

### 3. Фазовые характеристики

Уравнение фазовой характеристики (7.3) может быть записано в виде

$$\Theta = -\left(\frac{\pi}{2} + \arctg Qv\right) = -\left(\frac{\pi}{2} + \arctg \xi\right). \quad (7.12)$$

Фазовая характеристика, построенная по этому уравнению, приведена на рис. 7.6.

Таким образом, при резонансе фазовый сдвиг

$$\Theta_0 = -\frac{\pi}{2}. \quad (7.13)$$

Согласно определению (6.78) и соотношениям (7.12), (7.13) относительная фаза последовательного контура как четырехполюсника равна

$$\Delta\Theta = -\operatorname{arctg} Qv = -\operatorname{arctg} \xi = -\operatorname{arctg} \frac{2Q}{f_0} \Delta f = -\operatorname{arctg} \frac{2L}{r} \Delta\omega. \quad (7.14)$$

Из уравнений (7.14) и (5.43) видно, что относительная фаза последовательного контура отличается от аргумента сопротивления

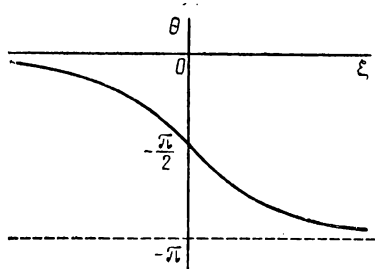


Рис. 7.6. Фазовая характеристика последовательного контура

последовательного двухполюсника только знаком. Поэтому для относительной фазы с точностью до знака справедливы характеристики, приведенные на рис. 5.25. Таким образом, влияние параметров последовательного контура на его фазовые характеристики  $\Delta\Theta(\Delta f)$  получается аналогичным влиянию параметров последовательного двухполюсника на его характеристики  $\varphi(\Delta f)$ .

В частности, следует подчеркнуть, что для фазовых характеристик остается справедливым свойство симметрии и линейности:

$$\Delta\Theta(-\Delta f) = -\Delta\Theta(\Delta f) \quad (7.15)$$

и

$$\Delta\Theta|_{|\xi| \ll 1} \approx -\xi \approx -\frac{2Q}{f_0} \Delta f. \quad (7.16)$$

Ошибка приближенного уравнения (7.16) получается меньше 10% при  $|\xi| < 0,57$ , но превышает 27% на границах полосы пропускания контура, когда  $|\xi| = 1$ .

#### 4. Энергетические соотношения

При резонансе в последовательном контуре как четырехполюснике происходит такой же обмен энергии между реактивными элементами, как и в последовательном двухполюснике. Этот обмен несколько нарушается при подключении нагрузки к последовательному контуру (рис. 7.7, а). При этом, как и в случае последовательного двухполюсника с подключенным резистором (см. рис. 5.23), несколько изменяется резонансная частота. При достаточно большом нагрузочном сопротивлении  $R \gg |X_C|$  этим изменением резонансной частоты можно пренебречь. В этом случае возникает лишь задача определения к. п. д. контура, в котором активная мощность в нагрузочном сопротивлении  $R$  является полезной,

а мощность, рассеиваемая на сопротивлении потерь  $r$ , — вредной. Для определения к. п. д. удобно пересчитать параллельное соединение элементов  $R$ ,  $C$  на последовательное, как показано на рис. 7.7,б. При этом по аналогии с формулой (5.49)

$$r_{\text{вн}} = \frac{\rho^2}{R}. \quad (7.17)$$

Величина  $r_{\text{вн}}$  рассматривается как сопротивление, вносимое в контур со стороны нагрузки. Вносимое сопротивление не только отображает влияние нагрузки на ток в контуре, но, очевидно, и в энергетическом смысле является эквивалентным нагрузочному сопротивлению. Действительно, учитывая формулу (7.17), находим, что активная мощность в нагрузочном сопротивлении равна мощности, рассеиваемой на вносимом сопротивлении:

$$P_{aR} = \frac{U_{m0}^2}{2R} = \frac{I_{m0}^2 \rho^2}{2R} = \frac{1}{2} r_{\text{вн}} I_{m0}^2 = P_{ar_{\text{вн}}}.$$

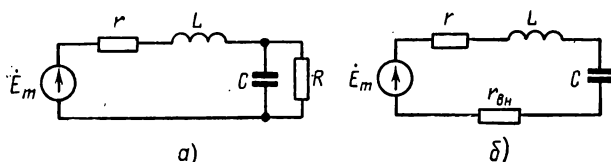


Рис. 7.7. Подключение нагрузки к последовательному контуру

Поэтому к. п. д. контура можно определить следующим образом:

$$\eta = \frac{P_{ar_{\text{вн}}}}{P_{ar_{\text{вн}}} + P_{ar}},$$

или

$$\eta = \frac{r_{\text{вн}}}{r_{\text{вн}} + r} = \frac{1}{1 + \frac{rR}{\rho^2}} = \frac{1}{1 + \frac{d}{d_{\text{вн}}}}. \quad (7.18)$$

Здесь

$$d_{\text{вн}} = \frac{r_{\text{вн}}}{\rho} \quad (7.19)$$

— вносимое затухание, которое при подключении нагрузки увеличивает затухание контура (5.39) до значения

$$d_{\text{эв}} = d + d_{\text{вн}} = \frac{r}{\rho} + \frac{r_{\text{вн}}}{\rho}. \quad (7.20)$$

При этом соответственно снижается и добротность контура от значения (5.38) до эквивалентного значения

$$Q_{\text{экв}} = \frac{1}{d_{\text{экв}}} = \frac{\rho}{r + r_{\text{вн}}}. \quad (7.21)$$

Значения затухания (7.20) и добротности (7.21) следует учитывать во всех уравнениях для контура с нагрузкой.

Таким образом, при подключении нагрузки не только изменяется резонансная частота контура, но в соответствии с формулами (7.9), (7.10) увеличивается его полоса пропускания. Это увеличение получается тем больше, чем больше вносимое сопротивление (7.17), т. е. чем меньше нагрузочное сопротивление  $R$ . Согласно же формуле (7.18) при этом также увеличивается к. п. д. контура.

Получается существенное противоречие: при необходимости получить узкую полосу пропускания и большой к. п. д. невозможно должным образом выбрать нагрузочное сопротивление.

## § 7.2. ПАРАЛЛЕЛЬНЫЙ КОНТУР

### 1. Коэффициент передачи

Параллельный двухполюсник (см. рис. 5.26) может быть использован в схеме четырехполюсника, которая известна под названием параллельного контура (рис. 7.8). Вследствие резонанса в параллельном двухполюснике в таком четырехполюснике также наблюдаются резонансные явления, которые определяют его свойства.

Коэффициент передачи для схемы параллельного контура, как для схемы делителя напряжения, равен

$$\dot{K} = \frac{\dot{Z}}{R_i + \dot{Z}}, \quad (7.22)$$

где  $\dot{Z}$  — сопротивление (5.58) параллельного двухполюсника.

При резонансе, когда сопротивление параллельного двухполюсника максимально, коэффициент передачи также максимален:

$$\dot{K}|_{\omega=\omega_0} = K_0 = K_{\text{max}} = \frac{R_0}{R_i + R_0}, \quad (7.23)$$

где резонансное сопротивление двухполюсника  $R_0$  определяется уравнением (5.52).

Из соотношений (7.22) и (7.23) находим относительный коэффициент передачи:

$$\dot{A} = \frac{\dot{K}}{K_{\text{max}}} = \frac{R_i + R_0}{R_i + \dot{Z}} \cdot \frac{\dot{Z}}{R_0}. \quad (7.24)$$

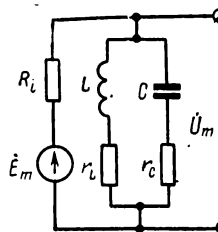


Рис. 7.8. Параллельный контур

Подставив сюда значение  $\dot{Z}$  из соотношения (5.58), получим:

$$A = \frac{R_i + R_0}{R_i + \frac{R_0}{1 + jQv}} \cdot \frac{1}{1 + jQv} = \frac{1}{1 + j \frac{R_i}{R_i + R_0} Qv},$$

или

$$A = \frac{1}{1 + jQ_{\text{экв}}v} = \frac{1}{1 + j\xi}, \quad (7.25)$$

где

$$Q_{\text{экв}} = \frac{R_i}{R_i + R_0} Q < Q \quad (7.26)$$

— эквивалентная добротность параллельного контура, учитывающая влияние внутреннего сопротивления источника на коэффициент передачи;

$\xi$  — обобщенная расстройка (5.41), определяемая через эквивалентную добротность  $Q_{\text{экв}}$ .

Эквивалентной добротности соответствует эквивалентное затухание

$$d_{\text{экв}} = \frac{1}{Q_{\text{экв}}} = \left(1 + \frac{R_0}{R_i}\right) d = d + d_{\text{вн}}. \quad (7.27)$$

Здесь в соответствии с формулами (5.39) и (5.52)

$$d_{\text{вн}} = \frac{R_0}{R_i} d = \frac{\rho}{R_i} \quad (7.28)$$

— вносимое затухание, учитывающее влияние внутреннего сопротивления  $R_i$ .

Согласно определению (5.39) вносимому затуханию (7.28) соответствует вносимое сопротивление

$$r_{\text{вн}} = \rho d_{\text{вн}} = \frac{\rho^2}{R_i}. \quad (7.29)$$

При этом эквивалентная добротность (7.26) с учетом соотношения (5.38) может быть определена следующим образом:

$$Q_{\text{экв}} = \frac{\rho}{r + r_{\text{вн}}}. \quad (7.30)$$

Следует подчеркнуть, что введение в рассматриваемом случае понятия вносимого сопротивления является лишь удобным расчетным приемом. Однако вносимое сопротивление (7.29) лишено того физического смысла, которое имеет вносимое сопротивление (7.17).

Действительно, вносимое сопротивление (7.17) можно включить в схему, убрав нагрузочное сопротивление, и процессы в схеме при этом не изменятся. Внутреннее же сопротивление  $R_i$  нельзя убрать из схемы, заменив его вносимым сопротивлением (7.29), поскольку при  $R_i = 0$  выходное напряжение не будет зависеть от частоты,



какова бы ни была добротность контура, а при  $R_i = \infty$  получается  $\dot{U}_m = 0$ .

Ниже этот вопрос рассматривается с энергетических позиций.

## 2. Частотные и фазовые характеристики

Из соотношения (7.25) определяются уравнения частотной и фазовой характеристик параллельного контура как четырехполосника:

$$A = \frac{1}{\sqrt{1 + Q_{\text{экв}}^2 \nu^2}} = \frac{1}{\sqrt{1 + \xi^2}}, \quad (7.31)$$

$$\Delta\theta = -\arctg Q_{\text{экв}} \nu = -\arctg \xi. \quad (7.32)$$

Эти уравнения отличаются от аналогичных уравнений (7.7а) и (7.14) для последовательного контура только значением добротности. Следовательно, форма частотных и фазовых характеристик параллельного и последовательного контуров получается одинаковой. Следует лишь учитывать, что в отличие от резонансной фазы (7.13) последовательного контура резонансная фаза параллельного контура равна нулю, как это видно из соотношения (7.23):

$$\Theta_0 = 0 \quad (7.33)$$

и

$$\Delta\theta = \Theta. \quad (7.34)$$

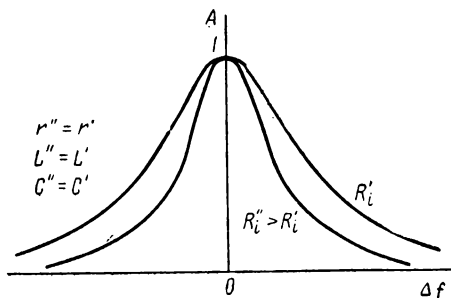


Рис. 7.9. Влияние внутреннего сопротивления источника на частотные характеристики параллельного контура

Благодаря указанному совпадению частотных и фазовых характеристик параметры параллельного контура влияют на эти характеристики так же, как и в случае последовательного контура. Отличие заключается лишь во влиянии внутреннего сопротивления источника, поскольку в последовательном контуре с ростом  $R_i$  добротность уменьшается, а в параллельном контуре, как видно из формул (7.26) — (7.30), эквивалентная добротность при этом увеличивается. Поэтому, в частности, с ростом  $R_i$  полоса пропускания параллельного контура уменьшается (рис. 7.9), как следует из формул (7.9), (7.10) при подстановке в них эквивалентной добротности (7.30).

Из различного влияния внутреннего сопротивления источника на частотные характеристики последовательного и параллельного контуров можно сделать следующий вывод. Если необходима частотная характеристика с резко выраженным максимумом и малой полосой пропускания, надо применять последовательный контур

при малых  $R_i$  и параллельный контур при больших  $R_i$ . В частности, в последовательном контуре стремятся обеспечить

$$R_i \ll \rho, \quad (7.35)$$

а в параллельном контуре выбирают

$$R_i \gg R_0 = Q\rho. \quad (7.36)$$

При соблюдении условий (7.35) и (7.36) полоса пропускания последовательного и параллельного контуров получается практически одинаковой, если оба контура собраны из одинаковых элементов.

При выполнении условия (7.36) выражения (7.22) и (7.24) упрощаются:

$$\dot{K} \approx \frac{\dot{Z}}{R_i}, \quad A \approx \frac{Z}{R_0}. \quad (7.37)$$

Таким образом, при  $R_i \gg R_0$  частотная характеристика  $A = \frac{Z}{R_0}$  практически совпадает с графиком частотной зависимости сопротивления параллельного двухполюсника (см. рис. 5.27).

### 3. Эквивалентный последовательный контур

Из аналогии между уравнениями (7.31), (7.32) и (7.7а), (7.14) следует, что последовательный контур, изображенный на рис. 7.10,а, имеет в относительном масштабе такие же частотные и фазовые

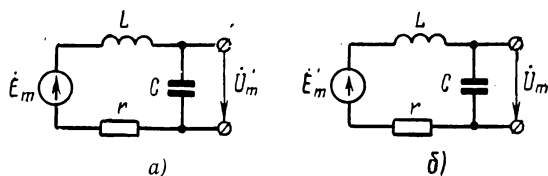


Рис. 7.10. Эквивалентные схемы параллельного контура

характеристики, как и параллельный контур (см. рис. 7.8), если

$$r = r_L + r_C + \frac{\rho^2}{R_i}.$$

Однако в схемах рис. 7.8 и 7.10, а выходные напряжения при резонансе отличаются по амплитуде и фазе, как это видно из соотношений (7.23), (7.33) и (7.60), (7.13). Тем не менее параллельный контур может быть заменен эквивалентным последовательным контуром, если под эквивалентностью понимать совпадение выходных

напряжений  $\dot{U}_m$  (см. рис. 7.8) и  $\dot{U}'_m$  (см. рис. 7.10, а). Для этого надо изменить э. д. с.  $\dot{E}_m$  до такого значения  $\dot{E}'_m$ , чтобы выходное напряжение стало равно  $\dot{U}_m$  (рис. 7.10, б).

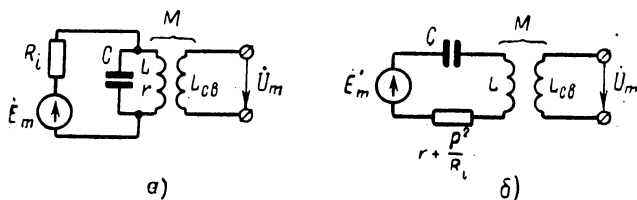


Рис. 7.11. Эквивалентное преобразование параллельного контура с катушкой связи

Значение  $\dot{E}'_m$  можно найти из условия совпадения при резонансе выходных напряжений в схемах рис. 7.8 и 7.10, б:

$$\dot{U}_{m0} = \frac{R_0}{R_i + R_0} \dot{E}_m = -jQ_{\text{экв}} \dot{E}'_m.$$

Отсюда

$$\dot{E}'_m = j \frac{R_0}{R_i + R_0} \cdot \frac{1}{Q_{\text{экв}}} \dot{E}_m,$$

или с учетом формул (7.26), (5.52) и (5.38)

$$\dot{E}'_m = j \frac{\rho}{R_i} \dot{E}_m. \quad (7.38)$$

Если выходное напряжение в параллельном контуре снимается с помощью катушки связи  $L_{\text{св}}$  (рис. 7.11, а), то аналогично предыдущему такому контуру соответствует эквивалентный последовательный контур, изображенный на рис. 7.11, б. Однако в этом случае вместо э. д. с. (7.38) следует взять эквивалентную э. д. с.

$$\dot{E}'_m = -j \frac{\rho}{R_i} \dot{E}_m. \quad (7.39)$$

#### 4. Энергетические соотношения

Если параллельный контур работает в режиме холостого хода (см. рис. 7.8), то полезной является мощность, расходуемая в самом контуре. При этом резонансный к. п. д. определяется в соответствии с формулой (2.95):

$$\eta = \frac{1}{1 + \frac{R_i}{R_0}}. \quad (7.40)$$

Если к контуру подключается нагрузочное сопротивление  $R$ , то при резонансе получается эквивалентная схема, изображенная на рис. 7.12.

Подключение нагрузки снижает эквивалентное резонансное сопротивление  $R_0$  до значения

$$R_{0\text{ экв}} = \frac{R_0 R}{R_0 + R} = \frac{\rho^2}{r + r_{\text{вн}}},$$

где сопротивление  $r_{\text{вн}}$  определяется, как и в последовательном контуре, по формуле (7.17).

Таким образом, при рассмотрении частотных и фазовых характеристик параллельного контура с нагрузкой необходимо учитывать два вносимых сопротивления — со стороны источника и со стороны нагрузки, так что

$$Q_{\text{экв}} = \frac{\rho}{r + \frac{\rho^2}{R_0} + \frac{\rho^2}{R}}. \quad (7.41)$$

В частности, значением эквивалентной добротности (7.41) следует пользоваться при определении полосы пропускания по формулам (7.9) и (7.10). При этом, как и прежде, расширение полосы пропускания за счет влияния нагрузки увеличивается при уменьшении нагрузочного сопротивления.

Сопротивление, вносимое со стороны нагрузки, отображает, как и в последовательном контуре, потери мощности на самом нагрузочном сопротивлении. Что касается сопротивления, вносимого со стороны источника, то расходуемая на нем активная мощность не равна мощности, рассеиваемой на внутреннем сопротивлении источника. Это подтверждается непосредственным расчетом, который посилено сделать каждому студенту самостоятельно. Указанное энергетическое несоответствие свидетельствует об отсутствии физического смысла у сопротивления (7.29), которое можно использовать только в качестве удобной расчетной величины, как это и отмечалось выше\*.

Для схемы контура с нагрузкой (см. рис. 7.12) к.п.д. равен

$$\eta = \frac{P_{a0}}{P_{a0} + P_{a1} + P_{a2}},$$

где

$$P_{a0} = \frac{U_{m0}^2}{2R}$$

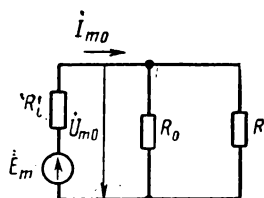


Рис. 7.12. Подключение нагрузки к параллельному контуру

\* Однако при определенных эквивалентных преобразованиях схемы вносимое сопротивление (7.29) обретает физический смысл.

— полезная мощность в нагрузочном сопротивлении  $R$ ;

$$P_{a1} = \frac{U_{m0}^2}{2R_0}$$

— мощность, теряемая в контуре;

$$P_{a2} = \frac{1}{2} R_i I_{m0}^2$$

— мощность, расходуемая на внутреннем сопротивлении источника.

Из этих формул, учитывая, что

$$U_{m0} = \frac{RR_0}{R + R_0} I_{m0},$$

находим к. п. д. параллельного контура с нагрузкой:

$$\eta = \frac{1}{R_i \left(1 + \frac{R}{R_0}\right) \left(\frac{1}{R_i} + \frac{1}{R_0} + \frac{1}{R}\right)}. \quad (7.42)$$

Из уравнения (7.42) видно, что к.п.д. стремится к нулю при  $R \rightarrow 0$  и  $R \rightarrow \infty$ . Следовательно, существует оптимальное значение нагрузочного сопротивления  $R = R_{\text{opt}}$ , при котором к.п.д. получается максимальным. Это оптимальное нагрузочное сопротивление находят из условия  $\frac{d}{dR} \left(\frac{1}{\eta}\right) = 0$ :

$$R_{\text{opt}} = \frac{R_0}{\sqrt{1 + \frac{R_0}{R_i}}}. \quad (7.43)$$

Значение к.п.д. зависит при этом от соотношения резонансного сопротивления контура и внутреннего сопротивления источника.

## 5. Многоэлементные параллельные контуры

При использовании в схеме четырехполюсника многоэлементных двухполюсников получаются многоэлементные параллельные контуры, называемые также сложными контурами. Для примера на

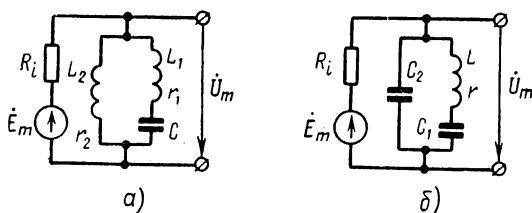


Рис. 7.13. Трехэлементные параллельные контуры

рис. 7.13 показаны трехэлементные параллельные контуры. Иногда они называются параллельными контурами второго вида (рис. 7.13, а) и третьего вида (рис. 7.13, б).

Применяя сложный контур второго вида, можно согласовывать нагрузку с источником, как это описывалось выше (см. рис. 5.32, а).

Другое назначение сложных контуров заключается в подавлении специфических помех на фиксированных частотах.

Если выбрать внутреннее сопротивление источника согласно условию (7.36), то коэффициент передачи сложных контуров определяется соотношениями (7.37). При этом частотная характеристика сложного контура, как и характеристика параллельного контура, совпадает с графиком частотной зависимости модуля сопротивления соответствующего многоэлементного двухполюсника.

Частотные характеристики контуров второго и третьего вида для случая  $R_i \gg R_0$  показаны соответственно на рис. 7.14, а и б (см. рис. 5.30, характеристики  $Z_{II}$  и  $Z_{III}$ ).

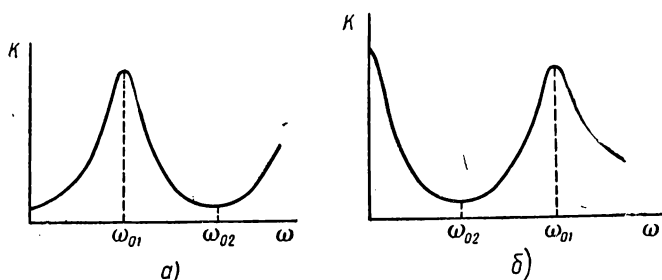


Рис. 7.14. Частотные характеристики трехэлементных параллельных контуров

Резонансные частоты  $\omega_{01}$  и  $\omega_{02}$  могут быть выбраны независимо. Поэтому у сложного контура, настроенного на частоту полезного сигнала  $\omega_{01}$ , резонансная частота  $\omega_{02}$  может быть выбрана равной частоте помехи. При этом за счет малого коэффициента передачи на частоте  $\omega_{02}$  достигается особо сильное подавление помехи.

В частности, применяя в передатчике контур второго вида, можно выбрать  $\omega_{02} = 2\omega_{01}$  или  $\omega_{02} = 3\omega_{01}$ . При этом будет обеспечена сильная фильтрация второй или третьей гармоники.

В контуре же третьего вида, выбрав  $\omega_{01} = 2\omega_{02}$  или  $\omega_{01} = 3\omega_{02}$ , можно выделить вторую или третью гармонику, резко подавив при этом первую гармонику. Такой способ выделения колебаний повышенных частот применяется в так называемых умножителях частоты, которые рассматриваются в курсе нелинейных и параметрических цепей.

## § 7.3. СВЯЗАННЫЕ КОНТУРЫ

### 1. Виды связи

Связанными контурами называется система из нескольких резонансных контуров, имеющих в качестве элемента связи общий реактивный элемент. Здесь изучаются простейшие системы из двух

связанных контуров, получившие наибольшее распространение. Многоконтурные связанные системы рассматриваются в гл. 9.

Связь бывает индуктивной (рис. 7.15, а) и емкостной (рис. 7.15, б). При этом элементы связи  $L_{св}$  и  $C_{св}$  входят в состав обоих контуров,

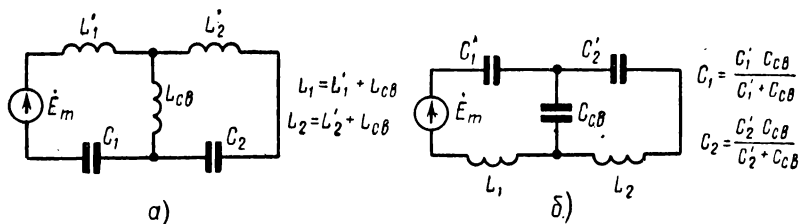


Рис. 7.15. Контур с внутренней связью

и их сопротивления  $\dot{Z}_{св} = j\omega L_{св}$  и  $\dot{Z}_{св} = \frac{1}{j\omega C_{св}}$  являются по определению сопротивлениями связи.

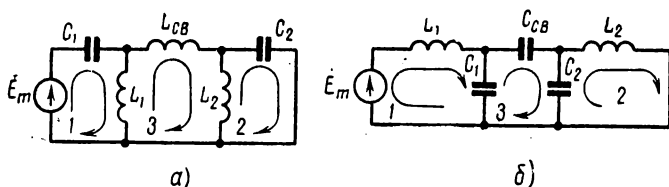


Рис. 7.16. Контур с внешней связью

Возможна также индуктивная и емкостная связь, при которой элементы связи  $L_{св}$  и  $C_{св}$  не входят в состав контуров (рис. 7.16, а и б).

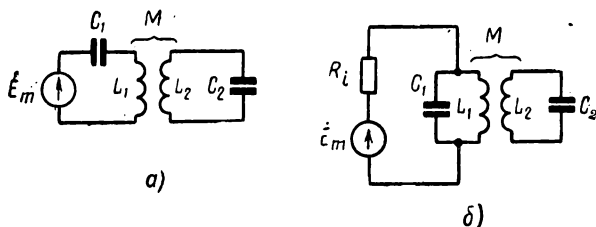


Рис. 7.17. Контур с трансформаторной связью

В этих схемах имеется три независимых контура, но только два из них (1 и 2) являются резонансными. Поэтому такие схемы рас-

смаstrиваются как двухконтурные связанные системы. При этом имеется в виду возможность пересчета треугольников  $L_1$ ,  $L_{св}$ ,  $L_2$  и  $C_1$ ,  $C_{св}$ ,  $C_2$  на соответствующую эквивалентную звезду, после чего схема приводится к обычному виду (см. рис. 7.15).

Схемы рис. 7.16 называются схемами с внешней связью. В отличие от них обычные схемы (см. рис. 7.15) называются схемами с внутренней связью. Для контуров с внешней связью понятие сопротивления связи применимо только после их эквивалентного приведения к схемам с внутренней связью.

В качестве индуктивного элемента связи может также использоваться элемент взаимной индукции  $M$  (рис. 7.17). Такие схемы называются схемами с трансформаторной связью. В отличие от них индуктивная связь в схеме рис. 7.15, а называется автотрансформаторной. При трансформаторной связи сопротивление взаимной индукции играет роль сопротивления связи, что отмечалось выше.

При любом виде связи между контурами источник может включаться последовательно, как на рис. 7.15, 7.16, 7.17, а и параллельно, как на рис. 7.17, б. Учитывая возможность замены параллельного контура эквивалентным последовательным контуром (см. рис. 7.10, б, 7.11, б), в дальнейшем изложении будем рассматривать только последовательное включение источника.

Контур, в который включается источник, будем называть первичным, а контур, в котором снимается выходное напряжение, — вторичным.

Напряжение обычно снимается с емкости вторичного контура, как показано на рис. 7.18. При этом связанные контуры образуют четырехполюсник.

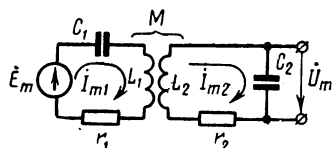


Рис. 7.18. Эквивалентная схема связанных контуров

## 2. Коэффициент связи

Сопротивление связи, непригодное для характеристики контуров с внешней связью, не является универсальным параметром. Поэтому вводится понятие коэффициента связи, который можно применить для количественной оценки любого вида связи.

С этой целью рассматриваются четырехполюсники, образованные элементом связи и реактивными элементами связанных контуров, одноименными с элементом связи. Такие четырехполюсники связи для контуров, изображенных на рис. 7.15, 7.16 и 7.17, показаны соответственно на рис. 7.19, а—д.

Коэффициентом связи называется среднее геометрическое значение модулей коэффициентов трансформации четырехполюсников



связи при передаче слева направо и справа налево в режиме холостого хода:

$$k_{св} = \sqrt{n_{U_{xx}} n'_{U_{xx}}}, \quad (7.44)$$

где в соответствии с рис. 7.19

$$n_{U_{xx}} = \frac{U_{m2}}{U_{m1}}, \quad (7.45)$$

$$n'_{U_{xx}} = \frac{U'_{m2}}{U'_{m1}}. \quad (7.46)$$

Коэффициенты трансформации (7.45), (7.46) для схем рис. 7.19, а—г определяются по формуле (3.1), а для трансформаторной схемы

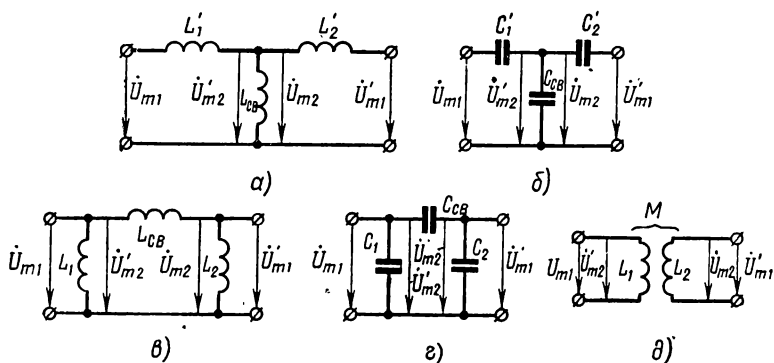


Рис. 7.19. Четырехполюсники связи

(рис. 7.19, д) — по формулам (2.140) с учетом того, что при передаче слева направо  $I_{m2} = 0$ , а при передаче справа налево  $I_{m1} = 0$  (режим холостого хода).

Зная коэффициенты трансформации (7.45) и (7.46), из определения (7.44) получим следующие значения коэффициента связи:

$$k_{св} = \frac{L_{св}}{\sqrt{L_1 L_2}} = \frac{1}{\sqrt{\left(1 + \frac{L_1'}{L_{св}}\right) \left(1 + \frac{L_2'}{L_{св}}\right)}} \quad (7.47)$$

— для автотрансформаторной связи (см. рис. 7.15, а);

$$k_{св} = \frac{\sqrt{C_1 C_2}}{C_{св}} = \frac{1}{\sqrt{\left(1 + \frac{C_{св}}{C_1}\right) \left(1 + \frac{C_{св}}{C_2}\right)}} \quad (7.48)$$

— для внутреннеемкостной связи (см. рис. 7.15, б);

$$k_{св} = \frac{1}{\sqrt{\left(1 + \frac{L_{св}}{L_1}\right) \left(1 + \frac{L_{св}}{L_2}\right)}} \quad (7.49)$$

— для внешнеиндуктивной связи (см. рис. 7.16, а);

$$k_{\text{св}} = \frac{1}{\sqrt{\left(1 + \frac{C_1}{C_{\text{св}}}\right)\left(1 + \frac{C_2}{C_{\text{св}}}\right)}} \quad (7.50)$$

— для внешнеемкостной связи (см. рис. 7.16, б);

$$k_{\text{св}} = \frac{M}{\sqrt{L_1 L_2}} \quad (7.51)$$

— для трансформаторной связи (см. рис. 7.17).

Из формул (7.47) — (7.51) видно, что при автотрансформаторной, трансформаторной и внешнеемкостной связи коэффициент связи увеличивается с ростом параметра элемента связи ( $L_{\text{св}}$ ,  $M$ ,  $C_{\text{св}}$ ). При внешнеиндуктивной и внутреннеемкостной связи величина связи уменьшается с ростом параметра связи ( $L_{\text{св}}$ ,  $C_{\text{св}}$ ).

### 3. Коэффициент передачи

Используя коэффициент связи, являющийся универсальным параметром, процессы в связанных контурах можно описывать одинаковыми уравнениями независимо от вида связи. Поэтому достаточно рассмотреть свойства одной какой-либо схемы связанных контуров, например схемы с трансформаторной связью (см. рис. 7.18), которая применяется наиболее часто.

Для контурных токов в этой схеме согласно соотношениям (2.140) можно составить следующие уравнения:

$$\begin{aligned} \dot{Z}_1 \dot{I}_{m1} \pm \dot{Z}_{\text{св}} \dot{I}_{m2} &= \dot{E}_m, \\ \pm \dot{Z}_{\text{св}} \dot{I}_{m1} + \dot{Z}_2 \dot{I}_{m2} &= 0, \end{aligned} \quad (7.52)$$

где с учетом формулы (5.40а)

$$\begin{aligned} \dot{Z}_1 &= r_1 + jX_1 = r_1 (1 + jQ_1 v_1), \\ \dot{Z}_2 &= r_2 + jX_2 = r_2 (1 + jQ_2 v_2), \\ \dot{Z}_{\text{св}} &= jX_{\text{св}} = \dot{Z}_M = j\omega M. \end{aligned} \quad (7.53)$$

Из уравнений (7.52) определяем контурные токи:

$$\dot{I}_{m1} = \frac{\dot{E}_m \dot{Z}_2}{\dot{Z}_1 \dot{Z}_2 - \dot{Z}_{\text{св}}^2}, \quad (7.54)$$

$$\dot{I}_{m2} = \mp \frac{\dot{E}_m \dot{Z}_{\text{св}}}{\dot{Z}_1 \dot{Z}_2 - \dot{Z}_{\text{св}}^2} = \mp \frac{\dot{Z}_{\text{св}}}{\dot{Z}_2} \dot{I}_{m1}. \quad (7.55)$$

Зная ток (7.54) и выходное напряжение  $\dot{U}_m = \dot{Z}_{c2} \dot{I}_{m2}$ , находим комплексный коэффициент передачи  $\dot{K} = \frac{\dot{U}_m}{\dot{E}_m}$ :

$$\dot{K} = \mp \frac{\dot{Z}_{cb} \dot{Z}_{c2}}{\dot{Z}_1 \dot{Z}_2 - \dot{Z}_{cb}^2}. \quad (7.56)$$

Подставив сюда значения сопротивлений (7.53) и  $\dot{Z}_{c2} = \frac{1}{j\omega C_2}$ , получим

$$\dot{K} = \mp \sqrt{\frac{C_1}{C_2}} \cdot \frac{\sqrt{Q_1 Q_2} \kappa}{1 + \kappa^2 - Q_1 Q_2 v_1 v_2 + j(Q_1 v_1 + Q_2 v_2)}, \quad (7.57)$$

где  $\kappa$  — фактор связи, который с учетом формулы (7.51) равен

$$\kappa = \frac{k_{cb}}{\sqrt{d_1 d_2}} \approx \frac{X_{cb}}{\sqrt{r_1 r_2}}. \quad (7.58)$$

Наибольшее практическое значение имеют два случая, когда  $L_1 = L_2 = L$ ,  $C_1 = C_2 = C$  и  $L_1 = L_2 = L$ ,  $C_1 = C_2 = C$ ,  $r_1 = r_2 = r$ . В первом случае из формулы (7.57) получаем (при  $v_1 = v_2 = v$ ,  $\xi = \sqrt{Q_1 Q_2 v}$ )

$$\dot{K} = \mp \frac{\sqrt{Q_1 Q_2} \kappa}{1 + \kappa^2 - Q_1 Q_2 v^2 + j(Q_1 + Q_2)v} = \mp \frac{\sqrt{Q_1 Q_2} \kappa}{1 + \kappa^2 - \xi^2 + j\left(\sqrt{\frac{Q_1}{Q_2}} + \sqrt{\frac{Q_2}{Q_1}}\right)\xi}. \quad (7.59)$$

Во втором случае (при  $Q_1 = Q_2 = Q$ )

$$\dot{K} = \mp \frac{Q\kappa}{1 + \kappa^2 - \xi^2 + j2\xi}. \quad (7.60)$$

Для анализа этих уравнений целесообразно предварительно рассмотреть физические процессы в связанных контурах.

#### 4. Взаимное влияние связанных контуров

Рассматривая связанные контуры в режиме холостого хода, из формулы (7.54) определяем входное сопротивление четырехплюсника  $\dot{Z}_{вх1} = \frac{\dot{E}_m}{\dot{I}_{m1}}$ :

$$\dot{Z}_{вх1} = \dot{Z}_1 - \frac{\dot{Z}_{cb}^2}{\dot{Z}_2}. \quad (7.61)$$

Ввиду симметричного расположения контуров входное сопротивление справа (при изменении направления передачи) можно получить непосредственно из формулы (7.61) путем перестановки  $\dot{Z}_1$  и  $\dot{Z}_2$ :

$$\dot{Z}_{вх2} = \dot{Z}_2 - \frac{\dot{Z}_{cb}^2}{\dot{Z}_1}. \quad (7.62)$$

Вторые слагаемые в равенствах (7.61), (7.62) можно рассматривать как некоторые вносимые сопротивления:

$$\begin{aligned}\dot{Z}_{вх1} &= \dot{Z}_1 + \dot{Z}_{вн1}, \\ \dot{Z}_{вх2} &= \dot{Z}_2 + \dot{Z}_{вн2},\end{aligned}\quad (7.63)$$

где

$$\dot{Z}_{вн1} = r_{вн1} + jX_{вн1} = -\frac{\dot{Z}_{св}^2}{\dot{Z}_2}, \quad \dot{Z}_{вн2} = r_{вн2} + jX_{вн2} = -\frac{\dot{Z}_{св}^2}{\dot{Z}_1}, \quad (7.64)$$

$$\begin{aligned}r_{вн1} &= \frac{X_{св}^2}{Z_2^2} r_2, & X_{вн1} &= -\frac{X_{св}^2}{Z_2^2} X_2, \\ r_{вн2} &= \frac{X_{св}^2}{Z_1^2} r_1, & X_{вн2} &= -\frac{X_{св}^2}{Z_1^2} X_1.\end{aligned}\quad (7.65)$$

Согласно этим формулам ток (7.55) во вторичном контуре может быть представлен следующим образом:

$$\dot{I}_{m2} = \mp \frac{\dot{E}_m \dot{Z}_{св}}{\dot{Z}_{1\text{эКВ}} \dot{Z}_2} = \mp \frac{\dot{E}_m \dot{Z}_{св}}{\dot{Z}_1 \dot{Z}_{2\text{эКВ}}}, \quad (7.55a)$$

где эквивалентные сопротивления первичного и вторичного контуров равны соответствующим входным сопротивлениям:

$$\begin{aligned}\dot{Z}_{1\text{эКВ}} &= \dot{Z}_{вх1} = \dot{Z}_1 + \dot{Z}_{вн1}, \\ \dot{Z}_{2\text{эКВ}} &= \dot{Z}_{вх2} = \dot{Z}_2 + \dot{Z}_{вн2}.\end{aligned}\quad (7.63a)$$

При такой форме записи удобно учитывать взаимное влияние связанных контуров. Оно заключается в том, что при передаче слева направо не только ток первичного контура наводит э. д. с. во вторичном контуре, но и ток  $\dot{I}_{m2}$  согласно первому уравнению (7.52) наводит э. д. с.  $\dot{E}_m = \mp \dot{Z}_{св} \dot{I}_{m2}$  в первичном контуре. Это приводит к соответствующему изменению тока  $\dot{I}_{m1}$ , что можно трактовать как результат изменения сопротивления первичного контура на величину  $\dot{Z}_{вн1}$ . Так как вследствие взаимного влияния контуров ток  $\dot{I}_{m1}$  меняется не только по амплитуде, но и по фазе, то это учитывается комплексным характером вносимого сопротивления  $\dot{Z}_{вн1}$ .

Изменение фазы тока  $\dot{I}_{m1}$ , т. е. наличие реактивной составляющей  $X_{вн1}$  вносимого сопротивления, означает расстройку первичного контура из-за влияния вторичного контура. Из формул (7.64), (7.65) видно, что указанная расстройка отсутствует, если вторичный контур сам настроен, т. е.  $X_{вн1} = X_2 = 0$ .

Все сказанное о взаимном влиянии контуров в равной мере относится и к случаю передачи справа налево. В частности, согласно вторым равенствам (7.63), (7.63a) первичный контур тоже вносит расстройку во вторичный контур. Эта расстройка отсутствует при настроенном первичном контуре, когда  $X_1 = 0$ .

При передаче слева направо взаимное влияние контуров приводит не только к изменению тока  $\dot{I}_{m1}$ , но и к соответствующему изменению тока  $\dot{I}_{m2}$ , как это следует из второго равенства (7.55).

Это изменение тока  $I_{m2}$  за счет взаимного влияния контуров и учитывается в уравнениях (7.55а) с помощью вносимых сопротивлений  $Z_{вн1}$  или  $Z_{вн2}$ .

Удобство соотношений (7.55а) заключается в возможности вычисления тока  $I_{m2}$  непосредственно по закону Ома, но с учетом взаимного влияния контуров. Сначала вычисляется ток  $I_{m1} = \frac{\dot{E}_m}{Z_{1экв}}$  или ток  $I'_{m1} = \frac{\dot{E}_m}{Z_1}$ . Затем определяется э. д. с. во вторичном контуре  $\dot{E}_{m2} = \mp \dot{Z}_{св} I'_{m1}$  или  $\dot{E}'_{m2} = \mp \dot{Z}_{св} I_{m1}$ . Наконец, определяется ток  $I_{m2} = \frac{\dot{E}_{m2}}{Z_2} = \frac{\dot{E}'_{m2}}{Z_{2экв}}$ .

## 5. Резонансные явления

В предыдущем пункте упоминалось о настройке связанных контуров в резонанс и об их взаимной расстройке. Рассмотрим этот вопрос более подробно.

Из соотношений (7.63) — (7.65) видно, что с учетом взаимного влияния контуров в схеме устанавливаются резонансы при выполнении условий

$$X_{вх1} = X_1 - \frac{X_{св}^2}{Z_2^2} X_2 = 0 \quad (7.66)$$

или

$$X_{вх2} = X_2 - \frac{X_{св}^2}{Z_1^2} X_1 = 0. \quad (7.67)$$

Эти условия резонанса могут соблюдаться при настройке в резонанс каждого из контуров:

$$X_1 = X_2 = 0. \quad (7.68)$$

Такой резонанс в системе связанных контуров называется полным резонансом.

Если условие (7.66) выполняется без соблюдения условия (7.68), то резонанс называется первым частным резонансом. Выполнение условия (7.67) без соблюдения условия (7.68) соответствует второму частному резонансу. Первый и второй частные резонансы могут быть достигнуты соответствующей настройкой первичного или вторичного контура, т. е. соответствующим изменением сопротивления  $X_1$  или  $X_2$ . Таким образом, частные резонансы достигаются путем компенсации собственного реактивного сопротивления контура вносимым в него реактивным сопротивлением.

Любое из условий резонанса (7.66) — (7.68) нарушается при изменении реактивности одного из контуров, что и означает внесение расстройки в другой контур.

В схеме связанных контуров полный и частные резонансы могут получиться не только при изменении настройки контуров, но, как и обычно, при изменении частоты, когда настройка контуров является фиксированной. Рассмотрим при этом частотные характеристики входного сопротивления, полагая контуры одинаковыми. Тогда соотношения (7.63), (7.64) принимают следующий вид:

$$\dot{Z}_{\text{вх}} = \dot{Z} + \dot{Z}_{\text{вн}}, \quad (7.63б)$$

$$\dot{Z}_{\text{вн}} = \frac{X_{\text{св}}^2}{\dot{Z}} = \frac{X_{\text{св}}^2}{r(1 + j\xi)}. \quad (7.64а)$$

Из соотношений (7.64а) и (5.58) видно, что вносимое сопротивление аналогично сопротивлению параллельного контура с резонансным сопротивлением  $R_0 = \frac{X_{\text{св}}^2}{r}$ . Таким образом, согласно равенству (7.63б) входное сопротивление связанных контуров представляется в виде суммы сопротивлений последовательного и параллельного контуров (рис. 7.20, а). Для такой схемы условия резонанса (7.66), (7.67) принимают вид

$$X_{\text{вх}} = X + X_{\text{вн}} = 0,$$

или с учетом формул (7.64а) и (7.58)

$$jr\xi \left( 1 - \frac{x^2}{1 + \xi^2} \right) = 0.$$

Это условие выполняется при расстройках

$$\xi_1 = 0 \quad (7.69)$$

и

$$\xi_{2,3} = \pm \xi_0 = \pm \sqrt{x^2 - 1}, \quad (7.70)$$

как показано на рис. 7.20, б. На этом же рисунке показан график изменения вносимого сопротивления  $r_{\text{вн}} = \frac{X_{\text{св}}^2}{r(1 + \xi^2)}$ , которое при  $\xi = \pm \xi_0$  становится равным

$$r_{\text{вн}} = \frac{X_{\text{св}}^2}{rx^2} = r. \quad (7.71)$$

Согласно рис. 7.20, б в рассматриваемой схеме получается три резонанса, как это и должно быть в четырехэлементном каноническом

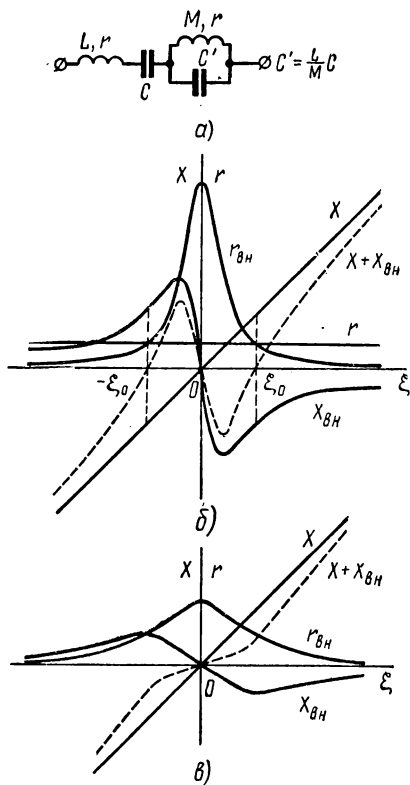


Рис. 7.20. Эквивалентная схема первичного контура и характеристики его сопротивления

двухполюснике (см. рис. 5.31). С другой стороны, в исходной схеме связанных контуров это соответствует получению полного резонанса при выполнении условия (7.69) и частных резонансов при соблюдении условия (7.70).

Однако условие (7.70) имеет физический смысл только при  $\kappa > 1$ . Если  $\kappa = 1$ , то в схеме рис. 7.20, а остается только один резонанс при  $\xi = 0$ , т. е. частные резонансы сливаются с полным резонансом. При  $\kappa < 1$  частные резонансы вообще пропадают, так как расстройки (7.70) становятся мнимыми (рис. 7.20, в).

С точки зрения процессов в эквивалентной схеме рис. 7.20, а исчезновение частных резонансов при  $\kappa \leq 1$  ( $X_{св} \leq r$ ) обусловлено таким уменьшением добротности и резонансного сопротивления  $R_0 = \frac{X_{св}^2}{r}$  параллельного двухполюсника, при котором становится невозможной компенсация реактивных сопротивлений (ср. рис. 7.20, в и 5.31, в).

При резонансе в связанных контурах его входное сопротивление получается чисто активным:

$$Z_{вх1} = r_{вх1} = r_1 + \frac{X_{св}^2}{Z_2^2} r_2 \quad (7.72)$$

— при частном резонансе;

$$Z_{вх1} = r_{вх1} = r_1 + \frac{X_{св}^2}{r_2} \quad (7.72a)$$

— при полном резонансе.

При этом, если первичный контур является параллельным, то его резонансное сопротивление

$$R_{01} = \frac{\rho_1^2}{r_1 + r_{вн1}} = \frac{R_0}{1 + \frac{r_{вн1}}{r_1}}, \quad (7.73)$$

где  $R_0 = \frac{\rho_1^2}{r_1}$  — резонансное сопротивление первичного контура без учета взаимного влияния связанных контуров.

## 6. Энергетические соотношения

В первичном и вторичном связанных контурах (см. рис. 7.18) активная мощность соответственно равна

$$P_{a1} = \frac{1}{2} r_1 I_{m1}^2$$

и

$$P_{a2} = \frac{1}{2} r_2 I_{m2}^2.$$

Подставив в последнее выражение значение тока  $I_{m2}$  из второго равенства (7.55) и учитывая первую формулу (7.65), получим

$$P_{a2} = \frac{1}{2} r_{вн1} I_{m1}^2.$$

Отсюда можно сделать вывод, что на вносимом в первичный контур сопротивлении расходуется численно как раз та мощность, которая передается во вторичный контур. Следовательно, энергетический смысл вносимого активного сопротивления заключается в том, что оно характеризует расход мощности в первичном контуре, происходящий за счет передачи энергии во вторичный контур.

В соответствии с первым равенством (7.63) связанные контуры можно отобразить эквивалентной схемой, показанной на рис. 7.21, а.

Учитывая энергетический смысл вносимого сопротивления, на основании этой эквивалентной схемы можно сделать вывод, что условия первого частного резонанса (7.66) и полного резонанса (7.68) являются условиями передачи максимальной активной мощности во вторичный контур. При их выполнении получается эквивалентная схема (рис. 7.21, б), в которой собственное сопротивление первичного контура  $r_1$  можно рассматривать как внутреннее сопротивление

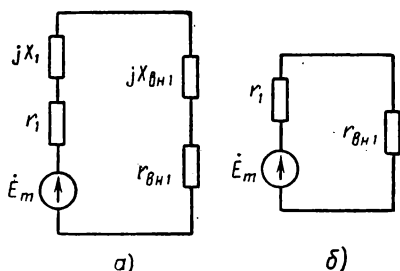


Рис. 7.21. Эквивалентные схемы расстроенного и настроенного первичного контура

источника. Вносимое же сопротивление, отображающее передачу активной мощности во вторичный контур, может рассматриваться в этой схеме как полезное нагрузочное сопротивление.

Таким образом, к. п. д. связанных контуров при резонансе и максимальная активная мощность, передаваемая во вторичный контур, должны изменяться в соответствии с рис. 2.21, где  $R = r_{вн1}$ . Согласно условию (2.92) указанная мощность имеет значение максимум  $(P_{a\max \max})$  при

$$r_1 = r_{вн1} = \frac{X_{св}^2}{Z_3^2} r_2 \quad (7.74)$$

в случае первого частного резонанса и при

$$r_1 = r_{вн1} = \frac{X_{св}^2}{r_2} \quad (7.75)$$

в случае полного резонанса.

Активная мощность  $P_{a\max \max}$  может быть получена и при втором частном резонансе. Действительно, согласно второму равенству (7.55а) эквивалентная схема связанных контуров может быть пред-



ставлена и в таком виде, как на рис. 7.22, а. В этой схеме сопротивление  $\dot{Z}_{вн2} = r_{вн2} + jX_{вн2}$  следует считать внутренним сопротивлением эквивалентного источника э. д. с.  $\dot{E}'_{m2}$ .

При втором частном резонансе, когда соблюдается условие (7.67), эквивалентная схема принимает вид, как на рис. 7.22, б. В этой схеме на сопротивлении  $r_2$  активная мощность  $P_{a\max \max}$  выделяется при соблюдении условия

$$r_2 = r_{вн2} = \frac{X_{св}^2}{Z_1^2} r_1. \quad (7.76)$$

Из уравнений (7.74) — (7.76) видно, что активная мощность  $P_{a\max \max}$  передается во вторичный контур при любом виде резонанса, если соответствующим образом подобрана связь между

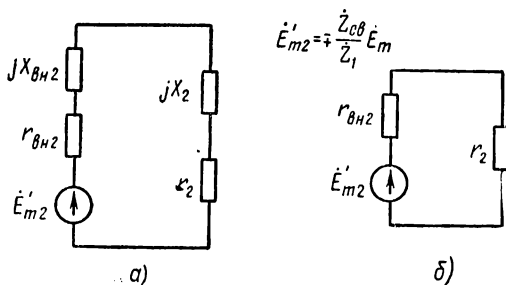


Рис. 7.22. Эквивалентные схемы расстроенного и настроенного вторичного контура

контурами. Значение связи, при котором получается мощность  $P_{a2\max \max}$ , называется оптимальным. Оптимальное сопротивление связи определяется из соотношений (7.74) — (7.76):

$$X_{св\text{opt}}^I = Z_2 \sqrt{\frac{r_1}{r_2}} \quad (7.77)$$

при первом частном резонансе,

$$X_{св\text{opt}}^{II} = Z_1 \sqrt{\frac{r_2}{r_1}} \quad (7.77a)$$

при втором частном резонансе,

$$X_{св\text{opt}} = \sqrt{r_1 r_2} \quad (7.78)$$

при полном резонансе.

При одинаковых контурах эти формулы принимают следующий вид:

$$X_{св\text{opt}}^I = X_{св\text{opt}}^{II} = Z, \quad (7.77b)$$

$$X_{св\text{opt}} = r. \quad (7.78a)$$

Любой из резонансов при оптимальной связи между контурами называется оптимальным, или сложным резонансом.

Подставляя в первую формулу (2.93) значения  $R_i = r_1$  или  $E_m = E_{m2}$  и  $R_i = r_{вн2}$ , находим активную мощность во вторичном контуре при оптимальном резонансе:

$$P_{a2 \max \max} = \frac{E_m^2}{8r_1}. \quad (7.79)$$

Этой мощности соответствует ток во вторичном контуре

$$I_{m2 \max \max} = \sqrt{\frac{2P_{a2 \max \max}}{r_2}} = \frac{E_m}{2\sqrt{r_1 r_2}} = \frac{E_m}{2X_{св \text{opt}}}. \quad (7.80)$$

Существенно отметить, что при одинаковых контурах, когда полный резонанс достигается изменением частоты источника (см. рис. 7.20, б и в), оптимальный резонанс и наибольший ток (7.80) могут быть получены только путем подбора оптимальной связи (7.78а), т. е. при

$$\kappa = \kappa_{\text{opt}} = 1. \quad (7.81)$$

В этом же случае при частных резонансах, когда  $\kappa > 1$  и  $\xi = \pm \xi_0$  (см. рис. 7.20; б), оптимальный резонанс и наибольший ток (7.80) устанавливаются автоматически. Действительно, согласно формуле (7.70) при расстройках  $\xi = \pm \xi_0$  получается

$$\kappa = \sqrt{1 + \xi_0^2},$$

т. е.

$$X_{св} = r \sqrt{1 + \xi_0^2} = Z,$$

что соответствует условию (7.77б). При этом условие (7.74) переходит в равенство (7.71). Таким образом, автоматическое установление оптимального резонанса в этом случае объясняется тем, что при расстройках  $\xi = \pm \xi_0$  получаются такие значения сопротивления контура  $Z$ , при которых вносимое активное сопротивление удовлетворяет условию (7.74).

При оптимальном резонансе согласно условиям (7.74), (7.75) резонансные сопротивления (7.72) и (7.73) принимают следующие значения:

$$r_{вх1} = 2r_1, \quad (7.72б)$$

$$R_{01} = \frac{R_0}{2}. \quad (7.73а)$$

Таким образом, нагрузочное сопротивление для источника, питающего связанные контуры при оптимальном резонансе, изменяется в два раза по сравнению с нагрузкой в виде одиночного контура, имеющего те же параметры элементов.

## 7. Частотные и фазовые характеристики

Рассмотрим сначала частотные характеристики одинаковых связанных контуров. Для такой симметричной схемы из соотношения (7.60) находим уравнение частотной характеристики:

$$K = \frac{Q\kappa}{\sqrt{(1 + \kappa^2 - \xi^2)^2 + 4\xi^2}} = \frac{Q\kappa}{\sqrt{(1 - \kappa^2 + \xi^2)^2 + 4\kappa^2}}. \quad (7.82)$$

Из этого уравнения видно, что при расстройках (7.70), когда  $\kappa > 1$ , коэффициент передачи

$$K|_{\xi = \pm \xi_0} = K_{\max \max} = \frac{Q}{2}. \quad (7.83)$$

Здесь поставлен индекс  $\max \max$ , потому что при указанных расстройках получается автоматически оптимальный резонанс,

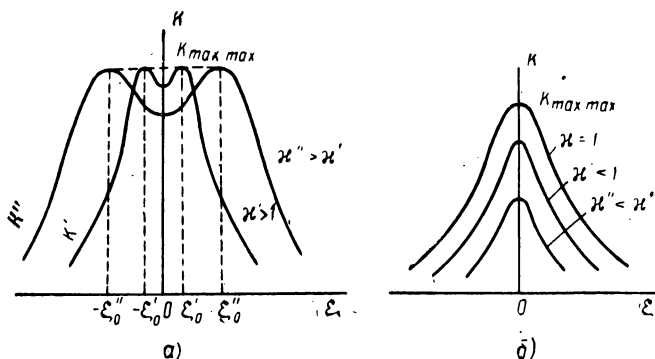


Рис. 7.23. Влияние фактора связи на частотные характеристики связанных контуров

которому соответствует ток (7.80). При полном же резонансе, когда  $\xi = 0$ , согласно уравнениям (7.82) и (7.83)

$$K|_{\xi=0} = K_0 = \frac{Q\kappa}{1 + \kappa^2} \leq K_{\max \max}. \quad (7.84)$$

Знак равенства здесь соответствует предельному (критическому) значению фактора связи

$$\kappa = \kappa_{\text{кр}} = 1, \quad (7.85)$$

при котором два максимума (7.83) исчезают.

Учитывая полученные резонансные значения коэффициента передачи и принимая во внимание значение  $K|_{\xi \rightarrow \infty} \rightarrow 0$ , приходим к выводу, что в случае  $\kappa > \kappa_{\text{кр}} = 1$  частотная характеристика имеет два «горба» при оптимальных резонансах, как показано на рис. 7.23, а.

При полном же резонансе получается минимум («впадина») частотной характеристики. Такая характеристика называется двугорбой. Согласно формулам (7.70) и (7.83), (7.84), с уменьшением фактора связи горбы частотной характеристики сдвигаются, оставаясь неизменными по величине, а глубина впадины уменьшается.

Не допуская снижения впадины ниже уровня  $K = \frac{K_{\max \max}}{\sqrt{2}}$ , из соотношения (7.84) находим, что фактор связи должен быть ограничен сверху максимальным значением

$$\kappa \leq \kappa_{\max} = 2,41. \quad (7.86)$$

Когда связь, уменьшаясь, достигает критического значения (7.85), в схеме остается только один полный резонанс, которому соответствует один максимум частотной характеристики  $K_{\max} = K_0$ , определяемый по формуле (7.84). В этом предельном случае, когда  $\kappa = \kappa_{\text{кр}}$ , при полном резонансе устанавливается одновременно и оптимальный резонанс, поскольку оптимальный и критический факторы связи (7.81) и (7.85) имеют одинаковые значения.

При дальнейшем уменьшении связи, когда  $\kappa < \kappa_{\text{кр}} = 1$ , частотная характеристика остается с одним максимумом, величина (7.84) которого уменьшается (рис. 7.23, б). Зависимость  $K_{\max} = K_0(\kappa)$  показана на рис. 7.24.

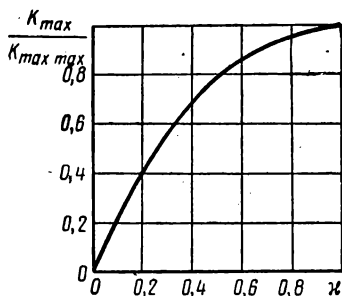


Рис. 7.24. Влияние фактора связи на коэффициент передачи связанных контуров

Допуская, например, пятикратное уменьшение резонансного коэффициента передачи  $K_{\max}$  по сравнению со значением  $K_{\max \max}$ , из рис. 7.24 находим, что фактор связи должен быть ограничен снизу минимальным значением

$$\kappa \geq \kappa_{\min} = 0,1. \quad (7.87)$$

Из соотношений (7.82) — (7.84) находим уравнения частотных характеристик в относительном масштабе:

$$A|_{\kappa \geq 1} = \frac{K}{K_{\max \max}} = \frac{2\kappa}{\sqrt{(1 - \kappa^2 + \xi^2)^2 + 4\kappa^2}}, \quad (7.88)$$

$$A|_{\kappa \leq 1} = \frac{K}{K_{\max}} = \frac{1 + \kappa^2}{\sqrt{(1 - \kappa^2 + \xi^2)^2 + 4\kappa^2}}. \quad (7.89)$$

Обобщенные частотные характеристики, построенные по этим уравнениям при предельных значениях связи (7.85) — (7.87), показаны на рис. 7.25, а и б.

На этом же рисунке показаны характеристики связанных контуров при промежуточных значениях связи, а пунктиром изображена для сравнения частотная характеристика одиночного контура.

Из рис. 7.25 видно, что связанные контуры, как и одиночный контур, обладают селективными свойствами. Полосу пропускания такой селективной системы можно найти из уравнений (7.88), (7.89), принимая  $A = \frac{1}{\sqrt{2}}$ . Учитывая обозначение (7.11), находим нормированное значение полосы пропускания связанных контуров

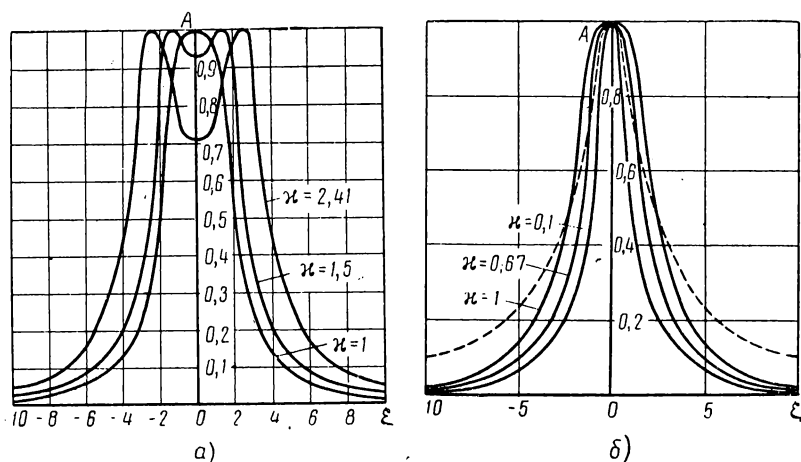


Рис. 7.25. Обобщенные частотные характеристики связанных контуров

$\xi_r = \frac{\Delta F_{св}}{\Delta F}$ , где  $\Delta F$  — полоса пропускания одиночного контура (7.9):

$$\xi_r|_{\kappa \geq 1} = \sqrt{\kappa^2 + 2\kappa - 1}, \quad (7.90)$$

$$\xi_r|_{\kappa \leq 1} = \sqrt{\sqrt{2(1 + \kappa^4)} - (1 - \kappa^2)}. \quad (7.91)$$

Зависимость нормированной полосы пропускания связанных контуров от фактора связи показана на рис. 7.26.

Из этого графика видно, что при изменении фактора связи полоса пропускания связанных контуров меняется в широких пределах и может стать меньше или больше полосы пропускания одиночного контура с теми же параметрами элементов. В частности, при  $\kappa = 0,67$  полосы пропускания связанных контуров и такого же одиночного контура получаются одинаковыми. Это видно и из частотных характеристик рис. 7.25, б. Предельным же значениям фактора связи (7.86) и (7.87) соответствуют нормированные полосы пропускания

$$\xi_{r \max} = \xi_r|_{\kappa = 2,41} = 3,1, \quad \xi_{r \min} = \xi_r|_{\kappa = 0,1} = 0,64. \quad (7.92)$$

Пользуясь графиком рис. 7.26, не следует забывать, что фактор связи  $\kappa = \frac{k_{св}}{d} = Qk_{св}$  зависит не только от коэффициента связи, но и от добротности контуров. При этом от указанных двух параметров полоса пропускания связанных контуров зависит различным образом. Если фактор связи увеличится от  $\kappa_{\min}$  до  $\kappa_{\max}$  за счет увеличения коэффициента связи при неизменной добротности, то согласно рис. 7.26 полоса пропускания  $\Delta F_{св}$  увеличится почти в 5 раз. Если же фактор связи увеличится во столько же раз за счет увеличения добротности, то абсолютная полоса пропускания  $\Delta F_{св}$  при этом уменьшится почти в 5 раз.

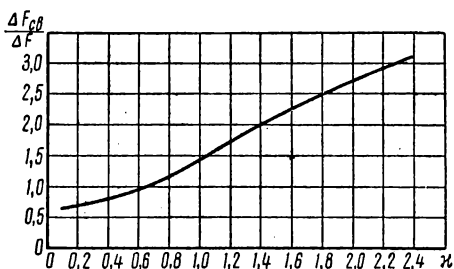


Рис. 7.26. Влияние фактора связи на нормированную полосу пропускания связанных контуров

Действительно, при увеличении  $Q$  в  $\frac{\kappa_{\max}}{\kappa_{\min}} = 24,1$  раза полоса про-

пускания одиночного контура уменьшается во столько же раз. Нормированная же полоса  $\xi_{\Gamma}$  увеличивается при этом только в  $\frac{\xi_{\Gamma \max}}{\xi_{\Gamma \min}} = 4,85$  раза. Таким образом, указанному увеличению добротности и фактора связи соответствует уменьшение полосы пропускания  $\Delta F_{св}$  в  $\frac{24,1}{4,85} = 4,96$  раза.

Рассмотрим теперь фазовые характеристики одинаковых связанных контуров. Из соотношения (7.60) находим уравнение фазовой характеристики:

$$\Theta = \arg(\mp 1) - \arctg \frac{2\xi}{1 + \kappa^2 - \xi^2}. \quad (7.93)$$

Отсюда определяется резонансная фаза связанных контуров:

$$\Theta_0 = \Theta|_{\xi=0} = \arg(\mp 1), \quad (7.94)$$

т. е.  $\Theta_0 = \pm \pi$  или  $\Theta_0 = 0$ .

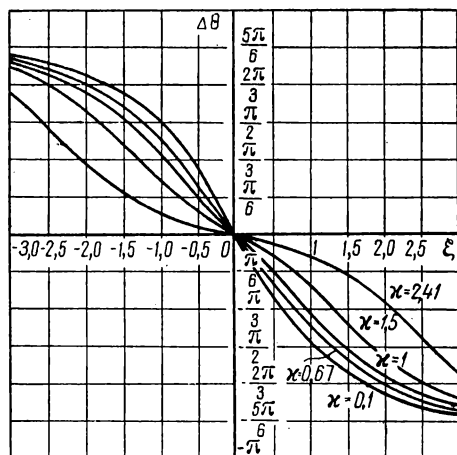


Рис. 7.27. Обобщенные фазовые характеристики связанных контуров

Из соотношений (7.93), (7.94) находим относительную фазу связанных контуров:

$$\Delta\theta = -\arctg \frac{2\xi}{1+\kappa^2-\xi^2}. \quad (7.95)$$

Фазовые характеристики, построенные по уравнению (7.95), приведены на рис. 7.27.

При  $\kappa \leq 1$  эти характеристики в полосе пропускания значительно меньше отклоняются от прямой линии, чем фазовые характеристики одиночного контура. Однако с ростом фактора связи нелинейность фазовых характеристик увеличивается. При  $\kappa = 2,41$  отклонение фазовой характеристики от прямой линии получается уже существенно больше, чем у одиночного контура.

В заключение отметим, что свойства симметрии (7.8) и (7.15) присущи также частотным и фазовым характеристикам связанных контуров.

## 8. Несимметричные связанные контуры

Контур с различной настройкой и неодинаковой добротностью образует несимметричную связанную систему. Согласно уравнению (7.57) несимметричные связанные контуры имеют асимметричные частотные и фазовые характеристики. Примеры таких частотных характеристик приведены на рис. 7.28. На рис. 7.28, а показана одногорбая, а на рис. 7.28, в — двугорбая несимметричные характеристики. Рис. 7.28, б соответствует критической связи, когда

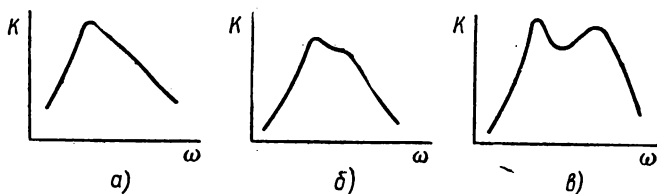


Рис. 7.28. Частотные характеристики несимметричных связанных контуров

несимметричная характеристика с точкой перегиба переходит от вида а к виду в.

Несимметричные частотные характеристики приводят к существенным искажениям сигнала, поэтому они не применяются в радиотехнических устройствах. Однако на практике невозможно получить и одинаковые связанные контуры, имеющие симметричные частотные характеристики. Поскольку на добротность первичного и вторичного контуров влияет внутреннее сопротивление источника и нагру-

зочное сопротивление, эти добротности получаются неодинаковыми в общем случае. Аналогично за счет влияния паразитных емкостей схемы оказываются неодинаковыми и резонансные частоты первичного и вторичного контуров.

Для устранения возникающей при этом асимметрии частотной характеристики достаточно одинаково настроить оба контура. Это легко достигается с помощью триммеров или подстроечных ферритовых сердечников, которыми снабжаются катушки индуктивности.

При достижении одинаковой настройки контуров ( $\omega_{01} = \omega_{02} = \omega_0$ ) частотные и фазовые характеристики становятся симметричными, если даже добротности контуров остаются различными ( $Q_1 \neq Q_2$ ). Действительно, из уравнения (7.59) находим

$$K = \frac{\sqrt{Q_1 Q_2} \kappa}{\sqrt{(1 + \kappa^2 - Q_1 Q_2 \nu^2)^2 + (Q_1 + Q_2)^2 \nu^2}}, \quad (7.96)$$

$$\Delta\Theta = -\arctg \frac{(Q_1 + Q_2) \nu}{1 + \kappa^2 - Q_1 Q_2 \nu^2}. \quad (7.97)$$

Отсюда видно, что свойства симметрии (7.8) и (7.15) сохраняются в рассматриваемом случае.

Анализ уравнения (7.96) показывает, что частотная характеристика несимметричной системы несущественно отличается от частотной характеристики симметричной системы связанных контуров. Основные отличия сводятся к следующему.

Критический фактор связи, при котором одnogорбые характеристики переходят в двугорбые, получается больше единицы:

$$\kappa_{кр} = \sqrt{\frac{1}{2} \left( \frac{Q_1}{Q_2} + \frac{Q_2}{Q_1} \right)}.$$

При этом критическая связь не совпадает с оптимальной и  $K_{\max} < K_{\max \max}$ . Вообще  $K_{\max} = K_{\max \max}$  только у одnogорбой характеристики при  $\kappa = 1$ . Во всех же остальных случаях  $K_{\max} < K_{\max \max}$ . Однако при  $\kappa > \kappa_{кр}$  уменьшение  $K_{\max}$  в сравнении с  $K_{\max \max}$  оказывается незначительным. Например, если добротности контуров отличаются даже в два раза, то при максимально допустимом факторе связи, который в этом случае равен  $\kappa_{\max} = 2,58$ , максимальная ордината двугорбой частотной характеристики уменьшается всего на 8% в сравнении с  $K_{\max \max}$ :

$$K_{\max} = 0,92 K_{\max \max}.$$

Расчет несимметричных связанных контуров с различным затуханием  $d_1$  и  $d_2$  и одинаковой резонансной частотой  $\omega_0$  можно производить так же, как и в случае симметричной системы связанных контуров. Для этого в симметричной системе надо взять фактор связи

$$\kappa_0 = \sqrt{\frac{1 + 2\kappa^2 - \kappa_{кр}^2}{1 + \kappa_{кр}^2}},$$



контуры настроить на частоту  $\omega_0$ , а их затухание выбрать равным

$$d = \frac{d_1 + d_2}{2}.$$

При соблюдении этих условий характеристики обеих систем в относительном масштабе получаются одинаковыми.

## § 7.4. ТРАНСФОРМАТОРЫ

### 1. Реальный трансформатор

Трансформатором называется элемент взаимоиндукции (см. рис. 2.29, а), используемый для трансформации напряжений и токов или для трансформации сопротивления. Трансформация сопротивления с помощью трансформатора применяется, например, в радиотехнических устройствах для согласования нагрузки с источником. В электрических сетях трансформация токов и напряжений производится для уменьшения потерь энергии в линии передачи. Для трансформаторов, применяемых в электрических и радиотехнических

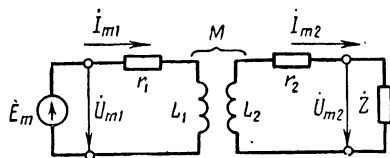


Рис. 7.29. Схема реального трансформатора

устройствах, характерны те же отличительные признаки, что и для самих электрических и радиотехнических цепей.

Реальный трансформатор характеризуется, во-первых, наличием потоков рассеяния ( $L_{S1} \neq 0$ ,  $L_{S2} \neq 0$ ), которые в общем случае имеются и в идеальном элементе взаимоиндукции. Во-вторых,

для реального трансформатора характерно наличие потерь активной мощности в обмотках, т. е. наличие сопротивлений потерь  $r_1$  и  $r_2$  (рис. 7.29).

Свойства реального трансформатора можно установить, воспользовавшись основными соотношениями для связанных контуров. Уравнения (7.52) для схемы реального трансформатора (см. рис. 7.29) могут быть представлены в следующем виде:

$$\begin{aligned} (r_1 + j\omega L_1) i_{m1} \pm j\omega M i_{m2} &= \dot{E}_m, \\ \pm j\omega M i_{m1} + (r_2 + j\omega L_2 + \dot{Z}) i_{m2} &= 0, \end{aligned} \quad (7.98)$$

или

$$\begin{aligned} \dot{U}_{m1} &= \dot{E}_m = \dot{Z}_1 i_{m1} \pm \dot{Z}_M i_{m2}, \\ \dot{U}_{m2} &= \dot{Z}_M i_{m1} \mp \dot{Z}_2 i_{m2}, \end{aligned} \quad (7.98a)$$

где

$$\dot{Z}_1 = r_1 + j\omega L_1, \quad \dot{Z}_2 = r_2 + j\omega L_2, \quad \dot{Z}_M = j\omega M.$$

Входное сопротивление реального трансформатора согласно формуле (7.61) и принятым здесь обозначениям равно

$$\dot{Z}_{\text{вх}} = \dot{Z}_1 - \frac{\dot{Z}_M^2}{\dot{Z}_2 + \dot{Z}}. \quad (7.99)$$

Отсюда находим коэффициент трансформации по сопротивлению (6.56):

$$\dot{n}_Z = \frac{\dot{Z}}{\dot{Z}_1 - \frac{\dot{Z}_M^2}{\dot{Z}_2 + \dot{Z}}}. \quad (7.100)$$

Коэффициент трансформации по току (6.65) определяется из второго уравнения (7.98):

$$\dot{n}_I = \mp \frac{\dot{Z}_2 + \dot{Z}}{\dot{Z}_M}. \quad (7.101)$$

Коэффициент трансформации по напряжению (6.62) можно найти из соотношений (6.67), (7.100), (7.101) или (7.98а), (7.101):

$$\dot{n}_U = \mp \frac{\dot{Z}_M \dot{Z}}{\dot{Z}_1 (\dot{Z}_2 + \dot{Z}) - \dot{Z}_M^2}. \quad (7.102)$$

Из выражений (7.100) — (7.102) видно, что все коэффициенты трансформации зависят от частоты и нагрузочного сопротивления  $\dot{Z}$ .

Для трансформаторов, используемых в радиотехнических устройствах, эти особенности реального трансформатора являются существенными недостатками. Для трансформаторов, работающих на фиксированной частоте (например, в электрических сетях), зависимость коэффициентов трансформации от частоты незначительна.

С учетом потерь в реальном трансформаторе векторная диаграмма напряжений и токов (см. рис. 2.30) должна быть изменена так, как показано на рис. 7.30. Диаграмма на рис. 7.30 построена для случая согласного включения обмоток трансформатора в следующем порядке:

$$\begin{aligned} \dot{I}_{m2}, \quad \dot{U}_{m2} &= \dot{Z} \dot{I}_{m2}, \quad \dot{U}_{mL2} = j\omega L_2 \dot{I}_{m2}, \\ \dot{U}_{mr2} &= r_2 \dot{I}_{m2}, \quad \dot{U}_m'' = \dot{U}_{mr2} + \dot{U}_{mL2} = \dot{Z}_2 \dot{I}_{m2}, \\ -\dot{U}_{mM2} &= \dot{U}_{m2} + \dot{U}_m'', \quad \dot{I}_{m1} = j \frac{-\dot{U}_{mM2}}{\omega M}, \quad \dot{U}_{mL1} = j\omega L_1 \dot{I}_{m1}, \\ \dot{U}_{mr1} &= r_1 \dot{I}_{m1}, \quad \dot{U}_m' = \dot{U}_{mr1} + \dot{U}_{mL1} = \dot{Z}_1 \dot{I}_{m1}, \\ \dot{U}_{mM1} &= j\omega M \dot{I}_{m2}, \quad \dot{U}_{m1} = \dot{E}_m = \dot{U}_m' + \dot{U}_{mM1}. \end{aligned}$$

Использованные при построении диаграммы соотношения между напряжениями и токами соответствуют уравнениям (7.98), (7.98а).

Эти уравнения могут быть переписаны в следующем виде:

$$\begin{aligned}(r_1 + j\omega L_1 \pm j\omega M) I_{m1} \mp j\omega M I_{m1} \pm j\omega M I_{m2} &= \dot{E}_m, \\ \pm j\omega M I_{m1} \mp j\omega M I_{m2} + (r_2 + j\omega L_2 \pm j\omega M + \dot{Z}) I_{m2} &= 0,\end{aligned}$$

или

$$\begin{aligned}[r_1 + j\omega (L_1 \pm M)] I_{m1} \mp j\omega M (I_{m1} - I_{m2}) &= \dot{E}_m, \\ [r_2 + j\omega (L_2 \pm M) + \dot{Z}] I_{m2} \mp j\omega M (I_{m2} - I_{m1}) &= 0.\end{aligned}\quad (7.103)$$

При согласованном включении обмоток трансформатора уравнениям (7.103) соответствует схема рис. 7.31, а, а при встречном

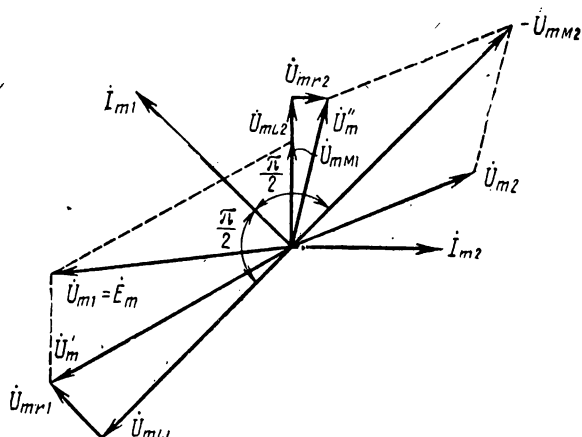


Рис. 7.30. Векторная диаграмма напряжений и токов реального трансформатора

включении обмоток — схема рис. 7.31, б. Эти схемы являются эквивалентными схемами реального трансформатора.

Таким образом, используя эквивалентные схемы трансформатора, можно цепи с индуктивно связанными изолированными контурами (см. рис. 7.29) заменять эквивалентными цепями с непосредственно связанными контурами (см. рис. 7.31, а и б). Подобный способ преобразования схем называется развязкой индуктивных связей. При развязке индуктивных связей цепь представляется такой эквивалентной схемой, к которой непосредственно применим первый закон Кирхгофа.

Эквивалентная схема рис. 7.31, а неудобна в том отношении, что она содержит отрицательную реактивность —  $M$ . Однако при изменении направления отсчета одного из контурных токов согласное включение обмоток трансформатора переходит во встречное включение. Поэтому в большинстве случаев можно пользоваться

эквивалентной схемой, представленной на рис. 7.31, б. В соответствии с соотношениями (2.136), (2.137) эту эквивалентную схему при  $\omega_1 = \omega_2$  можно заменить схемой рис. 7.31, в.

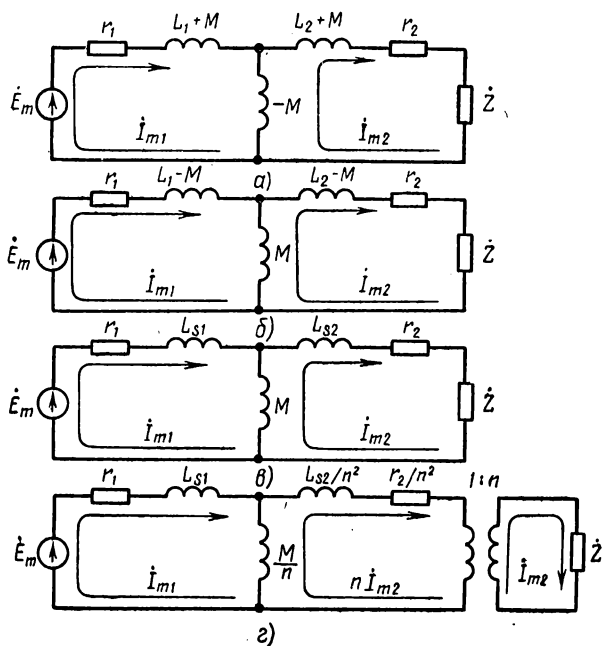


Рис. 7.31. Эквивалентные схемы реального трансформатора

Введение индуктивностей рассеяния в эквивалентную схему трансформатора иногда удобно и при  $\omega_1 \neq \omega_2$ . В этих случаях введение индуктивностей рассеяния становится возможным при использовании понятия идеального трансформатора.

## 2. Идеальный трансформатор

Выше отмечалось, что недостатками реального трансформатора является зависимость его коэффициентов трансформации от нагрузочного сопротивления и частоты. Поэтому вводится понятие идеального трансформатора, который свободен от указанных недостатков.

Идеальный трансформатор должен обладать следующими свойствами.

Во-первых, потоки рассеяния в идеальном трансформаторе должны отсутствовать ( $L_{s1} = L_{s2} = 0$ ). В реальной конструкции это требование можно выполнить лишь приближенно, если обмотки трансформатора поместить на замкнутом (например, тороидальном) сердечнике, выполненном из материала с малым магнитным сопротивлением.

Во-вторых, в идеальном трансформаторе должны отсутствовать потери ( $r_1 = r_2 = 0$ ). В реальной конструкции это требование приближенно выполняется в том случае, если кроме уменьшения активного сопротивления обмоток, обеспечены малые потери мощности и в сердечнике трансформатора. Для этого сердечник трансформатора должен быть выполнен из феррита.

В-третьих, индуктивности  $L_1$ ,  $L_2$  и соответственно число витков  $\omega_1$ ,  $\omega_2$  обмоток идеального трансформатора должны быть бесконечно большими. Реальный трансформатор с конечным числом витков приближается по своим свойствам к идеальному трансформатору в том случае, когда его число витков настолько велико, что внешние сопротивления цепи получаются пренебрежимо малыми в сравнении с сопротивлениями обмоток  $\omega L_1$  и  $\omega L_2$ . Для этого может оказаться достаточным несколько тысяч, а иногда и несколько сотен витков.

Перечисленные ограничения в реальных трансформаторах удовлетворяются только в определенном диапазоне частот и нагрузок.

Покажем, что идеальный трансформатор, удовлетворяющий оговоренным условиям, свободен от недостатков, свойственных реальному трансформатору. Прежде всего из соотношений (2.136) находим, что при  $L_{s1} = L_{s2} = 0$

$$M = \sqrt{L_1 L_2}. \quad (7.104)$$

Выше отмечалось, что в идеальном трансформаторе индуктивности  $L_1$  и  $L_2$  должны быть бесконечно большими. При выполнении этого условия согласно формуле (7.104) взаимоиндуктивность  $M$  также получается бесконечно большой. Отсюда следует, что в идеальном трансформаторе сопротивления обмоток  $Z_1 = \omega L_1$ ,  $Z_2 = \omega L_2$  и сопротивление взаимоиндукции  $Z_M = \omega M$  имеют бесконечно большую величину.

На основании этого свойства, пренебрегая в числителе дроби (7.101) величиной  $\dot{Z}$  в сравнении с  $\dot{Z}_2$ , находим

$$\dot{n}_I = \mp \frac{\dot{Z}_2}{\dot{Z}_M} = \mp \frac{j\omega L_2}{j\omega M} = \mp \frac{L_2}{M}.$$

Здесь учтено, что  $r_1 = r_2 = 0$ . Подставляя сюда значение  $M$  из равенства (7.104) и учитывая соотношения (2.136), получаем

$$\dot{n}_I = \mp \sqrt{\frac{L_2}{L_1}} = \mp n. \quad (7.105)$$

Согласно равенству (7.104)  $\dot{Z}_1 \dot{Z}_2 = \dot{Z}_M^2$ . Подставив это соотношение в уравнения (7.102) и (7.100), находим другие коэффициенты трансформации:

$$\dot{n}_U = \mp \sqrt{\frac{L_2}{L_1}} = \mp n, \quad (7.106)$$

$$\dot{n}_Z = n_Z = \frac{L_2}{L_1} = n^2. \quad (7.107)$$

Таким образом, для идеального трансформатора коэффициенты трансформации по току и напряжению равны коэффициенту трансформации (2.137), т. е. являются постоянными величинами. При этом коэффициенты (7.105), (7.106) являются вещественными числами, знак которых зависит от способа включения обмоток — согласного или встречного.

Аналогично постоянной и вещественной величиной, причем положительной, является коэффициент трансформации по сопротивлению (7.107).

Согласно соотношениям (7.105) и (7.106)

$$\begin{aligned} \dot{U}_{m1} &= \mp \frac{1}{n} \dot{U}_{m2}, \\ \dot{i}_{m1} &= \mp n \dot{i}_{m2}. \end{aligned} \quad (7.108)$$

Эти равенства могут быть записаны в матричной форме (6.15), где цепочечная матрица идеального трансформатора имеет вид

$$[a] = \begin{bmatrix} \mp \frac{1}{n} & 0 \\ 0 & \mp n \end{bmatrix}. \quad (7.109)$$

Используя понятие идеального трансформатора, эквивалентную схему реального трансформатора, представленную на рис. 7.31, б, можно изобразить иначе. Для этого, учитывая встречное включение обмоток, перепишем уравнения (7.98) в следующем виде:

$$\begin{aligned} & \left( r_1 + j\omega L_1 - j\omega \frac{M}{n} \right) \dot{i}_{m1} + j\omega \frac{M}{n} \dot{i}_{m1} - j\omega M \dot{i}_{m2} = \\ & = \left[ r_1 + j\omega \left( L_1 - \frac{M}{n} \right) \right] \dot{i}_{m1} + j\omega \frac{M}{n} (\dot{i}_{m1} - n \dot{i}_{m2}) = \dot{E}_m, \\ & \frac{r_2 + j\omega L_2 - j\omega n M + \dot{Z}}{n^2} n \dot{i}_{m2} + j\omega \frac{M}{n} n \dot{i}_{m2} - j\omega \frac{M}{n} \dot{i}_{m1} = \\ & = \frac{r_2 + j\omega (L_2 - nM) + \dot{Z}}{n^2} n \dot{i}_{m2} + j\omega \frac{M}{n} (n \dot{i}_{m2} - \dot{i}_{m1}) = 0, \end{aligned}$$

или с учетом соотношений (2.136)

$$\begin{aligned}(r_1 + j\omega L_{s1}) i_{m1} + j\omega \frac{M}{n} (i_{m1} - n i_{m2}) &= \dot{E}_m, \\ \frac{r_2 + j\omega L_{s2} + \dot{Z}}{n^2} n i_{m2} + j\omega \frac{M}{n} (n i_{m2} - i_{m1}) &= 0.\end{aligned}\quad (7.110)$$

Здесь вместо контурного тока  $i_{m2}$  фигурирует контурный ток  $n i_{m2}$ . Такое изменение тока в уравнениях (7.110) по сравнению с (7.98) соответствует введению в схему идеального трансформатора с соотношением витков  $w_1 : w_2 = 1 : n$ , как видно из второго уравнения (7.98). Полученная для этого случая эквивалентная схема реального трансформатора изображена на рис. 7.31, *г*. При  $n = 1$  она переходит в схему, изображенную на рис. 7.31, *в*. При этом идеальный трансформатор с единичным коэффициентом трансформации исключен из схемы, поскольку он не оказывает никакого влияния на токи, напряжения и сопротивления в схеме.

Очевидно, исключение идеального трансформатора можно произвести в любой схеме, если в ней не возникают при этом короткие замыкания элементов. Если  $n \neq 1$ , то должна быть произведена соответствующая трансформация токов, напряжений и сопротивлений согласно формулам (7.105) — (7.107). И, наоборот, если при эквивалентных преобразованиях схемы в ней возникает короткое замыкание, то введением идеального трансформатора оно может быть устранено. При этом для простоты следует выбирать  $n = 1$ , чтобы не изменять параметров элементов в схеме.

# Г Л А В А 8

## ЦЕПИ С РАСПРЕДЕЛЕННЫМИ ПАРАМЕТРАМИ

### § 8.1. ОСНОВЫ ТЕОРИИ ДЛИННЫХ ЛИНИЙ

#### 1. Общие сведения о длинных линиях

Цепями с линейно-распределенными параметрами называются такие цепи, один из линейных размеров которых не удовлетворяет условию  $l \ll \lambda$  (см. стр. 48). Простейшим примером цепи с линейно-распределенными параметрами является фидер в виде двухпроводной линии (рис. 8.1, а), длина которой соизмерима с длиной волны или больше ее. Другим примером цепи с линейно-распределенными параметрами является коаксиальный фидер достаточно большой длины (рис. 8.1, б).

Цепи с распределенными параметрами в виде двухпроводного или коаксиального фидера называются также длинными линиями. Это название отнюдь не означает, что такая линия должна иметь многокилометровую длину. Имея длину с какой-нибудь десяток-другой сантиметров, фидер является длинной линией, если длина волны меньше метра.

В двухпроводных длинных линиях расстояние между проводами и диаметр проводов должны быть несоизмеримо малыми в сравнении с длиной волны. В коаксиальной длинной линии этому условию относительной малости должен удовлетворять внутренний радиус внешнего проводника. Если указанные условия не выполняются, то такие линии перестают быть цепями с линейно-распределенными параметрами.

В кабельных двухпроводных линиях и в большинстве коаксиальных линий провода изолируются друг от друга специальным изоляционным слоем из резины, полистирола и других диэлектриков. Такие линии называются условно линиями с твердой изоляцией. В линиях с твердой изоляцией в зависимости от качества диэлектрика может быть большая или меньшая утечка тока между проводами. За счет этого в линии возникают потери мощности, не считая потерь на нагрев проводов и потерь, обусловленных наводками токов в несовершенной изоляции.

Потери мощности получаются меньше в тех линиях (двухпроводных и коаксиальных), провода которых разделены воздушным



промежутком. Такие линии называются условно линиями с воздушной изоляцией. В них может вообще отсутствовать дополнительная изоляция в виде специального покрытия проводов каким-либо материалом.

Свойства длинных линий определяются их распределенными параметрами, т. е. индуктивностью и активным сопротивлением проводов, а также емкостью и активной проводимостью утечки между проводами, которые распределены вдоль линии. Для количественной оценки распределенных параметров пользуются понятием погонной индуктивности  $L_0$ , погонной емкости  $C_0$ , погонного сопротивления потерь  $R_0$  и погонной проводимости утечки  $G_0$ . Погонные параметры определяются как величина соответствующих распределенных параметров, измеренная на отрезке линии единичной длины (рис. 8.2). При этом погонные параметры  $L_0$  и  $R_0$  относят не к двум, а к одному проводу линии.

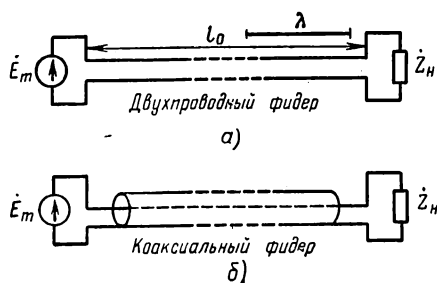


Рис. 8.1. Длинные линии

Если погонные параметры не изменяются вдоль линии, то такая длинная линия называется однородной. Однородные длинные линии наиболее часто встречаются в радиотехнических устройствах, и процессы в них анализируются достаточно просто.

Если погонные параметры не изменяются вдоль линии, то такая длинная линия называется однородной. Однородные длинные линии наиболее часто встречаются в радиотехнических устройствах, и процессы в них анализируются достаточно просто. Более сложным является анализ

процессов в неоднородных длинных линиях, у которых погонные параметры изменяются вдоль линии. Неоднородные линии выходят за рамки программы настоящего курса, поэтому здесь рассматриваются лишь однородные линии. Следует, однако, отметить, что при этом целью является изучение не только двухпроводных фидеров. Полученные при рассмотрении однородных длинных линий результаты позволяют изучить также новый класс резонансных систем, которые в диапазоне сверхвысоких частот приходят на смену резонансным контурам с сосредоточенными параметрами.

Дело в том, что обычные контуры могут практически применяться на частотах не выше  $100 \div 200 \text{ МГц}$  ( $\lambda$  порядка  $3 \div 1,5 \text{ м}$ ). Это обусловлено двумя причинами. Во-первых, резонансная частота контура с сосредоточенными параметрами ограничена сверху, поскольку его индуктивность и емкость нельзя уменьшать неограниченно. Так, например, при минимальной индуктивности контура  $1 \text{ мкГн}$  (что соответствует приблизительно индуктивности одного витка диаметром  $1 \text{ см}$ ) и минимальной емкости контура  $1 \text{ пФ}$  (которая может быть получена только при сведении к минимуму емкости монтажа) максимальная резонансная частота контура получается приблизительно равной  $159 \text{ МГц}$ . Во-вторых, добротность

контуров с сосредоточенными параметрами получается совершенно недостаточной на СВЧ (за счет возрастания потерь вследствие влияния поверхностного эффекта и других факторов).

На основании изложенных причин и приходится использовать на СВЧ резонансные системы с распределенными параметрами, которые изучаются в настоящем разделе наряду с фидерами.

Следует отметить, что однородные длинные линии находят на СВЧ и многие другие применения, помимо их использования в качестве фидеров и резонансных систем. Некоторые из этих применений рассматриваются в курсе.

Наконец, изучение однородных длинных линий представляет интерес также с той точки зрения, что полученные при этом результаты могут быть использованы и в других системах с распределенными параметрами. Например, полученные здесь результаты

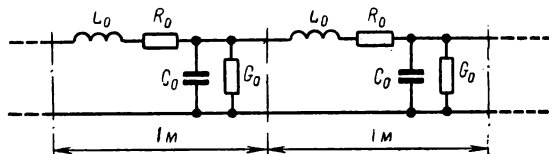


Рис. 8.2. Погонные параметры длинной линии

позволяют объяснить некоторые свойства волноводов (которые являются системами с объемно-распределенными параметрами), помогают понять особенности характеристик некоторых антенн (относящихся к неоднородным системам с распределенными параметрами) и т. д.

Поэтому изучение однородных длинных линий является весьма важной задачей.

## 2. Телеграфные уравнения

Согласно определению, длина линии с распределенными параметрами соизмерима с длиной волны или больше ее. Поэтому при подключении к такой линии источника переменной э. д. с. напряжение в ней изменяется не только во времени, но и вдоль линии.

Изменение какой-либо величины во времени и в пространстве называется волновым процессом. Таким образом, процессы в длинной линии имеют волновой характер (в отличие от обычных колебательных процессов в цепях с сосредоточенными параметрами, где напряжения и токи меняются только во времени).

Для составления уравнений, описывающих волновые процессы, не могут быть непосредственно использованы законы Кирхгофа и Ома, которые выше были сформулированы для цепей с сосредото-

точными параметрами. Поэтому для использования этих законов в рассматриваемом случае следует выделить в линии отрезок настолько малой длины  $dl$ , чтобы соблюдалось условие  $dl \ll \lambda$ . Такой отрезок может рассматриваться как цепь с сосредоточенными параметрами.

Как бы ни была мала длина волны  $\lambda$ , она всегда является конечной величиной. Поэтому отрезок линии бесконечно малой длины  $dl$  можно считать цепью с сосредоточенными параметрами. Такой дифференциально малый отрезок линии на произвольном расстоянии  $l$  от ее конца показан условно на рис. 8.3. Он имеет сосредоточенные параметры  $L_0 dl$ ,  $R_0 dl$ ,  $C_0 dl$ ,  $G_0 dl$ , и его эквивалентная схема может быть изображена так, как на рис. 8.4. Напряжения и токи в этой эквивалентной схеме связаны непосредственно законами Кирхгофа и Ома.

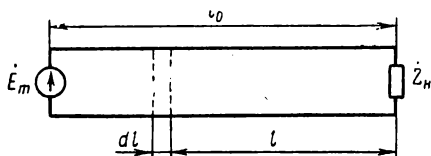


Рис. 8.3. Выделение дифференциально малого отрезка длинной линии

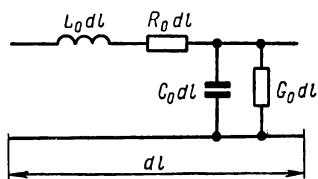


Рис. 8.4. Эквивалентная схема дифференциально малого отрезка длинной линии

Таким образом, легко могут быть составлены дифференциальные уравнения, описывающие процесс в длинной линии. Они описывают волновой процесс и должны содержать две независимых переменных — время  $t$  и пространственную координату  $l$ . Поэтому такие уравнения являются дифференциальными уравнениями в частных производных, решение которых сложнее, чем решение обыкновенных дифференциальных уравнений. Однако задачу можно упростить.

Как и в случае цепей с сосредоточенными параметрами, будем рассматривать процессы в длинной линии под действием источника гармонической э. д. с. При этом можно воспользоваться символическим методом, который позволяет исключить время из уравнений, описывающих волновой процесс. Уравнения, составленные в такой форме, должны содержать комплексные амплитуды, неизменные во времени, но изменяющиеся вдоль линии. Таким образом, при использовании символического метода уравнения, описывающие волновой процесс, содержат не две, а одну независимую переменную — пространственную координату  $l$ , т. е. являются обыкновенными дифференциальными уравнениями.

При использовании метода комплексных амплитуд элементы в эквивалентной схеме рис. 8.4 целесообразно представить в виде некоторых комплексных сопротивлений, как показано на рис. 8.5.

На этом рисунке приняты следующие обозначения:

$$\dot{Z}_0 = R_0 + j\omega L_0 \quad (8.1)$$

— полное сопротивление единичного отрезка линии (погонное сопротивление);

$$\dot{Y}_0 = G_0 + j\omega C_0 \quad (8.2)$$

— полная проводимость между проводами единичного отрезка линий (погонная проводимость);

$\dot{U}_m$  и  $\dot{I}_m$  — комплексные амплитуды напряжения и тока на расстоянии  $l$  от конца линии;

$d\dot{U}_m$  и  $d\dot{I}_m$  — изменения комплексных амплитуд напряжения и тока на элементе линии длиной  $dl$ .

Применив законы Кирхгофа к элементу  $dl$  (см. рис. 8.5), получим следующие уравнения:

$$\dot{U}_m + d\dot{U}_m - \dot{I}_m \dot{Z}_0 dl - \dot{Z}_0 dl d\dot{I}_m - \dot{U}_m = 0,$$

$$\dot{I}_m + d\dot{I}_m - \dot{I}_m - \dot{U}_m \dot{Y}_0 dl = 0.$$

Приводя здесь подобные члены и пренебрегая третьим слагаемым в первом уравнении как бесконечно малой величиной второго порядка, получаем после деления на  $dl$ :

$$\frac{d\dot{U}_m}{dl} = \dot{Z}_0 \dot{I}_m, \quad (8.3)$$

$$\frac{d\dot{I}_m}{dl} = \dot{Y}_0 \dot{U}_m. \quad (8.4)$$

Уравнения (8.3) и (8.4) известны под названием соответственно первого и второго телеграфных уравнений. Телеграфные уравнения описывают закон изменения амплитуды и фазы напряжения и тока вдоль линии.

Для решения уравнений (8.3) и (8.4) надо разделить переменные  $\dot{U}_m$  и  $\dot{I}_m$ . С этой целью продифференцируем эти уравнения по  $l$ :

$$\frac{d^2 \dot{U}_m}{dl^2} = \dot{Z}_0 \frac{d\dot{I}_m}{dl},$$

$$\frac{d^2 \dot{I}_m}{dl^2} = \dot{Y}_0 \frac{d\dot{U}_m}{dl}.$$

Подставляя сюда значения первых производных из уравнений (8.3) и (8.4), окончательно получаем:

$$\frac{d^2 \dot{U}_m}{dl^2} - \dot{Y}^2 \dot{U}_m = 0, \quad (8.5)$$

$$\frac{d^2 \dot{I}_m}{dl^2} - \dot{Y}^2 \dot{I}_m = 0, \quad (8.6)$$

где

$$\dot{Y} = \sqrt{\dot{Z}_0 \dot{Y}_0}. \quad (8.7)$$

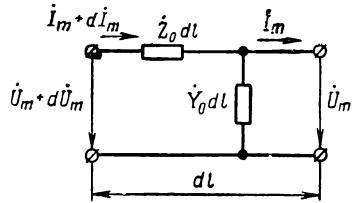


Рис. 8.5. Комплексные сопротивления дифференциально малого отрезка длинной линии

Параметр  $\dot{\gamma}$  получил название коэффициента распространения. Смысл этого названия будет выяснен ниже.

Уравнения (8.5) и (8.6) являются уравнениями волнового типа в комплексной форме. Решение их должно быть одинаковым и может отличаться только значением постоянных интегрирования — за счет разных граничных условий.

Общее решение уравнения (8.5), являющегося линейным однородным уравнением второго порядка, может быть получено как линейная комбинация двух произвольных линейно независимых частных решений. Непосредственной подстановкой в уравнение (8.5) можно убедиться, что частными решениями являются, например, решения вида  $\dot{U}'_{m1}e^{\dot{\gamma}l}$  и  $\dot{U}''_{m1}e^{-\dot{\gamma}l}$ . При таких частных решениях получаем

$$\dot{U}_m = \dot{U}'_{m1}e^{\dot{\gamma}l} + \dot{U}''_{m1}e^{-\dot{\gamma}l}. \quad (8.8)$$

В подобном виде может быть написано и решение уравнения (8.6). Чтобы не вводить новых постоянных интегрирования при определении амплитуды тока, поступим следующим образом. Определив из (8.8) производную  $\frac{d\dot{U}_m}{dl}$  и подставив ее в уравнение (8.3), получим

$$I_m = \frac{\dot{\gamma}}{\dot{Z}_0} (\dot{U}'_{m1}e^{\dot{\gamma}l} - \dot{U}''_{m1}e^{-\dot{\gamma}l}).$$

Учитывая обозначение (8.7), перепишем полученное решение в виде

$$I_m = \frac{1}{\dot{Z}_c} (\dot{U}'_{m1}e^{\dot{\gamma}l} - \dot{U}''_{m1}e^{-\dot{\gamma}l}), \quad (8.9)$$

где

$$\dot{Z}_c = \sqrt{\frac{\dot{Z}_0}{\dot{\gamma}}}. \quad (8.10)$$

Параметр  $\dot{Z}_c$  получил название волнового сопротивления. Смысл этого названия будет выяснен ниже.

Постоянные интегрирования  $\dot{U}'_{m1}$  и  $\dot{U}''_{m1}$  определяются из граничных условий, которые могут быть заданы различным образом в зависимости от условий задачи. Этот вопрос рассматривается подробно в следующем параграфе.

При составлении телеграфных уравнений отсчет пространственной координаты  $l$  велся от конца линии (см. рис. 8.3). В ряде случаев удобно вести этот отсчет от начала линии. Введя в соответствии с рис. 8.6, а обозначение  $l = l_0 - l'$ , перепишем соотношения

(8.8) и (8.9) таким образом:

$$\dot{U}_m = \dot{U}'_m e^{-\dot{\gamma} l'} + \dot{U}''_m e^{\dot{\gamma} l'}, \quad (8.11)$$

$$I_m = \frac{1}{\dot{Z}_c} (\dot{U}'_m e^{-\dot{\gamma} l'} - \dot{U}''_m e^{\dot{\gamma} l'}), \quad (8.12)$$

где

$$\dot{U}'_m = \dot{U}'_{m1} e^{\dot{\gamma} l_0}, \quad \dot{U}''_m = \dot{U}''_{m1} e^{-\dot{\gamma} l_0}.$$

Смысл постоянных интегрирования  $\dot{U}'_{m1}$ ,  $\dot{U}''_{m1}$  и  $\dot{U}'_m$ ,  $\dot{U}''_m$  раскрывается дальше.

Определив напряжение (8.8), (8.11) и ток (8.9), (8.12), можно найти входное сопротивление линии в произвольном сечении  $a$  (см. рис. 8.6, а):

$$\dot{Z} = \frac{\dot{U}_m}{I_m}. \quad (8.13)$$

При этом независимо от того, используются ли формулы (8.8), (8.9) или (8.11), (8.12), входное сопротивление (8.13) определяется для отрезка линии  $a-b$  длиной  $l = l_0 - l'$ . Ни в коем случае входное сопротивление линии  $\dot{Z}$  нельзя определять как при параллельном соединении сопротивлений двух отрезков линии длиной  $l$  и  $l'$ . Для подтверждения этого сопротивление  $\dot{Z}$  представлено на рис. 8.6, б в другом виде: здесь входное сопротивление линии в том же сечении  $a$  определяется при отброшенной левой части линии.

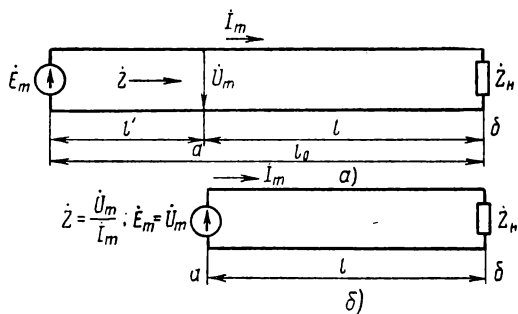


Рис. 8.6. Определение входного сопротивления линии

### 3. Бегущие волны

Соотношения (8.8), (8.9) и (8.11), (8.12) являются тождественными и лишь в различной форме описывают одни и те же величины. Смысл этих соотношений удобно выяснить на примере равенств (8.11) и (8.12). При анализе этих решений надо определить характер процессов и смысл параметров  $\dot{\gamma}$  и  $\dot{Z}_c$ .

Параметр  $\dot{\gamma}$  является комплексной величиной и может быть обозначен так:

$$\dot{\gamma} = \alpha + j\beta. \quad (8.14)$$

Подставляя это значение  $\dot{\gamma}$  в равенство (8.11), получаем

$$\dot{U}_m = \dot{U}'_m e^{-\alpha l'} e^{-j\beta l'} + \dot{U}''_m e^{\alpha l'} e^{j\beta l'}. \quad (8.11a)$$

Перейдем к комплексному мгновенному значению напряжения:

$$u = \dot{U}_m e^{j\omega t} = \dot{U}'_m e^{-\alpha l'} e^{j(\omega t - \beta l')} + \dot{U}''_m e^{\alpha l'} e^{j(\omega t + \beta l')}.$$

Комплексные постоянные интегрирования  $\dot{U}_m'$  и  $U_m''$  могут быть представлены следующим образом:

$$\dot{U}_m' = U_m' e^{i\psi'}, \quad \dot{U}_m'' = U_m'' e^{i\psi''}.$$

Тогда

$$u = U_m' e^{-\alpha l'} e^{j(\omega t - \beta l' + \psi')} + U_m'' e^{\alpha l'} e^{j(\omega t + \beta l' + \psi'')}.$$

Переходя к мгновенному значению напряжения в вещественной форме, получаем окончательно:

$$u = u' + u'', \quad (8.15)$$

где

$$\begin{aligned} u' &= U_m' e^{-\alpha l'} \cos(\omega t - \beta l' + \psi'), \\ u'' &= U_m'' e^{\alpha l'} \cos(\omega t + \beta l' + \psi''). \end{aligned} \quad (8.16)$$

Таким образом, напряжение  $u$  между проводами линии на любом расстоянии  $l'$  от ее начала является суммой двух составляющих  $u'$  и  $u''$ . Рассмотрим каждую из этих составляющих в отдельности.

Выражение (8.16) для составляющей напряжения  $u'$  описывает колебательный процесс, совершающийся с частотой источника  $\omega$ . В некотором фиксированном сечении на расстоянии  $l'$  от начала линии это напряжение имеет постоянную амплитуду  $U_m' e^{-\alpha l'}$  и начальную фазу  $\psi - \beta l'$ . Чем больше расстояние  $l'$ , тем меньше амплитуда колебаний и тем меньше начальная фаза. Следовательно, колебательный процесс представляет собой переменное напряжение, изменяющееся не только во времени, но и вдоль линии. Рассмотрим одновременно изменение напряжения во времени и вдоль линии. Для этого определим распределение напряжения вдоль линии для разных фиксированных моментов времени  $t = t_0 = 0$ ,  $t = t_1 > t_0$ ,  $t = t_2 > t_1$  и т. д.

При  $t = t_0 = 0$  напряжение  $u'$  равно

$$u_0' = u' |_{t=0} = U_m' e^{-\alpha l'} \cos(\psi' - \beta l').$$

Отсюда видно, что в момент времени  $t = t_0 = 0$  напряжение вдоль линии изменяется по косинусоидальному закону (рис. 8.7, а), но имеет убывающую амплитуду, причем фаза колебаний в начале линии ( $l' = 0$ ) равна  $\psi'$ . Напряжение  $u'$  в момент времени  $t = t_1$  равно

$$u_1' = u' |_{t=t_1} = U_m' e^{-\alpha l'} \cos[(\omega t_1 + \psi') - \beta l'].$$

Это колебание отличается от предыдущего тем, что фаза колебаний в начале линии и соответственно во всех других сечениях линии увеличилась на угол  $\omega t_1$ . Увеличение фазового угла означает, как это наглядно видно из рисунка, перемещение фазы вдоль линии. В последующие моменты времени  $t_2$ ,  $t_3$  и т. д. фаза перемещается вдоль линии еще дальше от ее начала (на рис. 8.7, а — напряжения  $u_2'$ ,  $u_3'$  и т. д.). Получается колебательный процесс, распространяющийся вдоль линии.

Колебания, распространяющиеся вдоль линии, образуют так называемую бегущую волну. Поскольку бегущая волна распространяется от источника к нагрузке, она называется падающей волной ( $u' = u_{\text{пад}}$ ).

Аналогичный анализ составляющей напряжения  $u''$  показывает, что она представляет собой также бегущую волну, но распространяющуюся от нагрузки к источнику (рис. 8.7, б). Это видно и непосред-

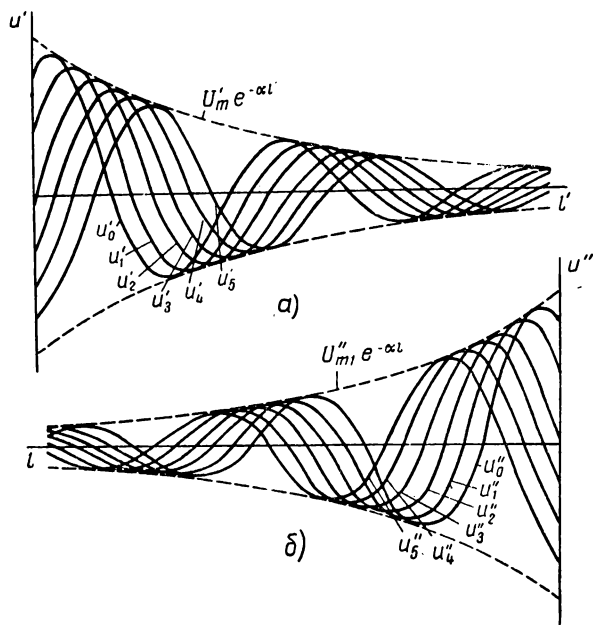


Рис. 8.7. Бегущие волны напряжения

ственно из второго равенства (8.16), если в нем сделать обратную замену переменных ( $l' = l_0 - l$ ):

$$u'' = U''_{m1} e^{-\alpha l} \cos(\omega t - \beta l + \psi_1''),$$

где

$$\psi_1'' = \psi'' + \beta l_0, \text{ а } U''_{m1} = U''_m e^{\alpha l_0}.$$

Это выражение отличается от второго равенства (8.16) только началом отсчета пространственной координаты, чем и подтверждается обратное направление распространения волны  $u''$ .

О направлении перемещения фазы волны можно судить и непосредственно по знаку слагаемого  $\beta l(\beta l')$  в уравнении бегущей волны: перемещение фазы волны происходит в направлении ее убывания вдоль линии.



Итак, фаза волны  $u''$  перемещается от конца линии к ее началу, и соответственно амплитуда этой волны убывает от конца линии к ее началу. Существование волны, перемещающейся от нагрузки к источнику, объясняется тем, что не вся энергия, передаваемая линией от источника, потребляется нагрузкой. Часть энергии не расходуется в нагрузку и возвращается обратно к источнику. Падающая волна частично отдает энергию нагрузке, а частично отражается обратно. Такая обратная бегущая волна получила название отраженной волны ( $u'' = u_{\text{отр}}$ ).

Таким образом, напряжение между проводами линии в любом ее сечении является суммой двух бегущих волн — падающей и отраженной. В выражениях (8.8) и (8.11) падающая бегущая волна напряжения представлена первым слагаемым, а отраженная бегущая волна напряжения — вторым слагаемым.

Подобное рассмотрение выражения (8.12) показывает, что ток в линии также является суммой двух бегущих волн — падающей и отраженной. В выражениях (8.9) и (8.12) падающая бегущая волна тока представлена первым слагаемым, а отраженная бегущая волна тока — вторым слагаемым.

Из соотношений (8.16) видно, что постоянные интегрирования  $\dot{U}'_m = U'_m e^{j\psi'}$  и  $\dot{U}''_m = U''_m e^{j\psi''}$  определяют комплексные амплитуды напряжения падающей и отраженной волн в начале линии:

$$\begin{aligned}\dot{U}'_m &= \dot{U}_{m \text{ пад } 0} = \dot{U}_{m \text{ пад } | l'=0}, \\ \dot{U}''_m &= \dot{U}_{m \text{ отр } 0} = \dot{U}_{m \text{ отр } | l'=0}.\end{aligned}\quad (8.17)$$

Аналогично постоянные интегрирования  $\dot{U}'_{m1}$  и  $\dot{U}''_{m1}$  определяют комплексные амплитуды составляющих напряжения в сечении нагрузки:

$$\begin{aligned}\dot{U}'_{m1} &= \dot{U}_{m \text{ пад } n} = \dot{U}_{m \text{ пад } | l=0}, \\ \dot{U}''_{m1} &= \dot{U}_{m \text{ отр } n} = \dot{U}_{m \text{ отр } | l=0}.\end{aligned}\quad (8.17a)$$

Эти соотношения могут быть получены из решения (8.8) при  $l = 0$ , если учесть, что первое слагаемое в этом решении описывает падающую волну, а второе слагаемое — отраженную волну.

#### 4. Волновые параметры линии

Бегущие волны могут быть охарактеризованы скоростью перемещения фазы колебаний вдоль линии, которая называется фазовой скоростью.

Фазовую скорость можно определить следующим образом. Как видно из первого равенства (8.16), мгновенная фаза колебаний

$$\Phi = \omega t + \psi' - \beta l'.$$

Отсюда расстояние, проходимое за время  $t$  фиксированной фазой  $\Phi$  вдоль линии

$$l' = \frac{\omega t + \psi' - \Phi}{\beta},$$

а фазовая скорость распространения волны

$$v = \frac{dl'}{dt} = \frac{\omega}{\beta}. \quad (8.18)$$

Таким образом, скорость перемещения фазы вдоль линии определяется коэффициентом  $\beta$ , который получил название фазовой постоянной, или фазового коэффициента. Из формулы (8.18) определяется значение фазовой постоянной:

$$\beta = \frac{\omega}{v} = 2\pi \frac{f}{v},$$

или

$$\beta = \frac{2\pi}{\lambda}. \quad (8.19)$$

Фазовый коэффициент показывает, на сколько изменяется фаза колебаний в линии при перемещении волны на единичное расстояние (например, на 1 м). Действительно, поскольку на пути в  $\lambda$  м фаза изменяется на  $2\pi$  рад, то на пути в 1 м фаза изменится на  $\frac{2\pi}{\lambda}$  рад.

Величина

$$\beta l = 2\pi \frac{l}{\lambda} \quad (8.20)$$

определяет сдвиг фазы в бегущей волне при ее распространении на расстояние  $l$ . Одновременно величина  $\beta l$  может служить угловой мерой расстояния  $l$  или относительного расстояния  $\frac{l}{\lambda}$ . Поэтому величину  $\beta l$  называют также угловым, или волновым расстоянием.

Согласно формуле (8.20) на расстоянии  $l = n \frac{\lambda}{4}$  фаза бегущей волны изменяется на угол  $\beta l = n \frac{\pi}{2}$  рад.

Амплитуда бегущей волны убывает вдоль линии, т. е. бегущая волна получается затухающей. Это затухание обусловлено, очевидно, потерями в линии в процессе распространения волны. Скорость затухания определяется параметром  $\alpha$ , который получил название коэффициента затухания. Точнее говоря, коэффициент затухания определяет относительное убывание амплитуды волны вдоль линии. Действительно, обозначим амплитуду напряжения  $U_{\text{пад}}$  через  $U_{m\text{пад}}$ :

$$U_{m\text{пад}} = U'_m e^{-\alpha l}.$$

Отсюда определяется абсолютное и относительное убывание амплитуды на бесконечно малом участке линии  $dl'$ :

$$-\frac{dU_{m\text{ пад}}}{dl'} = \alpha U'_m e^{-\alpha l'} = \alpha U_{m\text{ пад}}.$$

Следовательно, коэффициент затухания

$$\alpha = -\frac{\frac{dU_{m\text{ пад}}}{dl'}}{U_{m\text{ пад}}}. \quad (8.21)$$

Таким образом, параметр  $\dot{\gamma} = \alpha + j\beta$  определяет характер изменения амплитуды и фазы волны, распространяющейся вдоль линии. Этот параметр получил название коэффициента, или постоянной распространения.

Параметры (8.14) и (8.18), (8.19) и (8.21), характеризующие волновой процесс в линии, называются волновыми параметрами линии. Волновым параметром является также и коэффициент  $\dot{Z}_c$ , называемый волновым сопротивлением линии.

То обстоятельство, что этот параметр является именно сопротивлением, нетрудно установить по его размерности, которая видна из формулы (8.10). Смысл же волнового сопротивления можно выяснить, рассмотрев бегущие волны напряжения и тока.

Рассмотрим, например, падающие волны. Из выражений (8.8), (8.9) и (8.11), (8.12) следует, что комплексные амплитуды этих волн равны соответственно:

$$\dot{U}_{m\text{ пад}} = \dot{U}'_m e^{-\dot{\gamma} l'} = \dot{U}'_{m1} e^{\dot{\gamma} l},$$

$$\dot{I}_{m\text{ пад}} = \frac{\dot{U}'_m}{\dot{Z}_c} e^{-\dot{\gamma} l'} = \frac{\dot{U}'_{m1}}{\dot{Z}_c} e^{\dot{\gamma} l}.$$

Разделив первое выражение на второе, получаем

$$\dot{Z}_c = \frac{\dot{U}_{m\text{ пад}}}{\dot{I}_{m\text{ пад}}}. \quad (8.22)$$

Полученное значение  $\dot{Z}_c$  говорит о том, что этот параметр представляет собой сопротивление, которое оказывает линия падающей бегущей волне тока.

Аналогичный результат получается при рассмотрении отраженных волн, для которых из выражений (8.8), (8.9) и (8.11), (8.12) имеем следующие соотношения:

$$\dot{U}_{m\text{ отр}} = \dot{U}''_m e^{\dot{\gamma} l'} = \dot{U}''_{m1} e^{-\dot{\gamma} l},$$

$$\dot{I}_{m\text{ отр}} = -\frac{\dot{U}''_m}{\dot{Z}_c} e^{\dot{\gamma} l'} = -\frac{\dot{U}''_{m1}}{\dot{Z}_c} e^{-\dot{\gamma} l}.$$

Отсюда определяется значение  $\dot{Z}_c$ :

$$\dot{Z}_c = -\frac{\dot{U}_{m \text{ отр}}}{\dot{I}_{m \text{ отр}}}. \quad (8.22a)$$

Следовательно, отраженной бегущей волне тока линия оказывает то же сопротивление  $\dot{Z}_c$ , что и падающей волне. Знак «минус» в выражении (8.22a) обусловлен обратным направлением распространения отраженной волны. Это означает, что при одинаковых напряжениях  $\dot{U}_{m \text{ пад}} = \dot{U}_{m \text{ отр}}$  амплитуды токов в падающей и отраженной волнах получаются одинаковыми ( $\dot{I}_{m \text{ пад}} = \dot{I}_{m \text{ отр}}$ ), но текут эти токи в противоположных направлениях ( $\dot{I}_{m \text{ отр}} = -\dot{I}_{m \text{ пад}}$ ;  $\arg \dot{I}_{m \text{ отр}} = \arg \dot{I}_{m \text{ пад}} \pm \pi$ ).

Таким образом, волновое сопротивление (8.22), (8.22a) есть сопротивление, оказываемое линией бегущей волне тока независимо от направления ее распространения.

Для длинных линий, применяемых на радиочастотах, соотношение между активными и реактивными составляющими погонных параметров получается обычно таким, что выполняются условия:

$$R_0 \ll \omega L_0, \quad G_0 \ll \omega C_0.$$

Поэтому для упрощения анализа процессов в линии можно в выражениях (8.1) и (8.2) пренебречь активными составляющими и полагать

$$\dot{Z}_0 \approx j\omega L_0, \quad \dot{Y}_0 \approx j\omega C_0. \quad (8.23)$$

При таком допущении следует считать, что активная мощность в линии не расходуется. Поэтому линии, для которых выполняются условия (8.23), называются линиями без потерь. В линии без потерь бегущие волны не должны уменьшаться по амплитуде и коэффициент затухания должен равняться нулю. Действительно, выражение (8.7) с учетом соотношения (8.23) принимает вид

$$\dot{\gamma} = j\omega \sqrt{L_0 C_0}. \quad (8.24)$$

Сопоставляя соотношения (8.24) и (8.14), находим значения волновых параметров:

$$\alpha = 0 \quad (8.25)$$

и

$$\beta = \beta_0 = \omega \sqrt{L_0 C_0}. \quad (8.26)$$

Таким образом, фазовый коэффициент получается пропорциональным частоте, что является важным свойством линии без потерь.

Подставляя в выражение (8.18) значение  $\beta$  из соотношения (8.26), находим, что фазовая скорость в линии без потерь является постоянной величиной, определяемой погонными параметрами:

$$v = v_0 = \frac{1}{\sqrt{L_0 C_0}}. \quad (8.27)$$

Так как фазовая скорость не зависит от частоты, то при распространении гармонических составляющих сложного сигнала все они приходят одновременно на выход линии. Это означает, что на выходе линии без потерь гармонические составляющие разных частот не смещаются во времени относительно друг друга. Следовательно, длинная линия без потерь в режиме бегущих волн не создает фазовых искажений передаваемого сложного сигнала.

Подставляя значения погонных параметров (8.23) в определение (8.10), находим, что волновое сопротивление линии без потерь является чисто активным и не зависит от частоты:

$$\dot{Z}_c = W = \sqrt{\frac{L_0}{C_0}}. \quad (8.28)$$

Активный характер волнового сопротивления указывает на то, что в линии без потерь напряжение и ток в бегущей волне совпадают по фазе. Независимость волнового сопротивления от частоты означает, что линия без потерь не вносит частотных искажений в режиме бегущих волн.

## 5. Коэффициент отражения

Характер волнового процесса в линии зависит от соотношения между амплитудами и фазами падающей и отраженной волн, которое может быть количественно оценено с помощью коэффициента отражения:

$$\dot{p} = p e^{j\psi} = \frac{\dot{U}_{m \text{ отр}}}{\dot{U}_{m \text{ пад}}} = - \frac{I_{m \text{ отр}}}{I_{m \text{ пад}}}. \quad (8.29)$$

Знак «минус» в последнем равенстве поставлен потому, что в соответствии с уравнениями (8.22) и (8.22а) отношение амплитуд токов отличается по знаку от отношений амплитуд напряжений.

Коэффициент отражения является комплексной величиной, характеризующейся модулем  $p$  и аргументом  $\psi$ .

Модуль коэффициента отражения  $p$  определяет отношение вещественных амплитуд отраженной и падающей волн напряжения и тока:

$$p = \frac{U_{m \text{ отр}}}{U_{m \text{ пад}}} = \frac{I_{m \text{ отр}}}{I_{m \text{ пад}}}. \quad (8.30)$$

Аргумент коэффициента отражения  $\psi$  равен углу сдвига фаз между отраженной и падающей волнами напряжения:

$$\arg \dot{p} = \arg \dot{U}_{m \text{ отр}} - \arg \dot{U}_{m \text{ пад}}.$$

или

$$\psi = \psi_{\text{отр}} - \psi_{\text{пад}}. \quad (8.31)$$

Что касается сдвига фаз между отраженной и падающей волнами тока, то он отличается от значения  $\psi$ , определяемого формулой (8.31), на угол  $\pi$ , поскольку отношение токов в выражении (8.29) имеет отрицательный знак. В частности, если падающая и отраженная волны напряжения находятся в фазе, то волны тока получаются в противофазе и наоборот.

В разных сечениях линии модуль и аргумент коэффициента отражения получаются различными. Найдем связь между коэффициентом отражения в произвольном сечении линии и коэффициентом отражения в сечении нагрузки. Уравнения падающей и отраженной волн напряжения можно представить в следующем виде:

$$\begin{aligned} u_{\text{пад}} &= U_{m \text{ пад. н}} e^{a l} \cos(\omega t + \beta l + \psi_{\text{пад. н}}), \\ u_{\text{отр}} &= U_{m \text{ отр. н}} e^{-a l} \cos(\omega t - \beta l + \psi_{\text{отр. н}}). \end{aligned} \quad (8.32)$$

Здесь  $U_{m \text{ пад. н}}$  и  $U_{m \text{ отр. н}}$  — амплитуды волн напряжения в сечении нагрузки;  $\psi_{\text{пад. н}}$  и  $\psi_{\text{отр. н}}$  — начальные фазы волн напряжения в сечении нагрузки.

Из уравнений (8.32) в соответствии с обозначениями (8.30) и (8.31) получаем модуль и аргумент коэффициента отражения:

$$\rho = \frac{U_{m \text{ отр. н}} e^{-a l}}{U_{m \text{ пад. н}} e^{a l}} = \frac{U_{m \text{ отр. н}}}{U_{m \text{ пад. н}}} e^{-2a l},$$

$$\psi = (-\beta l + \psi_{\text{отр. н}}) - (\beta l + \psi_{\text{пад. н}}) = \psi_{\text{отр. н}} - \psi_{\text{пад. н}} - 2\beta l,$$

или

$$\rho = \rho_n e^{-2a l}, \quad (8.33)$$

$$\psi = \psi_n - 2\beta l, \quad (8.34)$$

где

$$\rho_n = \frac{U_{m \text{ отр. н}}}{U_{m \text{ пад. н}}}, \quad \psi_n = \psi_{\text{отр. н}} - \psi_{\text{пад. н}} \quad (8.35)$$

— модуль и аргумент коэффициента отражения в сечении нагрузки.

Таким образом, зная коэффициент отражения  $\rho_n = \rho_n e^{i\psi_n}$  в сечении нагрузки, можно определить коэффициент отражения в любом сечении линии. В свою очередь, коэффициент отражения в сечении нагрузки может быть определен, если известны параметры линии и сопротивление нагрузки. Действительно, из соотношений (8.8), (8.9) и (8.17а) следует, что в сечении нагрузки ( $l = 0$ ) амплитуды напряжения и тока имеют значения

$$\dot{U}_n = \dot{U}_{m \text{ пад. н}} + \dot{U}_{m \text{ отр. н}},$$

$$\dot{I}_n = \frac{\dot{U}_{m \text{ пад. н}} - \dot{U}_{m \text{ отр. н}}}{Z_c}.$$

Отсюда определяется нагрузочное сопротивление:

$$\dot{Z}_H = \frac{\dot{U}_{mH}}{\dot{I}_{mH}} = \dot{Z}_c \frac{\dot{U}_{m \text{ пад. н}} + \dot{U}_{m \text{ отр. н}}}{\dot{U}_{m \text{ пад. н}} - \dot{U}_{m \text{ отр. н}}},$$

или

$$\dot{Z}_H = \dot{Z}_c \frac{1 + \dot{p}_H}{1 - \dot{p}_H}. \quad (8.36)$$

Из этой формулы находим коэффициент отражения:

$$\dot{p}_H = \frac{\dot{Z}_H - \dot{Z}_c}{\dot{Z}_H + \dot{Z}_c}, \quad (8.37)$$

или в случае линии без потерь

$$\dot{p}_H = \frac{\dot{Z}_H - W}{\dot{Z}_H + W}. \quad (8.37a)$$

Как отмечалось, в линии без потерь бегущие волны не изменяются по амплитуде вдоль линии. При этом аргумент коэффициента отражения определяется выражением (8.34), а модуль коэффициента отражения (8.33) получается одинаковым во всех сечениях линии и равным

$$\rho = \rho_H = \left| \frac{Z_H - W}{Z_H + W} \right|. \quad (8.38)$$

Волновое сопротивление линии без потерь является активным, и модуль коэффициента отражения не превышает единицы, как следует из выражения (8.38):

$$0 \leq \rho \leq 1.$$

Значение  $\rho_H = 0$  свидетельствует об отсутствии отраженной волны, т. е. о режиме чисто бегущих (падающих) волн. При этом и в линии без потерь и в линии с потерями  $\rho = \rho_H = 0$ , как вытекает из равенства (8.33).

Из формулы (8.37) видно, что в линии с потерями режим чисто бегущих волн создается при равенстве нагрузочного и волнового сопротивлений линии:

$$\dot{Z}_H = \dot{Z}_c. \quad (8.39)$$

Из выражения (8.37a) следует, что режим чисто бегущих волн в линии без потерь получается в том случае, если сопротивление нагрузки чисто активное и равно волновому сопротивлению:

$$\dot{Z}_H = R_H = W. \quad (8.39a)$$

В режиме бегущих волн во всех сечениях линии отношение комплексных амплитуд напряжения и тока, т. е. входное сопротивление (8.13) определяется соотношением (8.22). Таким образом,

в режиме бегущих волн входное сопротивление линии равно ее волновому сопротивлению:

$$\dot{Z} = R + jX = \dot{Z}_c \quad (8.40)$$

для линии с потерями и

$$\dot{Z} = R = W \quad (8.40a)$$

для линии без потерь.

Характер волнового процесса при других значениях модуля коэффициента отражения ( $p \neq 0$ ) рассматривается в следующих пунктах.

## 6. Стоячие волны

Рассмотрим характер волнового процесса в линии без потерь при полном отражении от конца линии. Полное отражение, при котором амплитуды отраженных и падающих волн получаются одинаковыми ( $p = 1$ ), означает, что энергия в нагрузке не потребляется. Такой волновой режим может установиться, очевидно, в тех случаях, когда линия разомкнута или короткозамкнута на конце и при чисто реактивном сопротивлении нагрузки. Действительно, из формулы (8.38) следует, что при  $Z_n = \infty$ ,  $\dot{Z}_n = 0$  и  $\dot{Z}_n = jX_n$  модуль коэффициента отражения равен единице.

Если падающие и отраженные волны имеют одинаковые амплитуды, то они описываются следующими уравнениями:

$$\begin{aligned} u_{\text{пад}} &= U_{m \text{ пад}} \cos(\omega t + \beta l + \psi_{\text{пад. н}}), \\ i_{\text{пад}} &= I_{m \text{ пад}} \cos(\omega t + \beta l + \psi_{\text{пад. н}}), \\ u_{\text{отр}} &= U_{m \text{ пад}} \cos(\omega t - \beta l + \psi_{\text{отр. н}}), \\ i_{\text{отр}} &= -I_{m \text{ пад}} \cos(\omega t - \beta l + \psi_{\text{отр. н}}). \end{aligned}$$

Волновой процесс в линии представляет собой сумму падающих и отраженных волн. Поэтому, складывая полученные уравнения и заменяя сумму косинусов произведением косинусов, а разность косинусов произведением синусов, получаем:

$$\begin{aligned} u &= u_{\text{пад}} + u_{\text{отр}} = 2U_{m \text{ пад}} \cos\left(\beta l - \frac{\psi_n}{2}\right) \cos\left(\omega t + \psi_{\text{пад. н}} + \frac{\psi_n}{2}\right), \\ i &= i_{\text{пад}} + i_{\text{отр}} = -2I_{m \text{ пад}} \sin\left(\beta l - \frac{\psi_n}{2}\right) \sin\left(\omega t + \psi_{\text{пад. н}} + \frac{\psi_n}{2}\right), \end{aligned}$$

или

$$\begin{aligned} u &= U_m \cos\left(\omega t + \psi_{\text{пад. н}} + \frac{\psi_n}{2}\right), \\ i &= I_m \cos\left(\omega t + \psi_{\text{пад. н}} + \frac{\psi_n}{2} + \frac{\pi}{2}\right), \end{aligned} \quad (8.41)$$



где

$$\begin{aligned} U_m &= 2U_{m\text{пад}} \cos\left(\beta l - \frac{\psi_n}{2}\right), \\ I_m &= 2I_{m\text{пад}} \sin\left(\beta l - \frac{\psi_n}{2}\right), \end{aligned} \quad (8.42)$$

а  $\psi_n$  определяется прежним выражением (8.35).

Волны, описываемые уравнениями (8.41), имеют следующие особенности:

1. Фаза волны не перемещается вдоль линии, поэтому такие волны получили название стоячих волн.

2. Фаза стоячей волны изменяется во всех сечениях линии одновременно на одну и ту же величину.

3. Начальная фаза стоячей волны в разных сечениях линии является одинаковой или отличается на угол  $\pi$ . Изменению фазы на угол  $\pi$  соответствует изменение знака амплитуды напряжения и тока в выражениях (8.42).

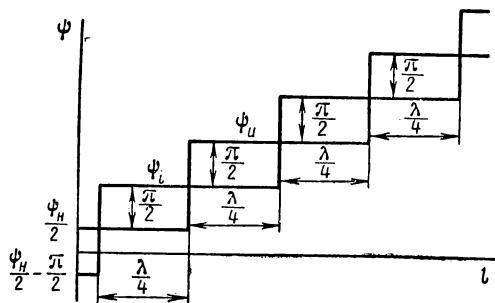


Рис. 8.8. Изменение фазы стоячих волн вдоль линии

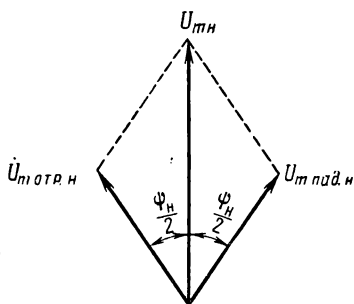


Рис. 8.9. Векторная диаграмма напряжений на конце линии при полном отражении

Можно также считать, что изменение знака амплитуды напряжения или тока соответствует скачкообразному возрастанию их фазы на угол  $\pi$ . При этом получается пространственно-фазовая характеристика стоячих волн, изображенная на рис. 8.8. На этом рисунке принято для простоты  $\psi_{\text{пад}, n} = 0$ .

4. В любом сечении линии напряжение и ток сдвинуты по фазе на угол  $\frac{\pi}{2}$ . Это означает, что входное сопротивление линии в режиме стоячих волн является чисто реактивным.

5. По сравнению с фазой падающей волны начальная фаза стоячей волны напряжения на конце линии изменяется на угол  $\frac{\psi_n}{2}$  в сторону опережения. Этот вывод иллюстрируется векторной диаграммой, показанной на рис. 8.9.

6. Амплитуда стоячих волн изменяется вдоль линии по косинусоидальному закону. Пространственно-амплитудные характеристики стоячих волн изображены на рис. 8.10.

7. Максимумы амплитуды напряжения и тока равны соответственно  $2U_{m \text{ пад}}$  и  $2I_{m \text{ пад}}$ . Эти максимумы называются пучностями напряжения и тока. Удвоение амплитуды в пучности получается потому, что в сечении пучности падающие и отраженные волны совпадают по фазе.

Минимальные амплитуды, называемые узлами напряжения и тока, равны нулю, так как в узлах падающие и отраженные волны получаются в противофазе.

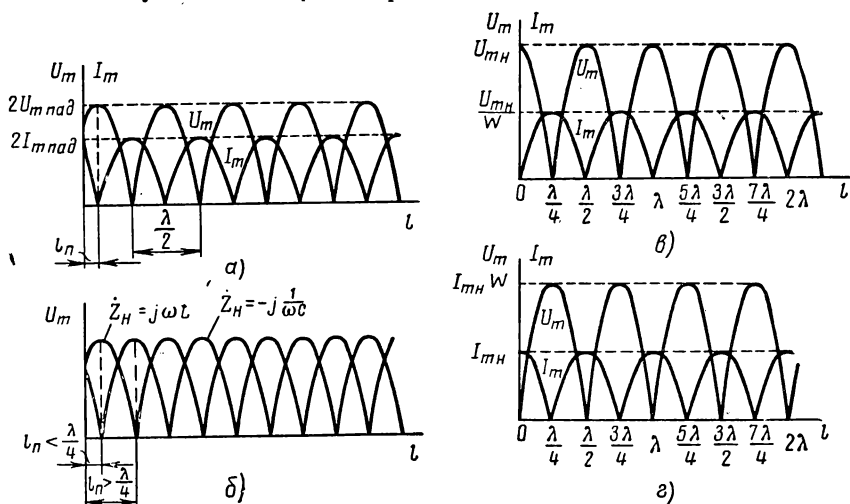


Рис. 8.10. Изменение амплитуды стоячих волн вдоль линии

8. Пучности напряжения совпадают с узлами тока и наоборот (см. рис. 8.10).

9. Пучности и узлы повторяются через расстояние  $\frac{\lambda}{2}$ .

10. Как следует из выражения (8.42), ближайшая к концу линии пучность напряжения находится на расстоянии  $l_n$  от нагрузки (рис. 8.10, а), которое определяется из условия

$$\beta l_n = \frac{\psi_n}{2}. \quad (8.43)$$

К этому же выводу можно прийти чисто качественно путем следующих рассуждений. Пусть на расстоянии  $l_n$  от конца линии имеется пучность. В сечении пучности падающая и отраженная волны находятся в фазе. Падающая волна при перемещении от пучности до конца линии отстает по фазе на угол  $\beta l_n$ . Отраженная

волна в том же интервале и при том же направлении отсчета (по направлению к концу линии) изменяется по фазе на угол  $\beta l_n$  в сторону опережения. Следовательно, сдвиг фаз  $\psi_n$  между отраженной и падающей волнами на конце линии равен

$$\psi_n = 2\beta l_n.$$

Отсюда непосредственно вытекает соотношение (8.43).

Произвольное положение первой пучности напряжения, показанное на рис. 8.10, а, соответствует произвольному значению  $\psi_n$ , получающемуся при некотором реактивном нагрузочном сопротивлении  $\dot{Z}_n = jX_n$ . Однако следует иметь в виду, что в зависимости от знака реактивности  $X_n$  вид пространственно-амплитудной характеристики получается различным, как показано на рис. 8.10, б.

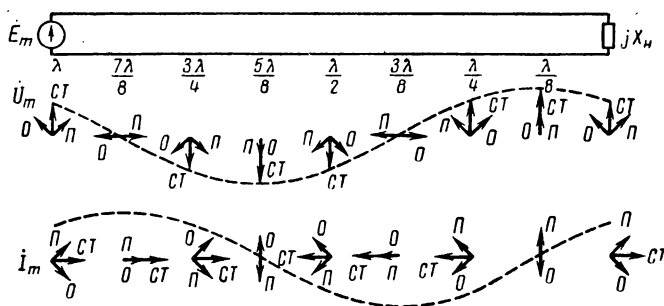


Рис. 8.11. Векторная диаграмма образования стоячих волн

В частном случае, когда волна напряжения отражается в фазе ( $\psi_n = 0$ ), пучность напряжения совпадает с концом линии и амплитуда колебаний изменяется вдоль линии по косинусоиде (рис. 8.10, б). Такой случай наблюдается в разомкнутой линии ( $Z_n = \infty$ ), как это следует из формулы (8.37а).

В другом частном случае, когда волна напряжения отражается в противофазе ( $\psi_n = \pm \pi$ ), пучность напряжения отстоит от конца линии на четверть длины волны, на конце линии образуется узел, и амплитуда напряжения изменяется вдоль линии по синусоиде (рис. 8.10, в). Такой случай наблюдается в короткозамкнутой линии ( $Z_n = 0$ ), как вытекает из формулы (8.37а).

Процесс образования стоячих волн может быть изображен графически с помощью векторных диаграмм. При построении векторных диаграмм необходимо руководствоваться следующими правилами:

1. В различных точках линии изображаются векторы падающей и отраженной волн для одного и того же момента времени.
2. В падающей волне напряжение и ток совпадают по фазе, т. е. векторы тока и напряжения имеют одинаковое направление. В отраженной же волне ток и напряжение находятся в противофазе.

3. Перемещению по линии вдоль направления распространения соответствует отставание волны по фазе, т. е. поворот вектора по часовой стрелке. Таким образом, для падающей волны вектор поворачивается по часовой стрелке при перемещении по линии слева направо, а для отраженной волны — при перемещении справа налево.

4. Перемещению вдоль линии на волновое расстояние  $\beta l = \frac{\pi}{2}$  ( $l = \frac{\lambda}{4}$ ) соответствует поворот вектора на  $90^\circ$ .

В соответствии с этими правилами на рис. 8.11 построена в качестве примера векторная диаграмма образования стоячих волн.

На этом рисунке значки *п*, *о* и *см* относятся соответственно к падающей, отраженной и суммарной (стоячей) волнам.

Построенная диаграмма не только иллюстрирует процесс образования стоячих волн в длинной линии, но и дает наглядное представление о рассмотренных выше свойствах стоячих волн.

## 7. Смешанные волны

Рассмотрим волновой процесс в линии без потерь при условии, что в нагрузке поглощается некоторая часть энергии, переносимая падающей волной. Такой случай наблюдается при комплексном сопротивлении нагрузки и при активном нагрузочном сопротивлении, не равном волновому сопротивлению. При этом получается частичное отражение волн от конца линии, так что амплитуда отраженной волны оказывается меньше амплитуды падающей волны. Действительно, из выражения (8.38) следует, что при  $\dot{Z}_н = R_н + jX_н$  и  $\dot{Z}_н = R_н \neq W$  модуль коэффициента отражения отличен от нуля, но меньше единицы.

Таким образом, волновой процесс представляется в виде суммы падающей и отраженной волн, не равных друг другу:

$$u = u_{\text{пад}} + u_{\text{отр}}, \quad U_{m \text{ отр}} < U_{m \text{ пад}}.$$

Падающую волну можно разбить мысленно на две синфазные составляющие  $u'_{\text{пад}}$  и  $u''_{\text{пад}}$ :

$$u_{\text{пад}} = u'_{\text{пад}} + u''_{\text{пад}}.$$

Составляющую  $u''_{\text{пад}}$  выберем по амплитуде равной отраженной волне:

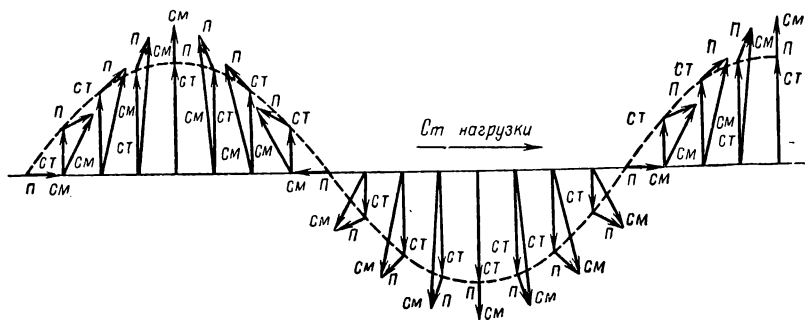
$$U''_{m \text{ пад}} = U_{m \text{ отр}}.$$

При выполнении этого условия составляющая  $u''_{\text{пад}}$  переносит ту часть энергии, которая возвращается обратно с отраженной

Итак, волновой процесс в рассматриваемом случае может быть представлен в виде суммы трех волн  $u''_{\text{пад}}$ ,  $u''_{\text{отр}}$  и  $u_{\text{отр}}$ . Составляющие  $u''_{\text{пад}}$  и  $u_{\text{отр}}$ , имея равные амплитуды и распространяясь навстречу друг другу, образуют в сумме стоячую волну:

Таким образом, волновой процесс может быть представлен различными способами:

Как видно из этого выражения, одним из способов разложения волны на составляющие является представление ее в виде суммы бегущей  $u_{\text{пад}}$  и стоячей  $u_{\text{ст}}$  волн.



Волны, образующиеся в результате сложения бегущей и стоячей волн, получили название смешанных волн.

Так как фаза бегущей волны изменяется вдоль линии, то и фаза смешанной волны изменяется вдоль линии. Амплитуда смешанной волны также изменяется вдоль линии, поскольку изменяется вдоль линии амплитуда стоячей волны.

На рис. 8.12 показана векторная диаграмма образования смешанной волны в процессе сложения стоячей (ст) и падающей (п) волн. Из этой диаграммы наглядно видно изменение фазы смешанной волны вдоль линии. Пространственно-фазовая характеристика смешанных волн показана из рис. 8.13, где пунктиром изображены начальные фазы стоячей и бегущей волн. Следует подчеркнуть, что здесь не происходит арифметического сложения фаз стоячей и бегущей волн, как это видно из рис. 8.12. Поскольку смешанная волна образуется путем векторного сложения стоячей и бегущей волн, фаза смешанной волны изменяется вдоль линии плавно, а

не скачкообразно. В узлах и пучностях стоячей волны фазы смешанной и падающей волн совпадают. В остальных сечениях линии фаза смешанной волны имеет промежуточное значение между фазами падающей и стоячей волн, как видно из рис. 8.12.

Узлам и пучностям стоячей волны соответствуют некоторые минимальные и максимальные значения амплитуды смешанной волны. Эти минимальные и максимальные амплитуды получили название узлов и пучностей смешанной волны.

В соответствии с выражением (8.44) узлы и пучности смешанной волны определяются соотношениями

$$\begin{aligned} U_{m \min} &= U_{m \text{ пад}} - U_{m \text{ отр}} = U'_{m \text{ пад}}, \\ U_{m \max} &= U_{m \text{ пад}} + U_{m \text{ отр}} = U'_{m \text{ пад}} + U_{m \text{ ст max}}. \end{aligned} \quad (8.45)$$

Следует иметь в виду, что смешанная волна является суммой стоячей волны, фаза которой не меняется вдоль линии, и бегущей волны, фаза которой изменяется вдоль линии. Поэтому амплитуда смешанной волны равна арифметической сумме амплитуд падающей и стоячей волн только в пучностях, где составляющие смешанной волны получаютс я в фазе. В остальных сечениях амплитуда смешанной волны равна геометрической сумме амплитуд падающей и стоячей волн. Характер изменения амплитуды напряжения смешанной волны вдоль линии показан на рис. 8.14, а, где пунктиром изображены амплитуды стоячей и бегущей волн, образующих смешанную волну.

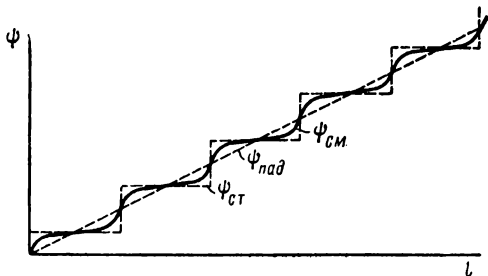


Рис. 8.13. Изменение фазы смешанных волн вдоль линии

Так как пучности смешанной волны совпадают с пучностями стоячей волны, то положение первой от конца линии пучности напряжения смешанной волны определяется прежним выражением (8.43).

Расположение пучностей и узлов, показанное на рис. 8.14, а, соответствует случаю комплексного нагрузочного сопротивления, как следует из формулы (8.37а).

В частном случае, когда  $\dot{Z}_н = R_н > W$ , пучность напряжения находится на конце линии (рис. 8.14, б), как вытекает из формулы (8.37а). Действительно, при этом  $\dot{p}_н = p_н$  и  $\psi_н = 0$ .

В другом частном случае, когда  $\dot{Z}_н = R_н < W$ , на конце линии находится узел напряжения (см. рис. 8.14, б). Действительно, при этом  $\dot{p}_н = -p_н$  и  $\psi_н = \pm \pi$ , как следует из формулы (8.37а).

Для характеристики смешанных волн вводится понятие коэффициента бегущей волны (КБВ), который показывает, какую долю

от максимальной амплитуды суммарной волны  $u'_{\text{пад}} + u_{\text{ст}}$  составляет амплитуда бегущей волны  $u'_{\text{пад}}$  (см. рис. 8.14, а):

$$k_6 = \frac{U'_{m \text{ пад}}}{U'_{m \text{ пад}} + U_{m \text{ ст max}}},$$

или

$$k_6 = \frac{U_{m \text{ пад}} - U_{m \text{ отр}}}{U_{m \text{ пад}} + U_{m \text{ отр}}} = \frac{U_{m \text{ min}}}{U_{m \text{ max}}}. \quad (8.46)$$

Очевидно, КБВ может изменяться в пределах от нуля до единицы:

$$0 \leq k_6 \leq 1. \quad (8.47)$$

Предельный случай, когда  $k_6 = 0$ , соответствует отсутствию составляющей  $u'_{\text{пад}}$ , которая переносит энергию, потребляемую нагрузкой. В этом случае нагрузка не потребляет энергию, на конце

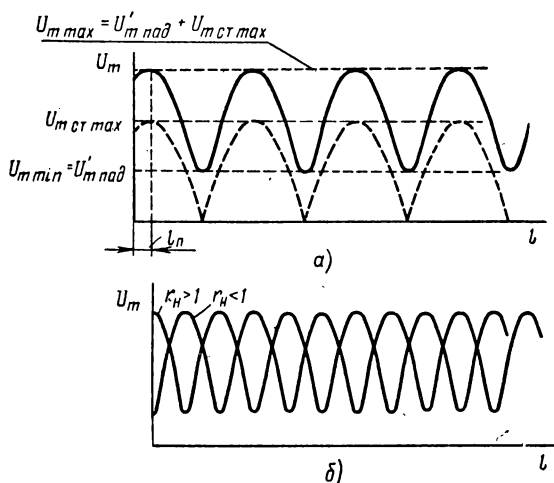


Рис. 8.14. Изменение амплитуды смешанных волн вдоль линии

линии происходит полное отражение, и в линии устанавливаются стоячие волны. Другой предельный случай ( $k_6 = 1$ ) соответствует режиму чисто бегущих волн, и составляющая  $u_{\text{ст}}$  при этом равна нулю.

Смешанные волны характеризуются иногда параметром, обратным коэффициенту бегущей волны, получившим название коэффициента стоячей волны (КСВ):

$$k_c = \frac{1}{k_6} = \frac{U_{m \text{ max}}}{U_{m \text{ min}}}. \quad (8.48)$$

Учитывая соотношение (8.47), находим, что КСВ изменяется в пределах

$$1 \leq k_c \leq \infty. \quad (8.49)$$

Значение  $k_c = 1$  соответствует режиму чисто бегущих волн, а  $k_c = \infty$  — режиму чисто стоячих волн.

Коэффициенты бегущей и стоячей волн могут быть определены экспериментально, поскольку согласно формулам (8.46) и (8.48) они выражаются через максимальную и минимальную амплитуды напряжения, которые могут быть измерены непосредственно в линии.

Так как КБВ и КСВ определяются величиной отраженной волны, или, другими словами, степенью рассогласования, то они могут быть выражены через модуль коэффициента отражения. Действительно, вынося за скобки  $U_{m \text{ пад}}$

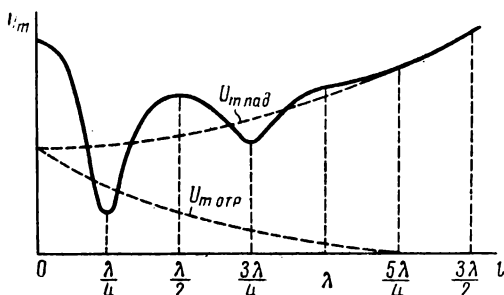


Рис. 8.15. Изменение амплитуды смешанной волны вдоль линии с потерями

в числителе и знаменателе выражения (8.46), получаем

$$k_6 = \frac{1 - \frac{U_{m \text{ отр}}}{U_{m \text{ пад}}}}{1 + \frac{U_{m \text{ отр}}}{U_{m \text{ пад}}}}.$$

Отсюда, учитывая равенство (8.29), находим

$$k_6 = \frac{1 - p}{1 + p} \quad (8.50)$$

и

$$p = \frac{1 - k_6}{1 + k_6}. \quad (8.51)$$

Выше рассматривался характер волновых процессов в линии без потерь. Если потерями в линии пренебречь нельзя, то следует учитывать, что модуль коэффициента отражения меняется вдоль линии. Подставляя соотношение (8.33) в формулу (8.50), находим, что в линии с потерями значение  $k_6$  увеличивается при удалении от конца линии:

$$k_6 = \frac{1 - p_n e^{-2\alpha l}}{1 + p_n e^{-2\alpha l}}.$$

Характер изменения амплитуды смешанных волн показан для этого случая на рис. 8.15.



Из сказанного следует, что в линии с потерями не могут существовать чисто стоячие волны. Действительно, при полном отражении ( $\rho_n = 1$ ) коэффициент бегущей волны равен нулю только на конце линии. В остальных сечениях линии коэффициент  $k_0$  отличен от нуля и волны получаются смешанными.

## 8. Согласование длинных линий

При использовании длинной линии в качестве фидера параметры линии необходимо выбирать таким образом, чтобы в нагрузку от источника э. д. с. поступала максимальная мощность. Это требование выполняется при соблюдении двух условий. Во-первых, источник должен отдавать в фидер максимальную мощность. Во-вторых, потери в фидере должны быть минимальными, т. е. должен быть максимальным к. п. д. фидера

$$\eta = \frac{P_{an}}{P_{a0}}. \quad (8.52)$$

Здесь  $P_{an}$  — мощность, потребляемая нагрузкой;

$P_{a0}$  — мощность, отдаваемая источником в фидер.

Максимальная активная мощность отдается источником в фидер при соблюдении критерия согласования (2.94) или (2.94а), в котором под величиной  $\hat{Z}$  следует понимать входное сопротивление фидера (8.13). При соблюдении этого критерия линия называется согласованной с источником (или согласованной на входе).

Если критерий согласования не выполняется, то для согласования фидера с источником на входе линии включается согласующее устройство (рис. 8.16, а). Согласующее устройство представляет собой некоторый реактивный четырехполюсник, который преобразует сопротивление  $\hat{Z}$  в сопротивление  $\hat{Z}_{вх}$ , т. е. является трансформатором сопротивлений. При наличии согласующего устройства критерий согласования (2.94) следует записать в виде

$$\hat{Z}_{вх} = \hat{Z}_i^*. \quad (8.53)$$

Комплексные сопротивления  $\hat{Z}_{вх}$  и  $\hat{Z}_i$  являются функцией частоты. Поэтому критерий (8.53) может выполняться только на отдельных фиксированных частотах, поскольку обеспечить тождественный характер изменения различных комплексных сопротивлений практически невозможно.

Согласование фидера с источником существенно упрощается, если в фидере нет потерь и в нем устанавливается режим чисто бегущих волн. При этом справедливо равенство (8.40а), и согласование может быть обеспечено на всех частотах, если

$$\hat{Z}_i = R_i = W. \quad (8.54)$$

Такое согласование в диапазоне частот называется диапазонным, или широкополосным согласованием.

Наряду с согласованием фидера на входе применяется также согласование фидера с нагрузкой. Целью согласования фидера на выходе является получение в нем режима бегущих волн, который является наивыгоднейшим в энергетическом отношении. Преимущества режима бегущих волн заключаются в следующем.

1. Потери энергии в фидере в общем случае получаются как при распространении падающей волны, так и при распространении отраженной волны. Следовательно, потери в фидере тем меньше, чем меньше амплитуда отраженной волны. Поэтому в режиме бегущих волн, когда отражение отсутствует, потери в фидере становятся минимальными, а к. п. д. — максимальным.

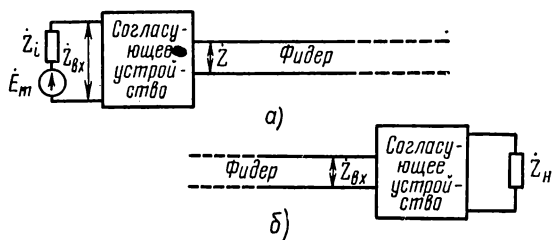


Рис. 8.16. Согласование фидера с источником (а) и нагрузкой (б)

2. При наличии отражения в фидере устанавливаются смешанные волны. В пучностях напряжения смешанной волны амплитуда напряжения больше амплитуды падающей волны. Увеличение напряжения в линии приводит к необходимости увеличения электрической прочности фидера. Если же электрическая прочность фидера является ограниченной, то во избежание электрического пробоя в пучности напряжения приходится снижать мощность сигнала, передаваемого по фидеру (при этом уменьшается и напряжение в пучности).

Таким образом, в режиме бегущих волн максимальная мощность сигнала, которую можно передавать по данному фидеру, получается наибольшей.

3. В режиме бегущих волн можно осуществить диапазонное согласование на входе фидера без потерь, как отмечалось выше. Тем самым обеспечиваются условия отдачи максимальной активной мощности от источника в фидер.

Итак, наивыгоднейшим волновым режимом фидера является режим бегущих волн, так как при этом к. п. д. фидера является максимальным, максимальная мощность сигнала, которую можно передавать по фидеру, получается наибольшей, и, наконец, облегчается диапазонное согласование на входе фидера без потерь,

что приводит к увеличению мощности, отдаваемой от источника в фидер.

Как было показано выше, режим бегущих волн в фидере устанавливается при равенстве сопротивления нагрузки и волнового сопротивления линии, т. е. при выполнении условия (8.39) или (8.39а). При выполнении этого условия линия называется согласованной с нагрузкой (или согласованной на выходе).

Наибольший практический интерес представляет согласование с нагрузкой линии без потерь. Этот случай и рассматривается ниже.

Если условие (8.39а) не выполняется, то для согласования фидера с нагрузкой ставится согласующее устройство на выходе линии (рис. 8.16, б). Как и при согласовании на входе, согласующее устройство в этом случае является трансформатором сопротивлений, преобразующим сопротивление  $Z_n$  в сопротивление  $Z_{вх}$ .

При этом условие согласования записывается следующим образом:

$$Z_{вх} = R_{вх} = W. \quad (8.55)$$

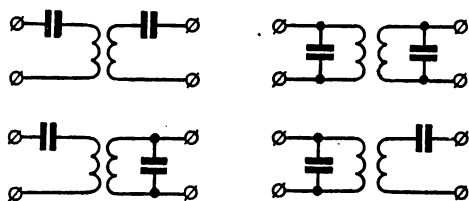


Рис. 8.17. Резонансные согласующие трансформаторы

Условие согласования (8.55) может выполняться

только на одной или нескольких фиксированных частотах, так как комплексное сопротивление  $Z_{вх}$  является функцией частоты.

Точного согласования линии в диапазоне частот практически достигнуть невозможно. Обычно допускается небольшое рассогласование, при котором модуль коэффициента отражения не превышает некоторой заданной величины.

О степени рассогласования можно судить также по величине КБВ, минимальное значение которого должно быть  $0,8 \div 0,9$ .

Если небольшое рассогласование допустимо, то диапазонное согласование может быть получено и при соблюдении критерия (8.55) на нескольких фиксированных частотах. Если эти частоты согласования расположены достаточно близко друг к другу, то рассогласование линии на промежуточных частотах может быть достаточно малым. При этом фидер является практически согласованным во всем диапазоне частот, ограниченном крайними фиксированными частотами, на которых выполняется условие (8.55).

В качестве согласующего устройства на входе фидера могут применяться обычные трансформаторы. При этом обычно цепь первичной и вторичной обмоток трансформатора настраивается в резонанс путем последовательного или параллельного подключения соответствующей емкости (рис. 8.17). При такой настройке согласующий трансформатор называется резонансным трансформатором.

При использовании резонансного трансформатора коэффициент трансформации выбирается таким образом, чтобы активное сопротивление цепи вторичной обмотки трансформировалось до величины активной составляющей внутреннего сопротивления источника.

Некоторые типы согласующих устройств, применяемых на выходе фидера, рассматриваются в следующем параграфе.

## § 8.2. МЕТОДЫ РАСЧЕТА ДЛИННЫХ ЛИНИЙ

### 1. Расчет волновых параметров

При решении различных задач необходимо, в первую очередь, знать волновые параметры длинной линии.

Для линии без потерь волновые параметры (8.26) — (8.28) выражаются через погонные параметры  $L_0$  и  $C_0$ . В теории электромагнитного поля для двухпроводной линии выводятся следующие формулы:

$$L_0 = \frac{\mu}{\pi} \ln \frac{d_l - r_l}{r_l} \approx \frac{\mu}{\pi} \ln \frac{d_l}{r_l},$$

$$C_0 = \frac{\pi \epsilon}{\ln \frac{d_l - r_l}{r_l}} \approx \frac{\pi \epsilon}{\ln \frac{d_l}{r_l}},$$

где  $d_l$  — расстояние между проводами линии (рис. 8.18, а);  
 $r_l$  — радиус проводов.

Подставляя эти значения  $L_0$  и  $C_0$  в формулу (8.28) и учитывая, что для вакуума

$$\mu = 4\pi \cdot 10^{-7} \text{ гн/м}; \quad \epsilon = \frac{1}{4\pi \cdot 9 \cdot 10^9} \text{ ф/м},$$

находим волновое сопротивление воздушной двухпроводной линии:

$$W = 276 \lg \frac{d_l}{r_l}. \quad (8.56)$$

Аналогично определяется волновое сопротивление воздушной коаксиальной линии:

$$W = 138 \lg \frac{R_l}{r_l}, \quad (8.57)$$

где  $R_l$  — внутренний радиус внешнего провода (рис. 8.18, б);  
 $r_l$  — радиус внутреннего провода.

Из формул (8.56) и (8.57) следует, что волновое сопротивление вследствие его логарифмической зависимости от геометрических размеров линии не может изменяться в широких пределах. Практически двухпроводная линия может иметь волновое сопротивление порядка нескольких сотен ом, а коаксиальная линия —  $50 \div 150 \text{ ом}$ .

Использование указанных значений волновых параметров в формуле (8.27) дает для фидеров с воздушной изоляцией значение фазовой скорости, равное скорости света  $v_0 = c = 3 \cdot 10^8$  м/сек.

Для фидеров с изоляцией из твердых диэлектриков получается меньшее значение фазовой скорости.

Согласно найденному значению фазовой скорости может быть определен и фазовый коэффициент (8.26). Однако практически его значение удобнее определять по формуле (8.19).

Рассмотрим волновые параметры линии с потерями.

При учете потерь в линии следует прежде всего определить коэффициент затухания  $\alpha$ . Согласно определению (8.14) коэффициент затухания  $\alpha$  является вещественной частью комплексного коэффициента распространения

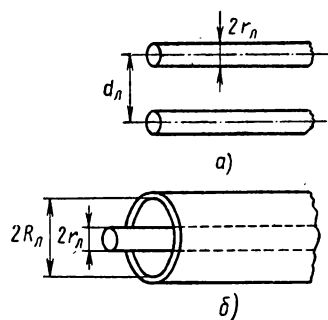


Рис. 8.18. Конструктивные параметры фидеров

$\dot{\gamma}$ , определяемого соотношением (8.7). Для определения  $\alpha$  подставим в формулу (8.7) точные значения  $Z_0$  и  $Y_0$  из соотношений (8.1) и (8.2):

$$\dot{\gamma} = \alpha + j\beta = \sqrt{(R_0 + j\omega L_0)(G_0 + j\omega C_0)}. \quad (8.58)$$

Для выделения вещественной и мнимой частей в этом выражении найдем квадрат  $\dot{\gamma}$  и квадрат модуля  $\dot{\gamma}$ .

Возводя в квадрат выражение (8.58), получаем

$$\dot{\gamma}^2 = \alpha^2 - \beta^2 + j2\alpha\beta = R_0G_0 - \omega^2L_0C_0 + j\omega(R_0C_0 + G_0L_0),$$

откуда

$$\alpha^2 - \beta^2 = R_0G_0 - \omega^2L_0C_0. \quad (8.59)$$

Определим модуль  $\dot{\gamma}$ :

$$|\dot{\gamma}| = \sqrt{\alpha^2 + \beta^2} = \sqrt{(R_0G_0 - \omega^2L_0C_0)^2 + \omega^2(R_0C_0 + G_0L_0)^2},$$

откуда

$$\alpha^2 + \beta^2 = \sqrt{(R_0G_0 - \omega^2L_0C_0)^2 + \omega^2(R_0C_0 + G_0L_0)^2}. \quad (8.60)$$

Складывая равенства (8.59) и (8.60), находим коэффициент затухания:

$$\alpha = \sqrt{\frac{1}{2} [R_0G_0 - \omega^2L_0C_0 + \sqrt{(R_0G_0 - \omega^2L_0C_0)^2 + \omega^2(R_0C_0 + G_0L_0)^2}]}. \quad (8.61)$$

Формула (8.61) ввиду ее громоздкости неудобна для практических расчетов. В большинстве случаев можно использовать приближенное выражение для  $\alpha$ . Учитывая, что  $R_0G_0 \ll \omega^2L_0C_0$ ,

равенство (8.61) можно представить в следующем приближенном виде:

$$\alpha \approx \sqrt{\frac{1}{2} [-\omega^2 L_0 C_0 + \sqrt{\omega^4 L_0^2 C_0^2 + \omega^2 (R_0 C_0 + G_0 L_0)^2}]}.$$

Учитывая далее, что во внутреннем радикале последнего соотношения первое слагаемое значительно превышает второе слагаемое, этот радикал можно разложить в ряд, ограничившись двумя членами разложения:

$$\alpha \approx \sqrt{\frac{1}{2} \left[ -\omega^2 L_0 C_0 + \omega^2 L_0 C_0 + \frac{1}{2} \left( R_0 \sqrt{\frac{C_0}{L_0}} + G_0 \sqrt{\frac{L_0}{C_0}} \right)^2 \right]},$$

или окончательно

$$\alpha \approx \frac{1}{2} \left( \frac{R_0}{W} + G_0 W \right), \quad (8.62)$$

где  $W$  — приближенное значение волнового сопротивления, определяемое равенством (8.28).

Точное значение волнового сопротивления линии с потерями определяется комплексной величиной, как показано ниже.

В фидерах с воздушной изоляцией проводимость изоляции значительно меньше сопротивления проводов ( $G_0 \ll \frac{R_0}{W^2}$ ). При этом формула (8.62) упрощается:

$$\alpha \approx \frac{R_0}{2W}. \quad (8.63)$$

В фидерах с изоляцией из твердых диэлектриков может иметь место обратное соотношение между проводимостью изоляции и сопротивлением проводов ( $R_0 \ll G_0 W^2$ ). При этом коэффициент затухания

$$\alpha \approx \frac{1}{2} W G_0. \quad (8.64)$$

Из соотношений (8.59) и (8.60) может быть также определен фазовый коэффициент линии с потерями. Вычитая равенство (8.59) из (8.60,) находим фазовый коэффициент:

$$\beta = \sqrt{\frac{1}{2} [\omega^2 L_0 C_0 - R_0 G_0 + \sqrt{(R_0 G_0 - \omega^2 L_0 C_0)^2 + \omega^2 (R_0 C_0 + G_0 L_0)^2}]}. \quad (8.65)$$

Производя упрощения, аналогичные тем, которые были сделаны при преобразовании формулы (8.61), получаем

$$\beta \approx \sqrt{\omega^2 L_0 C_0 + \frac{1}{4} \left( \frac{R_0}{W} + W G_0 \right)^2},$$

или

$$\beta \approx \sqrt{\beta_0^2 + \alpha^2} = \beta_0 \sqrt{1 + \left(\frac{\alpha}{\beta_0}\right)^2} \approx \beta_0 \left(1 + \frac{1}{2} \frac{\alpha^2}{\beta_0^2}\right). \quad (8.66)$$

В этом выражении второе слагаемое ничтожно мало по сравнению с первым слагаемым. Поэтому практически в линии с потерями фазовый коэффициент почти всегда можно определять по формуле (8.26).

Если же пользоваться более точным соотношением (8.66), то можно прийти к выводу, что в линиях с потерями фазовая скорость зависит от частоты. Действительно, из формул (8.18), (8.26) и (8.66) получаем

$$v = \frac{v_0}{1 + \frac{1}{2} \frac{\alpha^2}{\beta_0^2}}. \quad (8.67)$$

Зависимость фазовой скорости от частоты обусловлена не только тем, что  $\beta_0$  зависит от частоты, но также зависимостью  $\alpha$  от частоты.

Зависимость фазовой скорости от частоты означает, что в линиях с потерями сложные сигналы претерпевают фазовые искажения.

В линиях с потерями волновое сопротивление также зависит от частоты, что приводит к частотным искажениям сложных сигналов. Выражение для волнового сопротивления линий с потерями может быть получено из общего определения (8.7) с учетом точного значения погонных параметров  $\dot{Z}_0$  и  $\dot{Y}_0$ . Подставляя обозначения (8.1) и (8.2) в формулу (8.7), получаем

$$\dot{Z}_c = \sqrt{\frac{R_0 + j\omega L_0}{G_0 + j\omega C_0}} = W \sqrt{\frac{1 - j\frac{R_0}{\omega L_0}}{1 - j\frac{G_0}{\omega C_0}}}, \quad (8.68)$$

где  $W$  определяется прежним выражением (8.28).

Учитывая, что  $R_0 \ll \omega L_0$  и  $G_0 \ll \omega C_0$ , разложим радикал в ряд и ограничимся двумя членами разложения:

$$\dot{Z}_c = W \left(1 - j\frac{R_0}{2\omega L_0}\right) \left(1 + j\frac{G_0}{2\omega C_0}\right),$$

или

$$\dot{Z}_c \approx W \left[1 - j\frac{1}{2\omega} \left(\frac{R_0}{L_0} - \frac{G_0}{C_0}\right)\right]. \quad (8.69)$$

Для фидеров с воздушной изоляцией ( $G_0 \ll \frac{R_0}{W^2}$ ), для которых справедливо соотношение (8.63), формула (8.69) упрощается:

$$\dot{Z}_c \approx W \left(1 - j\frac{R_0}{2\omega L_0}\right) = W \left(1 - j\frac{R_0}{2W\omega} \frac{1}{\sqrt{L_0 C_0}}\right),$$

или

$$\dot{Z}_c \approx W \left(1 - j\frac{\alpha}{\beta_0}\right). \quad (8.70)$$

Выражением (8.70), как и равенством (8.69), следует пользоваться только в тех случаях, когда вычисление волнового сопротивления по формуле (8.28) приводит к принципиальным ошибкам. Один из таких случаев рассматривается ниже.

Из соотношений (8.68) — (8.70) видно, что в общем случае волновое сопротивление линии с потерями является функцией частоты. При этом максимум модуля волнового сопротивления получается на нулевой частоте. Подставляя значение  $\omega = 0$  в равенство (8.68), получаем

$$\dot{Z}_{c|_{\omega=0}} = Z_{c \max} = \sqrt{\frac{R_0}{G_0}}. \quad (8.71)$$

Зависимость модуля волнового сопротивления от частоты показана на рис. 8.19. Из графика видно, что для линий с потерями волновое сопротивление можно вычислять по формуле (8.28) только на достаточно высоких частотах. В частности, на сверхвысоких частотах эта формула всегда справедлива.

При уменьшении частоты реактивная составляющая волнового сопротивления возрастает и выражение (8.28) становится несправедливым. При этом волновое сопротивление надо определять по формуле (8.69). На сравнительно малых частотах, когда величины  $\frac{R_0}{\omega L_0}$  и  $\frac{G_0}{\omega C_0}$

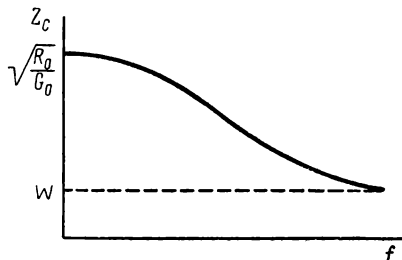


Рис. 8.19. График частотной зависимости модуля волнового сопротивления линии с потерями

становятся соизмеримыми с единицей, равенство (8.69) также становится несправедливым. Тогда волновое сопротивление следует вычислять по общей формуле (8.68). На низких частотах, когда  $R_0 \gg \omega L_0$  и  $G_0 \gg \omega C_0$ , волновое сопротивление можно определять по формуле (8.71).

## 2. Расчет напряжений и токов

Напряжение и ток в произвольном сечении линии на расстоянии  $l$  от нагрузки описываются общими решениями телеграфных уравнений (8.8) и (8.9). Конкретные значения напряжения и тока могут быть найдены после определения постоянных интегрирования  $U_{m1}$  и  $\dot{U}_{m1}$ . Эти постоянные находят из граничных условий, которые могут записываться в различной форме. Во многих случаях граничные условия удобно задавать амплитудами напряжения и тока на конце линии (на нагрузке):

$$\dot{U}_m|_{l=0} = \dot{U}_{mn}, \quad \dot{I}_m|_{l=0} = \dot{I}_{mn}.$$



Подставляя сюда из уравнений (8.8) и (8.9) значения

$$\dot{U}_m|_{l=0} = \dot{U}_{m1} + \dot{U}_{m1}'' \quad \text{и} \quad I_m|_{l=0} = \frac{\dot{U}_{m1}' - \dot{U}_{m1}''}{\dot{Z}_c},$$

получаем

$$\dot{U}_{m1} = \frac{1}{2} (\dot{U}_{mн} + \dot{Z}_c \dot{I}_{mн}), \quad \dot{U}_{m1}'' = \frac{1}{2} (\dot{U}_{mн} - \dot{Z}_c \dot{I}_{mн}). \quad (8.72)$$

Подставляя значения постоянных интегрирования (8.72) в соотношения (8.8), (8.9) и переходя к гиперболическим функциям, получаем

$$\begin{aligned} \dot{U}_m &= \dot{U}_{mн} \operatorname{ch} \dot{\gamma} l + \dot{I}_{mн} \dot{Z}_c \operatorname{sh} \dot{\gamma} l, \\ \dot{I}_m &= \dot{I}_{mн} \operatorname{ch} \dot{\gamma} l + \frac{\dot{U}_{mн}}{\dot{Z}_c} \operatorname{sh} \dot{\gamma} l. \end{aligned} \quad (8.73)$$

В тех случаях когда граничные условия задаются амплитудами напряжения и тока в начале линии, следует пользоваться выражениями (8.11), (8.12).

Задавая при этом граничные условия

$$\dot{U}_m|_{l'=0} = \dot{U}_m' + \dot{U}_m'' = \dot{U}_{m0}, \quad \dot{I}_m|_{l'=0} = \frac{\dot{U}_m' - \dot{U}_m''}{\dot{Z}_c} = \dot{I}_{m0},$$

находим постоянные интегрирования

$$\dot{U}_m' = \frac{1}{2} (\dot{U}_{m0} + \dot{Z}_c \dot{I}_{m0}), \quad \dot{U}_m'' = \frac{1}{2} (\dot{U}_{m0} - \dot{Z}_c \dot{I}_{m0}). \quad (8.72a)$$

Подставляя значения постоянных (8.72a) в соотношения (8.11), (8.12) и переходя к гиперболическим функциям, получаем окончательно

$$\begin{aligned} \dot{U}_m &= \dot{U}_{m0} \operatorname{ch} \dot{\gamma} l' - \dot{I}_{m0} \dot{Z}_c \operatorname{sh} \dot{\gamma} l', \\ \dot{I}_m &= \dot{I}_{m0} \operatorname{ch} \dot{\gamma} l' - \frac{\dot{U}_{m0}}{\dot{Z}_c} \operatorname{sh} \dot{\gamma} l'. \end{aligned} \quad (8.74)$$

Подставляя в соотношения (8.73) коэффициент распространения  $\dot{\gamma} = j\beta_0$  и учитывая, что  $\operatorname{ch} j\beta_0 l = \cos \beta_0 l$ , а  $\operatorname{sh} j\beta_0 l = j \sin \beta_0 l$ , получаем выражения для напряжения и тока в линии без потерь:

$$\begin{aligned} \dot{U}_m &= \dot{U}_{mн} \cos \beta_0 l + j \dot{I}_{mн} W \sin \beta_0 l, \\ \dot{I}_m &= \dot{I}_{mн} \cos \beta_0 l + j \frac{\dot{U}_{mн}}{W} \sin \beta_0 l. \end{aligned} \quad (8.75)$$

Соотношения (8.74) для линии без потерь принимают следующий вид:

$$\begin{aligned} \dot{U}_m &= \dot{U}_{m0} \cos \beta_0 l' - j \dot{I}_{m0} W \sin \beta_0 l', \\ \dot{I}_m &= \dot{I}_{m0} \cos \beta_0 l' - j \frac{\dot{U}_{m0}}{W} \sin \beta_0 l'. \end{aligned} \quad (8.76)$$

Определение напряжений и токов практически удобно производить, рассматривая линию как четырехполюсник. Принимая общие

обозначения для четырехполюсника (см. рис. 6.11), выражения (8.73), можно переписать в матричной форме:

$$\begin{bmatrix} \dot{U}_{m1} \\ \dot{I}_{m1} \end{bmatrix} = [a] \begin{bmatrix} \dot{U}_{m2} \\ \dot{I}_{m2} \end{bmatrix}, \quad (8.73a)$$

где

$$[a] = \begin{bmatrix} \operatorname{ch} \dot{\gamma} l_0 & \dot{Z}_c \operatorname{sh} \dot{\gamma} l_0 \\ \frac{1}{\dot{Z}_c} \operatorname{sh} \dot{\gamma} l_0 & \operatorname{ch} \dot{\gamma} l_0 \end{bmatrix} \quad (8.77)$$

— матрица отрезка линии длиной  $l = l_0$ .

В случае линии без потерь согласно равенствам (8.75) матрица (8.77) принимает вид

$$[a] = \begin{bmatrix} \cos \beta_0 l_0 & jW \sin \beta_0 l_0 \\ j \frac{1}{W} \sin \beta_0 l_0 & \cos \beta_0 l_0 \end{bmatrix}. \quad (8.77a)$$

Если, например, заданы э. д. с. источника  $\dot{E}_m$  и его внутреннее сопротивление  $\dot{Z}_i$ , а также нагрузочное сопротивление  $\dot{Z}_н$ , то напряжение и ток в произвольном сечении линии можно найти по формулам (8.8), (8.9), определив постоянные интегрирования  $\dot{U}_{m1}$ ,  $\dot{U}_{m1}''$  из граничных условий

$$\begin{aligned} \dot{U}_m|_{l=l_0} + \dot{Z}_i \dot{I}_m|_{l=l_0} &= \dot{E}_m, \\ \dot{U}_m|_{l=0} &= \dot{Z}_н \dot{I}_m|_{l=0}. \end{aligned}$$

Однако эта задача решается проще, если воспользоваться матрицей (8.77). Подставив значения матричных коэффициентов в формулу (6.71), найдем выходное напряжение в линии (при  $\dot{Z}_{01} = \dot{Z}_i$ ,  $\dot{Z}_{02} = \dot{Z}_н$ ):

$$\dot{U}_{mn} = \dot{K} \dot{E}_m = \frac{\dot{Z}_н \dot{E}_m}{(\dot{Z}_i + \dot{Z}_н) \operatorname{ch} \dot{\gamma} l_0 + \left( \dot{Z}_c + \frac{\dot{Z}_i \dot{Z}_н}{\dot{Z}_c} \right) \operatorname{sh} \dot{\gamma} l_0}.$$

Отсюда определяется и ток в нагрузке:

$$\dot{I}_{mn} = \frac{\dot{U}_{mn}}{\dot{Z}_н} = \frac{\dot{E}_m}{(\dot{Z}_i + \dot{Z}_н) \operatorname{ch} \dot{\gamma} l_0 + \left( \dot{Z}_c + \frac{\dot{Z}_i \dot{Z}_н}{\dot{Z}_c} \right) \operatorname{sh} \dot{\gamma} l_0}.$$

Подставив найденные значения  $\dot{U}_{mn}$ ,  $\dot{I}_{mn}$  в формулы (8.73), получаем искомое решение:

$$\begin{aligned} \dot{U}_m &= \frac{\dot{Z}_н \operatorname{ch} \dot{\gamma} l + \dot{Z}_c \operatorname{sh} \dot{\gamma} l}{(\dot{Z}_i + \dot{Z}_н) \operatorname{ch} \dot{\gamma} l_0 + \left( \dot{Z}_c + \frac{\dot{Z}_i \dot{Z}_н}{\dot{Z}_c} \right) \operatorname{sh} \dot{\gamma} l_0} \dot{E}_m, \\ \dot{I}_m &= \frac{\dot{Z}_c \operatorname{ch} \dot{\gamma} l + \dot{Z}_н \operatorname{sh} \dot{\gamma} l}{(\dot{Z}_i + \dot{Z}_н) \operatorname{ch} \dot{\gamma} l_0 + \left( \dot{Z}_c + \frac{\dot{Z}_i \dot{Z}_н}{\dot{Z}_c} \right) \operatorname{sh} \dot{\gamma} l_0} \cdot \frac{\dot{E}_m}{\dot{Z}_c}. \end{aligned} \quad (8.78)$$

Для линии без потерь с матрицей (8.77а) найденные выражения упрощаются:

$$\begin{aligned} \dot{U}_m &= \frac{\dot{Z}_H \cos \beta_0 l + j W \sin \beta_0 l}{(\dot{Z}_i + \dot{Z}_H) \cos \beta_0 l_0 + j \left( W + \frac{\dot{Z}_i \dot{Z}_H}{W} \right) \sin \beta_0 l_0} \dot{E}_m, \\ \dot{I}_m &= \frac{W \cos \beta_0 l + j \dot{Z}_H \sin \beta_0 l}{(\dot{Z}_i + \dot{Z}_H) \cos \beta_0 l_0 + j \left( W + \frac{\dot{Z}_i \dot{Z}_H}{W} \right) \sin \beta_0 l_0} \cdot \frac{\dot{E}_m}{W}. \end{aligned} \quad (8.78a)$$

В частном случае идеального источника напряжения ( $\dot{Z}_i = 0$ ) найденные выражения упрощаются следующим образом:

$$\begin{aligned} \dot{U}_m &= \frac{\dot{Z}_H \operatorname{ch} \dot{\gamma} l + \dot{Z}_c \operatorname{sh} \dot{\gamma} l}{\dot{Z}_H \operatorname{ch} \dot{\gamma} l_0 + \dot{Z}_c \operatorname{sh} \dot{\gamma} l_0} \dot{E}_m, \\ \dot{I}_m &= \frac{\dot{Z}_c \operatorname{ch} \dot{\gamma} l + \dot{Z}_H \operatorname{sh} \dot{\gamma} l}{\dot{Z}_H \operatorname{ch} \dot{\gamma} l_0 + \dot{Z}_c \operatorname{sh} \dot{\gamma} l_0} \cdot \frac{\dot{E}_m}{\dot{Z}_c} \end{aligned} \quad (8.79)$$

— для линии с потерями и

$$\begin{aligned} \dot{U}_m &= \frac{\dot{Z}_H \cos \beta_0 l + j W \sin \beta_0 l}{\dot{Z}_H \cos \beta_0 l_0 + j W \sin \beta_0 l_0} \dot{E}_m, \\ \dot{I}_m &= \frac{W \cos \beta_0 l + j \dot{Z}_H \sin \beta_0 l}{\dot{Z}_H \cos \beta_0 l_0 + j W \sin \beta_0 l_0} \cdot \frac{\dot{E}_m}{W} \end{aligned} \quad (8.79a)$$

— для линии без потерь.

Применение матриц (8.77), (8.77а) облегчает не только определение напряжений и токов в линии, но и решение многих других задач. При использовании матричного метода расчета цепей с распределенными параметрами наряду с обычными типами матриц оперируют так называемыми волновыми матрицами. С этим вопросом можно ознакомиться в специальной литературе.

### 3. Расчет энергетических параметров

При использовании длинной линии в качестве фидера необходимо определять его к. п. д.

Мощность, переносимая волной по фидеру, может быть в любом сечении линии представлена как разность мощностей  $P_{\text{апад}}$  и  $P_{\text{аотр}}$ , переносимых падающей и отраженной волнами. Поэтому выражение (8.52) может быть преобразовано таким образом:

$$\begin{aligned} \eta &= \frac{P_{\text{апад. н}} - P_{\text{аотр. н}}}{P_{\text{апад. 0}} - P_{\text{аотр. 0}}} = \frac{U_{m \text{ пад. н}}^2 - U_{m \text{ отр. н}}^2}{U_{m \text{ пад. 0}}^2 - U_{m \text{ отр. 0}}^2} = \\ &= \left( \frac{U_{m \text{ пад. н}}}{U_{m \text{ пад. 0}}} \right)^2 \cdot \frac{1 - \left( \frac{U_{m \text{ отр. н}}}{U_{m \text{ пад. н}}} \right)^2}{1 - \left( \frac{U_{m \text{ отр. 0}}}{U_{m \text{ пад. 0}}} \right)^2}, \end{aligned}$$

или

$$\eta = e^{-2\alpha l_0} \frac{1 - p_H^2}{1 - p_0^2}. \quad (8.80)$$

Здесь использованы соотношения

$$U_{m \text{ пад. н}} = U_{m \text{ пад. 0}} e^{-\alpha l_0}, \quad \frac{U_{m \text{ отр. н}}}{U_{m \text{ пад. н}}} = p_H, \quad \frac{U_{m \text{ отр. 0}}}{U_{m \text{ пад. 0}}} = p_0.$$

Учитывая соотношение (8.33), выражение (8.80) представим в следующем виде:

$$\eta = e^{-2\alpha l_0} \frac{1 - p_H^2}{1 - p_H^2 e^{-4\alpha l_0}},$$

или

$$\eta = \frac{1 - p_H^2}{e^{2\alpha l_0} - p_H^2 e^{-2\alpha l_0}} \approx \frac{1}{1 + 2\alpha l_0 \frac{1 + p_H^2}{1 - p_H^2}}. \quad (8.81)$$

Здесь использованы приближенные равенства

$$e^{2\alpha l_0} \approx 1 + 2\alpha l_0, \quad e^{-2\alpha l_0} \approx 1 - 2\alpha l_0,$$

справедливые при  $\alpha l_0 \ll 1$ .

Иногда к. п. д. фидера выражают через коэффициент бегущей волны. Пренебрегая изменением модуля коэффициента отражения вдоль линии, перепишем формулу (8.51) в приближенном виде:

$$p_H \approx \frac{1 - k_6}{1 + k_6}. \quad (8.82)$$

Подставляя значение  $p_H$  из приближенного равенства (8.82) в точную формулу (8.81) и учитывая соотношение (8.48), после несложных преобразований получаем:

$$\eta = \frac{1}{\operatorname{ch} 2\alpha l_0 + \frac{1}{2} (k_6 + k_c) \operatorname{sh} 2\alpha l_0} \approx \frac{1}{1 + (k_6 + k_c) \alpha l_0}. \quad (8.83)$$

Из формул (8.81) и (8.83) следует, что с ростом коэффициента отражения (с уменьшением КБВ) к. п. д. фидера уменьшается. Графики зависимости  $\eta = \eta(p_H)$  показаны на рис. 8.20.

Максимум к. п. д. получается в режиме бегущих волн ( $k_6 = k_c = 1, p_H = 0$ ). Подставляя в точную формулу (8.81) значение  $p_H = 0$ , находим максимальный коэффициент полезного действия:

$$\eta_{\max} = e^{-2\alpha l_0} \approx 1 - 2\alpha l_0. \quad (8.84)$$

Таким образом, проведенный анализ величины к. п. д. подтверждает выводы, полученные в § 8.1.

При использовании отрезков линии в качестве резонансных систем надо знать их добротность (2.76). В этом случае отрезок

линии не нагружается на какое-либо сопротивление, а делается короткозамкнутым или разомкнутым на конце. В линии устанавливается режим стоячих волн, в котором напряжение и ток сдвинуты по фазе на угол  $\frac{\pi}{2}$ . Следовательно, в режиме стоячих волн энергия поочередно переходит из магнитного в электрическое поле линии и обратно. При этом запас энергии в линии остается

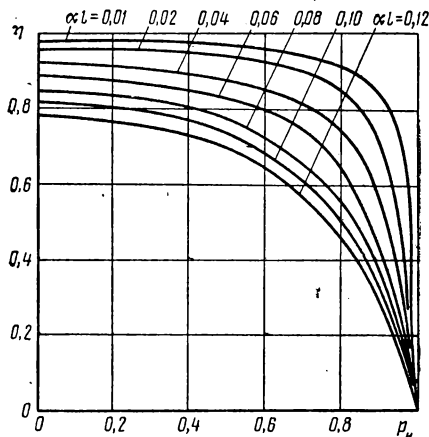


Рис. 8.20. График зависимости к.п.д. фидера от коэффициента отражения

неизменным и равным максимальной энергии в магнитном поле, когда ток принимает амплитудное значение:

$$N = N_{\max} = \frac{L_0}{2} \int_0^{l_0} I_m^2 dl. \quad (8.85)$$

Мощность потерь в рассматриваемом отрезке линии определяется следующим образом (при  $G_0 \ll \frac{R_0}{W^2}$ ):

$$P_a = \frac{R_0}{2} \int_0^{l_0} I_m^2 dl. \quad (8.86)$$

Из соотношений (8.85), (8.86) и (2.76) находим добротность отрезка линии, используемого в качестве резонансной системы с резонансной частотой  $\omega_0$ :

$$Q = \frac{\omega_0 L_0}{R_0}. \quad (8.87)$$

Таким образом, при заданной резонансной частоте добротность отрезка линии целиком определяется его погонными параметрами и не зависит от длины линии. Это объясняется тем, что запас энергии и мощность потерь в отрезке линии изменяются одинаково при изменении его длины.

Практически в качестве резонансных систем используются отрезки линии с воздушной изоляцией. В этом случае, используя формулы (8.19), (8.26), (8.28), (8.63) и принимая во внимание, что

$$L_0 = \sqrt{\frac{L_0}{C_0}} \sqrt{L_0 C_0},$$

добротность (8.87) можно представить в виде

$$Q = \frac{\beta_0}{2\alpha} = \frac{\pi}{\alpha \lambda_0}, \quad (8.88)$$

где  $\beta_0$  и  $\lambda_0$  — значения  $\beta$  и  $\lambda$  на резонансной частоте  $\omega_0$ .

Формула (8.88) показывает, что на сверхвысоких частотах добротность отрезков линии измеряется тысячами единиц. Например, реальным является значение коэффициента затухания  $\alpha = 0,001 \text{ nep/м}$  при длине волны  $\lambda_0 = 1 \text{ м}$ . При этом добротность отрезка линии превышает три тысячи единиц, что недостижимо в резонансных системах с сосредоточенными параметрами даже на более низких частотах.

#### 4. Расчет входного сопротивления линии

Зная матрицы отрезка линии (8.78) и (8.79), его входное сопротивление можно определить по общей формуле (6.54). Другой способ определения входного сопротивления линии заключается в использовании определения (8.13) и соотношений (8.73) или (8.75).

При многих расчетах в линии необходимо знать ее входное сопротивление на произвольном расстоянии  $l$  от нагрузки. При этом, воспользовавшись одним из указанных методов расчета, получаем:

$$\dot{Z} = \dot{Z}_c \frac{\dot{Z}_H \operatorname{ch} \dot{\gamma} l + \dot{Z}_c \operatorname{sh} \dot{\gamma} l}{\dot{Z}_c \operatorname{ch} \dot{\gamma} l + \dot{Z}_H \operatorname{sh} \dot{\gamma} l} = \dot{Z}_c \frac{\dot{Z}_H + \dot{Z}_c \operatorname{th} \dot{\gamma} l}{\dot{Z}_c + \dot{Z}_H \operatorname{th} \dot{\gamma} l} \quad (8.89)$$

— для линии с потерями и

$$\dot{Z} = W \frac{\dot{Z}_H \cos \beta_0 l + j W \sin \beta_0 l}{W \cos \beta_0 l + j \dot{Z}_H \sin \beta_0 l} = W \frac{\dot{Z}_H + j W \operatorname{tg} \beta_0 l}{W + j \dot{Z}_H \operatorname{tg} \beta_0 l} \quad (8.90)$$

— для линии без потерь.

Входное сопротивление удобно также определять через коэффициент отражения. Соответствующая формула может быть получена аналогично формуле (8.36):

$$\dot{Z} = \dot{Z}_c \frac{1 + \dot{p}}{1 - \dot{p}}, \quad (8.91)$$

или в случае линии без потерь

$$\dot{Z} = W \frac{1 + \dot{p}}{1 - \dot{p}}. \quad (8.92)$$

Эту формулу для удобства расчетов часто представляют в виде

$$\dot{z} = r + jx = \frac{1 + \dot{p}}{1 - \dot{p}}, \quad (8.92a)$$

где  $\dot{z} = \frac{\dot{Z}}{W}$  — нормированное входное сопротивление линии;

$r = \frac{R}{W}$  — нормированная активная составляющая входного сопротивления;

$x = \frac{X}{W}$  — нормированная реактивная составляющая входного сопротивления.

Удобство этих формул заключается не только в их простоте, но и в том, что по ним коэффициент отражения можно определить экспериментально. Действительно, модуль коэффициента отражения определяется экспериментально в соответствии с формулами (8.51) и (8.46). Аргумент же коэффициента отражения согласно формулам (8.34) и (8.43) может быть определен как

$$\psi = 2(\beta l_n - \beta l). \quad (8.93)$$

Поскольку расстояние  $l_n$  до первой пучности можно измерить непосредственно, тем самым определяется экспериментально и аргумент коэффициента отражения.

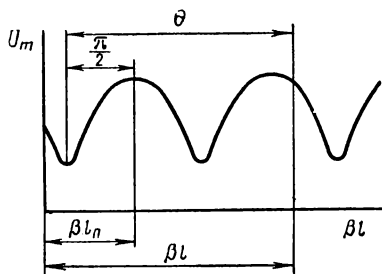


Рис. 8.21. Определение волнового расстояния до узла напряжения

Таким образом, по данным измерений можно найти коэффициент отражения (8.29) и входное сопротивление линии (8.92). На этом основано применение измерительной линии, которая используется для измерения сопротивлений на сверхвысоких частотах. Ниже этот вопрос освещается подробнее. Однако уже сейчас следует заметить, что в измерительной линии значительно точнее можно измерить положение узла, а не пучности напряжения, поскольку узел смешанной волны выражен более резко, чем пучность (см. рис. 8.14).

Поэтому принято аргумент  $\psi$  выражать через волновое расстояние

$$\theta = \beta l_y \quad (8.94)$$

от данного сечения до ближайшего к концу линии узла напряжения (рис. 8.21).

Из рис. 8.21 и формул (8.94), (8.93) видно, что

$$\beta l - \beta l_n = \theta - \frac{\pi}{2}$$

и

$$\psi = -2\left(\theta - \frac{\pi}{2}\right). \quad (8.95)$$

Расчет по формулам (8.91) — (8.95) получается еще проще, если его производить не аналитически, а графически. С этой целью строятся специальные номограммы, которые рассматриваются в следующем пункте.

## 5. Круговые диаграммы длинных линий

Из расчетных номограмм электрических цепей наиболее удобными являются круговые диаграммы. Такие диаграммы, применяемые для расчета электрических четырехполюсников и, в частности, длинных линий, были детально рассмотрены В. И. Коваленковым еще в 1925—1938 гг. Наибольшее распространение для расчета длинных линий получили круговые диаграммы сопротивлений в той форме, в какой они были впервые предложены А. Р. Вольпертом. Особенностью этих круговых диаграмм является то, что при их построении активные и реактивные нормированные входные сопротивления выражаются через действительную и мнимую части коэффициента отражения.

Комплексный коэффициент отражения может быть представлен в алгебраической форме:

$$\dot{p} = u + jv. \quad (8.96)$$

Подставляя это значение  $\dot{p}$  в формулу (8.92а), получаем

$$\dot{z} = r + jx = \frac{1 + u + jv}{1 - u - jv} = \frac{1 - u^2 - v^2}{(1 - u)^2 + v^2} + j \frac{2v}{(1 - u)^2 + v^2},$$

откуда

$$r = \frac{1 - u^2 - v^2}{(1 - u)^2 + v^2}, \quad (8.97)$$

$$x = \frac{2v}{(1 - u)^2 + v^2}. \quad (8.98)$$

Равенство (8.97) для активного нормированного сопротивления можно преобразовать таким образом:

$$r - 2ru + ru^2 + rv^2 = 1 - u^2 - v^2,$$

или

$$u^2 - 2 \frac{r}{1+r} u + v^2 = \frac{1-r}{1+r}.$$

Дополнив первые два слагаемых в левой части равенства до полного квадрата, получим

$$u^2 - 2 \frac{r}{1+r} u + \left( \frac{r}{1+r} \right)^2 + v^2 = \frac{1-r}{1+r} + \left( \frac{r}{1+r} \right)^2,$$

или

$$\left( u - \frac{r}{1+r} \right)^2 + v^2 = R_r^2, \quad (8.99)$$

где

$$R_r = \frac{1}{1+r}. \quad (8.100)$$

Выражение (8.99) представляет собой уравнение окружностей с радиусом (8.100), расположенных на плоскости комплексного переменного  $p$ . Так как вид этих окружностей определяется параметром  $r$ , то они называются  $r$ -окружностями.



Центры  $r$ -окружностей лежат на действительной оси  $u$ , так как координаты центров равны

$$u_0 = \frac{r}{1+r}, \quad v_0 = 0.$$

Семейство  $r$ -окружностей, соответствующих разным значениям нормированного активного сопротивления, показано на рис. 8.22. Все  $r$ -окружности касаются друг друга в точке  $(1, 0)$ , так как расстояние от этой точки до центра окружности равно радиусу:

$$1 - u_0 = \frac{1}{1+r} = R_r.$$

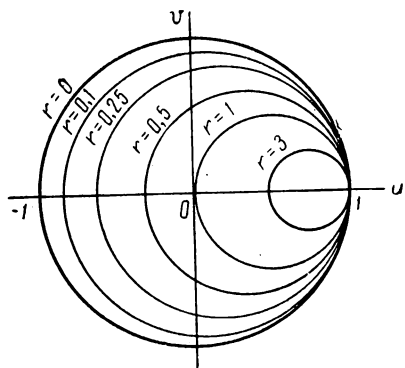


Рис. 8.22. Семейство  $r$ -окружностей

Сама точка  $(1, 0)$  представляет собой вырожденную окружность, соответствующую бесконечно большому активному сопротивлению  $r = \infty$  ( $R_r = 0$ ). Окружность, соответствующая значению  $r = 1$ , т. е. активному сопротивлению, равному волновому сопротивлению линии, проходит через начало координат. Все семейство  $r$ -окружностей расположено внутри окружности единичного радиуса, определяемой значением  $r = 0$ . Часть комплексной плоскости  $p(u, v)$ , ограниченная этой окружностью, охватывает, очевидно, точки, соответствующие всем возможным значениям активного нормированного сопротивления.

Уравнение (8.98) для реактивного нормированного сопротивления может быть преобразовано следующим образом:

$$x - 2xu + xu^2 + xv^2 = 2v,$$

или

$$(u^2 - 2u) + \left(v^2 - 2\frac{1}{x}v\right) = -1.$$

Дополнив здесь выражения в скобках до полных квадратов, получим

$$(u^2 - 2u + 1) + \left(v^2 - 2\frac{1}{x}v + \frac{1}{x^2}\right) = -1 + 1 + \frac{1}{x^2},$$

или

$$(u - 1)^2 + \left(v - \frac{1}{x}\right)^2 = R_x^2, \quad (8.101)$$

где

$$R_x = \frac{1}{x}. \quad (8.102)$$

Выражение (8.101) также является уравнением окружностей с радиусом (8.102). Поскольку вид этих окружностей на плоскости комплексного переменного  $\bar{p}$  определяется параметром  $x$ , они называются  $x$ -окружностями.

Центры  $x$ -окружностей лежат на прямой, параллельной оси ординат  $v$  и отстоящей от нее на расстоянии  $u = u_0 = 1$ , так как координаты центров равны

$$u_0 = 1, \quad v_0 = \frac{1}{x}.$$

Так как реальным значениям активного нормированного сопротивления соответствует часть комплексной плоскости, ограниченная окружностью  $r = 0$ , то достаточно вместо  $x$ -окружностей построить  $x$ -дуги, лежащие внутри окружности  $r = 0$  (рис. 8.23). Все  $x$ -окружности (или  $x$ -дуги) касаются друг друга в точке  $(1, 0)$ , которая и в этом случае является вырожденной окружностью, соответствующей значению  $x = \pm \infty$  ( $R_x = 0$ ).

Следовательно, точка  $(1, 0)$  отображает сечение линии, в котором линия является разомкнутой ( $r = \infty$ ,  $x = \pm \infty$ ).

Действительная ось представляет собой вырожденную окружность с бесконечно большим радиусом и с центром, лежащим в бесконечности на прямой  $u = u_0 = 1$ . Таким образом, как и следовало ожидать, действительная ось соответствует реактивному сопротивлению, равному нулю, т. е. чисто активному входному сопротивлению линии.

Следовательно, точка  $(-1, 0)$ , в которой пересекаются  $r$ -окружность при  $r = 0$  и  $x$ -окружность при  $x = 0$ , отображает сечение линии, в котором линия является короткозамкнутой.

Верхняя полуплоскость соответствует положительным значениям нормированного реактивного сопротивления, т. е. входному сопротивлению линии, имеющему индуктивный характер реактивности, а нижняя полуплоскость — входному сопротивлению линии, имеющему емкостный характер реактивности. Любая точка комплексной плоскости  $\bar{p}$  ( $u, v$ ), ограниченной  $r$ -окружностью единичного радиуса, отображает сечение линий с определенным значением активной и реактивной составляющих входного сопротивления линии. В то же время любая из этих точек определяет значение

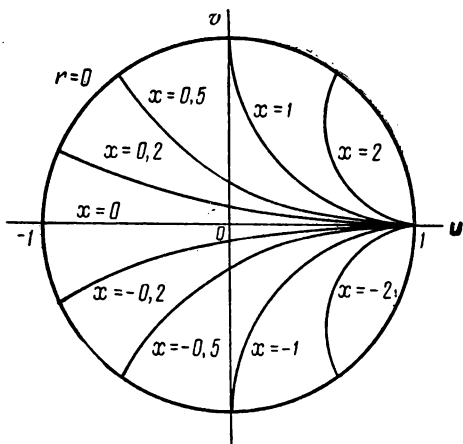


Рис. 8.23. Семейство  $x$ -дуг

коэффициента отражения  $p$ , заданного вещественной ( $u$ ) и мнимой ( $v$ ) частями. Таким образом, полученные графики связывают между собой параметры  $r$ ,  $x$  и  $u$ ,  $v$ .

Поскольку заданным параметрам  $u$  и  $v$  соответствуют вполне определенные значения модуля и аргумента коэффициента отражения  $p$  и  $\psi$ , тем самым определяется связь между параметрами  $r$ ,  $x$  и  $p$ ,  $\psi$ .

Однако для непосредственного перехода от параметров  $r$ ,  $x$  к параметрам  $p$ ,  $\psi$  надо на плоскости  $\dot{p}$  нанести значения модуля и аргумента коэффициента отражения. Сделать это можно весьма просто, так как параметры  $p$  и  $\psi$  являются полярными координатами точек плоскости комплексного переменного  $\dot{p}$ .

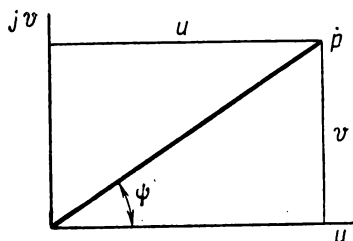


Рис. 8.24. Декартовы и полярные координаты на плоскости комплексного переменного  $\dot{p}$

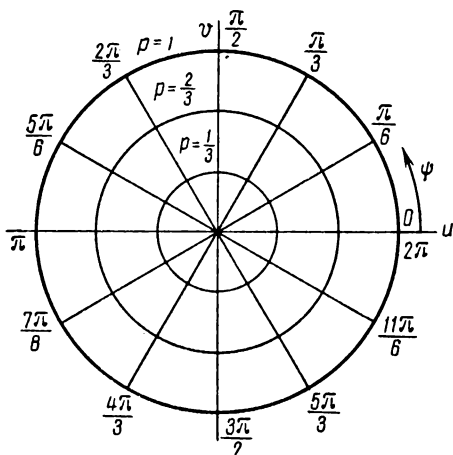


Рис. 8.25. Семейство  $p$ -окружностей и  $\psi$ -радиусов

Действительно, коэффициент отражения  $\dot{p}$  может быть представлен как в алгебраической, так и в показательной форме:

$$\dot{p} = u + jv = p e^{j\psi}.$$

Параметры  $u$  и  $v$  являются декартовыми координатами точки  $\dot{p}$  на плоскости комплексного переменного, а параметры  $p$  и  $\psi$  — полярными координатами этой точки на той же плоскости. Модуль  $p$  есть величина радиуса-вектора, проходящего из начала координат в точку  $\dot{p}$ , а аргумент  $\psi$  показывает направление этого радиуса-вектора и равен углу, заключенному между радиусом-вектором и положительной полуосью (рис. 8.24).

Таким образом, фиксированным значениям модуля  $p$  соответствуют на плоскости комплексного переменного  $\dot{p}$  ( $u$ ,  $v$ ) концентрические окружности, а фиксированным значениям аргумента  $\psi$  — радиусы, проведенные из начала координат (рис. 8.25). Построенные  $p$ -окружности и  $\psi$ -радиусы образуют на плоскости комплексного

переменного  $\rho(u, v)$  полярную координатную сетку, позволяющую по заданным параметрам  $u$  и  $v$  найти значения  $\rho$  и  $\psi$ . Поскольку графики, изображенные на рис. 8.22, 8.23 и 8.25, построены в одной и той же плоскости  $\rho(u, v)$ , их можно совместить. При этом получится номограмма для непосредственного пересчета параметров  $r$ ,  $x$  и  $\rho$ ,  $\psi$ .

Из предыдущего рассмотрения видно, что положительная полуось  $u$  отображает сечения пучностей напряжения в линии, так как на этой полуоси  $\psi = 0$  (падающая и отраженная волны напряжения совпадают по фазе). Отрицательная же полуось  $u$  соответствует узлам напряжения в линии, так как на этой полуоси  $\psi = \pi$  (падающая и отраженная волны напряжения находятся в противофазе).

Параметры  $\rho$  и  $\psi$  при расчете сопротивлений являются вспомогательными. При расчете сопротивлений желательно переходить к значениям  $r$  и  $x$  непосредственно от параметров  $k_6$  и  $\theta$ , которые могут быть определены экспериментально. Поэтому надо построить на плоскости  $\rho(u, v)$  кривые, связывающие между собой параметры  $\rho$ ,  $\psi$  и  $k_6$ ,  $\theta$ . Между параметрами  $\rho$  и  $k_6$  существует дробно-линейная зависимость (8.51), а между параметрами  $\psi$  и  $\theta$  — линейная зависимость (8.95). Поэтому координатные линии  $\rho$  могут быть непосредственно проградуйрованы в значениях  $k_6$ , а координатные линии  $\psi$  — в значениях  $\theta$ , как показано на рис. 8.26. График, представленный на рис. 8.26, является по существу повторением графика рис. 8.25. Отличие заключается лишь в маркировке координатных линий: у  $\rho$ -окружностей проставлены значения  $k_6$ , вычисленные по формуле (8.50), а у  $\psi$ -радиусов — значения  $\theta$ , определенные по формуле (8.95). Таким образом, вместо  $\rho$ -окружностей и  $\psi$ -радиусов получаются КБВ-окружности и  $\theta$ -радиусы.

При пересчете угловых координат  $\psi$  и  $\theta$  необходимо иметь в виду следующее обстоятельство. Отсчет аргумента  $\psi$  ведется против часовой стрелки от положительной полуоси  $u$ , как показано на рис. 8.25. Что касается волнового расстояния  $\theta$ , то для него положительное направление отсчета получается на диаграмме в сторону часовой стрелки, о чем свидетельствует знак «минус» в выражении

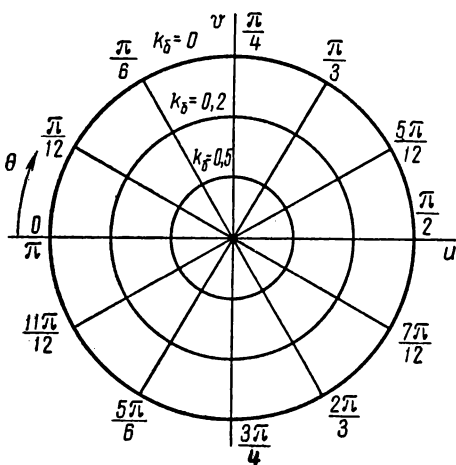


Рис. 8.26. Семейство КБВ-окружностей и  $\theta$ -радиусов

(8.95). Из этого же выражения видно, что началом отсчета для волнового расстояния  $\theta$  является отрицательная полуось  $u$ , так как нулевому значению  $\theta = 0$  соответствует значение  $\psi = \pi$ . Кроме того, согласно выражению (8.95) при изменении аргумента  $\psi$  на угол  $2\pi$  волновое расстояние  $\theta$  изменяется на величину  $\pi$ , как изображено на рис. 8.26.

Полная диаграмма сопротивлений, на которой совмещены  $r$ -окружности,  $x$ -дуги и  $k_6$ -окружности, приведена на отдельном рисунке (диаграмма А. Р. Вольперта, см. стр. 308—309).

На этой диаграмме положительная полуось направлена вниз, волновые расстояния  $\theta = \beta l = 2\pi \frac{l}{\lambda}$  отложены не в угловых единицах, а в относительных единицах  $\frac{l}{\lambda}$ . При этом для упрощения

$\theta$ -радиусы на графике не нанесены, так что отсчет  $\theta$  (или  $\frac{l}{\lambda}$ ) следует производить с помощью линейки, прокладываемой через начало координат и заданную точку. На полной диаграмме сопротивлений значения модуля  $p$  и аргумента  $\psi$  не откладываются, поскольку эти параметры являются вспомогательными, и их обычно не требуется определять при решении задач по круговым диаграммам. Если же условие той или иной задачи потребует определения параметров  $p$  и  $\psi$ , то это может быть легко сделано по формулам, полученным выше.

Следует заметить, что обозначения для КБВ-окружностей на полной диаграмме сопротивлений совпадают с обозначениями  $r$ -окружностей в точках, лежащих на отрицательной (верхней) полуоси  $u$  (где  $r$  изменяется от 0 до 1). Действительно, эти точки соответствуют узлам напряжения, т. е. тем сечениям линии, в которых входное сопротивление является чисто активным, а коэффициент отражения — вещественным:  $\dot{z} = r$  и  $\dot{p} = -p$  (знак «минус» означает, что падающая и отраженная волны в сечении узла находятся в противофазе). Подставляя эти значения  $\dot{z}$  и  $\dot{p}$  в соотношение (8.92а) и учитывая формулу (8.50), получаем

$$r = \frac{1-p}{1+p} = k_6.$$

Таким образом, особой оцифровки для КБВ-окружностей не требуется.

В точках, лежащих на положительной (нижней) полуоси  $u$  (где  $r$  изменяется от 1 до  $\infty$ ), нормированное активное сопротивление равно коэффициенту стоячей волны:  $r = k_c$ . Действительно, эти точки отображают сечения пучностей напряжения, т. е. сечения линии, в которых  $\dot{z} = r$  и  $\dot{p} = p$ . Отсюда на основании формул (8.92а) и (8.50) находим, что

$$r = \frac{1+p}{1-p} = \frac{1}{k_6} = k_c.$$

Любое сечение линии, в котором задано значение параметров  $r$ ,  $x$  или  $k_6, \frac{l}{\lambda}$ , отображается вполне определенной точкой на полной диаграмме сопротивлений. Перемещению по линии из заданного сечения в другое соответствует на диаграмме перемещение по КБВ-окружности на заданное расстояние  $\frac{l}{\lambda}$ .

Действительно, при перемещении вдоль линии КБВ не меняется, а изменяется лишь относительное расстояние до первого узла напряжения  $\frac{l}{\lambda}$ . Следует учитывать, что перемещению по линии в положительном направлении (от нагрузки к генератору) соответствует перемещение на диаграмме в сторону вращения часовой стрелки, а перемещению по линии от генератора к нагрузке — перемещение на диаграмме против вращения часовой стрелки. При перемещении по линии на расстояние, кратное половине длины волны, рабочая точка на диаграмме описывает полную окружность и возвращается в исходную точку с прежним значением сопротивления\*. Поэтому при расчете относительного расстояния  $\frac{l}{\lambda}$  необходимо отбрасывать целое число полуволн.

Методика решения задач по круговым диаграммам рассмотрена ниже на отдельных примерах.

При решении задач по расчету длинных линий часто приходится оперировать не сопротивлениями, а проводимостями. Такая методика расчета целесообразна, например, в тех случаях, когда соединяются параллельно несколько отрезков линии. При этом складываются входные проводимости этих линий, и оперировать входными сопротивлениями становится неудобным.

При расчете входной проводимости линии следует пользоваться понятием нормированной проводимости

$$\dot{y} = \frac{1}{z} = g + jb, \quad (8.103)$$

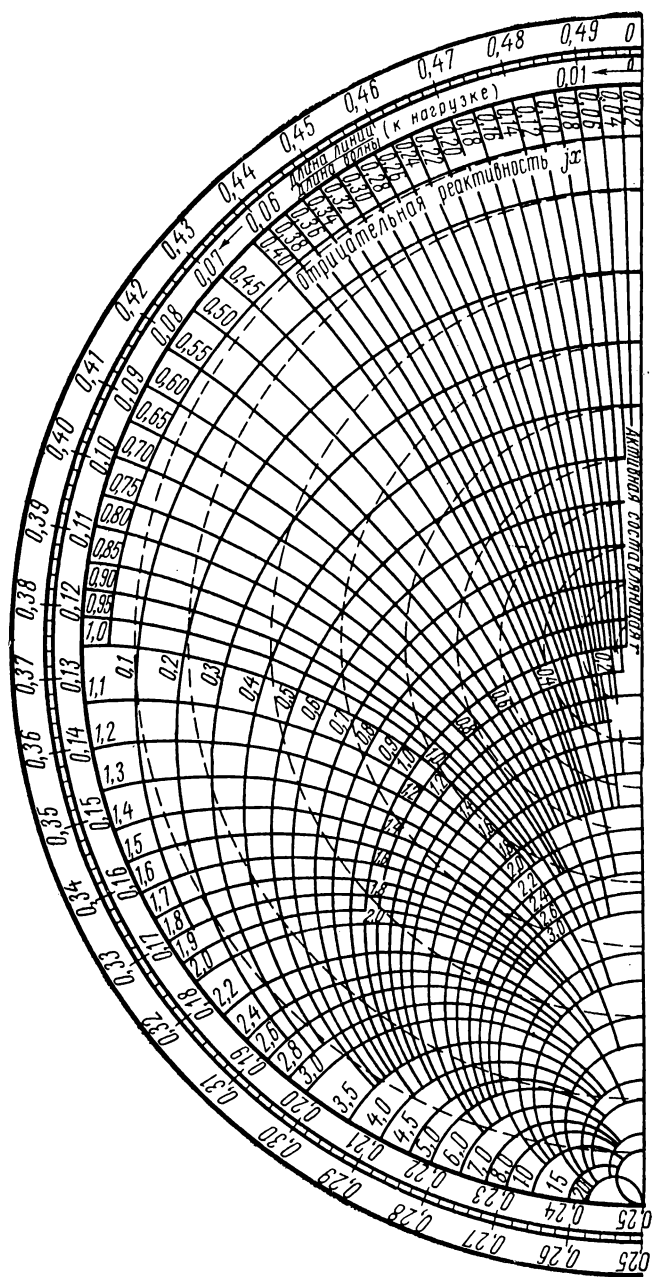
где  $g = \frac{G}{Y_c}$ ,  $b = \frac{B}{Y_c}$  — нормированные активные и реактивные проводимости ( $Y_c = \frac{1}{W}$  — волновая проводимость линии).

Для решения задач на проводимость может быть использована круговая диаграмма сопротивлений. Покажем это, выразив нормированную входную проводимость  $\dot{y}$  через коэффициент отражения  $\dot{p}$ . Подставляя в выражение (8.103) значение нормированного сопротивления из формулы (8.92а), получаем

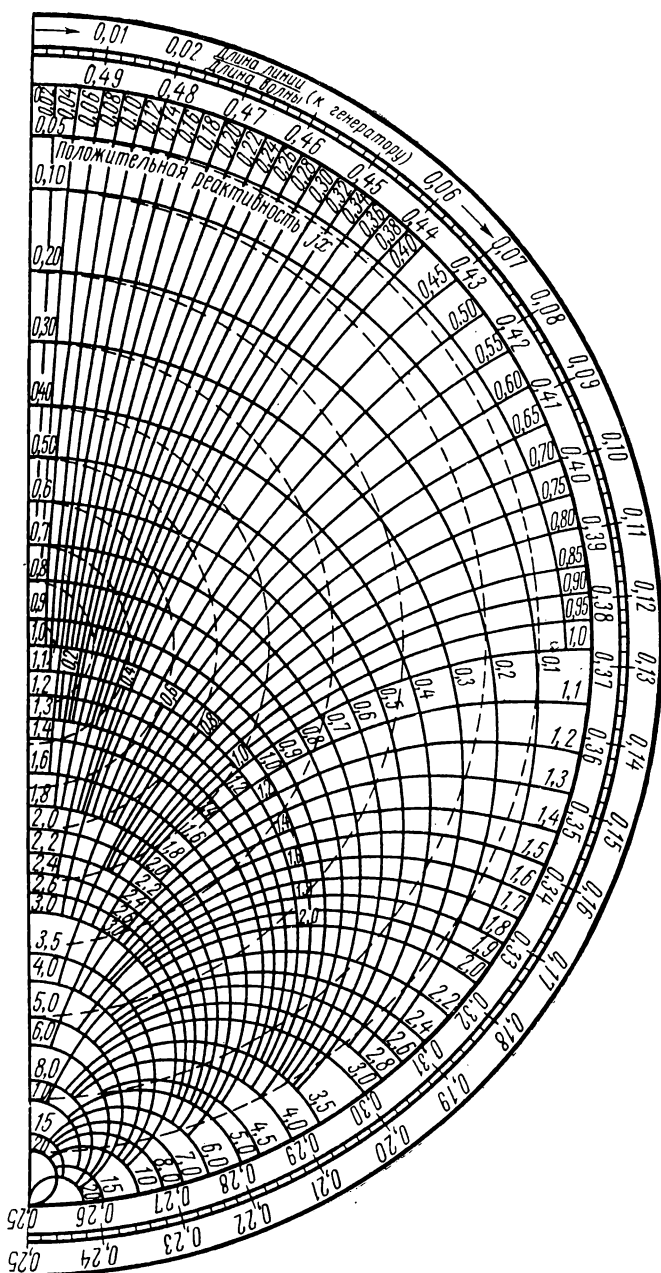
$$\dot{y} = \frac{1 - \dot{p}}{1 + \dot{p}}. \quad (8.104)$$

---

\* Такое свойство диаграммы объясняется тем, что полуволновые отрезки линии не трансформируют сопротивления.



Диаграмма



А. Р. Вольперга



Учитывая равенство  $e^{i\pi} = -1$ , перепишем выражение (8.104) в следующем виде:

$$\dot{y} = \frac{1 + \dot{p}e^{j\pi}}{1 - \dot{p}e^{j\pi}} = \frac{1 + pe^{j(\psi + \pi)}}{1 - pe^{j(\psi + \pi)}}. \quad (8.105)$$

Сопоставляя равенства (8.105) и (8.92а), приходим к выводу, что при переходе от нормированного сопротивления к нормированной проводимости происходит изменение аргумента коэффициента отражения  $\tilde{p}$  на угол  $\pi$  при неизменном модуле  $p$ . Это означает, что при заданном на круговой диаграмме нормированном сопротивлении соответствующая ему нормированная проводимость может

быть определена перемещением из заданной точки по КБВ-окружности ( $p$ -окружности) на угол  $\pi$ , т. е. переходом из заданной точки  $\hat{z}$  в новую диаметрально противоположную симметрично расположенную точку  $\hat{y}$  (рис. 8.27). Проходящие через эту новую точку  $r$ -окружность и  $x$ -дуга дают значения проводимостей  $g$  и  $b$ . Таким образом, круговая диаграмма позволяет легко пересчитывать сопротивления в проводимости и обратно.

Из предыдущего рассмотрения также следует, что поскольку  $r$ -окружность и  $x$ -дуга дают численные значения проводимостей  $g$  и  $b$ , эти линии могут быть приняты

в качестве  $g$ -окружностей и  $b$ -дуг. Такую замену обозначений можно осуществить на всей диаграмме сопротивлений.

Следовательно, круговая диаграмма сопротивлений (см. диаграмму А. Р. Вольперта) может быть использована в качестве круговой диаграммы проводимостей. При этом следует лишь иметь в виду, что согласно принятой системе обозначений точки на правой полуплоскости отображают емкостную проводимость (положительную реактивность), а точки на левой полуплоскости — индуктивную проводимость (отрицательную реактивность). Кроме того, нижней точке диаграммы проводимостей ( $g = \infty$ ,  $b = \pm \infty$ ) соответствует на линии короткое замыкание, а верхней точке ( $g = 0$ ,  $b = 0$ ) — разомкнутое сечение линии. Наконец, в связи с изменением аргумента  $\psi$  на угол  $\pi$ , положительная полуось  $u$  отображает узлы, а отрицательная полуось — пучности напряжения в линии.

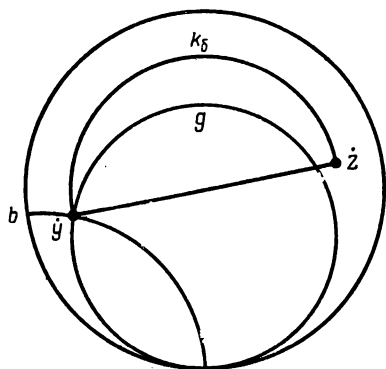


Рис. 8.27. Пересчет сопротивления в проводимость по круговой диаграмме

## 6. Расчет сопротивлений и проводимостей по круговой диаграмме

При решении задач на определение входных сопротивлений или проводимостей длинной линии следует руководствоваться следующими общими правилами:

1. При заданном сопротивлении  $\dot{Z} = R + jX$  или проводимости  $\dot{Y} = G + jB$  вычисляется нормированное сопротивление  $\dot{z} = r + jx$  или нормированная проводимость  $\dot{y} = g + jb$ .

2. При заданном расстоянии  $l$  вычисляется относительное расстояние  $\frac{l}{\lambda}$ . При вычислении относительного расстояния от величины  $l$  отбрасывается целое число полуволн (или от величины  $\frac{l}{\lambda}$  отбрасывается число, кратное 0,5).

3. По вычисленным (или определенным экспериментально) параметрам  $r$ ,  $x$  (или  $g$ ,  $b$  или  $k_0$ ,  $\frac{l}{\lambda}$ ) находится на диаграмме исходная точка, соответствующая сечению линии, в котором заданы параметры. Исходная точка определяется как точка пересечения соответствующей  $r$ -окружности и  $x$ -дуги (или  $g$ -окружности и  $b$ -дуги или КБВ-окружности и радиуса  $\frac{l}{\lambda}$ ).

4. Если требуется определить входное сопротивление или проводимость в другом сечении линии, то совершается переход из исходной точки по КБВ-окружности на заданное расстояние  $\frac{l}{\lambda}$  (т. е. радиус, проходящий через исходную точку, поворачивается на угол, соответствующий расстоянию  $\frac{l}{\lambda}$ ). При этом перемещение на диаграмме производится по часовой стрелке, если переход на линии из одного сечения в другой осуществляется в сторону генератора, и против часовой стрелки, если переход на линии осуществляется в сторону нагрузки. Искомая точка на диаграмме определяется как точка пересечения КБВ-окружности и повернутого радиуса.

Отсчет нормированного сопротивления (или проводимости) осуществляется по  $r$ -окружности и  $x$ -дуге (или по  $g$ -окружности и  $b$ -дуге), проходящим через найденную искомую точку.

5. Производится пересчет найденных нормированных сопротивлений (или проводимостей) в абсолютные значения входного сопротивления (или проводимости) путем умножения нормированных величин на волновое сопротивление (или на волновую проводимость).

6. Если по условию задачи требуется найти расстояние между двумя сечениями с заданными значениями входного сопротивления или проводимости, то в п. 3 определяется положение двух исходных точек. При этом искомое относительное расстояние находится как

разность двух отсчетов  $\frac{l_1}{\lambda}$  и  $\frac{l_2}{\lambda}$  по радиусам, проходящим через две исходные точки. Затем относительное расстояние  $\frac{l_1 - l_2}{\lambda}$  пересчитывается в абсолютное значение  $l_1 - l_2$ .

7. Если по условию задачи требуется пересчитать сопротивления в проводимости или проводимости в сопротивления, то такой пересчет осуществляется по методике, описанной выше.

8. Если в задаче задаются отрезки линий с разными волновыми сопротивлениями, то вычислять нормированные сопротивления (или проводимости) следует отдельно для каждого отрезка линии по его волновому сопротивлению. При этом суммировать сопротивления (или проводимости) разных отрезков линии можно только по их абсолютным значениям. Суммировать нормированные сопротивления (или проводимости) отрезков линий с разными волновыми сопротивлениями нельзя.

Сформулированные общие правила решения задач по круговым диаграммам поясним на частных примерах.

**Пример 1.** К линии длиной  $l_0 = 5,3$  м подключена нагрузка  $\dot{Z}_H = (200 + j440)$  ом.

Определить входное сопротивление линии  $\dot{Z}$ , если ее волновое сопротивление  $W = 400$  ом, а длина волны в линии  $\lambda = 80$  см.

1. Определяем нормированное сопротивление нагрузки:

$$\dot{z}_H = \frac{\dot{Z}_H}{W} = \frac{(200 + j440) \text{ ом}}{400 \text{ ом}} = 0,5 + j1,1.$$

2. Определяем относительную длину линии:

$$\frac{l_0}{\lambda} = \frac{530 \text{ см}}{80 \text{ см}} = 6,625,$$

или, отбрасывая целое число полуволн, получаем приведенное относительное расстояние:

$$\frac{l'_0}{\lambda} = 0,125.$$

3. Находим на диаграмме по пересечению окружности  $r = 0,5$  и дуги  $x = 1,1$  исходную точку  $\dot{z}_H$  (рис. 8.28).

4. Проводя радиус через точку  $\dot{z}_H$ , делаем отсчет  $\frac{l_1}{\lambda} = 0,141$ . Поворачиваем радиус по часовой стрелке из исходной точки  $\dot{z}_H$  до отметки  $\frac{l_2}{\lambda} = \frac{l_1}{\lambda} + \frac{l'_0}{\lambda} = 0,141 + 0,125 = 0,266$ . В месте пересечения повернутого радиуса с КБВ-окружностью, проходящей через точку  $\dot{z}_H$ , находится искомая точка  $\dot{z}$ . По  $r$ -окружности и  $x$ -дуге, проходящим через точку  $\dot{z}$ , делаем отсчет:

$$\dot{z} = r + jx = 3,9 - j1,75.$$

5. Определяем истинное значение входного сопротивления:

$$\dot{Z} = \dot{z}W = (3,9 - j1,75) 400 \text{ ом} = (1560 - j700) \text{ ом}.$$

**Пример 2.** Входная проводимость линии длиной  $l_0 = 3,15$  м равна  $\dot{Y} = (2,5 - j2,5) \cdot 10^{-3}$  1/ом.

Определить сопротивление нагрузки, если  $W = 400 \text{ ом}$  и  $\lambda = 80 \text{ см}$ .

1. Определяем нормированную входную проводимость:

$$\dot{y} = \frac{\dot{Y}}{Y_c} = \dot{Y}W = (2,5 - j2,5) \cdot 10^{-3} \text{ 1/ом} \cdot 400 \text{ ом} = 1 - j.$$

2. Определяем относительную длину линии:

$$\frac{l_0}{\lambda} = \frac{315 \text{ см}}{80 \text{ см}} = 3,94,$$

или, отбрасывая целое число полувольт, получаем приведенную относительную длину:

$$\frac{l'_0}{\lambda} = 0,44.$$

3. По пересечению окружности  $g = 1$  и дуги  $b = -1$  находим на диаграмме исходную точку  $\dot{y}$  (рис. 8.29).

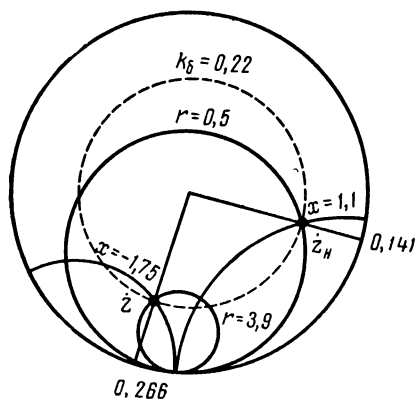


Рис. 8.28. Расчет входного сопротивления по круговой диаграмме

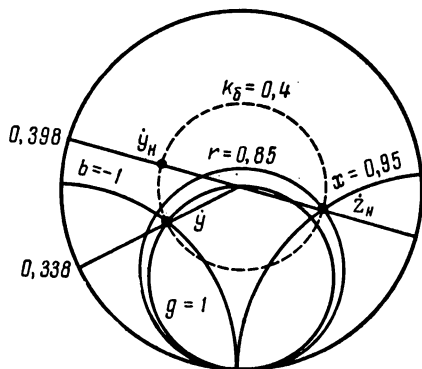


Рис. 8.29. Расчет нагрузочного сопротивления по круговой диаграмме

4. По радиусу, проходящему через точку  $\dot{y}$ , делаем отсчет  $\frac{l_1}{\lambda} = 0,338$ . Поворачиваем радиус против часовой стрелки до отметки

$$\frac{l_2}{\lambda} = \frac{l_1}{\lambda} - \frac{l'_0}{\lambda} + 0,5 = 0,338 - 0,44 + 0,5 = 0,398^*.$$

В месте пересечения повернутого радиуса с КБВ-окружностью, проходящей через исходную точку  $\dot{y}$ , находится искомая точка  $\dot{y}_H$ .

5. Поскольку по условию задачи требуется определить не проводимость, а сопротивление нагрузки, то на диаметре, проходящем через точку  $\dot{y}_H$ , находим симметрично расположенную точку  $\dot{z}_H$ , лежащую на той же КБВ-окружности.

\* Здесь прибавлено полувольты для получения положительного отсчета  $\frac{l_2}{\lambda}$ .

По  $r$ -окружности и  $x$ -дуге, проходящим через точку  $\dot{z}_H$ , определяем нормированное сопротивление нагрузки:

$$\dot{z}_H = r + jx = 0,85 + j0,95.$$

6. Пересчитываем нормированное сопротивление нагрузки в абсолютное значение:

$$\dot{Z}_H = \dot{z}_H W = (0,85 + j0,95) \cdot 400 \text{ ом} = (340 + j380) \text{ ом}.$$

**Примечание.** Решение рассмотренной задачи можно начинать также с определения входного сопротивления.

**Пример 3.** В линии с волновым сопротивлением  $W = 200 \text{ ом}$  измерено напряжение в пучности  $U_{m \max} = 1000 \text{ в}$  и напряжение в узле  $U_{m \min} = 200 \text{ в}$ ; кроме того, измерено расстояние от нагрузки до первого узла напряжения  $l_y = 70 \text{ см}$  и расстояние от нагрузки до второго узла напряжения  $l'_y = 1,7 \text{ м}$ .

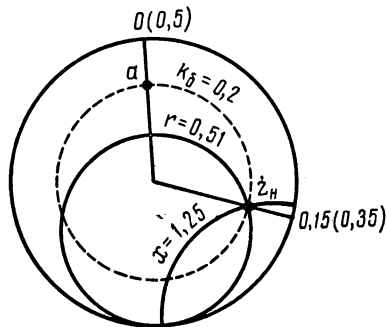


Рис. 8.30. Определение неизвестного сопротивления по экспериментальным данным с помощью круговой диаграммы

Определить сопротивление нагрузки.

Этот пример иллюстрирует использование линии в качестве измерительного устройства (измерительной линии) для определения неизвестных сопротивлений. Таким неизвестным сопротивлением, которое фигурирует в задаче как нагрузочное сопротивление, может быть, например, входное сопротивление электронной лампы на СВЧ или входное сопротивление антенны и т. д.

1. Определяем коэффициент бегущей волны:

$$k_g = \frac{U_{m \min}}{U_{m \max}} = \frac{200 \text{ в}}{1000 \text{ в}} = 0,2.$$

2. Примем за исходное сечение линии сечение первого узла напряжения. Поскольку узлу напряжения в линии соответствует на диаграмме верхняя полуось  $u$ , по пересечению окружности  $k_g = 0,2$  с верхней полуосью находим исходную точку  $a$  (рис. 8.30).

3. Определяем длину волны в линии:

$$\lambda = 2(l'_y - l_y) = 2(1,7 \text{ м} - 0,7 \text{ м}) = 2 \text{ м}.$$

4. Определяем относительное расстояние от первого узла напряжения до нагрузки:

$$\frac{l_y}{\lambda} = \frac{0,7 \text{ м}}{2 \text{ м}} = 0,35.$$

5. Поворачиваем радиус, проходящий через точку  $a$ , против часовой стрелки до отметки  $\frac{l_y}{\lambda} = 0,35$  (на второй шкале, соответствующей направлению от источника к нагрузке). По пересечению повернутого радиуса с окружностью  $k_g = 0,2$  находим искомую точку

$$\dot{z}_H = r_H + jx_H = 0,51 + j1,25.$$

6. Определяем истинное значение сопротивления нагрузки:

$$\dot{Z}_H = \dot{z}_H W = (0,51 + j1,25) \cdot 200 \text{ ом} = (102 + j250) \text{ ом}.$$

**Пример 4.** Разомкнутая на конце линия имеет длину  $l_0 = 0,65 \text{ м}$  и волновое сопротивление  $W = 75 \text{ ом}$ .

Определить входное сопротивление линии, если длина волны в линии  $\lambda = 0,3 \text{ м}$ .

1. Определяем относительную длину линии:

$$\frac{l_0}{\lambda} = \frac{0,65 \text{ м}}{0,3 \text{ м}} = 2,167,$$

или после отбрасывания целого числа полувольт

$$\frac{l'_0}{\lambda} = 0,167.$$

2. За исходную точку выбираем точку  $z_\infty$  (рис. 8.31), которая соответствует разомкнутому концу линии.

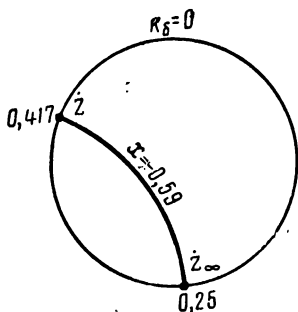


Рис. 8.31. Определение входного сопротивления разомкнутой линии по круговой диаграмме

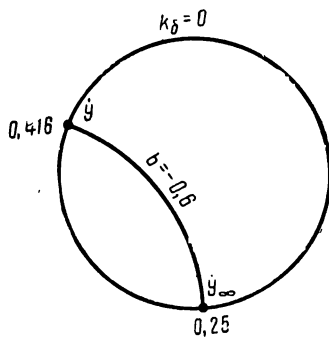


Рис. 8.32. Определение длины короткозамкнутой линии по круговой диаграмме

3. Переходя по окружности  $k_\delta = 0$  в направлении вращения часовой стрелки до отметки  $\frac{l}{\lambda} = 0,25 + \frac{l'_0}{\lambda} = 0,25 + 0,167 = 0,417$ , находим искомую точку:

$$z = jx = -j0,59.$$

4. Определяем истинное значение входного сопротивления:

$$\dot{Z} = zW = -j0,59 \cdot 75 \text{ ом} = -j44,2 \text{ ом}.$$

Таким образом, входное сопротивление разомкнутой линии является чисто реактивным, как это и отмечалось при рассмотрении стоячих волн.

**Пример 5.** Короткозамкнутая на конце линия с волновым сопротивлением  $W = 200 \text{ ом}$  имеет входную проводимость

$$Y = -j3 \cdot 10^{-3} \text{ 1/ом*}.$$

Определить длину линии, если длина волны в линии  $\lambda = 1 \text{ м}$ .

1. Определяем нормированную входную проводимость:

$$\dot{y} = YW = -j3 \cdot 10^{-3} \text{ 1/ом} \cdot 200 \text{ ом} = -j0,6.$$

2. Определяем на диаграмме исходную точку  $y$  по пересечению окружности  $k_\delta = 0$  и дуги  $b = -0,6$  (рис. 8.32).

\* Здесь задана чисто реактивная входная проводимость, как это и должно быть в короткозамкнутой линии, в которой устанавливается режим стоячих волн.

3. На диаграмме проводимостей короткозамкнутому концу линии соответствует точка  $\dot{Y}_\infty$ . По разности отметок  $\frac{l_1}{\lambda} = 0,416$  и  $\frac{l_2}{\lambda} = 0,25$ , соответствующих точкам  $\dot{Y}$  и  $\dot{Y}_\infty$ , определяем относительную длину линии:

$$\frac{l_0}{\lambda} = \frac{l_1}{\lambda} - \frac{l_2}{\lambda} = 0,416 - 0,25 = 0,166.$$

4. Определяем истинную длину линии (сверх целого числа полувольт):

$$l_0 = 0,166\lambda = 0,166 \cdot 100 \text{ см} = 16,6 \text{ см}.$$

Разобранные примеры охватывают все типовые задачи по определению сопротивлений и проводимостей. Круговые диаграммы применяются также при расчете сложных линий (разветвленных, с переменным сечением и т. д.). Методика использования круговых диаграмм в этих случаях остается прежней (с учетом п. 8 общих правил).

Применение круговых диаграмм для решения специфических задач рассмотрено ниже.

## 7. Расчет одношлейфового согласующего устройства

Как известно, целью согласования является получение бегущей волны в линии, нагруженной на несогласованную нагрузку  $\dot{Y}_н$ . Бегущая волна может быть получена в линии слева от сечения  $1-1$  (рис. 8.33) при условии, что проводимость  $\dot{Y}_{11}$  в сечении  $1-1$  является чисто активной и равной волновой проводимости  $Y_c$ :

$$\dot{Y}_{11} = Y_c. \quad (8.106)$$

Выполнение этого условия достигается с помощью так называемого реактивного шлейфа, включаемого в сечении  $1-1$ . Такой шлейф, предложенный В. В. Татариновым, представляет собой короткозамкнутый отрезок линии, имеющий чисто реактивное входное сопротивление (при отсутствии потерь). Короткозамыкающая перемычка делается подвижной, что позволяет регулировать длину шлейфа и тем самым менять величину его входного реактивного сопротивления (проводимости). В случае коаксиального шлейфа короткозамыкающая перемычка выполняется в виде поршня, сквозь центральное отверстие которого пропускается провод (с сохранением контакта).

Рассмотрим принцип согласования с помощью реактивного шлейфа. Проводимость  $\dot{Y}_{11}$  складывается из комплексной входной

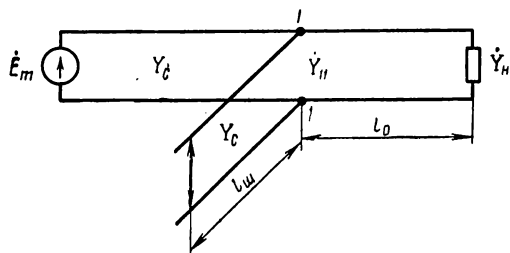


Рис. 8.33. Одношлейфовое согласующее устройство

проводимости  $\dot{Y} = G + jB$  отрезка  $l_0$  и из чисто реактивной входной проводимости  $\dot{Y}_ш = jB_ш$  короткозамкнутого шлейфа:

$$\dot{Y}_{11} = \dot{Y} + \dot{Y}_ш = G + j(B + B_ш). \quad (8.107)$$

Сопоставляя выражения (8.106) и (8.107), приходим к выводу, что линия получается согласованной в сечении  $I—I$  при выполнении следующих двух условий:

$$\begin{aligned} G &= Y_c, \\ B + B_ш &= 0, \end{aligned} \quad (8.108)$$

или

$$B_ш = -B. \quad (8.109)$$

Условие (8.108) означает, что активная составляющая входной проводимости в сечении  $I—I$  должна равняться волновой проводимости линии. Это условие может быть выполнено при надлежащем выборе длины отрезка  $l_0$ , так как  $G = G(\dot{Y}_н, Y_c, \lambda, l_0)$ , а величины  $\dot{Y}_н$ ,  $Y_c$  и  $\lambda$  являются заданными.

Условие (8.109) означает, что получающаяся в сечении  $I—I$  реактивная проводимость  $B$  должна быть скомпенсирована входной проводимостью шлейфа, что может быть достигнуто путем соответствующего выбора длины шлейфа  $l_ш$ , так как  $B_ш = B_ш(Y_c, \lambda, l_ш)$ .

Выбор величин  $l_0$  и  $l_ш$  осуществляется по круговой диаграмме следующим образом.

1. Вычисляется нормированная проводимость нагрузки:

$$\dot{y}_н = \frac{\dot{Y}_н}{Y_c} = g_н + jb_н.$$

2. На диаграмме проводимостей определяется положение исходной точки  $\dot{y}_н$  (рис. 8.34).

3. Из исходной точки  $\dot{y}_н$  необходимо переместиться вдоль КВВ-окружности по часовой стрелке до окружности  $g = 1$  (до точки  $\dot{y}$ ). Пройденное угловое расстояние соответствует относительной длине отрезка линии  $\frac{l_0}{\lambda}$ , при котором выполняется условие (8.106).

4. По относительной величине  $\frac{l_0}{\lambda}$  определяется истинное значение длины отрезка  $l_0$ .

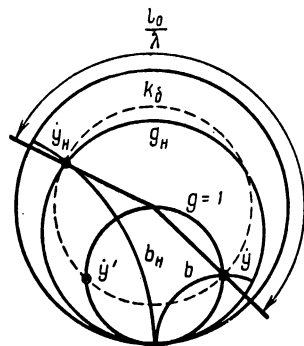


Рис. 8.34. Расчет одношлейфового согласующего устройства по круговой диаграмме



5. По  $b$ -дуге, проходящей через точку  $\dot{y}$ , определяется значение  $b$  и в соответствии с условием (8.109) находится  $b_{ш} = -b$ .

Следует заметить, что задача имеет два решения, как видно из рис. 8.34. Вместо точки  $\dot{y}$  можно выбрать точку  $\dot{y}'$ . Практически следует выбирать тот вариант решения, при котором размеры  $l_0$  и  $l_{ш}$  получаются наименьшими.

6. По найденной входной проводимости короткозамкнутого шлейфа  $b_{ш}$  определяется его длина  $l_{ш}$  (см. пример 5).

Таким образом, задача полностью решена.

При регулировке рассмотренного согласующего устройства надо подбирать длину  $l_0$ , перемещая реактивный шлейф по фидеру. Это не всегда удобно, а иногда и невозможно, как например, при согласовании коаксиального фидера.

В подобных случаях для согласования используются два неподвижных реактивных шлейфа.

## 8. Расчет двухшлейфового согласующего устройства

Схема двухшлейфового согласующего устройства показана на рис. 8.35. Как и в одношлейфовом согласующем устройстве, для согласования линии надо получить в сечении 1—1 чисто активную проводимость  $\dot{Y}_{11}$ , равную проводимости  $Y_c$  [см. условие (8.106)].

В отличие от предыдущего случая здесь согласование осуществляется не подбором размеров  $l_0$  и  $l_{ш}$ , а подбором размеров  $l_{ш1}$  и  $l_{ш2}$  двух реактивных шлейфов. Положение же шлейфов является фиксированным. При этом размер  $l'_0$  задается по конструктивным соображениям, а размер  $l_0$  выбирается обычно равным  $\frac{3}{8} \lambda$ .

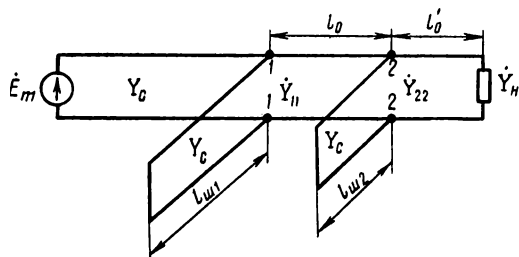


Рис. 8.35. Двухшлейфовое согласующее устройство

Иногда расстояние  $l_0$  может быть выбрано другим ( $l_0 = \frac{\lambda}{8}$  и т. д.).

При этом общая методика расчета согласующего устройства не изменяется.

Проводимость  $\dot{Y}_{11}$  в сечении 1—1 складывается из реактивной входной проводимости  $\dot{Y}_{ш1} = jB_{ш1}$  шлейфа длиной  $l_{ш1}$  и комплексной входной проводимости  $\dot{Y} = G + jB$  отрезка линии  $l_0$ :

$$\dot{Y}_{11} = \dot{Y} + \dot{Y}_{ш1} = G + j(B + B_{ш1}). \quad (8.110)$$

Сопоставляя выражения (8.106) и (8.110), получаем следующие два условия согласования:

$$G = Y_c, \quad (8.111)$$

или 
$$B + B_{ш1} = 0,$$

$$B_{ш1} = -B. \quad (8.112)$$

Следует иметь в виду, что  $G = G(\dot{Y}_{22}, Y_c, \lambda, l_0)$ . Поскольку параметры  $Y_c$ ,  $\lambda$  и  $l_0$  являются заданными, выполнение условия (8.111) достигается путем подбора проводимости  $\dot{Y}_{22}$ . Получающаяся при этом в сечении 1—1 реактивная проводимость  $B = B(\dot{Y}_{22}, Y_c, \lambda, l_0)$  в соответствии с условием (8.112) компенсируется входной проводимостью  $B_{ш1}$  шлейфа длиной  $l_{ш1}$ , что достигается подбором размера  $l_{ш1}$ .

Проводимость  $\dot{Y}_{22} = G_{22} + jB_{22}$  в сечении 2—2 складывается из комплексной входной проводимости  $\dot{Y}_0 = G_0 + jB_0$  отрезка линии  $l'_0$  и реактивной входной проводимости  $\dot{Y}_{ш2} = jB_{ш2}$  шлейфа длиной  $l_{ш2}$ :

$$\dot{Y}_{22} = G_{22} + jB_{22} = \dot{Y}_0 + \dot{Y}_{ш2} = G_0 + j(B_0 + B_{ш2}),$$

или

$$G_{22} = G_0 \quad (8.113)$$

$$B_{22} = B_0 + B_{ш2}. \quad (8.114)$$

Проводимости  $G_0 = G_0(\dot{Y}_n, Y_c, \lambda, l'_0)$  и  $B_0 = B_0(\dot{Y}_n, Y_c, \lambda, l'_0)$  являются определенными величинами, поскольку заданы параметры  $\dot{Y}_n$ ,  $Y_c$ ,  $\lambda$ ,  $l'_0$ . Таким образом, получение величины  $\dot{Y}_{22}$ , необходимой для выполнения условия (8.111), может быть достигнуто только изменением реактивной проводимости  $B_{22}$  за счет изменения входной проводимости  $B_{ш2}$  шлейфа длиной  $l_{ш2}$ . Последнее достигается соответствующим выбором размера  $l_{ш2}$ .

Итак, задача расчета двухшлейфового согласующего устройства сводится, во-первых, к выбору такой длины  $l_{ш2}$ , при которой удовлетворяется условие (8.111), и, во-вторых, к выбору такой длины  $l_{ш1}$ , при которой удовлетворяется условие (8.112).

Расчет проводится в следующей последовательности.

1. Вычисляется нормированная проводимость нагрузки

$$\dot{y}_n = \frac{\dot{Y}_n}{Y_c} = g_n + jb_n$$

и определяются относительные длины

$$\frac{l'_0}{\lambda} \text{ и } \frac{l_0}{\lambda} = \frac{3}{8}.$$

2. Определяется по круговой диаграмме входная нормированная проводимость  $\dot{y}_0 = g_0 + jb_0$  отрезка  $l'_0$  (см. выше).

3. Поскольку реактивные проводимости  $b$  и  $b_{22} = b_0 + b_{ш2}$  в сечениях 1—1 и 2—2 неизвестны, положение точек  $\dot{y} = g + jb$  и  $\dot{y}_{22} = g_{22} + jb_{22}$ , которые могли бы служить исходными точками, не может быть определено по круговой диаграмме. Поэтому вместо исходных точек на круговой диаграмме определяется в соответствии с условиями (8.111) и (8.113) положение исходных линий  $g = 1$  и  $g_{22} = g_0$  (рис. 8.36, а).

4. При переходе на линии из сечения 2—2 в сечение 1—1 рабочая точка на диаграмме перемещается по КБВ-окружности с окружности  $g_{22}$  на окружность  $g = 1$ . При этом радиус, проходя-

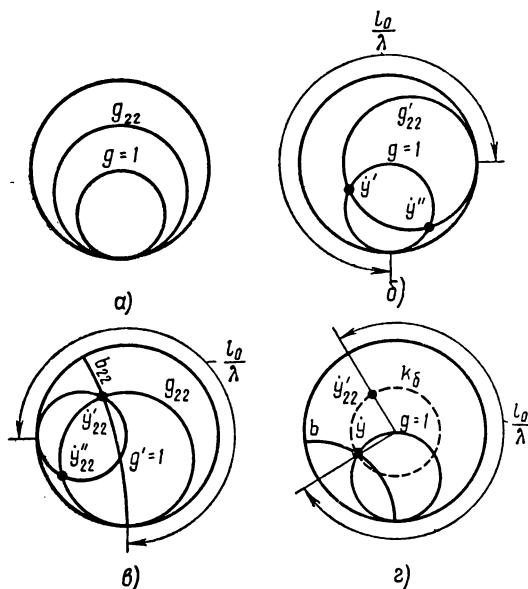


Рис. 8.36. Расчет двухшлейфового согласующего устройства по круговой диаграмме

щий через рабочую точку, должен повернуться по часовой стрелке на  $270^\circ$ , что соответствует относительному расстоянию  $\frac{l_0}{\lambda} = \frac{3}{8}$ .

Так как положение рабочей точки неизвестно, то для решения задачи можно повернуть на  $270^\circ$  всю окружность  $g_{22}$ , которая займет при этом положение  $g'_{22}$  (рис. 8.36, б). Точки пересечения окружности  $g'_{22}$  с окружностью  $g = 1$  дают два значения входной проводимости в сечении 1—1:  $\dot{y}'$  и  $\dot{y}''$ , соответствующих двум возможным вариантам решения задачи.

Практически удобно поворачивать не окружность  $g_{22}$ , а окружность  $g = 1$ . При этом поворот осуществляется на  $270^\circ$  против

часовой стрелки до положения  $g' = 1$  (рис. 8.36, в). Такой поворот соответствует перемещению на линии из сечения 1—1 в сечение 2—2. Таким образом, в точках пересечения окружностей  $g_{22}$  и  $g' = 1$  определяются два удовлетворяющих условию задачи значения  $\dot{y}'_{22}$  и  $\dot{y}''_{22}$ . Выбирая значение  $\dot{y}_{22}$ , находят по  $b$ -дуге, проходящей через точку  $\dot{y}_{22}$ , реактивную проводимость  $b_{22}$  в сечении 2—2.

Практически из двух возможных решений выбирается тот вариант, при котором размеры  $l_{ш1}$  и  $l_{ш2}$  получаются наименьшими.

5. Согласно условию (8.114), по найденному значению  $b_{22}$  определяется входная проводимость шлейфа длиной  $l_{ш2}$ :

$$b_{ш2} = b_{22} - b_0.$$

6. По найденному значению  $b_{ш2}$  определяется обычным образом длина шлейфа  $l_{ш2}$ .

7. При переходе из точки  $\dot{y}_{22}$  по  $k_6$ -окружности на  $270^\circ$  в сторону часовой стрелки (до встречи с окружностью  $g = 1$ ), находится входная проводимость  $\dot{y}$  отрезка линии  $l_0$  (рис. 8.36, в). По  $b$ -дуге, проходящей через точку  $\dot{y}$ , определяется значение  $b$ .

8. Согласно условию (8.112), по найденному значению  $b$  определяется входная проводимость шлейфа длиной  $l_{ш1}$ :

$$b_{ш1} = -b.$$

9. По найденному значению  $b_{ш1}$  определяется обычным образом длина шлейфа  $l_{ш1}$ .

В настоящем параграфе рассмотрено решение основных типовых задач, встречающихся при расчетах длинных линий. Ниже приведено решение некоторых других частных задач, имеющих прикладное значение.

## § 8.3. ДВУХПОЛЮСНИКИ С РАСПРЕДЕЛЕННЫМИ ПАРАМЕТРАМИ

### 1. Реактивные двухполюсники

В качестве двухполюсников с распределенными параметрами, или волновых двухполюсников, могут использоваться отрезки длиной линии с произвольным нагрузочным сопротивлением  $\dot{Z}_н$  (рис. 8.37). Зажимами такого двухполюсника являются входные зажимы отрезка линии, а сопротивление волнового двухполюсника есть не что иное, как входное сопротивление этого отрезка.

В качестве реактивных волновых двухполюсников могут использоваться отрезки линии без потерь, короткозамкнутые или разомкнутые на конце, а также нагруженные на чисто реактивное сопротивление  $\dot{Z}_н = jX_н$ . Как отмечалось выше, входное сопротивление таких отрезков линии, в которых устанавливается режим стоячих волн, является чисто реактивным.

Согласно формуле (8.90), входное сопротивление короткозамкнутой и разомкнутой линий равно соответственно

$$\dot{Z} = \dot{Z}_{кз} = jW \operatorname{tg} 2\pi \frac{l_0}{\lambda} = jW \operatorname{tg} \tau \omega \quad (8.115)$$

и

$$\dot{Z} = \dot{Z}_{хх} = -jW \operatorname{ctg} 2\pi \frac{l_0}{\lambda} = -jW \operatorname{ctg} \tau \omega, \quad (8.116)$$

где

$$\tau = \frac{l_0}{v_0} \quad (8.117)$$

— время распространения бегущей волны вдоль отрезка линии.

Согласно первым равенствам (8.115), (8.116) сопротивление реактивного волнового, двухполюсника является функцией длины отрезка линии при фиксированном значении частоты.

Согласно вторым равенствам (8.115), (8.116) реактивный волновой двухполюсник с фиксированной длиной  $l_0$  является многорезонансной системой, имеющей бесконечный ряд чередующихся последовательных ( $\dot{Z} = 0$ ) и параллельных ( $\dot{Z} = \pm j\infty$ )

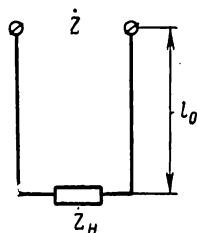


Рис. 8.37. Двухполюсник с распределенными параметрами

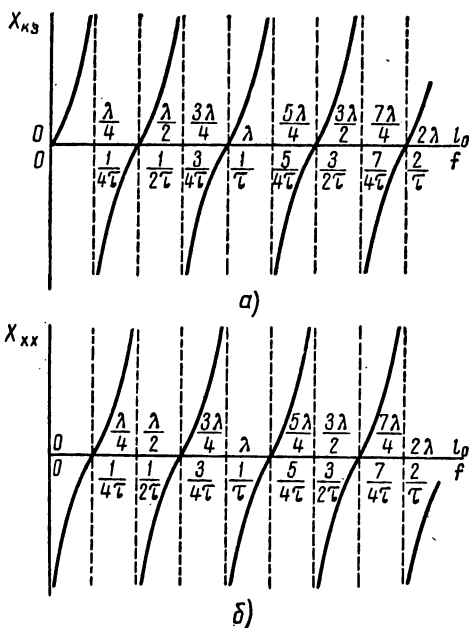


Рис. 8.38. Частотные и пространственные характеристики сопротивления реактивных волновых двухполюсников

резонансов. Резонансные частоты такого двухполюсника определяются из условий  $\operatorname{tg} \tau \omega = 0$  и  $\operatorname{tg} \tau \omega = \pm \infty$ :

$$f_0 = \frac{1}{4\tau}, \quad f_{0k} = k f_0, \quad (k = 1, 2, 3, \dots). \quad (8.118)$$

Таким образом, в короткозамкнутых и разомкнутых отрезках линии резонансы располагаются на кратных частотах.

Частотные характеристики сопротивления короткозамкнутого и разомкнутого волновых двухполюсников показаны на рис. 8.38, а и б. Эти характеристики совмещены с пространственными характеристиками сопротивления  $X(l_0)$ .

Пространственные характеристики сопротивления волнового двухполюсника с реактивным нагрузочным сопротивлением  $Z_n = jX_n$  могут быть получены из рис. 8.38 простым переносом начала отсчета координат.

Действительно, отрезок короткозамкнутой линии длиной  $l'_0 < \frac{\lambda}{4}$  обладает индук-

тивным входным сопротивлением, величина которого может иметь любое значение в пределах от 0 до  $\infty$ . Поэтому любую индуктивную нагрузку в линии можно заменить короткозамкнутым отрезком такой же линии длиной  $l'_0 < \frac{\lambda}{4}$  (рис. 8.39, а) при условии, что

$$Z'_{кз} = jW \operatorname{tg} \beta_0 l'_0 = j\omega L_n,$$

т. е.

$$l'_0 = \frac{\lambda}{2\pi} \operatorname{arctg} \frac{\omega L_n}{W}.$$

Из сказанного следует, что переносом на величину

$l'_0 < \frac{\lambda}{4}$  начала отсчета координат на рис. 8.38, а можно получить график изменения входного сопротивления линии с индуктивной нагрузкой (рис. 8.39, б).

Аналогичные рассуждения показывают, что емкостную нагрузку в линии можно заменить разомкнутым отрезком такой же линии длиной  $l'_0 < \frac{\lambda}{4}$ . Эта длина определяется из условия

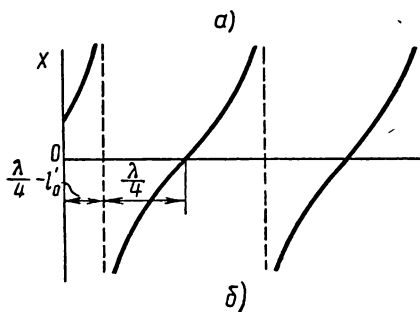
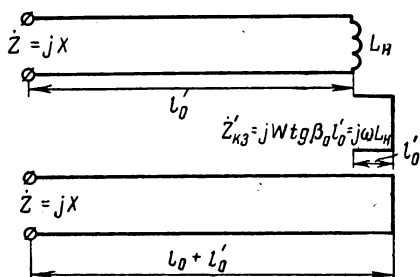


Рис. 8.39. Замена реактивного нагрузочного сопротивления отрезком короткозамкнутой линии

$$Z'_{xx} = -jW \operatorname{ctg} \beta_0 l'_0 = -j \frac{1}{\omega C_n}.$$

т. е.

$$l'_0 = \frac{\lambda}{2\pi} \operatorname{arctg} \omega C_H W.$$

Поэтому график изменения сопротивления волнового двухполюсника с емкостной нагрузкой может быть получен из рис. 8.38, б переносом начала отсчета координат на величину

$$l'_0 < \frac{\lambda}{4}.$$

При построении частотных характеристик сопротивления волнового двухполюсника с реактивной нагрузкой проще исходить из общей формулы (8.90). Например, при индуктивной нагрузке  $Z_H = j\omega L_H$  из второй формулы (8.90) находим

$$\dot{Z} = jW \frac{\omega L_H + W \operatorname{tg} \tau\omega}{W - \omega L_H \operatorname{tg} \tau\omega}.$$

Отсюда видно, что нули и полюсы сопротивления  $\dot{Z}$  могут быть найдены соответственно из уравнений

$$\operatorname{tg} \tau\omega = -\frac{\omega L_H}{W}$$

и

$$\operatorname{tg} \tau\omega = \frac{W}{\omega L_H}.$$

Эти уравнения проще всего решать графически, как показано на рис. 8.40, а. При этом определяется частотная характеристика сопротивления, показанная на рис. 8.40, б. Как видно из рисунка, резонансные частоты в этом случае не являются кратными.

Аналогично определяется частотная характеристика сопротивления волнового двухполюсника и при емкостной нагрузке.

Одно из применений реактивных волновых двухполюсников — в качестве согласующих шлейфов — было рассмотрено выше. Некоторые другие применения таких двухполюсников рассматриваются в последующем изложении.

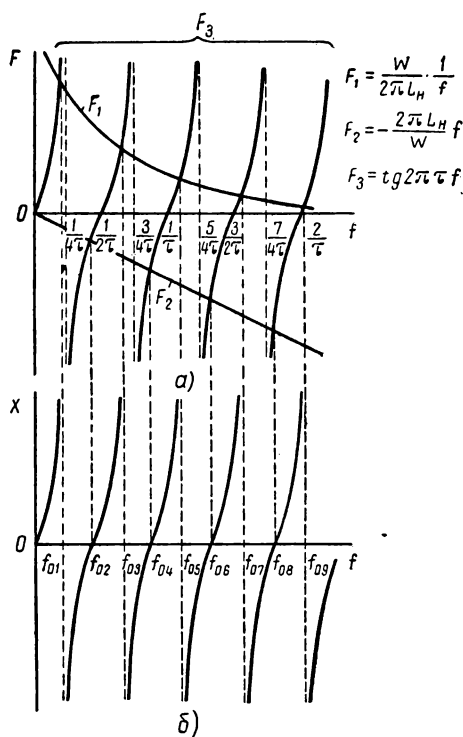


Рис. 8.40. Построение частотной характеристики сопротивления волнового двухполюсника с реактивным нагрузочным сопротивлением

## 2. Диссипативные двухполюсники

Потери в волновых двухполюсниках могут быть обусловлены как потерями в самой длинной линии, так и расходом энергии в нагрузочном сопротивлении при  $\dot{Z}_н = R_н$  или  $\dot{Z}_н = R_н + jX_н$  (см. рис. 8.37).

Рассмотрим сначала сопротивление волнового двухполюсника при  $\dot{Z}_н = R_н$ . При этом будем полагать, что потери в самой линии отсутствуют, поскольку они обычно пренебрежимо малы в сравнении с потерями на нагрузочном сопротивлении.

Рассматривая нормированное значение сопротивлений, представим формулу (8.90) в следующем виде:

$$\dot{z} = r + jx = \frac{r_н + j \operatorname{tg} \beta_0 l_0}{1 + jr_н \operatorname{tg} \beta_0 l_0}, \quad (8.119)$$

где

$$r = r_н \frac{1 + \operatorname{tg}^2 2\pi \frac{l_0}{\lambda}}{1 + r_н^2 \operatorname{tg}^2 2\pi \frac{l_0}{\lambda}} = r_н \frac{1 + \operatorname{tg}^2 \tau\omega}{1 + r_н^2 \operatorname{tg}^2 \tau\omega}, \quad (8.120)$$

$$x = \frac{1 - r_н^2}{1 + r_н^2 \operatorname{tg}^2 2\pi \frac{l_0}{\lambda}} \operatorname{tg} 2\pi \frac{l_0}{\lambda} = \frac{1 - r_н^2}{1 + r_н^2 \operatorname{tg}^2 \tau\omega} \operatorname{tg} \tau\omega. \quad (8.121)$$

Величина  $\tau$  определяется прежним выражением (8.117).

Графики изменения активной и реактивной составляющих сопротивления двухполюсника, построенные по уравнениям (8.120) и (8.121), представлены на рис. 8.41, а и б. На рис. 8.41, в показано изменение модуля сопротивления рассматриваемого двухполюсника. Из рис. 8.41 и формул (8.119) — (8.121) видно, что сопротивление этого двухполюсника является чисто активным при  $l_0 = k \frac{\lambda}{4}$  и  $f = \frac{k}{4\tau}$ . Во всех остальных случаях сопротивление (8.119) является комплексной величиной.

Поэтому произвольное комплексное сопротивление может быть заменено отрезком линии с должным образом подобранным активным нагрузочным сопротивлением, подобно тому как на рис. 8.39, а индуктивное сопротивление заменялось короткозамкнутым отрезком линии. Отсюда следует, что характеристики сопротивления волнового двухполюсника с комплексным нагрузочным сопротивлением  $\dot{Z}_н = R_н + jX_н$  могут быть получены из рис. 8.41 простым смещением начала координат, как это отмечалось и в случае линии с реактивной нагрузкой.

Рассмотрим теперь диссипативный волновой двухполюсник в виде разомкнутого отрезка линии с потерями. В соответствии с формулой (8.90) его сопротивление (при  $Z_н = \infty$ ) равно

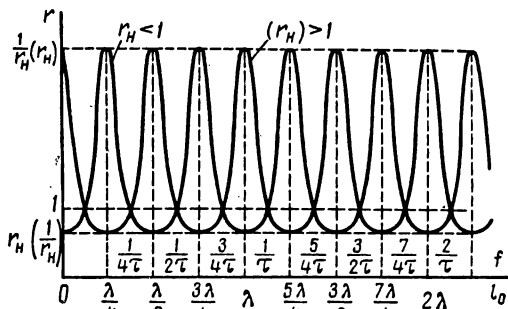
$$\dot{Z} = \dot{Z}_{xx} = \dot{Z}_c \operatorname{cth} \dot{\gamma} l_0 = \frac{\dot{Z}_c}{\operatorname{th} \dot{\gamma} l_0}. \quad (8.122)$$



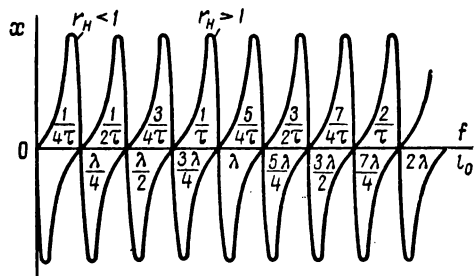
Подставляя сюда значение коэффициента распространения (8.14) и учитывая, что (при  $\beta = \beta_0$ )

$\text{th}(\alpha l_0 + j\beta_0 l_0) = \frac{\text{th} \alpha l_0 + \text{th} j\beta_0 l_0}{1 + \text{th} \alpha l_0 \text{th} j\beta_0 l_0}$ ,  $\text{th} \alpha l_0 \approx \alpha l_0$ ,  $\text{th} j\beta_0 l_0 = j \text{tg} \beta_0 l_0$ ,  
получаем

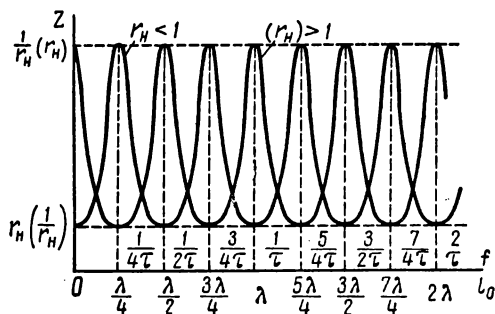
$$\dot{Z} = \dot{Z}_c \frac{1 + j\alpha l_0 \text{tg} \beta_0 l_0}{\alpha l_0 + j \text{tg} \beta_0 l_0}. \quad (8.122a)$$



а)



б)



в)

Рис. 8.41. Частотные и пространственные характеристики сопротивления волнового двухполюсника с активным нагрузочным сопротивлением

В области высоких частот, где справедлива формула (8.28), при переходе к нормированному сопротивлению соотношение (8.122а) принимает следующий вид:

$$\dot{z} = r + jx = \frac{\frac{1}{\alpha l_0} + j \operatorname{tg} \beta_0 l_0}{1 + j \frac{1}{\alpha l_0} \operatorname{tg} \beta_0 l_0}. \quad (8.123)$$

Сравнивая выражения (8.123) и (8.119), убеждаемся, что они совпадают по форме. Следовательно, если в формуле (8.119) принять  $r_n = \frac{1}{\alpha l_0} \gg 1$ , то весь анализ этой формулы при  $r_n > 1$  можно распространить на соотношение (8.123).

Таким образом, в области высоких частот графики сопротивления (8.123) должны иметь вид, аналогичный графикам, показанным на рис. 8.41 ( $r_n > 1$ ). Однако следует учитывать некоторые специфические особенности этих графиков в случае линии с потерями.

Из равенства (8.123) видно, что

$$\dot{z}|_{l_0 = k \frac{\lambda}{2}} = r_{\max} = \frac{1}{\alpha l_0}, \quad \dot{z}|_{l_0 = 2(k+1) \frac{\lambda}{4}} = r_{\min} = \alpha l_0. \quad (8.124)$$

Из формул (8.124) следует, что на графиках  $\dot{z} = \dot{z}(l_0)$  с ростом  $l_0$  величина максимумов  $r_{\max}$  уменьшается, а величина минимумов  $r_{\min}$  увеличивается. На графиках же  $\dot{z} = \dot{z}(f)$  величина максимумов и минимумов не изменяется с ростом  $f$ , если пренебречь зависимостью  $\alpha$  от частоты. Таким образом, характеристики  $\dot{z}(l_0)$  и  $\dot{z}(f)$  не совпадают, и рис. 8.41 нельзя механически переносить на случай разомкнутой линии с потерями.

Кроме того, графики сопротивления разомкнутой линии с потерями отличаются от графиков на рис. 8.41 в области значений  $\beta_0 l_0 = k \frac{\pi}{2}$ , т. е. в области  $l_0 = k \frac{\lambda}{4}$  или  $f = \frac{k}{4\tau}$ . На рис. 8.41, а при этих значениях аргумента получаются резонансы ( $x = 0$ ) и активная составляющая сопротивления  $r$  имеет максимум или минимум. В разомкнутой же линии с потерями резонансы несколько смещаются, а максимумы и минимумы активной составляющей сопротивления не совпадают с резонансами. Такое принципиальное расхождение в графиках получается за счет влияния реактивной составляющей волнового сопротивления, которая не учтена в формуле (8.123).

Подставляя в соотношение (8.122а) значение  $\dot{Z}_c$  из формулы (8.70), получаем

$$\dot{z} = r + jx \approx \left(1 - j \frac{\alpha}{\beta_0}\right) \frac{1 + j \alpha l_0 \operatorname{tg} \beta_0 l_0}{\alpha l_0 + j \operatorname{tg} \beta_0 l_0}, \quad (8.125)$$

где

$$r \approx \left[ \frac{1 + \operatorname{tg}^2 \beta_0 l_0}{(\alpha l_0)^2 + \operatorname{tg}^2 \beta_0 l_0} - \frac{1 - (\alpha l_0)^2}{(\alpha l_0)^2 + \operatorname{tg}^2 \beta_0 l_0} \cdot \frac{\operatorname{tg} \beta_0 l_0}{\beta_0 l_0} \right] \alpha l_0; \quad (8.126)$$

$$x \approx - \left[ \frac{1 - (\alpha l_0)^2}{(\alpha l_0)^2 + \operatorname{tg}^2 \beta_0 l_0} \operatorname{tg} \beta_0 l_0 + \frac{1 + \operatorname{tg}^2 \beta_0 l_0}{(\alpha l_0)^2 + \operatorname{tg}^2 \beta_0 l_0} \cdot \frac{(\alpha l_0)^2}{\beta_0 l_0} \right]. \quad (8.127)$$

При  $\beta_0 l_0 \rightarrow \frac{2k+1}{2}\pi$ , когда  $\operatorname{tg} \beta_0 l_0 \rightarrow \pm \infty$ , последние две формулы могут быть переписаны таким образом:

$$r|_{\beta_0 l_0 \rightarrow \frac{2k+1}{2}\pi} \approx \left( 1 - \frac{1}{\beta_0 l_0 \operatorname{tg} \beta_0 l_0} \right) \alpha l_0, \quad (8.126a)$$

$$x|_{\beta_0 l_0 \rightarrow \frac{2k+1}{2}\pi} \approx - \left[ \frac{1}{\operatorname{tg} \beta_0 l_0} + \frac{(\alpha l_0)^2}{\beta_0 l_0} \right]. \quad (8.127a)$$

При  $\beta_0 l_0 \rightarrow k\pi$ , когда  $\operatorname{tg} \beta_0 l_0 \rightarrow 0$ , формулы (8.126) и (8.127) принимают следующий вид:

$$r|_{\beta_0 l_0 \rightarrow k\pi} \approx \left( 1 - \frac{\operatorname{tg} \beta_0 l_0}{\beta_0 l_0} \right) \frac{1}{\alpha l_0}, \quad (8.126b)$$

$$x|_{\beta_0 l_0 \rightarrow k\pi} \approx - \left[ \frac{\operatorname{tg} \beta_0 l_0}{(\alpha l_0)^2} + \frac{1}{\beta_0 l_0} \right]. \quad (8.127b)$$

Из формулы (8.126a) видно, что при уменьшении  $\beta_0 l_0$  в области значений  $\beta_0 l_0 = (2k+1) \frac{\pi}{2}$  сопротивление  $r$  также уменьшается.

Из формулы (8.126b) следует, что при уменьшении  $\beta_0 l_0$  в области значений  $\beta_0 l_0 = k\pi$  сопротивление  $r$  увеличивается.

Кроме того, наличие второго слагаемого в формулах (8.127a) и (8.127b) свидетельствует о некоторой расстройке двухполосника, так как при  $\beta_0 l_0 = k \frac{\pi}{2}$  реактивное сопротивление отлично от нуля и имеет значения

$$x|_{\beta_0 l_0 = \frac{2k+1}{2}\pi} \approx - \frac{2(\alpha l_0)^2}{(2k+1)\pi},$$

$$x|_{\beta_0 l_0 = k\pi} \approx - \frac{1}{k\pi}.$$

В области низких частот формула (8.70) и, следовательно, соотношения (8.125) — (8.127) являются неверными. На этих частотах сопротивление  $r$  вновь возрастает. Действительно, из выражения (8.122a) следует, что

$$Z|_{f=0} = R_{\max} = \frac{1}{\alpha l_0} \sqrt{\frac{R_0}{G_0}},$$

или

$$r_{\max} = \frac{1}{\alpha l_0} \sqrt{\frac{R_0 G_0}{G_0 L_0}} > \frac{1}{\alpha l_0},$$

так как обычно  $\frac{R_0}{G_0} > \frac{L_0}{C_0}$ .

В соответствии с полученными выводами на рис. 8.42, а построены частотные характеристики активной и реактивной составляющих сопротивления (8.122) \*.

В случае  $l_0 \rightarrow 0$  равенства (8.126) и (8.127) остаются справедливыми и дают следующие предельные значения  $r$  и  $x$ :

$$\lim_{l_0 \rightarrow 0} r = 0, \quad \lim_{l_0 \rightarrow 0} x = -\infty.$$

Графики зависимости  $r(l_0)$  и  $x(l_0)$  показаны на рис. 8.42, б.

Для определения сопротивления волнового двухполюсника в виде отрезка короткозамкнутой линии с потерями подставим в соотношение (8.89) значение  $\dot{Z}_n = 0$ :

$$\dot{Z} = \dot{Z}_{кз} = \dot{Z}_c \operatorname{th} \dot{\gamma} l_0. \quad (8.128)$$

Преобразуем эту формулу аналогично формуле (8.122):

$$\dot{Z} = \dot{Z}_c \frac{\alpha l_0 + j \operatorname{tg} \beta_0 l_0}{1 + j \alpha l_0 \operatorname{tg} \beta_0 l_0}. \quad (8.128a)$$

Приняв значение волнового сопротивления (8.28), найдем нормированное сопротивление:

$$\dot{z} = r + jx = \frac{\alpha l_0 + j \operatorname{tg} \beta_0 l_0}{1 + j \alpha l_0 \operatorname{tg} \beta_0 l_0}. \quad (8.129)$$

Равенства (8.129) и (8.119) совпадают, если  $r_n = \alpha l_0 < 1$ . Отсюда вытекает, что для составляющих сопротивления (8.129) остаются справедливыми графики на рис. 8.41 ( $r_n < 1$ ). При этом следует лишь учесть, что с ростом  $l_0$  минимумы сопротивления (8.129) увеличиваются, а максимумы — уменьшаются, так как

$$\dot{z} \big|_{l_0 = k \frac{\lambda}{2}} = r_{\min} = \alpha l_0, \quad \dot{z} \big|_{l_0 = (2k+1) \frac{\lambda}{4}} = r_{\max} = \frac{1}{\alpha l_0}.$$

Частотные и пространственные характеристики сопротивления (8.129) приведены на рис. 8.43. Эти характеристики построены без учета реактивной составляющей волнового сопротивления. Учет этой составляющей также приводит к некоторой деформации характеристик, как и в случае разомкнутой линии.

Полученные частотные характеристики сопротивления свидетельствуют о том, что волновые двухполюсники с потерями, как и реактивные волновые двухполюсники, являются многорезонансными системами.

---

\* Масштабы  $r$  и  $x$  на этом рисунке неодинаковы.

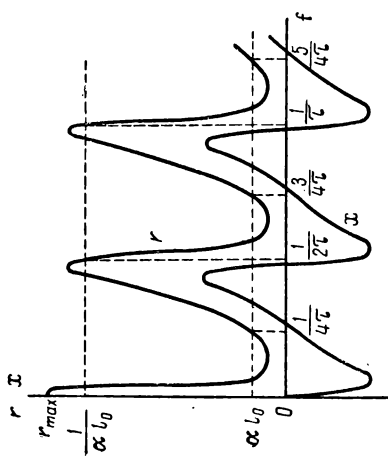


Рис. 8.42. Частотные и пространственные характеристики сопоставления волнового двухполосника в виде отрезка разомкнутой линии с потерями ←

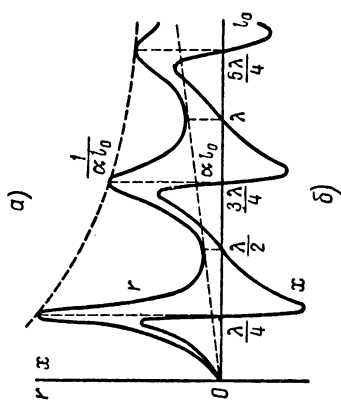
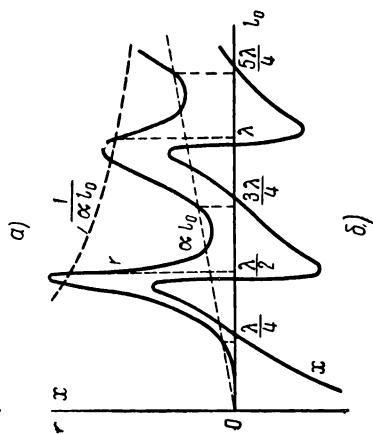


Рис. 8.43. Частотные и пространственные характеристики сопоставления волнового двухполосника в виде отрезка короткозамкнутой линии с потерями →



### 3. Металлические изоляторы

Волновой двухполюсник в виде четвертьволнового отрезка короткозамкнутой линии без потерь имеет бесконечно большое сопротивление. Если же учесть потери в линии, то сопротивление такого двухполюсника получается конечным, но весьма большим по величине. Это свойство четвертьволнового отрезка короткозамкнутой линии используется для крепления проводов фидера.

Если двухпроводный фидер подвешивать на обычных изоляторах, то в диапазоне СВЧ они будут вносить большие потери и создавать дополнительную утечку тока.

Это приведет в свою очередь к отражению волн в месте крепления проводов. Поэтому часто вместо обычных изоляторов для крепления двухпроводного фидера используются так называемые металлические изоляторы. Металлические изоляторы представляют собой четвертьволновые отрезки короткозамкнутой линии, на которые опираются провода фидера (рис. 8.44, а).

Вследствие большого входного сопротивления такие отрезки практически не влияют на передачу энергии по фидеру.

В коаксиальном фидере металлический изолятор выполняется в виде стакана, представляющего собой короткозамкнутый отрезок коаксиальной линии (рис. 8.44, б). Однако в этом случае длина изолятора берется несколько больше четверти длины волны ( $l > \frac{\lambda}{4}$ ).

При этом входное сопротивление изолятора получается емкостным. Это делается для того, чтобы скомпенсировать индуктивное сопротивление выступающей части опорного стержня длиной  $l'$ . Поскольку сопротивление этого короткого проводника  $l'$  является индуктивным, оно образует с емкостным входным сопротивлением стакана параллельный двухполюсник. При соответствующем выборе длины стакана  $l$  индуктивное и емкостное сопротивления получаются равными по модулю. Образовавшийся параллельный двухполюсник настроен в резонанс, и его резонансное сопротивление получается бесконечно большим (при отсутствии потерь). Это бесконечно большое сопротивление включено между проводами коаксиального фидера и поэтому не влияет на передачу энергии по фидеру.

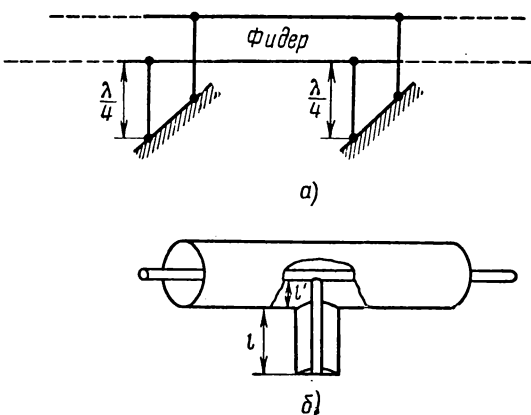


Рис. 8.44. Металлические изоляторы

Четвертьволновый металлический изолятор (без потерь) имеет бесконечно большое входное сопротивление только на одной фиксированной частоте, поэтому он не обеспечивает изоляцию проводов фидера в широком диапазоне частот.

Диапазонный (широкополосный) металлический изолятор позволяет получить в фидере режим бегущих волн ( $k_6 = 1$ ) на трех фиксированных частотах. Диапазонный изолятор (рис. 8.45) состоит из отрезка линии длиной  $l_1$ , опирающегося в среднем сечении 2—2 на волновой двухполюсник в виде короткозамкнутого шлейфа длиной  $l_2 = \frac{l_1}{2}$ .

При длине волны в линии  $\lambda = \lambda_0$  справедливы следующие соотношения:

$$l_1 = \frac{\lambda_0}{2}, \quad l_2 = \frac{\lambda_0}{4}. \quad (8.130)$$

При этом опорный шлейф длиной  $l_2$ , являясь четвертьволновым короткозамкнутым отрезком линии, имеет бесконечно большое входное сопротивление

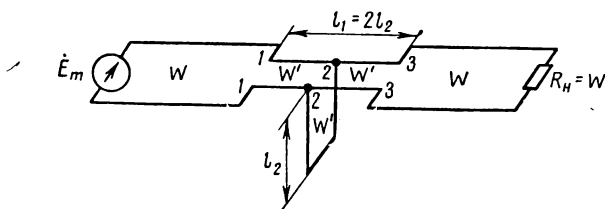


Рис. 8.45. Диапазонный металлический изолятор

поэтому он не оказывает влияния на передачу энергии вдоль линии. Отрезок линии длиной  $l_1$  в сечении 3—3 нагружен на сопротивление  $W$  (согласован на выходе). Так как этот отрезок является полуволновым, то его входное сопротивление равно  $W$ . Следовательно, фидер в сечении 1—1 получается согласованным, т. е. опорный изолятор не нарушает режим бегущих волн в фидере.

При отклонении длины волны в ту или в другую сторону от значения  $\lambda = \lambda_0$  входное сопротивление отрезка линии длиной  $l_1$  становится комплексным, а входное сопротивление шлейфа длиной  $l_2$  уменьшается по величине, являясь по характеру реактивным. При этом линия в сечении 1—1 становится рассогласованной и режим бегущих волн нарушается.

Однако можно так подобрать волновое сопротивление  $W'$ , что при некоторых заданных значениях длины волны, равных  $\lambda_{\min} < \lambda_0$  и  $\lambda_{\max} > \lambda_0$  входное сопротивление отрезка линии длиной  $l_1$  в сечении 1—1 будет по-прежнему равно  $W$ . Если частоты  $f_{\max}$  и  $f_{\min}$  расположены симметрично относительно частоты  $f_0$ , так что выполняется условие  $f_{\max}, \min = f_0 \pm \Delta f$ , то при выбранной таким образом величине  $W'$  линия будет согласована в сечении 1—1 сразу на трех частотах:  $f_{\max}, f_0, f_{\min}$ . Тем самым достигается более или менее полное отсутствие отражения волн от изоляторов во всем диапазоне частот  $f_{\min} \div f_{\max}$ .

Согласование на частотах  $f_{\max}$  и  $f_{\min}$  получается в том случае, если на этих частотах выполняется условие

$$b_{\text{ш}} = -2b, \quad (8.131)$$

\* Здесь  $f_{\max}, f_0$  и  $f_{\min}$  — частоты, соответствующие длинам волн  $\lambda_{\min}, \lambda_0$  и  $\lambda_{\max}$ .

где  $b_{\text{in}}$  — входная проводимость шлейфа длиной  $l_2$ , являющаяся чисто реактивной;

$b$  — реактивная составляющая комплексной входной проводимости отрезка линии длиной  $\frac{l_1}{2}$  в сечении 2—2.

Покажем, что при выполнении условия (8.131) на частотах  $f_{\text{max}}$  и  $f_{\text{min}}$  линия является согласованной в сечении 1—1.

Согласно условию (8.131) короткозамкнутый шлейф длиной  $l_2$  и отрезок линии длиной  $\frac{l_1}{2}$  должны иметь входное сопротивление с разным характером

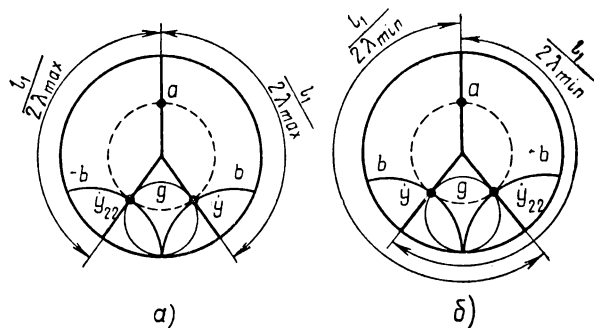


Рис. 8.46. Обоснование принципа действия диапазонного металлического изолятора

реактивности. Это требование выполняется в том случае, когда активное сопротивление  $W$ , являющееся нагрузочным сопротивлением для отрезка  $l_1$ , имеет величину большую, чем сопротивление  $W'$ :

$$W > W'. \quad (8.132)$$

Действительно, поскольку отрезки  $l_2$  и  $\frac{l_1}{2}$  имеют одинаковую длину, при выполнении условия (8.132) их входные сопротивления имеют разный характер реактивности, как это видно из сравнения рис. 8.38, а и 8.41, б ( $r_n > 1$ ).

При выполнении условия (8.132) в сечении 3—3 получается пучность напряжения, как это видно из рис. 8.14, б ( $r_n > 1$ ). Поэтому сечению 3—3 соответствует на диаграмме проводимостей некоторая точка  $a$ , лежащая на верхней полуоси (рис. 8.46, а). При длине волны  $\lambda_{\text{max}} > \lambda_0$  в соответствии с условием (8.130) справедливо соотношение

$$\frac{l_1}{2\lambda_{\text{max}}} < 0,25.$$

При этом входная проводимость отрезка длиной  $\frac{l_1}{2}$  в сечении 2—2 изображается на диаграмме некоторой точкой

$$\dot{y} = g + jb, \quad (8.133)$$

лежащей в правой полуплоскости (см. рис. 8.46, а).



Входная проводимость  $\hat{y}_{22}$  в сечении 2—2 равна сумме входных проводимостей отрезка длиной  $\frac{l_1}{2}$  и шлейфа длиной  $l_2$ :

$$\hat{y}_{22} = \hat{y} + j b_{\text{ш}}.$$

Подставляя сюда значения  $\hat{y}$  и  $b_{\text{ш}}$  из равенств (8.133) и (8.131), получаем следующее соотношение:

$$\hat{y}_{22} = g - j b. \quad (8.134)$$

Нормированной проводимости  $\hat{y}_{22}$  соответствует на диаграмме точка, расположенная симметрично по отношению к точке  $\hat{y}$  (см. рис. 8.46, а).

Перемещению на линии из сечения 2—2 в сечение 1—1 соответствует переход на диаграмме из точки  $\hat{y}_{22}$  в исходную точку  $a$ , поскольку справа и слева от шлейфа длиной  $l_2$  расположены одинаковые отрезки длиной  $\frac{l_1}{2}$ . Следовательно, в сече-

нии 1—1 получается такое же сопротивление  $W$ , как и в сечении 3—3. Таким образом, является доказанным, что при выполнении условий (8.131) и (8.132) на частоте  $f_{\min}$  изолятор не нарушает режим бегущих волн в линии.

Аналогично доказывается справедливость утверждения об отсутствии отражений в линии на частоте  $f_{\max}$  (рис. 8.46, б).

Расчет диапазонного изолятора по круговой диаграмме сводится к определению КБВ в линии длиной  $l_1$  на частоте  $f_{\min}$  или  $f_{\max}$ . По величине КБВ определяется волновое сопротивление

$$W' = k_6 W. \quad (8.135)$$

Рис. 8.47. Расчет диапазонного металлического изолятора

Эта формула вытекает из равенства (8.37), согласно которому

$$\dot{p}_n = p_n = \frac{W - W'}{W + W'}$$

и

$$p = p_n = \frac{1 - \frac{W'}{W}}{1 + \frac{W'}{W}}.$$

Сопоставив последнее соотношение с выражением (8.51), приходим к формуле (8.135).

Расчет широкополосного металлического изолятора производится в следующей последовательности.

1. По заданной длине волны  $\lambda_0$  определяются согласно условию (8.130) длины отрезков  $l_1$  и  $l_2$ .

2. По заданной длине волны  $\lambda_{\max}$  определяется относительная длина шлейфа  $\frac{l_2}{\lambda_{\max}}$ .

3. На диаграмме проводимостей (рис. 8.47) по отметке

$$\frac{l}{\lambda_{\max}} = 0,25 + \frac{l_2}{\lambda_{\max}}$$

определяется входная проводимость  $b_{\text{ш}}$  шлейфа  $l_2$ .

4. Согласно условию (8.131) на диаграмме определяется  $b$ -дуга, соответствующая значению  $b = -\frac{b_{\text{ш}}}{2}$ .

5. На диаграмме проводится радиус, проходящий через отметку

$$\frac{l_1}{2\lambda_{\max}} = \frac{l_2}{\lambda_{\max}}.$$

6. По КБВ-окружности, проходящей через точку  $a$  пересечения отложенного радиуса с дугой  $b$ , определяется значение коэффициента бегущей волны  $k_6$ .

7. По формуле (8.135) определяется волновое сопротивление  $W'$ .

Аналогично производится расчет изоляторов по заданной длине волны  $\lambda_{\min}$ . При этом получается то же самое расчетное значение  $W'$ , поскольку частоты  $f_{\max}$  и  $f_{\min}$  расположены симметрично относительно частоты  $f_0$ .

#### 4. Резонансные двухполюсники

Выше было показано, что волновой двухполюсник в режиме стоячих волн является многорезонансной системой.

Этот вывод сохраняется и при наличии потерь в двухполюснике. Рассмотрим сопротивление такого двухполюсника в области малых расстроек около последовательного и параллельного резонансов.

С этой целью, учитывая формулу (5.10), произведем следующие преобразования:

$$\cos \beta_0 l_0 \Big|_{l_0 = \frac{\lambda_0}{4}} = \cos \frac{\pi}{2} \frac{\lambda_0}{\lambda} = \cos \frac{\pi}{2} \Omega = \cos \left( \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2} \Delta \right) = -\sin \frac{\pi}{2} \Delta,$$

$$\cos \beta_0 l_0 \Big|_{l_0 = \frac{\lambda_0}{2}} = \cos \pi \frac{\lambda_0}{\lambda} = \cos \pi \Omega = \cos (\pi + \pi \Delta) = -\cos \pi \Delta.$$

Отсюда при  $\Delta \ll 1$  находим приближенные значения рассматриваемых функций, приведенные в табл. П.2. Аналогично определяются в области резонанса значения и других тригонометрических функций, приведенные в табл. П.2.

В табл. П.2 указаны также значения  $\alpha l_0$ , выраженные через добротность по формуле (8.88) для четвертьволнового и полуволнового отрезков линии.

Используя данные табл. П.2, формулу (8.128а) для четвертьволнового отрезка короткозамкнутой линии можно представить в виде

$$Z \Big|_{l_0 = \frac{\lambda_0}{4}} = W \frac{\frac{\pi}{4Q} - j \frac{\pi \Delta}{2}}{1 - j \frac{1}{2Q\Delta}} \approx -j \frac{2W}{\pi \Delta} \frac{1}{1 - j \frac{1}{2Q\Delta}},$$

так как  $\Delta \ll 1$  и  $Q \gg 1$ .

Эта формула может быть переписана таким образом:

$$Z \Big|_{l_0 = \frac{\lambda_0}{4}} = \frac{R_0}{1 + j2Q\Delta} = \frac{R_0}{1 + jQv} = \frac{R_0}{1 + j\xi}, \quad (8.136)$$

где

$$R_0 = Q\rho = \frac{4}{\pi} QW. \quad (8.137)$$

В свою очередь

$$\rho = \frac{4}{\pi} W. \quad (8.138)$$

Формулы (8.136) и (5.58) идентичны. Следовательно, волновой двухполюсник в виде четвертьволнового отрезка короткозамкнутой линии эквивалентен параллельному двухполюснику в области резонанса. Особенностью такого резонансного волнового двухполюсника в отличие от параллельного двухполюсника с сосредоточенными параметрами является высокое значение добротности, доходящей в диапазоне СВЧ до тысяч и даже до десятков тысяч единиц.

Указанные двухполюсники остаются эквивалентными и при отсутствии потерь. В этом случае из соотношения (8.115) и табл. П.2 находим

$$\dot{Z} \Big|_{l_0 = \frac{\lambda_0}{4}} = \frac{\rho}{j\nu}, \quad (8.139)$$

где  $\rho$  определяется прежней формулой (8.138).

Для волнового двухполюсника в виде полуволнового отрезка короткозамкнутой линии из выражения (8.128а) и табл. П.2 получаем

$$\dot{Z} \Big|_{l_0 = \frac{\lambda_0}{2}} = W \frac{\frac{\pi}{2Q} + j\pi\Delta}{1 + j\frac{\pi^2}{2Q}\Delta} \approx W \left( \frac{\pi}{2Q} + j\pi\Delta \right),$$

так как  $\frac{\Delta}{Q} \ll 1$ .

Эту формулу можно переписать в следующем виде:

$$\dot{Z} \Big|_{l_0 = \frac{\lambda_0}{2}} = r (1 + jQ\nu) \approx j\rho\nu, \quad (8.140)$$

где

$$r = \frac{\rho}{Q} = \frac{\pi}{2Q} W, \quad (8.141)$$

$$\rho = \frac{\pi}{2} W. \quad (8.142)$$

Последнее приближенное равенство в уравнении (8.140) написано в предположении отсутствия потерь. Сопоставляя формулы (8.140) и (5.40а), (5.13), приходим к выводу, что волновой двухполюсник в виде полуволнового отрезка короткозамкнутой линии эквивалентен последовательному двухполюснику в области резонанса.

Аналогичные выводы можно сделать и в отношении волнового резонансного двухполюсника в виде разомкнутого отрезка линии.

## § 8.4. ЧЕТЫРЕХПОЛЮСНИКИ С РАСПРЕДЕЛЕННЫМИ ПАРАМЕТРАМИ

### 1. Линии связи

Общие методы расчета четырехполосников с распределенными параметрами рассмотрены в § 8.2. Здесь рассматриваются некоторые специфические вопросы, связанные с особенностями применения волновых четырехполосников, имеющих различное целевое назначение.

Одним из таких назначений является использование длинной линии в качестве проводной линии связи. Для линии связи большой протяженности существенное значение имеет затухание волн, которое получается довольно значительным даже при малом коэффициенте затухания (8.62). Поэтому представляет интерес анализ формулы (8.62) для выяснения возможности максимального уменьшения коэффициента затухания.

Коэффициент затухания согласно выражению (8.62) является суммой двух составляющих. Первая составляющая обусловлена потерями в проводах линии и уменьшается с ростом волнового сопротивления. Вторая составляющая обусловлена потерями в изоляции и увеличивается с ростом волнового сопротивления. Такая зависимость составляющих коэффициента затухания от волнового сопротивления является вполне понятной, поскольку с ростом волнового сопротивления ток в проводах линии уменьшается, а напряжение между проводами увеличивается.

График зависимости коэффициента затухания от волнового сопротивления показан на рис. 8.48. Из этого графика видно, что при некотором значении волнового сопротивления  $W = W_{\text{opt}}$  затухание в линии получается минимальным.

Из анализа формулы (8.62) следует, что

$$W_{\text{opt}} = \sqrt{\frac{R_0}{G_0}}, \quad (8.143)$$

$$\alpha_{\text{min}} = \sqrt{R_0 G_0}. \quad (8.144)$$

Из сравнения выражений (8.143) и (8.28) следует, что в линии с минимальным затуханием погонные параметры должны удовлетворять условию

$$\frac{L_0}{C_0} = \frac{R_0}{G_0}. \quad (8.145)$$

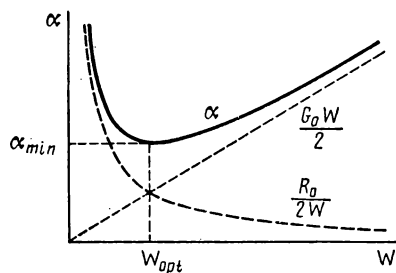


Рис. 8.48. График зависимости коэффициента затухания от волнового сопротивления

Линия, параметры которой удовлетворяют условию (8.145), называется сбалансированной. Обычная линия получается несбалансированной. Как отмечалось выше, практически  $\frac{L_0}{C_0} < \frac{R_0}{G_0}$ . Поэтому для балансировки линий увеличивают погонную индуктивность включением через одинаковые интервалы катушек индуктивности или обмоткой проводов ферромагнитной лентой. Первый способ балансировки линии называется пупинизацией (по имени американского физика М. Пупина, предложившего этот способ в 1900 г.), а второй способ — краупизацией (по имени датского инженера Ц. Краупа, предложившего этот способ в 1902 г.).

Сбалансированная линия примечательна и в том отношении, что для нее, несмотря на наличие потерь, волновое сопротивление определяется соотношением (8.28). Этот вывод следует из выражения (8.68) при соблюдении условия (8.145).

Постоянство волнового сопротивления (8.28), как и в случае линии без потерь, означает, что сбалансированная линия, будучи согласованной, не вносит частотных искажений.

## 2. Трансформаторы сопротивления

При рассмотрении трансформирующих свойств отрезка линии потерями в нем можно пренебречь.

Из формулы (8.90) видно, что при  $l_0 = k \frac{\lambda}{2}$  линия не трансформирует сопротивления ( $\dot{Z} = \dot{Z}_H$ ). При любой другой длине отрезка линии он обладает трансформирующими свойствами. В частности, при  $l_0 = (2k + 1) \frac{\lambda}{4}$ , как видно из выражения (8.90),

$$\dot{Z} = \frac{W^2}{\dot{Z}_H} \quad (8.146)$$

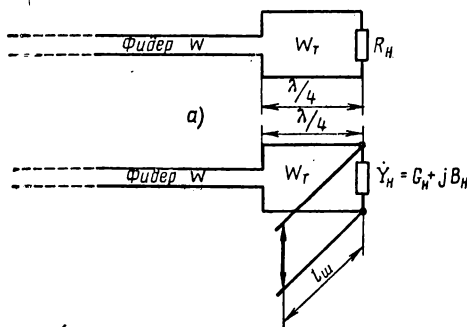
или

$$\dot{Z} = R = \frac{W^2}{R_H}, \quad (8.146a)$$

если нагрузка имеет активное сопротивление  $\dot{Z}_H = R_H$ .

Свойство (8.146a) обусловило применение чет-

Рис. 8.49. Четвертьволновый согласующий трансформатор



вертьволнового отрезка линии в качестве согласующего устройства на выходе фидера (рис. 8.49).

Из условия согласования (8.55), согласно которому  $R_{вх} = R = W$ , и соотношения (8.146a) находим волновое сопротивление

ние четвертьволнового согласующего трансформатора (рис. 8.49, а):

$$W_T = \sqrt{WR_n}. \quad (8.147)$$

Четвертьволновый согласующий трансформатор позволяет согласовывать фидер только с активным нагрузочным сопротивлением. В случае комплексного нагрузочного сопротивления может быть использован дополнительно реактивный шлейф (рис. 8.49, б), компенсирующий реактивную составляющую проводимости нагрузки. В этом случае четвертьволновый согласующий трансформатор преобразует к волновому сопротивлению оставшуюся активную составляющую проводимости нагрузки. При этом формула (8.147) должна быть переписана в следующем виде:

$$W_T = \sqrt{\frac{W}{G_n}}. \quad (8.147a)$$

Линия в отличие от идеального трансформатора не только трансформирует величину сопротивления, но и преобразует его характер. В частности, если при произвольной комплексной нагрузке на входе отрезка линии образуется пучность или узел напряжения, то входное сопротивление этого отрезка получается активным по характеру. Это означает, что отрезок линии может быть использован в качестве трансформатора сопротивлений, преобразующего комплексное сопротивление нагрузки в активное сопротивление. Для согласования фидера с комплексной нагрузкой (рис. 8.50) параметры трансформатора  $l_T$  и  $W_T$  подбираются таким образом, чтобы его входное сопротивление было активным и равным волновому сопротивлению фидера. При этом в фидере устанавливаются бегущие волны.

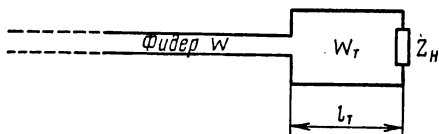


Рис. 8.50. Согласующий трансформатор в виде отрезка линии произвольной длины

Для определения параметров трансформатора подставим в формулу (8.90) значения  $Z = W$ ,  $Z_n = R_n + jX_n$  и приведем полученное выражение к общему знаменателю. Тогда после приведения членов получаем

$$W_T(W - R_n - jX_n) = [WX_n + j(W_T^2 - WR_n)] \operatorname{tg} \beta_0 l_T.$$

Приравнивая здесь вещественные и мнимые части, находим

$$\begin{aligned} \frac{W_T}{\operatorname{tg} \beta_0 l_T} &= \frac{WX_n}{W - R_n}, \\ \frac{W_T}{\operatorname{tg} \beta_0 l_T} &= \frac{WR_n - W_T^2}{X_n}. \end{aligned}$$

Решая совместно эти уравнения, определяем параметры согласующего трансформатора:

$$W_T = \sqrt{W \left( R_H + \frac{X_H^2}{R_H - W} \right)},$$

$$\operatorname{tg} \beta_0 l_T = \frac{W - R_H}{W X_H} W_T.$$

Ввиду трудности регулировки такое согласующее устройство применяется редко, несмотря на свою простоту.

### 3. Измерительные шлейфы

В четвертьволновом реактивном шлейфе можно применить в качестве короткозамыкающей перемычки измерительный прибор (амперметр) с сопротивлением  $Z_H = 0$ . Такое устройство может быть использовано как измерительный шлейф для определения напряжения в фидере (рис. 8.51, а).

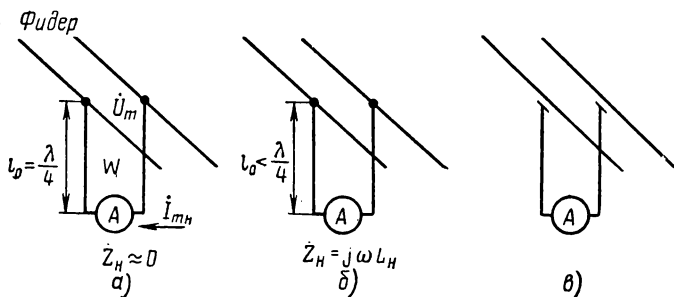


Рис. 8.51. Измерительные шлейфы

Входное сопротивление измерительного шлейфа в идеальном случае равно бесконечности. Поэтому, как и металлический изолятор, измерительный шлейф практически не нарушает волновой режим в фидере. Таким образом, перемещая измерительный шлейф, можно измерять напряжение  $\dot{U}_m$  в различных сечениях фидера.

Возможность такого измерения основана на пропорциональности тока  $\dot{I}_{mn}$  измерительного прибора и напряжения  $\dot{U}_m$  на входе измерительного шлейфа. Действительно, из первого равенства (8.75) при  $\dot{U}_{mn} = 0$  и  $\beta_0 l_0 = \frac{\pi}{2}$  получаем

$$\dot{U}_m = jW \dot{I}_{mn},$$

откуда

$$I_{mn} = \frac{U_m}{W}. \quad (8.148)$$

Таким образом, используемый в качестве измерительного прибора амперметр может быть проградуирован в единицах напряжения.

Практически сопротивление амперметра бывает отличным от нуля и может быть принято чисто индуктивным:  $\dot{Z}_н = j\omega L_н$ . В этом случае в соответствии с рис. 8.39 измерительный шлейф должен быть укорочен, как показано на рис. 8.51, б. При этом согласно первому равенству (8.75) вместо соотношения (8.148) получается формула

$$I_{мн} = \frac{U_m}{|\dot{Z}|}, \quad (8.149)$$

где

$$\dot{Z} = \dot{Z}_н \cos \beta_0 l_0 + jW \sin \beta_0 l_0. \quad (8.150)$$

В этом случае градуировка измерительного прибора усложняется.

Если сопротивление амперметра является комплексным и имеет индуктивный характер, то измерительный шлейф должен быть укорочен, как и в предыдущем случае. При этом остаются в силе соотношения (8.149), (8.150).

Измерительный шлейф не нарушает волнового режима фидера только в идеальном случае и при тщательной настройке. Реальный измерительный шлейф оказывает влияние на волновой режим фидера. Для ослабления этого влияния измерительный шлейф часто делают без непосредственного соприкосновения с фидером, с некоторым зазором, как показано на рис. 8.51, в. При этом связь измерительного шлейфа с фидером осуществляется через емкость зазоров.

#### 4. Резонансные четырехполюсники

Отрезки длинной линии, используемые в качестве четырехполюсников, при длине  $l_0 = k \frac{\lambda_0}{4}$  обладают резонансными свойствами, как и резонансные двухполюсники. Чтобы в резонансных четырехполюсниках могли достаточно резко проявиться резонансные явления, в них должен установиться волновой режим, близкий к режиму стоячих волн. Это означает, что нагрузочное сопротивление в таких четырехполюсниках (рис. 8.52) должно удовлетворять одному из условий:

$$R_н \gg W, \quad (8.151)$$

$$R_н \ll W. \quad (8.152)$$

Подобно тому, как в последовательном и параллельном контурах предъявляются определенные требования к внутреннему сопроти-



влению источника, в резонансном волновом четырехполюснике источник должен удовлетворять одному из условий:

$$R_i \geq W, \quad (8.153)$$

$$R_i \leq W. \quad (8.154)$$

Условия (8.151) — (8.154) должны сочетаться между собой различным образом в зависимости от длины отрезка линии. Если  $l_0 = k \frac{\lambda_0}{2}$ , то на концах резонансного отрезка линии должны быть одновременно или пучности, или узлы напряжения. Следовательно, в этом случае должны одновременно соблюдаться одноименные условия (8.151), (8.153) или (8.152), (8.154). Если же при указанной длине линии одновременно будут соблюдаться разноименные условия (8.151), (8.154) или (8.152), (8.153), то резонансные явления не смогут проявиться. Волновой элемент при таких граничных условиях будет вести себя не как резонансный четырехполюсник, а как сильно расстроенный элемент.

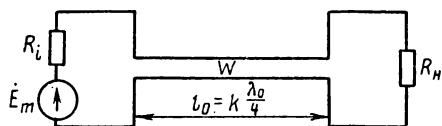


Рис. 8.52. Резонансный волновой четырехполюсник

Если  $l_0 = (2k + 1) \frac{\lambda_0}{4}$ , то

на одном из концов резонансного отрезка линии должна быть пучность, а на другом — узел напряжения. При этом одновременно должны выполняться граничные условия (8.151), (8.154) или (8.152), (8.153). В противном случае волновой четырехполюсник будет сильно расстроенным элементом.

Количественная интерпретация описанного явления приводится в следующей главе.

В заключение следует рассмотреть цепочечные матрицы резонансных четырехполюсников.

Используя данные табл. П.2, из выражения (8.77а) находим

$$[a]_{l_0 = \frac{\lambda_0}{4}} = \begin{bmatrix} -\frac{\pi}{4} v & jW \\ j \frac{1}{W} & -\frac{\pi}{4} v \end{bmatrix}, \quad (8.155)$$

$$[a]_{l_0 = \frac{\lambda_0}{2}} = - \begin{bmatrix} 1 & j \frac{\pi}{2} W v \\ j \frac{\pi}{2 W} v & 1 \end{bmatrix}. \quad (8.156)$$

Эти выражения используются при анализе селективных систем с распределенными параметрами.

В более общем случае матрицы (8.155) и (8.156) принимают следующий вид:

$$[a]_{l_0=(2k+1)\frac{\lambda_0}{4}} = (-1)^k \begin{bmatrix} -\frac{n\pi}{4} \mathbf{v} & jW \\ j\frac{1}{W} & -\frac{n\pi}{4} \mathbf{v} \end{bmatrix}, \quad (8.155a)$$

$$[a]_{l_0=n\frac{\lambda_0}{2}} = (-1)^n \begin{bmatrix} 1 & j\frac{n\pi}{2} W \mathbf{v} \\ j\frac{n\pi}{2W} \mathbf{v} & 1 \end{bmatrix}. \quad (8.156a)$$

В выражении (8.155a)  $n = 2k + 1$  и  $k = 0, 1, 2, \dots$ , а в выражении (8.156a)  $n = 1, 2, 3, \dots$ .

# Г Л А В А 9

## СЕЛЕКТИВНЫЕ ЦЕПИ

### § 9.1. ОБЩИЕ СВЕДЕНИЯ О ФИЛЬТРАХ

#### 1. Типы селективных систем

Как отмечалось, селекция сигналов может быть основана на любом различии между сигналом и помехой. Обработку сигналов с целью их отделения от помех можно производить при помощи разнообразных устройств вплоть до электронных цифровых вычислительных машин (ЭЦВМ). Используя, в частности, различие в частотах сигнала и помехи, можно разработать, например, такую схему селекции. С помощью ЭЦВМ определяется (вычисляется) полный спектр принятых колебаний. Зная заранее интервал частот, в котором должен располагаться спектр полезного сигнала, можно так запрограммировать ЭЦВМ, что на ее выход будут поступать данные только о спектральных составляющих, расположенных в указанном частотном интервале. По этим данным можно синтезировать полезный сигнал, подобно тому как это делается в современных электромузыкальных инструментах. Таким образом, ЭЦВМ может выполнять функции селективного устройства.

Упомянутая здесь частотная селекция, основанная на различии частот сигнала и помехи, является основным видом селекции, который наиболее широко используется в современных устройствах связи, автоматики и в другой аппаратуре. Фильтрам, осуществляющим частотную селекцию, и посвящена настоящая глава. Однако здесь рассматриваются лишь линейные частотные фильтры, принцип действия которых основан на использовании свойств линейных элементов.

В качестве фильтров наиболее широко применяются цепи, содержащие  $LC$ -контуры. Благодаря резонансным явлениям в таких цепях могут быть выделены колебания, находящиеся в полосе пропускания. Примерами указанных фильтров являются одиночный и связанные контуры, описанные в гл. 7. Селективность связанных контуров рассматривается в § 9.2.

Одиночные и связанные контуры часто используются в усилителях в качестве нагрузки лампы или транзистора. Такие усилители, называемые резонансными, обладают, естественно, избира-

тельными свойствами. Селективность резонансных усилителей рассматривается в § 9.3.

Одиночные и связанные контуры являются частным случаем фильтров, селективные свойства которых основаны на использовании реактивных элементов. В общем случае фильтр может включать в себя произвольные реактивные двухполюсники, сопротивление которых является функцией частоты. Из таких реактивных двухполюсников составляются элементарные четырехполюсники (см. рис. 6.7), которые, соединяясь между собой в различных сочетаниях, образуют сколь угодно сложные фильтры.

В простейшем случае применяется цепочечное соединение элементарных реактивных четырехполюсников. При этом образуются цепочечные фильтры (см. § 9.4). Действие цепочечных фильтров основано на следующих предпосылках.

При использовании реактивных элементов в последовательном четырехполюснике (см. рис. 6.7, *а*) обеспечивается хорошее прохождение сигнала на тех частотах, на которых сопротивление  $Z$  мало. При больших же значениях сопротивления  $Z$  колебания, проходящие через последовательный четырехполюсник, ослабляются.

В параллельном четырехполюснике (см. рис. 6.7, *б*) сопротивление  $Z$  оказывает шунтирующее действие, тем более сильное, чем меньше величина  $Z$ . Поэтому параллельный четырехполюсник при использовании в нем реактивных элементов оказывает различное шунтирующее действие на разных частотах. При этом ослабляются колебания с теми частотами, на которых сопротивление  $Z$  мало.

При цепочечном соединении элементарных четырехполюсников в фильтре имеется только один канал, по которому сигнал проходит со входа на выход. Если же в фильтре использовать параллельное соединение реактивных четырехполюсников (см. рис. 6.4), то сигнал будет проходить со входа на выход по двум каналам. При этом параллельно соединяемые четырехполюсники могут иметь произвольную схему, т. е. могут образовываться путем комбинации элементарных четырехполюсников. Фильтры с параллельным включением реактивных четырехполюсников, называемые мостовыми фильтрами, рассматриваются в § 9.5.

Принципиальной особенностью мостовых фильтров является то, что на некоторой частоте два сигнала, проходящие по различным каналам, могут поступать на выход в противофазе, но с одинаковой амплитудой. При этом происходит взаимная компенсация сигналов, т. е. в мостовом фильтре производится абсолютное подавление колебаний, что невозможно в цепочечных фильтрах при наличии потерь.

В цепочечных и мостовых фильтрах могут применяться реактивные элементы одного знака — только индуктивности или только емкости. При этом селекция сигналов основывается, по-прежнему, на частотной зависимости сопротивления реактивных элементов. Однако для формирования необходимых частотных характеристик такие фильтры должны содержать, помимо реак-

тивностей, также резисторы. Обычно при подобном построении фильтра отказываются от применения индуктивностей, которые являются более габаритными и дорогими и менее стабильными элементами по сравнению с емкостями. Безындуктивные, или  $RC$ -фильтры, рассматриваются в § 9.6.

Вместо реактивных элементов с сосредоточенными параметрами в фильтрах могут использоваться волновые двухполюсники и четырехполюсники, свойства которых также зависят от частоты. Фильтры с распределенными параметрами описываются в § 9.7.

Селекцию электрических сигналов можно осуществлять, преобразовав их предварительно в механические колебания (например, с помощью пьезоэлектрического преобразователя). При этом производится фильтрация не электрических, а механических колебаний. Построенные по такому принципу фильтры называются электро-механическими (см. § 9.8).

Рассмотренные здесь типы пассивных фильтров строятся по принципу цепочечного и параллельного соединений четырехполюсников. Другие возможные способы соединения четырехполюсников обычно не используются, так как они не привносят ничего существенно нового в свойства пассивного фильтра.

Однако при использовании в фильтре активных необратимых элементов (ламп и транзисторов), кроме цепочечного соединения (как в резонансных усилителях), могут применяться параллельное, последовательное и другие типы соединений четырехполюсников. В таких фильтрах создаются условия, при которых сигнал может проходить по одному (или нескольким) из четырехполюсников только (или преимущественно) в направлении от выхода к входу схемы. Указанные фильтры называются фильтрами с обратными связями, или активными фильтрами\*. Фильтры с обратными связями рассматриваются в § 9.6 на примере активного  $RC$ -фильтра, в котором применяется последовательно-параллельное соединение активного и пассивного четырехполюсников.

Фильтры классифицируют не только по принципу действия и виду схемы, но также по типу характеристик. Основным признаком, по которому различают шесть разновидностей фильтров, является расположение полосы (полос) пропускания. Граничные частоты  $f_{г1} = 0$ ,  $f_{г2} = f_g$  (рис. 9.1, а) имеет фильтр нижних частот (ФНЧ), частоты  $f_{г1} = f_g$ ,  $f_{г2} = \infty$  (рис. 9.1, б) — фильтр верхних частот (ФВЧ), частоты  $0 < f_{г1} < f_{г2} < \infty$  (рис. 9.1, в) — полосовой фильтр (ПФ). Режекторный, или заградительный фильтр (РФ, ЗФ) имеет вместо полосы пропускания полосу режекции с граничными частотами  $0 < f_{г1} < f_{г2} < \infty$ , которые определяются на заданном минимальном уровне  $A_{\min}$  (рис. 9.1, г).

---

\* Резонансные усилители, в которых отсутствуют обратные связи, обычно не относят к разряду активных фильтров, хотя в них и есть активный элемент (лампа).

Наконец, у гребенчатых фильтров (ГФ) имеется дискретный ряд одинаковых полос пропускания или полос режекции. При этом различают полосовые гребенчатые фильтры (ПГФ) с кратными

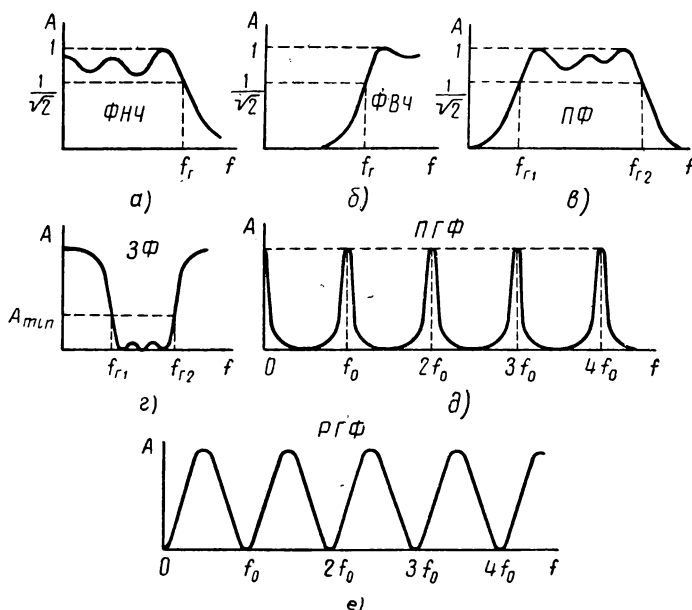


Рис. 9.1. Классификация фильтров по типу частотной характеристики

средними частотами полос пропускания (рис. 9.1, б) и заградительные, или режекторные гребенчатые фильтры (ЗГФ, РГФ) с кратными средними частотами полос режекции (рис. 9.1, в). Гребенчатые частотные характеристики, используемые при приеме радиолокационных и других импульсных сигналов, формируются несколько специфичным образом. Поэтому гребенчатые фильтры рассматриваются в § 9.9 отдельно от остальных типов фильтров.

## 2. Рабочие меры передачи фильтров

О селективных свойствах фильтра можно судить по виду его частотной характеристики  $A(f)$ . Вместо этой характеристики можно рассматривать также частотные характеристики ослабления  $S(f)$  или частотные характеристики затухания  $a(f)$ .

Однако указанные характеристики не всегда дают достаточно полное представление о прохождении колебаний через фильтр,

поскольку при использовании параметров  $A$ ,  $S$ ,  $a$  (*нен*) производится сравнение колебаний по напряжению, а не по мощности. Даже в том случае, когда затухание измеряется в беллах или децибеллах, т. е. производится сравнение не напряжений, а квадратов напряжений, как в формулах (6.90) и (6.90а), полного представления об изменении мощности колебаний не получается. Действительно, согласно формулам (2.67б), (2.71а) активная и полная (кажущаяся) мощности определяются не только квадратами напряжений, но также проводимостями нагрузки. Поэтому для получения

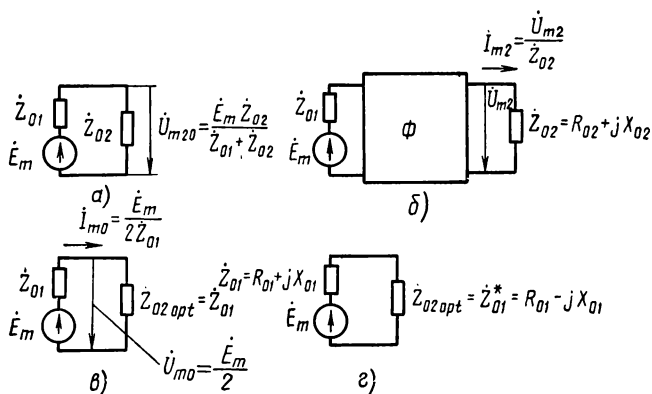


Рис. 9.2. Включение источника на различные нагрузочные сопротивления (к определению рабочих мер передачи)

полного представления об изменении мощности колебаний при их прохождении через фильтр вводится понятие рабочих мер передачи. При этом производится сравнение колебаний непосредственно по мощности с учетом реальных нагрузочных сопротивлений на входе и выходе фильтра.

Существуют различные рабочие меры передачи. В простейшем случае для оценки влияния фильтра на прохождение колебаний можно сравнивать полные мощности  $P_{20}$  и  $P_2$  в схемах, изображенных на рис. 9.2, а и б.

Здесь

$$P_{20} = \frac{E_m^2 Z_{02}}{2 |\dot{Z}_{01} + \dot{Z}_{02}|^2} \quad (9.1)$$

— полная мощность в нагрузочном сопротивлении  $\dot{Z}_{02}$ , подключенном непосредственно к источнику, т. е. мощность в нагрузке до включения фильтра (см. рис. 9.2, а);

$$P_2 = \frac{U_{m2}^2}{2Z_{02}} \quad (9.2)$$

— полная мощность в нагрузочном сопротивлении  $\dot{Z}_{02}$  после включения фильтра  $\Phi$  между источником и нагрузкой (см. рис. 9.2, б).

Таким образом, полное представление об ослаблении мощности колебаний при включении фильтра дает параметр

$$S_{\text{вн}} = e^{a_{\text{вн}}} = \sqrt{\frac{P_{20}}{P_2}}, \quad (9.3)$$

который называется вносимым ослаблением. Отсюда по аналогии с параметрами (6.87), (6.90а) получаем вносимое затухание  $a_{\text{вн}}$  в неперах и децибелах:

$$a_{\text{вн}} (\text{нп}) = \ln S_{\text{вн}} = \frac{1}{2} \ln \frac{P_{20}}{P_2} = \ln \frac{1}{K} + \ln \frac{Z_{02}}{|\dot{Z}_{01} + \dot{Z}_{02}|}, \quad (9.4)$$

$$a_{\text{вн}} (\text{дб}) = 10 \lg S_{\text{вн}}^2 = 10 \lg \frac{P_{20}}{P_2} = 20 \lg \frac{1}{K} + 20 \lg \frac{Z_{02}}{|\dot{Z}_{01} + \dot{Z}_{02}|}. \quad (9.4a)$$

Последние равенства в формулах (9.4), (9.4a) написаны с учетом соотношений (9.1), (9.2) и (6.69).

Как известно, мощность, отдаваемая источником в нагрузку, может быть увеличена при соответствующем выборе нагрузочного сопротивления. Если выполняется условие согласования (2.96а), то согласно формуле (2.97а) источник отдает в нагрузку максимальную полную мощность. При этом в схеме, изображенной на рис. 9.2, в, максимальная полная мощность получается равной

$$P_{2\text{max}} = \frac{E_m^2}{8Z_{01}}. \quad (9.5)$$

При сравнении фактической мощности в нагрузке (9.2) не с мощностью (9.1), а с мощностью (9.5) можно учесть не только ослабляющее действие фильтра, но и уменьшение мощности в нагрузочном сопротивлении  $\dot{Z}_{02}$  (см. рис. 9.2, б) за счет его рассогласования с внутренним сопротивлением  $\dot{Z}_{01}$ . Для такого сравнения вводятся параметры

$$S_p = e^{a_p} = \sqrt{\frac{P_{2\text{max}}}{P_2}} = \frac{1}{2K} \sqrt{\frac{Z_{02}}{Z_{01}}} \quad (9.6)$$

и

$$a_p (\text{нп}) = \ln S_p = \frac{1}{2} \ln \frac{P_{2\text{max}}}{P_2} = \ln \frac{1}{2K} + \frac{1}{2} \ln \frac{Z_{02}}{Z_{01}}, \quad (9.7)$$

$$a_p (\text{дб}) = 10 \lg S_p^2 = 10 \lg \frac{P_{2\text{max}}}{P_2} = 20 \lg \frac{1}{2K} + 10 \lg \frac{Z_{02}}{Z_{01}}, \quad (9.7a)$$

называемые соответственно рабочим ослаблением и рабочим затуханием (в неперах и децибелах).

Последние равенства в формулах (9.7), (9.7a) написаны с учетом соотношений (9.5), (9.2) и (6.69).



Согласно смыслу рабочего и вносимого затуханий величина

$$a_n = a_p - a_{вн} \quad (9.8)$$

характеризует уменьшение полной мощности в нагрузочном сопротивлении  $\dot{Z}_{02}$  за счет его рассогласования с внутренним сопротивлением  $\dot{Z}_{01}$ . Эта величина называется затуханием несогласованности, или затуханием рассогласования.

Подставив соотношения (9.4); (9.7) в определение (9.8), получаем расчетную формулу для затухания несогласованности:

$$a_n = \ln \frac{|\dot{Z}_{01} + \dot{Z}_{02}|}{2 \sqrt{\dot{Z}_{01} \dot{Z}_{02}}} = \ln \frac{1}{2} \left| \frac{\dot{Z}_{01} + \dot{Z}_{02}}{\sqrt{\dot{Z}_{01} \dot{Z}_{02}}} \right|,$$

или

$$a_n (nep) = \ln \frac{1}{2} \left| \sqrt{\frac{\dot{Z}_{01}}{\dot{Z}_{02}}} + \sqrt{\frac{\dot{Z}_{02}}{\dot{Z}_{01}}} \right|. \quad (9.8a)$$

Как видно из формулы (9.8a) при  $\dot{Z}_{01} = \dot{Z}_{02}$  затухание рассогласования равно нулю, что соответствует смыслу этого параметра. При этом в соответствии с определением (9.8) рабочее затухание равно вносимому затуханию и формулы (9.4), (9.4a), (9.7), (9.7a) упрощаются:

$$a_p (nep) = a_{вн} (nep) = \ln \frac{1}{2K}, \quad (9.9)$$

$$a_p (\partial \delta) = a_{вн} (\partial \delta) = 20 \lg \frac{1}{2K}. \quad (9.9a)$$

Если на некоторой частоте фильтр беспрепятственно пропускает колебания, то схема, изображенная на рис. 9.2, б, переходит в схему непосредственного включения нагрузки (см. рис. 9.2, а). В случае  $\dot{Z}_{02} = \dot{Z}_{02opt} = \dot{Z}_{01}$ , как на рис. 9.2, в, получается  $K = K_{max} = \frac{1}{2}$ .

Таким образом, формулы (9.9), (9.9a) и (6.87), (6.90a) совпадают. Следовательно, при согласовании по критерию (2.96a), когда  $\dot{Z}_{01} = \dot{Z}_{02}$ , рабочее и вносимое затухания (9.9), (9.9a) и затухание четырехполюсника (6.87), (6.90a) становятся тождественными.

При определении рабочих мер передачи сравниваются иногда не полные, а активные мощности  $P_{a2}$  и  $P_{a2max max}$ . Здесь

$$P_{a2} = \frac{1}{2} R_{02} I_{m2}^2 \quad (9.10)$$

— активная мощность на выходе фильтра (см. рис. 9.2, б);

$$P_{a2max max} = \frac{E_m^2}{8R_{01}} \quad (9.11)$$

— активная мощность maximum maximum [см. формулу (2.93)], которая выделяется в нагрузке  $\dot{Z}_{02opt}$ , согласованной с источником по критерию (2.94), как это показано на рис. 9.2, г.

По аналогии с рабочим ослаблением (9.6) и рабочим затуханием (9.7) через мощности (9.10), (9.11) определяются действующее ослабление и действующее затухание:

$$S_{\partial} = e^{a_{\partial}} = \sqrt{\frac{P_{a \max \max}}{P_{a2}}} = \frac{1}{2K} \frac{Z_{02}}{\sqrt{R_{01} R_{02}}}, \quad (9.12)$$

$$a_{\partial} = \ln S_{\partial} = \frac{1}{2} \ln \frac{P_{a \max \max}}{P_{a2}} = \ln \frac{1}{2K} + \frac{1}{2} \ln \frac{Z_{02}^2}{R_{01} R_{02}}. \quad (9.13)$$

Согласно формулам (9.12), (9.13) и (9.6), (9.7) между действующими и рабочими ослаблениями и затуханиями существует следующая связь:

$$S_{\partial} = S_p \sqrt{\frac{Z_{01}}{R_{01}} \cdot \frac{Z_{02}}{R_{02}}}, \quad (9.14)$$

$$a_{\partial} = a_p + \frac{1}{2} \ln \frac{Z_{01}}{R_{01}} \cdot \frac{Z_{02}}{R_{02}}. \quad (9.15)$$

Отсюда следует, что при активных нагрузочных сопротивлениях, когда  $Z_{01} = Z_{01} = R_{01}$  и  $Z_{02} = Z_{02} = R_{02}$ , действующие и рабочие ослабления и затухания становятся соответственно равными друг другу.

Частотные характеристики ослабления  $S_{\text{вн}}(f)$ ,  $S_p(f)$ ,  $S_{\partial}(f)$  или частотные характеристики затухания  $a_{\text{вн}}(f)$ ,  $a_p(f)$ ,  $a_{\partial}(f)$  дают достаточно полное представление о селективных свойствах фильтров путем сравнения мощности сигналов и помех на разных частотах. Однако рассмотренные рабочие меры передачи в отличие от комплексного коэффициента передачи (6.75) или (6.76) не позволяют судить об изменении фазы колебаний в фильтре.

Чтобы можно было производить сравнение и фаз колебаний, следует сравнивать не полные мощности (9.2), (9.5), а соответствующие им комплексные мощности  $\dot{P}_2$  и  $\dot{P}_0$ . Здесь

$$\dot{P}_2 = \frac{1}{2} \dot{U}_{m2} \dot{I}_{m2}^* \quad (9.16)$$

— комплексная мощность на выходе фильтра (см. рис. 9.2, б);

$$\dot{P}_0 = \frac{1}{2} \dot{U}_{m0} \dot{I}_{m0}^* \quad (9.17)$$

— комплексная мощность в согласованной по критерию (2.96а) нагрузке (см. рис. 9.2, в).

Однако при сравнении мощностей (9.16), (9.17) приходится оперировать комплексно сопряженными токами ( $\dot{I}_{m2}^*$ ,  $\dot{I}_{m0}^*$ ), что практически неудобно. Поэтому обычно пользуются понятием рабочей передаточной функции

$$\dot{S}_p = \sqrt{\frac{\dot{U}_{m0} \dot{I}_{m0}}{\dot{U}_{m2} \dot{I}_{m2}}}, \quad (9.18)$$

которая определяется через комплексные амплитуды токов  $\dot{I}_{m0}$ ,  $\dot{I}_{m2}$ , а не через их комплексно сопряженные величины.

Нетрудно видеть, что модуль рабочей передаточной функции (9.18) равен рабочему ослаблению (9.6). Поэтому выражение (9.18) можно представить в следующем виде:

$$\dot{S}_p = S_p e^{jb_p} = e^{a_p + jb_p} = e^{\dot{g}_p}, \quad (9.19)$$

где

$$b_p = \arg \dot{S}_p = \frac{1}{2} \left( \arg \frac{\dot{U}_{m0} \dot{I}_{m0}}{\dot{U}_{m2} \dot{I}_{m2}} + 2k\pi \right)^* \quad (9.20)$$

— аргумент рабочей передаточной функции, называемой рабочей фазой фильтра;

$$\dot{g}_p = a_p + jb_p = \ln \dot{S}_p \quad (9.21)$$

— рабочий коэффициент передачи фильтра.

Подставив в определение (9.18) значения напряжения  $\dot{U}_{m0}$  и токов  $\dot{I}_{m0}$ ,  $\dot{I}_{m2}$  (в соответствии с рис. 9.2, б и в), а также учитывая обозначение (6.68), находим:

$$\dot{S}_p = \frac{1}{2K} \sqrt{\frac{\dot{Z}_{02}}{\dot{Z}_{01}}}. \quad (9.22)$$

Согласно формуле (6.71) рабочая передаточная функция (9.22) может быть выражена через матричные коэффициенты фильтра-четырёхполюсника:

$$\dot{S}_p = \frac{1}{2} \left( a_{11} \sqrt{\frac{\dot{Z}_{02}}{\dot{Z}_{01}}} + \frac{a_{12}}{\sqrt{\dot{Z}_{01} \dot{Z}_{02}}} + a_{21} \sqrt{\dot{Z}_{01} \dot{Z}_{02}} + a_{22} \sqrt{\frac{\dot{Z}_{01}}{\dot{Z}_{02}}} \right). \quad (9.23)$$

Отсюда на основании выражений (9.19), (9.20) и (9.7), (9.7а) находим:

$$S_p = |\dot{S}_p| = \frac{1}{2} \left| a_{11} \sqrt{\frac{\dot{Z}_{02}}{\dot{Z}_{01}}} + \frac{a_{12}}{\sqrt{\dot{Z}_{01} \dot{Z}_{02}}} + a_{21} \sqrt{\dot{Z}_{01} \dot{Z}_{02}} + a_{22} \sqrt{\frac{\dot{Z}_{01}}{\dot{Z}_{02}}} \right|, \quad (9.24)$$

$$b_p = \arg \dot{S}_p = \arg \left( a_{11} \sqrt{\frac{\dot{Z}_{02}}{\dot{Z}_{01}}} + \frac{a_{12}}{\sqrt{\dot{Z}_{01} \dot{Z}_{02}}} + a_{21} \sqrt{\dot{Z}_{01} \dot{Z}_{02}} + a_{22} \sqrt{\frac{\dot{Z}_{01}}{\dot{Z}_{02}}} \right), \quad (9.25)$$

$$a_p (\text{неп}) = \ln \frac{1}{2} \left| a_{11} \sqrt{\frac{\dot{Z}_{02}}{\dot{Z}_{01}}} + \frac{a_{12}}{\sqrt{\dot{Z}_{01} \dot{Z}_{02}}} + a_{21} \sqrt{\dot{Z}_{01} \dot{Z}_{02}} + a_{22} \sqrt{\frac{\dot{Z}_{01}}{\dot{Z}_{02}}} \right|, \quad (9.26)$$

---

\* Здесь  $k = 0$  или  $k = 1$ .

$$a_p(\partial\delta) = 20 \lg \frac{1}{2} \left| a_{11} \sqrt{\frac{\dot{Z}_{02}}{\dot{Z}_{01}}} + \frac{a_{12}}{\sqrt{\dot{Z}_{01} \dot{Z}_{02}}} + a_{21} \sqrt{\dot{Z}_{01} \dot{Z}_{02}} + a_{22} \sqrt{\frac{\dot{Z}_{01}}{\dot{Z}_{02}}} \right|. \quad (9.26a)$$

При  $\dot{Z}_{01} = \dot{Z}_{02} = \dot{Z}_0$  и  $\dot{Z}_{01} = \dot{Z}_{02} = R_0$  эти формулы упрощаются.

### 3. Параметры фильтров

При практической оценке качеств фильтра желательно пользоваться параметрами, которые позволяли бы легко сравнивать между собой различные фильтры. Одним из таких параметров является полоса пропускания  $\Delta F$ , по которой можно судить о сигналах, выделяемых (пропускаемых) фильтром. Полоса пропускания полосового фильтра, отсчитываемая на уровне  $\Delta a_0 = a_{pr} - a_{p \min} = 3 \text{ дБ}$

( $\frac{S_{pr}}{S_{p \min}} = \sqrt{2}$ ), показана на рис. 9.3.

В общем случае характеристики фильтров изменяются не-монотонно в полосе пропускания, как и показано на рис. 9.3.

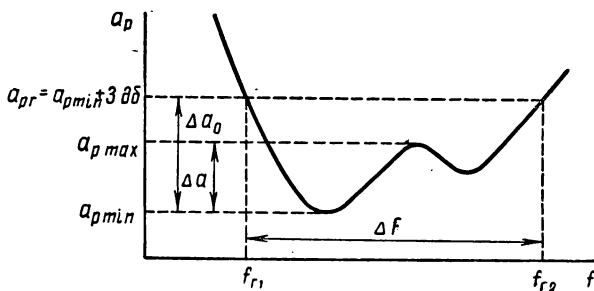


Рис. 9.3. Параметры фильтра, характеризующие его полосу пропускания

При этом вводится также понятие неравномерности рабочего затухания в полосе пропускания  $\Delta a = a_{p \max} - a_{p \min}$ , где  $a_{p \max}$  — максимальное пиковое рабочее затухание в полосе пропускания,  $a_{p \min}$  — минимальное рабочее затухание в полосе пропускания. Часто фильтр конструируется таким образом, чтобы неравномерность рабочего затухания в полосе пропускания равнялась уровню отсчета полосы пропускания:  $\Delta a = \Delta a_0 = 3 \text{ дБ}$  (или  $\Delta a = \Delta a_0 = 6 \text{ дБ}$  при  $\frac{S_{pr}}{S_{p \min}} = 2$ ).

Наконец, для оценки свойств фильтра задается величина  $a_{p \min}$ . В тех случаях, когда это возможно, стремятся получить  $a_{p \min} = 0$ ;

при этом  $\Delta a = a_{p \max}$ . Если рассматриваются характеристики затухания  $a(f)$ , то всегда  $a_{\min} = 0$ , поскольку  $A_{\max} = S_{\min} = 1$ .

Параметры  $\Delta F$ ,  $\Delta a$  и  $a_{p \min}$  характеризуют условия прохождения через фильтр полезного (выделяемого) сигнала. Для оценки селективности (избирательности) фильтра, т. е. степени подавления помех, вводятся дополнительные параметры. Наиболее часто используются два критерия оценки селективности.

По первому критерию степень подавления помехи оценивается величиной затухания  $a_0$  ( $a_{p0}$ ) или ослабления  $S_0$  ( $S_{p0}$ ) при заданной

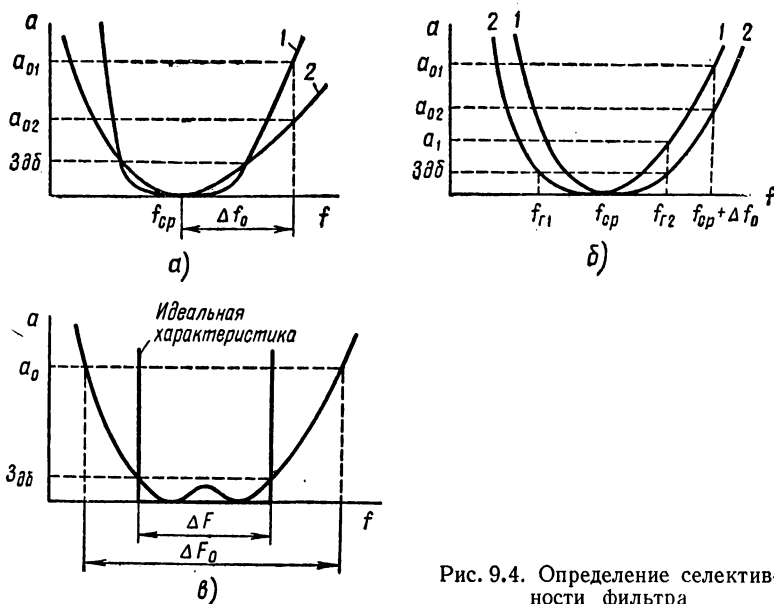


Рис. 9.4. Определение селективности фильтра

расстройке  $\Delta f_0$  (рис. 9.4, а), отсчитываемой от средней частоты полосы пропускания (6.84). По этому критерию можно сравнивать селективность различных фильтров только в том случае, если они имеют одинаковые полосы пропускания, как на рис. 9.4, а, где фильтр с характеристикой 1 имеет лучшую избирательность, чем фильтр с характеристикой 2. Если же фильтры имеют разные полосы пропускания (рис. 9.4, б), то сравнение степени подавления помехи при одинаковой заданной расстройке становится неправомерным. Действительно, в этом случае нет оснований считать характеристику 1 лучше характеристики 2, поскольку первый фильтр подавляет и те колебания, которые находятся в полосе пропускания второго фильтра: например, на частоте  $f_{r2}$  затухание первого фильтра равно  $a_1 > 3$  дБ. Если же в обоих фильтрах сделать одинаковые полосы пропускания, то не исключено, что степень подавления

помехи при заданной расстройке может оказаться выше во втором фильтре.

Для непосредственного сравнения избирательности различных фильтров с произвольными полосами пропускания пользуются другим критерием оценки селективности. При этом используется понятие идеальной прямоугольной частотной характеристики, при которой затухание в полосе пропускания равно нулю, а за ее пределами — бесконечности (рис. 9.4, в).

Согласно второму критерию, о селективности фильтра судят по степени отклонения реальной частотной характеристики от идеальной прямоугольной характеристики. Степень этого отклонения оценивается коэффициентом прямоугольности

$$K_{\Pi \Delta a_0}^{a_0} K_{\Pi S_r}^{S_0} = \frac{\Delta F_0}{\Delta F}, \quad (9.27)$$

где частотный интервал  $\Delta F_0$  измеряется на заданном уровне  $a_0$  (или  $S_0$ ), а полоса пропускания  $\Delta F$  отсчитывается на заданном уровне  $\Delta a_0 = a_r$  (или  $S_r$ ). При этом уровень отсчета полосы пропускания задается стандартным — 3 дБ ( $S_r = \sqrt{2}$ ) или 6 дБ ( $S_r = 2$ ), а уровень затухания  $a_0$  может задаваться различным в зависимости от назначения фильтра. При сравнении селективности различных фильтров выбирается стандартный уровень  $a_0 = 40$  дБ ( $S_0 = 100$ ) или  $a_0 = 60$  дБ ( $S_0 = 1000$ ).

Селективность фильтра получается тем выше, чем меньше его коэффициент прямоугольности. Для идеального фильтра, как видно из рис. 9.4, в,  $K_{\Pi} = 1$  при отсчете полос  $\Delta F$  и  $\Delta F_0$  на любых уровнях. Реальные фильтры всегда имеют  $K_{\Pi} > 1$ .

При рассмотрении характеристик в обобщенных координатах вместо соотношения (9.27) используется следующее определение для коэффициента прямоугольности:

$$K_{\Pi} = \frac{\xi_0}{\xi_r}, \quad (9.27a)$$

где  $\xi_0$  — обобщенная расстройка, соответствующая абсолютной расстройке  $\frac{\Delta F_0}{2}$ ;

$\xi_r$  — обобщенная расстройка, соответствующая граничной частоте  $\left(\Delta f = \frac{\Delta F}{2}\right)$ .

Например, для одиночного контура согласно уравнению (7.7a) заданному ослаблению  $S_0 = \frac{1}{A_0}$  соответствует расстройка

$$\xi_0 = \sqrt{S_0^2 - 1},$$

или

$$\xi_0 \approx S_0,$$

если  $S_0^2 \gg 1$ .

Отсюда, учитывая значение  $\xi_r = 1$ , согласно определению (9.27а) находим коэффициент прямоугольности одиночного контура:

$$K_{\Pi \sqrt{2}}^{S_0} = \sqrt{S_0^2 - 1} \approx S_0. \quad (9.28)$$

Таким образом, для одиночного контура коэффициент прямоугольности на уровне  $S_0 = 100$  равен 100 единицам, что весьма далеко от идеального значения  $K_{\Pi} = 1$ .

#### 4. Характеристические параметры фильтров

Характеристическими параметрами фильтров (как и любых четырехполюсников) называются такие их параметры, которые изменяются при согласовании фильтра на входе и выходе по критерию (2.96а):

$$\begin{aligned} \dot{Z}_{01} &= \dot{Z}_{вх1} = \dot{Z}_{c1}, \\ \dot{Z}_{02} &= \dot{Z}_{вых2} = \dot{Z}_{c2}. \end{aligned} \quad (9.29)$$

Сопротивления  $\dot{Z}_{c1}$  и  $\dot{Z}_{c2}$ , являющиеся входными сопротивлениями четырехполюсника в режиме двустороннего согласования, называются характеристическими сопротивлениями четырехполюсника (фильтра).

Подставив в определения (9.29) значения входных сопротивлений (6.84) при  $\dot{Z}_{02} = \dot{Z}_{c2}$  и (6.55) при  $\dot{Z}_{01} = \dot{Z}_{c1}$ , получим

$$\dot{Z}_{c1} = \frac{a_{11} \dot{Z}_{c2} + a_{12}}{a_{21} \dot{Z}_{c2} + a_{22}},$$

$$\dot{Z}_{c2} = \frac{a_{22} \dot{Z}_{c1} + a_{12}}{a_{21} \dot{Z}_{c1} + a_{11}}.$$

Решив эти уравнения относительно  $\dot{Z}_{c1}$  и  $\dot{Z}_{c2}$ , найдем с учетом формул (6.60) и (6.61):

$$\dot{Z}_{c1} = \sqrt{\frac{a_{11} a_{12}}{a_{21} a_{22}}} = \sqrt{\dot{Z}_{1xx} \dot{Z}_{1кз}}, \quad (9.30)$$

$$\dot{Z}_{c2} = \sqrt{\frac{a_{22} a_{12}}{a_{21} a_{11}}} = \sqrt{\dot{Z}_{2xx} \dot{Z}_{2кз}}. \quad (9.31)$$

Для симметричных четырехполюсников, когда  $a_{11} = a_{22}$ ,

$$\dot{Z}_{c1} = \dot{Z}_{c2} = \dot{Z}_c = \sqrt{\frac{a_{12}}{a_{21}}}. \quad (9.32)$$

Таким образом, характеристические сопротивления целиком определяются матричными коэффициентами четырехполюсника, чем и обусловлено их название. Эти сопротивления могут быть найдены из опытов холостого хода и короткого замыкания четырехполюсника.

Рабочие меры передачи четырехполюсника (фильтра) в режиме двустороннего согласования называются характеристическими мерами передачи. Характеристическая передаточная функция определяется прежним выражением (9.18), в котором напряжения и токи должны вычисляться на согласованных, т. е. характеристических сопротивлениях. Таким образом, справедливы и прочие соотношения для рабочих параметров, которые при  $\dot{Z}_{01} = \dot{Z}_{c1}$  и  $\dot{Z}_{02} = \dot{Z}_{c2}$  обращаются в характеристические параметры.

Подставив в формулу (9.23) значения сопротивлений  $\dot{Z}_{01} = \dot{Z}_{c1}$ ,  $\dot{Z}_{02} = \dot{Z}_{c2}$  и учитывая соотношения (9.30), (9.31), найдем значение характеристической передаточной функции

$$\dot{S}_c = S_c e^{j b_c} = e^{a_c + j b_c} = e^{\dot{g}_c} = \sqrt{a_{11} a_{22}} + \sqrt{a_{12} a_{21}}. \quad (9.33)$$

Здесь

$$S_c = |\dot{S}_c| = e^{a_c} = |\sqrt{a_{11} a_{22}} + \sqrt{a_{12} a_{21}}| \quad (9.34)$$

— характеристическое ослабление фильтра;

$$a_c = \ln S_c = \ln |\sqrt{a_{11} a_{22}} + \sqrt{a_{12} a_{21}}| \quad (9.35)$$

— характеристическое затухание фильтра;

$$b_c = \arg \dot{S}_c = \arg (\sqrt{a_{11} a_{22}} + \sqrt{a_{12} a_{21}}) \quad (9.36)$$

— характеристическая фаза фильтра;

$$\dot{g}_c = a_c + j b_c \quad (9.37)$$

— характеристический коэффициент передачи фильтра.

Чтобы выразить характеристический коэффициент передачи через матричные коэффициенты, из выражения (9.33) найдем

$$e^{-\dot{g}_c} = \frac{1}{\sqrt{a_{11} a_{22}} + \sqrt{a_{12} a_{21}}}. \quad (9.38)$$

Складывая и вычитая равенства (9.33) и (9.38), с учетом свойства (6.42) получим

$$\operatorname{ch} \dot{g}_c = \sqrt{a_{11} a_{22}}, \quad (9.39)$$

$$\operatorname{sh} \dot{g}_c = \sqrt{a_{12} a_{21}}. \quad (9.40)$$

Поскольку характеристические параметры выражаются через матричные коэффициенты, матрица четырехполюсника (фильтра) также может быть выражена через его характеристические параметры. Чтобы найти эту связь, из соотношений (9.30), (9.31) получим

$$\sqrt{\frac{\dot{Z}_{c1}}{\dot{Z}_{c2}}} = \sqrt{\frac{a_{11}}{a_{22}}}, \quad (9.41)$$

$$\sqrt{\dot{Z}_{c1} \dot{Z}_{c2}} = \sqrt{\frac{a_{12}}{a_{21}}}. \quad (9.42)$$



Умножив и разделив друг на друга равенства (9.39) и (9.41), определим матричные коэффициенты  $a_{11}$  и  $a_{22}$ . Аналогично из соотношений (9.40) и (9.42) определяются матричные коэффициенты  $a_{12}$  и  $a_{21}$ . Таким образом, находим цепочечную матрицу фильтра-четырёхполюсника:

$$[a] = \begin{bmatrix} \sqrt{\frac{\dot{Z}_{c1}}{\dot{Z}_{c2}}} \operatorname{ch} \dot{g}_c & \sqrt{\dot{Z}_{c1} \dot{Z}_{c2}} \operatorname{sh} \dot{g}_c \\ \frac{\operatorname{sh} \dot{g}_c}{\sqrt{\dot{Z}_{c1} \dot{Z}_{c2}}} & \sqrt{\frac{\dot{Z}_{c2}}{\dot{Z}_{c1}}} \operatorname{ch} \dot{g}_c \end{bmatrix}. \quad (9.43)$$

Для симметричного четырёхполюсника с характеристическими сопротивлениями (9.32)

$$[a] = \begin{bmatrix} \operatorname{ch} \dot{g}_c & \dot{Z}_c \operatorname{sh} \dot{g}_c \\ \frac{1}{\dot{Z}_c} \operatorname{sh} \dot{g}_c & \operatorname{ch} \dot{g}_c \end{bmatrix}. \quad (9.44)$$

Характеристические параметры удобны в том отношении, что их можно весьма просто вычислять для сложных четырёхполюсников, составленных из нескольких четырёхполюсников, соединённых цепочечно по принципу согласования характеристических сопротивлений. Если, например, в схеме рис. 9.5  $\dot{Z}'_{c1} = \dot{Z}'_{c2}$ , то учитывая, что  $\dot{I}'_{m1} = \dot{I}'_{m2}$  и  $\dot{U}'_{m1} = \dot{U}'_{m2}$ , согласно определению (9.18) найдём характеристическую передаточную функцию всего четырёхполюсника:

$$\dot{S}_c = e^{\dot{g}_c} = \sqrt{\frac{\dot{U}'_{m1} \dot{I}'_{m1}}{\dot{U}'_{m2} \dot{I}'_{m2}}} = \sqrt{\frac{\dot{U}'_{m1} \dot{I}'_{m1}}{\dot{U}'_{m2} \dot{I}'_{m2}}} \cdot \sqrt{\frac{\dot{U}'_{m1} \dot{I}'_{m1}}{\dot{U}'_{m2} \dot{I}'_{m2}}} = \dot{S}'_c \dot{S}''_c = e^{\dot{g}'_c + \dot{g}''_c}.$$

Отсюда

$$\dot{g}_c = \dot{g}'_c + \dot{g}''_c.$$

Обобщая это свойство на случай цепочечного соединения  $n$  четырёхполюсников, согласованных по характеристическому сопротивлению, получим характеристические параметры составного четырёхполюсника:

$$\dot{g}_c = \sum_{k=1}^n \dot{g}_{ck}, \quad a_c = \sum_{k=1}^n a_{ck}, \quad b_c = \sum_{k=1}^n b_{ck}. \quad (9.45)$$

Если цепочечно соединяются одинаковые четырёхполюсники с характеристическим коэффициентом передачи  $\dot{g}_{c0} = a_{c0} + jb_{c0}$ , то из соотношений (9.45) находим:

$$\dot{g}_c = n\dot{g}_{c0}, \quad a_c = na_{c0}, \quad b_c = nb_{c0}. \quad (9.46)$$

Из рис. 9.5 видно, что при цепочечном соединении четырёхполюсников, согласованных по характеристическому сопротивлению,

их входные напряжения и токи не меняются. Отсюда следует, что при таком соединении характеристические сопротивления слева и справа остаются у сложного четырехполюсника такими же, как и у соединяемых в цепочку четырехполюсников (на рис. 9.5  $\dot{Z}_{c1}$  и  $\dot{Z}'_{c2}$ ).

Это свойство и соотношения (9.45) можно доказать и другим способом.

Несмотря на простоту определения характеристических параметров, следует учитывать, что они не дают представления о передаче колебаний через фильтр с реальными нагрузочными сопротивлениями. Действительно, характеристические сопротивления являются функцией частоты, и нагрузочные сопротивления не могут быть подобраны таким образом, чтобы фильтр был согласован

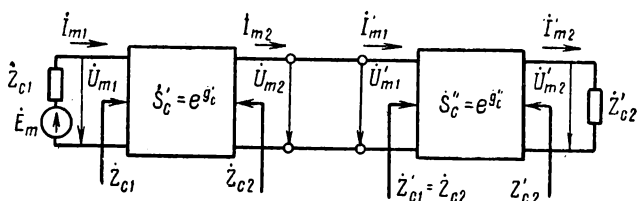


Рис. 9.5. Цепочное соединение четырехполюсников по принципу согласования характеристических сопротивлений

на всех частотах. Практически удастся согласовать четырехполюсник с нагрузочными сопротивлениями только на одной или нескольких фиксированных частотах. Поэтому рабочее затухание фильтров отличается от характеристического затухания на всех частотах, кроме упомянутых частот точного согласования. Подробнее этот вопрос рассматривается в следующем пункте.

## Б. Условие прозрачности фильтров

Выше отмечалось, что основным типом фильтров являются четырехполюсники, в которых используются реактивные элементы. Потери энергии в таких фильтрах лишь ухудшают их селективные свойства. Поэтому в фильтрах стремятся применять реактивные элементы с весьма высокой добротностью. При этом во многих случаях можно пренебречь потерями мощности в фильтрах и рассматривать их как реактивные четырехполюсники (реактивные фильтры). Рассмотрим свойства реактивных фильтров.

Так как матричные коэффициенты  $a_{12}$  и  $a_{21}$  имеют смысл соответственно сопротивления и проводимости передачи, то в реактивном четырехполюснике они являются нечетными реактансными функциями. Входные сопротивления таких четырехполюсников

в режиме холостого хода и короткого замыкания также описываются нечетными реактансными функциями. Учитывая сказанное, на основании формул (6.60) и (6.61) можно сделать вывод, что матричные коэффициенты  $a_{11}$  и  $a_{22}$  реактивных четырехполюсников есть вещественные четные функции.

Вещественная функция  $a_{11}a_{22}$  меняется по величине и по знаку при изменении частоты. При этом возможны три качественно различных случая: 1)  $0 \leq a_{11}a_{22} \leq 1$ , 2)  $a_{11}a_{22} \geq 1$ , 3)  $a_{11}a_{22} \leq 0$ .

Поскольку коэффициенты  $a_{12}$  и  $a_{21}$  являются мнимыми величинами, произведение  $a_{12}a_{21}$  также представляет собой вещественную положительную или отрицательную функцию. В первом и третьем случаях вещественная функция  $a_{12}a_{21} = a_{11}a_{22} - 1$  принимает значения  $a_{12}a_{21} \leq 0$ , а во втором случае  $a_{12}a_{21} \geq 0$ .

В первом случае, когда  $0 \leq a_{11}a_{22} \leq 1$  и  $a_{12}a_{21} \leq 0$ , соотношение (9.35) может быть представлено в виде

$$a_c |_{0 \leq a_{11}a_{22} \leq 1} = \ln | \sqrt{a_{11}a_{22}} + j \sqrt{-a_{12}a_{21}} |.$$

Здесь оба радикала являются вещественными функциями. Поэтому с учетом свойства (6.42) получаем

$$| \sqrt{a_{11}a_{22}} + j \sqrt{-a_{12}a_{21}} | = \sqrt{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}} = 1$$

и

$$\begin{aligned} a_c |_{0 \leq a_{11}a_{22} \leq 1} &= 0, \\ \cos b_c &= \sqrt{a_{11}a_{22}}, \quad \sin b_c = \sqrt{-a_{12}a_{21}}. \end{aligned} \quad (9.47)$$

Последние равенства (9.47) вытекают из формул (9.39), (9.40) с учетом первого равенства (9.47) и соотношения (9.37).

Таким образом, возможны случаи, когда характеристическое затухание реактивного фильтра равно нулю. Диапазон частот, в котором удовлетворяется это условие, называется полосой прозрачности фильтра. В полосе прозрачности характеристическая фаза наиболее просто определяется по последним равенствам (9.47).

Во втором случае, когда  $a_{11}a_{22} \geq 1$  и  $a_{12}a_{21} \geq 0$ , радикалы, входящие в соотношение (9.36), являются вещественными функциями. При этом в соответствии с формулами (9.37) и (9.39), (9.40) находим

$$\begin{aligned} b_c |_{a_{11}a_{22} \geq 1} &= \pm k\pi, \quad k=0, 1, 2, \dots, \\ \operatorname{ch} a_c &= \sqrt{a_{11}a_{22}}, \quad \operatorname{sh} a_c = \sqrt{a_{12}a_{21}}. \end{aligned} \quad (9.48)$$

Наконец, в третьем случае, когда  $a_{11}a_{22} \leq 0$  и  $a_{12}a_{21} \leq 0$ , соотношение (9.36) может быть представлено в виде

$$b_c |_{a_{11}a_{22} \leq 0} = \arg j (\sqrt{-a_{11}a_{22}} + \sqrt{-a_{12}a_{21}}).$$

Так как здесь оба радикала представляют собой вещественные функции, то фаза  $b_c$  является аргументом мнимого числа. При этом, учитывая соотношения (9.37) и (9.39), (9.40), получаем

$$b_c|_{a_{11}a_{22} \leq 0} = \pm (2k+1) \frac{\pi}{2}, \quad k=0, 1, 2, \dots, \quad (9.49)$$

$$\operatorname{sh} a_c = \sqrt{-a_{11}a_{22}}, \quad \operatorname{ch} a_c = \sqrt{-a_{12}a_{21}}.$$

Рассмотренные два случая, когда  $a_c > 0$ , соответствуют полосам непрозрачности. Определение характеристических параметров реактивного фильтра в полосе непрозрачности производится наиболее просто по формулам (9.48) и (9.49).

Следует иметь в виду, что соотношения (9.49) могут иметь место только в таких несимметричных фильтрах, у которых коэффициенты  $a_{11}$  и  $a_{22}$  имеют разные знаки на некоторых частотах. Для несимметричных же фильтров, у которых коэффициенты  $a_{11}$  и  $a_{22}$  имеют одинаковые знаки на всех частотах, остаются справедливыми соотношения (9.47) и (9.48).

В частном случае симметричных фильтров всегда соблюдается условие  $a_{11}a_{22} = a_{11}^2 > 0$ . При этом справедливы только соотношения (9.47) и (9.48), которые могут быть переписаны в следующем виде:

$$a_c|_{|a_{11}| \leq 1} = 0, \quad \cos b_c|_{|a_{11}| \leq 1} = a_{11}, \quad (9.50)$$

$$b_c|_{|a_{11}| \geq 1} = \pm k\pi, \quad \operatorname{ch} a_c|_{|a_{11}| \geq 1} = |a_{11}|.$$

Проведенный анализ позволяет установить условия, при соблюдении которых фильтр является прозрачным, т. е. его характеристическое затухание равно нулю.

Как следует из соотношений (9.47), для несимметричного фильтра, у которого коэффициенты  $a_{11}$  и  $a_{22}$  имеют разные знаки на некоторых частотах, условие прозрачности имеет вид

$$0 \leq a_{11}a_{22} \leq 1. \quad (9.51)$$

Для несимметричных фильтров, у которых коэффициенты  $a_{11}$  и  $a_{22}$  имеют одинаковые знаки на всех частотах, левое неравенство в условии (9.51) теряет смысл и условие прозрачности записывается так:

$$-1 \leq \sqrt{a_{11}a_{22}} \leq 1. \quad (9.52)$$

Здесь левое неравенство используется при отрицательных, а правое — при положительных коэффициентах  $a_{11}$  и  $a_{22}$ .

Наконец, в случае симметричных фильтров, когда  $a_{11} = a_{22}$ , условие прозрачности принимает вид

$$-1 \leq a_{11} \leq 1. \quad (9.53)$$

Условия прозрачности (9.51) — (9.53) служат для определения граничных частот полосы прозрачности фильтра, для чего в этих соотношениях используется знак равенства.

Рассмотрим теперь характеристические сопротивления реактивных фильтров в полосе прозрачности и в полосе непрозрачности.

Нетрудно видеть, что

$$\left. \frac{a_{11}}{a_{22}} \right|_{a_{11} a_{22} > 0} > 0, \quad \left. \frac{a_{11}}{a_{22}} \right|_{a_{11} a_{22} < 0} < 0,$$

$$\left. \frac{a_{11}}{a_{22}} \right|_{a_{11} a_{22} = 0} = 0 \quad \text{или} \quad \left. \frac{a_{11}}{a_{22}} \right|_{a_{11} a_{22} = 0} = \infty.$$

При этом

$$\left. \frac{a_{12}}{a_{21}} \right|_{a_{12} a_{21} < 0} > 0, \quad \left. \frac{a_{12}}{a_{21}} \right|_{a_{12} a_{21} > 0} < 0,$$

$$\left. \frac{a_{12}}{a_{21}} \right|_{a_{12} a_{21} = 0} = 0 \quad \text{или} \quad \left. \frac{a_{12}}{a_{21}} \right|_{a_{12} a_{21} = 0} = \infty.$$

Отсюда следует, что в соответствии с формулами (9.30) и (9.31) характеристические сопротивления реактивного фильтра являются

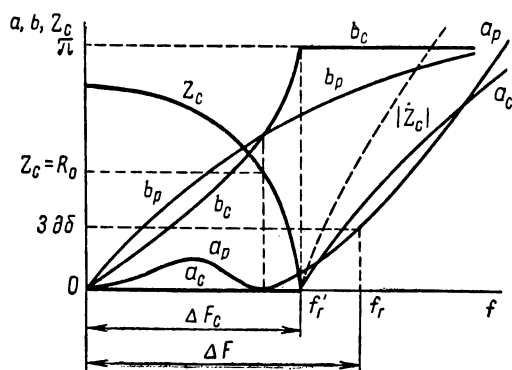


Рис. 9.6. Графики частотной зависимости характеристических и рабочих параметров реактивного фильтра нижних частот

в полосе прозрачности вещественными величинами (активными сопротивлениями), обращаясь в нуль или бесконечность на границах полосы прозрачности. В полосе же непрозрачности характеристическое сопротивление реактивного фильтра является реактивным сопротивлением.

Существенно отметить, что в полосе прозрачности, где характеристическое затухание равно нулю, рабочее за-

тухание отлично от нуля на всех частотах, на которых характеристическое сопротивление отличается от нагрузочных сопротивлений. Лишь на отдельных частотах, где переменное характеристическое сопротивление становится равным нагрузочным сопротивлениям, рабочее затухание совпадает с характеристическим затуханием, т. е. обращается в нуль. При этом границы полосы прозрачности и полосы пропускания не совпадают друг с другом.

На рис. 9.6 изображены для примера возможные графики частотной зависимости характеристических и рабочих параметров ре-

активного фильтра нижних частот. Здесь пунктиром показано реактивное характеристическое сопротивление, а через  $\Delta F_c$  обозначена полоса прозрачности.

Как видно из рис. 9.6, в полосе непрозрачности рабочее затухание может быть как больше, так и меньше характеристического затухания. В полосе же прозрачности рабочее затухание обращается в нуль на той частоте (не считая  $f = 0$ ), где характеристическое сопротивление  $\dot{Z}_c = Z_c$  равно нагрузочному сопротивлению  $R_0$ .

Наличие нуля рабочего затухания можно объяснить и резонансными явлениями в фильтре. Для этого рассмотрим наиболее важный случай симметричного реактивного четырехполюсника ( $a_{11} = a_{22}$ ). Входное сопротивление такого четырехполюсника, нагруженного на сопротивление  $R_0$ , равно

$$\dot{Z}_{вх} = \frac{a_{11} R_0 + a_{12}}{a_{21} R_0 + a_{11}} = R_0 \frac{a_{11} + \frac{a_{12}}{R_0}}{a_{11} + a_{21} R_0}, \quad (9.54)$$

или

$$\dot{Z}_{вх} = \frac{R_0}{a_{11}^2 - a_{21}^2 R_0^2} + \frac{\frac{a_{12}}{R_0} - a_{21} R_0}{a_{11}^2 - a_{21}^2 R_0^2} a_{11} R_0. \quad (9.54a)$$

Последнее равенство получено путем умножения числителя и знаменателя дроби в выражении (9.54) на  $a_{11} - a_{21} R_0$ . Второе слагаемое этого равенства является реактивной составляющей входного сопротивления, так как  $a_{12}$  и  $a_{21}$  — реактансные функции. Поэтому условие резонанса в рассматриваемом четырехполюснике имеет следующий вид:

$$\frac{a_{12}}{R_0} - a_{21} R_0 = 0,$$

или

$$\frac{a_{12}}{R_0} = a_{21} R_0. \quad (9.55)$$

Подставив равенство (9.55) в числитель дроби соотношения (9.54), находим, что при резонансе

$$\dot{Z}_{вх} = R_0. \quad (9.56)$$

Подставив равенства (9.55) и (9.56) в формулу (9.54a), установим, что при резонансе соблюдается также условие

$$a_{11}^2 - a_{21}^2 R_0^2 = 1. \quad (9.57)$$

Подставив равенство (9.55) в соотношение (6.71a), получаем резонансный коэффициент передачи:

$$\dot{K} = \dot{K}_0 = \frac{1}{2} \frac{1}{a_{11} + a_{21} R_0},$$

$$K = K_0 = \frac{1}{2} \frac{1}{\sqrt{a_{11}^2 - a_{21}^2 R_0^2}} *.$$

---

\* Здесь учтено, что коэффициент  $a_{21}$  включает в себя множитель  $j$ .

Отсюда в соответствии с условием (9.57) определяем числовое значение резонансного коэффициента передачи:

$$K_0 = K_{\max} = \frac{1}{2}. \quad (9.58)$$

Таким образом, при резонансе рабочее затухание (9.9), (9.9а), так же, как и затухание (6.87), (6.90а), обращается в нуль.

Как видно из равенства (9.54а), резонанс в четырехполюснике наступает также при  $a_{11} = 0$ . Указанный случай здесь не рассматривается, так как при этом резонансе для получения нуля рабочего затухания требуется специальным образом выбирать нагрузочные сопротивления.

## 6. Характеристики фильтров

Из предыдущего рассмотрения видно, что одиночный (последовательный и параллельный) и связанные контуры являются полосовыми фильтрами. Согласно уравнениям (7.7а), (7.31) и (7.88), (7.89) функция ослабления  $S^2 = \frac{1}{A^2}$  есть четный полином относительно расстройки  $\xi$ . Для одиночного контура эта функция является квадратичной, а для пары связанных контуров — полиномом четвертой степени.

Обобщая, можно прийти к выводу, что частотные характеристики полосовых фильтров, содержащих  $n$  резонансных контуров, описываются четной полиномиальной функцией

$$S^2 = a_n \xi^{2n} + a_{n-1} \xi^{2(n-1)} + a_{n-2} \xi^{2(n-2)} + \dots + a_1 \xi^2 + a_0. \quad (9.59)$$

Этот вывод не исключает возможности получения и других типов характеристик полосовых фильтров, однако полиномиальные характеристики (9.59) наиболее распространены.

Коэффициенты в уравнении (9.59) зависят как от параметров схемы фильтра, так и от вида самой схемы. От величины же этих коэффициентов зависит форма характеристики, а следовательно, полоса пропускания и коэффициент прямоугольности (селективность) фильтра.

Отвлекаясь от конкретных схем фильтров, можно поставить задачу о таком выборе коэффициентов в уравнении (9.59), который при заданном числе контуров  $n$  обеспечивает получение максимальной селективности фильтра (минимального коэффициента прямоугольности). При этом, однако, для удобства сравнения селективности все фильтры должны иметь одинаковую полосу пропускания, как это отмечалось выше. Поэтому примем в качестве определения обобщенной расстройки соотношение (7.11) вместо (5.43). Тогда не только для одиночного контура, но и для любого полосового фильтра границам полосы пропускания будут соответствовать

расстройки  $\xi = \xi_r = \pm 1$ . Приняв указанное определение обобщенной расстройки, рассмотрим некоторые способы выбора коэффициентов в уравнении (9.59).

Среди всех полиномов заданной степени  $m$  со старшим коэффициентом  $a_m$ , равным единице, П. Л. Чебышев нашел такие, которые наименее отклоняются от нуля в интервале  $(-1, +1)$ . Величина минимального отклонения равна  $2^{1-m}$ . Если эти полиномы умножить на некоторый коэффициент, то отклонение полученной функции от нуля может иметь любое заданное значение в интервале  $(-1, +1)$ . В частности, при умножении на  $2^{m-1}$  получаются

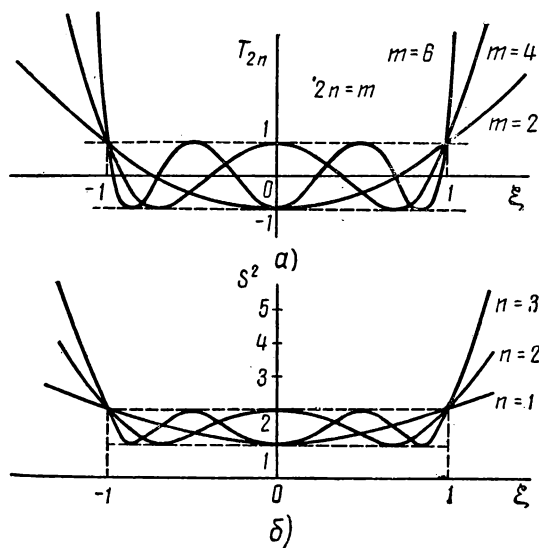


Рис. 9.7. Чебышевские полиномы и характеристики

нормированные полиномы Чебышева, отклоняющиеся от нуля не более чем на  $\pm 1$  (в указанном интервале изменения переменной). Нормированные полиномы Чебышева описываются следующим уравнением:

$$T_m(\xi) = \cos(m \arccos \xi) = \frac{1}{2} [(\xi + \sqrt{\xi^2 - 1})^m + (\xi - \sqrt{\xi^2 - 1})^m]. \quad (9.60)$$

Графики этих полиномов при  $m = 2, 4, 6$  показаны на рис. 9.7, а.

При соответствующем изменении масштаба и переносе начала отсчета четные полиномы Чебышева могут отображать функцию ослабления  $S^2$ , как показано на рис. 9.7, б. Например, при заданной



неравномерности затухания в полосе пропускания  $\Delta a = \Delta a_0 = 3 \text{ дБ}$  (как на рис. 9.7, б) получим

$$S^2 = \frac{1}{2} [3 + T_{2n}(\xi)], \quad (9.61)$$

где полином Чебышева  $T_{2n}(\xi)$  определяется уравнением (9.60) при  $m = 2n$ .

Уравнению (9.61) удовлетворяют, в частности, характеристики одиночного контура ( $n = 1$ ) и пары связанных контуров ( $n = 2$ ) при  $\kappa = \kappa_{\max} = 2,41$ .

Чебышевские характеристики (9.61) обладают замечательным свойством: их отклонение от нуля при  $|\xi| > 1$  получается наибольшим по сравнению с любыми характеристиками той же степени,

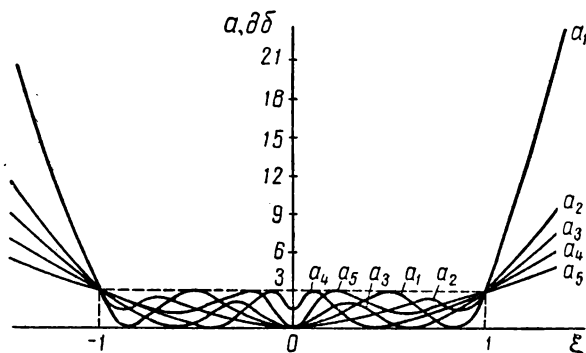


Рис. 9.8. Характеристики чебышевских и произвольных фильтров

если последние имеют такую же неравномерность при  $|\xi| \leq 1$ . Это свойство является следствием нормирования, при котором отклонение от нуля чебышевских полиномов (9.60) достигает заданного уровня в интервале  $(-1, +1)$ . Указанное свойство означает, что при заданной неравномерности затухания в полосе пропускания чебышевские фильтры с характеристиками типа (9.61) имеют минимальный коэффициент прямоугольности. Для примера на рис. 9.8 показана характеристика  $a_1(\xi)$  и некоторые произвольные характеристики  $a_2(\xi), a_3(\xi), a_4(\xi), a_5(\xi)$  при  $\Delta a = \Delta a_0 = 3 \text{ дБ}$ .

Таким образом, чебышевские фильтры обладают предельной селективностью при заданном числе контуров. Предельное значение коэффициента прямоугольности может быть получено из уравнений (9.61) и (9.60) в соответствии с определением (9.27а). Эти значения коэффициента прямоугольности  $K_{\Pi}^{40 \text{ дБ}}$  для чебышевских фильтров различного порядка  $n$  приведены в табл. П.3.

Следует заметить, что отличительным признаком полиномов Чебышева и полиномиальных чебышевских характеристик фильтров

является равенство всех максимумов и минимумов при  $\Delta a = \Delta a_0$ , как это наглядно видно из рис. 9.7, 9.8.

Кроме полиномов Чебышева, для аппроксимации характеристик фильтров используются полиномы Баттервортса. Такие характеристики, называемые также максимально-гладкими, описываются уравнением

$$S^2 = \xi^{2n} + 1. \quad (9.62)$$

Этому уравнению удовлетворяет, в частности, как характеристика одиночного контура, так и характеристика пары связанных контуров при  $\kappa = \kappa_{кр} = 1$ .

Коэффициент прямоугольности  $K_{П}^{40 \frac{06}{3 \frac{06}{06}}}$  таких фильтров, полученный из уравнений (9.62) и (9.27а), приведен в табл. П.4.

Фильтры с максимально-гладкими характеристиками меньше искажают сигналы, чем чебышевские и многие другие фильтры. Этим и обусловлено широкое применение таких фильтров, хотя их селективность невелика, как видно из сравнения данных табл. П.3, П.4. Однако в настоящее время получены способы синтеза фильтров со сколь угодно малыми искажениями, имеющих большую селективность, чем баттервортсовские фильтры. Поэтому можно ожидать, что фильтры с максимально-гладкими характеристиками в будущем будут находить все меньшее применение.

Из табл. П.3, П.4 следует, что с увеличением числа контуров в фильтре любого типа его селективность возрастает, что имеет очевидный физический смысл. Однако с ростом числа контуров уменьшение коэффициента прямоугольности замедляется. Поэтому при чрезмерном возрастании числа контуров увеличение габаритов фильтра не искупается получающимся при этом выигрышем в селективности.

## 7. Расчет фильтров

Расчет фильтров, как и вообще расчет цепей, может преследовать различные цели. Во-первых, может ставиться задача анализа, заключающаяся в нахождении частотных и фазовых характеристик фильтра при известной его схеме. Во-вторых, может ставиться задача синтеза, заключающаяся в определении схемы и параметров элементов фильтра по его заданным характеристикам.

При анализе нахождение характеристик может производиться, например, по формулам (6.71) или (9.24) — (9.26а), если известны нагрузочные сопротивления и матрица заданной схемы фильтра. Возможно и непосредственное определение коэффициента передачи (6.68) или рабочей передаточной функции (9.22), если любым из методов расчета находится выходное напряжение  $\dot{U}_{m2}$ .

Непосредственное определение выходного напряжения (например, методом контурных токов, узловых напряжений и др.) можно

рекомендовать только для простейших схем. В многоконтурных, сложноразветвленных схемах характеристики фильтра проще определять через его матрицу. Однако и нахождение матрицы фильтра не всегда оказывается достаточно простым.

Если, например, схему фильтра можно представить в виде цепочечного соединения простых четырехполюсников — звеньев фильтра, то определение матриц этих звеньев не составит труда (см. табл. П.1). Однако при большом числе звеньев, на которые разбивается фильтр, перемножение их цепочечных матриц является уже довольно громоздким.

Решение задачи упрощается, если использовать характеристические параметры фильтра. При этом вместо перемножения матриц звеньев определяются их характеристические параметры (9.30) — (9.32) и (9.35) — (9.37), а затем простым сложением — характеристические параметры (9.45) всего фильтра. Здесь имеется в виду, что звенья фильтра соединяются по принципу согласования характеристических сопротивлений, что достигается путем должной разбивки фильтра на звенья. В большинстве случаев удастся разбивать фильтр на одинаковые звенья, и тогда вместо формул (9.45) используются формулы (9.46). Во всех случаях характеристические сопротивления фильтра сохраняют те же значения, что и характеристические сопротивления его звеньев. Таким образом, через характеристические параметры фильтра определяется его матрица (9.43), а затем и его характеристики (6.71) или (9.24) — (9.26а).

При анализе после получения характеристик могут быть найдены параметры  $\Delta F$ ,  $\Delta a_0$ ,  $\Delta a$  и  $a_{p \min}$  (см. рис. 9.3), которые характеризуют условия прохождения сигнала через фильтр. В случае необходимости можно найти также параметры фазовой характеристики, определяющие фазовые искажения сигнала.

При решении задачи анализа находятся расчетные формулы, таблицы и графики, устанавливающие связь указанных параметров фильтра с параметрами его элементов (включая нагрузочные сопротивления  $Z_{01}$ ,  $Z_{02}$ ). Поэтому по заданным параметрам  $\Delta F$ ,  $\Delta a_0$ ,  $\Delta a$ ,  $a_{p \min}$ ,  $Z_{01}$ ,  $Z_{02}$  могут быть определены параметры элементов фильтра. Необходимые для этого расчетные формулы, таблицы и графики приводятся в специальных справочниках и пособиях по фильтрам.

В технических условиях на проектируемый фильтр, помимо указанных параметров, всегда задаются требования, предъявляемые к селективности фильтра, которые зависят прежде всего от вида его схемы и, в частности, от числа контуров в схеме. Поэтому при решении задачи анализа необходимо на первом этапе проектирования правильно выбрать схему фильтра, чтобы удовлетворялись требования технического задания по селективности. Для такого выбора могут служить, например, таблицы, подобные табл. П.3, П.4 для чебышевских и баттервортсовских фильтров. Эти таблицы

(или соответствующие графики) для фильтров различных типов также приводятся в справочниках и пособиях по фильтрам.

Перейдем теперь к синтезу фильтров. Различают синтез фильтра по заданным характеристическим параметрам  $a_c(f)$ ,  $Z_c(f)$  и по рабочим параметрам  $a_p(f)$ ,  $b_p(f)$  или  $K(f)$ ,  $\theta(f)$ . В настоящее время используются преимущественно различные методы синтеза фильтров по их рабочим характеристикам.

Для примера рассмотрим один из методов синтеза фильтра по заданной частотной характеристике рабочего или действующего затухания. В этом методе вводятся дополнительные рабочие меры передачи в виде ослабления эха

$$S_e = e^{a_e} = \sqrt{\frac{P_{a2 \max \max}}{P_{a2 \max \max} - P_{a2}}} \quad (9.63)$$

и затухания эха

$$a_e = \ln S_e = \frac{1}{2} \ln \frac{P_{a2 \max \max}}{P_{a2 \max \max} - P_{a2}}. \quad (9.64)$$

Здесь мощности  $P_{a2}$  и  $P_{a2 \max \max}$  определяются прежними соотношениями (9.10) и (9.11).

Название параметров (9.63), (9.64) обусловлено тем, что здесь происходит сравнение активной мощности maximum maximum с той частью этой мощности, которая не потребляется нагрузкой в схеме фильтра, а как бы отражается от нагрузки и возвращается в источник в качестве эха.

Ослабление эха можно рассматривать как модуль некоторой комплексной величины

$$\dot{S}_e = S_e e^{jb_e}, \quad (9.65)$$

называемой передаточной функцией эха.

Зная ослабление эха, можно определить и функцию (9.65), поскольку  $\dot{S}_e$ ,  $\dot{S}_e^* = S_e e^{jb_e}$ ,  $S_e e^{-jb_e} = S_e^*$ .

Таким образом, представляя функцию  $S_e^2$  в виде произведения двух комплексно сопряженных множителей, один из них следует рассматривать как передаточную функцию эха (9.65).

Ослабление эха связано непосредственно с рабочим и действующим ослаблениями фильтра. Действительно, выражение (9.63) можно переписать в виде

$$S_e = \sqrt{\frac{\frac{P_{a2 \max \max}}{P_{a2}}}{\frac{P_{a2 \max \max}}{P_{a2}} - 1}},$$

или согласно определению (9.12)

$$S_e^2 = \frac{S_\partial^2}{S_\partial^2 - 1}. \quad (9.66)$$

Таким образом, при заданном действующем ослаблении  $S_\partial = e^{a_\partial}$  (или заданном действующем затухании  $a_\partial$ ) по формуле (9.66) может быть определено и ослабление эха [или затухание эха (9.64)].

Формулу (9.66) представляют также в более простом виде:

$$\frac{1}{S_\partial^2} + \frac{1}{S_\partial^2} = 1. \quad (9.66a)$$

Подставив сюда соотношение (9.14), находим связь между рабочим ослаблением и ослаблением эха:

$$\frac{R_{01}}{Z_{01}} \cdot \frac{R_{02}}{Z_{02}} \cdot \frac{1}{S_p^2} + \frac{1}{S_\partial^2} = 1. \quad (9.67)$$

Таким образом, при известных нагрузочных сопротивлениях ослабление эха может быть определено из формулы (9.67) по заданному рабочему ослаблению  $S_p = e^{a_p}$  [или по заданному рабочему затуханию  $a_p(f)$ ].

Понятие параметров эха удобно в том отношении, что для реактивных фильтров передаточная функция эха (9.65) выражается непосредственно через входное сопротивление четырехполюсника. Действительно, для реактивных четырехполюсников, в которых активная мощность не потребляется,

$$P_{a2} = P_{avx} = \frac{1}{2} R_{Bx1} I_m^2 = \frac{E_m^2}{2} \cdot \frac{R_{Bx1}}{|\dot{Z}_{01} + \dot{Z}_{Bx1}|^2}. \quad (9.68)$$

Согласно формулам (9.11) и (9.68) получаем

$$\begin{aligned} S_\partial^2 &= \frac{P_{a2 \max \max}}{P_{a2}} = \frac{|\dot{Z}_{01} + Z_{Bx1}|^2}{4R_{01} R_{Bx1}} = \\ &= \frac{(R_{01} + R_{Bx1})^2 + (X_{01} + X_{Bx1})^2}{4R_{01} R_{Bx1}} \end{aligned}$$

и

$$S_\partial^2 - 1 = \frac{(R_{01} - R_{Bx1})^2 + (X_{01} + X_{Bx1})^2}{4R_{01} R_{Bx1}}.$$

Подставляя полученные соотношения в формулу (9.66), находим

$$S_\partial^2 = \frac{(R_{01} + R_{Bx1})^2 + (X_{01} + X_{Bx1})^2}{(R_{01} - R_{Bx1})^2 + (X_{01} + X_{Bx1})^2}.$$

Учитывая, что  $S_\partial^2 = \dot{S}_\partial \dot{S}_\partial^*$ , последнее соотношение можно переписать в виде

$$\dot{S}_\partial \dot{S}_\partial^* = \frac{(R_{01} + R_{Bx1}) + j(X_{01} + X_{Bx1})}{(R_{01} - R_{Bx1}) - j(X_{01} + X_{Bx1})} \cdot \frac{(R_{01} + R_{Bx1}) - j(X_{01} + X_{Bx1})}{(R_{01} - R_{Bx1}) + j(X_{01} + X_{Bx1})}.$$

Отсюда непосредственно определяется передаточная функция эха, выраженная через входное сопротивление реактивного четырехполюсника:

$$\dot{S}_\partial = \frac{(R_{01} + R_{Bx1}) + j(X_{01} + X_{Bx1})}{(R_{01} - R_{Bx1}) - j(X_{01} + X_{Bx1})} = \frac{(R_{01} + jX_{01}) + (R_{Bx1} + jX_{Bx1})}{(R_{01} - jX_{01}) + (R_{Bx1} + jX_{Bx1})},$$

или

$$\dot{S}_3 = \frac{\dot{Z}_{01} + \dot{Z}_{\text{вх1}}}{\dot{Z}_{01}^* - \dot{Z}_{\text{вх1}}}, \quad (9.69)$$

где  $\dot{Z}_{01}^* = R_{01} - jX_{01}$  — величина, комплексно сопряженная с нагрузочным сопротивлением  $\dot{Z}_{01} = R_{01} + jX_{01}$ .

Из формулы (9.69) получаем входное сопротивление фильтра, выраженное через передаточную функцию эха:

$$\dot{Z}_{\text{вх1}} = \frac{\dot{S}_3 \dot{Z}_{01}^* - Z_{01}}{1 + \dot{S}_3}. \quad (9.70)$$

Таким образом, определив по заданному рабочему или действующему затуханию ослабление эха, а затем и передаточную функцию эха, по формуле (9.70) находим входное сопротивление фильтра при заданных нагрузочных сопротивлениях. По входному же сопротивлению известными методами определяется схема и параметры элементов фильтра. Раскладывая, например, функцию входного сопротивления в цепную дробь, можно найти цепочечную схему фильтра и ее параметры. При этом для удобства расчетов целесообразно по функции входного сопротивления определить предварительно входное сопротивление в режиме холостого хода или короткого замыкания. Входное сопротивление фильтра в таком режиме описывается реактансной функцией, которой удобно оперировать в последующих расчетах.

Приведенное решение задачи синтеза не является единственно возможным. Другие методы синтеза описываются в специальной литературе.

В последующих параграфах настоящей главы рассматривается задача анализа для фильтров различных типов. При этом основное внимание уделяется анализу селективных свойств и сравнительной оценке фильтров различных типов. Для упрощения такого анализа в ряде случаев используются приближенные методы построения характеристик, что вполне достаточно для качественной оценки и сравнения свойств фильтров различных типов. Наряду с этим для основных типов фильтров приводятся также некоторые расчетные формулы, таблицы и графики.

## § 9.2. ФИЛЬТРЫ ИЗ СВЯЗАННЫХ КОНТУРОВ

### 1. Фильтры из двух связанных контуров

Как следует из характеристик на рис. 7.25, схема из двух связанных контуров (см. рис. 7.18) является полосовым фильтром. Рассмотрим селективные свойства двухконтурного фильтра.

Если в уравнениях (7.88), (7.89) пренебречь под радикалом всеми слагаемыми по сравнению с  $\xi^4$ , то можно с достаточной степенью точности найти расстройку  $\xi_0$ , соответствующую заданному уровню ослабления  $S_0 \gg 1$ :

$$\begin{aligned}\xi_0|_{\kappa \geq 1} &\approx \sqrt{2\kappa S_0}, \\ \xi_0|_{\kappa \leq 1} &\approx \sqrt{(1+\kappa^2) S_0}.\end{aligned}\quad (9.71)$$

Отсюда согласно формулам (7.90), (7.91) и определению (9.27а) находим коэффициент прямоугольности связанных контуров:

$$\begin{aligned}K_{\Pi \sqrt{2}}^{S_0}|_{\kappa \geq 1} &\approx \sqrt{\frac{2\kappa}{\kappa^2 + 2\kappa - 1} S_0}, \\ K_{\Pi \sqrt{2}}^{S_0}|_{\kappa \leq 1} &\approx \sqrt{\frac{1 + \kappa^2}{\sqrt{2}(1 + \kappa^4) - (1 - \kappa^2)}} S_0.\end{aligned}\quad (9.72)$$

Таким образом, существенной особенностью связанных контуров в отличие от одиночного контура с коэффициентом прямоугольности (9.28) является не только более высокая избирательность ( $S_0$  стоит под радикалом!), но и зависимость ко-

эффициента прямоугольности от параметров схемы. Зависимость  $K_{\Pi \sqrt{2}}^{40\text{ дБ}}$  от фактора связи показана на рис. 9.9.

Наиболее высокая избирательность получается при максимальном факторе связи  $\kappa = \kappa_{\max} = 2,41$ , когда неравномерность затухания становится равной 3 дБ. При этом связанные контуры имеют чебышевскую характеристику, как это отмечалось выше.

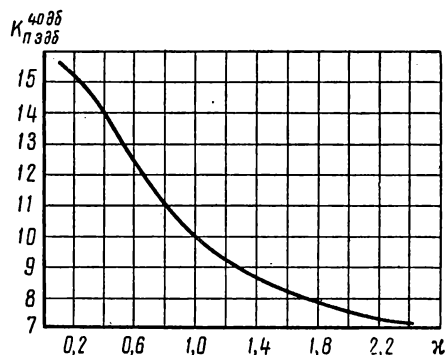


Рис. 9.9. Избирательность двух связанных контуров

При критической связи ( $\kappa = 1$ ) характеристика связанных контуров становится максимально-гладкой и коэффициент прямоугольности совпадает с данными табл. П.4.

## 2. Фильтры из трех связанных контуров

Рассмотрим систему из трех связанных контуров (рис. 9.10, а), которая является полосовым фильтром.

Воспользовавшись выводами теории связанных контуров, выходное напряжение в этой схеме можно найти с учетом сопротивления

ний, вносимых в средний контур из входного и выходного контуров:

$$\dot{U}_m = \frac{\dot{E}_m}{\dot{Z}_1} \dot{Z}_{CB12} \frac{1}{\dot{Z}_2 + \dot{Z}_{BH12} + \dot{Z}_{BH32}} \dot{Z}_{CB23} \frac{1}{\dot{Z}_3} \dot{Z}_{C3}.$$

Примем  $\dot{Z}_1 = \dot{Z}_3 = \dot{Z} = r + jX$ ,  $\dot{Z}_2 = ar + jbX$ ,  $\dot{Z}_{CB12} = \dot{Z}_{CB23} = \dot{Z}_{CB}$

и  $\dot{Z}_{BH12} = \dot{Z}_{BH32} = \dot{Z}_{BH} = -\frac{Z_{CB}^2}{\dot{Z}} = \frac{X_{CB}^2}{r^2 + X^2} r - j \frac{X_{CB}^2}{r^2 + X^2} X.$

Тогда

$$K = \frac{\dot{Z}_{CB}^2 \dot{Z}_C}{\dot{Z}^2 (\dot{Z}_2 + 2\dot{Z}_{BH})}$$

и

$$K = \frac{X_{CB}^2 X_C}{(r^2 + X^2) \sqrt{\left( ar + 2 \frac{X_{CB}^2}{r^2 + X^2} r \right)^2 + \left( bX - 2 \frac{X_{CB}^2}{r^2 + X^2} X \right)^2}}.$$

Приняв  $\frac{X_{CB}}{r} = \kappa$ ,  $\frac{X_C}{r} \approx \frac{\rho}{r} = Q$  и  $\frac{X}{r} = Qv = \xi$ , получим окончательно

$$K = \frac{Q\kappa^2}{\sqrt{[a(1 + \xi^2) + 2\kappa^2]^2 + \xi^2 [b(1 + \xi^2) - 2\kappa^2]^2}}. \quad (9.73)$$

В соответствии с этим уравнением функция ослабления  $S^2$  является четным полиномом шестой степени, как это и должно быть при наличии трех контуров в схеме (зависимостью  $\kappa$  от расстройки пренебрегаем).

В общем случае характеристика (9.73) имеет неодинаковые максимумы, т. е. не является чебышевской. Нетрудно видеть, что при  $a = 0$  характеристика становится чебышевской, так как при этом

$$K = \frac{Q\kappa^2}{\sqrt{[b(1 + \xi^2) - 2\kappa^2]^2 \xi^2 + 4\kappa^4}} \quad (9.74)$$

и

$$K = K_{\max} = \frac{Q}{2},$$

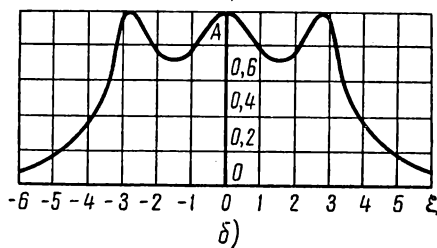
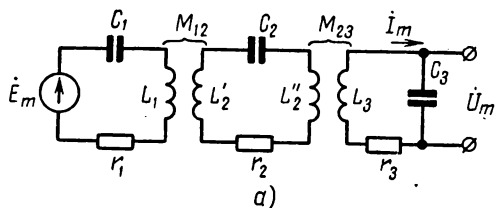
если  $\xi = 0$  или  $b(1 + \xi^2) - 2\kappa^2 = 0$ , т. е.  $\xi = \pm \sqrt{\frac{2\kappa^2}{b} - 1}.$

Таким образом, условием получения чебышевской характеристики, т. е. условием получения максимальной избирательности, является отсутствие потерь в среднем контуре ( $r_2 = ar = 0$ ). Практически это невыполнимо. Однако, учитывая наличие двух сопротивлений, вносимых в средний контур, в ряде случаев параметры схемы можно выбрать так, чтобы выполнялось неравенство



$r_2 = ar \ll 2r_{\text{вн}}$ . При этом в исходном уравнении можно пренебречь величиной  $r_2 = ar$ , что равносильно условию  $a = 0$ .

Чтобы характеристика (9.74) стала чебышевской, должно выполняться и второе условие  $K_{\min} = \frac{K_{\max}}{\sqrt{2}}$ , если полоса пропускания отсчитывается на уровне  $A = \frac{1}{\sqrt{2}}$ . Это условие может



быть выполнено за счет соответствующего выбора фактора связи  $\kappa$  при заданном значении  $b$ . Коэффициент  $b$  может быть выбран произвольно. Примем для простоты  $b = 1$ , что соответствует значениям  $C_2 = C$  и  $L_2 = L'_2 + L''_2 = L$ . Тогда уравнение (9.74) может быть переписано так:

$$A = \frac{2\kappa^2}{\sqrt{(1-2\kappa^2+\xi^2)^2\xi^2+4\kappa^4}}. \quad (9.75)$$

Рис. 9.10. Три связанных контура и их частотная характеристика

которой соответствует  $A_{\min} = \frac{1}{\sqrt{2}}$  (рис. 9.10, б), получается при  $\kappa = \kappa_{\max} = 2,173$ . При этом полоса пропускания определяется расстройкой  $\xi = \xi_r = \pm 3,35$ .

В другом практически важном случае, когда  $b = 2$ , т. е.

$L'_2 = L''_2 = L$  и  $C_2 = \frac{C}{2}$ , вместо (9.75) получается уравнение

$$A = \frac{\kappa^2}{\sqrt{(1-\kappa^2+\xi^2)^2\xi^2+\kappa^4}}. \quad (9.75a)$$

В этом случае чебышевская характеристика (см. рис. 9.10, б) получается при  $\kappa = \kappa_{\max} = 3,06$ , а полоса пропускания определяется прежней расстройкой  $\xi = \xi_r = \pm 3,35$ .

### 3. Многоконтурные фильтры

Выводы, полученные при рассмотрении трех связанных контуров, остаются справедливыми и при большем числе контуров в связанной системе, как на рис. 9.11, а. Этой схеме эквивалентны

схемы рис. 9.11, б и в при другом виде связи, для которых, следовательно, также справедливы полученные выводы.

Основной вывод сводится к тому, что для достижения высокой избирательности все промежуточные контуры не должны иметь потерь, как это и показано на рис. 9.11. Крайние же контуры должны иметь сопротивление потерь, величина которых определяется значением  $\kappa_{\max} = \frac{X_{\text{св}}}{r}$  (см. рис. 9.11, а и б), т. е. выбранным значением фактора связи. В схеме, изображенной на рис. 9.11, в,

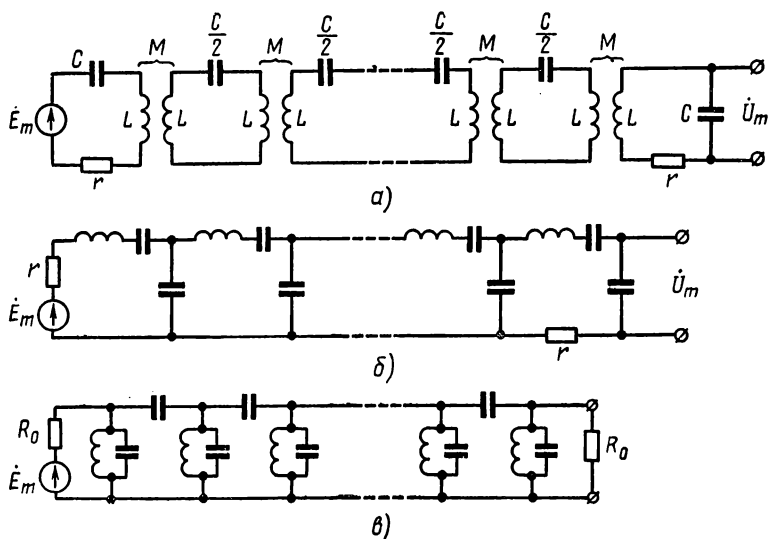


Рис. 9.11. Многоконтурные фильтры из связанных контуров

сопротивления потерь определяются нагрузочными сопротивлениями  $R_0$ , так как  $r = r_{\text{вн}} = \frac{\rho^2}{R_0}$ .

Контуры без потерь, из которых должен состоять высокоизбирательный фильтр, не могут быть физически реализованы. Однако влияние потерь на селективность фильтра становится пренебрежимо малым, если его контуры имеют достаточно высокую добротность. Чтобы этим влиянием можно было пренебречь, относительная полоса пропускания фильтра (6.83) и добротность его контуров  $Q$  должны быть связаны соотношением

$$\delta Q > 15 \div 20. \quad (9.76)$$

Отсутствие потерь в промежуточных контурах (или их пренебрежимо малое значение) еще не обеспечивает получение чебышевской характеристики, хотя и приводит к возрастанию избирательности по сравнению с фильтром, где эти потери есть. Чтобы

обеспечить равенство всех максимумов и минимумов частотной характеристики, необходимо особым образом выбрать также остальные параметры схемы. В этом случае чебышевская характеристика получается при различной связи между контурами или при различных реактивностях в контурах. Практически это неудобно. Если же выбрать одинаковые реактивности и одинаковую связь между контурами, как на рис. 9.11, *а*, то предельную избирательность таких фильтров с регулярной структурой можно определить из табл. П.5.

Из этой таблицы видно, что проигрыш в избирательности по сравнению с чебышевскими фильтрами (см. табл. П.3) получается не очень большим. Нередко он окупается большей простотой конструкции многоконтурных фильтров с регулярной структурой.

Следует, однако, отметить, что даже при одинаковых контурах и связях между ними конструкция многоконтурных фильтров получается очень громоздкой и сложной в регулировке. Если к тому же учесть, что недостаточно высокая добротность контуров не всегда обеспечивает получение предельной избирательности (см. табл. П.5), то станет понятным, почему в электрических фильтрах практически не используют больше трех-четырех связанных контуров.

## § 9.3. ИЗБИРАТЕЛЬНЫЕ УСИЛИТЕЛИ

### 1. Коэффициент передачи усилителя

В радиотехнических устройствах широко используются усилители с одиночными или связанными контурами в качестве нагрузки электронной лампы. Такие усилители обладают селективными свойствами и называются избирательными. Часто усилители с одиночными нагрузочными контурами называются резонансными, а с нагрузкой в виде связанных контуров — полосовыми.

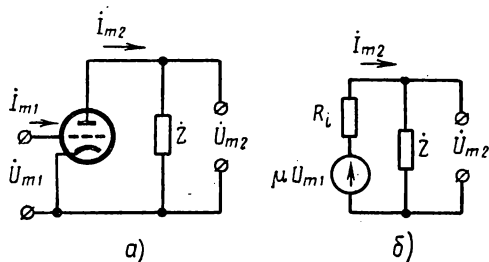


Рис. 9.12. Эквивалентные схемы усилительного каскада

На рис. 9.12, *а* изображена эквивалентная схема усилительного каскада, представляющая собой необратимый четырехполюсник, в котором сигнал может проходить только слева направо. Если в этом каскаде пренебречь током, проходящим через емкость между сеткой и катодом, то можно считать  $\dot{I}_{m1} = 0$ , т. е.

$$Z_{вх1} = \frac{U_{m1}}{I_{m1}} = \infty, \quad (9.77)$$

В курсе электронных приборов показывается, что электронная лампа может быть заменена эквивалентным источником э. д. с.  $\dot{E}_m = \mu \dot{U}_{m1}$  с внутренним сопротивлением  $R_i$  (рис. 9.12, б). Здесь  $\mu$  и  $R_i$  — параметры лампы, называемые соответственно коэффициентом усиления и внутренним сопротивлением.

Если в качестве элемента  $\dot{Z}$  использовать параллельный двух-полюсник, то схема, изображенная на рис. 9.12, б, будет являться обычной схемой параллельного контура (см. рис. 7.8) с коэффициентом передачи (7.22) и соответствующими частотными характеристиками (см. рис. 7.9). Тем самым подтверждается наличие селективности у резонансного усилителя.

Обычно для усилительного каскада (см. рис. 9.12, а) коэффициент передачи

$$\dot{K} = \frac{\dot{U}_{m2}}{\dot{U}_{m1}}. \quad (9.78)$$

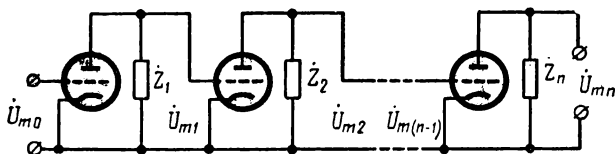


Рис. 9.13. Эквивалентная схема многокаскадного усилителя

При таком определении вместо формул (7.22) и (7.23) получаем

$$\dot{K} = \mu \frac{\dot{Z}}{R_i + Z},$$

$$K_{\max} = \mu \frac{R_0}{R_i + R_0}.$$

Отсюда следует, что относительный коэффициент передачи усилительного каскада определяется прежними соотношениями (7.24), (7.25), а его частотная характеристика описывается уравнением (7.31). Аналогично при использовании связанных контуров в качестве нагрузки лампы частотные характеристики описываются прежними уравнениями (7.88) или (7.89).

При цепочечном включении усилительных каскадов (рис. 9.13) благодаря свойству (9.77) выходные напряжения каждого из каскадов не претерпевают изменения. Поэтому

$$\dot{K} = \frac{\dot{U}_{mn}}{\dot{U}_{m0}} = \frac{\dot{U}_{m1}}{\dot{U}_{m0}} \cdot \frac{\dot{U}_{m2}}{\dot{U}_{m1}} \dots \frac{\dot{U}_{mn}}{\dot{U}_{m(n-1)}},$$

или

$$\dot{K} = \dot{K}_1 \dot{K}_2 \dots \dot{K}_n.$$

Примем обозначение:

$$K_{\max} = K_{1 \max} K_{2 \max} \dots K_{n \max}.$$

Тогда

$$\dot{A} = \frac{\dot{K}}{K_{\max}} = \dot{A}_1 \dot{A}_2 \dots \dot{A}_n. \quad (9.79)$$

Если соединяемые каскады одинаковы, то

$$\dot{A}_1 = \dot{A}_2 = \dots = \dot{A}_n = \dot{A}'$$

и

$$\ddot{A} = \dot{A}'^n. \quad (9.80)$$

Следует иметь в виду, что при принятых обозначениях в формуле (9.79)  $A_{\max} \neq 1$ , если значения  $K_{i \max}$  получаются на разных частотах.

Из соотношений (9.78) — (9.80) вытекает, что при цепочечном соединении резонансных усилительных каскадов входящие в их состав контуры не испытывают взаимного влияния, как при цепочечном соединении самих контуров. Поэтому в отличие от обычного цепочечного соединения контуров (см. рис. 9.11) их включение по схеме рис. 9.13 может быть названо каскадным соединением контуров\*. Аналогично при цепочечном соединении полосовых усилительных каскадов можно говорить о каскадном соединении связанных контуров.

## 2. Избирательные усилители с настроенными контурами

Рассмотрим каскадное соединение одинаковых одиночных контуров. Полагая при этом лампы также одинаковыми, в соответствии с формулой (7.31) получим для отдельного каскада

$$S' = \frac{1}{A'} = \sqrt{1 + \xi^2}.$$

Отсюда в соответствии с формулой (9.80) находим

$$S = (1 + \xi^2)^{\frac{n}{2}}, \quad (9.81)$$

$$S_r = \sqrt{2} = \sqrt{(1 + \xi_r^2)^n},$$

$$S_0^2 = (1 + \xi_0^2)^n.$$

---

\* В литературе термин «каскадное соединение» используется обычно как синоним термина «цепочечное соединение».

Из этих соотношений определяем расстройки на заданных уровнях  $S_r = \sqrt{2}$  и  $S_0 \gg 1$ :

$$\xi_r = \sqrt[n]{\sqrt{2} - 1}, \quad (9.82)$$

$$\xi_0 = \sqrt[n]{\sqrt{S_0^2} - 1}.$$

Отсюда в соответствии с определением (9.27а) находим коэффициент прямоугольности рассматриваемого фильтра:

$$K_{\Pi \sqrt{2}}^{S_0} = \sqrt{\frac{\sqrt[n]{S_0^2} - 1}{\sqrt{2} - 1}}. \quad (9.83)$$

Таким образом, при каскадном соединении контуров, как и при их цепочечном соединении, коэффициент прямоугольности уменьшается с ростом числа контуров. Однако при этом уменьшение происходит не до значения  $K_{\Pi} = 1$ , а до большего значения. Раскрывая неопределенность в формуле (9.83) при  $n \rightarrow \infty$ , получим

$$\lim_{n \rightarrow \infty} K_{\Pi \sqrt{2}}^{a_0} = \sqrt{\frac{a_0}{3}}. \quad (9.84)$$

Вследствие этого избирательность при каскадном соединении контуров получается значительно хуже, чем при их цепочечном соединении. Это наглядно видно из сравнения данных табл. П.6, полученных по формулам (9.82) — (9.84), и данных табл. П.3, П.5. Причиной ухудшения избирательности является отсутствие взаимного влияния контуров, вследствие чего характеристики (9.81) изменяются монотонно по обе стороны от резонанса.

Учитывая незначительный выигрыш в избирательности и сложность настройки при чрезмерном увеличении числа каскадов, на практике обычно не используют больше двух-трех каскадов резонансных усилителей.

Указанную монотонность характеристик можно устранить, применяя каскадное соединение двух связанных контуров. За счет этого избирательность схемы может быть повышена, хотя и не в такой мере, как при цепочечном соединении контуров (поскольку при любом числе пар связанных контуров здесь будет лишь два резонансных максимума частотной характеристики).

Уравнение частотной характеристики для  $n$ -каскадного полосового усилителя, содержащего  $m = 2n$  контуров, согласно соотношениям (7.88) и (9.80) можно представить в виде

$$S = \frac{1}{(2\kappa)^n} [\xi^4 - 2(\kappa^2 - 1)\xi^2 + (\kappa^2 + 1)^2]^{\frac{n}{2}}. \quad (9.85)$$

Здесь рассматривается лишь случай  $\kappa \geq 1$ , который позволяет получить предельную избирательность при максимальном факторе связи

$$\kappa = \kappa_{\max} = \sqrt[n]{2} + \sqrt[n]{\sqrt[n]{2} - 1}, \quad (9.86)$$

соответствующем  $\Delta a = \Delta a_0 = 3 \delta b$ . Формула (9.86) выводится при обычном исследовании на экстремум функции (9.85).

Из уравнения (9.85) нетрудно также найти граничную расстройку на уровне  $S_r = \sqrt{2}$  и расстройку  $\xi_0$  на уровне  $S_0 \gg 1$ :

$$\xi_r = \sqrt{\kappa^2 + 2\sqrt[n]{\sqrt[n]{2} - 1} \kappa - 1}, \quad (9.87)$$

$$\xi_0 = \sqrt{\kappa^2 + 2\kappa\sqrt[n]{\sqrt[n]{S_0^2} - 1} - 1}.$$

Отсюда в соответствии с определением (9.27a) находим коэффициент прямоугольности:

$$K_{\Pi \sqrt{2}}^{S_0} = \sqrt{\frac{\kappa^2 + 2\kappa\sqrt[n]{\sqrt[n]{S_0^2} - 1} - 1}{\kappa^2 + 2\sqrt[n]{\sqrt[n]{2} - 1} \kappa - 1}}. \quad (9.88)$$

Раскрывая здесь неопределенность при  $n \rightarrow \infty$ , получим, что в рассматриваемом случае предельное значение коэффициента прямоугольности также превышает единицу:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} K_{\Pi \sqrt{2}}^{a_0} = \sqrt{\frac{1}{2} \left( 1 + \sqrt{\frac{a_0}{3}} \right)}. \quad (9.89)$$

Результаты расчета по формулам (9.86) — (9.89) сведены в табл. П.7. Из сравнения данных табл. П.6 и П.7 виден существенный выигрыш в избирательности полосового усилителя по сравнению с резонансным усилителем при одинаковом числе контуров. Однако реализация предельной селективности в полосовых усилителях сопряжена со значительными трудностями в настройке контуров. Поэтому на практике часто используются полосовые усилители с критической связью между связанными контурами ( $\kappa = 1$ ). При этом формулы (9.85) и (9.87) — (9.89) принимают следующий вид:

$$S = \frac{1}{2^n} (\xi^4 + 4)^{\frac{n}{2}}, \quad (9.85a)$$

$$\xi_r = \sqrt{2} \sqrt[n]{\sqrt[n]{2} - 1}, \quad (9.87a)$$

$$K_{\Pi \sqrt{2}}^{S_0} = \sqrt[n]{\frac{\sqrt[n]{S_0^2} - 1}{\sqrt[n]{2} - 1}}, \quad (9.88a)$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} K_{\Pi \sqrt{2}}^{a_0} = \sqrt[4]{\frac{a_0}{3}}. \quad (9.89a)$$

Результаты расчета по формулам (9.85a) — (9.89a) сведены в табл. П.8.

Из табл. П.6, П.7, П.8 видно, что в полосовых усилителях при критической связи между контурами хотя и получается существенный выигрыш в избирательности по сравнению с резонансными усилителями, но коэффициент прямоугольности значительно превышает предельное значение. Однако последнее компенсируется упрощением регулировки.

На практике в полосовых усилителях обычно не используют больше трех-четыре каскадов.

### 3. Избирательные усилители с расстроенными контурами

Выше указывалось, что монотонность характеристик резонансного усилителя не позволяет достигнуть достаточно высокой избирательности. Однако, если при каскадном соединении  $n$  контуров настраивать их на разные частоты, то можно получить частотную характеристику с  $n$  резонансными максимумами. Это нетрудно усмотреть из общего выражения для коэффициента передачи (9.79). При этом соответствующим выбором параметров контуров можно обеспечить получение чебышевской характеристики.

Однако резонансные усилители с различной настройкой каждого из контуров слишком сложны в производстве и регулировке. Поэтому на практике используются лишь многокаскадные резонансные усилители, в которых контуры настраиваются на две или три резонансные частоты. Рассмотрим эти два случая.

При настройке контуров попарно на две частоты  $f_{01}$  и  $f_{02}$ , которым соответствуют расстройки  $\xi_1 = \frac{2\Delta f_1}{\Delta F}$  и  $\xi_2 = \frac{2\Delta f_2}{\Delta F}$ , будем вести отсчет расстройки от средней частоты

$$f_0 = \frac{1}{2}(f_{01} + f_{02}),$$

как показано на рис. 9.14. При этом

$$\xi_1 = \xi + \xi_k, \quad \xi_2 = \xi - \xi_k, \quad (9.90)$$

где  $\xi = \frac{2\Delta f}{\Delta F}$  — обобщенная расстройка относительно средней частоты  $f_0$ ;

$\xi_k = \frac{2\Delta f_0}{\Delta F}$  — обобщенная расстройка контуров.

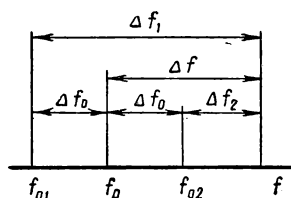


Рис. 9.14. Отсчет расстройки относительно различных начальных частот



С учетом этих обозначений частотная характеристика двухкаскадного усилителя описывается уравнением

$$A = \frac{1}{\sqrt{1 + \xi_1^2}} \cdot \frac{1}{\sqrt{1 + \xi_2^2}} = \frac{1}{\sqrt{[1 + (\xi + \xi_k)^2][1 + (\xi - \xi_k)^2]}},$$

или

$$A = \frac{1}{\sqrt{(1 + \xi_k^2 - \xi^2)^2 + 4\xi^2}}. \quad (9.91)$$

С точностью до постоянного множителя уравнения (9.91) и (7.88) совпадают при  $\xi_k = \kappa$ . Следовательно, характеристики и избирательность пары расстроенных каскадно соединенных контуров получаются такими же, как и у пары одинаковых связанных контуров с фактором связи  $\kappa = \xi_k$ . Очевидно, и в случае  $m = 2n$  каскадно соединенных контуров, настроенных на две частоты, характеристики и избирательность получаются такими же, как в  $n$ -каскадном полосовом усилителе. Поэтому при расчете резонансных усилителей с попарно расстроенными контурами можно пользоваться табл. П.7 при  $\xi_k = \kappa_{\max}$  и табл. П.8 при  $\xi_k = 1$ . При этом в табл. П.7, П.8 под числом каскадов надо понимать величину  $m$ .

При каскадном соединении трех контуров, настроенных на три частоты  $f_0, f_{01}, f_{02}$  (см. рис. 9.14), уравнение частотной характеристики имеет вид

$$A = \frac{1}{\sqrt{(1 + \xi^2)[1 + (\xi + \xi_k)^2][1 + (\xi - \xi_k)^2]}}. \quad (9.92)$$

Такая характеристика имеет три максимума, которые можно считать равными

$$A_{\max 1} = A|_{\xi=0} = \frac{1}{1 + \xi_k^2}, \quad (9.93)$$

$$A_{\max 2,3} \approx A|_{\xi = \pm \xi_k} = \frac{1}{\sqrt{(1 + \xi_k^2)(1 + 4\xi_k^2)}}. \quad (9.93a)$$

Из этих уравнений видно, что максимумы частотной характеристики неодинаковы. Чтобы характеристика могла стать чебышевской, она должна иметь одинаковые максимумы. Для получения чебышевской характеристики контур, настроенный на среднюю частоту  $f_0$ , должен иметь добротность  $Q_0 = qQ$ , отличную от добротности  $Q$  двух других контуров. При этом полоса пропускания такого контура сужается в  $q$  раз и его обобщенная расстройка принимает значение  $\xi_1 = \frac{2\Delta f}{\Delta F} = q\xi$ . Таким образом, вместо (9.92) получается следующее уравнение частотной характеристики:

$$A = \frac{1}{\sqrt{(1 + q^2\xi^2)[1 + (\xi + \xi_k)^2][1 + (\xi - \xi_k)^2]}}.$$

Для этой характеристики средний максимум остается прежним, а боковые максимумы принимают значение, отличное от (9.93а):

$$A_{\max 2,3} \approx A |_{\xi = \pm \xi_k} = \frac{1}{\sqrt{(1 + q^2 \xi_k^2)(1 + 4\xi_k^2)}}. \quad (9.94)$$

Приравнивая максимумы (9.93) и (9.94), находим

$$(1 + \xi_k^2)^2 = (1 + q^2 \xi_k^2)(1 + 4\xi_k^2),$$

или, полагая  $\xi_k^2 \gg 1$  и  $q^2 \xi_k^2 \gg 1$ ,

$$\xi_k^4 = 4q^2 \xi_k^4.$$

Отсюда получаем  $q = \frac{1}{2}$ , т. е. контур, настроенный на частоту  $f_0$ , должен иметь вдвое меньшую добротность, чем расстроенные относительно него контуры. Выбирая величину этой расстройки  $\xi_k = \xi_{k \max}$ , при которой минимумы характеристики в полосе пропускания опускаются до уровня  $A_{\min} = \frac{A_{\max}}{\sqrt{2}}$ , получим фильтр

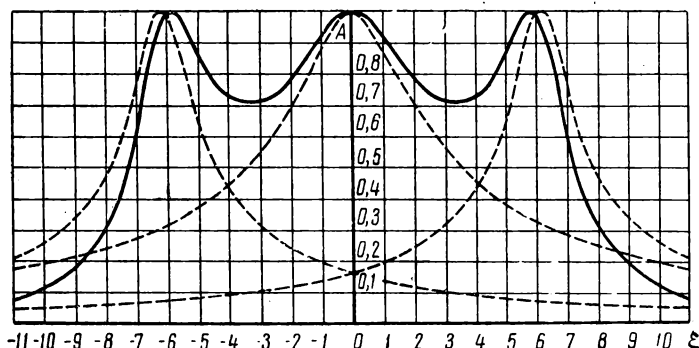


Рис. 9.15. Частотные характеристики трехкаскадного резонансного усилителя и его трех каскадов

с предельной избирательностью. Характеристика такого фильтра в относительном масштабе, при котором  $A_{\max} = 1$ , показана на рис. 9.15, где для сравнения приведены характеристики отдельных каскадов.

Аналогично анализируются характеристики и при большем числе каскадно соединенных контуров, настроенных на три частоты. Расчетные параметры таких многоконтурных фильтров приведены в табл. П.9.

Заметим в заключение, что порядок следования каскадов с контурами, настроенными на разные частоты, может быть произвольным, как это следует из соотношения (9.79).

## § 9.4. ЦЕПОЧЕЧНЫЕ ФИЛЬТРЫ

### 1. Характеристики цепочечных фильтров

Цепочечными фильтрами называются фильтры, образованные путем цепочечного соединения чередующихся последовательных и параллельных элементарных четырехполюсников (рис. 9.16). Примером цепочечных фильтров могут служить схемы связанных контуров, изображенные на рис. 9.11, б и в.

Расчет характеристик цепочечных фильтров осуществляется наиболее просто при разбивке схемы на элементарные звенья. Фильтры, изображенные на рис. 9.16, а и б, могут быть представлены в виде цепочечного соединения канонических Т- и П-образных звеньев

(схемы 5, 7 или 6, 8 табл. П.1). При такой разбивке цепочечных фильтров на звенья схемы, изображенные на рис. 9.16, в и г, требуют добавления полувзвеньев вида 3 или 4 (табл. П.1).

Если звенья соединяются по принципу согласования характеристических сопротивлений, то рабочие характеристики легко определяются через характеристические параметры звеньев по описанной выше методике. При этом выбор числа звеньев производится по заданной избира-

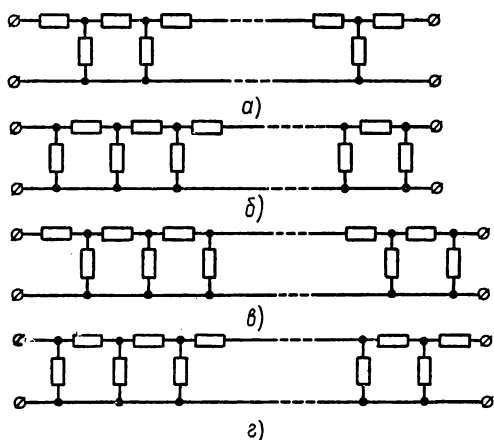


Рис. 9.16. Схемы цепочечных фильтров

тельности фильтра, например, с помощью табл. П.5. Наиболее просто определяются характеристики цепочечных фильтров, составленных из одинаковых симметричных звеньев (рис. 9.17). Ниже рассматриваются только такие симметричные звенья, поскольку они применяются наиболее часто.

В зависимости от вида схемы звеньев цепочечные фильтры могут иметь различные характеристики (см. рис. 9.1). При качественном анализе фильтрующих свойств схемы тип характеристики может быть установлен определением полосы прозрачности звеньев описанным выше образом. Однако характеристики рабочего затухания фильтра могут отличаться от графиков частотной зависимости характеристического затухания не только количественно, как на рис. 9.6, но и качественно. Поэтому целесообразно установить правила для непосредственного определения вида рабочих характеристик цепочечных фильтров. Эти правила сводятся к опреде-

лению нулей и полюсов частотной характеристики затухания ( $a = 0$  и  $a = \infty$ ) или рабочего затухания ( $a_p = 0$  и  $a_p = \infty$ ). Зная нули и полюсы затухания, нетрудно построить частотную характеристику затухания, как это показывается ниже.

Так как при изменении числа звеньев тип характеристики не меняется, то достаточно рассмотреть фильтры, состоящие из одного канонического звена (см. рис. 9.17), нагруженного на одинаковые активные сопротивления  $\dot{Z}_{01} = \dot{Z}_{02} = R_0$ . При этом звенья будем считать идеальными реактивными четырехполюсниками:  $\dot{Z}_1 = jX_1$ ,  $\dot{Z}_2 = jX_2$ .

Выше было показано, что у таких фильтров затухание и рабочее затухание равны нулю при резонансе. Для определения частот этих нулей может быть использовано одно из условий резонанса (9.55) — (9.57). Однако эти уравнения достаточно громоздки. При приближенном анализе задачу можно упростить, если пренебречь влиянием нагрузочных сопротивлений на резонансную частоту. Тогда, исключая нагрузочные сопротивления, для схемы рис. 9.17, а получим следующее условие последовательного резонанса в режиме короткого замыкания:

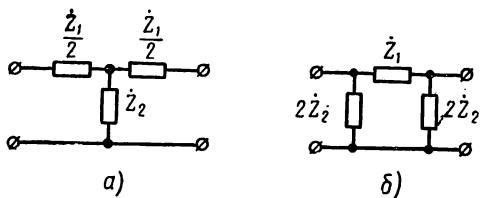


Рис. 9.17. Т- и П-образное звено цепочного фильтра

$$X_{вх} = \frac{X_1}{2} + \frac{\frac{X_1}{2} X_2}{\frac{X_1}{2} + X_2} = 0.$$

Для схемы же рис. 9.17, б следует рассмотреть условие параллельного резонанса в режиме холостого хода:

$$X_{вх} = \frac{2X_2(X_1 + 2X_2)}{X_1 + 4X_2} = \infty.$$

Оба эти уравнения дают одинаковое условие собственного резонанса схемы, из которого определяется ее собственная резонансная частота:

$$X_1 = -4X_2. \quad (9.95)$$

Равенство (9.95) является приближенным условием получения нулей затухания \*. Вследствие влияния нагрузочных сопротивлений

\* Согласно критерию (9.53) равенство (9.95) является также условием, определяющим одну из граничных частот полосы прозрачности. При этом другая граничная частота определяется из условия  $\frac{X_1}{X_2} = 0$ .

нули затухания получаются на резонансных частотах, отличающихся от собственных резонансных частот. Однако при качественном анализе характеристик затухания указанным различием в резонансных частотах можно пренебречь.

Равенство (9.95) является не единственным условием получения нулей затухания. Непосредственно по виду схемы элементарных звеньев можно заключить, что коэффициент передачи (9.58) получается также на частотах, на которых выполняется условие

$$X_1 |_{X_2 = \pm \infty} = 0. \quad (9.96)$$

Следовательно, равенство (9.96) также является условием получения нулей затухания (рабочего затухания). В ряде случаев

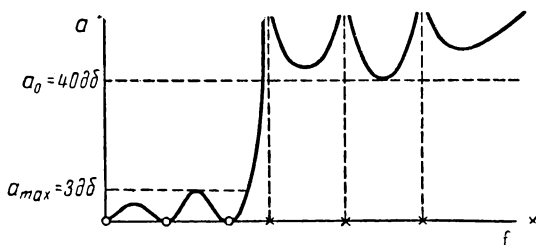


Рис. 9.18. Построение характеристики затухания по нулям и полюсам

при приближенном анализе вместо условия (9.96) можно пользоваться приближенными условиями:

$$X_1 |_{|X_2| \gg R_0} = 0, \quad X_2 |_{|X_1| \ll R_0} = \pm \infty. \quad (9.97)$$

По виду схемы элементарных звеньев можно также заключить, что сигнал не проходит в нагрузку ( $K = 0$ ), если на некоторой частоте выполняется одно из следующих условий:

$$X_1 = \pm \infty, \quad X_2 = 0. \quad (9.98)$$

Таким образом, равенства (9.98) являются условиями получения полюсов затухания ( $a = a_p = \infty$ ).

Уравнения (9.95) — (9.98) выражают условия получения нулей и полюсов затухания через значения сопротивлений плеч звена фильтра. Поэтому построение характеристики затухания осуществляется следующим образом.

1. Строится частотная характеристика  $X_1(f)$ .
2. Строится частотная характеристика  $-4X_2(f)$ .
3. Определяются нули затухания по пересечению характеристик  $X_1(f)$  и  $-4X_2(f)$  в соответствии с условием (9.95).
4. Определяются нули затухания по нулям  $X_1(f)$  и полюсам  $-4X_2(f)$  в соответствии с условиями (9.96) и (9.97).

5. Определяются полюсы затухания по нулям —  $4X_2(f)$  и полюсам  $X_1(f)$  в соответствии с условиями (9.98).

6. Строится частотная характеристика затухания (рабочего затухания) в виде кривой, плавно соединяющей найденные нули и полюсы затухания.

Обычно характеристика имеет несколько нулей затухания. Очевидно, все эти нули должны находиться в полосе пропускания фильтра. Поэтому характеристика строится так, чтобы затухание между смежными нулями не превышало заданного уровня  $a_{\max}$  (см. рис. 9.3). Это показано на рис. 9.18, где нули затухания отмечены кружками, а полюсы затухания — крестиками. При наличии же смежных полюсов затухания характеристика строится так, чтобы затухание между этими полюсами не опускалось ниже некоторого заданного уровня  $a_0$  (например,  $a_0 = 40$  дБ, как на рис. 9.18).

При практическом построении фильтра обеспечение заданных уровней  $a_{\max}$  и  $a_0$  достигается путем соответствующего выбора параметров фильтра, как это показывается ниже.

## 2. Фильтры типа $\rho$

Цепочечные фильтры, у которых произведение сопротивлений плеч  $\dot{Z}_1$  и  $\dot{Z}_2$  (см. рис. 9.17) равно некоторой постоянной величине

$$\rho^2 = \dot{Z}_1 \dot{Z}_2, \quad (9.99)$$

называются фильтрами типа  $\rho$  \*. Величина  $\rho$  называется характеристическим сопротивлением такого фильтра.

В простейшем случае условию (9.99) удовлетворяют сопротивления реактивных элементов  $L$  и  $C$ :

$$j\omega L \frac{1}{j\omega C} = \frac{L}{C} = \rho^2. \quad (9.100)$$

При одинаковой настройке последовательный реактивный двухполюсник с сопротивлением  $j\rho'v$  и параллельный реактивный двухполюсник с сопротивлением  $\frac{\rho''}{jv}$  также удовлетворяют условию (9.99):

$$j\rho'v \frac{\rho''}{jv} = \rho'\rho'' = \rho^2. \quad (9.101)$$

При использовании указанных двухполюсников в различных плечах канонических звеньев (см. рис. 9.17) получаются схемы, изображенные на рис. 9.19, *a* и *б* — 9.22, *a* и *б*. Из построений на рис. 9.19, *в* и *г* — 9.22, *в* и *г*, выполненных по описанным выше правилам, видно, что полученные схемы обладают селективными свойствами и являются соответственно ФНЧ, ФВЧ, ПФ и ЗФ.

\* В специальной литературе произведение (9.99) часто обозначается через  $K^2$  и фильтры соответственно называются фильтрами типа  $K$ .

Во всех перечисленных фильтрах пренебрежение потерями не приводит к существенным погрешностям при определении характеристик. Однако в случае заградительных фильтров (см. рис. 9.22)

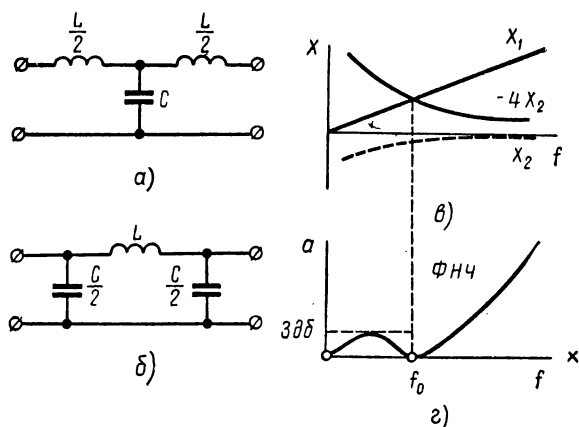


Рис. 9.19. ФНЧ типа  $\rho$  и построение его характеристики затухания

следует учитывать, что наличие потерь ограничивает затухание на частоте  $f_{\infty}$ , как показано пунктирной линией на рис. 9.22, *г*.

Рассмотрим соображения по выбору параметров схемы на примере Т-образного фильтра нижних частот (рис. 9.23, *а*). Для этого

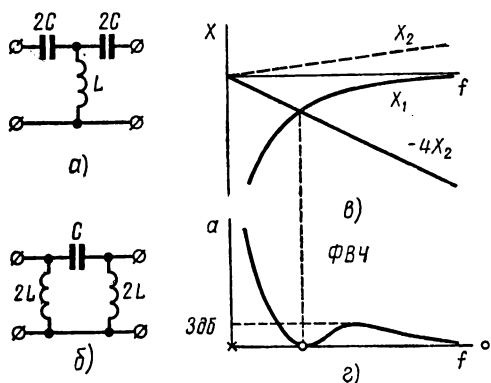


Рис. 9.20. ФВЧ типа  $\rho$  и построение его характеристики затухания

фильтра в соответствии с условием (9.95) определяется собственная резонансная частота

$$\omega_0 = \frac{2}{\sqrt{LC}}. \quad (9.102)$$

Характеристическое сопротивление  $\rho$  рассматриваемого фильтра определяется равенством (9.100).

Полный анализ характеристик фильтра может быть произведен по уравнению (6.71а), которое в соответствии с табл. П.1 (схема б) принимает следующий вид:

$$K = \frac{1}{2} \frac{1}{1 - 2\Omega^2 + j \frac{\Omega}{r_0} (1 + r_0^2 - \Omega^2)}. \quad (9.103)$$

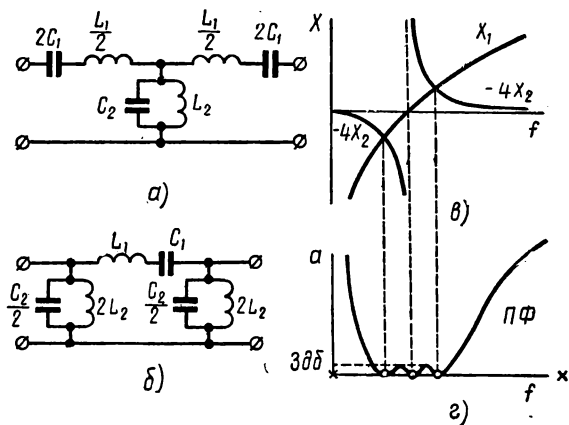


Рис. 9.21. ПФ типа  $\rho$  и построение его характеристики затухания

Здесь

$$\Omega = \frac{\omega}{\omega_0} \quad (9.104)$$

— относительная частота;

$$r_0 = \frac{R_0}{\rho} \quad (9.105)$$

— коэффициент нагрузки фильтра.

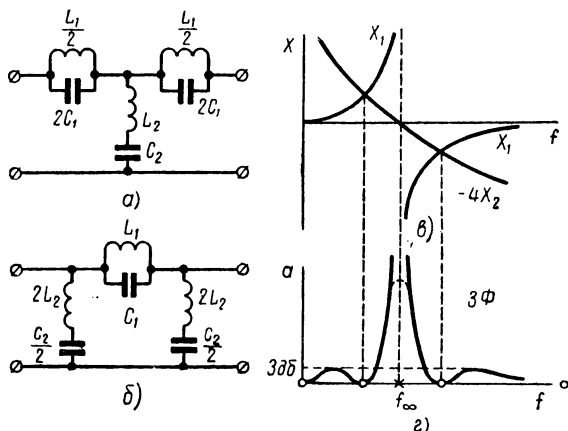


Рис. 9.22. ЗФ типа  $\rho$  и построение его характеристики затухания



Однако ряд выводов может быть получен и без анализа уравнения (9.103). Непосредственно из уравнения (9.57) определяется фактическая резонансная частота фильтра:

$$\omega'_0 = \omega_0 \sqrt{1 - r_0^2}. \quad (9.106)$$

Из формулы (9.106) видно, что с увеличением сопротивления  $R_0$  резонансная частота уменьшается, как показано на рис. 9.23, б. При  $R_0 = \rho$  резонанс вообще исчезает и характеристика спадает

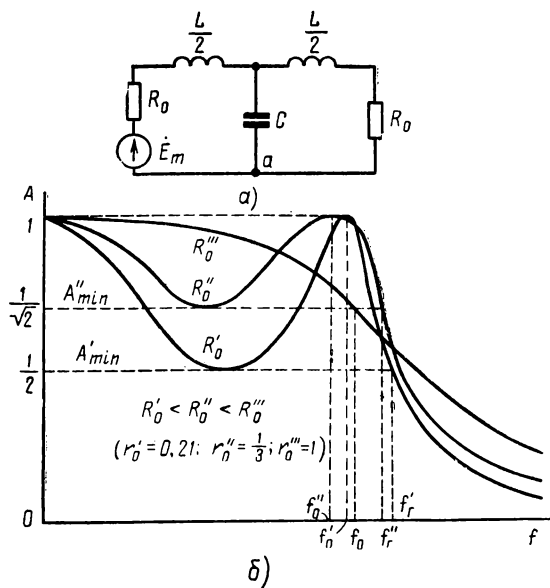


Рис. 9.23. Включение Т-образного ФНЧ между нагрузочными сопротивлениями и их влияние на характеристики фильтра

монотонно с ростом частоты. При  $r_0^2 \ll 1$  резонансная частота фильтра мало отличается от его собственной резонансной частоты, как это видно из формулы (9.106) и рис. 9.23, б.

Особо существенным является то обстоятельство, что с уменьшением величины  $R_0$  резонансные свойства проявляются более резко и резонансный пик становится острее. При этом спад характеристики получается более крутым и избирательность фильтра возрастает.

Таким образом, уменьшение сопротивления  $R_0$  является выгодным с точки зрения снижения коэффициента прямоугольности. Однако с уменьшением сопротивления  $R_0$ , когда резонансный пик становится острее, минимум характеристики  $A_{\min}$  в полосе пропускания уменьшается, т. е. увеличивается неравномерность характе-

ристики затухания в полосе пропускания. Поскольку указанная неравномерность не должна превышать определенного заданного значения, величина  $R_0$  получается ограниченной снизу.

На рис. 9.24 приведен график неравномерности затухания  $\Delta a$ , который может служить для выбора нагрузочного коэффициента  $r_0$ . Из этого графика видно, что  $\Delta a = 3$  дБ при  $r_0 = \frac{1}{3}$  и  $\Delta a = 6$  дБ при  $r_0 = 0,21$ . При этих значениях  $r_0$  и построены характеристики на рис. 9.23, б.

Из рис. 9.23 видно, что при изменении нагрузочного коэффициента меняется несколько и граничная частота полосы пропускания. При практических расчетах можно пользоваться следующими относительными  $\Delta a, \delta\delta$  значениями граничной частоты:

$$\Omega_r |_{r_0=0,33} = 1,09, \quad (9.107)$$

$$\Omega_r |_{r_0=0,21} = 1,13.$$

Полный расчет Т-образного фильтра можно произвести по заданным значениям  $\omega_r$  и  $R_0$  с помощью формул (9.100), (9.102), (9.105) и (9.107). При этом коэффициент нагрузки выбирается по графику рис. 9.24.

В П-образном ФНЧ получаются такие же характеристики, как и в Т-образном фильтре. Однако для этого сопротивление  $R_0$  при выбранном нагрузочном коэффициенте надо определять не по формуле (9.105), а из соотношения

$$r_0 = \frac{\rho}{R_0}. \quad (9.108)$$

Это обусловлено тем, что с ростом сопротивления  $R_0$  затухание, вносимое в контур П-образного фильтра, уменьшается, а не увеличивается, как в Т-образном фильтре.

Учитывая подобие характеристик фильтров типа  $\rho$  различного вида, по приведенным здесь формулам можно рассчитывать и другие фильтры, если вместо относительной частоты (9.104) пользоваться понятиями  $\Omega = \frac{\omega_0}{\omega}$  (для ФВЧ),  $\Omega = \frac{\Delta f}{\Delta F_0}$  (для ПФ) и  $\Omega = \frac{\Delta F_0}{\Delta f}$  (для ЗФ). Здесь  $\Delta F_0$  — расстройка, определяемая из условия (9.95).

Найденные таким образом расчетные формулы сведены в табл. П.10.

Полосовые фильтры типа  $\rho$  содержат три контура, и при оптимальном выборе параметров получается чебышевская характеристика с коэффициентом прямоугольности  $K_{ПЗ \frac{40}{\delta\delta}} = 3,01$  (см. П.3, П.5).

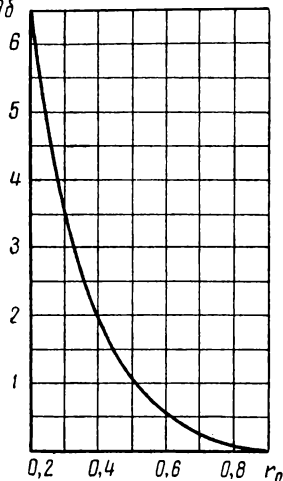


Рис. 9.24. График зависимости неравномерности затухания от нагрузочного коэффициента

Для остальных фильтров типа  $\rho$  получается такой же коэффициент прямоуглольности, поскольку все они имеют подобные характеристики. Отсюда следует, что для ФНЧ, например, избирательность определяется числом реактивных элементов, подобно тому как избирательность ПФ определяется числом  $LC$ -контуров. Поэтому для многосвязных фильтров типа  $\rho$ , составленных из одинаковых звеньев (с одинаковыми характеристическими сопротивлениями), избирательность можно определять по табл. П.5, понимая под величиной  $n$  или число  $LC$ -контуров в схемах ПФ и ЗФ или число реактивных элементов в схемах ФНЧ и ФВЧ. Для таких фильтров с  $n$   $LC$ -контурами (или  $n$  реактивными элементами) оптимальный нагрузочный коэффициент  $r_0$  и относительную граничную частоту  $\Omega_r$  (на уровне 3 дБ) следует выбирать из табл. П.11.

В табл. П.11 включено для общности и двухконтурное (двух-элементное) звено, т. е. полузвено, входящее в несимметричные схемы фильтров (см. рис. 9.16, *в* и *г*).

### 3. Фильтры типа $m$

Выше было показано, что коэффициент прямоуглольности одно-звенных фильтров типа  $\rho$  при оптимальном выборе параметров имеет минимальное значение порядка трех единиц. Дальнейшее уменьшение коэффициента прямоуглольности возможно за счет усложнения схемы фильтров.

Рассмотрим способ построения такой усложненной схемы на примере фильтра нижних частот. Если в последовательном плече ФНЧ (см. рис. 9.19, *а* и *б*) параллельно индуктивности включить емкость, то образуется параллельный двухполюсник, как показано на рис. 9.25, *а* и *б*. Такие схемы называются параллельно-производными фильтрами. Характеристики этих фильтров построены на рис. 9.25, *в* и *г*, где пунктиром изображена характеристика Т-образного фильтра в полосе затухания, а сплошными линиями — характеристики П-образного фильтра.

Величина  $a_{\min}^T$  получается меньше  $a_{\min}^P$  из-за различного соотношения между сопротивлениями плеч фильтров и нагрузочными сопротивлениями. Действительно, в полосе пропускания характеристики рассматриваемых фильтров мало отличаются от характеристик типа  $\rho$  (ср. рис. 9.25, *в* и 9.19, *в*). Поэтому при определении величины  $R_0$  можно пользоваться прежними формулами (9.105) и (9.108), в которых согласно соотношению (9.100) следует принять

$$\rho = \sqrt{\frac{L_1}{C_2}}. \quad (9.109)$$

Поскольку  $r_0 = \frac{1}{3}$ ,  $R_{0П} = 9R_{0Т}$ , как и показано на рис. 9.25, *в*. При таком соотношении между сопротивлениями параллельные

плечи П-образного фильтра оказывают резкое шунтирующее влияние в полосе затухания ( $|X_2| \ll R_{0П}$ ). Последовательные же плечи Т-образного фильтра в полосе затухания имеют сопротивление, мало отличающееся от нагрузочных сопротивлений, и поэтому оказывают слабое фильтрующее действие.

Подобные же характеристики можно получить, заменив полюс сопротивления в последовательном плече нулем сопротивления в параллельном плече. Для этого в параллельном плече ФНЧ типа  $\rho$  (см. рис. 9.19, *а* и *б*) надо добавить последовательно включенную индуктивность, как показано на рис. 9.26, *а* и *б*). Такие

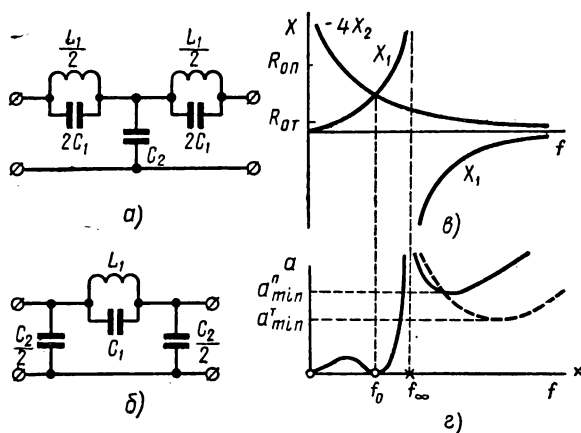


Рис. 9.25. Параллельно-производные звенья ФНЧ типа  $m$  и их характеристики

схемы называются последовательно-производными фильтрами. Характеристики этих фильтров построены на рис. 9.26, *в* и *г*.

В рассматриваемом случае характеристики Т- и П-образного звеньев также отличаются. Общая закономерность здесь такая: у звена с меньшим числом элементов получается лучшая характеристика затухания. Поэтому ниже рассматриваются только четырехэлементные ФНЧ и ФВЧ и четырехконтурные ПФ и ЗФ.

Из рис. 9.25 и 9.26 видно, что полюс затухания получается на частоте

$$\omega_\infty = \frac{1}{\sqrt{L_1 C_1}} \quad (9.110)$$

или

$$\omega_\infty = \frac{1}{\sqrt{L_2 C_2}} \quad (9.110a)$$

Меняя соотношение

$$m = \frac{\omega_0}{\omega_\infty}, \quad (9.111)$$

можно изменять коэффициент прямоугольности, который практически равен

$$K_{\text{ПД}a} \approx \frac{\omega_{\infty}}{\omega_r} = \frac{1}{m\Omega_r}. \quad (9.112)$$

Учитывая характерный смысл параметра  $m$ , определяющего избирательность рассматриваемых фильтров, их можно назвать фильтрами типа  $m^*$ .

Избирательность фильтров типа  $m$  может быть выше, чем у фильтров типа  $\rho$ . Действительно, так как  $\Omega_r$  имеет величину порядка единицы, то выбрав  $m > \frac{1}{3}$ , получим  $K_{\text{П}} < 3$ .

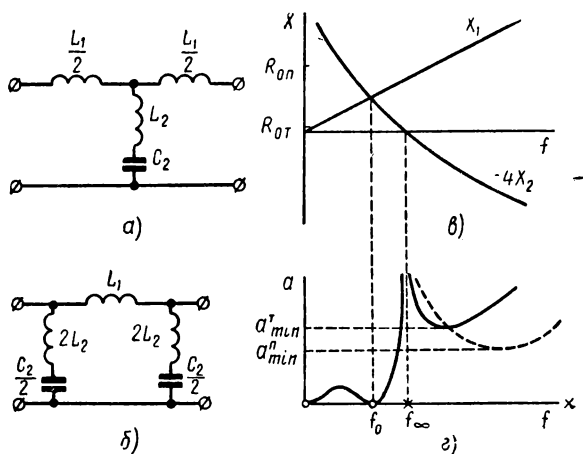


Рис. 9.26. Последовательно-производные звенья ФНЧ типа  $m$  и их характеристики

Однако коэффициент прямоугольности в фильтрах типа  $m$  можно уменьшать только до определенного предела. Причина такого ограничения заключается в уменьшении величины  $a_{\min}$  по мере увеличения параметра  $m$  (рис. 9.27). Графики на этом рисунке построены по общей формуле (6.71а), которая для рассматриваемых фильтров принимает вид

$$K = \frac{1}{2} \frac{m^2 \Omega^2 - 1}{(2 - m^2) \Omega^2 - 1 + j \sqrt{1 - m^2} \left( \frac{\Omega^2 - 1}{r_0} - r_0 \right) \Omega}. \quad (9.113)$$

\* В литературе принимается обычно другое определение параметра  $m$ , при котором отношение частот  $\omega_0$  и  $\omega_{\infty}$  равно  $\sqrt{1 - m^2}$ . При принятом здесь обозначении упрощается запись основных формул и их анализ.

Уменьшение затухания обусловлено увеличением емкости  $C_1$  (см. рис. 9.25) или индуктивности  $L_2$  (см. рис. 9.26) при уменьшении частоты  $\omega_\infty$  (увеличении параметра  $m$ ). При этом в полосе затухания сопротивление последовательного плеча падает, а сопротивление параллельного плеча возрастает, что и приводит к ухудшению фильтрации.

Для предотвращения чрезмерного уменьшения величины  $a_{\min}$  параметр  $m$  можно выбирать по рис. 9.28, а, одновременно определяя нагрузочный коэффициент по графикам рис. 9.28, б или в. Расчетные графики на этих рисунках построены по уравнению (9.113).

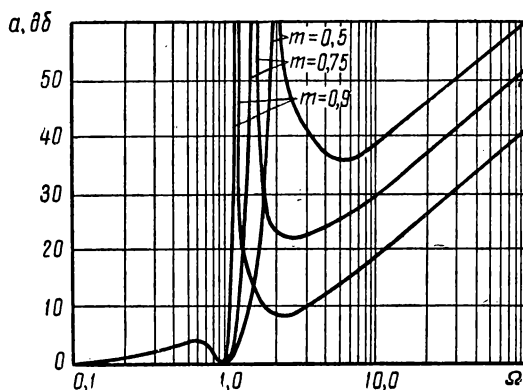


Рис. 9.27. Влияние параметра  $m$  на характеристики ФНЧ

Как и в случае фильтров типа  $\rho$ , все расчетные соотношения для ФНЧ, ФВЧ, ПФ и ЗФ типа  $m$  оказываются идентичными при соответствующей смене обозначений. Поэтому выводы, полученные для ФНЧ, остаются справедливыми и для других фильтров типа  $m$ . Схемы этих фильтров приведены на рис. 9.29, а их характеристики затухания студентам предоставляется построить самостоятельно.

Расчетные формулы для фильтров типа  $m$  приведены в табл. П.12.

В заключение следует заметить, что в тех случаях, когда не удастся обеспечить достаточно большое значение  $a_{\min}$  при заданном коэффициенте прямоугольности, можно применять цепочное соединение звеньев типа  $m$  и  $\rho$  одинакового вида. При этом, учитывая малое различие характеристик в полосе пропускания, можно считать их соединенными по принципу согласования характеристических сопротивлений (в полосе пропускания). Если и в полосе непрозрачности производить сложение характеристических коэффициентов передачи, то фактическое

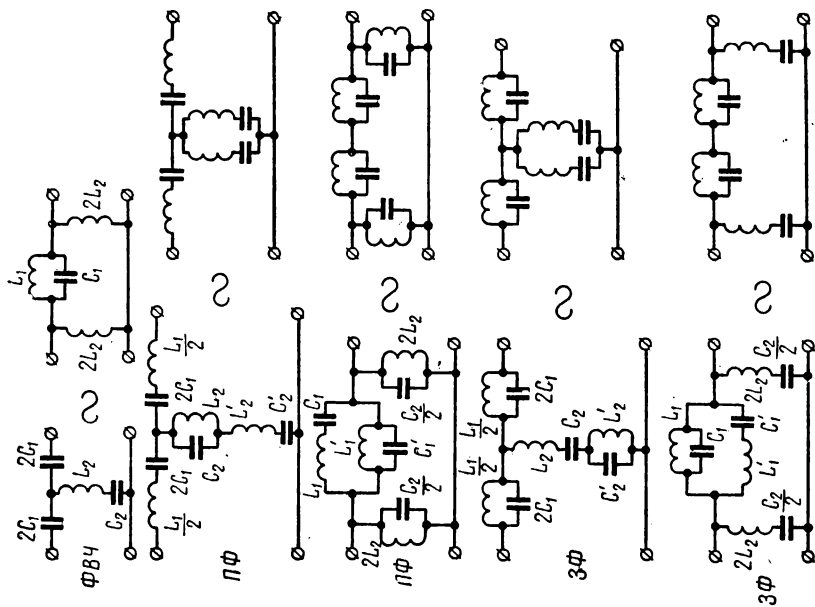


Рис. 9.29. Схемы фильтров типа  $m$

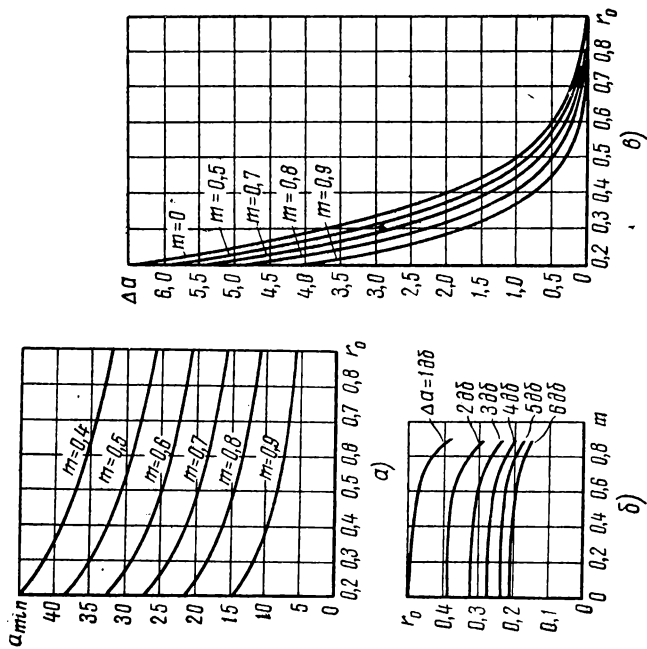


Рис. 9.28. Расчетные графики фильтров типа  $m$

рабочее затухание будет не меньше найденного таким образом рабочего затухания (за счет рассогласования звеньев). Поэтому при таком расчете двухзвенного фильтра затухание будет определено с запасом.

#### 4. Применение цепочечных фильтров для задержки сигналов

В радиолокационных, радионавигационных и других устройствах возникает задача задержки сигналов во времени, которая может быть осуществлена, например, с помощью длинной линии. Однако при скорости распространения  $v = 3 \cdot 10^8$  м/сек задержка сигнала всего на 1 мксек потребует линию длиной 300 м. Для получения приемлемых размеров линии задержки надо уменьшить фазовую скорость, т. е. в соответствии с формулой (8.27) увеличить

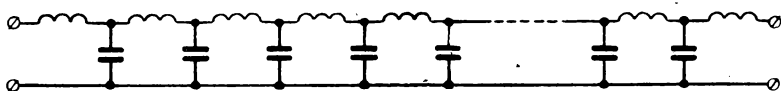


Рис. 9.30. Схема искусственной длинной линии

погонную индуктивность и емкость линии. Этого можно достигнуть простым включением в линии ряда катушек и конденсаторов. В конечном итоге получается конструкция, называемая искусственной длинной линией. Схема искусственной линии задержки (рис. 9.30) является, очевидно, цепочечным фильтром нижних частот.

Рассмотрим основные соображения по выбору параметров искусственных линий задержки. Если на входе четырехполюсника с коэффициентом передачи  $K = Ke^{j\Theta}$  действует э. д. с.  $e = E_m \cos(\omega t + \psi)$ , то на выходе получаются колебания

$$u = KE_m \cos(\omega t + \psi + \Theta) = KE_m \cos[\omega(t - t_3) + \psi],$$

где

$$t_3 = -\frac{\Theta}{\omega}. \quad (9.114)$$

Величина  $t_3$  и есть время запаздывания сигнала на выходе четырехполюсника, т. е. искомое время задержки.

Поскольку сигналы представляют собой не гармонические, а сложные колебания, все гармонические составляющие сигнала должны испытывать одинаковую задержку  $t_3 = \tau = \text{const}$ . Отсюда в соответствии с уравнением (9.114) фазовая характеристика четырехполюсника должна выражаться прямой линией, проходящей через начало координат:

$$\Theta = -\tau\omega. \quad (9.115)$$



Равенство (9.115) является одним из условий отсутствия фазовых искажений сложных сигналов. Графическое рассмотрение этого условия производилось выше (см. рис. 1.16).

Обратимся теперь к звену ФНЧ типа  $\rho$  (см. рис. 9.19, а), которое является составной частью искусственной линии задержки (см. рис. 9.30). На рис. 9.31 по уравнению (9.103) построена фазовая характеристика такого звена при  $r_0 = \frac{1}{3}$  (кривая 1), которая в полосе пропускания существенно отличается от прямой линии. Однако при  $r_0 = 1$  (кривая 2) фазовая характеристика заметно выпрямляется. Уменьшение нагрузочного коэффициента в фильтре до значения  $r_0 = \frac{1}{3}$  рекомендуется с целью

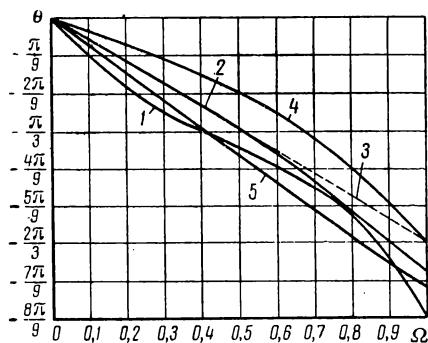


Рис. 9.31. Фазовые характеристики различных звеньев ФНЧ

увеличения селективности. В линиях же задержки вообще не требуется осуществлять селекцию. Поэтому в рассматриваемом случае следует выбирать  $r_0 = 1$ .

При таком выборе нагрузки можно пренебречь отклонением фазовой характеристики от прямой, показанной пунктирной линией 3 на рис. 9.31. При этом, как видно из графика, время задержки (9.114) может быть вычислено следующим образом:

$$t_3 = - \left. \frac{\Theta}{\omega} \right|_{\omega=\omega_0} = \frac{2\pi}{3\omega_0}. \quad (9.116)$$

Подставив в это равенство значение  $\omega_0$  из формулы (9.102), получаем окончательно:

$$t_3 = \frac{\pi}{3} \sqrt{LC} \approx 1,05 \sqrt{LC}. \quad (9.116a)$$

Отсюда видно, что для увеличения времени задержки надо увеличивать значения  $L$  и  $C$ . Однако при этом сужается полоса пропускания фильтра, которая ограничена снизу шириной спектра сигнала. Если, например, спектр занимает полосу  $0 \div 5 \text{ МГц}$ , то должно быть  $\omega_r = \omega_0 = 10^7 \pi$ , поскольку  $\Omega_r|_{r_0=1} = 1$ . При этом в соответствии с формулами (9.102), (9.116)  $\sqrt{LC} = \frac{2}{\pi} 10^{-7}$  и  $t_3 \approx 0,067 \text{ мксек}$ . Для увеличения времени задержки применяется  $n$ -звенный цепочечный фильтр, который дает задержку в  $n$  раз большую:

$$t_3 = \frac{n\pi}{3} \sqrt{LC} \approx 1,05n \sqrt{LC}. \quad (9.117)$$

Из предыдущего рассмотрения следует, что в качестве искусственной линии задержки может быть использован любой фильтр нижних частот, в частности, и цепочечный ФНЧ типа  $m$ . Однако обычный фильтр типа  $m$  (см. рис. 9.26,  $a$ ) в качестве линии задержки работает хуже, чем фильтр типа  $\rho$ . На рис. 9.31 приведена фазовая характеристика 4 при  $r_0 = 1$  и  $m = 0,8$ , построенная по уравнению (9.113). Из графика видно, что фильтр типа  $\rho$  является более предпочтительным.

Однако в фильтре типа  $m$  (см. рис. 9.26,  $a$ ) имеется дополнительная возможность выпрямить фазовую характеристику за счет должного выбора параметра  $m$ . Поскольку селективность здесь не имеет значения, фазовую характеристику можно спрямлять уменьшением параметра

$m$  вплоть до нуля. Очевидно, что в этом случае результат будет не лучше, чем в фильтре типа  $\rho$ , так как при  $m = 0$  ( $\omega_\infty = \infty$ ) оба фильтра становятся идентичными. Может возникнуть вопрос: если фазовая характеристика спрямляется при уменьшении величины  $L_2$  до нуля,

когда частота (9.110а) возрастает до бесконечности, возможно ли продолжить это спрямление, уменьшая дальше индуктивность  $L_2$ ?

Ведь дальнейшее уменьшение индуктивности  $L_2$  означает, что она становится отрицательной. Однако, вспомнив рис. 7.31,  $a$ , приходим к выводу, что возможно.

Достаточно построить схему ФНЧ типа  $m$  с индуктивно связанными катушками (рис. 9.32,  $a$ ), чтобы при согласном включении катушек получить отрицательную индуктивность  $L_2 = -M$  (рис. 9.32,  $b$ ). Что дает такое звено фильтра?

При отрицательной индуктивности  $L_2$  частота (9.110а) и параметр (9.111) становятся мнимыми. На рис. 9.31 по уравнению (9.113) построена фазовая характеристика 5 при  $m = j0,8$ ,  $r_0 = 1$ , которая является практически идеальной прямой линией.

Помимо большей линейности фазовой характеристики, звено ФНЧ типа  $m$  с отрицательной индуктивностью дает и несколько большую задержку в сравнении с ФНЧ типа  $\rho$ . Из рис. 9.31 видно, что для этого звена

$$t_3 \approx \frac{7\pi}{9\omega_0}. \quad (9.118)$$

Из формул (9.116) и (9.118) следует, что указанный выигрыш равен приблизительно 17%.

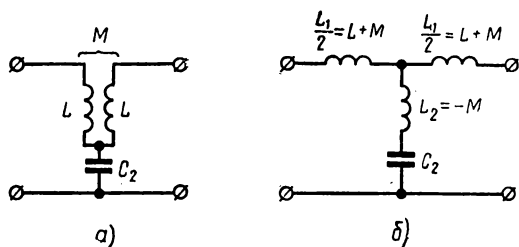


Рис. 9.32. Звено ФНЧ с отрицательной индуктивностью

Подставив в формулу (9.118) значение

$$\omega_0 = \frac{2\sqrt{1-m^2}}{\sqrt{L_1 C_2}},$$

полученное из условия (9.95), находим окончательно (при  $m = j0,8$ ):

$$t_3 = \frac{7\pi}{18\sqrt{1-m^2}} \sqrt{L_1 C_2} \approx 0,953 \sqrt{L_1 C_2}. \quad (9.118a)$$

Для большей наглядности сравнения рассмотренных звеньев ФНЧ на рис. 9.33 приведены графики  $t_3(\Omega)$  в относительном масштабе ( $\tau = t_3 |_{\Omega=1}$ ). Нумерация графиков на рис. 9.33 соответствует

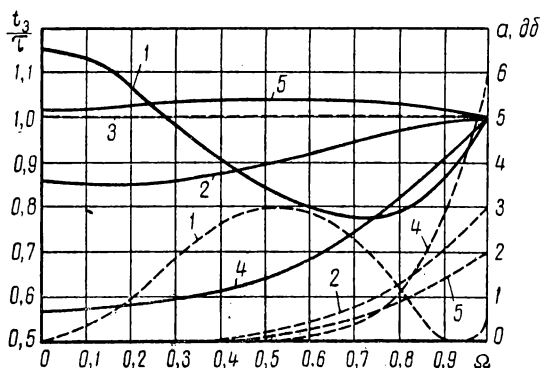


Рис. 9.33. Частотные характеристики задержки и затухания различных звеньев ФНЧ

нумерации графиков на рис. 9.31. На рис. 9.33 показаны пунктиром характеристики затухания соответствующих звеньев в полосе пропускания. Графики рис. 9.33 подтверждают преимущества искусственной линии задержки в виде ФНЧ типа  $m$  при  $m = j0,8$  и  $r_0 = 1$ . Эти параметры являются наиболее оптимальными для линий задержки рассмотренного типа.

## § 9.5. МОСТОВЫЕ ФИЛЬТРЫ

### 1. Характеристики мостовых фильтров

Мостовыми фильтрами называются селективные цепи, в которых сигнал проходит в нагрузку по нескольким каналам. Благодаря подобному соединению элементов в мостовых фильтрах на некоторых частотах получаются полюсы затухания за счет взаимной компенсации колебаний, приходящих на выход цепи различными путями. Поэтому в отличие от цепочечных фильтров в мостовых фильтрах возможны идеальные полюсы затухания даже при наличии потерь.

Основной схемой мостового фильтра, называемой Х-образной, является каноническая схема, приведенная в табл. П.1 под номером 9. Эта схема не содержит ветвей, соединяющих накоротко входные и выходные зажимы. В ряде случаев такая особенность является обязательным условием совместной работы нескольких фильтров.

Из соотношения (6.71a) и матрицы Х-образной схемы, приведенной в табл. П.1, следует, что при

$$X_1 = X_2$$

коэффициент передачи равен нулю, т. е. затухание получается бесконечно большим. Для удобства дальнейшего изложения запишем это условие в виде

$$x_1 = x_2, \quad (9.119)$$

где  $x = \frac{X}{R_0}$  — нормированное сопротивление.

Частными случаями равенства (9.119) являются следующие условия получения полюсов затухания:

$$x_1 = x_2 = 0, \quad x_1 = x_2 = \pm \infty. \quad (9.120)$$

Кроме этих идеальных условий, иногда можно пользоваться приближенными условиями получения полюсов затухания:

$$x_1 |_{|x_2| \ll 1} = 0, \quad x_2 |_{|x_1| \ll 1} = 0, \quad (9.121)$$

$$x_1 |_{|x_2| \gg 1} = \pm \infty, \quad x_2 |_{|x_1| \gg 1} = \pm \infty. \quad (9.122)$$

Рассмотрим теперь условия получения нулей затухания в Х-образном фильтре. Подставив значения матричных коэффициентов из табл. П.1 в равенство (9.55), находим условие резонанса в Х-образной симметричной схеме:

$$X_1 X_2 = -R_0^2,$$

или

$$x_1 = y_2. \quad (9.123)$$

Здесь  $y_2 = -\frac{1}{x_2}$  — нормированная проводимость скрещенных плеч фильтра.

Равенство (9.123) и является условием получения нулей затухания.

Частными случаями условия (9.123) являются равенства

$$x_1 |_{x_2 = \pm \infty} = 0, \quad (9.124)$$

$$x_1 |_{x_2 = 0} = \pm \infty. \quad (9.125)$$

Из рассмотрения Х-образной схемы видно, что эти два условия определения нулей затухания соответствуют непосредственному подключению нагрузки к источнику, за счет чего и получается  $K = K_{\max} = \frac{1}{2}$ .

В некоторых случаях вместо идеальных условий (9.124), (9.125) можно пользоваться приближенными условиями нахождения нулей затухания:

$$x_1 \mid |x_2| \gg 1 = 0, \quad |x_1 \mid x_2 = \pm \infty \ll 1, \quad (9.126)$$

$$x_1 \mid |x_2| \ll 1 = \pm \infty, \quad |x_1 \mid x_2 = 0 \gg 1. \quad (9.127)$$

В соответствии с условиями получения полюсов и нулей затухания можно сформулировать следующие правила графического построения характеристик Х-образных фильтров:

1. Строятся частотные характеристики нормированных сопротивлений  $x_1(f)$  и  $x_2(f)$ . На этом же графике строится характеристика  $y_2(f) = -\frac{1}{x_2(f)}$ .

2. В соответствии с условием (9.119) по пересечению характеристик  $x_1$  и  $x_2$  определяются полюсы затухания.

3. Определяются полюсы затухания в соответствии с условиями (9.120) или (9.121), (9.122).

4. В соответствии с условием (9.123) по пересечению характеристик  $x_1$  и  $y_2$  определяются нули затухания.

5. Определяются нули затухания в соответствии с условиями (9.124), (9.125) или (9.126), (9.127).

6. Соединяя плавной кривой найденные нули и полюсы затухания, строим частотную характеристику затухания фильтра.

При этом, как и в случае цепочечных фильтров, исходят из предположения, что при надлежащем выборе параметров фильтра затухание между смежными нулями не превышает трех (шести) децибел, а затухание между смежными полюсами не опускается ниже заданного уровня  $a_{\min}$  (40 ÷ 60 дБ).

Из предыдущего изложения видно, что в зависимости от выбранных параметров Х-образной схемы в одном и том же фильтре могут быть весьма разнообразные характеристики. В частности, в зависимости от того, какое из условий (9.121), (9.122) или (9.126), (9.127) выполняется на некоторой частоте, на этой частоте может быть или полюс или нуль затухания. Поэтому невозможно рекомендовать стандартные формулы для расчета параметров Х-образных фильтров, подобные тем, которые приводились выше для цепочечных фильтров. Оптимальным методом расчета Х-образных фильтров является их синтез по заданной частотной характеристике затухания.

Благодаря возможности получения идеальных полюсов затухания, вблизи полосы пропускания коэффициент прямоугольности Х-образных фильтров может быть существенно уменьшен по сравнению с цепочечными фильтрами.

## 2. Х-образные мостовые фильтры

На рис. 9.34 приведены элементарные схемы Х-образных мостовых фильтров. Пунктирными линиями показаны ветви фильтра, одинаковые с симметричными им ветвями.

На рис. 9.35 построены в качестве примера характеристики затухания ФНЧ, изображенного на рис. 9.34, а. Построение выполнено в двух вариантах.

Вариант построения на рис. 9.35, а соответствует случаю, когда на частоте  $f'$  выполняется условие (9.123), т. е. получается нуль затухания. На рис. 9.35, б это условие получения нуля затухания не выполняется ни на какой частоте (кроме частоты  $f = 0$ ).

Следует заметить, что на частоте  $f_0$ , где  $x_1 = 0$ , величина  $x_2 = x_{20}$  не удовлетворяет ни одному из условий (9.120), (9.121), (9.124), (9.126). Поэтому на частоте  $f_0$  получается некоторое конечное затухание.

В случае Х-образных ПФ для получения соответствующей характеристики затухания контуры, стоящие в разных плечах схемы, должны обязательно иметь разную настройку, как показано на рис. 9.36, а для схемы рис. 9.34, д. Аналогично резонансные контуры Х-образных ЗФ (см. рис. 9.34, ж) также должны иметь разную настройку (рис. 9.36, б).

Характеристики Х-образных мостовых фильтров, изображенных на рис. 9.34, б, в, г и е, студентам предоставляется построить самостоятельно.

Помимо рассмотренных элементарных схем, на практике используются более сложные схемы Х-образных мостовых фильтров. Некоторые из них рассматриваются ниже.

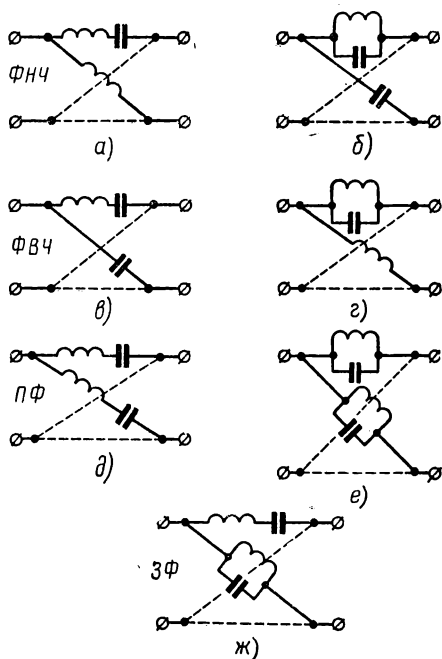


Рис. 9.34. Схемы Х-образных мостовых фильтров

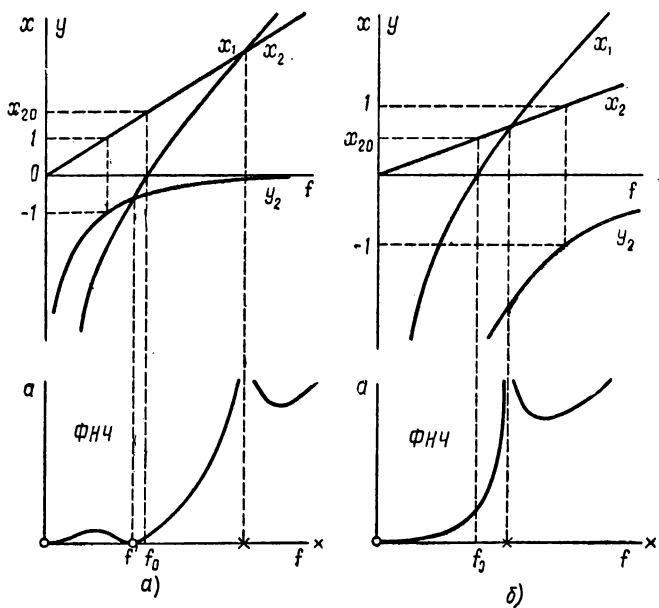


Рис. 9.35. Построение характеристик затухания X-образных ФНЧ

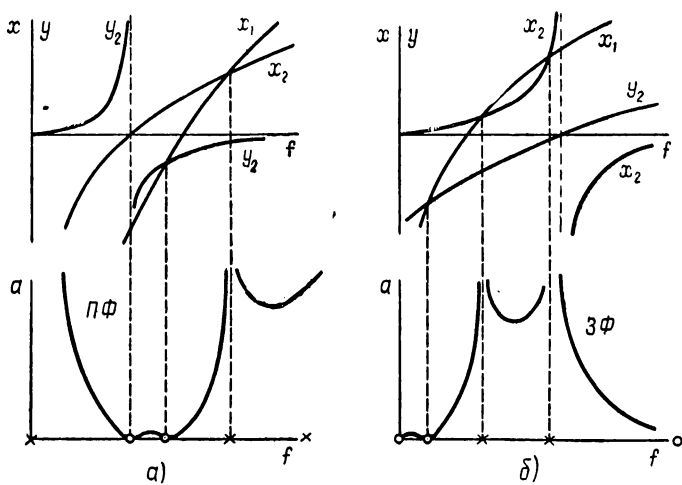


Рис. 9.36. Построение характеристик затухания X-образных ПФ и ЗФ

### 3. Дифференциально-мостовые фильтры

Х-образные мостовые фильтры содержат две пары одинаковых двухполюсников — больше, чем звено цепочечного фильтра. Однако, преобразовав схему Х-образного фильтра и введя при этом дифференциальный трансформатор, можно сократить число элементов в фильтре. При этом получается схема, называемая дифференциально-мостовым фильтром.

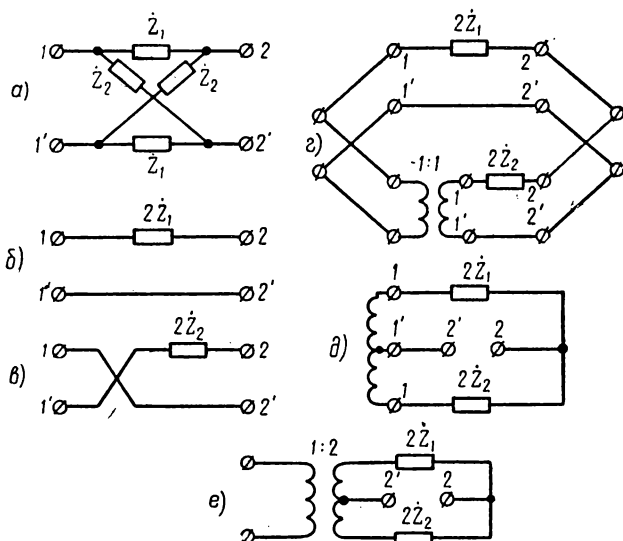


Рис. 9.37. Преобразование Х-образной схемы в дифференциально-мостовую схему

Указанное преобразование показано на рис. 9.37. В соответствии с преобразованием на рис. 6.8 исходную схему (рис. 9.37, а) можно разбить на два четырехполюсника, показанных на рис. 9.37, б и в. Эти элементарные четырехполюсники должны быть соединены параллельно. Однако вследствие переноса сопротивлений в одно плечо каждого из элементарных четырехполюсников при их параллельном соединении зажимы  $1—1'$  окажутся замкнутыми накоротко через зажим  $2'$ .

Для предотвращения короткого замыкания на входе одного из четырехполюсников можно поставить идеальный трансформатор с коэффициентом трансформации, равным единице. При введении в схему такого трансформатора коэффициент передачи четырехполюсника не изменяется, но становится возможным параллельное соединение четырехполюсников, как показано на рис. 9.37, г. Здесь принят отрицательный коэффициент трансформации, что эквивалентно скрещиванию полюсов четырехполюсника.



В идеальном трансформаторе, введенном в схему, нижние зажимы соединяются накоротко через ветвь  $1' - 2'$  верхнего четырехполюсника (см. рис. 9.37, *з*). На работе схемы это не отражается. Однако при этом появляется возможность заменить идеальный трансформатор катушкой (рис. 9.37, *д*). Обе половины катушки  $1 - 1'$  должны быть одинаковыми, а источник в такой схеме должен подключаться между зажимом  $1'$  и верхним зажимом  $1$ .

Удобнее от автотрансформаторного включения источника (см. рис. 9.37, *д*) перейти к трансформаторному включению (рис. 9.37, *е*). Взяв при этом отношение витков  $1 : 2$ , будем иметь для каждой половины дифференциального трансформатора коэффициент трансформации, равный единице.

В полученной дифференциально-мостовой схеме (см. рис. 9.37, *е*) должны быть сохранены те же нагрузочные сопротивления  $R_0$ , на которые рассчитывается исходный Х-образный фильтр (см. рис. 9.37, *а*). При этом в силу эквивалентности преобразованных схем дифференциально-мостовой фильтр имеет такие же характеристики, как и исходная Х-образная схема.

В дифференциально-мостовом фильтре могут быть получены подобные характеристики и при  $R_{01} \neq R_{02} = R_0$ . Для этого надо взять соотношение витков дифференциального трансформатора  $1 : n$  вместо  $1 : 2$ , где  $n = 2 \sqrt{\frac{R_0}{R_{01}}}$ , как это следует из формул (7.107) и (6.56).

#### 4. Т-образные мостовые фильтры

Т-образная мостовая схема, изображенная на рис. 9.38, *а*, может быть преобразована в П-образную схему (рис. 9.38, *б*) в соответствии с формулами (3.37):

$$\dot{Z}'_1 = \dot{Z}_1 \left( 2 + \frac{\dot{Z}_1}{\dot{Z}_2} \right), \quad \dot{Z}'_2 = \dot{Z}_1 + 2\dot{Z}_2.$$

Возможно также приведение исходной схемы к Т-образному виду (рис. 9.38, *в*) в соответствии с формулами (3.38):

$$\dot{Z}'_1 = \frac{\dot{Z}_1 \dot{Z}_3}{2\dot{Z}_1 + \dot{Z}_3}, \quad \dot{Z}'_2 = \frac{\dot{Z}_1^2}{2\dot{Z}_1 + \dot{Z}_3}.$$

При определенном выборе вида и параметров двухполюсников схемы на рис. 9.38, *б* и *в* могут являться параллельно-производными и последовательно-производными фильтрами типа  $m$ . Таким образом, схема (см. рис. 9.38, *а*) является Т-образным мостовым фильтром, эквивалентным цепочечному фильтру типа  $m$ .

Для примера на рис. 9.38, *г* и *д* показаны схема Т-образного ФНЧ и эквивалентный ей ФНЧ типа  $m$ .

Т-образные мостовые фильтры, являясь более сложными в расчете, имеют такие же характеристики, как и фильтры типа *т*. Однако в некоторых случаях они имеют более приемлемые параметры элементов.

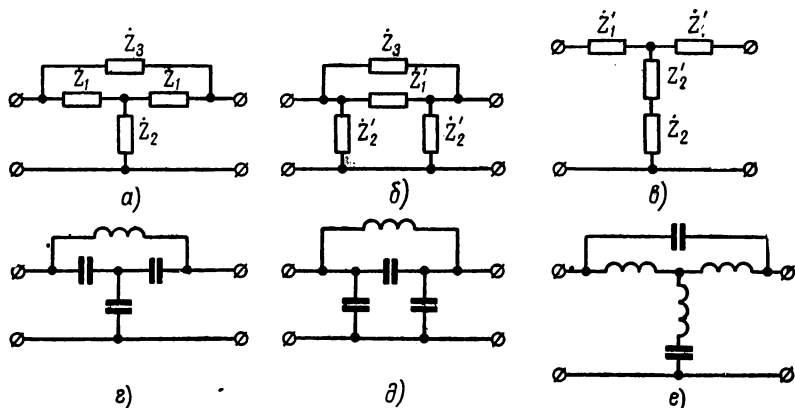


Рис. 9.38. Т-образные мостовые фильтры и эквивалентные им схемы

Имеются специфические схемы Т-образных мостовых фильтров, обладающие и дополнительными преимуществами. Например, в схеме рис. 9.38, *е* можно получить хорошую линейность фазовой характеристики, как в фильтрах типа *т* с отрицательной индуктивностью. Поэтому такие звенья используются в искусственных линиях задержки.

## § 9.6. БЕЗЫНДУКТИВНЫЕ ФИЛЬТРЫ

### 1. Пассивные RC-фильтры

Простейшие схемы RC-фильтров приведены на рис. 9.39. Наилучшим образом они работают в режиме холостого хода ( $R_{02} = \infty$ ) при  $R_{01} = 0$ . Рассматривая при этих условиях схемы рис. 9.39, *а*, *в* в качестве делителя напряжения, находим коэффициент передачи и уравнения частотных и фазовых характеристик:

$$\dot{K} = \frac{1}{1 + j\Omega}, \quad K = A = \frac{1}{\sqrt{1 + \Omega^2}}, \quad \Theta = -\arctg \Omega \quad (9.128)$$

— для первой схемы;

$$\dot{K} = \frac{1}{1 + \frac{1}{j\Omega}}, \quad K = A = \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{1}{\Omega^2}}}, \quad \Theta = \arctg \frac{1}{\Omega} \quad (9.129)$$

— для второй схемы.

Здесь  $\Omega = \frac{\omega}{\omega_0}$  — относительная частота,

$$\omega_0 = \frac{1}{RC}. \quad (9.130)$$

По уравнениям (9.128) и (9.129) построены частотные и фазовые характеристики на рис. 9.39, б и в. Из этих характеристик видно, что схема рис. 9.39, а является ФНЧ, а схема рис. 9.39, в — ФВЧ.

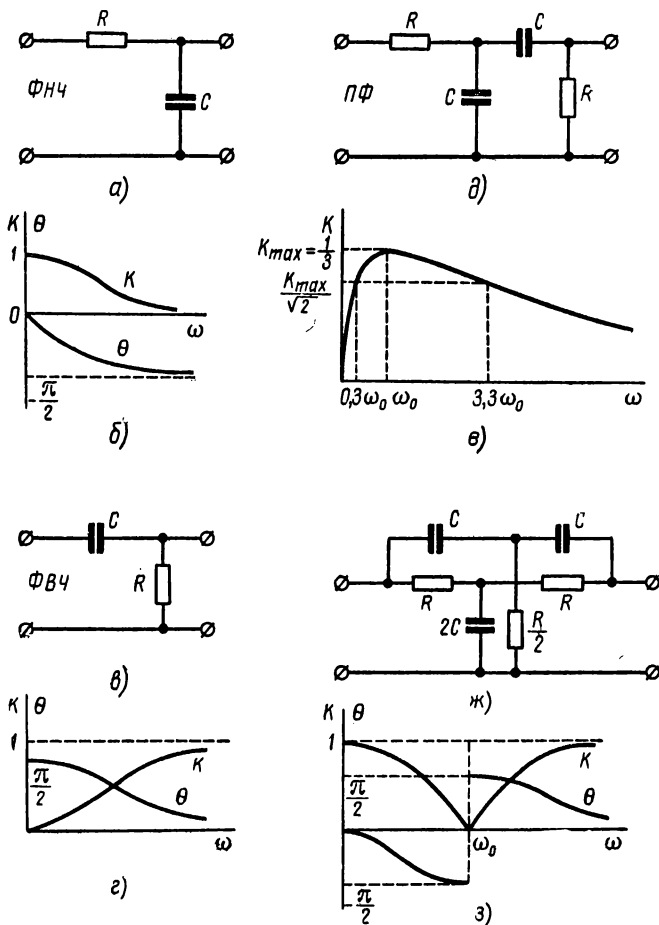


Рис. 9.39. Пассивные RC-фильтры и их характеристики

Из уравнений частотных характеристик (9.128), (9.129) следует, что  $A = \frac{1}{\sqrt{2}}$  при  $\Omega = 1$ , т. е. частота (9.130) является граничной частотой полосы пропускания. Из этих уравнений также видно,

что коэффициент прямоугольности фильтров получается таким же, как и у одиночного  $LC$ -контура:

$$K_{\Pi} \frac{S_0}{V_2} = \sqrt{S_0^2 - 1} \approx S_0.$$

Полосовой  $RC$ -фильтр может быть образован путем цепочечного соединения безындуктивных ФНЧ и ФВЧ (рис. 9.39,  $\delta$ ). При подобном соединении первое звено не пропускает колебания высоких частот, в второе звено — колебания низких частот. Этим и обусловлены свойства рассматриваемой схемы как полосового фильтра. Ее коэффициент передачи (при  $R_{01} = 0$ ,  $R_{02} = \infty$ ) легко может быть найден аналогично формуле (7.56):

$$K = \frac{1}{3 + j \left( \Omega - \frac{1}{\Omega} \right)}. \quad (9.131)$$

Частотная характеристика по этому уравнению построена на рис. 9.39,  $e$ . Селективность полосового  $RC$ -фильтра, как и в исходных звеньях, получается равной селективности одиночного  $LC$ -контура ( $K_{\Pi} \frac{S_0}{V_2} \approx S_0$ ). Однако малое значение  $K_{\max}$  и чрезвычайно широкая полоса пропускания ( $\Delta F = 3f_0$ ) делают такой полосовой фильтр пригодным только в исключительных случаях.

Усложнение схемы пассивного полосового  $RC$ -фильтра сопряжено обычно с еще большим уменьшением величины  $K_{\max}$ . Поэтому применяются, как правило, активные полосовые  $RC$ -фильтры.

В отличие от полосовых фильтров пассивные режекторные  $RC$ -фильтры, выполненные по мостовой схеме, обладают идеальными фильтрующими свойствами. Наиболее распространен режекторный  $RC$ -фильтр, называемый двойным Т-образным мостом (рис. 9.39,  $ж$ ). Он представляет собой параллельное соединение  $RC$ -фильтров нижних и верхних частот, которые отличаются от фильтров, изображенных на рис. 9.39,  $a$  и  $в$ , симметричной схемой.

Сигнал в схеме проходит на выход с малым ослаблением на низких (через ФНЧ) и на высоких (через ФВЧ) частотах. На средних же частотах ФНЧ и ФВЧ плохо пропускают колебания. Поэтому рассматриваемая схема на некоторой средней частоте имеет минимальный коэффициент передачи, т. е. является режекторным фильтром. На этой частоте (частоте режекции) коэффициент передачи вообще может равняться нулю, если колебания, проходящие через ФНЧ и ФВЧ, поступают на выход фильтра в противофазе. Именно такое явление наблюдается в фильтре, изображенном на рис. 9.39,  $ж$ .

Для каждого из Т-образных звеньев фильтра по табл. П.1 (схема  $б$ ) нетрудно найти матричные коэффициенты  $y_{21}$  и  $y_{22}$ . Так как эти звенья соединены параллельно, то, сложив соответствующие коэффициенты, найдем параметры рассматриваемого фильтра:

$$y_{21} = -\frac{1}{2R} \frac{\Omega^2 - 1}{1 + j\Omega}, \quad y_{22} = \frac{1}{2R} \frac{\Omega^2 - 1 - j4\Omega}{1 + j\Omega}.$$

Отсюда по уравнению связи (6.17) определяется матричный коэффициент  $a_{11} = -\frac{y_{22}}{y_{21}}$ , а по формуле (6.74) — коэффициент передачи

$$\dot{K} = \frac{\Omega^2 - 1}{\Omega^2 - 1 - j4\Omega} \approx -\frac{\Omega^2 - 1}{j4\Omega} = j \frac{1}{4} \left( \Omega - \frac{1}{\Omega} \right), \quad (9.132)$$

или

$$\dot{K} \approx j \frac{1}{2} \cdot \frac{\Delta\omega}{\omega_0}. \quad (9.132a)$$

Приближенные равенства здесь написаны для области малых расстройок  $|\Delta\omega| \ll \omega_0$ . Частотная и фазовая характеристики по этим уравнениям построены на рис. 9.39, з.

## 2. Активные RC-фильтры

Как отмечалось, в активных фильтрах, или фильтрах с обратными связями, используется параллельное и другие виды соединений четырехполюсников, по одному из которых сигнал проходит преимущественно или полностью в направлении от выхода к входу схемы. Четырехполюсник обратной связи обычно содержит селективную цепь. В активных RC-

фильтрах четырехполюсник, по которому сигнал проходит со входа на выход, является неселективной цепью с коэффициентом передачи, не зависящим от частоты. Таким четырехполюсником является усилительный каскад с активным нагрузочным сопротивлением на выходе лампы.

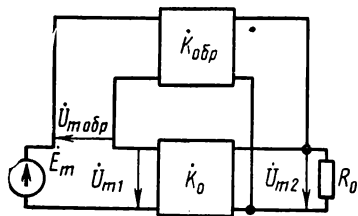


Рис. 9.40. Блок-схема активного фильтра

На рис. 9.40 показан один из вариантов осуществления обратной связи через четырехполюсник с коэффициентом передачи  $\dot{K}_{обр}$ . Через  $\dot{K}_0$  обозначен коэффициент передачи усилительного каскада при отсутствии обратной связи.

Благодаря свойству (9.77) в схеме рис. 9.40 э. д. с.  $\dot{E}_m$  целиком прикладывается к входу усилительного каскада и сигнал не проходит на выход через четырехполюсник обратной связи. При этом полное напряжение на входе усилительного каскада

$$\dot{U}_{m1} = \dot{E}_m + \dot{U}_{mобр}, \quad (9.133)$$

где

$$\dot{U}_{mобр} = \dot{K}_{обр} \dot{U}_{m2}. \quad (9.134)$$

По определению (9.78)

$$\dot{K}_0 = K_0 = \frac{\dot{U}_{m2}}{\dot{U}_{m1}}, \quad (9.135)$$

а коэффициент передачи для схемы рис. 9.40

$$\dot{K} = \frac{\dot{U}_{m2}}{\dot{E}_m}.$$

Подставив в последнее равенство соотношения (9.133) — (9.135), получим

$$\dot{K} = \frac{K_0}{1 - K_0 K_{обр}}. \quad (9.136)$$

Рассмотрим характеристики активного  $RC$ -фильтра при использовании в качестве четырехполюсника обратной связи двойного  $T$ -образного моста (см. рис. 9.39, ж). Практическая схема такого фильтра показана на рис. 9.41. \* Воспользовавшись приближенной формулой (9.132а), из уравнения (9.136) находим

$$\dot{K} = \frac{K_0}{1 + j \frac{K_0}{2} \cdot \frac{\Delta\omega}{\omega_0}}, \quad (9.137)$$

$$K_{\max} = K|_{\Delta\omega=0} = K_0, \quad (9.138)$$

$$A = \frac{1}{\sqrt{1 + 4Q_{экв}^2 \left(\frac{\Delta\omega}{\omega_0}\right)^2}}, \quad (9.139)$$

где

$$Q_{экв} = \frac{K_0}{4}. \quad (9.140)$$

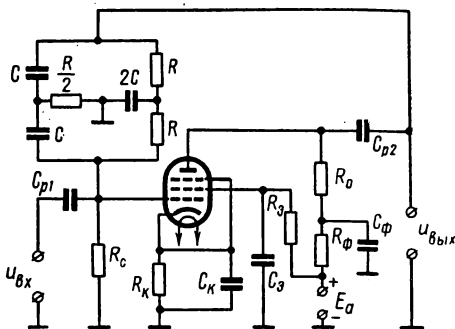


Рис. 9.41. Схема полосового активного  $RC$ -фильтра

Сравнивая уравнения (9.139) и (7.7а), приходим

к выводу, что рассматриваемая  $RC$ -схема является полосовым фильтром, эквивалентным по избирательности одиночному  $LC$ -контур с добротностью (9.140). Коэффициент усиления  $K_0$  имеет значения порядка десятков и сотен единиц. Поэтому такой  $RC$ -фильтр может иметь эквивалентную добротность порядка десятков единиц и достаточно узкую полосу пропускания (7.9) в отличие от полосы пропускания пассивного полосового фильтра (см. рис. 9.39). Кроме того, коэффициент передачи (9.138) существенно превышает максимальное значение коэффициента передачи (9.131) пассивного полосового фильтра.

\* В отличие от блок-схемы рис. 9.40 в усилителе, изображенном на рис. 9.41, выход  $RC$ -моста, являющегося четырехполюсником обратной связи, подключен параллельно входу лампы. Свойства таких усилителей, сходные со свойствами схемы рис. 9.40, изучаются в курсе усилительных устройств.

Полосовой активный  $RC$ -фильтр выгодно отличается и от одноконтурного  $LC$ -контура. При соответствующем выборе параметров  $R$  и  $C$  квазирезонансная частота (9.130) активного полосового  $RC$ -фильтра может лежать в звуковом диапазоне частот. На этих частотах  $LC$ -контур имеет значительно меньшую добротность по сравнению с эквивалентной добротностью (9.140) активного  $RC$ -фильтра и при этом проигрывает также по габаритам и весу.

Таким образом,  $RC$ -фильтры особенно выгодны и удобны при их использовании на низких частотах. Однако активные  $RC$ -фильтры обладают и существенным недостатком — недостаточно высокой стабильностью.

## § 9.7. ФИЛЬТРЫ С РАСПРЕДЕЛЕННЫМИ ПАРАМЕТРАМИ

### 1. Фильтры с волновыми двухполюсниками

Фильтры с сосредоточенными параметрами, рассмотренные в предыдущих параграфах, не могут применяться на сверхвысоких частотах. Однако, используя аналогию между реактивными элементами и волновыми двухполюсниками, можно и на СВЧ осуществлять фильтры, подобные селективным цепям с сосредоточенными параметрами. В частности, можно использовать аналогию между  $LC$ -контурами и резонансными волновыми двухполюсниками.

Например, в схемах рис. 9.21, *а* и *б* последовательные и параллельные двухполюсники можно заменить соответственно полуволновыми и четвертьволновыми короткозамкнутыми отрезками длиной  $\lambda/4$ . При этом получим полосовой фильтр, состоящий из резонансных волновых двухполюсников, который имеет такие же характеристики, как и исходный цепочечный фильтр с сосредоточенными параметрами, но расположенные в диапазоне СВЧ.

Имеется, однако, принципиальная особенность фильтров с волновыми двухполюсниками, как и вообще любых фильтров с распределенными параметрами, отличающая их от  $LC$ -фильтров. Поскольку волновые двухполюсники (и четырехполюсники) являются многорезонансными элементами, фильтры с распределенными параметрами имеют в принципе неограниченный дискретный ряд полос пропускания. Поэтому, говоря о совпадении характеристик фильтров с распределенными и сосредоточенными параметрами, необходимо сделать оговорку о том, что оно возможно только в ограниченном диапазоне частот.

По ряду причин на СВЧ простое копирование схем фильтров с сосредоточенными параметрами нецелесообразно, а иногда и невозможно. Одна из причин заключается в том, что на СВЧ соединительные провода являются цепью с распределенными параметрами. Так как такая цепь может быть резонансным четырехполюсником, то это существенно повлияет на характеристики фильтра.

Учитывая это, на СВЧ избегают простого копирования схем фильтров с сосредоточенными параметрами путем замены  $LC$ -контуров резонансными волновыми двухполюсниками. Наиболее распространен на СВЧ цепочечный фильтр, составленный из звеньев, схема которых изображена на рис. 9.42, а. Такая схема содержит два резонансных волновых элемента (например, в виде четвертьволновых отрезков короткозамкнутой длиной линии), которые изображены на рис. 9.42, а в виде эквивалентных параллельных двухполюсников.

Резонансные двухполюсники в схеме рис. 9.42, а не соединяются параллельно. Соединительная цепь между ними представляет собой

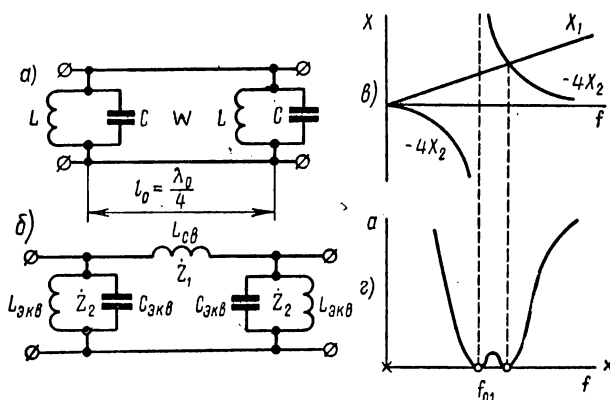


Рис. 9.42. Фильтр с волновыми двухполюсниками, его эквивалентная схема и характеристики

волновой (четвертьволновой) четырехполюсник. Поэтому эта схема является цепоччным соединением трех четырехполюсников с матрицами вида (6.36) и (8.155), где  $\dot{Y} = j \frac{v}{\rho}$ ,  $\rho = \sqrt{\frac{L}{C}}$ . Она обладает хорошими фильтрующими свойствами, если соблюдается условие

$$k = \frac{\rho}{W} \ll 1. \quad (9.141)$$

Для рассмотрения фильтрующих свойств перемножим указанные выше матрицы:

$$\begin{aligned} [a] &= \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ j \frac{v}{\rho} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -\frac{\pi}{4} v & jW \\ j \frac{1}{W} & -\frac{\pi}{4} v \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ j \frac{v}{\rho} & 1 \end{bmatrix} = \\ &= \begin{bmatrix} -\left(\frac{\pi}{4} + \frac{1}{k}\right) v & jW \\ j \frac{1}{W} \left\{ 1 - \left(\frac{\pi}{2} + \frac{1}{k}\right) \frac{v^2}{k} \right\} & -\left(\frac{\pi}{4} + \frac{1}{k}\right) v \end{bmatrix}. \end{aligned}$$



С учетом неравенства (9.141) эта матрица может быть переписана в окончательном виде:

$$[a] = \begin{bmatrix} -\frac{v}{k} & jW \\ j\frac{1}{W}\left(1 - \frac{v^2}{k^2}\right) & -\frac{v}{k} \end{bmatrix}. \quad (9.142)$$

В соответствии с критерием (9.53) и полученной матрицей находим условие для определения границ полосы прозрачности:

$$-\frac{v}{k} = -\frac{2}{kf_0} \Delta f = \pm 1.$$

Отсюда получаем расстройки, соответствующие границам полосы прозрачности, и сами граничные частоты:

$$\Delta f_1 = -\frac{k}{2} f_0, \quad \Delta f_2 = \frac{k}{2} f_0, \\ f_{01} = f_0 + \Delta f_1 = f_0 \left(1 - \frac{k}{2}\right), \quad f_{02} = f_0 + \Delta f_2 = f_0 \left(1 + \frac{k}{2}\right). \quad (9.143)$$

Следовательно, полоса прозрачности

$$\Delta F_0 = f_{02} - f_{01} = kf_0 \quad (9.144)$$

и

$$\delta_0 = \frac{\Delta F_0}{f_0} = k. \quad (9.144a)$$

Отсюда видно, что схема является полосовым фильтром с полосой прозрачности (9.144) и граничными частотами (9.143).

Поскольку для узкополосных фильтров справедливо неравенство  $\delta \approx \delta_0 \ll 1$ , соотношение (9.144a) подтверждает правильность условия (9.141).

Согласно формулам (6.50a) схема рис. 9.42, а с матрицей (9.142) может быть заменена эквивалентным П-образным четырехполюсником, имеющим следующие параметры:

$$\dot{Z}_1 = jW, \quad (9.145) \\ \dot{Z}_2 = \frac{jW}{-\frac{v}{k} - 1},$$

или с учетом обозначения (9.141)

$$\dot{Z}_2 = \frac{\rho}{j(v+k)}. \quad (9.146)$$

Соотношение (9.145) описывает индуктивное сопротивление, которое в узком диапазоне частот изменяется настолько мало, что практически является постоянной величиной (выше говорилось о возможности пренебрежения изменением сопротивления связи в рабочем диапазоне частот).

Соотношение (9.146) описывает сопротивление параллельного двухполюсника, в котором величина  $v_1 = v + k$  имеет смысл рас-

стройки. Расстройка  $\nu_1$ , как и расстройка  $\xi_1$  в равенствах (9.90), отсчитывается не от частоты  $f_0$ , а от частоты  $f_{01} < f_0$  (см. рис. 9.14). Следовательно, уравнение (9.146) описывает сопротивление параллельного двухполюсника, настроенного на частоту  $f_{01} = f_0 \left(1 - \frac{k}{2}\right)$ , в отличие от  $LC$ -контура в исходной схеме, настроенного на частоту  $f_0$ .

Таким образом, согласно соотношениям (9.145), (9.146), исходный фильтр (см. рис. 9.42, а) имеет эквивалентную схему, изображенную на рис. 9.42, б. В этой схеме

$$L_{\text{св}} = \frac{W}{\omega_0}, \quad L_{\text{экв}} = \frac{\rho}{\omega_{01}} = \frac{\omega_0}{\omega_{01}} L, \quad C_{\text{экв}} = \frac{1}{\omega_{01}\rho} = \frac{\omega_0}{\omega_{01}} C.$$

Полученная эквивалентная схема является парой связанных контуров с внешнеиндуктивной связью. Наличие в эквивалентной схеме только двух резонансных двухполюсников означает, что в исходной схеме (см. рис. 9.42, а) четвертьволновой отрезок линии не является резонансной цепью, хотя при определенных граничных условиях он может быть резонансным четырехполюсником. Это обусловлено влиянием одноименных граничных условий, как было разъяснено в предыдущей главе (см. стр. 342).

Из эквивалентной схемы следует, что рассматриваемый фильтр обладает селективными свойствами пары связанных контуров. Свойства фильтра могут быть рассмотрены и на основе теории цепочечных фильтров. В соответствии с этой теорией на рис. 9.42, в и г построены характеристики фильтра. При построении характеристик затухания на частоте  $f_{01}$  использовано второе условие (9.97).

При цепочечном соединении  $m$  звеньев (согласованных по характеристическому сопротивлению) фильтр содержит  $n = m + 1$  резонансных контуров. Селективность  $n$ -контурного цепочечного фильтра определяется по табл. П.5.

Выше отмечалось, что резонансные двухполюсники в схеме фильтра, изображенного на рис. 9.42, а, являются волновыми двухполюсниками. Согласно формуле (8.138) характеристическое сопротивление  $\rho = \frac{4}{\pi} W_0$  такого двухполюсника определяется величиной его волнового сопротивления  $W_0$ . При этом согласно неравенству (9.141) должно соблюдаться условие

$$\frac{W_0}{W} \ll 1. \quad (9.147)$$

Если попытаться сделать рассматриваемый фильтр из отрезков двухпроводной или коаксиальной линии, то невозможно будет выполнить условие (9.147), поскольку волновые сопротивления связаны с геометрическими размерами линии логарифмическими формулами (8.56) и (8.57).

Поэтому такие фильтры реализуются в сантиметровом и в нижней части дециметрового диапазона волн, где вместо двухпроводных

и коаксиальных линий применяются волноводы. Для волноводов получаются иные соотношения между их геометрическими размерами и волновыми сопротивлениями. При этом для волноводов возможно выполнение условия (9.147).

В волноводных фильтрах имеется и другая возможность. В качестве резонансных двухполюсников в волноводах можно использовать так называемые резонансные диафрагмы и реактивные штыри, которые и применяются в практических конструкциях волноводных фильтров. Упомянутые элементы волноводной техники изучаются в курсе электродинамики.

## 2. Фильтры из волновых четырехполюсников

В фильтрах с распределенными параметрами можно вообще отказаться от использования волновых двухполюсников. Поскольку четырехполюсники с распределенными параметрами обладают резонансными свойствами, можно осуществить фильтр, составленный

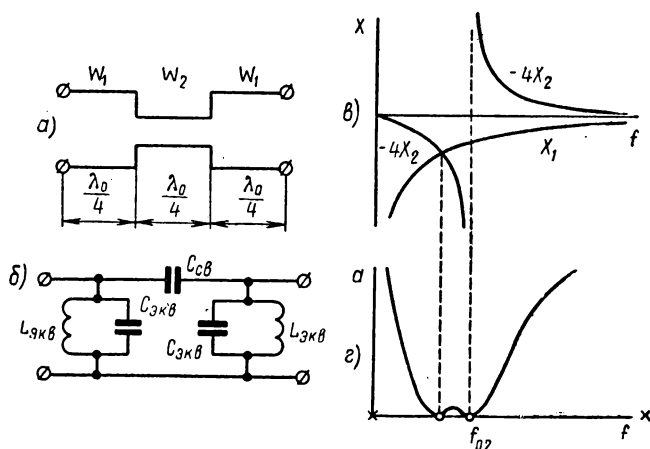


Рис. 9.43. Фильтр из волновых четырехполюсников, его эквивалентная схема и характеристики

только из волновых четырехполюсников. Простейшее звено такого фильтра показано на рис. 9.43, а. Оно имеет хорошие фильтрующие свойства при соблюдении условия

$$k = \frac{W_2}{W_1} \ll 1^* . \quad (9.148)$$

\* Хорошие фильтрующие свойства получаются также при соблюдении условия  $k \gg 1$ , но этот случай используется редко.

Рассмотрим фильтрующие свойства, для чего найдем матрицу звена. С этой целью перемножим матрицы волновых четырехполюсников, из которых составлено звено фильтра. При этом будем рассматривать область малых расстройек, полагая  $|v| \ll 1$  и  $v^2 \ll k$ . Тогда в соответствии с выражением (8.155), учитывая неравенство (9.148), получим

$$\begin{aligned}
 [a] &= \begin{bmatrix} -\frac{\pi}{4} v & jW_1 \\ j\frac{1}{W_1} & -\frac{\pi}{4} v \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -\frac{\pi}{4} v & jW_2 \\ j\frac{1}{W_2} & -\frac{\pi}{4} v \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -\frac{\pi}{4} v & jW_1 \\ j\frac{1}{W_1} & -\frac{\pi}{4} v \end{bmatrix} = \\
 &= \begin{bmatrix} \frac{\pi^2}{16} v^2 - \frac{1}{k} & -j\frac{\pi W_1}{4} v(1+k) \\ -j\frac{\pi}{4W_2} v(1+k) & \frac{\pi^2}{16} v^2 - k \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -\frac{\pi}{4} v & jW_1 \\ j\frac{1}{W_1} & -\frac{\pi}{4} v \end{bmatrix} \approx \\
 &\approx \begin{bmatrix} -\frac{1}{k} & -j\frac{\pi W_1}{4} v \\ -j\frac{\pi}{4W_2} v & -k \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -\frac{\pi}{4} v & jW_1 \\ j\frac{1}{W_1} & -\frac{\pi}{4} v \end{bmatrix} = \\
 &= \begin{bmatrix} \frac{\pi}{4k} v(1+k) & -j\frac{W_1}{k} \left(1 - \frac{\pi^2}{16} kv^2\right) \\ j\frac{k}{W_1} \left(\frac{\pi^2}{16k^2} v^2 - 1\right) & \frac{\pi}{4k} v(1+k^2) \end{bmatrix}.
 \end{aligned}$$

Окончательно находим

$$[a] = \begin{bmatrix} \frac{\pi}{4k} v & -j\frac{W_1}{k} \\ j\frac{k}{W_1} \left(\frac{\pi^2}{16k^2} v^2 - 1\right) & \frac{\pi}{4k} v \end{bmatrix}. \quad (9.149)$$

В результате аналогично формулам (9.143) — (9.144а) по критерию (9.53) получаем

$$\Delta f_1 = -\frac{2}{\pi} kf_0, \quad \Delta f_2 = \frac{2}{\pi} kf_0.$$

Отсюда определяются границы полосы прозрачности

$$f_{01} = f_0 \left(1 - \frac{2}{\pi} k\right), \quad f_{02} = f_0 \left(1 + \frac{2}{\pi} k\right) \quad (9.150)$$

и полоса прозрачности

$$\begin{aligned}
 \Delta F_0 &= \frac{4}{\pi} kf_0, \\
 \delta_0 &= \frac{4}{\pi} k.
 \end{aligned} \quad (9.151)$$

Таким образом, рассматриваемая схема является полосовым фильтром с полосой пропускания  $\delta \approx \delta_0 \ll 1$ , чем и обусловлено неравенство (9.148).

Найдем эквивалентную схему фильтра. Согласно выражениям (6.50а) и (9.149) эта схема является П-образным каноническим четырехполюсником с параметрами

$$\dot{Z}_1 = -j \frac{W_1}{k}, \quad (9.152)$$

$$\dot{Z}_2 = \frac{-j \frac{W_1}{k}}{\frac{\pi}{4k} \nu - 1},$$

или

$$\dot{Z}_2 = \frac{\rho}{j \left( \nu - \frac{4}{\pi} k \right)}, \quad (9.153)$$

где

$$\rho = \frac{4}{\pi} W_1. \quad (9.154)$$

Соотношение (9.152) описывает емкостное сопротивление, а уравнение (9.153) — сопротивление параллельных двухполюсников с характеристическим сопротивлением (9.154). Указанные двухполюсники настроены не на частоту настройки четвертьволновых отрезков линии  $f_0$ , а на частоту  $f_{02}$ , как на рис. 9.14. В соответствии с уравнением (9.153) эта резонансная частота определяется вторым равенством (9.150).

Согласно формулам (9.152) — (9.154) на рис. 9.43,б построена эквивалентная схема фильтра, в которой

$$C_{св} = \frac{k}{\omega_0 W_1}, \quad L_{экв} = \frac{4}{\pi} \cdot \frac{W_1}{\omega_{02}}, \quad C_{экв} = \frac{\pi}{4} \cdot \frac{1}{\omega_{02} W_1}.$$

Характеристики этого звена построены на рис. 9.43, в и г. При построении характеристики затухания на частоте  $f_{02}$  использовано второе условие (9.97). Поскольку эквивалентная схема содержит два LC-контура, в исходном фильтре тоже только два волновых четырехполюсника являются резонансными. Такими резонансными четырехполюсниками являются крайние элементы звена с волновым сопротивлением  $W_1$ , называемые резонаторами фильтра. Средний же элемент звена с волновым сопротивлением  $W_2$  не является резонансным четырехполюсником, как это описывалось в предыдущей главе, и называется связкой фильтра.

При цепочечном соединении звеньев два стыкуемых четвертьволновых резонатора образуют один полуволновый резонатор (рис. 9.44, а). Для унификации элементов фильтра крайние резонаторы обычно тоже делают полуволновыми, как показано на рис. 9.44, б. При этом крайние звенья становятся несимметричными. Однако их характеристические сопротивления остаются неизменными, если волновые сопротивления крайних резонаторов уменьшить вдвое (см. рис. 9.44, б). Таким образом, в фильтре, изображенном на рис. 9.44, б, все звенья остаются согласованными по характеристическим сопротивлениям.

В соответствии с граничными условиями, которые должны соблюдаться для четвертьволновых резонансных четырехполосников, в схеме рис. 9.44, *а* должно соблюдаться неравенство  $R_0 \gg W_1$  (так как  $W_2 \ll W_1$ ). При переходе же к полуволновым крайним резонаторам в схеме рис. 9.44, *б* должны быть изменены и нагрузочные сопротивления, чтобы выполнялось условие  $R_0 \ll \frac{W_1}{2}$ .

При цепочечном соединении  $m$  звеньев получается  $n$ -резонаторный фильтр ( $n = m + 1$ ), которому соответствует эквивалентная

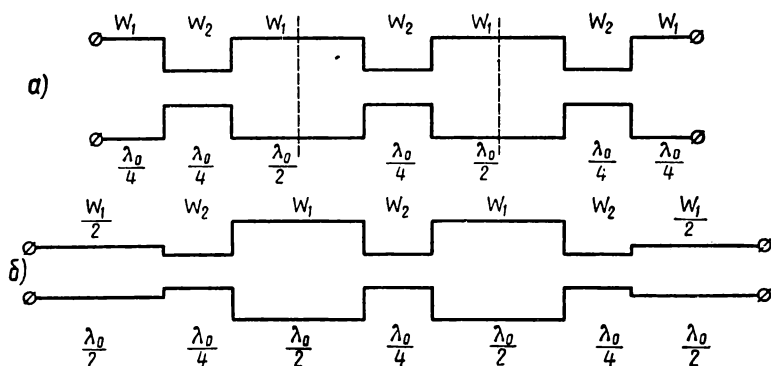


Рис. 9.44. Многозвенные цепочечные фильтры с распределенными параметрами

схема в виде цепочечного  $n$ -контурного фильтра. Селективность такого цепочечного фильтра с распределенными параметрами можно определять по табл. П.5.

В заключение следует отметить, что рассмотренный фильтр не может выполняться из отрезков двухпроводной или коаксиальной линии, как и в случае фильтров с волновыми двухполосниками. Поэтому такие схемы реализуются в виде волноводных фильтров. Кроме того, фильтры с распределенными параметрами могут осуществляться в виде механических систем, которые описываются в следующем параграфе.

## § 9.8. ЭЛЕКТРОМЕХАНИЧЕСКИЕ ФИЛЬТРЫ

### 1. Механические резонаторы

Всевозможные упругие тела — металлические и другие — могут совершать различные механические колебания. Простейшими примерами механических колебаний могут служить поперечные колебания струны (рис. 9.45, *а*), изгибные колебания камертона

(рис. 9.45, б), упругие продольные колебания стержня, совершающиеся под действием переменных растягивающей и сжимающей сил  $F$  (рис. 9.45, в), упругие крутильные колебания цилиндра под действием переменного скручивающего момента  $M$  (рис. 9.45, г) и т. д.

Амплитуда механических колебаний какого-либо конкретного упругого тела зависит не только от величины приложенной переменной силы, но и от ее частоты. На некоторой определенной частоте амплитуда колебаний становится максимальной, т. е. наступает механический резонанс. Значение резонансной частоты зависит от формы и размеров колеблющегося тела, от свойств материала, из которого оно изготовлено, и от типа механических колебаний.

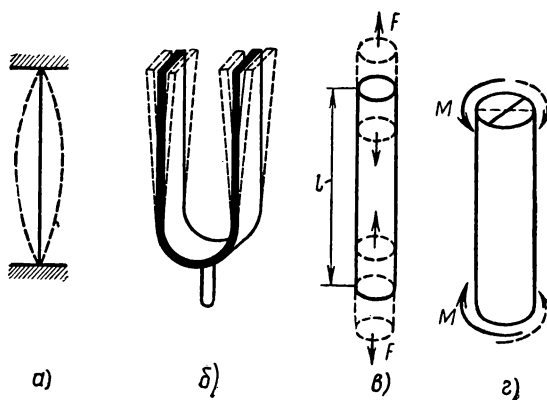


Рис. 9.45. Виды механических резонаторов

По аналогии с электрическими резонаторами упругие тела, обладающие резонансными свойствами, могут быть названы механическими резонаторами.

Аналогия между механическими и электрическими резонаторами заключается не только в проявлении резонансных свойств, но также в протекании самих процессов в механических и электрических системах.

Например, согласно второму закону Ньютона сила  $F$ , действующая на тело с массой  $m$ , и ускорение тела  $a = \frac{dv}{dt}$  под действием этой силы (где  $v$  — скорость) связаны между собой соотношением

$$F = m \frac{dv}{dt}. \quad (9.155)$$

В соответствии же с законом Гука стержень длиной  $l$  и сечением  $A$  из материала с модулем продольной упругости  $E$

под действием растягивающей силы  $dF$  испытывает относительное удлинение

$$\frac{dl}{l} = \frac{dF}{AE}.$$

Учитывая, что  $\frac{dl}{dt} = v$  есть скорость смещения конца стержня, последнее соотношение можно переписать в виде

$$v = S_{\text{пр}} \frac{dF}{dt}, \quad (9.156)$$

где

$$S_{\text{пр}} = \frac{l}{AE} \quad (9.157)$$

— эластичность при продольной деформации.

Уравнения (9.155) и (9.156) аналогичны уравнениям (2.102) и (2.118). Это свидетельствует о сходстве в поведении массы и упругого элемента под действием силы, с одной стороны, и электрических реактивных элементов под действием приложенного напряжения, с другой стороны.

При установлении аналогии между электрическими и механическими процессами можно руководствоваться как сходством уравнений (9.155), (9.156) соответственно с уравнениями (2.102), (2.118), так и их сходством соответственно с уравнениями (2.118), (2.102).

Получается следующая система электромеханических аналогий: в первом случае

$$\begin{aligned} F &\sim i, \quad v \sim u, \\ m &\sim C, \quad S_{\text{пр}} \sim L, \\ \dot{Z}_F = \frac{\dot{v}_m}{\dot{F}_m} &\sim \dot{Z} = \frac{\dot{U}_m}{\dot{I}_m}, \end{aligned} \quad (9.158)$$

во втором случае

$$\begin{aligned} F &\sim u, \quad v \sim i, \\ m &\sim L, \quad S_{\text{пр}} \sim C, \\ \dot{Z}_v = \frac{\dot{F}_m}{\dot{v}_m} &\sim \dot{Z} = \frac{\dot{U}_m}{\dot{I}_m}. \end{aligned} \quad (9.159)$$

Здесь  $\dot{Z}_F$ ,  $\dot{Z}_v$  — механические импедансы, представляющие собой сопротивление тела механическим колебаниям.

При наличии потерь в механической системе механический импеданс, как и электрическое сопротивление, является комплексной величиной, вещественная часть которой представляет собой аналог электрического сопротивления потерь.

Система аналогий (9.158) удобна тогда, когда в электрической цепи используются источники тока, а система аналогий (9.159) — когда источниками энергии в электрической цепи служат источники



напряжения. В обоих случаях причиной механических процессов считается действие приложенной к телу силы.

Поскольку в электрических цепях приходится иметь дело преимущественно с источниками напряжения, ниже используется только система аналогий (9.159).

Тип аналогий зависит и от вида механических процессов. Если, например, рассматривать не поступательное, а вращательное движение с угловой скоростью  $\Omega$  под действием момента  $M$ , то вместо соотношения (9.155) следует пользоваться уравнением

$$M = J \frac{d\Omega}{dt}, \quad (9.160)$$

где коэффициент пропорциональности  $J$  называется моментом инерции.

Аналогично, рассматривая угловую деформацию стержня под действием скручивающего момента  $M$  (см. рис. 9.45, з), вместо соотношения (9.156) следует пользоваться уравнением

$$\Omega = S_{кр} \frac{dM}{dt}, \quad (9.161)$$

где  $S_{кр}$  — эластичность при крутильных колебаниях.

Сопоставляя уравнения (9.160), (9.161) и (2.118), (2.102), приходим к следующей системе электромеханических аналогий:

$$\begin{aligned} M &\sim u, \quad \Omega \sim i, \\ J &\sim L, \quad S_{кр} \sim C, \\ \dot{Z}_\Omega &= \frac{\dot{M}_m}{\dot{\Omega}_m} \sim \dot{Z} = \frac{U_m}{I_m}. \end{aligned} \quad (9.162)$$

В ряде случаев, когда применяются резонаторы с разными типами колебаний, использование различных видов электромеханических аналогий оказывается неудобным. В частности, различное определение механических импедансов в системах аналогий (9.159) и (9.162) не позволяет рассматривать сопряжение механических элементов с разными видами колебаний. Поэтому возникает задача пересчета системы аналогий (9.162) в систему аналогий (9.159). Эта задача применительно к пересчету импедансов может быть решена следующим образом. Если в резонаторе с диаметром  $d$  (рис. 9.46, а) момент  $M$  создается силой  $F$ , то плечо действия этой силы равно  $\frac{d}{2}$  и  $M = F \frac{d}{2}$ . Линейная же скорость перемещения связана с угловой скоростью соотношением  $v = \Omega \frac{d}{2}$ . Отсюда находим

$$\frac{\dot{M}_m}{\dot{\Omega}_m} = \frac{d^2}{4} \cdot \frac{\dot{F}_m}{\dot{v}_m},$$

или

$$\dot{Z}_\Omega = \frac{d^2}{4} \dot{Z}_v. \quad (9.163)$$

Подобным образом может быть решена также задача пересчета момента инерции и эластичности. При этом, учитывая, что угловое перемещение элементов стержня совершается с различной линейной скоростью, следует рассмотреть перемещение элемента, находящегося на среднем расстоянии  $\frac{d}{4}$  от оси стержня (рис. 9.46, б). Тогда  $v = \Omega \frac{d}{4}$ , а момент, создаваемый парой сил  $F$  (рис. 9.46, в), равен

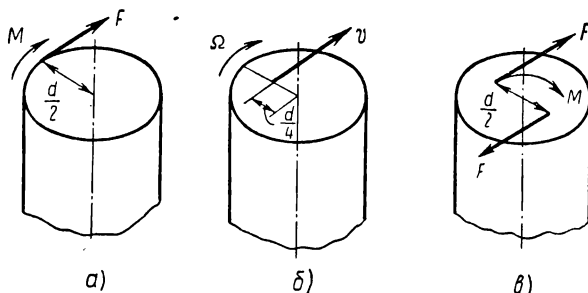


Рис. 9.46. Угловые и линейные параметры крутильных колебаний

$F \frac{d}{2}$ . Таким образом, уравнение (9.160) можно переписать так:

$$F \frac{d}{2} = J \frac{4}{d} \cdot \frac{dv}{dt},$$

или

$$F = J \frac{8}{d^2} \cdot \frac{dv}{dt}.$$

Сравнивая это уравнение с (9.155), получаем

$$J = \frac{d^2}{8} m. \quad (9.164)$$

Аналогично уравнение (9.161) для рассматриваемого элемента принимает вид

$$v \frac{4}{d} = S_{кр} \frac{d}{2} \cdot \frac{dF}{dt}$$

или

$$v = S_{кр} \frac{d^2}{8} \cdot \frac{dF}{dt}.$$

Сопоставляя это уравнение с уравнениями (9.156), (9.157), находим

$$S_{кр} = \frac{8}{d^2} \cdot \frac{l}{AG}. \quad (9.165)$$

Здесь вместо модуля продольной упругости  $E$  поставлен модуль сдвига (модуль поперечной упругости)  $G$ , поскольку упругие свой-

ства материала при продольной деформации отличаются от упругих свойств при поперечной деформации, которая получается в случае крутильных колебаний. Указанные константы материала связаны соотношением

$$G = \frac{E}{2(1 + \sigma)}, \quad (9.166)$$

где  $\sigma$  — коэффициент Пуассона, имеющий обычно значение порядка 0,3.

Воспользовавшись системой электромеханических аналогий (9.159), изучим свойства механического резонатора продольных упругих колебаний (см. рис. 9.46, в).

Цилиндрический стержень, в котором происходят такие колебания, можно рассматривать как механическую длинную линию. Погонные параметры этой линии с учетом соотношений (9.159) и (9.157) определяются следующим образом:

$$m_0 = A\rho_m = \frac{\pi d^2}{4} \rho_m \sim L_0,$$

$$S_{\text{пр}0} = \frac{1}{AE} = \frac{4}{\pi d^2 E} \sim C_0,$$

где  $\rho_m$  — плотность материала стержня.

Отсюда согласно формулам (8.27), (8.28) фазовая скорость бегущих продольных волн в механической линии

$$v_{\text{пр}} = \frac{1}{\sqrt{m_0 S_{\text{пр}0}}} = \sqrt{\frac{E}{\rho_m}}, \quad (9.167)$$

а волновое сопротивление линии

$$W_{\text{пр}} = \sqrt{\frac{m_0}{S_{\text{пр}0}}} = A\sqrt{E\rho_m} = \frac{\pi d^2}{4} \sqrt{E\rho_m}. \quad (9.168)$$

Металлы и их сплавы, применяемые для механических резонаторов, имеют модуль продольной упругости порядка  $E =$

$= 2 \cdot 10^{12} \frac{\text{г}}{\text{см} \cdot \text{сек}^2}$  и плотность  $\rho_m = 8 \text{ г/см}^3$ . Отсюда в соответствии с формулой (9.167) фазовая скорость  $v_{\text{пр}} = 5 \cdot 10^5 \text{ см/сек}$ . Таким образом, металлические резонаторы удобно применять на частотах в сотни кГц, где они имеют приемлемые размеры. Например, при  $f_0 = 10^5 \text{ гц}$  резонансная длина волны  $\lambda_0 = \frac{v_{\text{пр}}}{f_0} = 1 \text{ см}$  и полуволновый резонатор имеет длину  $l_0 = 5 \text{ мм}$ .

Для резонаторов крутильных колебаний согласно формулам (9.164) — (9.166) и системе аналогий (9.162) погонные параметры равны:

$$J_0 = \frac{d^2}{8} A\rho_m = \frac{\pi d^4}{32} \rho_m \sim L_0,$$

$$S_{\text{кпр}0} = \frac{8}{d^2} \cdot \frac{1}{AG} = \frac{64(1 + \sigma)}{\pi d^4 E} \sim C_0.$$

Отсюда фазовая скорость бегущих крутильных волн в механической линии

$$v_{кр} = \sqrt{\frac{E}{2(1+\sigma)\rho_m}}, \quad (9.169)$$

а волновое сопротивление линии

$$W_{кр} = \frac{\pi d^4}{32} \sqrt{\frac{E\rho_m}{2(1+\sigma)}}. \quad (9.170)$$

Из сравнения формул (9.169) и (9.167) видно, что крутильные колебания обеспечивают меньшую фазовую скорость, чем продольные колебания (в 1,61 раза при  $\sigma = 0,3$ ). Соответственно короче получаются и резонаторы крутильных колебаний при одинаковой резонансной частоте. Поэтому их можно использовать не только на частотах в сотни килогерц, но и вплоть до частот в несколько десятков килогерц. Что касается звукового диапазона частот, то здесь приемлемыми по размерам оказываются резонаторы поперечных колебаний камертонного типа (см. рис. 9.45, б).

Одним из основных преимуществ механических резонаторов является их весьма высокая добротность, доходящая до тысяч, а иногда до десятков тысяч единиц. Столь высокая добротность обусловлена малыми потерями энергии на внутреннее и внешнее трение, которыми и определяется величина активного механического сопротивления потерь.

Следует заметить, что малая фазовая скорость механических волн позволяет использовать упругие стержни для задержки сигналов. С этой целью на концах стержня (провода) длиной  $l_0$  должны быть поставлены электромеханические преобразователи. Сигнал, поданный на входной преобразователь механической длинной линии, снимается с выходного преобразователя, запаздывая на время  $\tau = \frac{l_0}{v}$ . Например, при  $l_0 = 3$  м и фазовой скорости  $v = v_{кр} = 3 \cdot 10^3$  м/сек, которая может быть получена в случае крутильных колебаний, задержка  $\tau = 1$  мсек. Это существенно больше величины  $\tau$  в электрических искусственных линиях задержки, где она не превышает нескольких микросекунд.

Рассмотренные механические линии получили название ультразвуковых линий задержки (УЛЗ), поскольку распространяющиеся в них волны являются не чем иным, как ультразвуковыми волнами.

Для уменьшения габаритов УЛЗ применяющийся в них стержень (провода) свертывается обычно в спираль.

## 2. Электромеханические резонаторы

Если механические резонаторы изготавливаются из пьезоэлектрического или магнитострикционного материала, то они обладают не только механическими, но и электрическими свойствами. Такие

резонаторы называются электромеханическими. Электромеханические резонаторы могут непосредственно использоваться в электрических фильтрах благодаря своим электрическим свойствам. При этом надо знать их электрические эквивалентные схемы.

Рассмотрим пьезоэлектрический резонатор, изображенный схематически на рис. 9.47, а. Он представляет собой пластину (стержень) из пьезоэлектрического материала, на гранях которого нанесены электроды. В качестве пьезоэлектрического материала применяется обычно кварц или специальные виды пьезокерамики, которая предварительно поляризуется, т. е. создается начальное электрическое поле  $E_0$ . Пьезоэлектрический резонатор с кварцем называется также кварцевым резонатором.

При изменении напряжения на электродах резонатора пластина испытывает деформацию вследствие обратного пьезоэлектрического

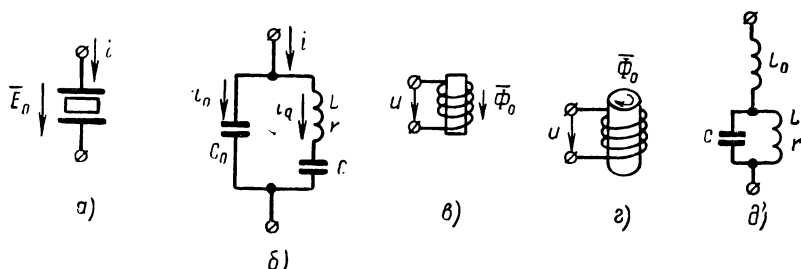


Рис. 9.47. Электромеханические резонаторы и их эквивалентные схемы

эффекта. При деформации пластины на ее гранях, т. е. на электродах резонатора, возникают электрические заряды за счет прямого пьезоэффекта. Эти заряды  $dq$  пропорциональны величине деформации  $dl$ :

$$dq = a dl.$$

Здесь  $a$  — некоторый коэффициент пропорциональности, зависящий как от свойств пьезоматериала, так и от типа деформации пластины (стержня).

Из последнего равенства может быть определен пьезоток, возникающий в электрической цепи резонатора вследствие пьезоэффекта:

$$i_q = \frac{dq}{dt} = a \frac{dl}{dt} = av,$$

или

$$\dot{i}_{mq} = a \dot{v}_m. \quad (9.171)$$

Пьезопластина (пьезостержень) со свободными гранями, на которых  $F = 0$ , эквивалентна короткозамкнутой линии, на конце которой  $u = 0$ . Это следует из системы аналогий (9.159). Поэтому

в соответствии с формулой (8.140) скорость смещения концов стержня (граней пластины)

$$\dot{v}_m = \frac{\dot{F}_m}{r_m(1 + jQ\nu)} = \frac{bC_0\dot{E}_m}{r_m(1 + jQ\nu)}. \quad (9.172)$$

Здесь  $\dot{F}_m$  — амплитуда деформирующей силы ( $F = bq = bC_0e$ ), возникающей за счет обратного пьезоэффекта при действии на электродах резонатора переменной э. д. с.  $e$  с амплитудой  $\dot{E}_m$ ;

$b$  — коэффициент пропорциональности, зависящий от свойств пьезоматериала и типа колебаний резонатора;

$r_m$  — сопротивление потерь резонатора с добротностью  $Q$ .

Полный ток пьезоэлектрического резонатора складывается из двух составляющих:

$$i = i_0 + i_q$$

или

$$\dot{I}_m = \dot{I}_{m0} + \dot{I}_{mq}, \quad (9.173)$$

где

$$\dot{I}_{m0} = j\omega C_0 \dot{E}_m \quad (9.174)$$

— емкостный ток, протекающий между электродами резонатора, образующими емкость  $C_0$ .

Из соотношений (9.171) — (9.174) определяем полный ток резонатора:

$$\dot{I}_m = \dot{E}_m \left[ j\omega C_0 + \frac{abC_0}{r_m(1 + jQ\nu)} \right].$$

Отсюда находим проводимость пьезоэлектрического резонатора

$$\dot{Y} = \frac{\dot{I}_m}{\dot{E}_m} = j\omega C_0 + \frac{1}{r(1 + jQ\nu)}, \quad (9.175)$$

где

$$r = \frac{r_m}{n_{эм}^2} \quad (9.176)$$

— электрическое сопротивление потерь;

$$n_{эм} = \sqrt{abC_0} \quad (9.177)$$

— коэффициент электромеханического преобразования (трансформации).

В соответствии с уравнением (9.175) на рис. 9.47, б построена эквивалентная схема пьезоэлектрического резонатора. Особенностью этой схемы в случае кварцевого резонатора является то, что высокая добротность  $Q = \frac{1}{r} \sqrt{\frac{L}{C}}$  обеспечивается не только малым сопротивлением потерь  $r$ , но и очень большим характеристическим сопротивлением  $\rho = \sqrt{\frac{L}{C}}$ . Практически на высоких частотах экви-

валентная индуктивность  $L$  измеряется единицами генри, а эквивалентная емкость  $C$  — долями пикофарады. При этом  $C_0 \gg C$  и две резонансные частоты кварцевого резонатора  $\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$  и  $\omega'_0 = \frac{1}{\sqrt{L \frac{CC_0}{C+C_0}}} = \omega_0 \sqrt{1 + \frac{C}{C_0}}$  мало отличаются друг от друга.

В случае же пьезокерамических резонаторов добротность получается относительно низкой (десятки и сотни единиц), а отношение  $\frac{C}{C_0}$  оказывается больше, чем у кварцевых резонаторов (хотя и остается  $\frac{C}{C_0} \ll 1$ ). При этом соответственно увеличивается разность резонансных частот  $\omega'_0 - \omega_0 \approx \frac{\omega_0}{2} \frac{C}{C_0}$ .

Рассмотрим теперь магнитострикционный резонатор, изображенный схематически на рис. 9.47, в. Он представляет собой катушку с сердечником из магнитострикционного материала (обычно из магнитострикционного феррита). Магнитострикционный эффект является четным, т. е. знак деформации сердечника не зависит от направления магнитного поля. Поэтому в сердечнике создается начальное магнитное поле  $\bar{\Phi}_0$ , чтобы при синусоидальном токе катушки деформация катушки также была синусоидальной. Такое начальное подмагничивание может быть получено, например, с помощью постоянного магнита или путем намагничивания самого сердечника.

При протекании по катушке тока  $i$  возникает поле  $\Phi = \frac{L_0}{w} i$ . При этом за счет обратного магнитострикционного эффекта возникает деформирующая сила, распределенная вдоль сердечника. Эта сила является растягивающей или сжимающей (в зависимости от знака стрикции, который определяется свойствами материала), если начальное поле  $\bar{\Phi}_0$  направлено вдоль сердечника, как на рис. 9.47, в. Если же поле  $\bar{\Phi}_0$  в сердечнике является круговым (рис. 9.47, г), то возникающие при этом силы создают крутящий момент, вызывающий крутильные колебания сердечника. Поскольку свойства механических резонаторов с продольными и крутильными колебаниями принципиально не отличаются, ниже рассматривается только продольная магнитострикционная сила, распределенная вдоль сердечника. Ее можно заменить некоторой эквивалентной сосредоточенной силой, пропорциональной магнитному потоку:

$$F = \alpha \Phi = \frac{a}{w} L_0 i,$$

или

$$\dot{F}_m = \frac{a}{w} L_0 \dot{i}_m.$$

Как и в случае пьезорезонатора, скорость смещения свободных концов сердечника под действием силы  $F$  определяется сопротивлением типа (8.140):

$$\dot{v}_m = \frac{F_m}{r_m(1 + jQv)} = \frac{aL_0 \dot{I}_m}{\omega r_m(1 + jQv)}. \quad (9.178)$$

Под действием прямого магнитострикционного эффекта при деформации сердечника на величину  $dl$  магнитный поток изменяется на величину  $d\Phi = bdl$ , а потокоцепление  $\Psi = \omega\Phi$  на величину  $d\Psi = \omega d\Phi = b\omega dl$ . При этом в катушке возникает напряжение стрикции

$$u_{\text{стр}} = \frac{d\Psi}{dt} = b\omega \frac{dl}{dt} = b\omega v,$$

или

$$\dot{U}_{\text{мстр}} = b\omega \dot{v}_m. \quad (9.179)$$

Полное напряжение катушки резонатора складывается из падения напряжения на ее индуктивности  $L_0$  и напряжения стрикции:

$$\dot{U}_m = j\omega L_0 \dot{I}_m + \dot{U}_{\text{мстр}},$$

или с учетом формул (9.179), (9.178)

$$\dot{U}_m = \dot{I}_m \left[ j\omega L_0 + \frac{abL_0}{r_m(1 + jQv)} \right].$$

Отсюда определяется электрическое сопротивление магнитострикционного резонатора:

$$\dot{Z} = \frac{\dot{U}_m}{\dot{I}_m} = j\omega L_0 + \frac{R_0}{1 + jQv}, \quad (9.180)$$

где

$$R_0 = \frac{X_{\text{эм}}^2}{r_m} \quad (9.181)$$

— электрическое сопротивление резонансного двухполюсника при резонансе;

$$X_{\text{эм}} = \sqrt{abL_0} \quad (9.182)$$

— сопротивление электромеханической связи.

В соответствии с уравнением (9.180) на рис. 9.47,  $\delta$  построена эквивалентная схема магнитострикционного резонатора.

По аналогии с электрическими связанными контурами электро-механические резонаторы можно рассматривать как связанную систему, состоящую из электрической цепи и механического резонатора. В этом случае резонансные двухполюсники в эквивалентных схемах (см. рис. 9.47,  $\delta$  и  $\partial$ ) представляют собой соответственно вносимую проводимость и вносимое сопротивление. Отсюда следует, что сопротивления (9.176) и (9.181) являются вносимыми сопротивлениями при резонансе.



### 3. Фильтры с электромеханическими резонаторами

В цепочечных и мостовых электрических фильтрах вместо  $LC$ -контуров можно использовать пьезоэлектрические и магнитострикционные резонаторы. Такие фильтры называются соответственно пьезоэлектрическими и магнитострикционными.

Пьезоэлектрические фильтры с кварцевыми резонаторами, называемые также кварцевыми фильтрами, имеют весьма высокую избирательность, обусловленную высокой добротностью и близким расположением резонансных частот кварцевого резонатора.

На рис. 9.48, *а, б, в* показаны схемы некоторых типов пьезоэлектрических (кварцевых) фильтров. В цепочечном фильтре (см. рис. 9.48, *а*), эквивалентная схема которого показана на рис. 9.48, *г*, резонансные частоты кварцевых резонаторов, стоящих в последовательном и параллельных плечах звена, выбираются неодинаковыми. Выбор резонансных частот производится так, чтобы нуль сопротивления  $X_1$  получался на частоте полюса сопротивления  $X_2$  (рис. 9.48, *д*). Это обеспечивает получение нуля затухания согласно условию (9.96), как показано на рис. 9.48, *е*.

Удобной является дифференциально-мостовая схема фильтра, содержащая лишь один кварцевый резонатор (см. рис. 9.48, *б*). Характеристики такого фильтра построены на рис. 9.48, *ж, з*. В нем может быть получено и два нуля затухания в полосе пропускания. Для этого надо емкость (или нагрузочное сопротивление) выбрать так, чтобы на частоте полюса сопротивления  $X_1$  соблюдалось условие  $|x_2| \ll 1$ . Тогда на этой частоте получится второй нуль затухания в соответствии с первым условием (9.127).

Из построения характеристик кварцевых фильтров наглядно видно, что последние получают узкополосными. Например, при средней частоте в несколько сотен килогерц полоса пропускания кварцевого фильтра не превышает нескольких десятков (иногда сотен) герц. Узкополосность кварцевых фильтров объясняется высокой добротностью кварцевого резонатора и очень близким расположением его резонансных частот.

В ряде случаев узкополосность кварцевых фильтров не позволяет реализовать достаточно широкую полосу пропускания. Тогда для расширения полосы пропускания применяются специальные схемы кварцевых фильтров, в которых последовательно или параллельно кварцевому резонатору включается катушка индуктивности. Индуктивность должна включаться и в то плечо, которое не содержит кварцевого резонатора, как на рис. 9.48, *в*. При включении индуктивности в каждое из плеч фильтра в них появляются дополнительные резонансы (рис. 9.48, *и*). За счет этого в схеме возникают дополнительные нули затухания (рис. 9.48, *к*). Здесь нуль затухания на частоте нуля сопротивления  $x_2$  обусловлен выполнением второго

условия (9.127). Вместо этого приближенного условия могло бы выполняться и точное условие (9.125), если бы полюс сопротивления  $x_1$  был точно совмещен с нулем сопротивления  $x_2$ . Появление

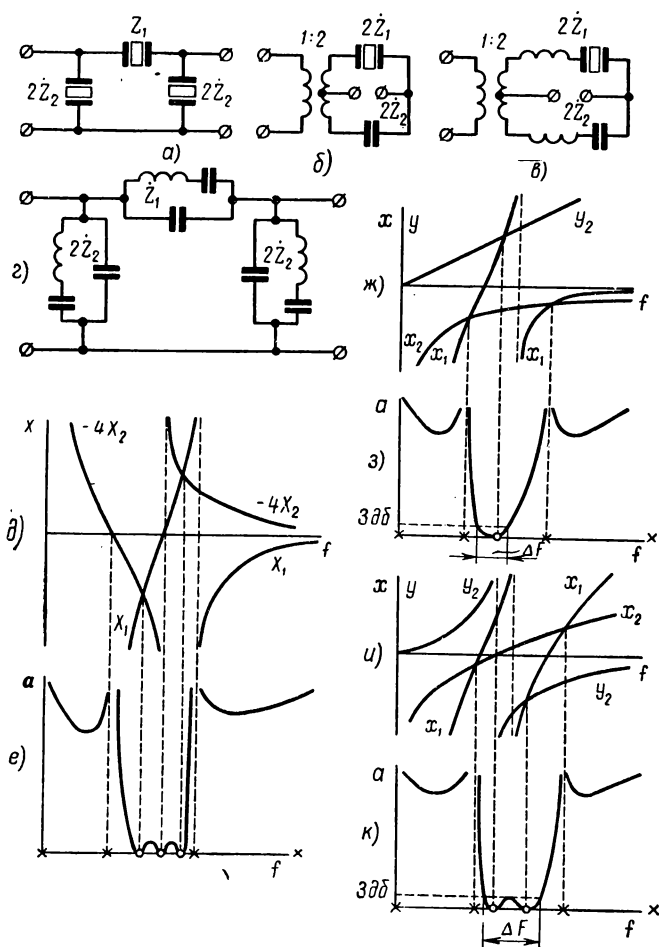


Рис. 9.48. Некоторые типы пьезоэлектрических (кварцевых) фильтров и их характеристики

новых нулей затухания приводит к расширению полосы пропускания, как это видно из сравнения рис. 9.48, з и к. Поэтому катушки индуктивности, включаемые в плечи кварцевого фильтра, называются расширяющими.

Кварцевые фильтры, выполненные по цепочечной или мостовой схеме, обычно содержат не более одного-двух звеньев. При использовании дешевых пьезокерамических резонаторов делаются и много-резонаторные фильтры. Такие фильтры собирают по схемам,

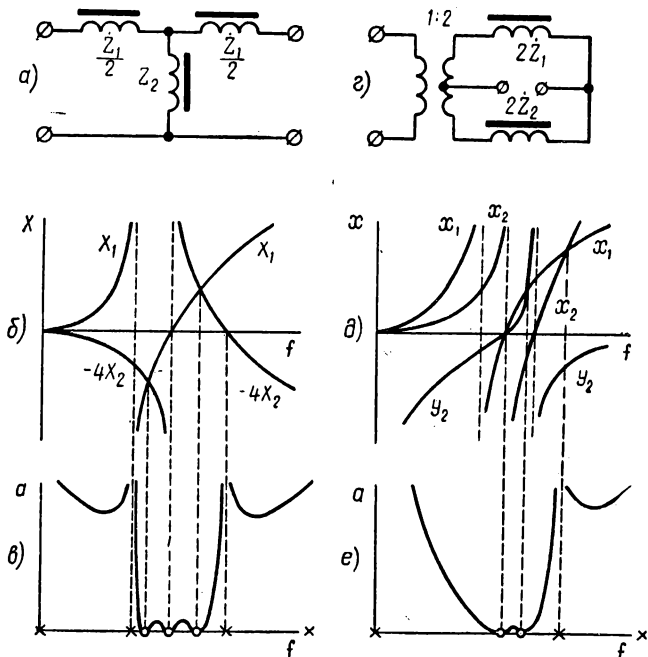


Рис. 9.49. Некоторые типы магнитострикционных фильтров и их характеристики

показанным на рис. 9.16, где каждый двухполюсник представляет собой пьезокерамический резонатор.

Аналогично пьезокерамическим фильтрам выполняются и магнитострикционные фильтры. Некоторые схемы звеньев магнитострикционных фильтров приведены на рис. 9.49, а и б, а их характеристики построены соответственно на рис. 9.49, в и г, д и е. В обеих схемах для получения нуля затухания в соответствии с условиями (9.96) и (9.124) нуль сопротивления  $X_1$  совмещен с полюсом сопротивления  $X_2$ .

Фильтры, составленные из электромеханических резонаторов, иногда называют электромеханическими фильтрами, что вполне соответствует их структуре. Однако чаще под электромеханическими фильтрами понимают только фильтры, содержащие механические резонаторы.

#### 4. Фильтры с механическими резонаторами

Фильтры с механическими резонаторами фильтруют механические колебания. Чтобы можно было использовать эти фильтры для селекции электрических сигналов, на их входе электрические колебания должны преобразовываться в механические. На выходе же фильтра должно производиться обратное преобразование отфильтрованных механических колебаний в электрический сигнал. Механические фильтры, снабженные на входе и выходе электромеханическими преобразователями, называются электромеханическими фильтрами (ЭМФ). Иногда их называют электромеханическими цепочечными фильтрами (ЭМЦФ), подчеркивая, что механическая фильтрующая система в таком фильтре выполняется по цепочечной схеме.

Электромеханическими преобразователями на входе и выходе ЭМФ служат, в частности, электромеханические резонаторы. На звуковых частотах применяются и электромеханические преобразователи электромагнитного типа, которые представляют собой обычные электромагниты с начальным подмагничивающим полем (для устранения нелинейных искажений). Используя, например, механические резонаторы камертонного типа (см. рис. 9.45, б), можно возбуждать колебания в левом резонаторе с помощью входного электромагнитного преобразователя. При этом колебания через ножку камертона передаются правому резонатору, который наводит э. д. с. в катушке выходного электромагнитного преобразователя.

На частотах в десятки и сотни килогерц используются обычно магнитострикционные преобразователи. Некоторые конструктивные схемы ЭМЦФ с магнитострикционными преобразователями показаны на рис. 9.50, а и б.

Фильтр продольных колебаний на рис. 9.50, а составлен из механических полуволновых резонаторов, соединенных четвертьволновыми связками. Его электрическим аналогом является волновой

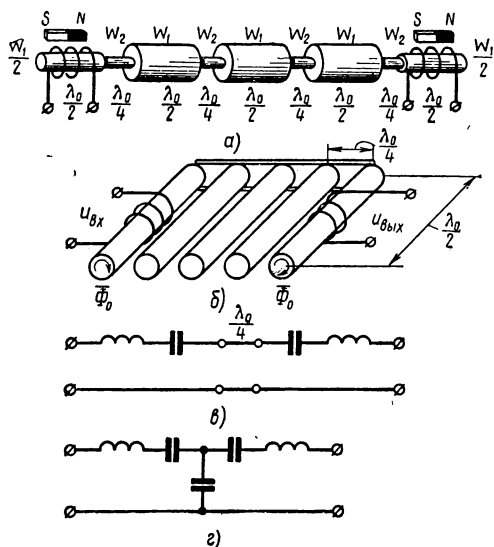


Рис. 9.50. Некоторые конструктивные схемы ЭМЦФ с магнитострикционными преобразователями и их эквивалентные схемы

фильтр, изображенный на рис. 9.44, б. Таким образом, этот фильтр составлен из звеньев, имеющих электрический аналог с сосредоточенными параметрами в виде схемы, изображенной на рис. 9.43, б. Весь же фильтр имеет аналог с сосредоточенными параметрами в виде цепочечного фильтра, показанного на рис. 9.11, в.

Следует отметить, что в ЭМЦФ легко может быть получена достаточно узкая полоса пропускания. Если резонаторы и связки выполнены из одинакового материала, то в соответствии с формулами (9.148), (9.151) и (9.168) относительная полоса прозрачности фильтра

$$\delta_0 = \frac{4}{\pi} \left( \frac{d_2}{d_1} \right)^2.$$

Отсюда следует, что при относительной полосе пропускания порядка 0,01 диаметры резонаторов и связок должны отличаться в 10 раз. Еще более благоприятное соотношение размеров получается в фильтре крутильных колебаний. Если в фильтре, изображенном

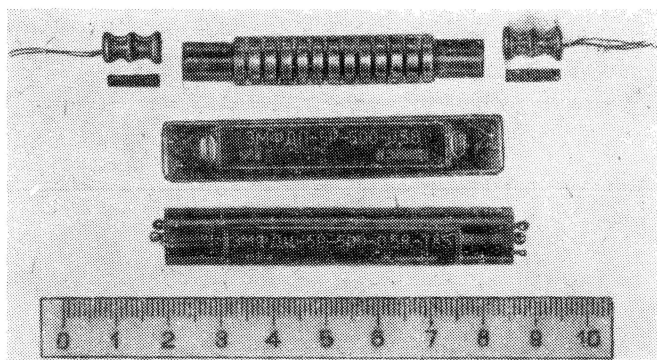


Рис. 9.51. Дисковый электромеханический фильтр

на рис. 9.50, а применить магнитострикционные резонаторы с крутильными колебаниями, то он будет иметь прежние эквивалентные схемы и характеристики. Но в этом случае согласно формулам (9.148), (9.151) и (9.170)

$$\delta_0 = \frac{4}{\pi} \left( \frac{d_2}{d_1} \right)^4.$$

Нетрудно видеть, что при прежней относительной полосе пропускания порядка 0,01 диаметры резонаторов и связок должны отличаться всего в 3 раза\*.

---

\*Для увеличения жесткости конструкции ЭМЦФ в них применяют также укороченные связки  $\left( l_{св} < \frac{\lambda_0}{4} \right)$ . Эквивалентные схемы звеньев ЭМЦФ при этом не меняются, но приобретают несколько иные значения параметров.

ЭМЦФ могут выполняться и в виде фильтров с распределенными параметрами, в которых используются волновые двухполюсники. В фильтре на рис. 9.50, б полуволновые резонаторы крутильных колебаний имеют входное сопротивление типа (8.140), т. е. могут быть отображены последовательным двухполюсником. Соединяясь четвертьволновыми связками, двухполюсники образуют звенья, изображенные на рис. 9.50, в. Эти звенья, подобно звеньям на рис. 9.42, а, могут быть заменены эквивалентной схемой с сосредоточенными параметрами (рис. 9.50, г). Таким образом, аналогом фильтра на рис. 9.50, б является цепочечная схема, показанная на рис. 9.11, б.

Наиболее широко распространены в настоящее время ЭМЦФ с дисковыми резонаторами. Внешний вид указанного фильтра ( $f_{ср} = 500 \text{ кГц}$ ,  $\Delta F = 3 \text{ кГц}$ ) приведен на рис. 9.51. Звено дискового ЭМЦФ имеет эквивалентные схемы такого же вида, как на рис. 9.50, в и г.

Будучи весьма компактными, ЭМЦФ могут иметь до десяти и более механических резонаторов. Избирательность многорезонаторных ЭМЦФ определяется по табл. П.5. При высокой добротности механических резонаторов в ЭМЦФ легко могут быть реализованы чебышевские характеристики, т. е. может быть получена предельная избирательность, определяемая по табл. П.3.

Частным случаем ЭМФ являются также пьезомеханические фильтры, одна из конструктивных схем которых показана на рис. 9.52. В подобных фильтрах пьезокерамические резонаторы  $P$  и механическая связка  $C$  изготавливаются из одной цельной пластинки. Звено пьезомеханического фильтра, изображенное на рис. 9.52, обладает такими же свойствами, как и рассмотренные выше звенья ЭМФ. Ряд звеньев пьезомеханических фильтров может электрически соединяться друг с другом, образуя комбинированную электромеханическую цепочечную схему.

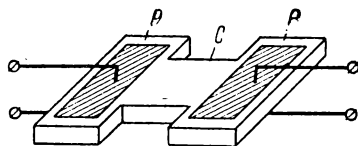


Рис. 9.52. Схема пьезомеханического фильтра

## § 9.9. ГРЕБЕНЧАТЫЕ ФИЛЬТРЫ

### 1. Пассивные гребенчатые фильтры

Существует много способов формирования гребенчатой частотной характеристики. Наиболее простым из них является способ создания характеристики с помощью серии («гребенки») фильтров.

На рис. 9.53, а показана блок-схема полосового гребенчатого фильтра (ПГФ), образованного путем параллельного соединения

ФНЧ и ряда ПФ, имеющих средние частоты полос пропускания  $f_0$ ,  $2f_0$ , ...,  $nf_0$ . Такой фильтр имеет, очевидно, характеристику, изображенную на рис. 9.1, д. При этом гребенчатая характеристика будет являться суммой характеристик всех параллельно соединенных фильтров, если каждый из них в полосе пропускания не шунтируется заметным образом остальными фильтрами.

На рис. 9.53, б показан РГФ, образованный путем цепочечного соединения ФВЧ и ряда ЗФ с частотами режекции  $f_0$ ,  $2f_0$ , ...,  $nf_0$ . При подобном соединении фильтров формируется гребенчатая характеристика, показанная на рис. 9.1, е. Здесь гребенчатая характеристика является произведением отдельных характеристик ФВЧ и ЗФ, если эти фильтры не влияют друг на друга.

Однако при цепочечном соединении ряда фильтров неизбежно их взаимное влияние, для устранения которого может быть применено не цепочечное, а каскадное соединение фильтров. Анало-

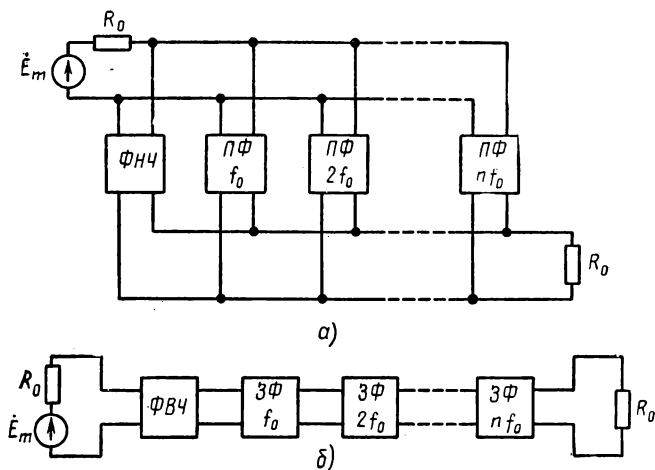


Рис. 9.53. Блок-схемы ПФФ и РГФ

гично в схеме рис. 9.53, а может быть использовано параллельное соединение резонансных усилителей.

При указанном способе устранения взаимного влияния гребенчатый фильтр (ГФ) должен содержать несколько десятков и даже свыше сотни отдельных фильтров — по числу пиков гребенчатой характеристики. Наличие такого числа усилительных каскадов в ГФ явно нецелесообразно.

В этом случае проще иметь один усилительный каскад (см. рис. 9.12), в котором нагрузкой  $\hat{Z}$  может служить многоэлементный двухполюсник. Используя, например, канонический двухполюсник с сопротивлением типа  $\hat{Z}_{11}$  (см. рис. 5.15 и 5.31), можно сформировать гребенчатую частотную характеристику. Для этого надо

выбрать  $R_i \gg Z_{\max}$ , как в схеме рис. 7.13, б. При соответствующем выборе параметров нагрузочного двухполюсника частотная характеристика будет иметь вид характеристики ПГФ (см. рис. 9.1, д). Если же нагрузкой является канонический двухполюсник с сопротивлением типа  $\hat{Z}_{111}$  (см. рис. 5.15 и 5.30), то аналогичным образом может быть получена характеристика РГФ (см. рис. 9.1, е).

Описанный способ позволяет сформировать гребенчатую характеристику наиболее просто, если в качестве нагрузки усилительного каскада использовать волновой двухполюсник. Если, например, таким двухполюсником является отрезок линии с нагрузочным сопротивлением  $\hat{Z}_n = R_n$  (см. рис. 8.37), то согласно характеристикам рис. 8.40, в при  $R_n > W$  усилительный каскад будет иметь характеристику ПГФ (см. рис. 9.1, д), а при  $R_n < W$  — характеристику РГФ (см. рис. 9.1, е).

Формирование гребенчатой характеристики может быть осуществлено и с помощью волнового резонансного четырехполюсника. Если в схеме рис. 8.52 удовлетворяются, например, условия (8.151) и (8.153), то на частотах  $k f_0 \left( f_0 = \frac{v_0}{2l_0} \right)$  должны быть максимумы частотной характеристики, так как при этом на нагрузке получаются пучности напряжения. На частотах же  $(2k+1) \frac{f_0}{2}$  должны получаться минимумы частотной характеристики, так как в этом случае отрезок линии максимально расстроен. Действительно, из соотношений (6.71а) и (8.155а) при  $R_i = R_n = R_0 \gg W$  получаем

$$\dot{K} \Big|_{f=(2k+1)\frac{f_0}{2}} = \frac{1}{2} \frac{(-1)^k}{-\frac{n\pi}{4} v + j \frac{1}{2} \left( \frac{W}{R_0} + \frac{R_0}{W} \right)} \approx j (-1)^{k+1} \frac{W}{R_0},$$

т. е.

$$K \Big|_{f=(2k+1)\frac{f_0}{2}} = \frac{W}{R_0} \ll 1.$$

В области же частот  $f = k f_0$  из соотношений (6.71а) и (8.156а) при  $R_i = R_n = R_0 \gg W$  находим

$$\dot{K} = \frac{1}{2} \frac{(-1)^k}{1 + j \frac{k\pi}{4} \left( \frac{W}{R_0} + \frac{R_0}{W} \right) v},$$

или

$$\dot{K} = (-1)^k \frac{K_{\max}}{1 + jQv},$$

где

$$K_{\max} = \frac{1}{2},$$

$$Q \approx \frac{k\pi}{4} \cdot \frac{R_0}{W}.$$



Таким образом, в области всех частот  $f = kf_0$  частотная характеристика рассматриваемой схемы представляет собой характеристику одиночного контура

$$A = \frac{1}{\sqrt{1 + Q^2 v^2}}$$

с одинаковой полосой пропускания

$$\Delta F = \frac{kf_0}{Q} = \frac{4}{\pi} \frac{W}{R_0} f_0.$$

Нетрудно видеть, что при  $\frac{R_0}{W} \ll 1$  сохраняются аналогичные соотношения. Таким образом, волновой четырехполюсник (см. рис. 8.52) при  $R_i = R_n = R_0 \gg W$  и  $R_i = R_n = R_0 \ll W$  является полосовым гребенчатым фильтром.

Такую схему ПГФ практически невозможно реализовать при низкой частоте  $f_0$ . Так, например, при  $f_0 = 1$  кГц получается

$$\lambda_0 = \frac{v_0}{f_0} = \frac{3 \cdot 10^8 \text{ м/сек}}{10^3 \text{ 1/сек}} = 3 \cdot 10^5 \text{ м и } l_0 = \frac{\lambda_0}{2} = 150 \text{ км.}$$

В этих случаях вместо волнового четырехполюсника может быть использована искусственная длинная линия, которая описывалась выше, как искусственная линия задержки. Параметры длинной линии, являющейся цепочечным фильтром нижних частот, должны быть выбраны так, чтобы соблюдалось неравенство  $f_r > kf_0$  при максимальном значении  $k = n$ . Число звеньев искусственной длинной линии определяется заданным максимальным значением  $k = n$ . Недостатком ПГФ в виде искусственной длинной линии является нарушение кратности средних частот полос пропускания.

Волновым четырехполюсником для формирования характеристики ПГФ может служить и механическая длинная линия, применение которой в качестве УЛЗ было рассмотрено выше. Длина механической длинной линии существенно меньше длины электрической длинной линии. Например, при  $f_0 = 1$  кГц и  $v = v_{кр} = 3 \cdot 10^3$  м/сек имеем  $l_0 = \frac{v}{2f_0} = 1,5$  м. Если механическую длинную линию свернуть в спираль, как и в УЛЗ, то получится достаточно компактная конструкция ПГФ.

## 2. Активные гребенчатые фильтры

Активный фильтр, выполненный по одной из схем с обратной связью (см. рис. 9.40), будет являться гребенчатым фильтром, если в цепи обратной связи применить какой-либо пассивный гребенчатый фильтр. Рассмотрим работу активного ГФ с волновым четырехполюсником в цепи обратной связи. В отличие от пассивного ГФ с волновым четырехполюсником используемая в цепи обратной связи длинная линия может быть согласована ( $R_i = R_n = R_0 = W$ ).

В указанном режиме согласно первому равенству (8.75) коэффициент передачи линии

$$\dot{K}_л = \dot{K}_{обр} = \frac{\dot{U}_m}{U_{m0}} = \cos \beta_0 l_0 - j \sin \beta_0 l_0.$$

Подставив это значение коэффициента обратной связи в формулу (9.136), получим коэффициент передачи активного фильтра:

$$\dot{K} = \frac{K_0}{1 - K_0 \cos \beta_0 l_0 + j K_0 \sin \beta_0 l_0}. \quad (9.183)$$

Отсюда видно, что на частотах  $f = kf_0$  ( $f_0 = \frac{v_0}{l_0}$ ), где  $\sin \beta_0 l_0 = 0$  и  $\cos \beta_0 l_0 = 1$ ,

$$\dot{K} = K_{\max} = \frac{K_0}{1 - K_0}, \quad (9.184)$$

а на промежуточных частотах  $f = (2k + 1) \frac{f_0}{2}$ , где  $\sin \beta_0 l_0 = 0$  и  $\cos \beta_0 l_0 = -1$ ,

$$\dot{K} = K_{\min} = \frac{K_0}{1 + K_0}. \quad (9.185)$$

Из формул (9.184), (9.185) следует, что значение  $K_0$  должно быть несколько меньше единицы. Тогда  $K_{\max} \gg K_{\min}$ , и активный фильтр является полосовым гребенчатым фильтром. При этом в области кратных частот  $f = kf_0$  уравнение (9.183) может быть представлено в виде

$$\dot{K} = \frac{K_{\max}}{1 + j K_{\max} \sin \beta_0 l_0} \approx \frac{K_{\max}}{1 + j K_{\max} k \pi v}.$$

Из последнего выражения вытекает, что частотная характеристика ПГФ в области частот  $f = kf_0$  представляет собой характеристику одиночного контура

$$A = \frac{1}{\sqrt{1 + Q^2 v^2}}$$

с переменной добротностью  $Q = k \pi K_{\max}$  и одинаковой полосой пропускания

$$\Delta F = \frac{k f_0}{Q} = \frac{f_0}{\pi K_{\max}}.$$

Следует подчеркнуть, что в рассматриваемом случае не может быть  $K_0 = 1$ , так как при этом согласно формуле (9.184)  $K_{\max} = \infty$ . Это означает, что усилитель будет самовозбуждаться и работать как генератор. Не может быть в описываемой схеме и  $K_0 \gg 1$ , так как при этом согласно формулам (9.184), (9.185)  $K_{\min} = -K_{\max} = 1$ . Аналогично при  $K_0 \ll 1$  получается  $K_{\max} = K_{\min} = K_0$ , и схема не является гребенчатым фильтром.

Если длинная линия в цепи обратной связи работает не в режиме бегущих волн, то активный фильтр может являться как полосовым гребенчатым фильтром (при  $R_0 \ll W$ ), так и режекторным гребенчатым фильтром (при  $R_0 \gg W$ ).

На практике, как и в случае пассивных ГФ, в цепи обратной связи активных ГФ используется или искусственная линия задержки или УЛЗ. Поскольку в таких активных фильтрах происходит запаздывание сигнала в цепи обратной связи, активные ГФ называются часто фильтрами с запаздывающей обратной связью. Аналогично пассивные ГФ с использованием линий задержки называют фильтрами с запаздывающей прямой связью.

Выше отмечалось, что ГФ применяются для селекции сигналов, представляющих собой периодическую последовательность импульсов. При подаче таких сигналов на вход фильтра с запаздывающей обратной связью одни и те же импульсы многократно проходят через усилитель, возвращаясь обратно на вход через цепь обратной связи. Поэтому фильтры с многократной циркуляцией импульсных сигналов со входа на выход и обратно называются также рециркуляционными фильтрами.

В рециркуляционных фильтрах время задержки в цепи обратной связи выбирается равным периоду следования импульсов. Таким образом, циркулирующие импульсы поступают на вход схемы одновременно с последующими импульсами, приходящими от источника на входе фильтра. При этом происходит многократное сложение (накопление) импульсов, в связи с чем рециркуляционные фильтры называют иногда накопителями, или фильтрами с накоплением.

# Г Л А В А 10

## СИГНАЛЫ И ИХ СПЕКТРЫ

### § 10.1. ОСНОВЫ СПЕКТРАЛЬНОГО АНАЛИЗА

#### 1. Виды спектров

В гл. 1 было показано, что сложный сигнал может быть представлен в виде совокупности гармонических колебаний, которая называется спектром сигнала.

Спектры можно изображать графически на временной диаграмме, как показано на рис. 10.1, а. Однако такое изображение спектра

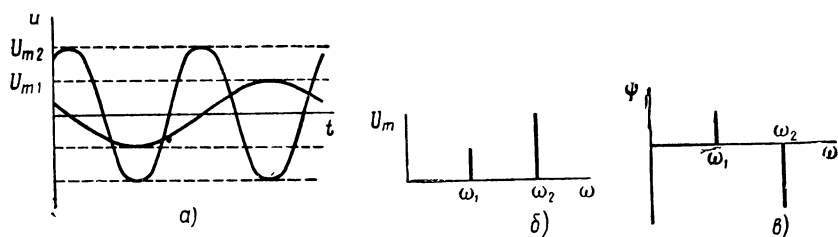


Рис. 10.1. Дискретные спектры

весьма неудобно и громоздко, особенно при большом числе спектральных составляющих. Поэтому принят другой способ изображения спектра.

Каждая из спектральных составляющих характеризуется частотой, амплитудой и начальной фазой. Поэтому графически спектр изображается в виде линий, характеризующих амплитуду и начальную фазу составляющих данной частоты (рис. 10.1, б и в). Первый график (см. рис. 10.1, б) называется спектром амплитуд, или просто спектром, а второй график (см. рис. 10.1, в) — спектром фаз.

Спектры, подобные изображенным на рис. 10.1, состоят из дискретного ряда составляющих и называются дискретными, или линейчатыми спектрами.

Периодические сигналы всегда имеют дискретные спектры. Действительно, периодическая функция  $u(t) = u(t + T)$ , описывающая сигнал с периодом  $T$ , может быть представлена в виде ряда Фурье \*:

$$u(t) = \frac{U_{m0}}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} U_{mk} \cos(k\Omega t - \psi_k), \quad (10.1)$$

где

$$U_{mk} = \sqrt{A_k^2 + B_k^2}, \quad \psi_k = \arctg \frac{B_k}{A_k},$$

$$A_k = U_{mk} \cos \psi_k = \frac{2}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} u(t) \cos k\Omega t dt,$$

$$B_k = U_{mk} \sin \psi_k = \frac{2}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} u(t) \sin k\Omega t dt,$$

$$\Omega = \frac{2\pi}{T}.$$
(10.2)

Из преобразования (10.1) видно, что дискретные спектры периодических сигналов имеют спектральные составляющие с кратными частотами  $k\Omega$ . Такие составляющие называются гармониками периодического сигнала, а его спектр — гармоническим спектром (рис. 10.2).

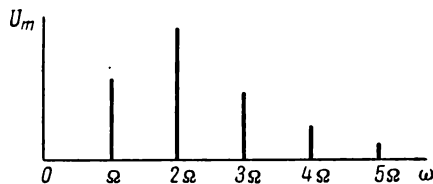


Рис. 10.2. Гармонический спектр

Непериодические сигналы также могут иметь дискретные спектры. Например, непериодический сигнал получается при сложении двух (или более) синусоидальных колебаний, отношение частот которых равно

иррациональному числу. Но по самой природе этого сигнала спектр его является дискретным. Непериодические сигналы, имеющие дискретный спектр, называются квазипериодическими. К таким сигналам относятся, в частности, АМ-сигналы.

Другой класс непериодических сигналов имеет спектры, не являющиеся дискретными. Для выяснения особенностей таких спек-

\* Функция  $u(t)$  должна удовлетворять условиям Дирихле, которые всегда соблюдаются в случае реальных сигналов.

тров рассмотрим ряд Фурье (10.1), представив его в комплексной форме:

$$u(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \dot{U}_{mk} e^{jk\Omega t}, \quad (10.3)$$

где

$$\dot{U}_{mk} = U_{mk} e^{-j\psi_k} = \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} u(t) e^{-jk\Omega t} dt^*. \quad (10.4)$$

Непериодический сигнал можно рассматривать как периодический сигнал с периодом  $T \rightarrow \infty$ . При этом непериодические сигналы описываются прежними соотношениями (10.1) — (10.4).

Таким образом, для непериодических сигналов ( $T \rightarrow \infty$ ) интервал  $\Omega$  между смежными спектральными составляющими стремится к нулю, как следует из последнего равенства (10.2). В этом случае спектр состоит из составляющих, имеющих все возможные частоты в интервале от нуля до бесконечности. Такие спектры называются сплошными, или непрерывными спектрами.

Сплошной спектр в любом конечном интервале частот имеет бесконечно большое число составляющих. Это означает, что при конечных амплитудах составляющих сплошной спектр заключал бы в себе бесконечно большую энергию, чего не может быть. Однако спектральные составляющие непериодического сигнала со сплошным спектром имеют бесконечно малую амплитуду. Действительно, интеграл в выражении (10.4) имеет конечное значение. Поэтому при  $T \rightarrow \infty$  амплитуда, определяемая соотношением (10.4), стремится к нулю, поскольку стремится к нулю множитель, стоящий перед интегралом.

Вследствие указанных особенностей сплошных спектров их описание рядом Фурье теряет смысл. Математически сплошные спектры описываются интегралом Фурье, который можно получить из выражения (10.3) при  $T \rightarrow \infty$ .

В этом случае спектр характеризуется не амплитудами составляющих, имеющими бесконечно малую величину, а спектральной функцией

$$\dot{S}(\omega) = \frac{d\dot{U}_m}{d\omega}. \quad (10.5)$$

---

\* Следует иметь в виду, что при переходе к комплексной форме ряда Фурье в правой части равенства (10.3) должен стоять коэффициент  $\frac{1}{2}$ . Здесь он перенесен из равенства (10.3) в (10.4). Такой перенос не изменяет значения функции  $u(t)$ , определяемой парой преобразований (10.3), (10.4). Однако при этом комплексные амплитуды (10.4) получаются в два раза меньше, чем комплексные амплитуды (2.16), соответствующие символическому изображению гармонических величин.

Согласно определению, модуль спектральной функции показывает интенсивность спектральных составляющих, приходящихся на частотный интервал  $d\omega$ . Поэтому спектральную функцию  $\dot{S}$  называют также спектральной плотностью.

На разных частотах интенсивность спектра получается различной, поэтому спектральная плотность является функцией частоты.

Вводя обозначения  $\Omega = d\omega$ ,  $k\Omega = \omega$ ,  $\dot{U}_{mk} = d\dot{U}_m$  и совершая предельный переход при  $T \rightarrow \infty$ , из выражений (10.3) — (10.5) получаем:

$$u(t) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{j\omega t} d\dot{U}_m = \int_{-\infty}^{\infty} \dot{S}(\omega) e^{j\omega t} d\omega, \quad (10.6)$$

$$\dot{S}(\omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} u(t) e^{-j\omega t} dt. \quad (10.7)$$

Выражения (10.7) и (10.6) называются соответственно прямым и обратным преобразованиями Фурье\*.

Сплошной спектр, описываемый уравнением (10.7), графически изображается кривыми частотной зависимости модуля и аргумента спектральной плотности (рис. 10.3, а, б).

При использовании комплексной формы записи интеграла Фурье (10.6) интегрирование ведется в пределах от  $-\infty$  до  $\infty$ . В этом случае формально существуют отрицательные частоты. Поэтому в литературе спектральную функцию  $\dot{S}(\omega)$  изображают иногда не только в области положительных частот (см. рис. 10.3, а), но также в области отрицательных частот (рис. 10.3, б). Следует, однако, иметь в виду, что такое изображение является условным, поскольку отрицательные частоты имеют место только на плоскости комплексного переменного, где им соответствует вращение векторов в отрицательном направлении (по часовой стрелке).

В прямом преобразовании Фурье (10.7) интегрирование по времени производится также в бесконечных пределах. Однако реальные сигналы ограничены во времени, поэтому интегрирование по формуле (10.7) производится практически в конечных пределах.

---

\* Часто спектральную функцию определяют иначе:

$$\dot{S}(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} u(t) e^{-j\omega t} dt.$$

При этом интеграл Фурье записывается следующим образом:

$$u(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \dot{S}(\omega) e^{j\omega t} d\omega.$$

Иногда используется также симметричная форма записи преобразований Фурье:

$$u(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \dot{S}(\omega) e^{j\omega t} d\omega,$$

$$\dot{S}(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} u(t) e^{-j\omega t} dt.$$

В связи с этим существенно отметить и то обстоятельство, что реальные сигналы, ограниченные во времени, не являются периодическими сигналами, которые существуют в интервале  $-\infty \leq t \leq \infty$ . Поэтому, строго говоря, реальные сигналы всегда имеют сплошной, а не дискретный спектр. Рассматривая реальные сигналы как периодические сигналы с дискретным спектром, исходят из следующих представлений. При возрастании длительности сигнала, который в заданном интервале времени удовлетворяет условию периодичности, его сплошной спектр сжимается, группируясь около ряда дискретных частот. При достаточно большой длительности сигнала энергия спектра сосредоточивается в настолько узких интервалах около указанных дискретных частот, что практически такой спектр можно считать дискретным.

Изображение спектров в виде непрерывных кривых очень удобно при сравнении спектров различных сигналов, поэтому им пользуются и в случае дискретных спектров, распространяя определение

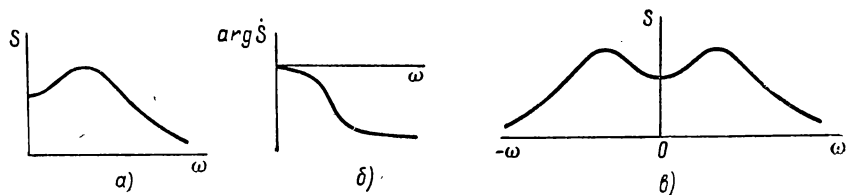


Рис. 10.3. Спектральные функции

спектральной плотности на этот случай. При гармоническом спектре спектральную плотность можно определить таким образом:

$$\dot{S}(\omega) = \frac{\dot{U}_m}{\Omega} = \frac{U_m}{\Omega} e^{-j\psi} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} u(t) e^{-j\omega t} dt. \quad (10.8)$$

При этом спектры амплитуд и фаз можно изображать графически, подобно тому как это сделано на рис. 10.3. Для определения амплитуд отдельных гармонических составляющих надо взять ординаты кривой на рис. 10.3, а при частотах  $\Omega$ ,  $2\Omega$ ,  $3\Omega$  и т. д. и умножить их на  $\Omega^*$ . Для определения начальных фаз гармонических составляющих надо взять ординаты кривой на рис. 10.3, б при частотах  $\Omega$ ,  $2\Omega$ ,  $3\Omega$  и т. д. Эти ординаты, взятые с обратным знаком, и являются начальными фазами составляющих, так как по определению (10.8)

$$\psi = -\arg \dot{S}.$$

Определение (10.8) не является универсальным, поскольку оно не пригодно для дискретных негармонических спектров, для которых

\* При этом для определения амплитуд (2.16), соответствующих символическому изображению гармонических спектральных составляющих, полученное значение  $U_m$  следует удвоить (см. сноску на стр. 443).



интервал между смежными спектральными составляющими не равен постоянной величине  $\Omega$ . Поэтому можно пользоваться определением спектральной плотности, отнесенной не к интервалу  $\Omega$ , а к достаточно малому произвольному интервалу  $\Delta\omega$ :

$$\dot{S}(\omega) = S(\omega) e^{-j\psi(\omega)} = \frac{\dot{U}_m}{\Delta\omega}. \quad (10.9)$$

Это определение пригодно в случае любых дискретных спектров, а также в случае сплошных спектров при  $\Delta\omega \rightarrow 0$ .

Однако определение (10.9) пригодно лишь тогда, когда заведомо известно, что в интервале  $\Delta\omega$  заключена только одна спектральная составляющая сигнала. В общем случае в произвольном, хотя и достаточно малом, интервале  $\Delta\omega$  может заключаться несколько спектральных составляющих. При этом удобно энергетическое определение спектральной плотности.

Спектральной плотностью в энергетическом смысле называется функция, характеризующая величину суммарной мощности  $\Delta P_a$  спектральных составляющих сигнала в узком интервале частот  $\Delta f$ :

$$S_s = \frac{\Delta P_a}{\Delta f}. \quad (10.10)$$

Поскольку мощность пропорциональна квадрату напряжения (или тока), определение (10.10) соответствует квадратичному сложению амплитуд гармонических составляющих в интервале  $\Delta f$ . Иногда вместо понятия (10.10) используют энергетическое определение плотности спектра, соответствующее среднеквадратичному сложению амплитуд гармонических составляющих в интервале  $\Delta f$ :

$$S'_s = \frac{\sqrt{\Delta P_a}}{\Delta f}. \quad (10.11)$$

При энергетическом определении спектральной плотности спектр фаз не учитывается.

Из предыдущего рассмотрения следует, что в ряде случаев спектры сложных сигналов занимают бесконечный интервал частот (от 0 до  $\infty$ ). На первый взгляд кажется, что для беспрепятственного прохождения таких сигналов через цепь она должна иметь бесконечно широкую полосу пропускания. Однако подобный вывод был бы преждевременным и неверным.

Любой сигнал, а следовательно, и его спектр заключает в себе конечную энергию. Если бы спектральная плотность сигнала была конечной во всем интервале частот от нуля до бесконечности, то спектр заключал бы в себе бесконечно большую энергию. Поэтому очевидно, что спектральная плотность может иметь конечное значение только в ограниченном частотном диапазоне, за пределами которого ее величина должна стремиться к нулю.

Следовательно, всегда имеется вполне определенный ограниченный интервал частот, в котором сосредоточена подавляющая часть

энергии спектра (т. е. энергии сигнала). Этот интервал частот называется шириной спектра. Таким образом, для беспрепятственного прохождения реальных сигналов через цепь она всегда должна иметь конечную полосу пропускания, ширина которой должна равняться конечной ширине спектра сигнала.

Ширину спектра, ограниченного частотами  $f_{\min}$  и  $f_{\max}$ , можно определить следующим образом:

$$\int_{f_{\min}}^{f_{\max}} S_s df = \varepsilon \int_0^{\infty} S_s df, \quad (10.12)$$

где  $\varepsilon$  — коэффициент, величина которого зависит от энергии, заключенной в части спектра, не влияющей существенно на форму сигнала; практически  $\varepsilon$  принимается равным  $0,9 \div 0,99$ .

Хотя такое определение является достаточно универсальным и точным, во многих случаях его затруднительно использовать для практического определения ширины спектра. Поэтому на практике применяется более простой критерий для определения ширины спектра.

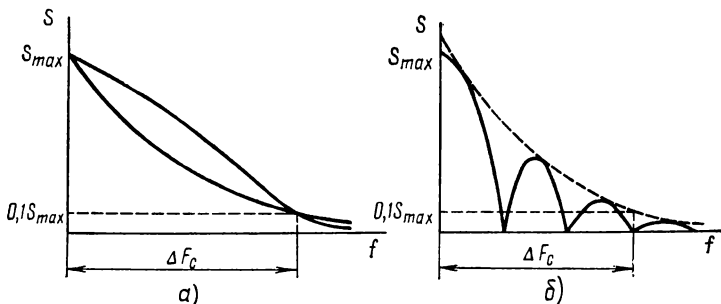


Рис. 10.4. Определение ширины спектра

При этом рассматривается непосредственно спектральная функция  $S_s$  (или  $S'_s$ , или  $S$ ) в области частот, где она имеет максимальное значение  $S_{\max}$  (рис. 10.4). Под шириной спектра в этом случае понимаем интервал частот, в котором спектральная плотность  $S_s \geq 0,01S_{\max}$  или  $S'_s \geq 0,1S_{\max}$ ,  $S \geq 0,1S_{\max}$  (рис. 10.4, а). Такому определению соответствует относительное уменьшение амплитуд гармонических составляющих сигнала не более чем в 10 раз.

Из рис. 10.4, а видно, что критерий, положенный в основу определения ширины спектра, не является достаточно определенным. Действительно, на этом рисунке изображены две спектральные функции различных сигналов, одна из которых убывает с ростом частоты медленнее, чем другая. Однако, согласно определению, оба сигнала при этом имеют одинаковую ширину спектра.

Несмотря на неопределенность в определении ширины спектра, будем пользоваться указанным критерием ввиду его простоты. В случае немонотонных спектральных функций определение ширины спектра таким упрощенным методом следует производить не по самой спектральной функции, а по ее огибающей, как показано на рис. 10.4, б.

## 2. Основные свойства спектров

Понятие спектральной функции применимо к спектру любого вида, как было показано выше. Поэтому, анализируя свойства спектров, можно ограничиться рассмотрением спектральных функций вида (10.7).

Первое основное свойство спектров (свойство линейности) заключается в том, что спектр суммы нескольких сигналов равен сумме их спектров.

Действительно, если сигналы  $u_1(t)$ ,  $u_2(t)$ , ...,  $u_n(t)$  имеют спектральные функции  $\hat{S}_1(\omega)$ ,  $\hat{S}_2(\omega)$ , ...,  $\hat{S}_n(\omega)$ , определяемые формулой (10.7), то спектральная функция  $\hat{S}(\omega)$  суммарного сигнала

$u(t) = \sum_{k=1}^n u_k(t)$  равна

$$\hat{S}(\omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \left[ \sum_{k=1}^n u_k(t) \right] e^{-j\omega t} dt = \sum_{k=1}^n \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} u_k(t) e^{-j\omega t} dt,$$

или

$$\hat{S}(\omega) = \sum_{k=1}^n \hat{S}_k(\omega). \quad (10.13)$$

Используя это свойство спектров, можно определять спектры некоторых сложных сигналов. Например, спектр сложного сигнала  $u$  (рис. 10.5, а) может быть получен как сумма спектров сигналов  $u_1$  и  $u_2$  (рис. 10.5, б и в) или как разность спектров сигналов  $u_3$  и  $u_4$  (рис. 10.5, г и д). Спектры же сигналов  $u_1$ ,  $u_2$ ,  $u_3$ ,  $u_4$ , являясь более простыми, могут быть найдены непосредственно, как это показывается в дальнейшем.

Второе основное свойство спектров состоит в определенном изменении спектра при смещении сигнала во времени. Такое изменение сигналов обычно проявляется в виде их запаздывания при прохождении по каналу связи. Примером запаздывания является смещение во времени сигнала  $u_2$  на рис. 10.5 относительно сигнала  $u_1$ , который по форме тождествен сигналу  $u_2$ .

Сигнал  $u(t)$ , запаздывающий на время  $\tau$ , может быть представлен как

$$u_{\tau}(t) = u(t - \tau).$$

Спектральная функция (10.7) такого сигнала равна

$$\dot{S}_\tau(\omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} u_\tau(t) e^{-j\omega t} dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} u(t - \tau) e^{-j\omega t} dt.$$

Вводя новую переменную  $t' = t - \tau$ , получим  $t = t' + \tau$ ,  $dt = dt'$  и

$$\dot{S}_\tau(\omega) = \frac{e^{-j\omega\tau}}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} u(t') e^{-j\omega t'} dt'.$$

Так как значение интеграла в этом выражении не зависит от обозначения переменной, то

$$\begin{aligned} \dot{S}(\omega) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} u(t) e^{-j\omega t} dt = \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} u(t') e^{-j\omega t'} dt' \end{aligned}$$

и окончательно получаем

$$\dot{S}_\tau(\omega) = e^{-j\omega\tau} \dot{S}(\omega). \quad (10.14)$$

Последнее равенство означает, что при запаздывании сигнала модуль спектральной функции (т. е. амплитуды спектральных составляющих в случае дискретного спектра) не претерпевает изменения, а фаза всех спектральных составляющих уменьшается на величину, пропорциональную их частоте.

Равенство (10.14) составляет содержание так называемой теоремы запаздывания. Эту теорему можно использовать не только при определении спектров запаздывающих сигналов по известным спектрам исходных сигналов, но и при анализе свойств линейных цепей.

Спектры сигналов обладают также рядом других интересных свойств, которые здесь не рассматриваются.

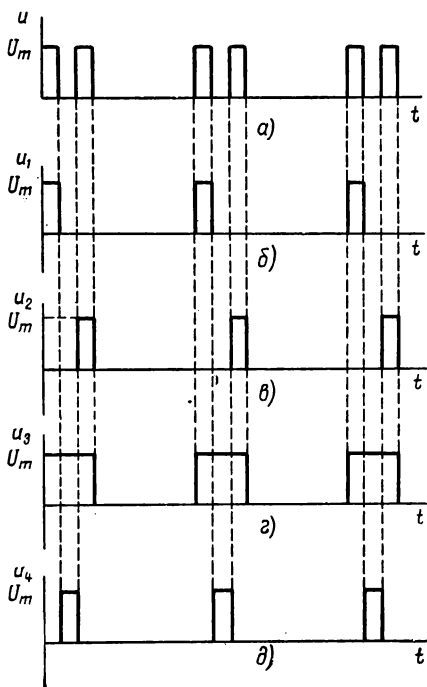


Рис. 10.5. Разложение сложного сигнала

### 3. Методы определения спектров

Методы определения спектров реальных сигналов делятся на три основных вида — аналитические, графо-аналитические и экспериментальные.

Аналитические методы определения спектров сигналов сводятся к непосредственному их вычислению по формулам (10.1), (10.2) или (10.7), если известна функция  $u(t)$ , описывающая сигнал. Обычно реальные сигналы бывают настолько сложными, что только в отдельных случаях можно подобрать достаточно точную аппроксимирующую функцию  $u(t)$ . При аналитическом определении спектра сложных сигналов часто используется их представление в виде совокупности более простых сигналов, как это отмечалось выше.

Графо-аналитические методы позволяют вычислять спектр сигнала тогда, когда не удастся подобрать достаточно точную аппроксимирующую функцию. В этих случаях сигнал может задаваться таблицей дискретных значений  $u_1 = u(t_1)$ ,  $u_2 = u(t_2)$ , ...,  $u_n = u(t_n)$  или графиком  $u(t)$ , по которому определяются те же дискретные значения сигнала. Для периодических сигналов моменты времени  $t_1, t_2, \dots, t_n$  удобно выбирать через одинаковые интервалы  $\Delta t$  на протяжении одного периода сигнала (или полупериода, если сигнал симметричен).

Рассмотрим общую схему определения спектра сигнала на примере периодического сигнала. В соответствии с равенствами (10.1), (10.2) по известным дискретным значениям сигнала составляется система уравнений:

$$u_1 = \frac{U_{m0}}{2} + A_1 \cos \Omega t_1 + B_1 \sin \Omega t_1 + A_2 \cos 2\Omega t_1 + B_2 \sin 2\Omega t_1 + \dots \\ \dots + A_k \cos k\Omega t_1 + B_k \sin k\Omega t_1,$$

$$u_2 = \frac{U_{m0}}{2} + A_1 \cos \Omega t_2 + B_1 \sin \Omega t_2 + A_2 \cos 2\Omega t_2 + B_2 \sin 2\Omega t_2 + \dots \\ \dots + A_k \cos k\Omega t_2 + B_k \sin k\Omega t_2,$$

.....

$$u_n = \frac{U_{m0}}{2} + A_1 \cos \Omega t_n + B_1 \sin \Omega t_n + A_2 \cos 2\Omega t_n + B_2 \sin 2\Omega t_n + \dots \\ \dots + A_k \cos k\Omega t_n + B_k \sin k\Omega t_n.$$

В этой системе уравнений неизвестными являются коэффициенты ряда Фурье  $U_{m0}, A_1, B_1, A_2, B_2, \dots, A_k, B_k$ . Эти неизвестные, а следовательно, амплитуды и фазы спектральных составляющих могут быть определены при  $n = 2k + 1$ .

Если исследуемый сигнал является четным (при соответствующем выборе начала отсчета), то все синусоидальные составляющие обращаются в нуль ( $B_i = 0$ ). При этом число неизвестных коэффициентов ряда Фурье сокращается и задача определения спектра решается при  $n = k + 1$ .

Если сигнал  $u(t)$  задан графически, то постоянная составляющая  $\frac{U_{m0}}{2}$  может быть иногда определена непосредственно из графика. При этом она может быть исключена из графика функции соответствующим переносом оси абсцисс (перед определением дискретных значений  $u_1, u_2, \dots, u_n$ ). В этом случае задача определения спектра решается при  $n = 2k$  или  $n = k$ .

Таким образом, графо-аналитические методы позволяют тем точнее определить спектр сигнала, т. е. найти тем больше его спектральных составляющих, чем больше известно дискретных значений сигнала.

Для непериодических сигналов графо-аналитическое определение спектра существенно усложняется, так как при этом частоты спектральных составляющих неизвестны и параметры спектра определяются из системы трансцендентных уравнений.

Экспериментальное определение спектра сигналов производится с помощью так называемых анализаторов спектра. Существует два основных метода экспериментального определения спектра — одновременный (параллельный) и последовательный.

При одновременном методе спектрального анализа сигнал проходит через систему фильтров со смещенными относительно друг друга полосами пропускания. При этом определяются суммарная мощность спектральных составляющих на выходе каждого из фильтров с полосой пропускания  $\Delta F$  и спектральная плотность в соответствии с равенством (10.10) или (10.11).

При последовательном методе спектрального анализа применяется один перестраиваемый фильтр, с помощью которого определяется суммарная мощность спектральных составляющих последовательно в различных интервалах  $\Delta F$ . В таких анализаторах спектра вместо перестройки фильтра используется иногда перемещение всего спектра по оси частот, что позволяет при помощи фильтра с фиксированной настройкой «просмотреть» различные участки исследуемого спектра. Указанное перемещение спектра осуществляется с помощью преобразователя частоты, работа которого рассматривается в курсе нелинейных радиотехнических устройств.

В ряде случаев целью спектрального анализа является определение не отдельных спектральных составляющих сигнала, а интервала частот, занимаемого спектром сигнала. При этом для определения ширины спектра могут быть использованы искусственные методы. Один из таких методов рассматривается ниже на примере телевизионного сигнала.

## § 10.2. УПРАВЛЯЮЩИЕ СИГНАЛЫ И ИХ СПЕКТРЫ

### 1. Виды управляющих сигналов

Подавляющее большинство управляющих сигналов имеет настолько сложный характер временной зависимости, что не поддается точному аналитическому описанию. В качестве примера на рис. 10.6, *а* показаны осциллограммы гласных звуков. Следует иметь в виду, что вид этих осциллограмм зависит также от индивидуальных особенностей речи. На рис. 10.6, *б* показан примерный вид телевизионного управляющего сигнала (видеосигнала), включающего в себя, помимо сигнала изображения, синхронизирующие импульсы и другие вспомогательные сигналы.

Наиболее простыми управляющими сигналами являются импульсные сигналы, которые широко используются в радиолокации, в импульсной радиосвязи и в других отраслях радиотехники. Форма импульсов может быть весьма сложной, однако реальные импульсы, используемые в радиотехнике, довольно точно аппроксимируются сравнительно простыми функциями.

На рис. 10.7 показаны графики, изображающие периодическую последовательность импульсов различной формы. Так как периодические функции, в строгом смысле этого слова, не имеют ни начала, ни конца, т. е. определяются в интервале  $-\infty \leq t \leq \infty$ , то графики изображены также в области  $t < 0$ .

Импульсы, показанные на рис. 10.7, в интервале в один период (около  $t = 0$ ) могут быть описаны следующими функциями:

$$u(t) \Big|_{|t| \leq \frac{\tau}{2}} = U_m, \quad u(t) \Big|_{|t| > \frac{\tau}{2}} = 0 \quad (10.15)$$

— прямоугольный импульс (рис. 10.7, *а*);

$$u(t) \Big|_{-\frac{\tau}{2} \leq t \leq 0} = U_m \left(1 + \frac{2t}{\tau}\right), \quad u(t) \Big|_{0 \leq t \leq \frac{\tau}{2}} = U_m \left(1 - \frac{2t}{\tau}\right) \quad (10.16)$$

— треугольный импульс (рис. 10.7, *б*);

$$u(t) \Big|_{|t| \leq \frac{\tau}{2}} = U_m \cos \pi \frac{t}{\tau}, \quad u(t) \Big|_{|t| > \frac{\tau}{2}} = 0 \quad (10.17)$$

— косинусоидальный импульс (рис. 10.7, *в*) при  $\tau = \frac{T}{2}$ ;

$$u(t) \Big|_{0 \leq t \leq \tau} = U_m e^{-\alpha t}, \quad u(t) \Big|_{t < 0 \text{ и } t > \tau} = 0 \quad (10.18)$$

— экспоненциальный импульс (рис. 10.7, *г*);

$$u(t) \Big|_{|t| \leq \frac{\tau}{2}} = U_m e^{-(\alpha t)^2}, \quad u(t) \Big|_{|t| > \frac{\tau}{2}} = 0 \quad (10.19)$$

— колокольный импульс (рис. 10.7, *д*).

По поводу двух последних видов импульсов надо сделать следующее замечание. Экспоненциальный и колокольный импульсы стремятся к нулю лишь при  $t \rightarrow \infty$ . Практически же длительность  $\tau$  таких импульсов считается конечной величиной, поскольку при достаточно малом значении  $u(t)$  напряжение не поддается регистрации. Поэтому при определении длительности указанных импульсов принято пренебрегать той частью импульса, ордината которой становится меньше одной

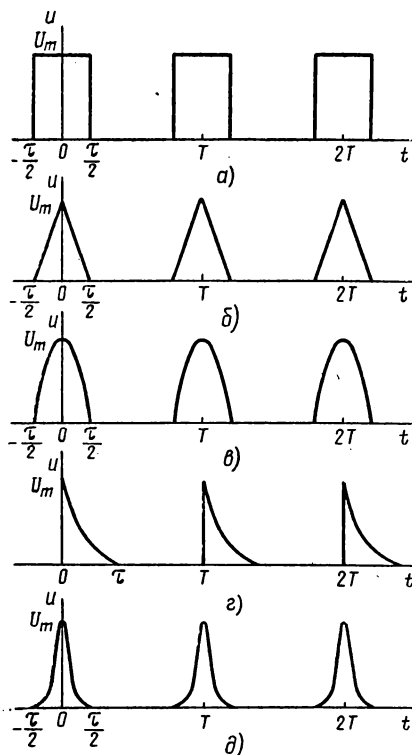
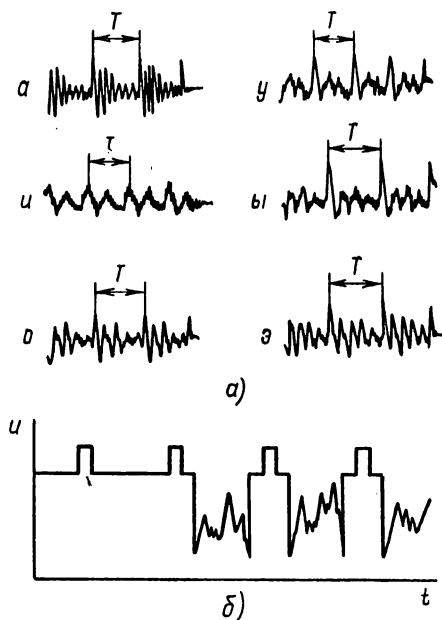


Рис. 10.6. Виды управляющих сигналов

Рис. 10.7. Виды импульсных сигналов

десятой амплитудного значения. Таким образом, длительность  $\tau$  экспоненциального и колокольного импульсов определяется из условий:

$$e^{-\alpha\tau} = 0,1, \quad \text{или } \alpha\tau = \ln 10 = 2,3,$$

$$e^{-\left(\alpha\frac{\tau}{2}\right)^2} = 0,1, \quad \text{или } \alpha\frac{\tau}{2} = \sqrt{\ln 10} = 1,52.$$

Отсюда получаем:

для экспоненциального импульса

$$\tau = \frac{2,3}{\alpha}, \quad \alpha = \frac{2,3}{\tau}, \quad (10.20)$$



для колокольного импульса

$$\tau = \frac{3,04}{\alpha}, \quad \alpha = \frac{3,04}{\tau}. \quad (10.21)$$

Вторые равенства в формулах (10.20), (10.21) позволяют выбрать параметр  $\alpha$  в аппроксимирующих функциях (10.18), (10.19) при заданной длительности импульсов  $\tau$ .

В некоторых случаях под длительностью импульса  $\tau$  понимается интервал времени, в котором сосредоточена подавляющая доля (0,9 или 0,99) всей энергии импульса. Такой формулировкой логично пользоваться, например, при энергетическом определении ширины спектра (10.12).

## 2. Спектры управляющих сигналов

Спектры управляющих сигналов в большинстве случаев могут быть определены только экспериментально. В качестве примера на рис. 10.8 показаны найденные экспериментально спектры мужской (сплошная линия) и женской (пунктирная линия) речи \*. На этом рисунке спектральная плотность (10.10) отложена в логарифмическом масштабе:

$$S_s = 10 \lg \frac{\Delta I}{I_0 \Delta f},$$

где  $\Delta I$  — интенсивность речи за длительное время в узкой полосе частот  $\Delta f$ ;

$I_0$  — интенсивность (удельная мощность) стандартного нулевого уровня звука, равная  $10^{-16}$  *вт/см<sup>2</sup>*.

Из рис. 10.8 видно, что согласно принятому определению ширины спектра, спектр мужской речи занимает диапазон частот приблизительно  $100 \div 1500$  *гц*, а спектр женской речи —  $150 \div 3500$  *гц*.

Определим ширину спектра телевизионного сигнала, изображенного на рис. 10.6, б. При этом воспользуемся искусственным методом, заключающимся в приближенной оценке возможных максимальной и минимальной частот сигнала.

Смена телевизионных кадров осуществляется с частотой  $N = 25$  раз в секунду. Однако частота 25 *гц* еще не является минимальной частотой видеосигнала. При смене кадров основной фон изображения может сохраняться на протяжении нескольких десятков и сотен кадров. И лишь по прошествии нескольких секунд белый, например, фон изображения может смениться черным фоном. Таким образом, частота изменения фона может составлять доли герца.

---

\* Иофе В. К. и Ямпольский А. А. Расчетные графики и таблицы по электроакустике. Госэнергоиздат, 1954.

Такие частоты и являются минимальными возможными частотами телевизионного изображения.

Максимальная частота видеосигнала  $F_{\max}$  может быть найдена в предположении, что изображение состоит из чередующихся черных и белых квадратных клеток, как на шахматной доске (рис. 10.9). Общее число таких клеток  $K$  может быть определено при заданном числе строк изображения  $n$  и при известном соотношении сторон кадра  $k = \frac{b}{a} = \frac{m}{n}$ :

$$K = mn = kn^2.$$

Полагая, что при развертке одной пары клеток формируется один период колебания в телевизионном сигнале, находим, что

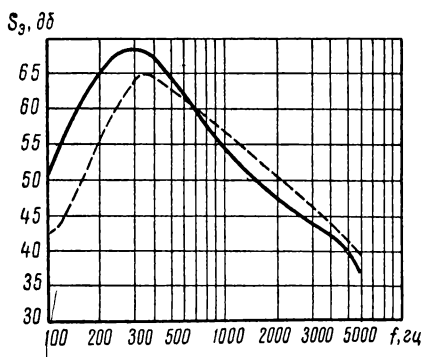


Рис. 10.8. Спектры мужской и женской речи

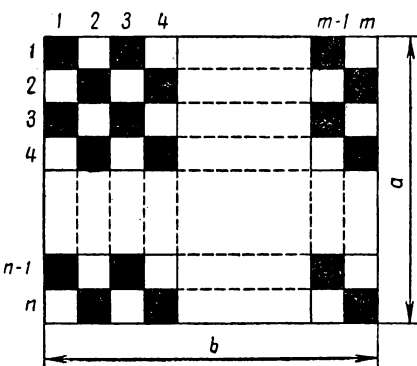


Рис. 10.9. Разбивка телевизионного кадра на элементы

одному кадру изображения соответствует  $\frac{kn^2}{2}$  периодов, а передаче  $N$  кадров в секунду — частота

$$F_{\max} = \frac{kn^2 N}{2} \text{ гц}.$$

В советском телевизионном вещании принят следующий стандарт:  $k = \frac{4}{3}$ ,  $n = 625$ ,  $N = 25$ . Отсюда определяется максимальная частота телевизионного сигнала:  $F_{\max} \approx 6,5 \text{ Мгц}$ .

Рассмотрим теперь спектры импульсных управляющих сигналов (видеоимпульсов).

При периодической последовательности импульсов интеграл в выражении (10.8) отличен от нуля только в интервале от  $-\frac{\tau}{2}$  до  $\frac{\tau}{2}$  (или от 0 до  $\tau$ ). В остальную же часть периода этот интеграл равен нулю, так как равна нулю функция  $u(t)$ . Поэтому для периодической

последовательности импульсов выражение (10.8) можно переписать в виде

$$\dot{S}(\omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\frac{\tau}{2}}^{\frac{\tau}{2}} u(t) e^{-j\omega t} dt. \quad (10.22)$$

Интересно отметить, что значение спектральной функции в этом выражении не зависит от периода функции. Следовательно, для импульсов данной формы спектральная функция получается одинаковой при любой частоте следования импульсов. В частности, спектральная функция периодической последовательности импульсов и одиночного импульса ( $T = \infty$ ) должна быть одной и той же. Действительно, для одиночного импульса, ограниченного в интервале  $-\frac{\tau}{2} \leq t \leq \frac{\tau}{2}$ , выражение (10.7) переходит в формулу (10.22).

Подставив в соотношение (10.22) значения  $u(t)$  из формул (10.15) — (10.17) и произведя интегрирование, получим:

$$\dot{S} = \frac{U_m}{\pi\omega} \sin \frac{\tau}{2} \omega, \quad (10.23)$$

$$S = \frac{U_m}{\pi\omega} \left| \sin \frac{\tau}{2} \omega \right| \quad (10.24)$$

— для прямоугольных импульсов;

$$\dot{S} = S = \frac{4U_m}{\pi\tau\omega^2} \sin^2 \frac{\tau}{4} \omega \quad (10.25)$$

— для треугольных импульсов;

$$\dot{S} = \frac{\tau U_m}{\pi^2 \left(1 - \frac{\tau^2 \omega^2}{\pi^2}\right)} \cos \frac{\tau}{2} \omega, \quad (10.26)$$

$$S = \frac{\tau U_m}{\pi^2 \left|1 - \frac{\tau^2 \omega^2}{\pi^2}\right|} \left| \cos \frac{\tau}{2} \omega \right| \quad (10.27)$$

— для косинусоидальных импульсов при  $\tau = \frac{T}{2}$ .

Из полученных выражений видно, что спектральная плотность максимальна на нулевой частоте и убывает немонотонно, стремясь к нулю при  $\omega \rightarrow \infty$  и обращаясь в нуль при  $f = \frac{1}{\tau}, \frac{2}{\tau}, \frac{3}{\tau}, \dots$  (для прямоугольных импульсов), при  $f = \frac{2}{\tau}, \frac{4}{\tau}, \frac{6}{\tau}, \dots$  (для треугольных импульсов), при  $f = \frac{3}{2\tau}, \frac{5}{2\tau}, \frac{7}{2\tau}, \dots$  (для косинусоидальных импульсов).

Следует иметь в виду, что при определении спектральной плотности на нулевой частоте (для прямоугольных и треугольных импульсов) и на частоте  $f = \frac{1}{2\tau}$  (для косинусоидальных импульсов)

получается неопределенность вида  $0/0$ . Воспользовавшись правилом Лопиталя, раскрываем эту неопределенность \*:

$$S|_{f=0} = \frac{\tau}{2\pi} U_m \quad (10.28)$$

— для прямоугольных импульсов;

$$S|_{f=0} = \frac{\tau}{4\pi} U_m \quad (10.29)$$

— для треугольных импульсов;

$$S|_{f=\frac{1}{2\tau}} = \frac{\tau}{4\pi} U_m \quad (10.30)$$

— для косинусоидальных импульсов.

Для прямоугольных и косинусоидальных импульсов спектральная плотность является знакопеременной функцией. Это означает, что начальная фаза составляющих этих сигналов  $\psi = -\arg \dot{S}$  изменяется скачком на величину  $\pi$ , когда спектральная функция обращается в нуль. В случае же треугольных импульсов начальная фаза всех составляющих равна нулю ( $\psi = -\arg \dot{S} = 0$ ).

Графики  $S(\omega)$  и  $-\psi(\omega)$ , построенные по формулам (10.23) — (10.30), показаны на рис. 10.10, а, б и в.

На определении спектральной плотности колокольных импульсов следует остановиться особо. Функция  $u(t)$ , аппроксимирующая эти импульсы, обращается в нуль при  $\omega \rightarrow \infty$ . Поэтому практически длительность импульсов ограничивается условием (10.21).

При вычислении спектральной функции по формуле (10.22) интеграл берется в интервале  $\Delta t = \tau$ . Однако для колокольных импульсов вычисление интеграла значительно упрощается, если его брать в бесконечных пределах. При этом будет допущена незначительная ошибка в значении спектральной функции, так как в интервале  $\Delta t = \tau$  сосредоточена подавляющая доля энергии импульса.

Поступая таким образом, находим

$$\begin{aligned} \dot{S}(\omega) &= \frac{U_m}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-(\alpha t)^2} e^{-j\omega t} dt = \frac{U_m}{2\pi} e^{-\left(\frac{\omega}{2\alpha}\right)^2} \times \\ &\times \int_{-\infty}^{\infty} e^{-(\alpha t + j\frac{\omega}{2\alpha})^2} dt = \frac{U_m}{2\pi\alpha} e^{-\left(\frac{\omega}{2\alpha}\right)^2} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} dx, \end{aligned}$$

где

$$x = \alpha t + j\frac{\omega}{2\alpha}, \quad dx = \alpha dt.$$

---

\* В первых двух случаях можно непосредственно воспользоваться значением предела  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$ .

Воспользовавшись табличным значением интеграла

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} dx = 2 \int_0^{\infty} e^{-x^2} dx = \sqrt{\pi}$$

и учитывая соотношение (10.21), получаем окончательно

$$\dot{S} = S = \frac{U_m}{2\sqrt{\pi}\alpha} e^{-\left(\frac{\omega}{2\alpha}\right)^2} = \frac{\tau U_m}{6,08\sqrt{\pi}} e^{-(0,165\tau\omega)^2}. \quad (10.31)$$

Таким образом, спектральная функция колокольных импульсов также имеет колокольную форму. График этой функции показан на рис. 10.10, з.

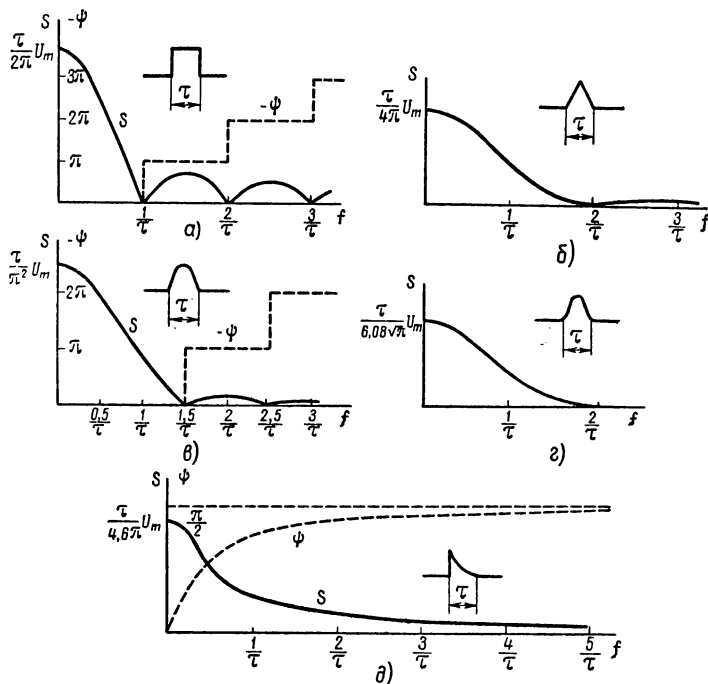


Рис. 10.10. Спектральные функции импульсных сигналов

Для экспоненциальных импульсов спектральная функция легко определяется по формуле (10.22). Но для упрощения окончательного выражения интеграл, как и в случае колокольных импульсов, целесообразно брать в бесконечных пределах. При этом, учитывая

соотношение (10.20), получаем:

$$\dot{S} = \frac{U_m}{2\pi} \int_0^{\infty} e^{-(\alpha + j\omega)t} dt = \frac{U_m}{2\pi(\alpha + j\omega)} = \frac{\tau U_m}{4,6\pi(1 + j0,435\tau\omega)}, \quad (10.32)$$

$$S = \frac{\tau U_m}{4,6\pi \sqrt{1 + 0,189\tau^2\omega^2}}, \quad (10.33)$$

$$\psi = -\arg \dot{S} = \arctg 0,435\tau\omega. \quad (10.34)$$

Графики  $S(\omega)$  и  $\psi(\omega)$ , построенные по этим уравнениям, показаны на рис. 10.10, б.

Во всех рассмотренных случаях спектры импульсов занимают интервал частот от нуля до бесконечности, но амплитуды спектральных составляющих убывают с ростом частоты, стремясь к нулю при  $\omega \rightarrow \infty$ . Практически, как отмечалось, ширина спектра  $\Delta F_c$  является ограниченной, так как спектральными составляющими с малыми амплитудами можно пренебречь.

Ширина спектра прямоугольных импульсов определяется из соотношений (10.24) и (10.28):

$$\frac{U_m}{\pi\omega} = 0,1 \frac{\tau U_m}{2\pi}.$$

Полагая здесь  $\omega = 2\pi\Delta F_c$ , получаем

$$\Delta F_c = \frac{3,18}{\tau}. \quad (10.35)$$

Аналогично определяется ширина спектра и других импульсов. Расчетные формулы сведены в табл. П.13, где для сравнения в последнем столбце указаны цифры, получающиеся при энергетическом определении ширины спектра и длительности импульса.

По данным этой таблицы можно установить, как влияет длительность и форма импульсов на ширину их спектра. Из таблицы видно, что ширина спектра любых импульсов получается тем больше, чем меньше длительность импульсов  $\tau$ . Важным свойством спектра является то, что произведение длительности импульса на ширину спектра есть величина постоянная для импульсов данной формы:

$$\tau\Delta F_c = \text{const.} \quad (10.36)$$

Интересно отметить, что это свойство присуще спектрам любых сигналов.

Свойство (10.36) играет существенную роль при выборе параметров сигналов.

Длительность сигнала желательно иметь возможно меньшей, чтобы за единицу времени можно было передать большее число сигналов (т. е. большее количество информации). Уменьшение длительности импульсов может давать и другие преимущества, например, увеличение точности определения координат цели в радиолокации и др.

С другой стороны, ширину спектра сигнала желательно также иметь по возможности меньшей, чтобы в отведенном частотном диапазоне можно было разместить большее число радиоканалов. Кроме того, сужение спектра сигнала позволяет повысить помехозащищенность радиоприемных устройств и может оказаться выгодным по ряду иных соображений.

Указанные требования к длительности сигнала и ширине спектра являются противоречивыми, как это следует из соотношения (10.36). Поэтому при импульсных сигналах желательно выбирать такую форму импульсов, чтобы произведение  $\tau \Delta F_c$  имело наименьшую величину. Из табл. П.13 видно, что величина  $\tau \Delta F_c$  получается меньше для тех импульсов, которые изменяются во времени более плавно. Наименьшая величина  $\tau \Delta F_c$ , весьма близкая к теоретически достижимому минимуму, получается у колокольных импульсов.

Однако практически наибольшее распространение получили прямоугольные импульсы, которые имеют ряд преимуществ (например, удобство получения этих импульсов, удобство и высокая точность определения координат цели в радиолокации и др.).

## § 10.3. МОДУЛИРОВАННЫЕ СИГНАЛЫ И ИХ СПЕКТРЫ

### 1. АМ-сигналы

При амплитудной модуляции изменяется по закону управляющего сигнала амплитуда высокочастотных колебаний.

Для выяснения свойств АМ-сигналов рассмотрим простейший случай гармонической модуляции, когда управляющий сигнал  $u_{\Omega}(t)$  изменяется во времени по гармоническому закону

$$u_{\Omega}(t) = U_{m\Omega} \cos(\Omega t + \psi). \quad (10.37)$$

При таком управляющем сигнале выражение (1.10) и спектр (1.12) принимают следующий вид:

$$u(t) = U_{m0} [1 + m \cos(\Omega t + \psi)] \cos \omega_0 t \quad (10.38)$$

и

$$u(t) = U_{m0} \cos \omega_0 t + \frac{m}{2} U_{m0} \cos [(\omega_0 - \Omega)t - \psi] + \\ + \frac{m}{2} U_{m0} \cos [(\omega_0 + \Omega)t + \psi]. \quad (10.39)$$

Спектры амплитуд и фаз для этого случая показаны на рис. 10.11, а и б, где  $f_0 = \frac{\omega_0}{2\pi}$  и  $F = \frac{\Omega}{2\pi}$ .

Спектр АМ-сигнала симметричен, т. е. боковые составляющие расположены симметрично относительно несущей составляющей, амплитуды боковых составляющих равны друг другу (симметрия

первого рода), а их фазы равны по величине и противоположны по знаку (симметрия второго рода).

Ширина спектра получается равной удвоенной частоте модуляции:

$$\Delta F_c = 2F. \quad (10.40)$$

Спектр (10.39) может быть представлен в символической форме:

$$\begin{aligned} u(t) = & U_{m0} e^{j\omega t} + \frac{m}{2} U_{m0} e^{j[(\omega_0 - \Omega)t - \psi]} + \\ & + \frac{m}{2} U_{m0} e^{j[(\omega_0 + \Omega)t + \psi]}. \end{aligned} \quad (10.39a)$$

В соответствии с равенством (10.39a) спектр АМ-сигнала можно изобразить на векторной диаграмме в виде трех вращающихся

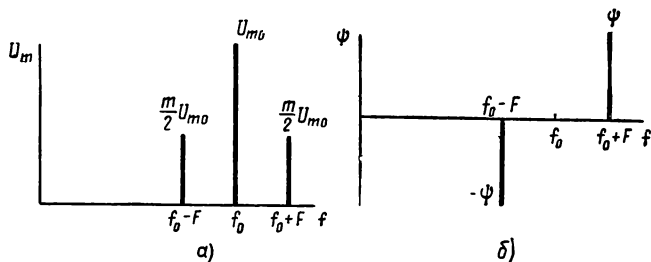


Рис. 10.11. Спектры АМ-сигнала при гармонической модуляции

векторов (рис. 10.12, а). Практически принято считать вектор несущей составляющей неподвижным на векторной диаграмме. Такая условная остановка вектора  $U_{m0}$  достигается, как известно, за счет вращения координатной плоскости в направлении вращения часовой стрелки с угловой скоростью  $\omega_0$ . При этом векторы боковых составляющих будут вращаться в противоположных направлениях с угловой скоростью  $\Omega$ . Их принято откладывать не из начала координат, а от конца вектора несущей. Тогда векторная диаграмма принимает вид, изображенный на рис. 10.12, б.

Из векторной диаграммы наглядно видно, что амплитуда АМ-сигнала меняется по гармоническому закону в пределах от  $U_{m0} - mU_{m0} = U_{m0} - \Delta U_m$  до  $U_{m0} + mU_{m0} = U_{m0} + \Delta U_m$ .

В том случае когда управляющий сигнал является сложным и описывается, например, рядом Фурье (10.1), уравнение АМ-сигнала имеет вид

$$u(t) = U_{m0} \left[ 1 + \sum_{k=0}^{\infty} m_k \cos(k\Omega t - \psi_k) \right] \cos \omega_0 t, \quad (10.41)$$



где коэффициенты

$$m_k = \frac{\Delta U_{mk}}{U_{m0}} \quad (10.42)$$

получили название частичных, или парциальных, коэффициентов модуляции.

Раскрывая квадратные скобки в соотношении (10.41), получаем выражение для спектра АМ-сигнала:

$$u(t) = (1 + m_0) U_{m0} \cos \omega_0 t + \frac{U_{m0}}{2} \sum_{k=1}^{\infty} m_k \cos [(\omega_0 - k\Omega) t + \psi_k] + \frac{U_{m0}}{2} \sum_{k=1}^{\infty} m_k \cos [(\omega_0 + k\Omega) t - \psi_k]. \quad (10.43)$$

Здесь первое слагаемое описывает несущую составляющую, а суммы во втором и третьем слагаемых — ряд боковых составляющих суммарной и разностной частот. Частичный коэффициент модуляции  $m_0$  характеризует изменение амплитуды несущей вследствие воздействия постоянной составляющей управляющего сигнала.

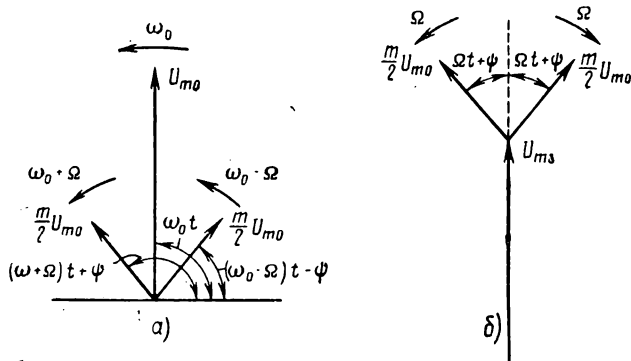


Рис. 10.12. Векторные диаграммы АМ-сигнала

Из выражений (10.43) и (10.39) видно, что в случае сложного управляющего сигнала спектр АМ-сигнала отличается от спектра при гармонической модуляции только числом боковых составляющих. При этом симметрия спектра амплитуд сохраняется (рис. 10.13, а). Аналогично сохраняется и симметрия спектра фаз (рис. 10.13, б).

Следует отметить одно важное свойство полученного спектра. Так как парциальные коэффициенты модуляции пропорциональны амплитудам спектральных составляющих управляющего сигнала, то огибающая спектра АМ-сигнала имеет такую же форму, как и огибающая спектра управляющего сигнала с ее зеркальным отображением. Аналогично отображается и спектр фаз АМ-сигнала.

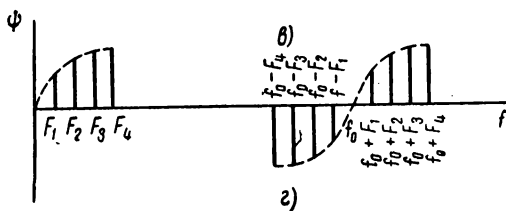
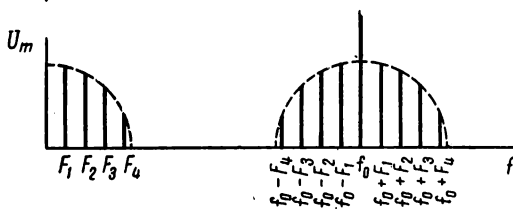
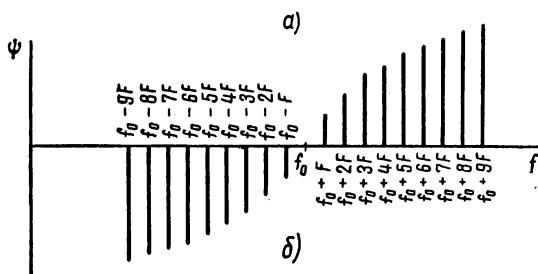
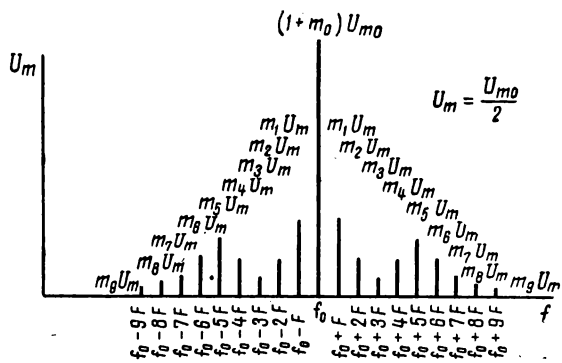


Рис. 10.13. Спектры АМ-сигнала при сложном управляющем сигнале

Это свойство спектров показано на рис. 10.13, *в* и *г*, где огибающие спектра амплитуд и фаз изображены пунктиром. Аналогично спектральная функция  $S(\omega)$  АМ-сигнала отображает спектральную функцию  $S(\Omega)$  управляющего сигнала (рис. 10.14). Этот вывод справедлив также в случае сплошных спектров.

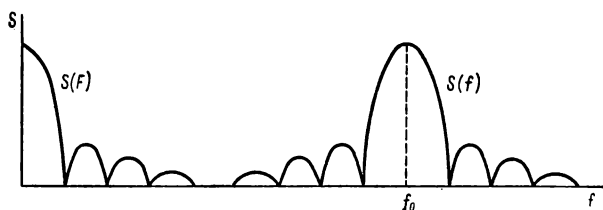


Рис. 10.14. Спектральные функции сложного управляющего сигнала и АМ-сигнала

Из сказанного следует, что ширина спектра АМ-сигнала равна удвоенной максимальной частоте  $F_{\max}$  управляющего сигнала:

$$\Delta F_c = 2F_{\max}. \quad (10.44)$$

Этот вывод часто формулируется следующим образом: ширина спектра АМ-сигнала равна удвоенной максимальной частоте модуляции.

## 2. ЧМ-сигналы

При изображении косинусоидальных колебаний в виде вращающегося вектора (см. рис. 2.2) мгновенное значение напряжения находят как проекцию вращающегося вектора на вещественную ось:

$$u(t) = U_m \cos \Phi. \quad (10.45)$$

Угловая скорость вращения вектора равна круговой частоте

$$\omega = \frac{d\Phi}{dt}. \quad (10.46)$$

При постоянной скорости вращения вектора, т. е. при неизменной частоте  $\omega$ , фазовый угол в выражении (10.45)  $\Phi = \omega t$  ( $\psi = 0$ ). При этом получается известное уравнение косинусоидальных колебаний:

$$u(t) = U_m \cos \omega t.$$

При частотной модуляции частота меняется по закону управляющего сигнала. Так как при этом скорость вращения вектора

изменяется, то на основании соотношения (10.46) фазовый угол в выражении (10.45) должен определяться как

$$\Phi = \int_0^t \omega dt. \quad (10.47)$$

Подставляя соотношение (10.47) в формулу (10.45), получаем общее выражение для ЧМ-колебаний:

$$u(t) = U_m \cos \left( \int_0^t \omega dt \right). \quad (10.48)$$

При гармоническом управляющем сигнале (10.37) частота ЧМ-сигнала изменяется таким образом:

$$\omega = \omega_0 + \Delta\omega \cos(\Omega t + \psi). \quad (10.49)$$

Здесь

$$\Delta\omega = aU_{m\Omega} \quad (10.50)$$

представляет собой амплитуду изменения частоты (рис. 10.15). Эту величину называют девиацией частоты.

Подставляя соотношения (10.49), (10.50) в формулу (10.48), получаем уравнение ЧМ-сигнала при гармонической модуляции:

$$u(t) = U_m \cos [\omega_0 t + m_f \sin(\Omega t + \psi) + \psi_0], \quad (10.51)$$

где

$$m_f = \frac{\Delta\omega}{\Omega} = a \frac{U_{m\Omega}}{\Omega}, \quad (10.52)$$

$$\psi_0 = -m_f \sin \psi.$$

Параметр  $m_f$ , аналогичный коэффициенту модуляции  $m$  АМ-сигнала, получил название индекса модуляции.

При амплитудной модуляции коэффициент  $m$  не может превышать единицы. При частотной же модуляции величина  $m_f$  может быть значительно больше единицы, так как девиация частоты  $\Delta\omega$  может быть больше частоты модуляции  $\Omega$  (но  $\Delta\omega \ll \omega_0$ ).

Найдем спектр ЧМ-сигнала. Воспользовавшись известной тригонометрической формулой, представим уравнение (10.51) в следующем виде (при  $\psi_0 = 0$ , что не нарушает общности выводов):

$$u(t) = U_m \cos \omega_0 t \cos [m_f \sin(\Omega t + \psi)] - \\ - U_m \sin \omega_0 t \sin [m_f \sin(\Omega t + \psi)]. \quad (10.53)$$

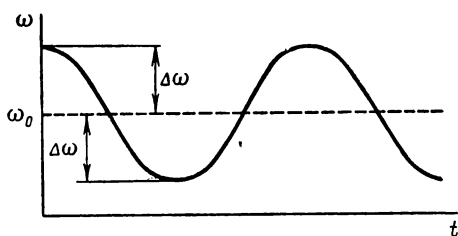


Рис. 10.15. Изменение частоты ЧМ-сигнала

Это выражение может быть упрощено при  $m_f \ll 1$ . Так как при малых аргументах  $\cos x \approx 1$  и  $\sin x \approx x$ , то при  $m_f \ll 1$  уравнение (10.53) может быть переписано в виде

$$u(t) \approx U_m \cos \omega_0 t - m_f U_m \sin \omega_0 t \sin (\Omega t + \psi),$$

или

$$u(t) \approx U_m \cos \omega_0 t - \frac{m_f}{2} U_m \cos [(\omega_0 - \Omega) t - \psi] + \\ + \frac{m_f}{2} U_m \cos [(\omega_0 + \Omega) t + \psi]. \quad (10.54)$$

Сравнивая выражения (10.54) и (10.38), приходим к выводу, что они отличаются лишь знаком составляющей разностной частоты. Перемена знака означает изменение начальной фазы колебаний на угол  $\pi$ .

Таким образом, при  $m_f \ll 1$  спектры амплитуд ЧМ- и АМ-сигналов совпадают (рис. 10.16, а). Спектр же фаз ЧМ-сигнала

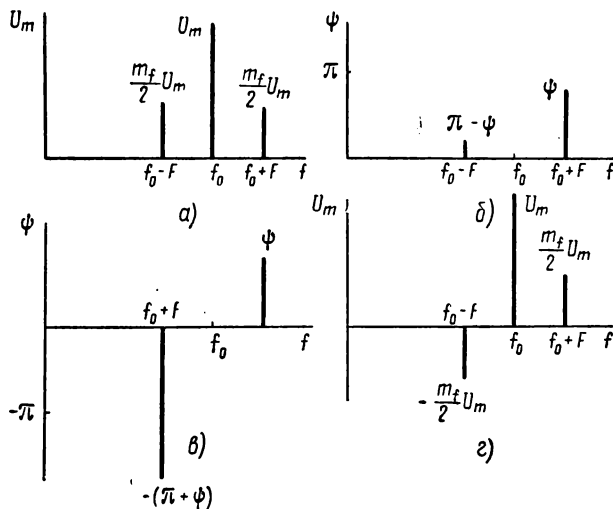


Рис. 10.16. Спектры ЧМ-сигнала при узкополосной гармонической модуляции

в отличие от спектра фаз АМ-сигнала является несимметричным. Этот спектр может быть изображен двояко, как показано на рис. 10.16, б и в. Иногда поворот фазы составляющей разностной частоты на угол  $\pi$  учитывают при изображении спектра амплитуд, считая амплитуду составляющей разностной частоты отрицательной (рис. 10.16, г).

Так как спектры амплитуд ЧМ- и АМ-сигналов совпадают при  $m_f \ll 1$ , то при этом ширина спектра ЧМ-сигнала определяется по-прежнему соотношением (10.40).

Векторная диаграмма ЧМ-сигнала при  $m_f \ll 1$  отличается, очевидно, от диаграммы АМ-сигнала (см. рис. 10.12) поворотом вектора составляющей разностной частоты на угол  $\pi$  (рис. 10.17, а). Из векторной диаграммы видно, что суммарный вектор ЧМ-сигнала качается около среднего положения, такое качание и означает изменение частоты.

Конец качающегося суммарного вектора движется по горизонтальной пунктирной прямой, т. е. величина его изменяется, что означает наличие амплитудной модуляции. Этот вывод является результатом использования приближенного выражения (10.54). При точном анализе на векторной диаграмме появились бы дополнительные вращающиеся векторы, при наличии которых суммарный вектор ЧМ-сигнала оставался бы неизменным по величине.

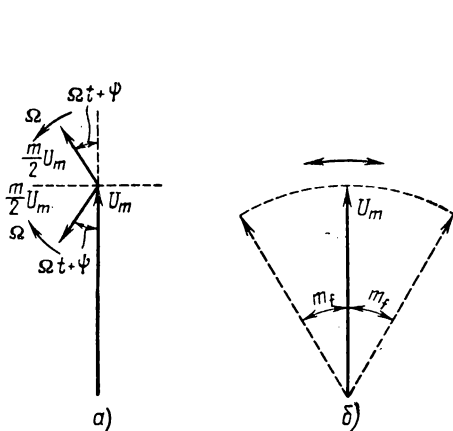


Рис. 10.17. Векторные диаграммы ЧМ-сигнала

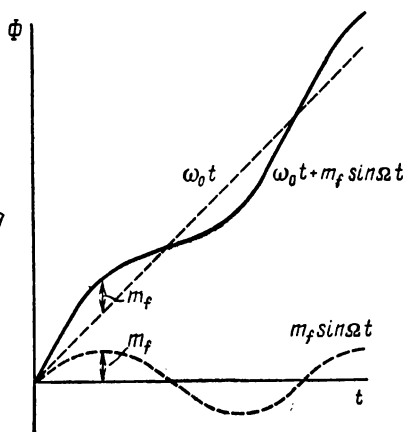


Рис. 10.18. Изменение фазы ЧМ-сигнала

При этом конец суммарного вектора двигался бы по дуге окружности (рис. 10.17, б).

Как следует из уравнения (10.51), индекс модуляции  $m_f$  представляет собой амплитуду изменения фазового угла  $\Phi$  (рис. 10.18). Поэтому на векторной диаграмме амплитуда качания вектора равна индексу модуляции  $m_f$  (см. рис. 10.17, б).

Отсюда следует, что при  $m_f \ll 1$  дугу окружности, по которой движется конец суммарного вектора, можно приближенно заменить отрезком касательной. Именно такая замена и производится на векторной диаграмме рис. 10.17, а при использовании приближенного выражения (10.54).

Рассмотрим теперь спектр ЧМ-сигнала в общем случае, когда неравенство  $m_f \ll 1$  не удовлетворяется. Для упрощения дальнейших преобразований начальную фазу управляющего сигнала,

как и прежде, положим равной нулю. При этом  $\psi = \psi_0 = 0$  и выражение (10.53) примет вид

$$u(t) = U_m \cos \omega_0 t \cos(m_f \sin \Omega t) - U_m \sin \omega_0 t \sin(m_f \sin \Omega t). \quad (10.55)$$

Воспользуемся рядами функций Бесселя:

$$\begin{aligned} \cos(m_f \sin \Omega t) &= J_0(m_f) + 2 \sum_{k=1}^{\infty} J_{2k}(m_f) \cos 2k\Omega t, \\ \sin(m_f \sin \Omega t) &= 2 \sum_{k=0}^{\infty} J_{2k+1}(m_f) \sin(2k+1)\Omega t. \end{aligned} \quad (10.56)$$

Подставляя соотношения (10.56) в формулу (10.55) и учитывая, что

$$\begin{aligned} \cos \omega_0 t \cos k\Omega t &= \frac{1}{2} [\cos(\omega_0 - k\Omega)t + \cos(\omega_0 + k\Omega)t], \\ \sin \omega_0 t \sin k\Omega t &= \frac{1}{2} [\cos(\omega_0 - k\Omega)t - \cos(\omega_0 + k\Omega)t], \end{aligned}$$

получаем

$$\begin{aligned} u(t) &= U_m J_0(m_f) \cos \omega_0 t + U_m \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k J_k(m_f) \cos(\omega_0 - k\Omega)t + \\ &+ U_m \sum_{k=1}^{\infty} J_k(m_f) \cos(\omega_0 + k\Omega)t. \end{aligned}$$

Из теории функций Бесселя известно, что

$$(-1)^k J_k(m_f) = J_{-k}(m_f).$$

С учетом этого полученное уравнение может быть переписано в окончательном виде:

$$u(t) = U_m \sum_{k=-\infty}^{\infty} J_k(m_f) \cos(\omega_0 + k\Omega)t. \quad (10.57)$$

Таким образом, спектр ЧМ-сигнала состоит из несущей  $U_m J_0(m_f) \cos \omega_0 t$  и бесконечного ряда парных боковых составляющих  $U_m J_{\pm k}(m_f) \cos(\omega_0 \pm k\Omega)t$ , так что ЧМ-сигнал является квазипериодическим. При этом по-прежнему спектр амплитуд является симметричным, а спектр фаз — несимметричным. Действительно, начальные фазы всех составляющих разностной частоты при четном числе  $k$  равны нулю, а начальные фазы составляющих разностной частоты при нечетном значении  $k$  равны  $\pi$ .

Для примера на рис. 10.19 показан спектр ЧМ-сигнала при  $m_f = 2$ , здесь поворот фазы составляющих учтен в знаке амплитуды.

Спектр ЧМ-сигнала является бесконечным. Однако амплитуды боковых составляющих по мере удаления от несущей немонотонно убывают до нуля, как это видно из графиков функций Бесселя (рис. 10.20, а). Например, при  $m_f = 2$  все функции Бесселя выше четвертого порядка практически равны нулю (см. рис. 10.19).

При определении ширины спектра ЧМ-сигналов можно пренебрегать теми составляющими, для которых  $J_k(m_f) < 0,1$ , поскольку  $J_{\max}(m_f) = 1$ . На рис. 10.20, б показана зависимость функций Бесселя от порядка  $k$  при разных индексах модуляции. Из анализа этих графиков следует, что при любом индексе модуляции  $m_f$  значения функций Бесселя получаются меньше 0,1 при  $k > m_f + 1$ .

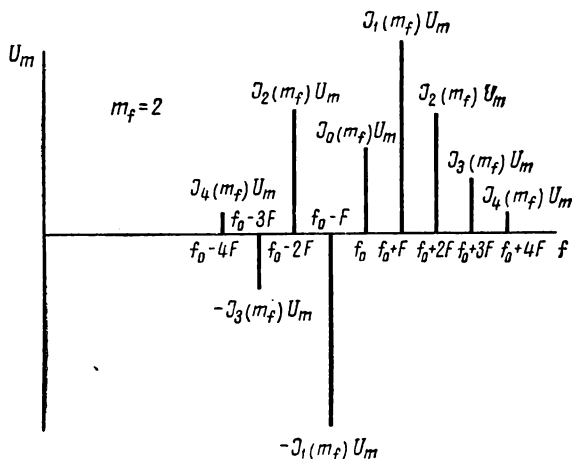


Рис. 10.19. Спектр ЧМ-сигнала при широкополосной гармонической модуляции

Учитывая, что интервал между смежными спектральными составляющими равен  $F$ , получаем формулу для определения ширины спектра ЧМ-сигнала:

$$\Delta F_c \approx 2(m_f + 1)F. \quad (10.58)$$

Из этого общего выражения вытекает, в частности, формула (10.40) при  $m_f \ll 1$ . В другом частном случае, когда  $m_f \gg 1$ , формула (10.58) принимает вид

$$\Delta F_c = 2m_f F = 2\Delta f, \quad (10.59)$$

где  $\Delta f = \frac{\Delta \omega}{2\pi}$  — девиация частоты.

Из сравнения формул (10.59) и (10.40) следует, что при  $m_f \ll 1$  ширина спектра значительно меньше, чем при  $m_f \gg 1$ .



Поэтому при  $m_f \ll 1$  модуляция называется узкополосной, а при  $m_f \gg 1$  — широкополосной \*.

При узкополосной модуляции ширина спектра равна приблизительно удвоенной частоте модуляции, а при широкополосной модуляции — приблизительно удвоенной девиации частоты.

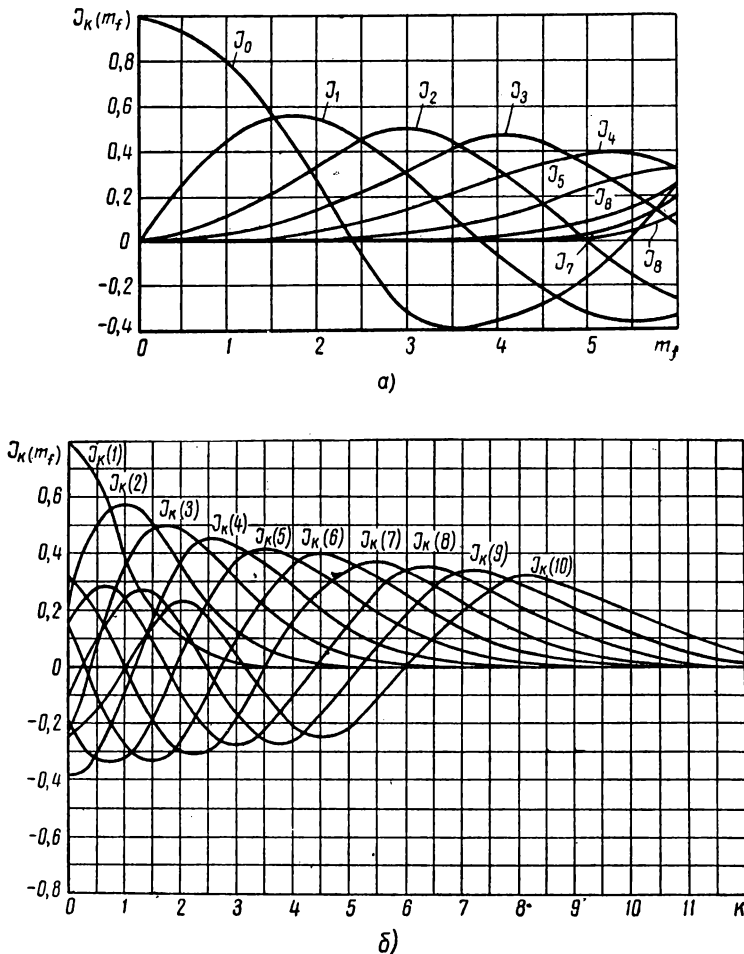


Рис. 10.20. Графики функций Бесселя

На практике используется обычно широкополосная модуляция.

Рассмотрим особенности спектров ЧМ-сигналов при сложных управляющих сигналах.

\* Часто широкополосной модуляцией называют модуляцию при любом индексе модуляции, не удовлетворяющем условию  $m_f \ll 1$ .

При сложном управляющем сигнале каждая его спектральная составляющая дает в спектре ЧМ-сигнала свой бесконечный ряд парных боковых составляющих. При этом симметрия спектра амплитуд сохраняется в общем случае. Спектр фаз является по-прежнему несимметричным.

Если же в спектре управляющего сигнала имеются четные гармоники, то симметрия спектра амплитуд ЧМ-сигнала нарушается. В частности, при управляющем сигнале с гармоническим спектром спектр амплитуд ЧМ-сигнала является несимметричным.

Покажем это на частном примере. Пусть спектр управляющего сигнала содержит гармоники с частотами  $\Omega$  и  $2\Omega$ . Первая гармоника дает в спектре ЧМ-сигнала пару боковых составляющих, равных (с точностью до постоянного множителя) \*

$$\begin{aligned} J_2(m_{f1}) \cos(\omega_0 + 2\Omega)t, \\ J_2(m_{f1}) \cos(\omega_0 - 2\Omega)t. \end{aligned} \quad (10.60)$$

Вторая гармоника дает пару боковых составляющих

$$\begin{aligned} J_1(m_{f2}) \cos(\omega_0 + 2\Omega)t, \\ - J_1(m_{f2}) \cos(\omega_0 - 2\Omega)t. \end{aligned} \quad (10.61)$$

Так как выражения (10.60) имеют одинаковые знаки, а выражения (10.61) — разные знаки, то при их суммировании находим, что боковые составляющие суммарной и разностной частот имеют разные амплитуды:  $[J_2(m_{f1}) + J_1(m_{f2})]$  и  $[J_2(m_{f1}) - J_1(m_{f2})]$ .

Таким образом, доказано, что в рассматриваемом случае спектр амплитуд получается несимметричным.

При определении ширины спектра в случае сложных управляющих сигналов можно пользоваться прежней формулой (10.58), принимая под величиной  $F$  максимальную частоту модуляции.

### 3. ФМ-сигналы

ФМ-сигналы описываются общим уравнением (10.45). При гармоническом управляющем сигнале (10.37) это уравнение принимает вид

$$u(t) = U_m \cos[\omega_0 t + m_\varphi \cos(\Omega t + \psi)], \quad (10.62)$$

---

\* Выражение для спектра ЧМ-сигнала при управляющем сигнале, состоящем из двух гармонических составляющих, имеет следующий вид:

$$u(t) = U_m \sum_{k=-\infty}^{\infty} \sum_{l=-\infty}^{\infty} J_k(m_{f1}) J_l(m_{f2}) \cos(\omega_0 + k\Omega_1 + l\Omega_2)t.$$

Если управляющий сигнал содержит  $n$  гармонических составляющих, то в выражении для спектра ЧМ-сигнала получается  $n$ -краткая сумма.

где  $m_\varphi = \Delta\psi_{\max} = aU_{m\Omega}$  — индекс модуляции, равный амплитуде изменения начальной фазы.

Из уравнения (10.62) можно определить частоту ФМ-сигнала:

$$\omega = \frac{d\Phi}{dt} = \omega_0 - \Delta\omega \sin(\Omega t + \psi), \quad (10.63)$$

где  $\Delta\omega = m_\varphi\Omega$  — девиация частоты.

Сравнивая уравнения (10.62) и (10.63) с уравнениями (10.51) и (10.49), находим, что внешне ФМ- и ЧМ-сигналы сходны. Действительно, в обоих случаях меняется и частота и начальная фаза.

При этом в случае гармонической модуляции как частота, так и фаза сигналов меняется сходным образом. Однако это сходство является чисто внешним, поскольку при частотной модуляции по закону изменения управляющего сигнала изменяется частота, а при фазовой модуляции — начальная фаза. При этом согласно общим соотношениям (10.46) и (10.47) частота ФМ-сигнала и начальная фаза ЧМ-сигнала меняются по закону, отличному от закона изменения управляющего сигнала. Наиболее отчетливо это проявляется при сложных управляющих сигналах.

Для примера на рис. 10.21, а приведен трапецидальный управляющий сигнал, а на рис. 10.21, б и в показано изменение частоты и начальной фазы модулированного сигнала соответственно при частотной и фазовой модуляции. Соответствующее же изменение начальной фазы ЧМ-сигнала и частоты ФМ-сигнала изображено

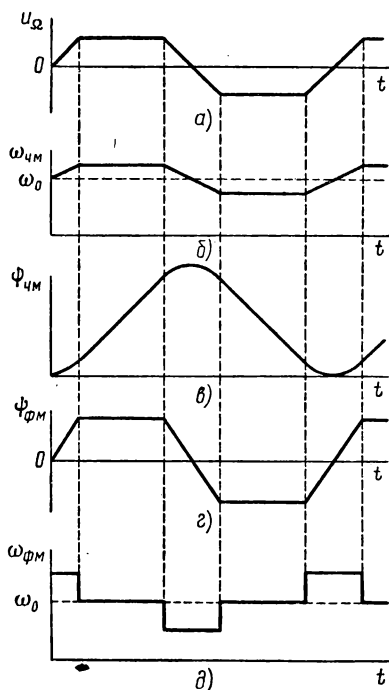


Рис. 10.21. Изменение частоты и начальной фазы ЧМ- и ФМ-сигналов при трапецидальном управляющем сигнале

на рис. 10.21, в и д. Из сопоставления графиков рис. 10.21 наглядно видно отличие ФМ- и ЧМ-сигналов.

ЧМ- и ФМ-сигналы при одинаковом управляющем сигнале различаются также параметрами модуляции.

При частотной модуляции, когда по закону управляющего сигнала изменяется частота, индекс модуляции, определяемый соотношением (10.52), является функцией частоты модуляции.

Девияция же частоты пропорциональна амплитуде управляющего сигнала и не зависит от частоты модуляции.

При фазовой модуляции, когда по закону управляющего сигнала изменяется начальная фаза, индекс модуляции пропорционален амплитуде управляющего сигнала и не зависит от частоты модуляции. Девияция же частоты является в этом случае функцией частоты модуляции.

Этими отличиями обусловлена и разница в спектрах ЧМ- и ФМ-сигналов. С точностью до начальной фазы составляющих спектр ФМ-сигнала описывается прежним уравнением (10.54). Поэтому при определенных условиях спектры ЧМ- и ФМ-сигналов могут быть совершенно одинаковыми, как показано на рис. 10.22, а и в.

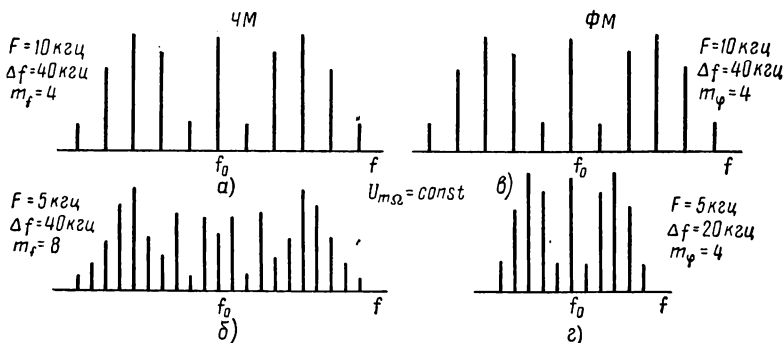


Рис. 10.22. Сравнение спектров ЧМ- и ФМ-сигналов

Однако достаточно измениться, например, частоте модуляции (при неизменной амплитуде управляющего сигнала), чтобы спектры ЧМ- и ФМ-сигналов стали различными. На рис. 10.22, б показано, как изменяется спектр ЧМ-сигнала при уменьшении вдвое частоты модуляции. При этом соответственно уменьшается интервал между боковыми составляющими, но ширина спектра (10.59) остается практически неизменной, поскольку индекс модуляции (10.52) увеличивается вдвое и девияция частоты не меняется.

При этом же изменении частоты модуляции спектр ФМ-сигнала меняется иначе (рис. 10.22, г). Здесь также соответственно уменьшается интервал между боковыми составляющими, но уменьшается и ширина спектра (10.59), так как вдвое уменьшается девияция частоты при неизменном индексе модуляции.

Таким образом, из сравнения рис. 10.22, б и г видно, что в общем случае спектры ЧМ- и ФМ-сигналов отличаются при одном и том же управляющем сигнале. При этом, как видно из рисунка, отличаются не только амплитуды боковых составляющих (за счет разных индексов модуляции), но и их число.

# Г Л А В А 11

## ПЕРЕХОДНЫЕ ПРОЦЕССЫ В ЛИНЕЙНЫХ ЦЕПЯХ

### § 11.1. ОБЩИЕ СВЕДЕНИЯ О ПЕРЕХОДНЫХ ПРОЦЕССАХ

#### 1. Основные определения

Характер процессов в электрических цепях зависит от параметров цепи  $L_k, C_k, R_k$  ( $k = 1, 2, \dots$ ) и от э. д. с. источников  $e_k$  ( $k = 1, 2, \dots$ ). При любом изменении указанных величин меняются токи и напряжения в цепи и соответственно количество энергии в реактивных элементах (в электрическом поле конденсаторов и магнитном поле катушек).

Однако электромагнитное поле, будучи по своей природе материальным, обладает инерционными свойствами. Поэтому изменения поля и связанные с ними изменения энергии в реактивных элементах могут происходить только с некоторой конечной скоростью. В частности, количество энергии в магнитном или электрическом поле не может меняться скачком. Отсюда следует, что ток в цепи катушки индуктивности и напряжение на конденсаторе не могут изменяться скачкообразно. Действительно, такое изменение тока и напряжения связано со скачкообразным изменением запаса энергии в магнитном или электрическом поле, что невозможно. Можно дать и другое объяснение тому, что ток в цепи с индуктивностью и напряжение в цепи с емкостью не могут изменяться скачком. Если бы ток, протекающий через катушку индуктивности, изменился скачком, то напряжение на индуктивности  $u = L \frac{di}{dt}$  стало бы бесконечно большим. Аналогично при скачкообразном изменении напряжения  $u$  на конденсаторе ток  $i = C \frac{du}{dt}$ , протекающий через конденсатор, должен был бы стать бесконечно большим, что невозможно.

Превращения энергии, обусловленные изменениями параметров цепи и э. д. с. источников, совершаясь с некоторой конечной скоростью, могут запаздывать во времени. Энергетические изменения, происходящие с отставанием от изменения параметров цепи и э. д. с. источников, называются переходными процессами. К переходным процессам относятся и все другие изменения в цепи, связанные

с переходными энергетическими превращениями: запаздывающие изменения тока, напряжения, частоты колебаний и т. п.

Поскольку здесь рассматриваются линейные цепи с постоянными параметрами, в которых параметры  $L_k$ ,  $C_k$ ,  $R_k$  не меняются с течением времени, ниже пойдет речь только о переходных процессах, обусловленных изменением э. д. с. источников.

Если изменения э. д. с. источников происходят настолько медленно, что энергетические превращения совершаются практически одновременно с этими изменениями, то переходные процессы отсутствуют. Процессы в этом случае называются стационарными, или установившимися.

Если э. д. с. источников изменяются сколь угодно быстро, но периодически, то при этом периодически повторяются и циклы переходных процессов. Средний запас энергии в цепи остается неизменным, хотя на протяжении отдельных циклов процесса количество энергии в реактивных элементах может меняться с запаздыванием относительно изменения э. д. с. Периодические процессы, при которых средний запас энергии в цепи остается постоянным, также относят к установившимся процессам. Таким образом, гармонические колебания в цепи являются установившимся процессом (при произвольной частоте  $\omega$ ). В частности, к установившимся процессам относятся также процессы в цепи при постоянных напряжениях и токах, которые рассматривались выше как предельный случай гармонических колебаний при  $\omega = 0$ .

Однако, говоря о периодических процессах, следует иметь в виду, что согласно определению они являются бесконечно протяженными во времени. Любой же реальный процесс имеет начало и конец, соответствующие, например, включению и выключению источника. Такие конечные процессы, строго говоря, не являются периодическими. Их можно считать установившимися только на том временном интервале, в котором средний запас энергии в цепи практически остается неизменным. Изменение же этого запаса от нуля, например, при включении источника постоянной или синусоидальной э. д. с. до некоторого конечного (установившегося) значения требует определенного времени. Следовательно, установившийся «периодический» процесс не может существовать без процесса его установления, который и является в этом случае переходным процессом.

Таким образом, переходные процессы в той или иной цепи могут иметь различный характер в зависимости от характера изменения э. д. с. источников. Среди переходных процессов наибольшее практическое значение имеют процессы установления токов и напряжений при включении источников постоянной и синусоидальной э. д. с. (рис. 11.1, а, б и в), а также переходные процессы при выключении этих источников э. д. с. (рис. 11.1, г, д и е).

На рис. 11.1, а и г включение и выключение источника э. д. с. осуществляется таким образом, чтобы сопротивление ветви

оставалось неизменным до и после размыкания или замыкания ключа  $K$ . Переходные процессы при подобной манипуляции обусловлены именно изменением э. д. с., а не параметров цепи. Кроме того, такой способ включения и выключения источников соответствует реальным условиям работы радиотехнических цепей, в которых сигналы появляются и исчезают без непосредственного замыкания или размыкания ветвей цепи.

Важность рассмотрения переходных процессов при включении и выключении источников постоянной и синусоидальной э. д. с. объясняется несколькими причинами:

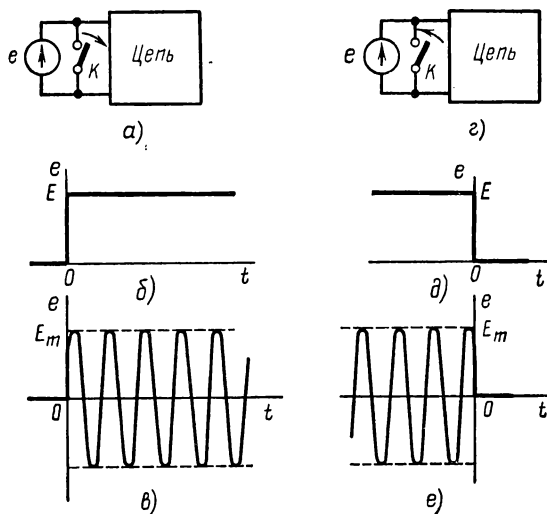


Рис. 11.1. Включение и выключение источника постоянной и синусоидальной э. д. с.

1) знание длительности таких переходных процессов необходимо для определения условий, при которых процессы в цепях с источниками постоянной и синусоидальной э. д. с. можно считать установившимися;

2) к таким переходным процессам сводится прохождение через цепи прямоугольных видеопульсов и радиопульсов, которые широко используются в радиотехнике;

3) переходные процессы при включении источника постоянной э. д. с. в резонансных цепях носят колебательный характер, как показывается ниже, что имеет принципиальное значение для ряда радиотехнических устройств (например, для генератора синусоидальных колебаний);

4) переходные процессы при прохождении произвольных сложных сигналов через радиотехнические цепи могут анализироваться на основе знания переходных процессов при включении источника

постоянной э. д. с. Указанный способ анализа прохождения сложных сигналов через линейные цепи рассматривается ниже.

Ввиду особой важности переходных процессов при скачкообразном изменении э. д. с. будем рассматривать в дальнейшем ступенчатую функцию (скачок)

$$E(t) = \begin{cases} 0 & \text{при } t < 0, \\ E & \text{при } t \geq 0, \end{cases} \quad (11.1)$$

график которой изображен на рис. 11.1, б.

Если включение источника постоянной э. д. с. происходит не в нулевой момент времени, а при  $t = \tau$ , то скачок э. д. с. описывается смещенной во времени ступенчатой функцией

$$E(t - \tau) = \begin{cases} 0 & \text{при } t < \tau, \\ E & \text{при } t \geq \tau. \end{cases} \quad (11.2)$$

С помощью ступенчатой функции (11.1) может быть описано и включение источника произвольной э. д. с.  $e(t)$  в момент времени  $t = 0$ :

$$e_{\text{вкл}}(t) = 1(t) e(t). \quad (11.3)$$

Здесь

$$1(t) = \frac{E(t)}{E} = E(t)|_{E=1} = \begin{cases} 0 & \text{при } t < 0 \\ 1 & \text{при } t \geq 0 \end{cases} \quad (11.4)$$

— единичная ступенчатая функция (единичный скачок).

Ступенчатая функция выключения источника постоянной э. д. с.  $E$  (см. рис. 11.1, д) может рассматриваться, очевидно, как результат вычитания ступенчатой функции  $E(t)$  из постоянной э. д. с.  $E$ :

$$E_{\text{выкл}}(t) = E - E(t). \quad (11.5)$$

Аналогично этому равенству может быть представлена и ступенчатая функция выключения источника произвольной периодической э. д. с.  $e(t)$ :

$$e_{\text{выкл}}(t) = e(t) - 1(t) e(t) = [1 - 1(t)] e(t), \quad (11.6)$$

где единичный скачок  $1(t)$  определяется прежним соотношением (11.4).

При воздействии ступенчатой функции (11.1) на двухполюсник через него протекает ток  $i(t)$ , являющийся током переходного режима. По аналогии с законом Ома величину

$$Z(t) = \frac{E(t)}{i(t)} \quad (11.7)$$



называют переходным сопротивлением двухполюсника. Аналогично переходная проводимость двухполюсника

$$Y(t) = \frac{1}{Z(t)} = \frac{i(t)}{E(t)}. \quad (11.8)$$

Как вытекает из определения, переходные сопротивления и проводимости являются функциями времени, что и отражается в их обозначениях.

При воздействии на входе четырехполюсника ступенчатой функции (11.1) его выходное напряжение  $u(t)$  в переходном режиме изменяется некоторым образом, отличным от изменения ступенчатой функции  $E(t)$ . При этом временная функция

$$K(t) = \frac{u(t)}{E(t)} \quad (11.9)$$

по аналогии с определением (6.68) называется переходным коэффициентом передачи.

## 2. Методы исследования переходных процессов

Токи и напряжения в переходном режиме определяются полным решением дифференциальных уравнений, описывающих процессы в цепи.

Классический метод решения дифференциальных уравнений в виде суммы частного и общего решений не является самым простым. В ряде случаев решение дифференциальных уравнений упрощается при использовании операторных методов.

Напомним, что операторные методы решения уравнений заключаются в том, что вместо искомой функции  $f(t)$  рассматривается некоторая функция  $\bar{f}(p)$  от новой переменной (оператора)  $p$ , связанная определенным образом с искомой функцией  $f(t)$ . Например, одним из операторных методов является метод интеграла Фурье, при котором вместо функции  $f(t)$  рассматривается спектральная функция

$$\dot{S}(j\omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-j\omega t} dt,$$

или

$$\bar{f}(p) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-pt} dt. \quad (11.10)$$

Здесь новой переменной является мнимая частота  $p = j\omega$ . При таком методе решения в дифференциальное уравнение подставляется значение

$$f(t) = \frac{1}{j} \int_{-j\infty}^{j\infty} \bar{f}(p) e^{pt} dp, \quad (11.11)$$

т. е. производится переход к новой функции  $\bar{f}(p)$ , называемой изображением функции  $f(t)$ . Такой переход условно обозначается следующим образом:  $f(t) \rightleftharpoons \bar{f}(p)$ .

Упрощение решения дифференциальных уравнений операторными методами достигается за счет того, что при этом указанные уравнения могут быть преобразованы в алгебраические уравнения. Однако достигнутое упрощение оправдывается в том случае, если найденная в результате решения функция  $\bar{f}(p)$  позволяет легко найти исходную функцию  $f(t)$ .

Наиболее простым операторным методом является метод интеграла Лапласа. В этом методе вместо переменной  $t$  используется новая переменная в виде комплексного оператора  $p = \sigma + j\omega$ , а исходной функции (оригиналу)  $f(t)$  соответствует преобразованная функция (изображение)

$$\bar{f}(p) = \int_0^{\infty} f(t) e^{-pt} dt. \quad (11.12)$$

Интеграл Лапласа (11.12), напоминающий внешне интеграл Фурье (11.10), отличается от него двумя принципиальными особенностями. Во-первых, изменение пределов интегрирования означает, что функция  $f(t)$  определяется только в интервале  $t \geq 0$ , т. е.  $f(t)|_{t < 0} = 0$ . Это равноценно умножению искомой функции на единичную функцию (11.4), что делает интегральное преобразование (11.12) удобным при исследовании переходных процессов.

Во-вторых, оператор  $p$  в изображении (11.12) имеет смысл не мнимой, а комплексной частоты  $p = \sigma + j\omega$ , что делает интегральное преобразование Лапласа более универсальным по сравнению с преобразованием Фурье.

Рассмотрим физический смысл последнего различия интегральных преобразований Фурье и Лапласа. В соответствии с символическим изображением гармонических колебаний (2.10а) само гармоническое колебание находят как реальную часть комплексной величины (2.11) или (2.11а). Таким образом, интегральное преобразование Фурье (11.10) соответствует представлению искомой функции в виде суммы гармонических колебаний  $\text{Re } e^{j\omega t} = \text{Re } e^{j\omega t} = \cos \omega t$ . Интегральному же преобразованию Лапласа (11.12) физически соответствует представление искомой функции в виде суммы составляющих  $\text{Re } e^{pt} = \text{Re } e^{(\sigma + j\omega)t} = e^{\sigma t} \cos \omega t$ . Эти составляющие при  $\sigma < 0$  являются затухающими косинусоидальными колебаниями в отличие от незатухающих косинусоидальных колебаний, которые фигурируют в преобразовании Фурье.

Интегральные преобразования (11.10) и (11.12) отличаются также постоянным коэффициентом, что не является принципиальным и учитывается в обратном преобразовании Римана—Меллина, ко-

торое позволяет по изображению (11.12) найти оригинал

$$f(t) = \frac{1}{2\pi j} \int_{\sigma-j\infty}^{\sigma+j\infty} \bar{f}(p) e^{pt} dp. \quad (11.13)$$

Интегральное преобразование (11.13) получается не проще обратного преобразования Фурье (11.11). Однако изображения (11.12) подробно табулированы для различных функций, что позволяет непосредственно по таблицам (см. табл. П.14) определять искомый оригинал. Табулированию изображений помогает использование их основных свойств, среди которых следует выделить, по крайней мере, четыре свойства.

1. Сложению исходных функций  $f_k(t)$  соответствует сложение их изображений  $\bar{f}_k(p)$ :

$$\varphi(t) = \sum_{k=1}^n f_k(t) \rightleftharpoons \bar{\varphi}(p) = \sum_{k=1}^n \bar{f}_k(p). \quad (11.14)$$

2. Умножению исходной функции  $f(t)$  на постоянную величину  $\alpha$  соответствует умножение на эту величину изображения  $\bar{f}(p)$ :

$$\varphi(t) = \alpha f(t) \rightleftharpoons \bar{\varphi}(p) = \alpha \bar{f}(p). \quad (11.15)$$

3. Дифференцированию исходной функции  $f(t)$  при нулевых начальных условиях соответствует умножение изображения на оператор  $p$ :

$$\varphi(t) = \frac{df(t)}{dt} \Big|_{f(0)=0} \rightleftharpoons \bar{\varphi}(p) = p \bar{f}(p). \quad (11.16)$$

4. Интегрированию исходной функции  $f(t)$  при нулевых начальных условиях соответствует деление изображения  $\bar{f}(p)$  на оператор  $p$ :

$$\varphi(t) = \int_0^t f(t) dt \Big|_{\varphi(0)=0} \rightleftharpoons \bar{\varphi}(p) = \frac{1}{p} \bar{f}(p). \quad (11.17)$$

Использование свойств (11.14) — (11.17) позволяет упростить составление уравнений для электрических цепей.

Если соотношения (11.15) применить к резистору с сопротивлением  $R = \alpha$ , током  $i(t) = f(t)$  и напряжением  $u(t) = \varphi(t)$ , получим

$$\bar{u}(p) = R \bar{i}(p). \quad (11.18)$$

Рассматривая индуктивность  $L$  с током  $i(t)$  и напряжением  $u(t)$ , на основании соотношений (11.15) и (11.16) находим

$$\bar{u}(p) = pL \bar{i}(p). \quad (11.19)$$

Применение соотношений (11.15) и (11.17) к емкости  $C$  с током  $i(t)$  и напряжением  $u(t)$  приводит к следующей формуле:

$$\bar{u}(p) = \frac{1}{pC} \bar{i}(p). \quad (11.20)$$

Уравнения (11.18) — (11.20) выражают закон Ома в операторной форме. В соответствии с этими уравнениями можно пользоваться понятием операторных сопротивлений резистора, индуктивности и емкости:

$$Z_R(p) = R, \quad Z_L(p) = pL, \quad Z_C(p) = \frac{1}{pC}. \quad (11.21)$$

Операторным сопротивлениям (11.21) соответствуют операторные проводимости

$$Y_R(p) = \frac{1}{Z_R(p)} = \frac{1}{R}, \quad Y_L(p) = \frac{1}{Z_L(p)} = \frac{1}{pL}, \quad Y_C(p) = \frac{1}{Z_C(p)} = pC. \quad (11.22)$$

Применение соотношений (11.14) позволяет сформулировать в операторной форме законы Кирхгофа, из которых следуют правила, аналогичные правилам (2.44) и (2.50): при параллельном соединении двухполюсников складываются их операторные проводимости  $Y_k(p)$ , а при последовательном соединении двухполюсников складываются их операторные сопротивления  $Z_k(p)$ :

$$Y(p) = \sum_{k=1}^n Y_k(p), \quad (11.23)$$

$$Z(p) = \sum_{k=1}^n Z_k(p). \quad (11.24)$$

Таким образом, имеется полная аналогия между комплексными и операторными сопротивлениями (проводимостями): операторные сопротивления (проводимости) цепи имеют тот же вид, что и ее комплексные сопротивления (проводимости), если под оператором  $p$  понимать не мнимую, а комплексную частоту. Следовательно, операторное сопротивление (проводимость) любой цепи может быть получено из комплексного сопротивления (проводимости) этой цепи путем замены мнимой частоты  $j\omega$  на комплексный оператор  $p$ .

В соответствии с указанной аналогией операторное изображение тока, например, может быть определено через посредство операторных сопротивлений по тем же правилам, что и комплексная амплитуда тока, определяемая через комплексные сопротивления. При этом может быть использован любой метод расчета цепей в операторной форме — метод контурных токов (изображений контурных токов) и др.

Поясним сказанное на конкретном примере. Пусть, например, в схеме связанных контуров (см. рис. 7.18) надо найти не токи  $\dot{I}_{m1}$ ,  $\dot{I}_{m2}$  под действием гармонической э. д. с.  $\dot{E}_m$ , а токи переходного режима  $i_1(t)$ ,  $i_2(t)$  при включении источника произвольной э. д. с.  $e(t)$ . При этом по аналогии с уравнениями (7.52) можно

сразу написать операторные уравнения для изображений токов в первичном и вторичном контурах:

$$\begin{aligned} Z_1(p) \bar{i}_1(p) \pm Z_{св}(p) \bar{i}_2(p) &= \bar{e}(p), \\ \pm Z_{св}(p) \bar{i}_1(p) + Z_2(p) \bar{i}_2(p) &= 0, \end{aligned}$$

где

$$Z_1(p) = r_1 + pL_1 + \frac{1}{pC_1}, \quad Z_2(p) = r_2 + pL_2 + \frac{1}{pC_2}, \quad Z_{св}(p) = pM.$$

Отсюда находят изображения искомых токов

$$\begin{aligned} \bar{i}_1(p) &= \frac{\bar{e}(p) Z_2(p)}{Z_1(p) Z_2(p) - Z_{св}^2(p)}, \\ \bar{i}_2(p) &= \mp \frac{\bar{e}(p) Z_{св}(p)}{Z_1(p) Z_2(p) - Z_{св}^2(p)}, \end{aligned}$$

которые можно определить и непосредственно по аналогии с формулами (7.54), (7.55).

Таким образом, в рассматриваемом случае задача определения напряжений и токов может решаться и без составления дифференциальных уравнений. При этом операторный метод используется не для решения дифференциальных уравнений, а для непосредственного нахождения искомых величин путем составления и решения алгебраических уравнений. Вследствие этого операторный метод исследования переходных процессов получается не сложнее метода комплексных амплитуд, пригодного при анализе установившихся гармонических процессов.

Следует, однако, подчеркнуть, что описанная разновидность операторного метода решения задачи, при которой непосредственно составляются и решаются алгебраические уравнения, может применяться только при нулевых начальных условиях. Действительно, только при таких условиях справедливы соотношения (11.15), (11.16) и можно использовать понятие операторных сопротивлений, входящих в формулы (11.19) и (11.20).

Поэтому описанный метод пригоден только для анализа переходных процессов, происходящих после включения источников при нулевых начальных условиях  $i_L|_{t=0} = 0$ , и  $u_C|_{t=0} = 0$ . При включении же источников нулевые начальные условия не соблюдаются. В этом случае следует составлять дифференциальные уравнения и решать их операторным методом при соответствующих начальных условиях. Такое решение производится с помощью общих формул, приведенных в таблице операторных изображений (см. табл. П.14).

Решение задачи можно упростить и при ненулевых начальных условиях. Согласно соотношениям (11.1) — (11.6) задачи на включение и выключение источника являются взаимообратными и вза-

имозаменяемыми, как показано на рис. 11.2. Поэтому согласно рис. 11.2, б вместо задачи на выключение источника с ненулевыми начальными условиями можно рассматривать задачу включения источника при нулевых начальных условиях. При этом искомый ток, протекающий в цепи после выключения источника, определяется в соответствии с равенством (11.6) следующим образом:

$$i_{\text{выкл}} = i_{\text{уст}} - i_{\text{вкл}}. \quad (11.25)$$

Здесь  $i_{\text{уст}}$  — установившийся ток, протекающий в цепи под действием периодической э. д. с.  $e(t)$  или постоянной э. д. с.  $E$ , который легко определяется обычными методами;

$i_{\text{вкл}}$  — ток переходного режима при действии функции включения (11.3) или (11.1).

Рассмотренный способ решения задачи путем взаимной замены схем включения и выключения источников в соответствии с рис. 11.2 будем называть методом эквивалентных схем.

Интересно заметить, что соотношение (11.25) вполне соответствует классическому методу решения дифференциальных уравнений. Согласно этому методу полное решение дифференциального

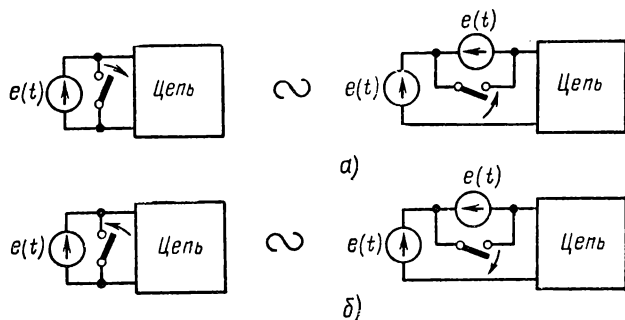


Рис. 11.2. Взаимная замена цепей с включающимися и выключающимися источниками э. д. с.

уравнения для тока  $i = i_{\text{вкл}}$  складывается из двух составляющих. Первой из них является любое частное решение, в качестве которого может быть взят установившийся ток  $i_{\text{уст}}$ . Второй составляющей является общее решение однородного уравнения, полученного из исходного уравнения приравниванием нулю его правой части ( $e = 0$ ). Но решение однородного уравнения с правой частью, равной нулю, есть не что иное, как ток, существующий в цепи после выключения источника, т. е. ток выключения  $i_{\text{выкл}}$ . Следовательно, полный ток  $i = i_{\text{вкл}} = i_{\text{уст}} - i_{\text{выкл}}$ . Это равенство равноценно соотношению (11.25).

## § 11.2. ПЕРЕХОДНЫЕ ПРОЦЕССЫ В АПЕРИОДИЧЕСКИХ ЦЕПЯХ

### 1. Переходные процессы в цепи с емкостью

Апериодическими цепями называются цепи, в которых колебания не могут происходить без воздействия источника переменной э. д. с. (или переменного задающего тока). К апериодическим цепям относятся, в частности, цепи, содержащие реактивности какого-либо одного знака — индуктивности или емкости. Именно такие апериодические цепи описываются в настоящем параграфе.

Рассмотрим переходные процессы при включении источника постоянной э. д. с.  $E$  в  $RC$ -контуре (рис. 11.3, а). Полагая, что соблюдаются нулевые начальные условия ( $u|_{t=0} = 0$ ), находим изображение тока в контуре, воспользовавшись понятием операторного сопротивления цепи:

$$\bar{i}(p) = \frac{\bar{E}(p)}{R + \frac{1}{pC}}.$$

Отсюда в соответствии с преобразованием 10 табл. П.14 получаем

$$i = \frac{E}{p \left( R + \frac{1}{pC} \right)} = \frac{E}{R} \cdot \frac{1}{p + \alpha},$$

где

$$\alpha = \frac{1}{RC}. \quad (11.26)$$

В соответствии с преобразованиями 3 и 13 табл. П.14 по найденному изображению определяем ток в контуре:

$$i = \frac{E}{R} e^{-\alpha t}. \quad (11.27)$$

Воспользовавшись понятием емкостного операторного сопротивления, определяем изображение  $\bar{u}$ :

$$\bar{u} = iZ_C(p) = \frac{E}{RC} \cdot \frac{\alpha}{p(p + \alpha)}.$$

Отсюда по преобразованиям 3 и 14 табл. П.14 находим напряжение на емкости:

$$u = E(1 - e^{-\alpha t}). \quad (11.28)$$

Если выходное напряжение снимается не с емкости  $C$ , а с резистора  $R$ , то оно определяется непосредственно по закону Ома при известном токе (11.27),

Строго говоря, в уравнениях (11.27) и (11.28) вместо множителя  $E$  следовало бы писать ступенчатую функцию  $E(t)$ . Однако для простоты используют обычно форму записи (11.27), (11.28), подразумевая, что эти уравнения описывают процесс при  $t \geq 0$ . Аналогичная форма записи принята и ниже.

Из соотношений (11.27) и (11.28) определяются переходные параметры  $RC$ -цепи (11.7) — (11.9):

$$Z(t) = Re^{-at}, \quad Y(t) = \frac{1}{R} e^{at}, \quad K(t) = 1 - e^{-at}. \quad (11.29)$$

При использовании этих формул, как и соотношений (11.27), (11.28), следует иметь в виду, что они определяют параметры цепи при  $t \geq 0$ .

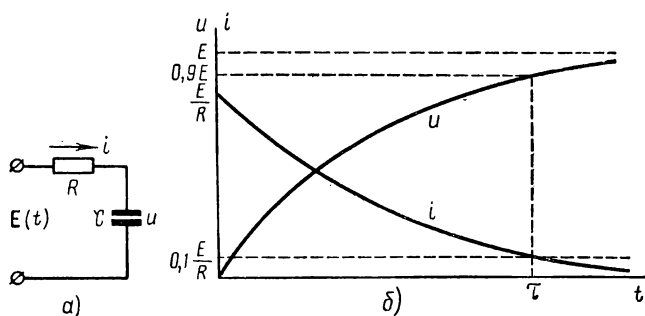


Рис. 11.3.  $RC$ -цепь и переходные процессы в ней при включении источника постоянной э. д. с.

Графики функций тока и напряжения, построенные по формулам (11.27) и (11.28), приведены на рис. 11.3, б. Из этих формул и графиков видно, что переходный процесс в цепи при включении источника э. д. с. длится бесконечно долго. Но практически длительность переходного процесса не может считаться бесконечной. Действительно, по прошествии некоторого конечного времени ток переходного режима в цепи и его изменение становятся гораздо меньше того тока или его изменения, которые возникают под влиянием посторонних факторов: колебаний э. д. с. источника, тепловых флуктуаций электронов и т. п. Поэтому длительность переходных процессов следует считать конечной величиной.

Обычно под длительностью переходного процесса понимают время  $\tau$ , в течение которого ток в цепи уменьшается в 10 раз по сравнению с максимальным значением  $i_{\max} = \frac{E}{R}$ , а напряжение на конденсаторе возрастает соответственно до значения  $0,9E$  (рис. 11.3, б). Указанное определение длительности не является универсальным и зависит от того, какими изменениями токов и на-



пряжений можно пренебречь в условиях рассматриваемой задачи. Иногда за длительность  $\tau$  принимают время, в течение которого ток изменяется не в 10, а в 100 или в  $e$  раз. При этом время, в течение которого ток изменяется в  $e$  раз, называют постоянной времени цепи и обозначают буквой  $T$ .

При принятом определении длительность переходного процесса  $\tau$  в соответствии с формулой (11.27) может быть определена из следующего выражения:  $e^{-\alpha\tau} = 0,1$ , откуда  $\alpha\tau = \ln 10 = 2,3$  и

$$\tau = \frac{2,3}{\alpha} = 2,3RC. \quad (11.30)$$

Аналогично из условия  $e^{-\alpha T} = \frac{1}{e}$  определяется постоянная времени  $RC$ -цепи:

$$T = \frac{1}{\alpha} = RC. \quad (11.30a)$$

Из выражений (11.27), (11.28), (11.30), (11.30a) видно, что скорость протекания переходного процесса определяется коэффициентом  $\alpha$ , зависящим от параметров цепи  $R$  и  $C$ . Таким образом, меняя параметры цепи  $R$  и  $C$ , можно регулировать скорость протекания переходного процесса и его длительность.

Воспользовавшись полученными результатами, с помощью метода эквивалентных схем можно легко рассмотреть переходные процессы в  $RC$ -цепи при выключении источника постоянной э. д. с.  $E$ .

При этом следует лишь учесть установившиеся значения тока и напряжения в схеме рис. 11.3,  $a$  при  $t = \infty$ :

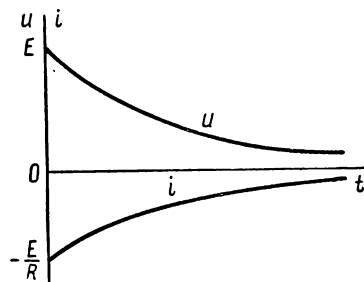


Рис. 11.4. Переходные процессы в  $RC$ -цепи при выключении источника постоянной э. д. с.

$$i_{уст} = i|_{t=\infty} = 0,$$

$$u_{уст} = u|_{t=\infty} = E.$$

Тогда в соответствии с эквивалентными схемами рис. 11.2,  $b$  и формулами (11.25) и (11.27), (11.28) получаем

$$i = i_{уст} - \frac{E}{R} e^{-\alpha t} = -\frac{E}{R} e^{-\alpha t}, \quad (11.31)$$

$$u = u_{уст} - E(1 - e^{-\alpha t}) = Ee^{-\alpha t}. \quad (11.32)$$

Знак «минус» в формуле (11.31) означает, что разрядный ток конденсатора направлен навстречу положительному направлению отсчета, показанному стрелкой на рис. 11.3,  $a$ .

Графики тока и напряжения, построенные по формулам (11.31) и (11.32), показаны на рис. 11.4.

Длительность переходного процесса в данном случае определяется по-прежнему формулами (11.30), (11.30а).

## 2. Переходные процессы в цепи с индуктивностью

Рассмотрим переходные процессы при включении источника постоянной э. д. с.  $E$  в  $RL$ -цепи (рис. 11.5, а). При нулевых начальных условиях ( $i|_{t=0} = 0$ ) определяем изображение тока в контуре:

$$i = \frac{\bar{E}}{R + pL} = \frac{E}{L} \cdot \frac{1}{p(p + \alpha)} = \frac{E}{R} \frac{\alpha}{p(p + \alpha)},$$

$$\alpha = \frac{R}{L}. \quad (11.33)$$

Отсюда в соответствии с преобразованиями 3 и 14 табл. П.14 находим ток в цепи:

$$i = \frac{E}{R} (1 - e^{-\alpha t}). \quad (11.34)$$

Длительность  $\tau$  этого переходного процесса, изображенного на рис. 11.5, б ( $i = i_{\text{вкл}}$ ), определяется прежним способом:

$$\tau = \frac{2,3}{\alpha} = 2,3 \frac{L}{R}. \quad (11.35)$$

Аналогично определяется постоянная времени  $RL$ -цепи:

$$T = \frac{1}{\alpha} = \frac{L}{R}. \quad (11.35а)$$

Переходные параметры (11.7), (11.8)  $RL$ -цепи получаем из соотношения (11.34):

$$Z(t) = \frac{R}{1 - e^{-\alpha t}}, \quad Y(t) = \frac{1}{R} (1 - e^{-\alpha t}). \quad (11.36)$$

Учитывая уравнение (11.34), методом эквивалентных схем (см. рис. 11.2, б) находим ток в  $RL$ -цепи при выключении источника э. д. с.:

$$i = \frac{E}{R} e^{-\alpha t}. \quad (11.37)$$

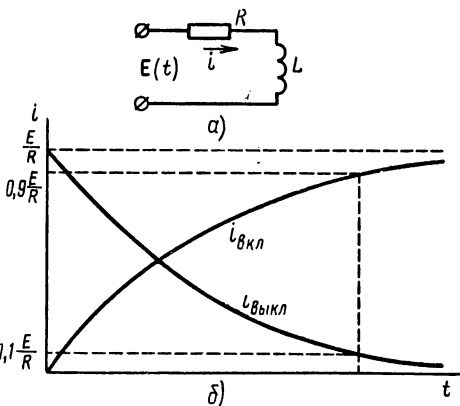


Рис. 11.5.  $RL$ -цепь и токи переходного режима

График изменения этого тока показан на рис. 11.5, б ( $i = i_{\text{выкл.}}$ ). Длительность переходного процесса вычисляется по прежним формулам (11.35), (11.35а).

Из рассмотрения различных переходных процессов в контурах, содержащих только один реактивный элемент, видно, что при воздействии постоянной э. д. с. колебания в таких контурах не возникают, т. е. переходный процесс является аperiodическим. Этим и обусловлено название аperiodических цепей.

### § 11.3. ПЕРЕХОДНЫЕ ПРОЦЕССЫ В РЕЗОНАНСНЫХ ЦЕПЯХ

#### 1. Включение источника постоянной э.д.с. в последовательном контуре

Определим ток в  $LC$ -контуре с потерями при включении источника постоянной э. д. с. (рис. 11.6, а).

Полагая, что включение источника э. д. с.  $E$  происходит при нулевых начальных условиях ( $i|_{t=0} = 0$ ,  $u|_{t=0} = 0$ ), определяем изображение тока:

$$I = \frac{\bar{E}}{r + pL + \frac{1}{pC}} = \frac{E}{p \left( r + pL + \frac{1}{pC} \right)} = \frac{E}{L} \frac{1}{p^2 + \frac{r}{L}p + \frac{1}{LC}},$$

или

$$I = \frac{E}{L} \cdot \frac{1}{p^2 + 2\alpha p + \omega_0^2}, \quad (11.38)$$

где

$$\alpha = \frac{r}{2L}, \quad (11.39)$$

а  $\omega_0$  — резонансная частота (5.6).

По уравнению (11.38) в соответствии с преобразованием 25 табл. П.14 определяем ток в контуре:

$$i = \frac{E}{\omega_c L} e^{-\alpha t} \sin \omega_c t, \quad (11.40)$$

где

$$\omega_c = \sqrt{\omega_0^2 - \alpha^2}. \quad (11.41)$$

Таким образом, ток в  $LC$ -контуре при включении источника постоянной э. д. с. имеет характер затухающих колебаний (рис. 11.6, б). Такой характер процесса получается, разумеется, при  $\alpha < \omega_0$ , когда  $\omega_c$  является вещественной величиной, как следует из формулы (11.41).

При этом колебательный процесс возникает благодаря обмену энергии между электрическим полем конденсатора и магнитным полем катушки. Такие колебания, существующие в контуре без

воздействия источника переменной э. д. с., называются свободными, или собственными колебаниями контура. Сам же  $LC$ -контур, в котором возможны подобные колебания, называется колебательным контуром.

Свободные колебания обычно являются затухающими вследствие необратимых потерь энергии в активном сопротивлении  $r$ . Однако они могут быть сделаны и незатухающими, если контур включить в схему совместно с электронной лампой. Последняя

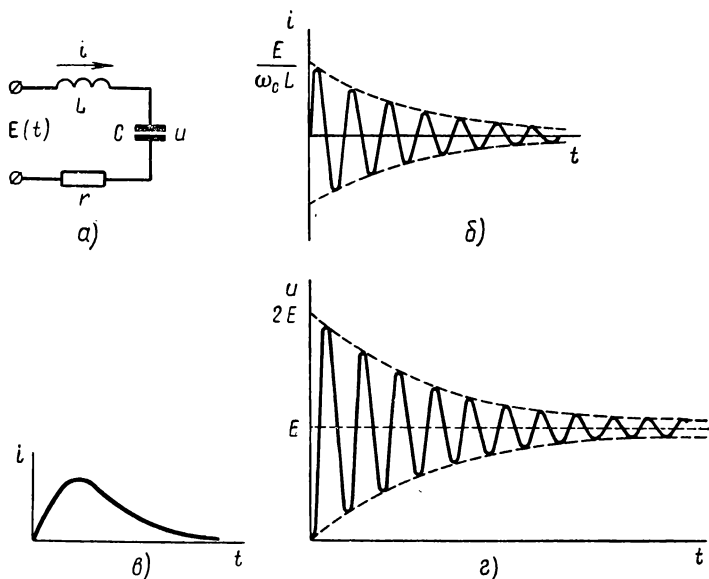


Рис. 11.6. Последовательный  $LC$ -контур и переходные процессы в нем при включении источника постоянной э. д. с.

регулирует подачу энергии в контур от источника постоянной э. д. с. в такт с собственными колебаниями контура, возникающими в момент включения источника. При этом потери энергии восполняются, и колебания, возникающие в контуре, становятся незатухающими. На этом принципе основано действие ламповых генераторов незатухающих колебаний.

Действие лампы в генераторе незатухающих колебаний можно рассматривать и иначе, если представить электронную лампу в виде некоторого отрицательного сопротивления. При этом отрицательное сопротивление лампы и сопротивление потерь контура взаимно компенсируются. Получается контур без потерь, в котором существуют незатухающие колебания.

Скорость затухания свободных колебаний в контуре определяется параметром  $\alpha$ , который получил название коэффициента

затухания. Коэффициент затухания  $\alpha$  пропорционален затуханию контура  $d$ :

$$\alpha = \frac{r}{2L} = \frac{\omega_0}{2} \cdot \frac{r}{\omega_0 L} = \frac{\omega_0}{2} d. \quad (11.39a)$$

Подставляя это значение  $\alpha$  в формулу (11.41), находим

$$\omega_c = \omega_0 \sqrt{1 - \frac{d^2}{4}} \approx \omega_0, \quad (11.41a)$$

так как  $d \ll 1$ .

Таким образом, частота свободных колебаний  $\omega_c$ , называемая собственной частотой контура, практически совпадает с его резонансной частотой.

В контурах же с большим затуханием различием в величинах собственной и резонансной частот пренебрегать нельзя.

Из выражения (11.41a) видно, что при  $d = 2$  ( $\alpha = \omega_0$ ) собственная частота контура  $\omega_c$  получается равной нулю. При этом выражение (11.40) обращается в неопределенность, раскрывая которую, получим

$$i = \frac{E}{L} t e^{-\alpha t}. \quad (11.42)$$

Это равенство может быть получено и непосредственно из выражений (11.38) при  $\omega_0 = \alpha$  с помощью преобразования 15 таблицы операторных изображений (см. табл. П.14).

График изменения тока, построенный по уравнению (11.42), показан на рис. 11.6, в.

Такое изменение тока является уже непериодическим, и контур в этом случае называется аperiодическим, а не колебательным.

Отсутствие колебательного процесса обусловлено слишком большими потерями в контуре. Очевидно, что при  $d > 2$  колебательный процесс в контуре тем более невозможен. При этом частота  $\omega_c$  является мнимой величиной и выражение (11.39) удобно представить в другом виде. Введя обозначение

$$\omega_c = j\beta,$$

где  $\beta = \sqrt{\alpha^2 - \omega_0^2}$ , и учитывая, что  $\sin j\beta = j \operatorname{sh} \beta$ , получаем из уравнения (11.40):

$$i = \frac{E}{\beta L} e^{-\alpha t} \operatorname{sh} \beta t. \quad (11.43)$$

Изменение тока при  $d > 2$  получается аналогичным изменению тока при  $d = 2$ .

Рассмотрим теперь напряжение на конденсаторе при включении источника постоянной э. д. с. Напишем изображение  $\bar{u}$  в соответствии с формулой (11.38):

$$\bar{u} = I \frac{1}{pC} = \frac{E}{LC} \cdot \frac{1}{p(p^2 + 2\alpha p + \omega_0^2)}.$$

Отсюда по таблице операторных изображений (преобразование 28) находим напряжение на конденсаторе:

$$u = E \left[ 1 - \frac{e^{-\alpha t}}{\cos \psi} \cos (\omega_c t - \psi) \right],$$

где

$$\psi = \operatorname{arctg} \frac{\alpha}{\omega_c}.$$

Учитывая, что практически выполняется условие

$$\frac{\alpha}{\omega_c} \approx \frac{\alpha}{\omega_0} = \frac{d}{2} \ll 1,$$

пренебрегаем в полученном выражении фазовым сдвигом  $\psi$  ( $\psi \approx 0$ ,  $\cos \psi \approx 1$ ) и получаем окончательно

$$u \approx E (1 - e^{-\alpha t} \cos \omega_c t). \quad (11.44)$$

Из уравнений (11.40) и (11.44) определяются переходные параметры (11.7) — (11.9) последовательного колебательного контура:

$$\begin{aligned} Z(t) &= \omega_c L e^{\alpha t} \csc \omega_c t, \\ Y(t) &= \frac{1}{\omega_c L} e^{-\alpha t} \sin \omega_c t, \\ K(t) &= 1 - e^{-\alpha t} \cos \omega_c t. \end{aligned} \quad (11.45)$$

На рис. 11.6, *г* показан график изменения напряжения на конденсаторе, построенный в соответствии с формулой (11.44). Из рисунка видно, что при включении источника постоянной э. д. с.  $E$  максимальное напряжение на конденсаторе достигает значения, почти в два раза превышающего э. д. с. источника:

$$u_{\max} \approx 2E.$$

Такое удвоение напряжения следует всегда учитывать при выборе пробивного напряжения конденсатора, если контур находится под действием источника постоянной э. д. с.

Из сравнений графиков рис. 11.6, *б* и *г* наглядно видно, каким образом происходит обмен энергии между электрическим полем конденсатора и магнитным полем катушки.

При включении источника постоянной э. д. с. конденсатор начинает заряжаться через катушку индуктивности. За счет инерционности магнитного и электрического полей ток, протекающий через катушку, и напряжение на конденсаторе возрастают не скачком, а постепенно.

Когда ток в контуре достигает амплитудного значения, конденсатор заряжается до напряжения, равного э. д. с.  $E$ . Затем ток начинает убывать, и энергия из магнитного поля катушки переходит в электрическое поле конденсатора. При этом напряжение на

конденсаторе увеличивается и становится больше э. д. с. источника. Когда ток оказывается равным нулю, энергия, запасенная ранее в магнитном поле катушки, полностью (за вычетом потерь в активном сопротивлении) переходит в электрическое поле конденсатора. При этом напряжение на конденсаторе становится равным почти удвоенной э. д. с.  $E$ . После этого конденсатор начинает разряжаться, вызывая ток обратного направления, и энергия переходит из электрического поля конденсатора в магнитное поле катушки. Этот процесс повторяется, пока колебания не прекратятся вследствие потерь в контуре.

Таким образом, за счет толчка, получающегося при включении источника постоянной э. д. с., в контуре возникают затухающие колебания. Аналогичное явление наблюдается и в механических колебательных системах. Например, если толкнуть свободно подвешенный маятник, то он приходит в движение, имеющее характер затухающих колебаний.

## 2. Выключение источника постоянной э.д.с. в последовательном контуре

Для определения тока в  $LC$ -контуре при выключении источника постоянной э. д. с. воспользуемся методом эквивалентных схем (см. рис. 11.2, б).

Согласно выражению (11.25) ток в контуре при выключении источника постоянной э. д. с.  $E$  может быть найден как разность двух токов. Первый ток является током установившегося режима при включении источника постоянной э. д. с. и равен нулю, как следует из выражения (11.40):  $i_{уст} = i|_{t=\infty} = 0$ . Второй ток является током переходного режима при включении источника постоянной э. д. с.  $E$  и определяется выражением (11.40). Таким образом, ток переходного режима при выключении источника постоянной э. д. с.  $E$  равен

$$i = -\frac{E}{\omega_c L} e^{-\alpha t} \sin \omega_c t. \quad (11.46)$$

Из сравнения уравнений (11.40) и (11.46) видно, что токи переходного режима при включении и выключении источников постоянной э. д. с. имеют одинаковую величину и отличаются только направлением.

Напряжение на конденсаторе при выключении источника постоянной э. д. с. также определяется как разность двух напряжений. Первое напряжение представляет собой напряжение, установившееся на конденсаторе при включении источника постоянной э. д. с.  $E$ , и равно  $u_{уст} = u|_{t=\infty} = E$ , как вытекает из выражения (11.44). Второе напряжение является напряжением переходного режима при включении источника э. д. с.  $E$  и определяется урав-

нением (11.44). Отсюда следует, что напряжение на конденсаторе при выключении источника постоянной э. д. с.  $E$  равно

$$u \approx E e^{-\alpha t} \cos \omega_c t. \quad (11.47)$$

Графики тока и напряжения, построенные по уравнениям (11.46), (11.47), показаны на рис. 11.7.

Интересно отметить, что выключение источника постоянной э. д. с. эквивалентно подключению заряженного конденсатора

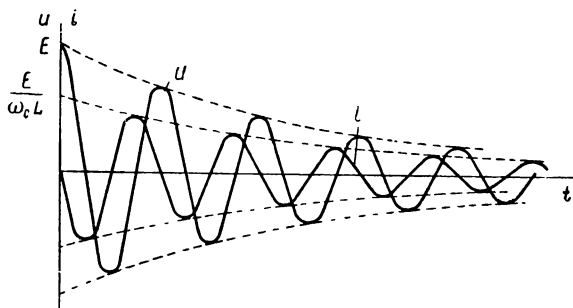


Рис. 11.7. Переходные процессы в последовательном контуре при выключении источника постоянной э. д. с.

к катушке индуктивности  $L$  с сопротивлением  $r$  (рис. 11.8). Следовательно, в последнем случае будет также наблюдаться колебательный разряд конденсатора, описываемый уравнениями (11.46) и (11.47).

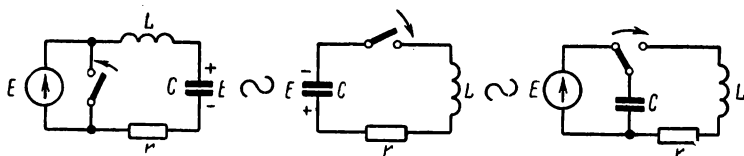


Рис. 11.8. Эквивалентные схемы последовательного контура в переходном режиме

Колебания в контуре будут получаться и при условии, если первоначально запасти энергию не в электрическом поле конденсатора, а в магнитном поле катушки, которая может рассматриваться как индуктивный накопитель энергии.

В схеме, показанной на рис. 11.9, а, при мгновенном переключении ключа  $K$  из положения 1 в положение 2 ток не упадет сразу до нуля, а будет снижаться постепенно от первоначального значения  $I_0$ . При этом конденсатор будет заряжаться до тех пор, пока ток не станет равным нулю. Затем конденсатор начнет разряжаться,



вызывая ток в обратном направлении. Далее процесс будет периодически повторяться, пока колебания не прекратятся вследствие потерь в контуре (рис. 11.9, б). Следовательно, колебательный процесс при разряде индуктивного накопителя отличается от процесса разряда заряженного конденсатора только начальной фазой колебаний. Если при разряде конденсатора в начальный момент времени  $i|_{t=0} = 0$  и  $u|_{t=0} = E$ , то в описываемом случае в начальный момент времени  $i|_{t=0} = I_0$  и  $u|_{t=0} = 0$ . Таким образом, при колебательном разряде индуктивного накопителя ток изменяется по затухающей косинусоиде:

$$i = I_0 e^{-\alpha t} \cos \omega_c t. \quad (11.48)$$

Во всех рассмотренных случаях амплитуда свободных колебаний в контуре затухает по экспоненте. Переходный процесс считают

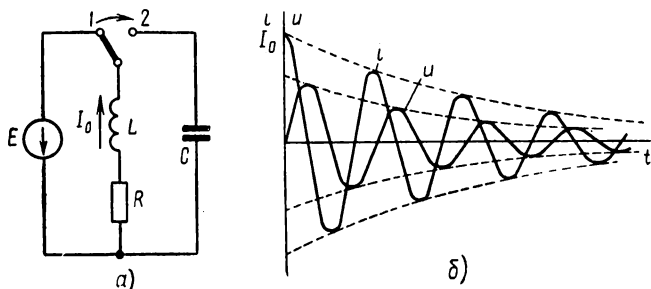


Рис. 11.9. Колебательный разряд индуктивного накопителя

закончившимся, когда амплитуда тока и напряжения уменьшается в 10 раз по сравнению с первоначальным значением.

Отсюда следует, что длительность переходного процесса определяется из условия

$$e^{-\alpha \tau} = 0,1,$$

откуда

$$\tau = \frac{2,3}{\alpha} = 4,6 \frac{L}{r} = 4,6 \frac{Q}{\omega_0}. \quad (11.49)$$

Аналогично определяется постоянная времени LC-контура:

$$T = \frac{1}{\alpha} = \frac{2L}{r} = \frac{2Q}{\omega_0}. \quad (11.49a)$$

Таким образом, с ростом добротности контура время переходного процесса увеличивается. Это вполне понятно, так как добротность контура, характеризуя отношение запасенной и расходуемой энергии, является по существу мерой инерционных свойств контура. При повышении добротности инерционность контура возрастает и время переходного процесса увеличивается. Уменьшение времени

переходного процесса при увеличении частоты происходит потому, что ускоряется перезаряд контура и за данный отрезок времени возрастает расход энергии в активном сопротивлении. Аналогично объясняется влияние индуктивности и активного сопротивления на время переходного процесса. При увеличении индуктивности увеличивается запас энергии в контуре, а с уменьшением активного сопротивления уменьшается расход энергии. При этом соответственно возрастает время, в течение которого запасенная энергия расходуется на необратимые потери, т. е. затухание колебаний замедляется.

### 3. Выключение и включение источника синусоидальной э.д.с. в последовательном контуре

Процессы, происходящие в последовательном  $LC$ -контуре при выключении источника синусоидальной э. д. с., аналогичны процессам при выключении источника постоянной э. д. с. Однако первоначальный запас энергии в контуре в момент выключения источника синусоидальной э. д. с. сосредоточен не только в электрическом поле конденсатора, но и в магнитном поле катушки. Таким образом, колебательный ток, возникающий в  $LC$ -контуре при выключении источника синусоидальной э. д. с., обусловлен не только разрядом конденсатора, но также расходом энергии, запасенной в магнитном поле катушки. Поэтому ток в контуре можно рассматривать как сумму двух составляющих  $i_L$  и  $i_C$ :

$$i = i_L + i_C.$$

Составляющая тока  $i_C$  обусловлена запасом энергии в конденсаторе в момент выключения источника и определяется выражением (11.46). Составляющая  $i_L$  обусловлена запасом энергии в катушке в момент выключения источника и определяется выражением (11.48). Следовательно, ток переходного режима при выключении источника синусоидальной э. д. с. равен

$$i = I_0 e^{-\alpha t} \cos \omega_c t - \frac{E_0}{\omega_c L} e^{-\alpha t} \sin \omega_c t. \quad (11.50)$$

Здесь  $E_0$  и  $I_0$  соответственно напряжение на конденсаторе и ток в контуре в момент выключения источника э. д. с. Эти начальные значения можно легко получить из выражений для установившегося напряжения и тока.

Если э. д. с. выключаемого источника

$$e = E_m \sin (\omega t + \psi), \quad (11.51)$$

то ток в контуре и напряжение на конденсаторе в установившемся режиме соответственно равны

$$i_{уст} = \frac{E_m}{Z} \sin(\omega t + \psi - \varphi), \quad (11.52)$$

и

$$u_{уст} = -\frac{E_m}{\omega C Z} \cos(\omega t + \psi - \varphi)^*. \quad (11.53)$$

Здесь

$$Z = \sqrt{r^2 + X^2}, \quad \varphi = \arctg \frac{X}{r}, \quad X = \omega L - \frac{1}{\omega C}.$$

Следовательно, при выключении источника э. д. с. в момент времени  $t = 0$  начальный ток и напряжение на конденсаторе можно представить в следующем виде:

$$I_0 = i_{уст} |_{t=0} = \frac{E_m}{Z} \sin(\psi - \varphi)$$

и

$$E_0 = u_{уст} |_{t=0} = -\frac{E_m}{\omega C Z} \cos(\psi - \varphi).$$

Подставляя найденные значения  $I_0$  и  $E_0$  в уравнение (11.50), получаем

$$i = \frac{E_m}{Z} e^{-\alpha t} \sin(\psi - \varphi) \cos \omega_c t + \frac{E_m}{\omega \omega_c L C Z} e^{-\alpha t} \cos(\psi - \varphi) \sin \omega_c t.$$

При небольших расстройках, которые представляют практический интерес, можно воспользоваться приближенным равенством

$$\omega \omega_c L C \approx \omega_0^2 L C = 1.$$

Тогда полученное выражение для тока можно переписать таким образом:

$$i \approx \frac{E_m}{Z} e^{-\alpha t} [\sin(\psi - \varphi) \cos \omega_c t + \cos(\psi - \varphi) \sin \omega_c t],$$

или

$$i \approx \frac{E_m}{Z} e^{-\alpha t} \sin(\omega_c t + \psi - \varphi). \quad (11.54)$$

Если контур настроен на частоту источника, то  $Z = r$  и  $\varphi = 0$ . При этом выражение (11.54) принимает вид

$$i \approx \frac{E_m}{r} e^{-\alpha t} \sin(\omega_c t + \psi) \approx \frac{E_m}{r} e^{-\alpha t} \sin(\omega_0 t + \psi). \quad (11.55)$$

Из уравнений (11.54) и (11.55) видно, что при выключении источника синусоидальной э. д. с. переходный процесс имеет харак-

---

\* Знак «—» здесь поставлен потому, что напряжение на конденсаторе отстает по фазе от тока в контуре на угол  $\frac{\pi}{2}$ .

тер затухающих по экспоненте колебаний, как и при выключении источника постоянной э. д. с. Особенностью рассматриваемого процесса является то, что при переходе от установившегося режима к неустановившемуся амплитуда и фаза колебаний изменяются постепенно, хотя частота изменяется от  $\omega$  до  $\omega_c$ . Это наглядно видно из сравнения уравнений (11.52) и (11.54). График колебаний, построенный по этим уравнениям, показан на рис. 11.10, а. График тока в настроенном контуре отличается от этого графика только значением частоты, которая получается в установившемся и переходном режимах практически одинаковой.

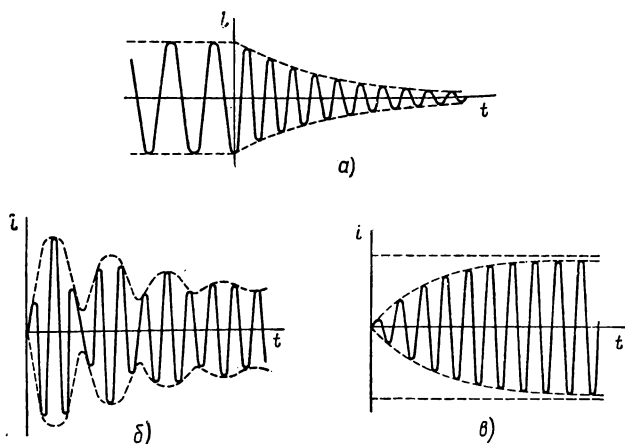


Рис. 11.10. Переходные процессы в последовательном контуре при выключении и включении источника синусоидальной э. д. с.

Зная ток в контуре, определяемый выражением (11.54), трудно по формуле  $u = \frac{1}{C} \int_0^t i dt$  определить напряжение на конденсаторе:

$$u = -\frac{E_m}{CZ} \frac{e^{-\alpha t}}{\omega_c^2 + \alpha^2} [\omega_c \cos(\omega_c t + \psi - \varphi) + \alpha \sin(\omega_c t + \psi - \varphi)],$$

или

$$u \approx -\frac{E_m}{\omega_c CZ} e^{-\alpha t} \cos(\omega_c t + \psi - \varphi), \quad (11.56)$$

так как  $\alpha \ll \omega_c$ .

Из сравнения уравнений (11.53) и (11.56) следует, что в момент выключения источника амплитуда напряжения на конденсаторе изменяется скачком от значения  $\frac{E_m}{\omega CZ}$  до значения  $\frac{E_m}{\omega_c CZ}$ . Такой результат получается вследствие приближенности уравнения (11.56) и является неточным. В действительности амплитуда напряжения,

как и амплитуда тока, не претерпевает скачка, а изменяется непрерывно.

Для настроенного контура выражение (11.56) можно переписать в следующем виде:

$$u \approx -\frac{E_m}{\omega_0 C r} e^{-\alpha t} \cos(\omega_c t + \psi),$$

или

$$u \approx -Q E_m e^{-\alpha t} \cos(\omega_c t + \psi) \approx -Q E_m e^{-\alpha t} \cos(\omega_0 t + \psi). \quad (11.57)$$

Поскольку ток и напряжение при выключении источника синусоидальной э. д. с. затухают по экспоненте, как и при выключении источника постоянной э. д. с., длительность переходного процесса в описываемом случае определяется прежними формулами (11.49) и (11.49а).

Зная характер переходных процессов при выключении источника э. д. с., можно изучить переходные процессы при включении этого источника, воспользовавшись методом эквивалентных схем (см. рис. 11.2, а).

Пусть э. д. с.  $e$  включаемого источника определяется прежним выражением (11.51).

При этом ток переходного режима следует рассматривать как разность двух токов  $i_1$  и  $i_2$ . Ток  $i_1$  является током установившегося режима и определяется выражением (11.52). Ток  $i_2$  является током переходного режима, обусловленного выключением источника э. д. с.  $e$ , и определяется выражением (11.54).

Таким образом, находим, что при включении э. д. с. (11.51) ток в контуре

$$i \approx \frac{E_m}{Z} [\sin(\omega t + \psi - \varphi) - e^{-\alpha t} \sin(\omega_c t + \psi - \varphi)]. \quad (11.58)$$

Аналогично из уравнений (11.53) и (11.56) определяется напряжение на конденсаторе:

$$u \approx -\frac{E_m}{\omega C Z} [\cos(\omega t + \psi - \varphi) - \frac{\omega}{\omega_c} e^{-\alpha t} \cos(\omega_c t + \psi - \varphi)]. \quad (11.59)$$

Следовательно, ток и напряжение при включении источника являются суммой двух составляющих с разными частотами, т. е. образуют биения. Амплитуда биений убывает по экспоненциальному закону, и амплитуда колебаний стремится к стационарному значению. График изменения тока в контуре для этого случая изображен на рис. 11.10, б. Аналогично изменяется и напряжение на конденсаторе.

Для настроенного контура  $\omega = \omega_0 \approx \omega_c$ ,  $Z = r$ ,  $\varphi = 0$  и выражения (11.58), (11.59) упрощаются:

$$i \approx \frac{E_m}{r} (1 - e^{-\alpha t}) \sin(\omega_0 t + \psi), \quad (11.60)$$

$$u \approx -Q E_m (1 - e^{-\alpha t}) \cos(\omega_0 t + \psi). \quad (11.61)$$

График изменения тока в контуре для этого случая показан на рис. 11.10, в. Аналогично изменяется и напряжение на конденсаторе.

Как следует из самой методики определения тока и напряжения, длительность переходного режима при включении источника э. д. с. равна длительности переходного режима при выключении этого источника и определяется прежними формулами (11.49) и (11.49а). Под длительностью переходного процесса в настроенном контуре следует понимать время, в течение которого амплитуда напряжения и тока возрастает до значения 0,9 от максимальной амплитуды напряжения и тока в установившемся режиме. Под длительностью же переходного процесса в расстроенном контуре понимают время, в течение которого затухают биения в контуре.

#### 4. Переходные процессы в параллельном контуре

Рассмотрим переходные процессы в параллельном контуре при включении источника постоянной э. д. с. (рис. 11.11, а).

Полагая, что включение э. д. с. происходит при нулевых начальных условиях ( $i_L|_{t=0} = 0$ ,  $u|_{t=0} = 0$ ), находим изображение  $\bar{u}$ :

$$\bar{u} = IZ(p) = \frac{\bar{E}}{R_i + Z(p)} Z(p), \quad (11.62)$$

где

$$Z(p) = \frac{(r + pL) \frac{1}{pC}}{r + pL + \frac{1}{pC}} \quad (11.63)$$

и

$$\bar{E} = \frac{E}{p}. \quad (11.64)$$

Подставляя  $\bar{E}$  и  $Z(p)$  в выражение (11.62), после несложных преобразований получаем изображение  $\bar{u}$  в следующем виде:

$$\bar{u} = \omega_0 \frac{\rho}{R_i} E \frac{\rho + 2\alpha}{\rho(\rho^2 + 2\alpha'\rho + \beta^2)} \approx \omega_0 \frac{\rho}{R_i} E \frac{\rho + 2\alpha}{\rho(\rho^2 + 2\alpha'\rho + \omega_0^2)}, \quad (11.65)$$

где

$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}, \quad \rho = \sqrt{\frac{L}{C}}, \quad \alpha = \frac{r}{2L}, \quad \alpha' = \frac{r'}{2L}, \quad (11.66)$$

$$r' = r + \frac{\rho^2}{R_i}, \quad \beta = \omega_0 \sqrt{1 + \frac{r}{R_i}} \approx \omega_0,$$

так как  $r \ll R_i$ .

По выражению (11.65) в соответствии с табл. П.14 (преобразование 29) определяем напряжение на контуре:

$$u \approx \frac{r}{R_i} E \left[ 1 - \frac{1}{\cos \psi} e^{-\alpha' t} \cos(\omega_c t - \psi) \right], \quad (11.67)$$

где

$$\omega_c \approx \sqrt{\omega_0^2 - \alpha'^2} \approx \omega_0, \quad (11.68)$$

$$\psi \approx \arctg \left( \frac{\alpha'}{\omega_0} - \frac{\omega_0^2}{2\omega_c \alpha'} \right). \quad (11.69)$$

График изменения напряжения на контуре изображен на рис. 11.11, б. Таким образом, в параллельном колебательном контуре, как и в последовательном контуре, возникают свободные колебания при включении источника постоянной э. д. с., если  $\alpha' < \omega_0$  [тем более, если  $\alpha' \ll \omega_0$ , как это принято в формуле (11.68)].

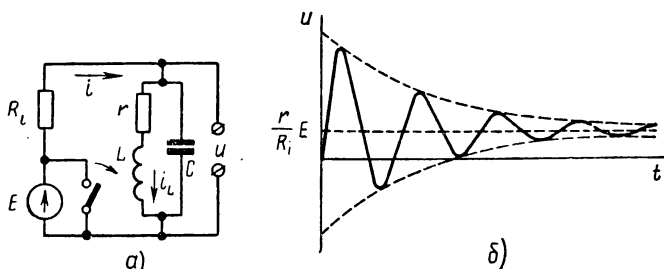


Рис. 11.11. Параллельный контур и переходные процессы в нем при включении источника постоянной э. д. с.

Из выражений (11.66) видно, что влияние внутреннего сопротивления источника  $R_i$  на переходные процессы получается аналогичным влиянию этого сопротивления на вынужденные колебания в параллельном контуре. Коэффициент затухания  $\alpha'$ , характеризующий скорость затухания свободных колебаний, и добротность  $Q_{\text{экв}}$ , характеризующая селективность контура при вынужденных колебаниях, определяются одним и тем же сопротивлением

$$r' = r + \frac{\rho^2}{R_i}.$$

Рассмотрим напряжение на контуре при включении источника синусоидальной э. д. с.

$$e = E_m \sin \omega t. \quad (11.70)$$

Для определения изображения  $\bar{u}$  в этом случае достаточно заменить в выражении (11.64) изображение  $\bar{E} = \frac{E}{p}$  изображением

$$\bar{e} = E_m \frac{\omega}{p^2 + \omega^2}. \quad (11.71)$$

При этом находим

$$\bar{u} \approx \omega \omega_0 \frac{\rho}{R_i} E_m \frac{\rho + 2\alpha}{(\rho^2 + \omega^2)(\rho^2 + 2\alpha'\rho + \omega_0^2)}. \quad (11.72)$$

Отсюда в соответствии с преобразованием 32 табл. П.14 получаем выражение для напряжения на контуре:

$$u \approx \frac{\omega \omega_0 \frac{\rho}{R_i} E_m}{\sqrt{(\omega^2 - \omega_0^2)^2 + 4\alpha'^2 \omega^2}} \left[ \frac{\sqrt{\omega^2 + 4\alpha^2}}{\omega} \sin(\omega t + \psi') + \frac{\sqrt{(2\alpha - \alpha')^2 + \omega_c^2}}{\omega_c} e^{-\alpha' t} \sin(\omega_c t + \psi'') \right], \quad (11.73)$$

где

$$\psi' = \arctg \frac{\omega}{2\alpha} + \arctg \frac{4\alpha\omega}{\omega^2 - \omega_c^2 - \alpha'^2}, \quad (11.74)$$

$$\psi'' = \arctg \frac{\omega_c}{2\alpha - \alpha'} + \arctg \frac{2\alpha\omega_c}{\omega^2 - \omega_c^2 + \alpha'^2}. \quad (11.75)$$

Остальные параметры определяются по-прежнему формулами (11.66) и (11.68).

Таким образом, напряжение на контуре представляется в виде суммы двух колебаний с разными частотами, причем одно из них затухает по экспоненте. Следовательно, в переходном режиме колебания представляют собой биения с затухающей амплитудой, как это было и в последовательном контуре (см. рис. 11.10, б).

Если контур настроен, то выражение (11.73) упрощается. При этом, учитывая, что  $\alpha < \alpha' \ll \omega_0$  и  $\alpha' < 2\alpha$ , получаем  $\omega = \omega_0 \approx \omega_c$ ,  $\psi' \approx 0$ ,  $\psi'' \approx \pi$ ,  
и

$$u \approx \frac{R'_0}{R_i} E_m (1 - e^{-\alpha' t}) \sin \omega_0 t, \quad (11.76)$$

где

$$R'_0 = \frac{\rho^2}{r'}. \quad (11.77)$$

Используя метод эквивалентных схем, нетрудно получить выражение для напряжения на настроенном контуре при выключении источника синусоидальной э. д. с.:

$$u \approx \frac{R'_0}{R_i} E_m e^{-\alpha' t} \sin \omega_0 t. \quad (11.78)$$

Таким образом, напряжение на настроенном параллельном контуре при включении и выключении источника синусоидальной э. д. с. изменяется подобно току последовательного контура в аналогичных случаях.



## 5. Переходные процессы в связанных контурах

Выше было показано, что при включении источника постоянной э. д. с. в одиночном контуре возникают колебания, затухающие по экспоненте. Очевидно, что и в первичном контуре связанной системы должны возникнуть затухающие колебания при включении источника постоянной э. д. с.

Однако в этом случае колебания должны затухать не по экспоненте, а быстрее, так как затухание обусловлено не только актив-

ными потерями в первичном контуре, но и передачей энергии во вторичный контур. Когда вся энергия из первичного контура переходит во вторичный, амплитуда тока в первичном контуре падает до нуля. Затем происходит обратный переход энергии из вторичного контура в первичный.

Процесс перехода энергии в обоих направлениях происходит многократно, и токи в связанных контурах изменяются по закону биений (рис. 11.12). При этом максимальная амплитуда колебаний затухает по экспоненте вследствие потерь энергии в самих контурах.

При выключении источника постоянной э. д. с.

в первичном контуре начинается разряд конденсатора. При этом в первичном, а следовательно, и во вторичном контурах образуются колебания, которые также изменяются по закону затухающих биений.

Рассмотрим переходные процессы при включении источника синусоидальной э. д. с. в случае одинаковых связанных контуров, настроенных в резонанс с источником.

При одинаковых контурах ( $\dot{Z}_1 = \dot{Z}_2 = \dot{Z}$ ) и согласном включении катушек комплексная амплитуда тока во вторичном контуре в соответствии с формулой (7.55) равна

$$I_{m2} = - \frac{\dot{E}_m Z_{св}}{\dot{Z}^2 - \dot{Z}_{св}^2}.$$

Согласно правилу определения операторного сопротивления по аналогии с этим выражением находим изображение тока переходного режима

$$\bar{i}_2 = -\frac{\bar{e} p M}{Z^2(p) - (p M)^2}, \quad (11.79)$$

где  $p M$  — операторное сопротивление связи;  
 $Z(p) = r + p L + \frac{1}{p C}$  — операторное сопротивление контура.

Выражение (11.79) можно представить в следующем виде:

$$\bar{i}_2 = \frac{1}{2} \left( \frac{\bar{e}}{Z(p) + p M} - \frac{\bar{e}}{Z(p) - p M} \right). \quad (11.80)$$

Слагаемые, стоящие в скобках, можно считать изображениями токов  $\bar{i}'$  и  $\bar{i}''$  в одиночных последовательных контурах с параметрами  $r, L + M, C$  и  $r, L - M, C$ :

$$\bar{i}' = \frac{\bar{e}}{r + p(L + M) + \frac{1}{pC}}, \quad (11.81)$$

$$\bar{i}'' = \frac{\bar{e}}{r + p(L - M) + \frac{1}{pC}}. \quad (11.82)$$

Таким образом,  $\bar{i}_2 = \frac{1}{2} (\bar{i}' - \bar{i}'')$ , откуда

$$i_2 = \frac{1}{2} (i' - i''). \quad (11.83)$$

Здесь  $i'$  и  $i''$  — токи переходных режимов одиночных контуров с параметрами  $r, L + M, C$  и  $r, L - M, C$ .

Контур с такими параметрами имеет резонансные частоты

$$\omega'_0 = \frac{1}{\sqrt{(L + M)C}}, \quad \omega''_0 = \frac{1}{\sqrt{(L - M)C}},$$

или

$$\omega'_0 = \frac{\omega_0}{\sqrt{1 + k_{св}}} \approx \omega_0 \left( 1 - \frac{k_{св}}{2} \right), \quad (11.84)$$

$$\omega''_0 = \frac{\omega_0}{\sqrt{1 - k_{св}}} \approx \omega_0 \left( 1 + \frac{k_{св}}{2} \right), \quad (11.85)$$

где  $\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$  — резонансная частота каждого из связанных контуров;

$k_{св} = \frac{M}{L}$  — коэффициент связи связанных контуров.

Таким образом, задача на включение источника э. д. с. в настроенной связанной системе сводится к задаче на включение источника э. д. с. в расстроенных одиночных контурах. Расстройка

этих вспомогательных контуров мала, поскольку  $k_{св} \ll 1$ , но ею пренебрегать нельзя, так как процессы в настроенном и расстроенном контурах отличаются не только количественно, но и качественно.

Коэффициенты же затухания вспомогательных одиночных контуров могут быть приняты одинаковыми, так как их незначительное количественное различие при  $k_{св} \ll 1$  не имеет принципиального значения:

$$\alpha' = \frac{r}{2(L+M)} = \frac{\alpha}{1+k_{св}},$$

$$\alpha'' = \frac{r}{2(L-M)} = \frac{\alpha}{1-k_{св}},$$

или

$$\alpha' \approx \alpha'' \approx \alpha = \frac{r}{2L}. \quad (11.86)$$

Наконец, следует заметить, что согласно формулам (11.84) и (11.85) вспомогательные контуры расстроены симметрично относительно частоты источника  $\omega_0$ . Следовательно, на частоте  $\omega_0$  модули их сопротивления равны, а аргументы имеют разные знаки:

$$Z' = Z'' = Z, \quad (11.87)$$

$$\varphi' = -\varphi'' = \varphi. \quad (11.88)$$

Соотношение (11.83) справедливо не только для случая включения, но и для случая выключения источника э. д. с., что следует непосредственно из метода эквивалентных схем. При этом под токами  $i'$  и  $i''$  надо понимать токи во вспомогательных одиночных контурах после выключения источника э. д. с.

Учитывая соотношения (11.54), (11.58) и (11.84) — (11.88), находим

$$i'_{вкл} \approx \frac{E_m}{Z} [\sin(\omega_0 t + \psi - \varphi) - e^{-\alpha t} \sin(\omega'_0 t + \psi - \varphi)],$$

$$i''_{вкл} \approx \frac{E_m}{Z} [\sin(\omega_0 t + \psi + \varphi) - e^{-\alpha t} \sin(\omega''_0 t + \psi + \varphi)],$$

$$i'_{выкл} \approx \frac{E_m}{Z} e^{-\alpha t} \sin(\omega'_0 t + \psi - \varphi),$$

$$i''_{выкл} \approx \frac{E_m}{Z} e^{-\alpha t} \sin(\omega''_0 t + \psi + \varphi).$$

Подставляя полученные выражения в соотношение (11.83) и заменяя разность синусов произведением тригонометрических функций, с учетом формул (11.84) и (11.85) получаем

$$i_{2вкл} \approx -\frac{E_m}{Z} \sin \varphi \left[ 1 - \frac{e^{-\alpha t}}{\sin \varphi} \sin(\Omega t + \varphi) \right] \cos(\omega_0 t + \psi), \quad (11.89)$$

$$i_{2выкл} \approx -\frac{E_m}{Z} e^{-\alpha t} \sin(\Omega t + \varphi) \cos(\omega_0 t + \psi), \quad (11.90)$$

где

$$\Omega = \frac{k_{св}}{2} \omega_0 = \frac{\kappa}{2} \cdot \frac{\omega_0}{Q} \ll \omega_0, \quad (11.91)$$

$$\varphi = \arctg 2Q \frac{\Delta\omega}{\omega_0},$$

$$\Delta\omega = \omega_0 - \omega'_0 = \Omega,$$

т. е.

$$\varphi = \arctg Qk_{св} = \arctg \kappa. \quad (11.92)$$

Соотношение (11.89) аналогично выражению (10.38) для АМ-колебаний. При этом величина (11.91) соответствует частоте модуляции, а параметр  $m = \frac{e^{-\alpha t}}{\sin \varphi}$  имеет смысл коэффициента модуляции. В отличие от обычной амплитудной модуляции, при которой коэффициент модуляции не превышает единицы, здесь может быть  $m = \frac{e^{-\alpha t}}{\sin \varphi} > 1$ . Однако перемодуляции в этом случае не происходит. Действительно, при  $t = 0$ , когда величина  $m$  максимальна и равна  $\frac{1}{\sin \varphi}$ , амплитуда колебаний не отрицательна, а равна нулю, как видно из соотношения (11.89). Поскольку с ростом величины  $t$  коэффициент  $m = \frac{e^{-\alpha t}}{\sin \varphi}$  убывает, в отличие от обычного АМ-сигнала, у колебаний, описываемых уравнением (11.89), изменение амплитуды становится меньше (модуляция затухает) с течением времени (рис. 11.13, а).

Образование в связанных контурах модулированных колебаний с затухающей модуляцией можно объяснить следующим образом. За счет толчка при включении источника э. д. с. в связанной системе возникают биения, которые можно рассматривать как сумму двух колебаний с разными частотами  $\omega'_0 = \omega_0 - \Omega$  и  $\omega''_0 = \omega_0 + \Omega$ . Эти колебания вместе с вынужденными колебаниями, имеющими частоту  $\omega_0$ , представляют собой спектр модулированных колебаний. Их сумма и образует модулированные колебания с частотой модуляции (11.91). Поскольку биения затухают за счет потерь, модуляция получается затухающей.

Уравнение (11.90) описывает обычные затухающие биения с частотой  $\Omega$  (рис. 11.13, б). Образование биений в этом случае объясняется, как и при выключении источника постоянной э. д. с., переходом энергии из первичного контура во вторичный и обратно.

Для колебаний, изображенных на рис. 11.13, а и б, под временем переходного процесса следует понимать время, в течение которого затухает модуляция (или затухают биения). Так как затухание происходит по экспоненте, то длительность переходного процесса в этом случае следует определять по формулам (11.49).

Однако колебания такого вида, как на рис. 11.13, а и б, получаются при очень сильной связи, которая не применяется

на практике. При ослаблении связи частота модуляции (11.91) уменьшается, а период модуляции  $T = \frac{2\pi}{\Omega}$  увеличивается.

Если фактор связи уменьшается до максимально допустимого значения ( $\kappa = 2,41$ ), то период модуляции становится больше времени затухания модуляции. Действительно, согласно формуле (11.91)

$$T = \frac{2\pi}{\Omega} = \frac{4\pi}{\kappa} \cdot \frac{Q}{\omega_0},$$

и при  $\kappa = 2,41$  получаем  $T \approx 5,2 \frac{Q}{\omega_0}$ , что превышает время затухания модуляции (11.49). Поэтому при  $\kappa \leq 2,41$  под длительностью переходного процесса можно понимать время, в течение которого

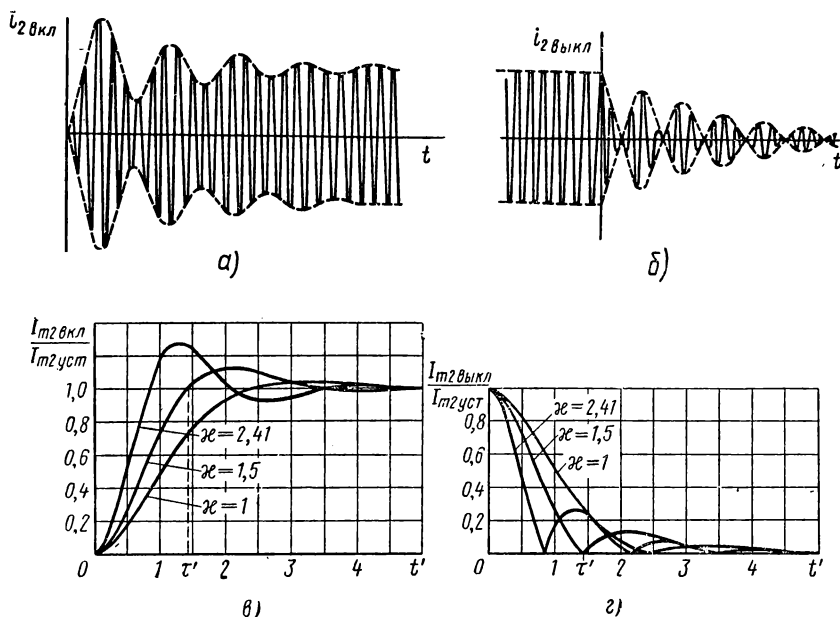


Рис. 11.13. Переходные процессы в связанных контурах при включении и выключении источников синусоидальной э.д.с.

амплитуда тока нарастает до установившегося значения  $I_{m2уст} = \frac{E_m}{Z} \sin \varphi$  (рис. 11.13, в) или убывает от значения  $I_{m2уст}$  до нуля (рис. 11.13, г). На рис. 11.13, в и г по осям абсцисс отложено нормированное время  $t' = \alpha t = \frac{\omega_0 t}{2Q}$ . В этих же нормированных единицах времени показана для примера длительность переходного процесса  $\tau' = \alpha \tau$  при  $\kappa = 1,5$ .

В соответствии с принятым определением длительность переходного процесса может быть найдена из условия  $\sin(\Omega t +$

$+\varphi)|_{t=\tau}=0$ . Отсюда, учитывая формулы (11.91) и (11.92), получаем

$$\tau = \frac{\pi - \varphi}{\Omega} = \frac{2(\pi - \arctg \kappa)}{\kappa} \cdot \frac{Q}{\omega_0}. \quad (11.93)$$

Отсюда видно, что при уменьшении фактора связи от максимального значения  $\kappa = 2,41$  приблизительно до значения  $\kappa = 1$  (точнее до  $\kappa = 1,02$ ) длительность переходного процесса (11.93) получается меньше значения (11.49). При дальнейшем уменьшении фактора связи амплитуда колебаний изменяется почти монотонно, как это видно из рис. 11.13, *в* и *г*. При этом длительность переходного процесса целесообразно определять снова на уровне 0,9 (0,1), что можно сделать, решив уравнение  $e^{-\tau'} \sin(\kappa\tau' + \varphi) = 0,1 \sin \varphi$ .

## § 11.4. ПЕРЕХОДНЫЕ ПРОЦЕССЫ В ДЛИННЫХ ЛИНИЯХ

### 1. Переходные процессы при $R_n > W$ и $R_i < W$

Рассмотрим переходные процессы в длинной линии при включении на ее входе источника постоянной э. д. с. (рис. 11.14). Полученные при этом выводы можно обобщить на случай включения источника синусоидальной э. д. с.

Переходные процессы в линии обусловлены запаздыванием распространяющихся в ней волн. В линии без потерь волны распространяются с одинаковой скоростью. Поэтому в согласованной линии без потерь ( $R_n = W$ ) при отсутствии отражения от нагрузки сигнал на выходе повторяет без искажений любую форму сигнала на входе со сдвигом во времени на величину  $\tau = \frac{l_0}{v_0}$ .

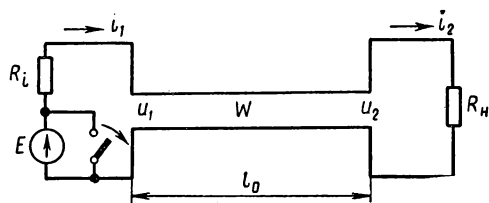


Рис. 11.14. Включение источника постоянной э. д. с. на входе длинной линии

В частности, при действии на входе линии э. д. с. в виде ступенчатой функции (11.1) на согласованной нагрузке выделяется запаздывающее напряжение аналогичной формы.

В рассогласованной же линии характер переходных процессов зависит от наличия отраженных волн, которые, накладываясь на падающие волны, изменяют форму сигнала на выходе и в остальных сечениях линии. При этом существенное значение имеет величина и знак отраженных волн. Поэтому переходные процессы

в линии следует рассматривать при разных нагрузочных сопротивлениях.

Кроме того, надо помнить, что волны отражаются не только на выходе линии при ее рассогласовании с нагрузкой, но также на входе линии при ее рассогласовании с генератором. Поэтому при изучении переходных процессов в линии необходимо учитывать и разные внутренние сопротивления источника э. д. с.

Рассмотрим сначала предельный случай включения источника постоянной э. д. с.  $E$  с внутренним сопротивлением  $R_i = 0$  на входе разомкнутой линии без потерь. Определим характер изменения входных и выходных напряжений и токов ( $u_1$ ,  $i_1$  и  $u_2$ ,  $i_2$ ). Заранее можно сказать, что ток  $i_2$  на выходе линии должен в любой момент времени равняться нулю, что и подтверждается дальнейшим анализом.

При включении источника в момент времени  $t = 0$  в линии начинают распространяться бегущие волны напряжения и тока:

$$u_{\text{пад}} = E, \quad i_{\text{пад}} = \frac{u_{\text{пад}}}{W} = \frac{E}{W}. \quad (11.94)$$

Пока в линии распространяются падающие волны, на входе линии протекает ток  $i_1 = i_{\text{пад}} = \frac{E}{W}$  (рис. 11.15, а), а входное напряжение равно  $u_1 = u_{\text{пад}} = E$ .

В момент времени  $t = \tau = \frac{l_0}{v_0}$

падающие волны достигают разомкнутого конца линии. Здесь волна напряжения отражается с тем же знаком («в фазе»), а волна тока — с противоположным знаком («в противофазе»), так как  $\rho = 1$ :

$$u_{\text{отр}} = u_{\text{пад}} = E, \quad i_{\text{отр}} = -i_{\text{пад}} = -\frac{E}{W}. \quad (11.95)$$

Учитывая соотношения (11.94) и (11.95), находим, что при этом напряжение на конце линии  $u_2 = u_{\text{пад}} + u_{\text{отр}} = 2E$  (рис. 11.15, з), а ток  $i_2 = i_{\text{пад}} + i_{\text{отр}} = 0$ .

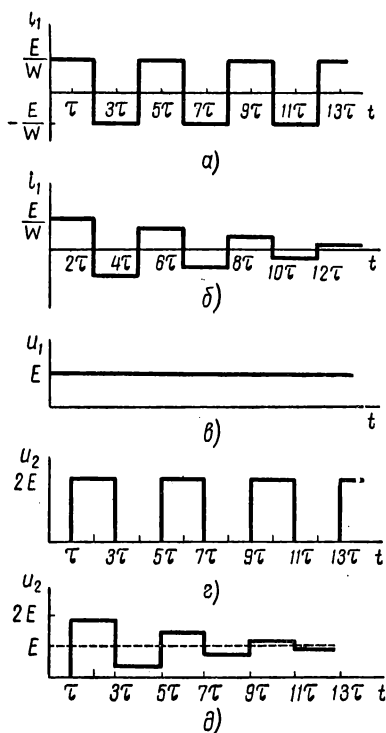


Рис. 11.15. Переходные процессы в линии при  $R_n > W$  и  $R_i < W$

При распространении от конца линии отраженных волн  $u_{отр}$  и  $i_{отр}$  напряжение и ток соответственно равны: на входе  $u_1 = E$ ,  $i_1 = \frac{E}{W}$ , на выходе  $u_2 = 2E$ ,  $i_2 = 0$ .

В момент времени  $t = 2\tau$  отраженные волны достигают входа линии, где происходит вторичное отражение волн. Так как  $R_i = 0$ , то при этом волна напряжения отражается «в противофазе», а волна тока — «в фазе»:

$$u'_{отр} = -u_{отр} = -E, \quad i'_{отр} = i_{отр} = \frac{E}{W}. \quad (11.96)$$

Следовательно, в момент времени  $t = 2\tau$ , как видно из соотношений (11.94) — (11.96), ток  $i_1$  на входе линии изменяется скачком от значения  $i_1 = i_{пад} = \frac{E}{W}$  до значения  $i_1 = i_{пад} + i_{отр} + i'_{отр} = -\frac{E}{W}$  (см. рис. 11.15, а), напряжение же на входе линии не изменяется ( $u_1 = u_{пад} + u_{отр} + u'_{отр} = E$ ).

При распространении вторично отраженных волн  $u'_{отр}$  и  $i'_{отр}$  напряжение и ток соответственно равны: на входе  $u_1 = E$  и  $i_1 = -\frac{E}{W}$ , на выходе  $u_2 = 2E$  и  $i_2 = 0$ .

В момент времени  $t = 3\tau$  волны  $u'_{отр}$  и  $i'_{отр}$  достигают разомкнутого конца линии, где возникают новые отраженные волны

$$u''_{отр} = u'_{отр} = -E, \quad i''_{отр} = -i'_{отр} = \frac{E}{W}. \quad (11.97)$$

Из соотношений (11.94) — (11.97) следует, что при этом выходное напряжение изменяется до значения  $u_2 = u_{пад} + u_{отр} + u'_{отр} + u''_{отр} = 0$  (см. рис. 11.15, з). Ток же на выходе остается по-прежнему равным нулю ( $i_2 = i_{пад} + i_{отр} + i'_{отр} + i''_{отр} = 0$ ).

При распространении от конца линии волн  $u''_{отр}$  и  $i''_{отр}$  напряжение и ток соответственно равны: на входе  $u_1 = E$  и  $i_1 = -\frac{E}{W}$ , на выходе  $u_2 = 0$  и  $i_2 = 0$ .

В момент времени  $t = 4\tau$  волны  $u''_{отр}$  и  $i''_{отр}$  достигают входа линии, где возникают новые отраженные волны

$$u'''_{отр} = -u''_{отр} = E, \quad i'''_{отр} = i''_{отр} = \frac{E}{W}. \quad (11.98)$$

Как следует из соотношений (11.94) — (11.98), при этом входное напряжение остается равным  $u_1 = u_{пад} + u_{отр} + u'_{отр} + u''_{отр} + u'''_{отр} = E$ , а ток на входе становится равным  $i_1 = i_{пад} + i_{отр} + i'_{отр} + i''_{отр} + i'''_{отр} = \frac{W}{E}$  (см. рис. 11.15, а).

Таким образом, в момент времени  $t = 4\tau$  напряжения и токи в линии принимают те же значения, что и в момент времени  $t = 0$ . Далее процесс изменения напряжений и токов в линии периодически повторяется.



В результате проведенного анализа приходим к выводу, что при включении источника постоянной э. д. с.  $E$  напряжение на входе линии в момент времени  $t = 0$  изменяется скачком на величину  $E$  и далее остается постоянным и равным  $u_1 = E = \text{const}$  (рис. 11.15, а). Напряжение же на выходе имеет вид прямоугольных колебаний с периодом  $T = 4\tau = 4 \frac{l_0}{v_0}$  (см. рис. 11.15, в).

Подобные явления наблюдаются и в линии, нагруженной на активное сопротивление  $R_n > W$ . Однако отражение волны напряжения на конце такой линии происходит с уменьшением амплитуды, и колебания на выходе линии носят затухающий характер (рис. 11.15, б). Такой же характер имеют колебания на конце разомкнутой линии, если внутреннее сопротивление источника конечно по величине, но меньше волнового сопротивления линии ( $R_i < W$ ). Аналогичный вид имеет график и в общем случае, когда  $R_n > W$  и  $R_i < W$ . При этом напряжение на входе линии также изменяется.

Существенным является вывод о возникновении периодических колебаний в линии при включении источника постоянной э. д. с. Таким образом, длинные линии, как и цепи с сосредоточенными параметрами, обладают колебательными свойствами. Колебания выходного напряжения и входного тока имеют прямоугольную форму (см. рис. 11.15, а и в). Прямоугольные колебания могут быть разложены на гармонические составляющие с периодами

$$T_1 = 4 \frac{l_0}{v_0}, T_3 = \frac{T_1}{3} = \frac{4}{3} \cdot \frac{l_0}{v_0}, \dots, T_{2k+1} = \frac{T_1}{2k+1} = \frac{4}{2k+1} \cdot \frac{l_0}{v_0}, \dots \quad (11.99)$$

Отсюда следует, что для возбуждения в линии колебаний с длиной волны  $\lambda_0 = v_0 T$  может быть использована линия, разомкнутая на выходе и короткозамкнутая на входе, имеющая длину

$$l_{01} = \frac{\lambda_0}{4}, l_{03} = \frac{3\lambda_0}{4}, \dots, l_{0(2k+1)} = \frac{2k+1}{4} \lambda_0, \dots$$

Таким образом, линия является многоволновой колебательной системой в отличие от колебательных систем с сосредоточенными параметрами. На практике обычно используются колебания на основной частоте, т. е. применяются четвертьволновые линии. При этом колебательной системой служит не разомкнутая линия, которую трудно настраивать, а короткозамкнутая линия, рассматриваемая ниже.

Такие колебательные системы с распределенными параметрами используются на сверхвысоких частотах.

В разомкнутой линии с потерями колебания, возникающие при включении источника постоянной э. д. с., имеют затухающий характер вследствие убывания амплитуды многократно отраженных волн. При этом выходное напряжение изменяется в соответствии

с рис. 11.15, а, а входной ток — согласно рис. 11.15, б. На рис. 11.15, б ток показан убывающим до нуля. Строго говоря, он убывает до конечной величины, но этим мы здесь и в дальнейшем пренебрегаем.

## 2. Переходные процессы при $R_n > W$ и $R_i > W$

Рассмотрим сначала предельный случай переходных процессов в разомкнутой линии без потерь при включении источника постоянной э. д. с.  $E$  с внутренним сопротивлением  $R_i \gg W$ .

Для упрощения анализа будем считать, что отраженные волны на входе линии получаются такими же, как и при  $R_i = \infty$ , т. е. модуль коэффициента отражения на входе линии равен единице. Полученные результаты можно уточнить с учетом конечности внутреннего сопротивления источника.

При включении источника в момент времени  $t = 0$  в линии начинают распространяться бегущие волны напряжения и тока:

$$u_{\text{пад}} = \frac{W}{R_i + W} E \approx \frac{W}{R_i} E, \quad i_{\text{пад}} = \frac{u_{\text{пад}}}{W} \approx \frac{E}{R_i}. \quad (11.100)$$

Как и в предыдущем случае, эти волны многократно отражаются на выходе и на входе линии. При этом на обоих концах линии волны напряжения отражаются «в фазе», а волны тока — «в противофазе», так что

$$\begin{aligned} u_{\text{отр}} = u'_{\text{отр}} = u''_{\text{отр}} = u'''_{\text{отр}} = \dots = u_{\text{пад}} &\approx \frac{W}{R_i} E, \\ -i_{\text{отр}} = i'_{\text{отр}} = -i''_{\text{отр}} = i'''_{\text{отр}} = \dots = i_{\text{пад}} &\approx \frac{E}{R_i}. \end{aligned} \quad (11.101)$$

Учитывая соотношения (11.100) и (11.101), находим, что в любой момент времени входной и выходной токи равны соответственно

$$i_1 = i_{\text{пад}} \approx \frac{E}{R_i} \quad \text{и} \quad i_2 = 0.$$

Напряжения же на обоих концах линии с учетом соотношений (11.100) и (11.101) получаются равными

$$\text{при } t = 0 \quad u_1 = u_{\text{пад}} = \frac{W}{R_i} E, \quad u_2 = 0,$$

$$\text{при } t = \tau = \frac{l_0}{v_0} \quad u_1 = \frac{W}{R_i} E, \quad u_2 = u_{\text{пад}} + u_{\text{отр}} = 2 \frac{W}{R_i} E,$$

$$\text{при } t = 2\tau \quad u_1 = u_{\text{пад}} + u_{\text{отр}} + u'_{\text{отр}} = 3 \frac{W}{R_i} E, \quad u_2 = 2 \frac{W}{R_i} E,$$

$$\text{при } t = 3\tau \quad u_1 = 3 \frac{W}{R_i} E, \quad u_2 = u_{\text{пад}} + u_{\text{отр}} + u'_{\text{отр}} + u''_{\text{отр}} = 4 \frac{W}{R_i} E$$

и т. д.

В промежуточные моменты времени напряжения на входе и на выходе линии остаются неизменными. Характер изменения напряжений  $u_1$  и  $u_2$  показан на рис. 11.16, а. Из этого рисунка видно, что напряжения на концах линии, изменяясь скачкообразно, возрастают до бесконечности, чего не может быть. Почему же получился такой результат?

Повышение напряжения объясняется сложением многократно отраженных волн, отражающихся все время «в фазе». Однако принятое выше допущение, что на входе линии происходит полное отражение ( $p = 1!$ ), не соответствует действительности.

Поскольку внутреннее сопротивление источника является конечной величиной, отражение волн на входе линии происходит с уменьшением амплитуды ( $p < 1!$ ). При этом напряжение в линии возрастает лишь до величины  $u_{1\max} = u_{2\max} = E$ , что можно показать математически и вывести из физических соображений.

Кроме того, следует учесть, что на характер переходных процессов влияют потери в линии, которые приводят к затуханию волн при их распространении.

Фактический характер изменения напряжений  $u_1$  и  $u_2$  с учетом обоих факторов показан на рис. 11.16, б. Гра-

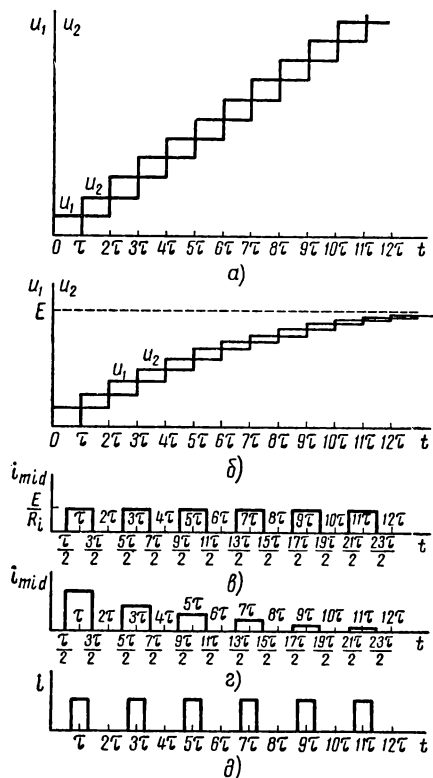


Рис. 11.16. Переходные процессы в линии при  $R_n > W$  и  $R_i > W$

фики, изображенные на рис. 11.16, б, справедливы также при конечных значениях  $R_i > W$  и  $R_n > W$ . При этом изменяются лишь максимальные значения входного и выходного напряжений.

Наличие многократного отражения волн свидетельствует о том, что при  $R_i = \infty$ , как и при  $R_i = 0$ , разомкнутой линии присущи колебательные свойства, проявляющиеся в периодическом изменении токов во всех сечениях (кроме  $l = 0$  и  $l = l_0$ ). Рассмотрим, например, изменение тока в среднем сечении линии ( $l = \frac{l_0}{2}$ ).

Ток  $i_{\text{mid}}$  в среднем сечении линии с учетом соотношений (11.100) и (11.101) равен:

$$\text{при } t=0 \quad i_{\text{mid}}=0,$$

$$\text{при } t=\frac{\tau}{2} \quad i_{\text{mid}}=i_{\text{пад}}=\frac{E}{R_i},$$

$$\text{при } t=\frac{3}{2}\tau \quad i_{\text{mid}}=i_{\text{пад}}+i_{\text{отр}}=0,$$

$$\text{при } t=\frac{5}{2}\tau \quad i_{\text{mid}}=i_{\text{пад}}+i_{\text{отр}}+i'_{\text{отр}}=\frac{E}{R_i},$$

$$\text{при } t=\frac{7}{2}\tau \quad i_{\text{mid}}=i_{\text{пад}}+i_{\text{отр}}+i'_{\text{отр}}+i''_{\text{отр}}=0 \quad \text{и т. д.}$$

В промежуточные моменты времени ток остается неизменным.

Характер изменения тока для этого случая показан на рис. 11.16, в. Из рис. 11.16, в видно, что период колебаний  $T=2\tau=2\frac{l_0}{v_0}$ , т. е. линия получается полуволновой  $\left(l_0=\frac{v_0 T}{2}=\frac{\lambda_0}{2}\right)$ .

Периодический процесс в среднем сечении линии имеет характер прямоугольных колебаний. При этом длительность импульсов тока равна половине периода. Нетрудно видеть, что в сечениях, более близких к концу линии  $\left(l < \frac{l_0}{2}\right)$ , длительность импульсов тока меньше половины периода, который остается неизменным (рис. 11.16, д). В сечениях же, более близких к началу линии  $\left(l > \frac{l_0}{2}\right)$ , длительность импульсов больше половины периода.

Таким образом, в общем случае периодический процесс в линии имеет характер последовательности прямоугольных импульсов той или иной длительности с периодом  $T=2\tau=2\frac{l_0}{v_0}$ . Эта последовательность импульсов может быть представлена в виде суммы гармонических составляющих с периодами

$$T_1=2\frac{l_0}{v_0}, \quad T_2=\frac{T_1}{2}=\frac{l_0}{v_0}, \quad \dots, \quad T_k=\frac{T_1}{k}=\frac{2}{k}\frac{l_0}{v_0}, \quad \dots \quad (11.102)$$

Отсюда следует, что линия, разомкнутая с обоих концов, также является многоволновой колебательной системой.

Рассмотренные колебания получаются в линии без потерь при коэффициенте отражения на входе линии, равном единице. В линии же с потерями и при конечном значении внутреннего сопротивления источника ( $R_i > W$ ) или сопротивления нагрузки ( $R_n > W$ ) колебания становятся затухающими (рис. 11.16, з). Здесь, как и прежде, не принимается во внимание, что ток затухает не до нуля, а до конечной величины.

### 3. Переходные процессы в разомкнутой линии при $R_i = W$

Рассмотрим переходные процессы в разомкнутой линии без потерь, согласованной на входе с источником ( $R_i = W$ ). В такой линии происходит только однократное отражение волн на выходе, и переходные процессы ограничены во времени.

При включении источника постоянной э. д. с.  $E$  в момент времени  $t = 0$  в линии возникают бегущие волны

$$u_{\text{пад}} = \frac{E}{2}, \quad i_{\text{пад}} = \frac{u_{\text{пад}}}{W} = \frac{E}{2W}. \quad (11.103)$$

В момент времени  $t = \tau = \frac{l_0}{v_0}$  волны  $u_{\text{пад}}$  и  $i_{\text{пад}}$  достигают конца линии и вызывают отраженные волны

$$u_{\text{отр}} = u_{\text{пад}} = \frac{E}{2}, \quad i_{\text{отр}} = -i_{\text{пад}} = -\frac{E}{2W}. \quad (11.104)$$

При этом выходные напряжение и ток соответственно равны:

$$u_2 = u_{\text{пад}} + u_{\text{отр}} = E, \quad i_2 = i_{\text{пад}} + i_{\text{отр}} = 0.$$

Рис. 11.17. Переходные процессы в разомкнутой линии, согласованной с источником

В момент времени  $t = 2\tau$  волны  $u_{\text{отр}}$  и  $i_{\text{отр}}$  достигают входа линии, и входные напряжение и ток становятся равными

$$u_1 = u_{\text{пад}} + u_{\text{отр}} = E, \quad i_1 = i_{\text{пад}} + i_{\text{отр}} = 0.$$

В дальнейшем напряжения и токи не изменяются.

Графики изменения напряжений и токов для этого случая показаны на рис. 11.17.

Полученный результат можно объяснить следующим образом. В течение времени от 0 до  $\tau$  линия заряжается до напряжения  $\frac{E}{2}$ . В течение времени от  $\tau$  до  $2\tau$  линия заряжается от напряжения  $\frac{E}{2}$  до напряжения  $E$ , причем этот заряд происходит от конца линии к ее началу. В течение всего времени заряда на входе линии протекает зарядный ток  $\frac{E}{2W}$ , который становится равным нулю по окончании заряда.

Следует обратить внимание на то, что входной ток имеет форму одиночного прямоугольного импульса длительностью  $\tau_{\text{и}} = 2\tau = \frac{2l_0}{v_0}$ . Такую же форму имеет напряжение на внутреннем сопротивлении источника. Если источник э. д. с. не имеет внутреннего

сопротивления, то сопротивление  $R_i = W$  можно имитировать отдельным сопротивлением  $R = W$ . При этом с сопротивления  $R$  можно снять напряжение в виде прямоугольного импульса.

Описанный способ используется для формирования последовательности прямоугольных импульсов. При этом обычную линию заменяют искусственной длинной линией, в которой скорость распространения волн меньше, а длительность импульсов  $\tau_i = \frac{2l_0}{v_0}$  больше, чем в обычной линии. Для получения последовательности импульсов служит автоматический электронный переключатель, с помощью которого линия периодически заряжается и разряжается. При этом формируется последовательность импульсов с частотой коммутации линии.

#### 4. Переходные процессы при $R_n < W$

Выше было показано, что характер переходных процессов в линии определяется условиями отражения волн на выходе и на входе.

Это обстоятельство позволяет использовать предыдущие выводы для рассмотрения переходных процессов в линии при  $R_n < W$ . Следует лишь учесть, что в случае короткого замыкания (или при  $R_n < W$ ) условия отражения волны тока получаются такими же, как и условия отражения волны напряжения в разомкнутой линии (или при  $R_n > W$ ). Точно так же условия отражения волны напряжения в короткозамкнутой линии (или при  $R_n < W$ ) и условия отражения волны тока в разомкнутой линии (или при  $R_n > W$ ) совпадают. Подобные условия получаются и на входе линии.

Отсюда следует, что при включении источника постоянной э. д. с. с внутренним сопротивлением  $R_i \gg W$  ( $R_i = \infty$ ) на входе короткозамкнутой линии переходные процессы описываются кривыми, имеющими вид кривых на рис. 11.15. При этом кривые токов описывают изменение напряжений, а кривые напряжений — изменение токов.

Аналогично кривые на рис. 11.16, *а* и *б* описывают изменение токов, а кривые на рис. 11.16, *в*, *г* и *д* — изменение напряжений в короткозамкнутой линии при включении постоянной э. д. с. с внутренним сопротивлением  $R_i = 0$ .

Кривые же на рис. 11.17, *а* и *б* описывают изменение токов, а кривая на рис. 11.17, *в* — изменение напряжения в короткозамкнутой линии, согласованной на входе ( $R_i = W$ ).

При этом рис. 11.15, *б* и *д* и 11.16, *б* и *г* относятся, как и прежде, к линиям с потерями, а остальные рисунки — к линиям без потерь. Рис. 11.15, *б* и *д* и 11.16, *г* относятся также к линиям без потерь (или с потерями) при  $0 < R_n < W$ .

При замене на перечисленных рисунках  $u$  на  $i$  и  $i$  на  $u$  следует учитывать изменение масштаба по осям ординат.

## 5. Переходные процессы при включении источника синусоидальной э.д.с.

При изучении переходных процессов в случае включения источника синусоидальной э. д. с. следует рассматривать изменение амплитуд напряжений и токов, получающееся в результате сложения многократно отраженных волн. Как и при включении источника постоянной э. д. с., изменение амплитуд определяется коэффициентами отражения на входе и на выходе, которые имеют те же значения, что и для волн постоянного напряжения и тока.

Последнее утверждение справедливо тогда, когда внутреннее сопротивление источника и сопротивление нагрузки не имеют реактивных составляющих. Именно такие сопротивления и рассматривались выше. Предыдущие выводы могут быть обобщены на случай включения источника синусоидальной э. д. с. При подобном обобщении полученные ранее графики изменения напряжений и токов при включении источника синусоидальной э. д. с. описывают изменение амплитуд напряжений и токов. Однако при этом следует иметь в виду, что волны постоянных напряжений и токов не изменяются по фазе (точнее говоря, не изменяются по знаку) при распространении в линии. Волны же синусоидальных напряжений и токов изменяются по фазе при распространении в линии. Поэтому характер переходных процессов при включении источника синусоидальной э. д. с. зависит от длины линии, чего не наблюдается при включении источника постоянной э. д. с.

В качестве примера рассмотрим включение источника синусоидальной э. д. с. с амплитудой  $E_m$  в линии, имеющей нагрузку  $R_n > W$ , при  $l_0 = \frac{\lambda_0}{2}$  и  $l_0 = \frac{\lambda_0}{4}$ . Ограничимся при этом анализом изменения выходного напряжения в линии.

Пусть длина линии  $l_0 = \frac{\lambda_0}{2}$ , а внутреннее сопротивление источника  $R_i = 0$ . Волна, отраженная на конце линии, проходя до входа линии путь  $l_0 = \frac{\lambda_0}{2}$ , изменяется по фазе на угол  $\pi$ . Отражаясь на входе линии, эта волна претерпевает скачок фазы, равный  $\pi$ . Вторично отраженная волна, распространяясь к концу линии, снова проходит путь  $l_0 = \frac{\lambda_0}{2}$ . При этом опять происходит изменение фазы волны на угол  $\pi$ .

Таким образом, в результате описанного процесса волна претерпевает суммарное изменение фазы, равное  $3\pi$  (что эквива-

лентно фазовому сдвигу на угол  $\pi$ ). Поэтому вторично отраженная волна складывается на конце линии в противофазе с падающей (первичной) волной. При этом происходит вычитание амплитуд указанных волн.

Заметим, что при включении источника постоянной э. д. с. с таким же внутренним сопротивлением  $R_i = 0$  тоже происходит вычитание напряжений на конце линии в момент  $t = 3\tau$  (см. рис. 11.15, д). Следовательно, график рис. 11.15, д аналогичен графику изменения амплитуды выходного напряжения при включении источника синусоидальной э. д. с. График изменения выходного напряжения для этого случая показан на рис. 11.18, а.

Рассмотрим переходный процесс в линии длиной  $l_0 = \frac{\lambda_0}{4}$  при  $R_i = 0$ .

Волны, отраженные на конце линии, проходя путь

$2l_0 = \frac{\lambda_0}{2}$  до входа линии и

обратно, изменяются по фазе на угол  $\pi$ . Кроме того, при отражении на входе линии также происходит изменение фазы волны на угол  $\pi$ . Таким образом, к концу линии вторично отраженная волна приходит с фазовым сдвигом  $2\pi$ , что эквивалентно отсутствию изменения фазы. Следовательно, на конце линии происходит сложение амплитуд вторично отраженной и падающей (первичной) волн. Аналогичное сложение напряжений на

выходе линии происходит и при включении источника постоянной э. д. с. с внутренним сопротивлением  $R_i > W$  (см. рис. 11.16, б).

На основании этих рассуждений приходим к выводу, что при включении источника синусоидальной э. д. с. изменение длины линии от значения  $l_0 = \frac{\lambda_0}{2}$  до значения  $l_0 = \frac{\lambda_0}{4}$  приводит к такому же

изменению характера переходного процесса, как и изменение граничных условий при неизменной длине линии. В последнем случае,

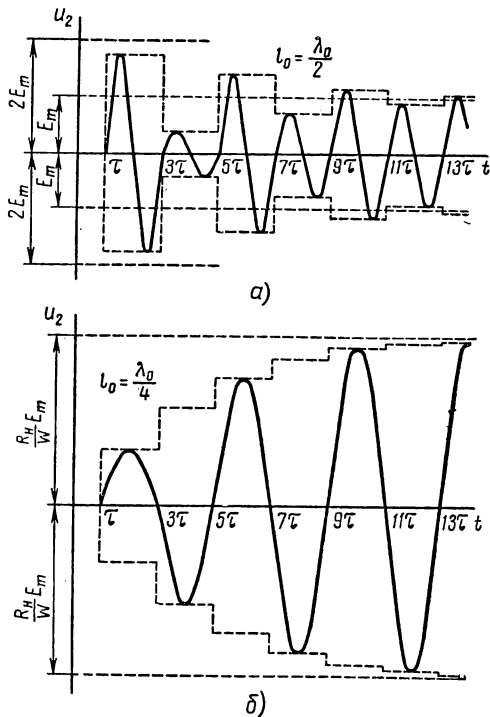


Рис. 11.18. Переходные процессы в линии при включении источника синусоидальной э.д.с.



при  $l_0 = \frac{\lambda_0}{4}$  и  $\dot{R}_i = 0$ , изменение амплитуды выходного напряжения описывается графиком, аналогичным графику изменения напряжения  $u_2$  на рис. 11.16, б. При пользовании этим графиком следует, однако, учитывать фактическое значение амплитуды выходного напряжения, соответствующее выбранным граничным условиям (и длине линии).

График изменения выходного напряжения для рассматриваемого случая показан на рис. 11.18, б. Величина максимальной (установившейся) амплитуды  $U_{m \max} = \frac{R_H}{W} E_m$  может быть найдена двумя способами. Во-первых, по уравнениям установившегося процесса (8.74) или (8.75) при  $\beta_0 l_0 = \frac{\pi}{2}$ . Во-вторых, путем суммирования многократно отраженных волн:

$$\begin{aligned} U_{m \max} &= E_m + pE_m + pE_m + p^2E_m + p^2E_m + p^3E_m + \dots = \\ &= E_m (1 + p) (1 + p + p^2 + \dots) = \frac{1+p}{1-p} E_m. \end{aligned}$$

Подставляя сюда значение  $p = \frac{R_H - W}{R_H + W}$ , получаем окончательно:

$$U_{m \max} = \frac{R_H}{W} E_m. \quad (11.105)$$

В общем случае, когда на входе линии без потерь произвольной длины  $l_0$  и с произвольной нагрузкой  $\dot{Z}_H$  включается источник синусоидальной э. д. с.  $\dot{E}_m$  с внутренним сопротивлением  $R_i = 0$ , изменение амплитуды выходного напряжения может быть найдено прежним способом. Складывая комплексные амплитуды падающей, первично отраженной, вторично отраженной волн и т. д., находим комплексную амплитуду выходного напряжения:

$$\text{при } t = \tau = \frac{l_0}{v_0} \quad \dot{U}_{m1} = \dot{E}_m e^{-j\beta_0 l_0} + p \dot{E}_m e^{-j\beta_0 l_0},$$

$$\text{при } t = 3\tau \quad \dot{U}_{m2} = \dot{U}_{m1} - p \dot{E}_m e^{-j3\beta_0 l_0} - p^2 \dot{E}_m e^{-j3\beta_0 l_0},$$

$$\text{при } t = 5\tau \quad \dot{U}_{m3} = \dot{U}_{m2} + p^2 \dot{E}_m e^{-j5\beta_0 l_0} + p^3 \dot{E}_m e^{-j5\beta_0 l_0} \text{ и т. д.}$$

Запишем установившееся значение амплитуды выходного напряжения:

$$\begin{aligned} \dot{U}_m &= \dot{E}_m (e^{-j\beta_0 l_0} + p e^{-j\beta_0 l_0} - p e^{-j3\beta_0 l_0} - p^2 e^{-j3\beta_0 l_0} + \\ &+ p^2 e^{-j5\beta_0 l_0} + p^3 e^{-j5\beta_0 l_0} + \dots) = \dot{E}_m e^{-j\beta_0 l_0} (1 + p) \times \\ &\times (1 - p e^{-j2\beta_0 l_0} + p^2 e^{-j4\beta_0 l_0} - p^3 e^{-j6\beta_0 l_0} + \dots), \end{aligned}$$

или

$$\dot{U}_m = \frac{(1+p) e^{-j\beta_0 l_0}}{1 + p e^{-j2\beta_0 l_0}} \dot{E}_m. \quad (11.106)$$

Формула (11.105) является частным случаем формулы (11.106). Из формулы (11.106) после несложных преобразований может быть получено уравнение установившегося процесса (8.74).

При выключении источника синусоидальной э. д. с. в линии происходит ступенчатый спад до нуля амплитуды напряжения на нагрузке. Характер этого спада может быть определен аналогичным способом путем сложения многократно отраженных волн, возникающих при выключении источника э. д. с. Характер изменения амплитуды напряжения при выключении источника э. д. с. можно также определить путем вычитания амплитуды напряжения при включении источника э. д. с. из установившегося значения амплитуды напряжения, которое было на нагрузке в момент выключения источника.

# Г Л А В А 12

## ПРОХОЖДЕНИЕ СИГНАЛОВ ЧЕРЕЗ ЛИНЕЙНЫЕ ЦЕПИ

### § 12.1. ПРОХОЖДЕНИЕ ПРОИЗВОЛЬНЫХ СИГНАЛОВ ЧЕРЕЗ ЛИНЕЙНЫЕ ЦЕПИ

#### 1. Методы анализа

При анализе прохождения произвольных сигналов через линейные цепи могут использоваться оба основных метода исследования процессов в цепях — временной и спектральный. Однако возможности этих методов неодинаковы. Выбор между ними должен производиться в зависимости от условий поставленной задачи. Часто бывает затруднено аналитическое описание сигналов. В этом случае

ограничиваются возможностями, которые предоставляются спектральным методом.

Временной метод анализа прохождения сигналов через цепи позволяет непосредственно определять форму сигнала на выходе цепи. При этом используется обычно операторный метод решения дифференциальных уравнений, описывающих процесс в цепи при прохождении через

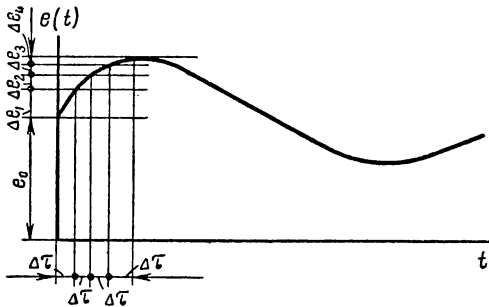


Рис. 12.1. Представление сигнала суммой ступенчатых функций

нее заданного сигнала. Однако при достаточно сложных сигналах даже применение операторного метода, в том виде, как он описан в предыдущей главе, не приносит существенного облегчения в решении задачи. Если сигналы на входе или на выходе цепи описываются нестандартными функциями, для которых не приводятся их изображения в справочниках, то решение задачи усложняется. В подобных случаях анализ может быть упрощен, если воспользоваться понятием переходных характеристик (11.6) — (11.8). При этом определение тока в цепи или выходного напряжения производится с помощью интеграла Дюамеля, являющегося частным случаем теоремы свертывания, которая рассматривается в курсе математики.

В основе физического смысла интеграла Дюамеля лежит представление сигнала в виде суммы ступенчатых функций (11.1) и (11.2). Разбивка произвольного сигнала  $e(t)$  на ряд скачков показана на рис. 12.1. Следует заметить, что представление сигнала в виде суммы скачков используется не только как математическая операция. На практике используются такие виды связи, при которых вместо сигнала передаются его дискретные значения в отдельные моменты времени. Это эквивалентно замене сигнала ступенчатыми функциями, как на рис. 12.1 \*.

В соответствии с рис. 12.1 сигнал  $e(t)$  в произвольный момент времени  $t = n\Delta\tau$  может быть представлен в виде суммы скачков:

$$e(t) = e(0) + \Delta e_1(t - \Delta\tau) + \Delta e_2(t - 2\Delta\tau) + \dots + \Delta e_n(t - n\Delta\tau).$$

Если определению подлежит ток в цепи  $i(t)$  или выходное напряжение  $u(t)$ , то согласно выражениям (11.7), (11.8), учитывая сдвиг переходных характеристик на время  $\tau = k\Delta\tau$ , находим:

$$i(t) = e(0)Y(t) + \Delta e_1Y(t - \Delta\tau) + \Delta e_2Y(t - 2\Delta\tau) + \dots + \Delta e_nY(t - n\Delta\tau),$$

$$u(t) = e(0)K(t) + \Delta e_1K(t - \Delta\tau) + \Delta e_2K(t - 2\Delta\tau) + \dots + \Delta e_nK(t - n\Delta\tau),$$

или

$$i(t) = e(0)Y(t) + \sum_{k=1}^n \frac{\Delta e_k}{\Delta\tau} Y(t - k\Delta\tau) \Delta\tau,$$

$$u(t) = e(0)K(t) + \sum_{k=1}^n \frac{\Delta e_k}{\Delta\tau} K(t - k\Delta\tau) \Delta\tau.$$

Здесь под знаком суммы произведено деление и умножение на  $\Delta\tau$  для последующего перехода к интегралу. Если шаг квантования  $\Delta\tau$  устремить к нулю, то число шагов  $n = \frac{t}{\Delta\tau}$  станет бесконечно большим. Тогда полученные суммы переходят в интегралы с нулевым нижним пределом и верхним пределом  $t = n\Delta\tau$ . При этом  $\Delta\tau = d\tau$ ,  $k\Delta\tau = \tau$  и

$$\lim_{\Delta\tau \rightarrow 0} \frac{\Delta e_k}{\Delta\tau} = \frac{de(\tau)}{d\tau} = e'(\tau).$$

Таким образом, получаем соответствующие интегралы Дюамеля:

$$i(t) = e(0)Y(t) + \int_0^t e'(\tau)Y(t - \tau)d\tau,$$

$$u(t) = e(0)K(t) + \int_0^t e'(\tau)K(t - \tau)d\tau. \quad (12.1)$$

---

\* При указанном способе передачи сигналов с целью повышения помехоустойчивости дискретные значения сигнала округляются до ближайшего значения  $k\Delta e_0$ , где  $k$  — целое число,  $\Delta e_0$  — заданная фиксированная величина. Такая разбивка сигналов называется квантованием ( $\Delta e_0$  — уровень квантования).

Если производить анализ прохождения сигнала не временным, а спектральным методом, то выходное напряжение, например, может быть определено к комплексной форме через комплексный коэффициент передачи  $K(\omega)$ , т. е. через частотную характеристику  $K(\omega)$  и фазовую характеристику  $\Theta(\omega)$ .

Поскольку то же выходное напряжение  $u(t)$ , описываемое вторым уравнением (12.1), выражается через переходный коэффициент передачи  $K(t)$ , отсюда следует, что между переходной характеристикой  $K(t)$  и спектральными характеристиками цепи  $K(\omega)$ ,  $\Theta(\omega)$  существует определенная связь. Эта связь рассматривается ниже.

При действии произвольного сигнала на входе цепи непосредственное определение тока или выходного напряжения через спектральные характеристики не получается проще, чем их нахождение по уравнениям (12.1). Поэтому при спектральном методе анализа прохождения сигналов ограничиваются выбором определенной формы спектральных характеристик в полосе пропускания цепи, в которой располагается спектр сигнала. При таком выборе следует знать условия, при соблюдении которых отсутствуют искажения сигналов. Эти условия приведены в последнем пункте настоящего параграфа.

## **2. Связь между характеристиками линейной цепи**

Связь между переходными и спектральными характеристиками определяется свойствами самой цепи и не должна зависеть от вида сигнала, проходящего через цепь. Поскольку форма сигнала при определении связи характеристик не имеет значения, а переходная характеристика (11.9) определена при входном сигнале в виде ступенчатой функции (11.1), рассмотрим простейший сигнал в виде единичного скачка (11.3). Тогда выходной сигнал  $u(t)$  определяется непосредственно значением переходного коэффициента передачи:

$$u(t) = K(t). \quad (12.2)$$

Найдем этот же сигнал на выходе цепи, воспользовавшись спектральным методом. С этой целью определим спектральную функцию единичного скачка.

Спектр единичного скачка имеет существенную особенность. Хотя этот спектр является сплошным, но в него входит одна дискретная спектральная составляющая. Такой составляющей является постоянная составляющая, равная  $\frac{1}{2}$ . Действительно, согласно формулам (10.1), (10.2) постоянная составляющая единичного

скачка на некотором конечном интервале  $\left(-\frac{T}{2}, \frac{T}{2}\right)$  равна

$$A_0 = \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} 1(t) dt = \frac{1}{T} \int_0^{\frac{T}{2}} dt = \frac{1}{2}.$$

Эта величина не зависит от интервала и остается равной  $\frac{1}{2}$  при  $T \rightarrow \infty$ .

Чтобы учесть указанную особенность спектра единичного скачка, найдем сначала спектральную функцию вспомогательного сигнала

$$e_{\frac{1}{2}}(t) = 1(t) - \frac{1}{2} = \begin{cases} -\frac{1}{2} & \text{при } t < 0, \\ +\frac{1}{2} & \text{при } t \geq 0. \end{cases} \quad (12.3)$$

Сигнал  $e_{\frac{1}{2}}(t)$  имеет обычный сплошной спектр, так как он отличается от спектра единичного скачка отсутствием постоянной составляющей. Однако этот сплошной спектр не может быть найден непосредственно по формуле (10.7), поскольку при  $u(t) = e_{\frac{1}{2}}(t)$  (как и при  $u(t) = 1(t)$ ) интеграл (10.7) расходится. Поэтому рассмотрим еще одну вспомогательную функцию, для которой интеграл (10.7) сходится:

$$e_{\sigma}(t) = e_{\frac{1}{2}}(t) e^{-\sigma t},$$

где  $\sigma$  — вещественная положительная величина при  $t \geq 0$  и отрицательная вещественная величина при  $t < 0$ .

Очевидно, что  $\lim_{\sigma \rightarrow 0} e_{\sigma}(t) = e_{\frac{1}{2}}(t)$ .

Подставив сигнал  $e_{\sigma}(t)$  в формулу (10.7), найдем его спектральную функцию:

$$\dot{S}_{\sigma}(\omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e_{\frac{1}{2}}(t) e^{-\sigma t} e^{-j\omega t} dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e_{\frac{1}{2}}(t) e^{-(\sigma + j\omega)t} dt.$$

Учитывая значения функции (12.3), это выражение можно переписать следующим образом:

$$\dot{S}_{\sigma}(\omega) = -\frac{1}{4\pi} \int_{-\infty}^0 e^{-(\sigma + j\omega)t} dt + \frac{1}{4\pi} \int_0^{\infty} e^{-(\sigma + j\omega)t} dt.$$

Вычислив два последних интеграла с учетом значений  $\sigma|_{t < 0} < 0$ ,  $\sigma|_{t > 0} > 0$ , находим окончательно:

$$\dot{S}_{\sigma}(\omega) = \frac{1}{2\pi(\sigma + j\omega)}.$$

Отсюда находим спектральную функцию вспомогательного сигнала  $e_{\frac{1}{2}}(t)$ :

$$\dot{S}_{\frac{1}{2}}(\omega) = \lim_{\sigma \rightarrow 0} \dot{S}_{\sigma}(\omega) = \frac{1}{j2\pi\omega}.$$

Если на входе цепи с коэффициентом передачи  $\dot{K}(\omega)$  действует сигнал  $e_{\frac{1}{2}}(t)$ , то спектральная функция выходного сигнала  $u_{\frac{1}{2}}(t)$  получается равной

$$\dot{S}(\omega) = \dot{S}_{\frac{1}{2}}(\omega) \dot{K}(\omega) = \frac{\dot{K}(\omega)}{j2\pi\omega}.$$

Подставив это значение спектральной функции в формулу (10.6), находим выходной сигнал

$$u_{\frac{1}{2}}(t) = \frac{1}{j2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\dot{K}(\omega)}{\omega} e^{j\omega t} d\omega,$$

или

$$u_{\frac{1}{2}}(t) = \frac{1}{j2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{K(\omega)}{\omega} e^{j[\omega t + \Theta(\omega)]} d\omega,$$

так как  $\dot{K}(\omega) = K(\omega) e^{j\Theta(\omega)}$ .

Учитывая, что  $e^{j(\omega t + \Theta)} = \cos(\omega t + \Theta) + j \sin(\omega t + \Theta)$ , представим найденный интеграл в виде

$$\begin{aligned} u_{\frac{1}{2}}(t) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{K(\omega)}{\omega} \sin[\omega t + \Theta(\omega)] d\omega - \\ &- j \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{K(\omega)}{\omega} \cos[\omega t + \Theta(\omega)] d\omega. \end{aligned}$$

Так как сигнал  $u_{\frac{1}{2}}(t)$  является вещественной функцией, то полученное уравнение распадается на два:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{K(\omega)}{\omega} \cos[\omega t + \Theta(\omega)] d\omega = 0, \quad (12.4)$$

$$u_{\frac{1}{2}}(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{K(\omega)}{\omega} \sin[\omega t + \Theta(\omega)] d\omega.$$

В последнем равенстве подынтегральная функция является четной, и его можно переписать таким образом:

$$u_{\frac{1}{2}}(t) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{K(\omega)}{\omega} \sin[\omega t + \Theta(\omega)] d\omega.$$

Теперь осталось перейти к выходному сигналу  $u(t)$  при воздействии на входе цепи единичного скачка  $1(t)$ . Учитывая значение вспомогательной функции (12.3), находим

$$1(t) = \frac{1}{2} + e_{\frac{1}{2}}(t).$$

Отсюда следует, что

$$u(t) = \frac{1}{2} K(0) + u_{\frac{1}{2}}(t),$$

где  $K(0) = \dot{K}(\omega)|_{\omega=0}$  — коэффициент передачи цепи на нулевой частоте, соответствующей постоянной составляющей.

Подставив значение выходного сигнала  $u_{\frac{1}{2}}(t)$  получим выходной сигнал при воздействии на входе цепи единичного скачка  $1(t)$ :

$$u(t) = \frac{1}{2} K(0) + \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{K(\omega)}{\omega} \sin[\omega t + \Theta(\omega)] d\omega. \quad (12.5)$$

Учитывая равенство (12.2), последнее выражение можно переписать в виде уравнения связи переходной и спектральных характеристик:

$$K(t) = \frac{1}{2} K(0) + \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{K(\omega)}{\omega} \sin[\omega t + \Theta(\omega)] d\omega. \quad (12.6)$$

Соотношение (12.4) наводит на мысль о том, что существует связь также между частотными и фазовыми характеристиками цепи. Однако непосредственно из равенства (12.4) указанная связь не может быть установлена, так как она является тождеством типа  $0 = 0$  (поскольку подынтегральная функция в этом равенстве нечетная).

Тем не менее зависимость между частотными и фазовыми характеристиками действительно существует и может быть найдена из уравнения (12.6). Учитывая, что для любой цепи  $K(t) = 0$  при  $t < 0$ , введем новую переменную  $\tau = -t > 0$ . Тогда из соотношения (12.6) непосредственно вытекает уравнение связи частотной и фазовой характеристик:

$$\frac{1}{2} K(0) + \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{K(\omega)}{\omega} \sin[\Theta(\omega) - \omega\tau] d\omega = 0.$$

Это равенство должно удовлетворяться при любых положительных значениях  $\tau$ . Поэтому можно упростить полученное выражение, продифференцировав его по  $\tau$ . При этом получаем уравнение связи между спектральными характеристиками цепи в форме, удобной для расчетов:

$$\int_0^{\infty} K(\omega) \cos[\Theta(\omega) - \omega\tau] d\omega = 0. \quad (12.7)$$



Этому уравнению связи можно придать и другую форму. Учítывая, что

$$\dot{K}(\omega) = Ke^{j\Theta} = K \cos \Theta + jK \sin \Theta = M(\omega) + jN(\omega), \quad (12.8)$$

найдем связь между четной частью

$$M(\omega) = K(\omega) \cos \Theta(\omega) \quad (12.9)$$

и нечетной частью

$$N(\omega) = K(\omega) \sin \Theta(\omega) \quad (12.10)$$

коэффициента передачи.

Развертывая значение косинуса разности двух аргументов в уравнении (12.7) и используя обозначения (12.9), (12.10), находим

$$\int_0^{\infty} M(\omega) \cos \omega \tau d\omega = - \int_0^{\infty} N(\omega) \sin \omega \tau d\omega. \quad (12.11)$$

Это уравнение связи спектральных характеристик цепи при некоторых практических расчетах является более удобным.

Существенно отметить, что наличие связи между частотной и фазовой характеристиками цепи свидетельствует о невозможности независимого выбора (задания) этих характеристик. Если поставлена, например, задача синтеза цепи с определенной частотной характеристикой, то это значит, что является определенной и фазовая характеристика, которую нельзя задавать независимо от частотной характеристики. Это обстоятельство в равной мере следует учитывать и при задании четной или нечетной части коэффициента передачи.

Однако следует иметь в виду, что интегральные уравнения (12.7) и (12.11) не устанавливают однозначной связи между характеристиками цепи. Если, например, задана частотная характеристика, то при решении уравнения (12.7) могут быть получены различные фазовые характеристики. Такие характеристики могут быть реализованы в разных схемах, имеющих одинаковую (заданную) частотную характеристику.

Среди различных фазовых характеристик цепей с одинаковой частотной характеристикой может быть найдена характеристика, обеспечивающая минимальный фазовый сдвиг. Цепи с такими характеристиками называются цепями минимально-фазового типа. Признаком цепей минимально-фазового типа является отсутствие нулей и полюсов их коэффициента передачи  $\dot{K}(j\omega) = \dot{K}(p)$  в правой полуплоскости комплексного переменного  $p = \sigma + j\omega$ . Другими словами, у таких цепей все корни  $\sigma_i + j\omega_i$  числителя и знаменателя коэффициента передачи  $\dot{K}(p)$  не должны иметь положительных вещественных частей ( $\sigma_i \leq 0$ ).

### 3. Условия отсутствия искажений

В гл. 1 было показано, что вследствие изменения амплитуд спектральных составляющих сложные сигналы могут претерпевать частотные искажения (см. рис. 1.17). За счет же изменения начальных фаз составляющих могут быть фазовые искажения сложных сигналов (см. рис. 1.18). Выясним, при каких условиях отсутствуют частотные и фазовые искажения сигналов.

Пусть на входе цепи имеется произвольный сигнал, которому соответствует спектральная функция

$$\dot{S}_{вх}(\omega) = S_{вх}(\omega) e^{j\psi_{вх}(\omega)}.$$

Если линейная цепь характеризуется комплексным коэффициентом передачи

$$\dot{K}(\omega) = K(\omega) e^{j\Theta(\omega)},$$

то спектральная функция сигнала на выходе цепи равна

$$\dot{S}_{вых}(\omega) = S_{вых}(\omega) e^{j\psi_{вых}(\omega)} = K(\omega) S_{вх}(\omega) e^{j[\psi_{вх}(\omega) + \Theta(\omega)]}. \quad (12.12)$$

Полученное выражение позволяет выяснить, каким требованиям должны удовлетворять частотная и фазовая характеристики цепи  $K(\omega)$  и  $\Theta(\omega)$  для неискаженной передачи сигнала.

Будем считать, что информация, заключающаяся в сигнале, отображается его формой. Тогда неискаженная передача сигнала означает неизменность его формы. При этом, как отмечалось выше, допустимо лишь изменение амплитуды сигнала (см. рис. 1.15) и сдвиг его во времени (см. рис. 1.16).

Изменению амплитуды сигнала в  $K$  раз соответствует изменение спектральной плотности в то же число раз, как это непосредственно следует из определения (10.9). Сдвигу сигнала во времени (запаздыванию) на время  $\tau_0$  соответствует изменение его спектральной функции согласно соотношению (10.14).

Таким образом, при неискаженной передаче сигнала, сопровождающейся изменением его амплитуды и запаздыванием на время  $\tau_0$ , спектральная функция сигнала изменяется следующим образом:

$$\dot{S}_{вых}(\omega) = K S_{вх}(\omega) e^{j[\psi_{вх}(\omega) - \tau_0 \omega]}, \quad (12.13)$$

где  $K = \text{const}$ ,  $\tau_0 = \text{const}$ .

Сопоставляя уравнения (12.13) и (12.12), получаем условия неискаженной передачи сигнала:

$$K(\omega) = \text{const}, \quad (12.14)$$

$$\Theta(\omega) = -\tau_0 \omega. \quad (12.15)$$

Таким образом, для неискаженной передачи произвольного сигнала частотная характеристика цепи в полосе пропускания должна

описываться горизонтальной прямой линией, а фазовая характеристика — падающей прямой линией, проходящей через начало координат (рис. 12.2) \*. Фазовая характеристика при неискаженной передаче сигнала может и не проходить через начало координат, отсекая на оси ординат отрезок, кратный углу  $\pi$ , как показано на рис. 12.2 пунктирными линиями.

Действительно, сдвиг фаз всех спектральных составляющих на угол  $\Theta = 2k\pi$  не приводит ни к каким изменениям сигнала; сдвиг фаз на угол  $\Theta = (2k + 1)\pi$  означает изменение полярности сигнала без изменения его формы (рис. 12.3).

Следовательно, в наиболее общем случае фазовые искажения сложных сигналов отсутствуют,

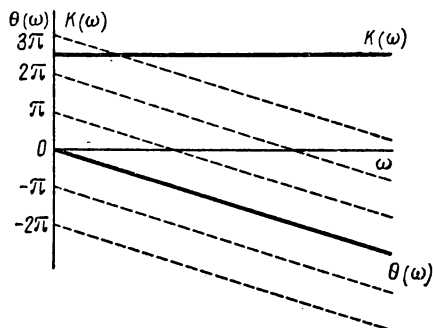


Рис. 12.2. Идеальные частотная и фазовая характеристики

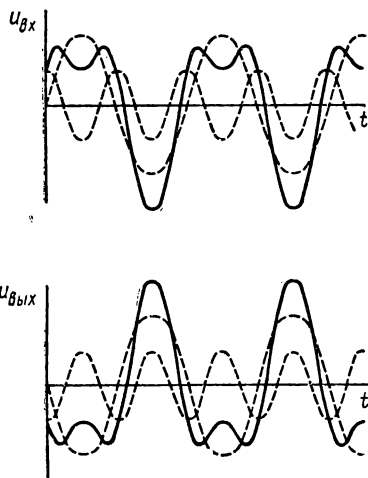


Рис. 12.3. Изменение полярности сигнала

если фазовая характеристика в полосе пропускания цепи описывается уравнением

$$\Theta(\omega) = k\pi - \tau_0\omega, \quad (k=0, \pm 1, \pm 2, \dots). \quad (12.16)$$

Согласно условиям (12.14) — (12.16) неискаженного воспроизведения сигналов к частотным и фазовым характеристикам цепей предъявляются определенные взаимно независимые требования. Однако реальные частотные и фазовые характеристики связаны между собой, и их невозможно задавать независимо друг от друга, как было показано выше.

В частности, нетрудно видеть, что условия (12.14) и (12.15) или (12.16) не могут одновременно выполняться в ограниченной полосе частот  $\omega_1 \div \omega_2$  (в полосе пропускания). Действительно, полагая что за пределами этой полосы  $K = 0$  (как в идеальном

\* Следует сравнить уравнение (12.15) с полученным из других соображений соотношением (9.115), а также с формулой (8.26).

фильтре), уравнение (12.7) можно представить в виде

$$\int_{\omega_1}^{\omega_2} \cos [(\tau_0 + \tau) \omega] d\omega = 0,$$

или

$$\sin [(\tau_0 + \tau) \omega_2] = \sin [(\tau_0 + \tau) \omega_1].$$

Это равенство не может удовлетворяться при произвольном (и переменном) значении  $\tau$ .

Таким образом, в реальных цепях может быть достигнуто только некоторое приближение к идеальным характеристикам (12.14) — (12.16).

Условие (12.14) удовлетворяется с некоторой степенью точности ограничением неравномерности частотной характеристики в полосе пропускания ( $\Delta\alpha \leq 3$  дБ или  $\Delta\alpha \leq 6$  дБ), а условие (12.16) — путем ограничения отклонения фазовой характеристики от идеальной прямой линии. Например, при прохождении через цепь телевизионных сигналов предъявляется требование, чтобы ее фазовая характеристика отклонялась в полосе пропускания от прямой линии не более чем на  $3 \div 4^\circ$ .

Следует, однако, отметить, что в ряде случаев искажения сигналов неизбежны даже при абсолютном соблюдении условий (12.14) — (12.16) в полосе пропускания. Действительно, если спектр сигнала является бесконечным, то при конечной полосе пропускания нельзя избежать искажений даже при идеальных характеристиках цепи.

Рассмотрим этот вопрос подробнее на примере идеального фильтра нижних частот. Пусть такой фильтр в полосе пропускания  $0 \div \omega_r$  имеет идеальную частотную характеристику (12.14) и идеальную фазовую характеристику (12.15). За пределами полосы пропускания его коэффициент передачи  $K(\omega)|_{\omega > \omega_r} = 0$ .

Если на входе идеального фильтра действует, например, единичная ступенчатая функция (рис. 12.4, а), то при отсутствии искажений сигнал на выходе фильтра должен иметь вид, изображенный на рис. 12.4, б. Определим теперь, какую форму имеет выходной сигнал в действительности.

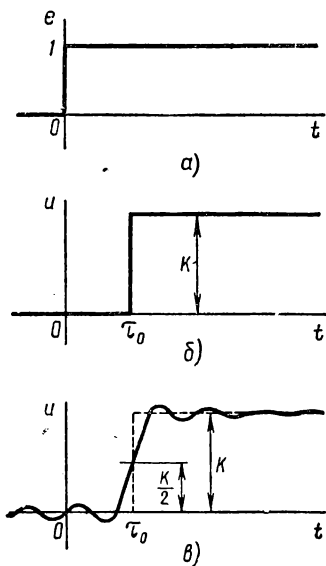


Рис. 12.4. Прохождение сигнала через идеальный фильтр нижних частот

В рассматриваемом случае выходной сигнал описывается уравнением (12.5), в котором  $K(\omega)|_{0 \leq \omega \leq \omega_r} = K$  и  $\Theta(\omega) = -\tau_0 \omega$ . С учетом ограниченности полосы пропускания получим

$$u(t) = \frac{K}{2} + \frac{K}{\pi} \int_0^{\omega_r} \frac{1}{\omega} \sin[(t - \tau_0)\omega] d\omega,$$

или

$$u(t) = \frac{K}{2} + \frac{K}{\pi} \int_0^y \frac{\sin x}{x} dx,$$

где  $x = (t - \tau_0)\omega$ ,  $y = x_r = \omega_r(t - \tau_0)$ .

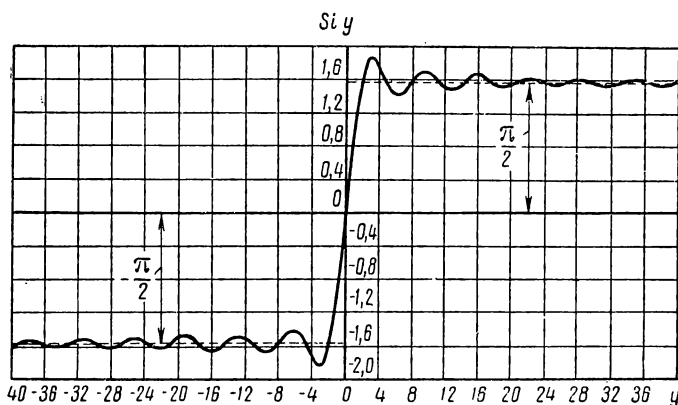


Рис. 12.5. График интегрального синуса

Интеграл, входящий в это соотношение, не выражается через элементарные функции и называется интегральным синусом:

$$\text{Si } y = \int_0^y \frac{\sin x}{x} dx.$$

Табулированные значения этого интеграла приводятся в справочниках\*, а график интегрального синуса показан на рис. 12.5.

В соответствии с принятыми обозначениями выходной сигнал может быть представлен в виде

$$u(t) = \frac{K}{2} + \frac{K}{\pi} \text{Si } \omega_r(t - \tau_0).$$

\* См., например, Е. Янке и Ф. Эмде. Таблицы функций с формулами и кривыми. Физматгиз, 1959.

Этот сигнал, построенный с учетом графика интегрального синуса (см. рис. 12.5), показан на рис. 12.4, *в*. Здесь необходимо обратить внимание на два обстоятельства.

Из сравнения графиков рис. 12.4 видно, что выходной сигнал действительно искажен по сравнению с входным сигналом, хотя характеристики фильтра являются идеальными. Это объясняется, как отмечалось выше, ограниченностью полосы пропускания идеального фильтра.

Кроме того, сигнал на выходе цепи появляется не только до момента времени  $t_0$ , но и вообще раньше появления сигнала на входе. Поскольку такое явление не может иметь места, это как раз и свидетельствует о невозможности реализации идеальных характеристик в ограниченной полосе частот.

## **§ 12.2. ПРОХОЖДЕНИЕ МОДУЛИРОВАННЫХ СИГНАЛОВ ЧЕРЕЗ ЛИНЕЙНЫЕ ЦЕПИ**

### **1. Прохождение модулированных сигналов через селективные цепи**

При рассмотрении различных селективных четырехполюсников было показано, что их частотные характеристики при соответствующем выборе параметров цепи могут с достаточной степенью точности удовлетворять условию (12.14). Что касается фазовых характеристик таких четырехполюсников (одиночного контура и др.), то их отклонение от прямой линии в пределах полосы пропускания может достигать значительной величины (почти  $30^\circ$ ). Однако, усложняя схему селективного четырехполюсника и выбирая должным образом его параметры, можно с достаточной степенью точности удовлетворить и требованию линейности (но не угла наклона!) фазовой характеристики. При выборе, например, добротности одиночного контура из условия получения заданной полосы пропускания достигается вполне определенный наклон фазовой характеристики в соответствии с уравнением (7.12). Аппроксимируя эту характеристику в полосе пропускания прямой линией и продолжая ее до пересечения с осью ординат, получаем в общем случае  $\Theta|_{\omega=0} \neq \text{кл.}$  Это противоречит условию (12.16), которое при заданной резонансной частоте  $\omega_0$  и фиксированном значении  $\Theta_0 = \Theta_{\omega=\omega_0}$  означает, что фазовая характеристика должна иметь определенный наклон.

Однако условие (12.16) является излишне жестким по отношению к модулированным сигналам. При прохождении через цепь модулированных сигналов существенным является сохранение не формы высокочастотных колебаний, а закона модуляции, который воспроизводится в форме управляющего сигнала, формируемого детектором из модулированного сигнала.

Поэтому под искажениями модулированных сигналов понимают искажения закона модуляции. Условие отсутствия фазовых искажений закона модуляции модулированных сигналов получается менее жестким, чем условие (12.16).

Найдем условия отсутствия искажения огибающей АМ-сигнала, форма которой определяет закон модуляции. Для этого рассмотрим сначала, какие изменения претерпевает АМ-сигнал при гармоническом законе модуляции. Пусть на входе имеется сигнал

$$e(t) = E_{m0} [1 + m \cos(\Omega t + \psi)] \cos \omega_0 t = E_{m0} \cos \omega_0 t + \frac{m}{2} E_{m0} \cos[(\omega_0 - \Omega)t - \psi] + \frac{m}{2} E_{m0} \cos[(\omega_0 + \Omega)t + \psi].$$

Выше было показано, что характеристики реальных селективных цепей симметричны относительно средней частоты полосы пропускания  $\omega_{cp}$ . Если цепь настроена, т. е.  $\omega_{cp} = \omega_0$ , то такие характеристики удовлетворяют условиям

$$K(-\Delta\omega) = K(\Delta\omega), \quad \Delta\Theta(-\Delta\omega) = -\Delta\Theta(\Delta\omega),$$

или

$$K(\omega_0 - \Omega) = K(\omega_0 + \Omega) = AK_0, \quad \Delta\Theta(\omega_0 - \Omega) = -\Delta\Theta(\omega_0 + \Omega) = -\Delta\Theta. \quad (12.17)$$

При этом сигнал на выходе равен

$$u(t) = U_{m0} \cos(\omega_0 t + \Theta_0) + \frac{m'}{2} U_{m0} \cos[(\omega_0 t + \Theta_0) - (\Omega t + \psi + \Delta\Theta)] + \frac{m'}{2} U_{m0} \cos[(\omega_0 t + \Theta_0) + (\Omega t + \psi + \Delta\Theta)],$$

или

$$u(t) = U_{m0} [1 + m' \cos(\Omega t + \psi + \Delta\Theta)] \cos(\omega_0 t + \Theta_0),$$

где

$$U_{m0} = K_0 E_{m0}, \quad m' = Am.$$

Следовательно, при симметричных характеристиках изменения АМ-сигнала сводятся к следующему:

- 1) начальная фаза несущей изменяется на угол  $\Theta_0$ ;
- 2) начальная фаза огибающей изменяется на угол  $\Delta\Theta$ ;
- 3) амплитуда АМ-сигнала изменяется в  $K_0$  раз;
- 4) глубина модуляции изменяется в  $A$  раз ( $A < 1$ ), или, как говорят, происходит демодуляция сигнала.

Закон модуляции в этом случае не претерпевает искажений, остается косинусоидальным, как это видно из выражения для выходного сигнала.

В случае же сложного закона модуляции, когда спектр управляющего сигнала состоит из ряда гармонических составляющих, демодуляция является причиной частотных искажений закона модуляции. При этом изменение начальных фаз огибающей для каждой из гармонических составляющих управляющего сигнала об-

условливает фазовые искажения закона модуляции. Покажем это, рассмотрев прохождение через цепь АМ-сигнала со сложным законом модуляции.

Пусть на входе цепи действует АМ-сигнал, который в соответствии с уравнением (10.41) может быть представлен в виде

$$e(t) = E_{m0} \left[ 1 + \sum_{k=0}^{\infty} m_k \cos(k\Omega t - \psi_k) \right] \cos \omega_0 t.$$

Если коэффициент передачи цепи равен

$$\dot{K}(\Delta\omega) = K(\Delta\omega) e^{j\Theta(\Delta\omega)} = K(\Delta\omega) e^{j[\Theta_0 + \Delta\Theta(\Delta\omega)]},$$

причем  $K(-\Delta\omega) = K(\Delta\omega)$  и  $\Delta\Theta(-\Delta\omega) = -\Delta\Theta(\Delta\omega)$ , то на выходе цепи получается сигнал

$$u(t) = E_{m0} \left\{ K(0) + \sum_{k=0}^{\infty} \tilde{K}(\Delta\omega) m_k \cos[k\Omega t - \psi_k + \Delta\Theta(\Delta\omega)] \right\} \cos(\omega_0 t + \Theta_0).$$

В последнем выражении форма огибающей определяется видом суммы  $\Sigma$ . Отсюда следует, что согласно предыдущим выводам форма огибающей не изменится, если выполняется условие (12.14) и удовлетворяется равенство

$$\Delta\Theta(\Delta\omega) = -k\tau_0\Omega = -\tau_0\Delta\omega,$$

или

$$\Theta(\Delta\omega) = \Theta_0 - \tau_0\Delta\omega. \quad (12.18)$$

Условие (12.18), при выполнении которого отсутствуют фазовые искажения огибающей, означает, что фазовая характеристика должна быть произвольно ориентированной прямой линией. Это условие является менее жестким в сравнении с условием (12.16) и, как было показано выше, для полосовых фильтров оно приблизительно соблюдается (при настройке фильтра на несущую частоту). Так как условие (12.18) выполняется лишь приближенно, то при жестких требованиях к величине фазовых искажений необходимо применять специальные корректирующие цепи, выравнивающие фазовую характеристику.

Если условия (12.14) и (12.18) не соблюдаются, то получаются обычные частотные и фазовые искажения огибающей АМ-сигнала (частотные и фазовые искажения закона модуляции). При этом должны соблюдаться условия симметрии (12.17).

Однако при нарушении симметрии характеристик, которое получается при расстройке селективной цепи, когда  $\omega_{cp} \neq \omega_0$  (рис. 12.6, а), наблюдается весьма интересное явление. При этом даже синусоидальная огибающая АМ-сигнала претерпевает искажения, хотя синусоидальные колебания в линейных цепях не искажаются. По определению линейных и нелинейных искажений такие



искажения могут быть названы нелинейными искажениями огибающей (закона модуляции).

Наличие нелинейных искажений огибающей в линейной цепи не противоречит природе вещей, поскольку огибающая есть мысленная кривая, а не реальный сигнал, проходящий через цепь. Сам же сигнал претерпевает в линейной цепи только линейные (частотные и фазовые) искажения.

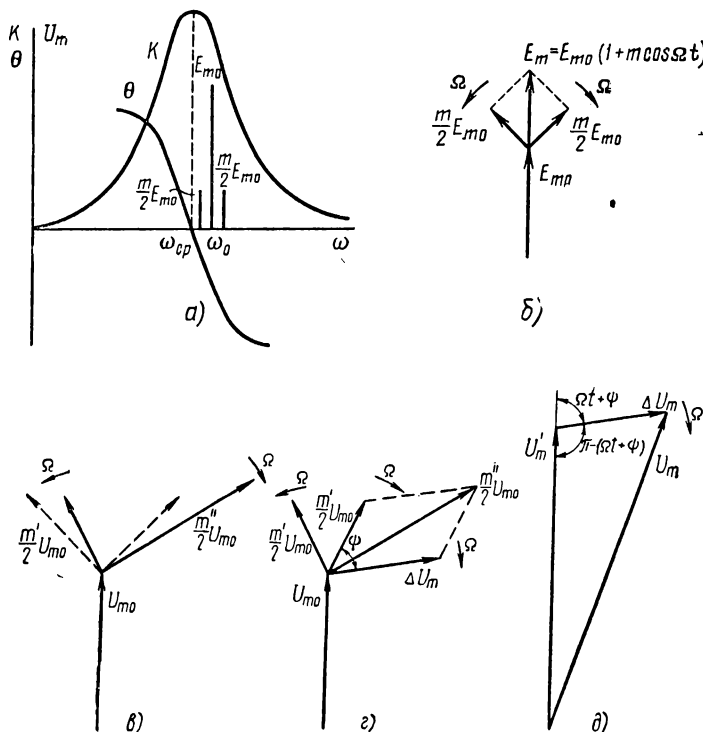


Рис. 12.6. Нелинейные искажения закона модуляции АМ-сигнала в цепи с несимметричными характеристиками

Рассмотрим возникновение нелинейных искажений закона модуляции АМ-сигнала при несимметричных характеристиках цепи. Векторная диаграмма симметричного спектра входного сигнала показана на рис. 12.6, б. На рис. 12.6, в показана векторная диаграмма искаженного спектра на выходе цепи. Здесь для сравнения пунктиром показаны первоначальные боковые составляющие, какими они были на входе цепи.

Для определения формы выходного сигнала боковая составляющая разностной, например, частоты может быть разложена на две составляющие, как показано на рис. 12.6, г. Разложение произве-

дено таким образом, чтобы одна из составляющих вектора  $\frac{m}{2} U_{m0}$  была симметрична вектору  $\frac{m'}{2} U_{m0}$  боковой составляющей суммарной частоты. При этом между составляющими вектора  $\frac{m'}{2} U_{m0}$  получается некоторый постоянный угол  $\psi$ .

Складывая симметричные боковые векторы с вектором несущей составляющей, получаем векторную диаграмму, показанную на рис. 12.6, д. Из этой диаграммы видно, что к неподвижному суммарному вектору

$$U'_m = U_{m0} (1 + m' \cos \Omega t),$$

изменяющемуся по гармоническому закону, прибавляется вращающийся вектор  $\Delta U_m$ . При этом по теореме косинусов определяется результирующий вектор

$$U_m = \sqrt{U_m'^2 + (\Delta U_m)^2 - 2U'_m \Delta U_m \cos [\pi - (\Omega t + \psi)]},$$

или

$$U_m = \sqrt{U_{m0}^2 (1 + m' \cos \Omega t)^2 + (\Delta U_m)^2 + 2U_{m0} \times \dots \times \Delta U_m (1 + m' \cos \Omega t) \cos (\Omega t + \psi)}.$$

Таким образом, на выходе расстроенной цепи с несимметричными характеристиками закон модуляции АМ-сигнала  $U_m(t)$  получается негармоническим, что и требовалось доказать.

Во избежание искажений закона модуляции при прохождении через цепь ЧМ-сигналов характеристики цепи должны удовлетворять прежним условиям (12.14) и (12.18). Однако при несоблюдении этих условий, но при симметричных характеристиках цепи искажения ЧМ-сигналов отличаются от искажений АМ-сигналов.

В случае ЧМ-сигналов нарушение закона гармонической модуляции может иметь место даже при симметричных характеристиках. Это наглядно видно из рис. 12.7, где показано изменение частоты на входе и на выходе системы при симметричной, но нелинейной фазовой характеристике. Аналогичные искажения получаются и при симметричных, но нелинейных частотных характеристиках.

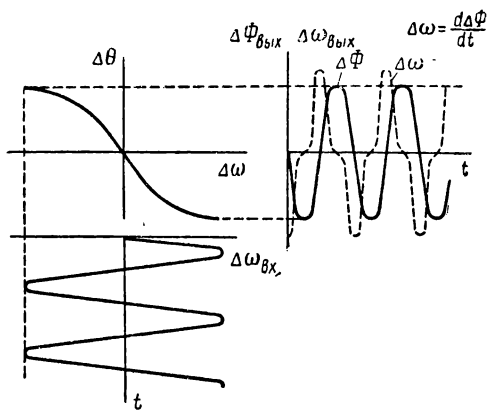


Рис. 12.7. Нелинейные искажения закона модуляции ЧМ-сигнала

Таким образом, нелинейные искажения закона модуляции ЧМ-сигналов отсутствуют только при линейных частотных и фазовых характеристиках (в полосе пропускания).

## 2. Прохождение радиопульсов через селективные цепи

Выводы, полученные при рассмотрении переходных процессов, позволяют изучить характер искажений прямоугольных радиопульсов при их прохождении через резонансный контур, а также определить параметры контура по заданной степени искажений радиопульсов.

Выше отмечалось, что начало (передний фронт) прямоугольных радиопульсов соответствует включению, а конец (задний фронт) — выключению источника синусоидальной э. д. с. Поэтому, учитывая графики рис. 11.10, можно непосредственно найти форму таких импульсов на выходе контура. Рис. 12.8, *a* изображает радиопульсы на входе контура, рис. 12.8, *б* — те же импульсы на выходе расстроенного контура, а рис. 12.8, *в* и *г* — радиопульсы на выходе настроенного контура (при разной длительности переходного процесса  $\tau$ ).

Первый вывод, который можно сделать из рассмотрения этих графиков, заключается в том, что в расстроенном контуре искажения радиопульсов получаются больше, чем в настроенном контуре. Как известно, к такому же выводу приводит и спектральный метод анализа, но в данном случае дополнительно определяется характер искажений.

Из сравнения рис. 12.8, *в* и *г* видно, что искажения формы радиопульсов получаются тем больше, чем больше длительность переходного процесса  $\tau$ . Длительность можно связать с полосой пропускания контура. Действительно, из формул (11.49) и (7.9) следует, что

$$\tau = \frac{4,6}{2\pi} \cdot \frac{1}{\Delta F},$$

или

$$\tau = \frac{0,73}{\Delta F}. \quad (12.19)$$

Отсюда видно, что время переходного процесса является величиной, обратной пропорциональной полосе пропускания контура  $\Delta F$ . Таким образом, при сужении полосы пропускания искажения радиопульсов увеличиваются, что полностью согласуется со спектральной точкой зрения.

Допустимую степень искажений можно задать отношением  $\frac{\tau}{\tau_n}$ , где  $\tau_n$  — длительность неискаженного импульса, а  $\tau$  — длительность фронта искаженного импульса, т. е. длительность пере-

ходного процесса. При этом из формулы (12.19) определяется минимальная ширина полосы пропускания при заданной степени искажений. Результаты вычислений по этой формуле при разных отношениях  $\frac{\tau}{\tau_n}$  сведены в табл. П.15.

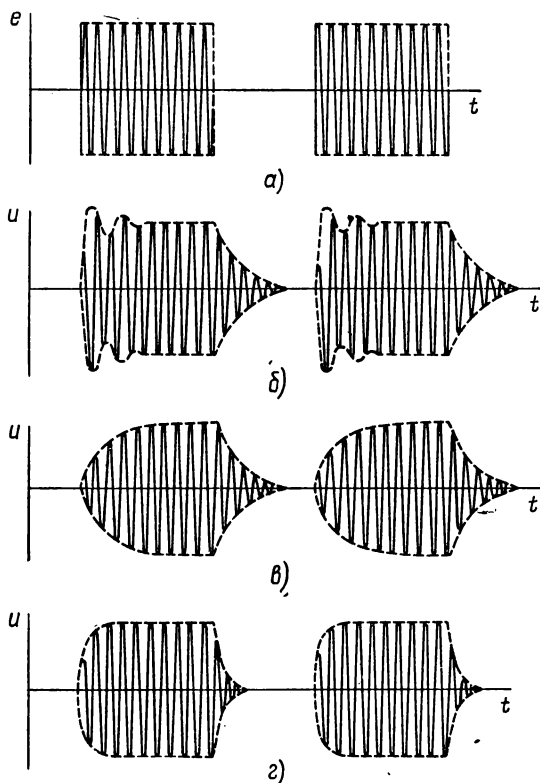


Рис. 12.8. Искажения прямоугольных радиоимпульсов в одиночном  $LC$ -контуре

Интересно сопоставить данные табл. П.15 с величиной полосы пропускания, которую необходимо обеспечить для получения допустимых искажений в соответствии со спектральной точкой зрения. Учитывая, что ширина полосы пропускания должна равняться ширине спектра радиоимпульса, которая равна удвоенной ширине видеоимпульса, получаем из табл. П.13:

$$\Delta F = \frac{6,36}{\tau_n}, \quad (12.20)$$

что соответствует величине  $\frac{\tau}{\tau_n} = 0,115$ .

Если же воспользоваться энергетическим определением ширины спектра, то из табл. П.13 получаем (учитывая, что  $\tau_3 = 0,9 \tau_n$ )

$$\Delta F = \frac{1,62}{\tau_n}, \quad (12.21)$$

что соответствует величине  $\frac{\tau}{\tau_n} = 0,45$ .

Таким образом, в зависимости от критерия, положенного в основу оценки степени искажений, полосу пропускания контура можно выбрать различным образом.

При оценке искажений радиоимпульсов и при выборе полосы пропускания наиболее объективным следует признать критерий, согласно которому задается отношение  $\frac{\tau}{\tau_n}$ . Это отношение можно выбрать вполне определенным в зависимости от конкретных условий задачи. Для более сложных сигналов при выборе полосы пропускания контура удобнее пользоваться спектральным критерием оценки степени искажений, хотя при этом характер искажений не определяется.

Искажения прямоугольных радиоимпульсов в связанных контурах могут быть оценены с помощью формулы (11.93). Из сравнения формул (11.93) и (11.49) видно, что при  $\kappa > 1$  эти искажения получаются меньше, чем в одиночном контуре, если сравниваемые системы имеют одинаковые резонансные частоты  $\omega_0$  и добротности  $Q$ . Это обусловлено большей полосой пропускания в связанных контурах.

Подобно одиночному контуру, графики переходных процессов на рис. 11.13 позволяют определить характер искажений прямоугольных радиоимпульсов в связанных контурах. При этом по заданной степени искажений можно определить параметры связанных контуров аналогично определению параметров одиночного контура.

В частности, при критической связи, когда  $\Delta F|_{\kappa=1} = 1,41 \frac{f_0}{Q}$ , из формулы (11.93) находим

$$\tau|_{\kappa=1} = \frac{1,06}{\Delta F}. \quad (12.22)$$

Аналогично при максимальной связи, когда  $\Delta F|_{\kappa=2,41} = 3,1 \frac{f_0}{Q}$ , из формулы (11.93) получаем

$$\tau|_{\kappa=2,41} = \frac{0,805}{\Delta F}. \quad (12.23)$$

Из сравнения формул (12.22), (12.23) и (12.19) видно, что в связанных контурах при  $\kappa > 1$  искажения радиоимпульсов полу-

чаются больше, чем в одиночном контуре с той же полосой пропускания. Со спектральной точки зрения это объясняется тем, что в связанных контурах при  $\kappa > 1$  частотные и фазовые характеристики являются менее линейными, чем в одиночном контуре.

Результаты, полученные в предыдущем параграфе, позволяют рассмотреть также прохождение прямоугольных радиоимпульсов через идеальный полосовой фильтр. Такой фильтр в полосе пропускания  $\omega_{r1} \div \omega_{r2}$  имеет характеристики

$$K(\omega) \Big|_{\omega_{r1} \leq \omega \leq \omega_{r2}} = K = \text{const}, \quad K(\omega) \Big|_{\substack{\omega < \omega_{r1} \\ \omega > \omega_{r2}}} = 0,$$

$$\Delta\Theta(\omega) \Big|_{\omega_{r1} \leq \omega \leq \omega_{r2}} = -\tau_0(\omega - \omega_{cp}),$$

где

$$\omega_{cp} = \frac{\omega_{r1} + \omega_{r2}}{2}.$$

При включении источника синусоидальной э. д. с. на входе полосового фильтра синусоидальные колебания на выходе фильтра

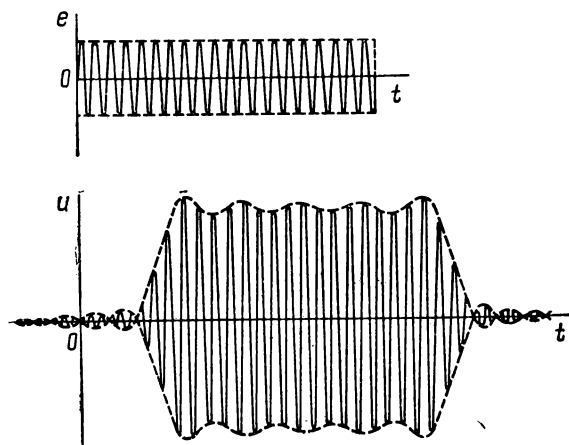


Рис. 12.9. Искажения прямоугольного радиоимпульса в идеальном полосовом фильтре

должны иметь огибающую такого вида, как кривая на рис. 12.4, в. Этот вывод следует из того, что рассматриваемая синусоидальная э. д. с. является по существу гармоническими колебаниями, модулированными ступенчатой функцией. Поэтому боковые составляющие спектра ступенчатой синусоидальной э. д. с. претерпевают в идеальном полосовом фильтре изменения, аналогичные изменениям спектра ступенчатого сигнала в идеальном ФНЧ.

Зная форму огибающей на выходе фильтра при включении источника синусоидальной э. д. с., можно по методу эквивалентных схем

найти и форму огибающей в случае выключения источника синусоидальной э. д. с. Таким образом находим форму сигнала на выходе идеального полосового фильтра при прохождении через него прямоугольных радиоимпульсов (рис. 12.9).

### 3. Прохождение модулированных сигналов через длинные линии

Выше отмечалось, что в согласованной линии с потерями вследствие зависимости от частоты волнового сопротивления и фазовой скорости происходят частотные и фазовые искажения сложных (модулированных) сигналов.

В длинной линии без потерь волновое сопротивление и фазовая скорость не зависят от частоты. Однако и в этом случае могут наблюдаться искажения радиосигналов, если линия не согласована. Это обстоятельство является еще одной причиной, по которой фидер следует согласовывать с нагрузкой.

Причиной искажений радиосигналов в рассогласованной линии без потерь является наложение отраженных волн на основную падающую волну.

Покажем на частном примере, что отражение волн от комплексной нагрузки, например, приводит к искажениям сигнала.

Пусть на входе идеальной линии с комплексной нагрузкой действует неискаженный сигнал, состоящий из  $n$  гармонических составляющих:

$$e(t) = \sum_{k=1}^n \dot{E}_{mk} e^{j\omega_k t}. \quad (12.24)$$

Если линия согласована на входе, а коэффициент отражения от нагрузки на частоте  $\omega_k$  равен  $\dot{\rho}_{nk}$ , то сигнал на выходе может быть представлен следующим образом:

$$u(t) = \sum_{k=1}^n \dot{E}_{mk} e^{j\omega_k t} + \sum_{k=1}^n \dot{\rho}_{nk} \dot{E}_{mk} e^{j\omega_k t},$$

или

$$u(t) = \sum_{k=1}^n (1 + \dot{\rho}_{nk}) \dot{E}_{mk} e^{j\omega_k t}. \quad (12.25)$$

Из сравнения уравнений (12.24) и (12.25) следует, что вследствие отражения сигнал на выходе линии (на нагрузке) претерпевает частотные и фазовые искажения, так как модуль и аргумент множителя  $(1 + \dot{\rho}_{nk})$  являются функциями частоты.

При активном сопротивлении нагрузки также могут появиться искажения сигнала за счет отражения, если линия рассогласована и на выходе, и на входе. Это можно показать на примере прохождения прямоугольных радиоимпульсов через длинную линию.

Процессы при прохождении таких импульсов через линию с активным нагрузочным сопротивлением тождественны переходным процессам, рассмотренным в предыдущей главе. Основываясь на этой тождественности, можно найти форму радиоимпульсов на нагрузке при воздействии на входе линии последовательности прямоугольных радиоимпульсов.

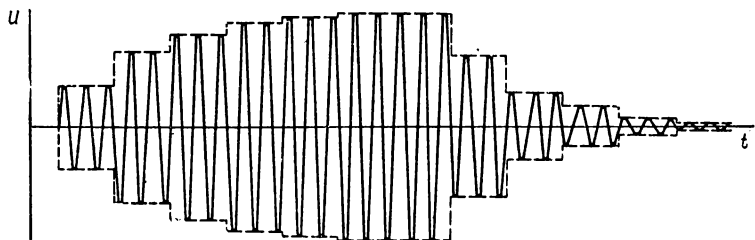


Рис. 12.10. Искажения прямоугольного радиоимпульса в длинной линии

Например, при  $R_n > W$ ,  $R_l = 0$  и  $l_0 = (2k + 1) \frac{\lambda_0}{4}$  согласно рис. 11.18, б радиоимпульс на выходе линии будет иметь такую форму, как показано на рис. 12.10. Аналогично можно рассмотреть форму импульсов и при других граничных условиях, а также при другой длине линии. Приведенный пример наглядно подтверждает необходимость согласования длинных линий для устранения искажения радиосигналов.

## ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Итак, изучение основ теории линейных радиотехнических цепей закончено. Знание этого курса безусловно потребуется студентам при изучении последующих предметов на радиотехническом факультете. Но задача курса не исчерпывается подготовкой к изучению последующих дисциплин. Изучение различных методов исследования линейных цепей, опыт, приобретенный при анализе различных процессов и свойств цепей, несомненно должны расширить кругозор студента, помочь ему ориентироваться и в других вопросах, не сопрягающихся непосредственно с приведенной здесь теорией. Наконец, конкретные знания, полученные при изучении курса, должны помочь будущему инженеру в его практической работе.

Следует подчеркнуть, что в настоящем курсе изложены лишь основы теории. Ограниченность объема курса не позволила рассмотреть подробно ряд затронутых вопросов, таких, как условия физической реализуемости линейных цепей, методы их синтеза, искажения сигналов и др. Совсем опущены такие вопросы, как свойства неоднородных длинных линий с плавно изменяющимися



параметрами, методы расчета цепей с помощью графов, статистические свойства сигналов и т. д.

Некоторые из этих вопросов изучаются в последующих курсах, после соответствующей математической подготовки студентов. Например, свойства сигналов как случайных процессов изучаются в курсе теории связи. В этом же курсе будет продолжено рассмотрение различных методов селекции сигналов.

Ряд вопросов теории линейных цепей может быть вообще опущен на первом этапе обучения. Такие вопросы не вошли не только в настоящий курс, но и в последующие дисциплины. Поэтому все желающие углубить и расширить свои знания по теории линейных цепей должны обратиться к специальной литературе.

Следует, однако, иметь в виду, что и в специальной литературе не всегда можно найти ответ на тот или иной вопрос. Теория линейных цепей является относительно старой наукой в сравнении, например, с такими радиотехническими дисциплинами, как теория импульсных устройств, теория оптимальной обработки сигналов и др. Поэтому многие вопросы теории линейных цепей изучены достаточно полно и глубоко. Особенно хорошо разработаны различные методы анализа свойств цепей и взаимодействия сигналов с цепями. Тем не менее и в задачах анализа встречается еще много нерешенных вопросов. Не до конца, например, изучены искажения ЧМ- и ФМ-сигналов в линейных цепях, не исследованы все свойства электромеханических и гребенчатых фильтров и т. д.

Поэтому методы анализа линейных цепей продолжают развиваться и совершенствоваться. Сейчас все шире начинает использоваться метод графов. Новые возможности в анализе цепей появились в связи с использованием вычислительных машин.

Особенно много нерешенных задач остается в теории синтеза линейных цепей. Здесь продолжают разрабатываться методы аппроксимации характеристик цепей, ищутся новые типы характеристик, обеспечивающих оптимизацию свойств цепей по тем или иным критериям, совершенствуются и сами критерии. Методы реализации заданных характеристик также неуклонно развиваются. Здесь еще в большей степени, чем при решении задач анализа, внедряется вычислительная техника.

Новые задачи возникают в теории цепей в связи с совершенствованием конструкции радиотехнических устройств. В частности, сверхминиатюризация радиоаппаратуры выдвигает задачу более глубокой и всесторонней разработки теории цепей с распределенными параметрами.

Даже столь краткий обзор свидетельствует, что в теории цепей действительно остается много нерешенных задач и проблем, которые еще ждут своих исследователей.

# ЛИТЕРАТУРА

## ОБЩИЕ ПОСОБИЯ ПО КУРСУ

1. Белецкий А. Ф. Основы теории линейных электрических цепей. Изд-во «Связь», 1967.
2. Гарновский Н. Н. Теоретические основы электропроводной связи, ч. I. Связьиздат, 1956.
3. Гоноровский И. С. Радиотехнические цепи и сигналы, ч. I. Изд-во «Советское радио», 1966.
4. Зелях Э. В. Основы общей теории линейных электрических схем. Изд-во АН СССР, 1951.
5. Котельников В. А. и Николаев Н. Н. Основы радиотехники, ч. I. Связьиздат, 1950.

## ДОПОЛНИТЕЛЬНАЯ ЛИТЕРАТУРА К ОТДЕЛЬНЫМ ГЛАВАМ

### К главе 1

1. Головин Г. И. А. С. Попов — изобретатель радио. Связьиздат, 1945.
2. Изобретение радио. Документы и материалы. Изд-во «Наука», 1966.
3. Кубаркин Л. В. Рассказ о радиоэлектронике. Изд-во «Энергия», 1965.
4. Ржонинский Б. Никола Тесла. Изд-во «Молодая гвардия», 1959.
5. Яроцкий А. В. Павел Львович Шиллинг. Госэнергоиздат, 1953.

### К главам 2, 3, 4

1. Атабеков Г. И. Теория линейных электрических цепей. Изд-во «Советское радио», 1960.
2. Зевеке Г. В. [и др.]. Основы теории цепей. Изд-во «Энергия», 1965.

### К главам 5, 6, 7

1. Баев Н. А. и Удалов А. П. Лекции по теории цепей с сосредоточенными параметрами. Связьиздат, 1955.
2. Балабанян Н. Синтез электрических цепей. Госэнергоиздат, 1961.
3. Боде Г. Теория цепей и проектирование усилителей с обратной связью. ГИИЛ, 1948.

### К главе 8

1. Литвиненко О. Н. и Сошников В. И. Теория неоднородных линий и их применение в радиотехнике. Изд-во «Советское радио», 1964.
2. Фельдштейн А. Л. и Явич Л. Р. Синтез четырехполюсников и восьми-полюсников на СВЧ. Изд-во «Связь», 1965.

### К главе 9

1. Белецкий А. Ф. Теоретические основы электропроводной связи, ч. III. Связьиздат, 1959.
2. Босый Н. Д. Электрические фильтры. ГИТЛ УССР, 1959.
3. Великин Л. И., Гельмонт З. Я., Зелях Э. В. Пьезоэлектрические фильтры. Изд-во «Связь», 1966.
4. Коган С. С. Теория и расчет фильтров для установок дальней связи. Связьиздат, 1950.
5. Лосев А. К. Теория и расчет электромеханических фильтров. Изд-во «Связь», 1965.
6. Финкельштейн М. И. Гребенчатые фильтры. Изд-во «Советское радио», 1969.

### К главе 10

1. Харкевич А. А. Спектры и анализ. ГИТЛ, 1952.

### К главе 11

1. Конторович М. И. Операционное исчисление и нестационарные явления в электрических цепях. ГИТЛ, 1949.


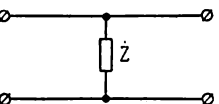
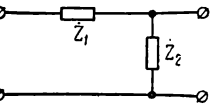
### К главе 12

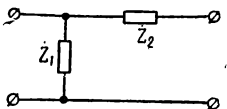
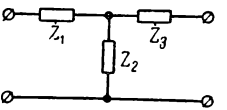
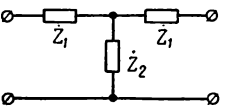
1. Давыдов Г. Б. Основы теории и расчета фазокорректирующих цепей. Связьиздат, 1958.
2. См. дополнительную литературу к гл. 10, 11.

## ПРИЛОЖЕНИЯ

Таблица П.1

Матрицы простейших четырехполюсников

№	Схема четырёхполюсника	$[a]$	$[z]$	$[y]$
1	 <p>Рис. 1. Последовательный четырехполюсник</p>	$\begin{bmatrix} 1 & \dot{Z} \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$	—	$\begin{bmatrix} \dot{Y} & -\dot{Y} \\ \dot{Y} & -\dot{Y} \end{bmatrix}$
2	 <p>Рис. 2. Параллельный четырехполюсник</p>	$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ \dot{Y} & 1 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} \dot{Z} & -\dot{Z} \\ \dot{Z} & -\dot{Z} \end{bmatrix}$	—
3	 <p>Рис. 3. Т-образный четырехполюсник</p>	$\begin{bmatrix} 1 + Z_1 \dot{Y}_2 & \dot{Z}_1 \\ Y_2 & 1 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} \dot{Z}_1 + Z_2 & -\dot{Z}_2 \\ \dot{Z}_2 & -\dot{Z}_2 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} \dot{Y}_1 & -\dot{Y}_1 \\ \dot{Y}_1 & -(\dot{Y}_1 + \dot{Y}_2) \end{bmatrix}$

№	Схема четырёхполюсника	$[a]$	$[z]$	$[y]$
4	 <p>Рис. 4. Г-образный четырёхполюсник</p>	$\begin{bmatrix} 1 & \dot{Z}_1 \\ \dot{Y}_2 & 1 + \dot{Z}_1 \dot{Y}_2 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} \dot{Z}_2 & -\dot{Z}_2 \\ \dot{Z}_2 & -(\dot{Z}_1 + \dot{Z}_2) \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} \dot{Y}_1 + \dot{Y}_2 & -\dot{Y}_1 \\ \dot{Y}_1 & -\dot{Y}_1 \end{bmatrix}$
5	 <p>Рис. 5. Т-образный несимметричный четырёхполюсник</p>	$\begin{bmatrix} 1 + \dot{Z}_1 \dot{Y}_2 & \dot{Z}_1 + \dot{Z}_3 + \dot{Z}_1 \dot{Y}_2 \dot{Z}_3 \\ \dot{Y}_2 & 1 + \dot{Y}_2 \dot{Z}_3 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} \dot{Z}_1 + \dot{Z}_2 & -\dot{Z}_2 \\ \dot{Z}_2 & -(\dot{Z}_2 + \dot{Z}_3) \end{bmatrix}$	$\frac{1}{\dot{Y}_2} \begin{bmatrix} \dot{Y}_1 (\dot{Y}_2 + \dot{Y}_3) & -\dot{Y}_1 \dot{Y}_3 \\ \dot{Y}_1 \dot{Y}_3 & -\dot{Y}_3 (\dot{Y}_1 + \dot{Y}_2) \end{bmatrix}$ $Y = \dot{Y}_1 + \dot{Y}_2 + \dot{Y}_3$
6	 <p>Рис. 6. Т-образный симметричный четырёхполюсник</p>	$\begin{bmatrix} 1 + \dot{Z}_1 \dot{Y}_2 & \dot{Z}_1 (2 + \dot{Z}_1 \dot{Y}_2) \\ \dot{Y}_2 & 1 + \dot{Z}_1 \dot{Y}_2 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} \dot{Z}_1 + \dot{Z}_2 & -\dot{Z}_2 \\ \dot{Z}_2 & -(\dot{Z}_1 + \dot{Z}_2) \end{bmatrix}$	$\frac{1}{\dot{Y}_2} \begin{bmatrix} \dot{Y}_1 (\dot{Y}_1 + \dot{Y}_2) & -\dot{Y}_1^2 \\ \dot{Y}_1^2 & -\dot{Y}_1 (\dot{Y}_1 + \dot{Y}_2) \end{bmatrix}$ $Y = 2\dot{Y}_1 + \dot{Y}_2$

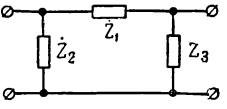
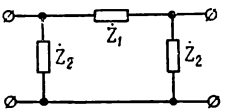
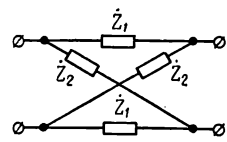
№	Схема четырёхполюсника	$[a]$	$[z]$	$[y]$
7	 <p>Рис. 7. П-образный несимметричный четырёхполюсник</p>	$\begin{bmatrix} 1 + \dot{Z}_1 \dot{Y}_3 & \dot{Z}_1 \\ \dot{Y}_2 + \dot{Y}_3 + \dot{Z}_1 \dot{Y}_2 \dot{Y}_3 & 1 + \dot{Z}_1 \dot{Y}_2 \end{bmatrix}$	$\frac{1}{\dot{Z}} \begin{bmatrix} \dot{Z}_2 (\dot{Z}_1 + \dot{Z}_3) & -\dot{Z}_2 \dot{Z}_3 \\ \dot{Z}_2 \dot{Z}_3 & -\dot{Z}_3 (\dot{Z}_1 + \dot{Z}_2) \end{bmatrix}$ $\dot{Z} = \dot{Z}_1 + \dot{Z}_2 + \dot{Z}_3$	$\begin{bmatrix} \dot{Y}_1 + \dot{Y}_2 & -\dot{Y}_1 \\ \dot{Y}_1 & -(\dot{Y}_1 + \dot{Y}_3) \end{bmatrix}$
8	 <p>Рис. 8. П-образный симметричный четырёхполюсник</p>	$\begin{bmatrix} 1 + \dot{Z}_1 \dot{Y}_2 & \dot{Z}_1 \\ \dot{Y}_2 (2 + \dot{Z}_1 \dot{Y}_2) & 1 + \dot{Z}_1 \dot{Y}_2 \end{bmatrix}$	$\frac{1}{\dot{Z}} \begin{bmatrix} \dot{Z}_2 (\dot{Z}_1 + \dot{Z}_2) & -\dot{Z}_2^2 \\ \dot{Z}_2^2 & -\dot{Z}_2 (\dot{Z}_1 + \dot{Z}_2) \end{bmatrix}$ $\dot{Z} = \dot{Z}_1 + 2\dot{Z}_2$	$\begin{bmatrix} \dot{Y}_1 + \dot{Y}_2 & -\dot{Y}_1 \\ \dot{Y}_1 & -(\dot{Y}_1 + \dot{Y}_2) \end{bmatrix}$
9	 <p>Рис. 9. X-образный симметричный четырёхполюсник</p>	$\frac{1}{\dot{Z}} \begin{bmatrix} \dot{Z}_1 + \dot{Z}_2 & 2\dot{Z}_1 \dot{Z}_2 \\ 2 & \dot{Z}_1 + \dot{Z}_2 \end{bmatrix}$ $\dot{Z} = \dot{Z}_2 - \dot{Z}_1$	$\frac{1}{2} \begin{bmatrix} \dot{Z}_1 + \dot{Z}_2 & \dot{Z}_1 - \dot{Z}_2 \\ \dot{Z}_2 - \dot{Z}_1 & -(\dot{Z}_1 + \dot{Z}_2) \end{bmatrix}$	$\frac{1}{2} \begin{bmatrix} \dot{Y}_1 + \dot{Y}_2 & \dot{Y}_2 - \dot{Y}_1 \\ \dot{Y}_1 - \dot{Y}_2 & -(\dot{Y}_1 + \dot{Y}_2) \end{bmatrix}$

Таблица П.2

## Значения параметров линии в области резонанса

$l_0$	$\alpha l_0$	$\cos \beta_0 l_0$	$\sin \beta_0 l_0$	$\operatorname{tg} \beta_0 l_0$
$\frac{\lambda_0}{4}$	$\frac{\pi}{4Q}$	$-\frac{\pi}{2} \Delta$	1	$-\frac{2}{\pi \Delta}$
$\frac{\lambda_0}{2}$	$\frac{\pi}{2Q}$	-1	$-\pi \Delta$	$\pi \Delta$

Таблица П.3

## Избирательность чебышевских фильтров

$n$	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	$\infty$
$K_{ПЗ}^{40}$	100	7,07	3,01	2,01	1,59	1,40	1,21	1,15	1,10	1,08	1

Таблица П.4

## Избирательность фильтров с максимально-гладкой характеристикой

$n$	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	$\infty$
$K_{ПЗ}^{40}$	100	10	4,64	3,16	2,50	2,16	1,94	1,78	1,66	1,58	1

Таблица П.5

Предельная избирательность связанных контуров  
с регулярной структурой

$n$	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	$\infty$
$K_{ПЗ}^{40}$	100	7,07	3,01	2,16	1,71	1,51	1,37	1,29	1,23	1,19	1

Таблица П.6

Избирательность и нормированная полоса пропускания  
 $n$ -каскадного резонансного усилителя с одинаковыми контурами

$n$	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	$\infty$
$K_{ПЗ}^{40}$	100	15,5	8,9	6,9	6	5,5	5,1	4,9	4,7	4,6	3,65
$\xi_r$	1	0,644	0,510	0,435	0,385	0,349	0,322	0,301	0,283	0,269	—

Таблица П.7

**Предельная избирательность и расчетные параметры  
n-каскадного полосового усилителя**

$n$	1	2	3	4	5	$\infty$
$m$	2	4	6	8	10	$\infty$
$K_{ПЗ}^{40}$	7,07	2,88	2,23	1,99	1,87	1,53
$\kappa_{\max}$	2,41	1,83	1,63	1,52	1,46	—
$\xi_r$	3,1	2,19	1,82	1,62	1,5	—

Таблица П.8

**Избирательность и расчетные параметры n-каскадного полосового  
усилителя с критической связью между контурами**

$n$	1	2	3	4	5	$\infty$
$m$	2	4	6	8	10	$\infty$
$K_{ПЗ}^{40}$	10	3,94	2,98	2,62	2,44	1,91
$\xi_r$	1,41	1,135	1,01	0,933	0,878	—

Таблица П.9

**Предельная избирательность и расчетные параметры  
n-каскадного резонансного усилителя с контурами,  
настроенными на три частоты**

$n$	3	6	9
$\xi_{k \max}$	6,1	4,5	3,9
$\xi_r$	6,66	4,81	4,05
$K_{ПЗ}^{40}$	3,01	1,73	1,5

Таблица П.10

## Расчетные формулы для фильтров типа р

Тип фильтра	Параметры фильтра
Т-образный ФНЧ	$\frac{L}{2} = \frac{\Omega_r R_0}{2\pi r_0 f_r}, \quad C = \frac{r_0 \Omega_r}{\pi R_0 f_r}$
П-образный ФНЧ	$L = \frac{r_0 \Omega_r R_0}{\pi f_r}, \quad \frac{C}{2} = \frac{\Omega_r}{2\pi r_0 R_0 f_r}$
Т-образный ФВЧ	$L = \frac{R_0}{4\pi r_0 \Omega_r f_r}, \quad 2C = \frac{r_0}{2\pi \Omega_r R_0 f_r}$
П-образный ФВЧ	$2L = \frac{r_0 R_0}{2\pi \Omega_r f_r}, \quad C = \frac{1}{4\pi r_0 R_0 \Omega_r f_r}$
Т-образный ПФ	$\frac{L_1}{2} = \frac{\Omega_r R_0}{2\pi r_0 (f_{r2} - f_{r1})}, \quad 2C_1 = \frac{r_0 (f_{r2} - f_{r1})}{2\pi \Omega_r R_0 f_{r1} f_{r2}},$ $L_2 = \frac{R_0 (f_{r2} - f_{r1})}{4\pi r_0 \Omega_r f_{r1} f_{r2}}, \quad C_2 = \frac{r_0 \Omega_r}{\pi R_0 (f_{r2} - f_{r1})}$
П-образный ПФ	$L_1 = \frac{r_0 \Omega_r R_0}{\pi (f_{r2} - f_{r1})}, \quad C_1 = \frac{f_{r2} - f_{r1}}{4\pi r_0 \Omega_r R_0 f_{r1} f_{r2}}$ $2L_2 = \frac{r_0 R_0 (f_{r2} - f_{r1})}{2\pi \Omega_r f_{r1} f_{r2}}, \quad \frac{C_2}{2} = \frac{\Omega_r}{2\pi r_0 R_0 (f_{r2} - f_{r1})}$
Т-образный ЗФ	$\frac{L_1}{2} = \frac{\Omega_r R_0 (f_{r2} - f_{r1})}{2\pi r_0 f_{r1} f_{r2}}, \quad 2C_1 = \frac{r_0}{2\pi \Omega_r R_0 (f_{r2} - f_{r1})}$ $L_2 = \frac{R_0}{4\pi r_0 \Omega_r (f_{r2} - f_{r1})}, \quad C_2 = \frac{r_0 \Omega_r (f_{r2} - f_{r1})}{\pi R_0 f_{r1} f_{r2}}$
П-образный ЗФ	$L_1 = \frac{r_0 \Omega_r R_0 (f_{r2} - f_{r1})}{\pi f_{r1} f_{r2}}, \quad C_1 = \frac{1}{4\pi r_0 \Omega_r R_0 (f_{r2} - f_{r1})}$ $2L_2 = \frac{r_0 R_0}{2\pi \Omega_r (f_{r2} - f_{r1})}, \quad \frac{C_2}{2} = \frac{\Omega_r (f_{r2} - f_{r1})}{2\pi r_0 R_0 f_{r1} f_{r2}}$

Таблица П.11

## Расчетные параметры многозвенных фильтров типа р

n	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
r <sub>0</sub>	0,41	0,33	0,41	0,37	0,41	0,37	0,41	0,37	0,41	0,37
Ω <sub>r</sub>	1,29	1,09	1,04	1,02	1,0	1,0	0,99	0,99	0,98	0,98



Расчетные формулы для фильтров типа  $m$ 

Тип фильтра	Параметры фильтра
Т-образный ФНЧ	$\frac{L_1}{2} = \frac{\Omega_r R_0 \sqrt{1-m^2}}{2\pi r_0 f_r}, \quad L_2 = \frac{m^2 \Omega_r R_0}{4\pi r_0 f_r \sqrt{1-m^2}},$ $C_2 = \frac{r_0 \Omega_r \sqrt{1-m^2}}{\pi R_0 f_r}$
П-образный ФНЧ	$L_1 = \frac{r_0 \Omega_r R_0 \sqrt{1-m^2}}{\pi f_r}, \quad C_1 = \frac{m^2 \Omega_r}{4\pi r_0 R_0 f_r \sqrt{1-m^2}},$ $\frac{C_2}{2} = \frac{\Omega_r \sqrt{1-m^2}}{2\pi r_0 R_0 f_r}$
Т-образный ФВЧ	$2C_1 = \frac{r_0}{2\pi \Omega_r R_0 f_r \sqrt{1-m^2}}, \quad L_2 = \frac{R_0}{4\pi r_0 \Omega_r f_r \sqrt{1-m^2}},$ $C_2 = \frac{r_0 \sqrt{1-m^2}}{\pi m^2 \Omega_r R_0 f_r}$
П-образный ФВЧ	$L_1 = \frac{r_0 R_0 \sqrt{1-m^2}}{\pi m^2 \Omega_r f_r}, \quad C_1 = \frac{1}{4\pi r_0 \Omega_r R_0 f_r \sqrt{1-m^2}},$ $2L_2 = \frac{r_0 R_0}{2\pi \Omega_r f_r \sqrt{1-m^2}}$
Т-образный ПФ	$\frac{L_1}{2} = \frac{\Omega_r R_0 \sqrt{1-m^2}}{2\pi r_0 (f_{r2} - f_{r1})}, \quad 2C_1 = \frac{r_0 (f_{r2} - f_{r1})}{2\pi \Omega_r R_0 f_{r1} f_{r2} \sqrt{1-m^2}},$ $L_2 = \frac{R_0 (f_{r2} - f_{r1})}{4\pi r_0 \Omega_r f_{r1} f_{r2} \sqrt{1-m^2}}, \quad C_2 = \frac{r_0 \Omega_r \sqrt{1-m^2}}{\pi R_0 (f_{r2} - f_{r1})},$ $L'_2 = \frac{m^2 \Omega_r R_0}{4\pi r_0 (f_{r2} - f_{r1}) \sqrt{1-m^2}}, \quad C'_2 = \frac{r_0 (f_{r2} - f_{r1}) \sqrt{1-m^2}}{\pi m^2 \Omega_r R_0 f_{r1} f_{r2}}$
П-образный ПФ	$L_1 = \frac{r_0 \Omega_r R_0 \sqrt{1-m^2}}{\pi (f_{r2} - f_{r1})}, \quad C_1 = \frac{f_{r2} - f_{r1}}{4\pi r_0 \Omega_r R_0 f_{r1} f_{r2} \sqrt{1-m^2}},$ $L'_1 = \frac{r_0 R_0 (f_{r2} - f_{r1}) \sqrt{1-m^2}}{\pi m^2 \Omega_r f_{r1} f_{r2}}, \quad C'_1 = \frac{m^2 \Omega_r}{4\pi r_0 R_0 (f_{r2} - f_{r1}) \sqrt{1-m^2}},$ $2L_2 = \frac{r_0 R_0 (f_{r2} - f_{r1})}{2\pi \Omega_r f_{r1} f_{r2} \sqrt{1-m^2}}, \quad \frac{C_2}{2} = \frac{\Omega_r \sqrt{1-m^2}}{2\pi r_0 R_0 (f_{r2} - f_{r1})}$

Тип фильтра	Параметры фильтра
Т-образный 3Ф	$\frac{L_1}{2} = \frac{\Omega_r R_0 (f_{r2} - f_{r1}) \sqrt{1 - m^2}}{2\pi r_0 f_{r1} f_{r2}},$ $2C_1 = \frac{r_0}{2\pi \Omega_r R_0 (f_{r2} - f_{r1}) \sqrt{1 - m^2}},$ $L_2 = \frac{R_0}{4\pi r_0 \Omega_r (f_{r2} - f_{r1}) \sqrt{1 - m^2}},$ $C_2 = \frac{r_0 \Omega_r (f_{r2} - f_{r1}) \sqrt{1 - m^2}}{\pi R_0 f_{r1} f_{r2}},$ $L'_2 = \frac{m^2 \Omega_r R_0 (f_{r2} - f_{r1})}{4\pi r_0 f_{r1} f_{r2} \sqrt{1 - m^2}}, \quad C'_2 = \frac{r_0 \sqrt{1 - m^2}}{\pi m^2 \Omega_r R_0 (f_{r2} - f_{r1})}$
П-образный 3Ф	$L_1 = \frac{r_0 \Omega_r R_0 (f_{r2} - f_{r1}) \sqrt{1 - m^2}}{\pi f_{r1} f_{r2}},$ $C_1 = \frac{1}{4\pi r_0 \Omega_r R_0 (f_{r2} - f_{r1}) \sqrt{1 - m^2}},$ $L'_1 = \frac{r_0 R_0 \sqrt{1 - m^2}}{\pi m^2 \Omega_r (f_{r2} - f_{r1})}, \quad C'_1 = \frac{m^2 \Omega_r (f_{r2} - f_{r1})}{4\pi r_0 R_0 f_{r1} f_{r2} \sqrt{1 - m^2}},$ $2L_2 = \frac{r_0 R_0}{2\pi \Omega_r (f_{r2} - f_{r1}) \sqrt{1 - m^2}}, \quad \frac{C_2}{2} = \frac{\Omega_r (f_{r2} - f_{r1}) \sqrt{1 - m^2}}{2\pi r_0 R_0 f_{r1} f_{r2}}$

Таблица П.13

## Параметры видеоимпульсов

Импульсы	$\Delta F_c$	$\tau \Delta F_c$	$\tau_9 \Delta F_{c9}$
Экспоненциальные	$\frac{3,64}{\tau}$	3,64	1,13
Прямоугольные	$\frac{3,18}{\tau}$	3,18	0,73
Треугольные	$\frac{2,01}{\tau}$	2,01	0,46
Косинусоидальные	$\frac{1,5}{\tau}$	1,5	0,435
Колокольные	$\frac{1,46}{\tau}$	1,46	0,22

## Операторные изображения основных функций

№ п/п	Исходная функция	Операторное изображение исходной функции
1	$f(t)$	$\bar{f}(p) = \int_0^{\infty} e^{-pt} f(t) dt$
2	$\varphi(t) = \sum_{k=1}^n f_k(t)$	$\bar{\varphi}(p) = \sum_{k=1}^n \bar{f}_k(p)$
3	$\varphi(t) = af(t)$	$\bar{\varphi}(p) = a\bar{f}(p)$
4	$\varphi(t) = \left. \frac{df(t)}{dt} \right _{f(0)=0}$	$\bar{\varphi}(p) = p\bar{f}(p)$
5	$\varphi(t) = \frac{df(t)}{dt}$	$\bar{\varphi}(p) = p\bar{f}(p) - f(0)$
6	$\varphi(t) = \frac{d^n f(t)}{dt^n}$	$\bar{\varphi}(p) = p^n \bar{f}(p) - p^{n-1} f(0) -$ $- p^{n-2} f'(0) - \dots - p^2 f^{(n-3)}(0) -$ $- p f^{(n-2)}(0) - f^{(n-1)}(0)$
7	$\varphi(t) = \int_0^t f(t) dt \mid_{\varphi(0)=0}$	$\bar{\varphi}(p) = \frac{1}{p} \bar{f}(p)$
8	$\varphi(t) = e^{-\alpha t} f(t)$	$\bar{\varphi}(p) = \bar{f}(p + \alpha)$
9	1	$\frac{1}{p}$
10	a	$\frac{a}{p}$
11	$1(t - \tau)$	$\frac{1}{p} e^{-\tau p}$
12	t	$\frac{1}{p^2}$
13	$e^{\pm \alpha t}$	$\frac{1}{p \mp \alpha}$

№ п/п	Исходная функция	Операторное изображение исходной функции
14	$\pm (1 - e^{-\alpha t})$	$\frac{\alpha}{p(p \pm \alpha)}$
15	$te^{-\alpha t}$	$\frac{1}{(p + \alpha)^2}$
16	$e^{-\alpha t} - e^{-\beta t}$	$\frac{\beta - \alpha}{(p + \alpha)(p + \beta)}$
17	$\text{sh } \beta t$	$\frac{\beta}{p^2 - \beta^2}$
18	$\text{ch } \beta t$	$\frac{p}{p^2 - \beta^2}$
19	$\sin \omega t$	$\frac{\omega}{p^2 + \omega^2}$
20	$\cos \omega t$	$\frac{p}{p^2 + \omega^2}$
21	$\sin (\omega t \pm \psi)$	$\frac{\omega \cos \psi \pm p \sin \psi}{p^2 + \omega^2}$
22	$\cos (\omega t \pm \psi)$	$\frac{-\omega \sin \psi \pm p \cos \psi}{p^2 + \omega^2}$
23	$e^{-\alpha t} \sin \omega t$	$\frac{\omega}{p^2 + 2\alpha p + \alpha^2 + \omega^2}$
24	$e^{-\alpha t} \cos \omega t$	$\frac{p + \alpha}{p^2 + 2\alpha p + \alpha^2 + \omega^2}$
25	$\frac{1}{\omega} e^{-\alpha t} \sin \omega t$ $\omega = \sqrt{\beta^2 - \alpha^2}$	$\frac{1}{p^2 + 2\alpha p + \beta^2}$
26	$\frac{1}{\cos \psi} e^{-\alpha t} \cos (\omega t + \psi)$ $\omega = \sqrt{\beta^2 - \alpha^2}, \quad \psi = \arctg \frac{\alpha}{\omega}$	$\frac{p}{p^2 + 2\alpha p + \beta^2}$

№ п/п	Исходная функция	Операторное изображение исходной функции
27	$\frac{1}{\cos \psi} e^{-\alpha t} \cos (\omega t + \psi)$ $\omega = \sqrt{\beta^2 - \alpha^2}, \quad \psi = \operatorname{arctg} \frac{\alpha - \gamma}{\omega}$	$\frac{p + \gamma}{p^2 + 2\alpha p + \beta^2}$
28	$\frac{1}{\beta^2} \left[ 1 - \frac{1}{\cos \psi} e^{-\alpha t} \cos (\omega t - \psi) \right]$ $\omega = \sqrt{\beta^2 - \alpha^2}, \quad \psi = \operatorname{arctg} \frac{\alpha}{\omega}$	$\frac{1}{p(p^2 + 2\alpha p + \beta^2)}$
29	$\frac{\gamma}{\beta^2} \left[ 1 - \frac{1}{\cos \psi} e^{-\alpha t} \cos (\omega t - \psi) \right]$ $\omega = \sqrt{\beta^2 - \alpha^2},$ $\psi = \operatorname{arctg} \left( \frac{\alpha}{\omega} - \frac{\beta^2}{\omega \gamma} \right)$	$\frac{p + \gamma}{p(p^2 + 2\alpha p + \beta^2)}$
30	$\frac{\frac{1}{\omega} \sin (\omega t + \psi') + \frac{1}{\omega_c} e^{-\alpha t} \sin (\omega_c t + \psi'')}{\sqrt{(\omega^2 - \beta^2)^2 + 4\alpha^2 \omega^2}}$ $\omega_c = \sqrt{\beta^2 - \alpha^2}$ $\psi' = \operatorname{arctg} \frac{2\alpha \omega}{\omega^2 - \omega_c^2 - \alpha^2}$ $\psi'' = \operatorname{arctg} \frac{2\alpha \omega_c}{\omega^2 - \omega_c^2 + \alpha^2}$	$\frac{1}{(p^2 + \omega^2)(p^2 + 2\alpha p + \beta^2)}$
31	$\frac{\sin (\omega t + \psi') + \frac{\beta}{\omega_c} e^{-\alpha t} \sin (\omega_c t + \psi'')}{\sqrt{(\omega^2 - \beta^2)^2 + 4\alpha^2 \omega^2}}$ $\omega_c = \sqrt{\beta^2 - \alpha^2}, \quad \psi' = \operatorname{arctg} \frac{2\alpha \omega}{\beta^2 - \omega^2}$ $\psi'' = \operatorname{arctg} \frac{2\alpha \omega_c}{\omega^2 - \omega_c^2 + \alpha^2} -$ $- \operatorname{arctg} \frac{\omega_c}{\alpha}$	$\frac{p}{(p^2 + \omega^2)(p^2 + 2\alpha p + \beta^2)}$

Продолжение табл. П.14

№ п/п	Исходная функция	Операторное изображение исходной функции
32	$\frac{\sqrt{\omega^2 + \gamma^2}}{\omega} \sin(\omega t + \psi') +$ $\frac{\sqrt{(\gamma - \alpha)^2 + \omega_c^2}}{\omega_c} e^{-\alpha t} \sin(\omega_c t + \psi'')$ $+ \frac{\sqrt{(\omega^2 - \beta^2)^2 + 4\alpha^2 \omega^2}}{\omega_c = \sqrt{\beta^2 - \alpha^2}}$ $\psi' = \arctg \frac{\omega}{\gamma} + \arctg \frac{2\gamma\omega}{\omega^2 - \omega_c^2 - \alpha^2}$ $\psi'' = \arctg \frac{\omega_c}{\gamma - \alpha} +$ $+ \arctg \frac{2\alpha\omega_c}{\omega^2 - \omega_c^2 + \alpha^2}$	$\frac{p + \gamma}{(p^2 + \omega^2)(p^2 + 2\alpha p + \beta^2)}$

Таблица П.15

## Степень искажений радиопульсов в одиночном контуре

$\frac{\tau}{\tau_{и}}$	0,05	0,1	0,25	0,5	1,0
$\Delta F$	$\frac{14,6}{\tau_{и}}$	$\frac{7,32}{\tau_{и}}$	$\frac{2,92}{\tau_{и}}$	$\frac{1,46}{\tau_{и}}$	$\frac{0,732}{\tau_{и}}$

# О Г Л А В Л Е Н И Е

Стр.

Предисловие . . . . .	3
-----------------------	---

## Глава 1. Введение

§ 1.1. Основные принципы передачи сигналов . . . . .	5
1. Первый принцип — использование свободных электромагнитных волн . . . . .	5
2. Второй принцип — использование высокочастотных колебаний . . . . .	10
3. Третий принцип — модуляция высокочастотных колебаний . . . . .	14
§ 1.2. Основные принципы приема сигналов . . . . .	19
1. Первый принцип — использование приемной антенны . . . . .	19
2. Второй принцип — селекция сигналов . . . . .	21
3. Третий принцип — детектирование . . . . .	23
4. Четвертый принцип — усиление сигналов . . . . .	24
§ 1.3. Радиотехника и ее задачи . . . . .	25
1. Функциональные схемы радиолинии . . . . .	25
2. Отрасли радиотехники . . . . .	28
§ 1.4. Предмет и задачи курса . . . . .	35
1. Сигналы и их свойства . . . . .	35
2. Искажения и преобразования сигналов . . . . .	38
3. Электрические и радиотехнические цепи . . . . .	45
4. Классификация цепей по видам элементов . . . . .	47
5. Классификация цепей по видам соединений элементов . . . . .	50

## Глава 2. Основы теории линейных цепей

§ 2.1. Методы исследования линейных цепей . . . . .	55
1. Задачи исследования линейных цепей . . . . .	55
2. Временной метод исследования . . . . .	56
3. Спектральный метод исследования . . . . .	57
4. Метод комплексных амплитуд . . . . .	58
5. Векторные диаграммы гармонических колебаний . . . . .	63
§ 2.2. Основные законы токопрохождения . . . . .	64
1. Закон Ома . . . . .	64
2. Первый закон Кирхгофа . . . . .	69
3. Второй закон Кирхгофа . . . . .	72
4. Закон суперпозиции . . . . .	74
§ 2.3. Энергетические соотношения в цепях . . . . .	75
1. Мощность и энергия в двухполюснике с активным сопротивлением . . . . .	75
2. Мощность и энергия в двухполюснике с реактивным сопротивлением . . . . .	78
3. Мощность и энергия в двухполюснике с комплексным сопротивлением . . . . .	80
4. Действующее и среднее значения гармонических величин . . . . .	84
§ 2.4. Активные элементы цепи . . . . .	85
1. Идеальные источники напряжения и тока . . . . .	85
2. Реальные источники напряжения и тока . . . . .	87
3. Отдача активной мощности реальным источником . . . . .	90
4. Отдача полной мощности реальным источником . . . . .	93
§ 2.5. Пассивные элементы цепи . . . . .	95
1. Диссипативные элементы . . . . .	95
2. Емкостные элементы . . . . .	96
3. Индуктивные элементы . . . . .	100
4. Элементы взаиминдукции . . . . .	103

### Глава 3. Методы расчета линейных цепей

	<i>Стр.</i>
§ 3.1. Прямые методы расчета . . . . .	109
1. Расчет делителей напряжения и тока . . . . .	109
2. Метод токов ветвей . . . . .	110
3. Метод контурных токов . . . . .	114
4. Метод узловых напряжений . . . . .	119
5. Метод наложения . . . . .	123
§ 3.2. Косвенные методы расчета . . . . .	124
1. Метод преобразования сопротивлений . . . . .	124
2. Метод преобразования источников . . . . .	128
3. Метод компенсации . . . . .	132
4. Метод эквивалентного источника . . . . .	135
5. Метод обращения . . . . .	138
§ 3.3. Расчет постоянных напряжений и токов . . . . .	140
1. Общие методы расчета . . . . .	140
2. Расчет цепей с емкостями . . . . .	142

### Глава 4. Многофазные цепи

§ 4.1. Общие сведения о многофазных цепях . . . . .	145
1. Основные определения . . . . .	145
2. Способы соединения фаз цепи . . . . .	146
3. Вращающееся магнитное поле . . . . .	148
§ 4.2. Трехфазные цепи . . . . .	151
1. Симметричные трехфазные цепи . . . . .	151
2. Несимметричные трехфазные цепи . . . . .	153
3. Энергетические соотношения . . . . .	156

### Глава 5. Двухполюсники с сосредоточенными параметрами

§ 5.1. Реактивные двухполюсники . . . . .	159
1. Двухэлементные двухполюсники . . . . .	159
2. Трехэлементные и четырехэлементные двухполюсники . . . . .	165
3. Двухполюсники с произвольным числом элементов . . . . .	172
4. Канонические схемы двухполюсников . . . . .	174
5. Понятие о преобразовании и синтезе реактивных двухполюсников . . . . .	178
§ 5.2. Диссипативные двухполюсники . . . . .	179
1. Последовательный двухполюсник с потерями . . . . .	179
2. Параллельный двухполюсник с потерями . . . . .	184
3. Фильтрация гармоник в параллельном двухполюснике . . . . .	189
4. Многоэлементные двухполюсники с потерями . . . . .	190
5. Понятие о синтезе диссипативных двухполюсников . . . . .	194

### Глава 6. Основы теории четырехполюсников

§ 6.1. Матричный метод исследования четырехполюсников . . . . .	198
1. Виды матриц четырехполюсников . . . . .	198
2. Основные действия с матрицами . . . . .	202
3. Матрицы простейших четырехполюсников . . . . .	205
4. Основные свойства матричных коэффициентов . . . . .	208
5. Обобщение матричного метода на многополюсники . . . . .	210
§ 6.2. Основные параметры и характеристики четырехполюсников . . . . .	212
1. Входное сопротивление . . . . .	212
2. Меры передачи . . . . .	214



## Глава 7. Четырехполосники с сосредоточенными параметрами

	<i>Стр.</i>
§ 7.1. Последовательный контур . . . . .	221
1. Коэффициент передачи . . . . .	221
2. Частотные характеристики . . . . .	222
3. Фазовые характеристики . . . . .	225
4. Энергетические соотношения . . . . .	226
§ 7.2. Параллельный контур . . . . .	228
1. Коэффициент передачи . . . . .	228
2. Частотные и фазовые характеристики . . . . .	230
3. Эквивалентный последовательный контур . . . . .	231
4. Энергетические соотношения . . . . .	232
5. Многоэлементные параллельные контуры . . . . .	234
§ 7.3. Связанные контуры . . . . .	235
1. Виды связи . . . . .	235
2. Коэффициент связи . . . . .	237
3. Коэффициент передачи . . . . .	239
4. Взаимное влияние связанных контуров . . . . .	240
5. Резонансные явления . . . . .	242
6. Энергетические соотношения . . . . .	244
7. Частотные и фазовые характеристики . . . . .	248
8. Несимметричные связанные контуры . . . . .	252
§ 7.4. Трансформаторы . . . . .	254
1. Реальный трансформатор . . . . .	254
2. Идеальный трансформатор . . . . .	257

## Глава 8. Цепи с распределенными параметрами

§ 8.1. Основы теории длинных линий . . . . .	261
1. Общие сведения о длинных линиях . . . . .	261
2. Телеграфные уравнения . . . . .	263
3. Бегущие волны . . . . .	267
4. Волновые параметры линии . . . . .	270
5. Коэффициент отражения . . . . .	274
6. Стоячие волны . . . . .	277
7. Смешанные волны . . . . .	281
8. Согласование длинных линий . . . . .	286
§ 8.2. Методы расчета длинных линий . . . . .	289
1. Расчет волновых параметров . . . . .	289
2. Расчет напряжений и токов . . . . .	293
3. Расчет энергетических параметров . . . . .	296
4. Расчет входного сопротивления линии . . . . .	299
5. Круговые диаграммы длинных линий . . . . .	301
6. Расчет сопротивлений и проводимостей по круговой диаграмме . . . . .	311
7. Расчет одношлейфового согласующего устройства . . . . .	316
8. Расчет двухшлейфового согласующего устройства . . . . .	318
§ 8.3. Двухполосники с распределенными параметрами . . . . .	321
1. Реактивные двухполосники . . . . .	321
2. Диссипативные двухполосники . . . . .	325
3. Металлические изоляторы . . . . .	331
4. Резонансные двухполосники . . . . .	335
§ 8.4. Четырехполосники с распределенными параметрами . . . . .	337
1. Линии связи . . . . .	337
2. Трансформаторы сопротивления . . . . .	338
3. Измерительные шлейфы . . . . .	340
4. Резонансные четырехполосники . . . . .	341

	<i>Стр.</i>
§ 9.1. Общие сведения о фильтрах . . . . .	344
1. Типы селективных систем . . . . .	344
2. Рабочие меры передачи фильтров . . . . .	347
3. Параметры фильтров . . . . .	353
4. Характеристические параметры фильтров . . . . .	356
5. Условие прозрачности фильтров . . . . .	359
6. Характеристики фильтров . . . . .	364
7. Расчет фильтров . . . . .	367
§ 9.2. Фильтры из связанных контуров . . . . .	371
1. Фильтры из двух связанных контуров . . . . .	371
2. Фильтры из трех связанных контуров . . . . .	372
3. Многоконтурные фильтры . . . . .	374
§ 9.3. Избирательные усилители . . . . .	376
1. Коэффициент передачи усилителя . . . . .	376
2. Избирательные усилители с настроенными контурами . . . . .	378
3. Избирательные усилители с расстроенными контурами . . . . .	381
§ 9.4. Цепочечные фильтры . . . . .	384
1. Характеристики цепочечных фильтров . . . . .	384
2. Фильтры типа $\rho$ . . . . .	387
3. Фильтры типа $m$ . . . . .	392
4. Применение цепочечных фильтров для задержки сигналов . . . . .	397
§ 9.5. Мостовые фильтры . . . . .	400
1. Характеристики мостовых фильтров . . . . .	400
2. Х-образные мостовые фильтры . . . . .	403
3. Дифференциально-мостовые фильтры . . . . .	405
4. Т-образные мостовые фильтры . . . . .	406
§ 9.6. Безындуктивные фильтры . . . . .	407
1. Пассивные $RC$ -фильтры . . . . .	407
2. Активные $RC$ -фильтры . . . . .	410
§ 9.7. Фильтры с распределенными параметрами . . . . .	412
1. Фильтры с волновыми двухполюсниками . . . . .	412
2. Фильтры из волновых четырехполюсников . . . . .	416
§ 9.8. Электромеханические фильтры . . . . .	419
1. Механические резонаторы . . . . .	419
2. Электромеханические резонаторы . . . . .	425
3. Фильтры с электромеханическими резонаторами . . . . .	430
4. Фильтры с механическими резонаторами . . . . .	433
§ 9.9. Гребенчатые фильтры . . . . .	435
1. Пассивные гребенчатые фильтры . . . . .	435
2. Активные гребенчатые фильтры . . . . .	438

## Глава 10. Сигналы и их спектры

§ 10.1. Основы спектрального анализа . . . . .	441
1. Виды спектров . . . . .	441
2. Основные свойства спектров . . . . .	448
3. Методы определения спектров . . . . .	450
§ 10.2. Управляющие сигналы и их спектры . . . . .	452
1. Виды управляющих сигналов . . . . .	452
2. Спектры управляющих сигналов . . . . .	454
§ 10.3. Модулированные сигналы и их спектры . . . . .	460
1. АМ-сигналы . . . . .	460
2. ЧМ-сигналы . . . . .	464
3. ФМ-сигналы . . . . .	471

## Глава 11. Переходные процессы в линейных цепях

Стр.

§ 11.1.	Общие сведения о переходных процессах . . . . .	474
1.	Основные определения . . . . .	474
2.	Методы исследования переходных процессов . . . . .	478
§ 11.2.	Переходные процессы в аperiodических цепях . . . . .	484
1.	Переходные процессы в цепи с емкостью . . . . .	484
2.	Переходные процессы в цепи с индуктивностью . . . . .	487
§ 11.3.	Переходные процессы в резонансных цепях . . . . .	488
1.	Включение источника постоянной э. д. с. в последовательном контуре . . . . .	488
2.	Выключение источника постоянной э. д. с. в последовательном контуре . . . . .	492
3.	Выключение и включение источника синусоидальной э. д. с. в последовательном контуре . . . . .	495
4.	Переходные процессы в параллельном контуре . . . . .	499
5.	Переходные процессы в связанных контурах . . . . .	502
§ 11.4.	Переходные процессы в длинных линиях . . . . .	507
1.	Переходные процессы при $R_n > W$ и $R_i < W$ . . . . .	507
2.	Переходные процессы при $R_n > W$ и $R_i > W$ . . . . .	511
3.	Переходные процессы в разомкнутой линии при $R_i = W$ . . . . .	514
4.	Переходные процессы при $R_n < W$ . . . . .	515
5.	Переходные процессы при включении источника синусоидальной э. д. с. . . . .	516

## Глава 12. Прохождение сигналов через линейные цепи

§ 12.1.	Прохождение произвольных сигналов через линейные цепи . . .	520
1.	Методы анализа . . . . .	520
2.	Связь между характеристиками линейной цепи . . . . .	522
3.	Условия отсутствия искажений . . . . .	527
§ 12.2.	Прохождение модулированных сигналов через линейные цепи	531
1.	Прохождение модулированных сигналов через селективные цепи	531
2.	Прохождение радиопульсов через селективные цепи . . . . .	536
3.	Прохождение модулированных сигналов через длинные линии . . .	540
Заключение . . . . .		541
Литература . . . . .		543
Приложения . . . . .		544



1р.23к.

ИЗДАТЕЛЬСТВО МОСКВА  
1971 год  
ВЫСШАЯ ШКОЛА

