X 1974

3 5 9

ТУ 19—32—73

6

1

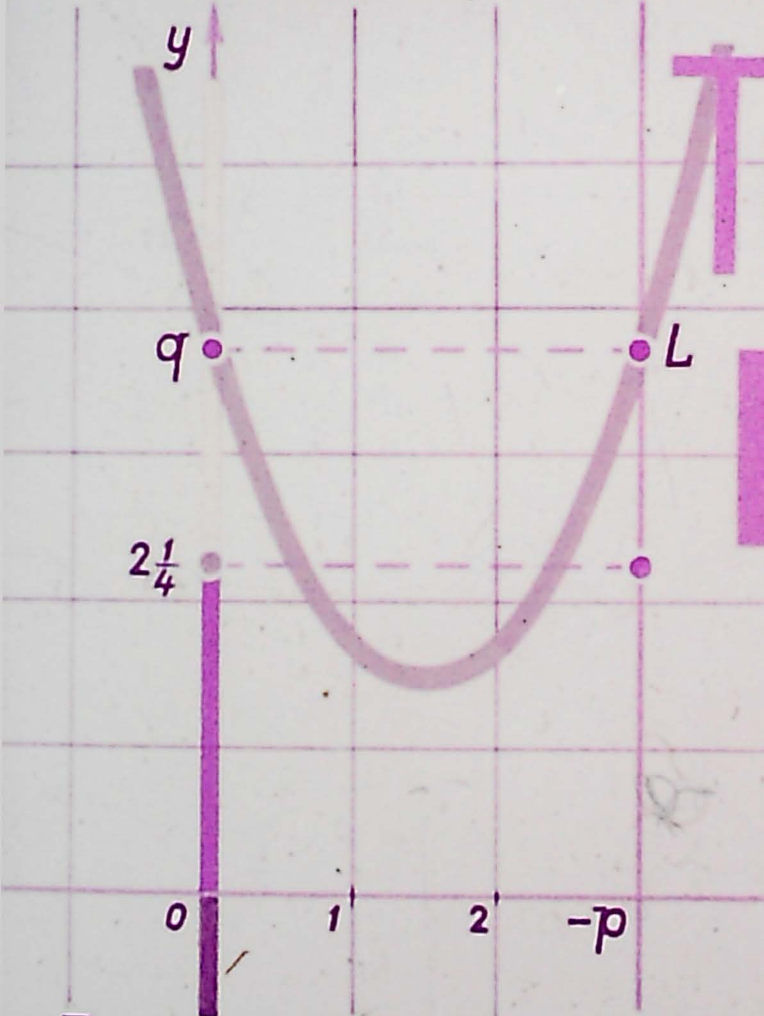
ДИАФИЛЬМ

07—3—170

По заказу Министерства просвещения РСФСР

Теорема Виета.

Исследование квадратного уравнения



Диафильм по математике для 8—9 классов

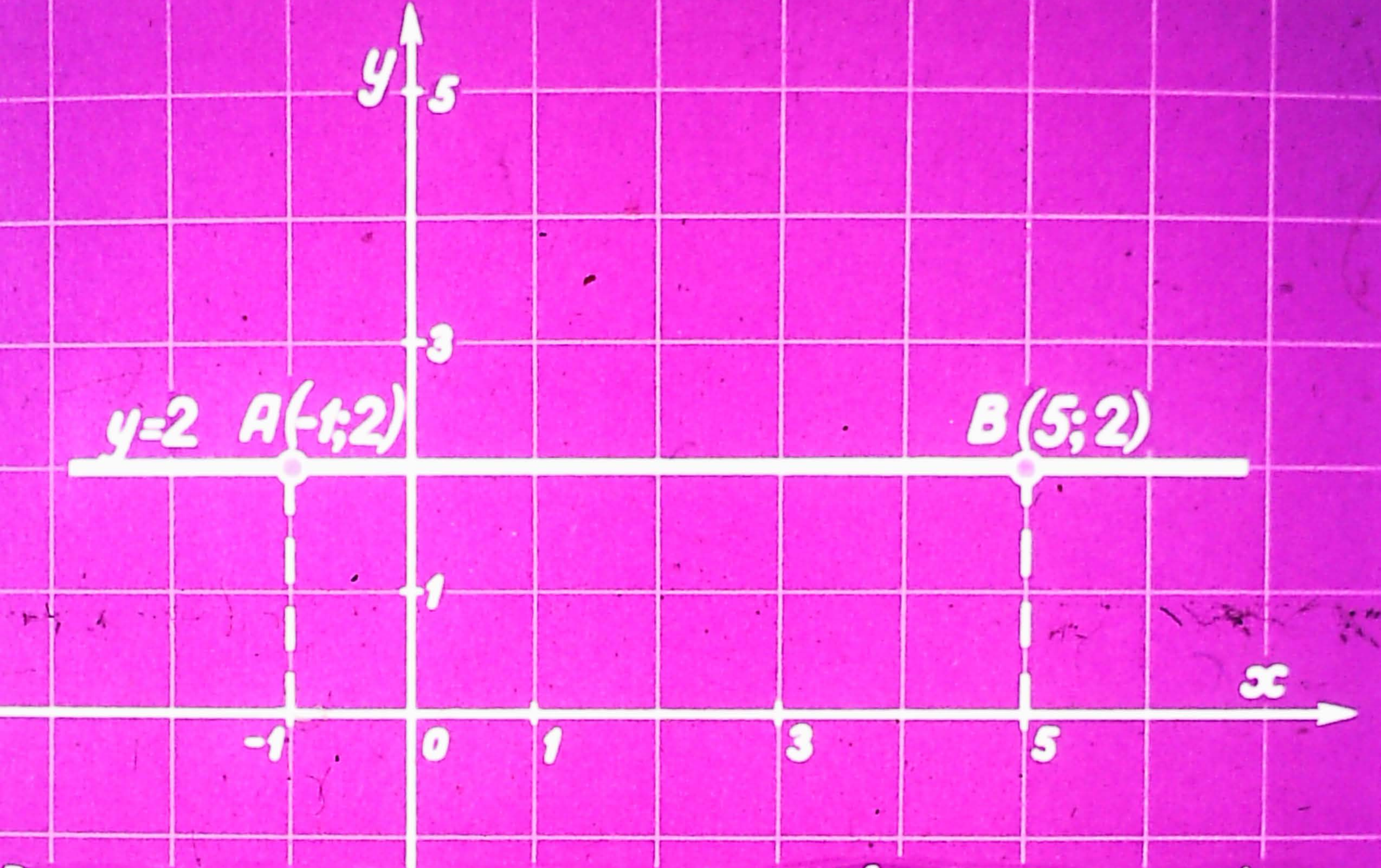
Теорема Виета

Если числа x_1 и x_2 — корни уравнения

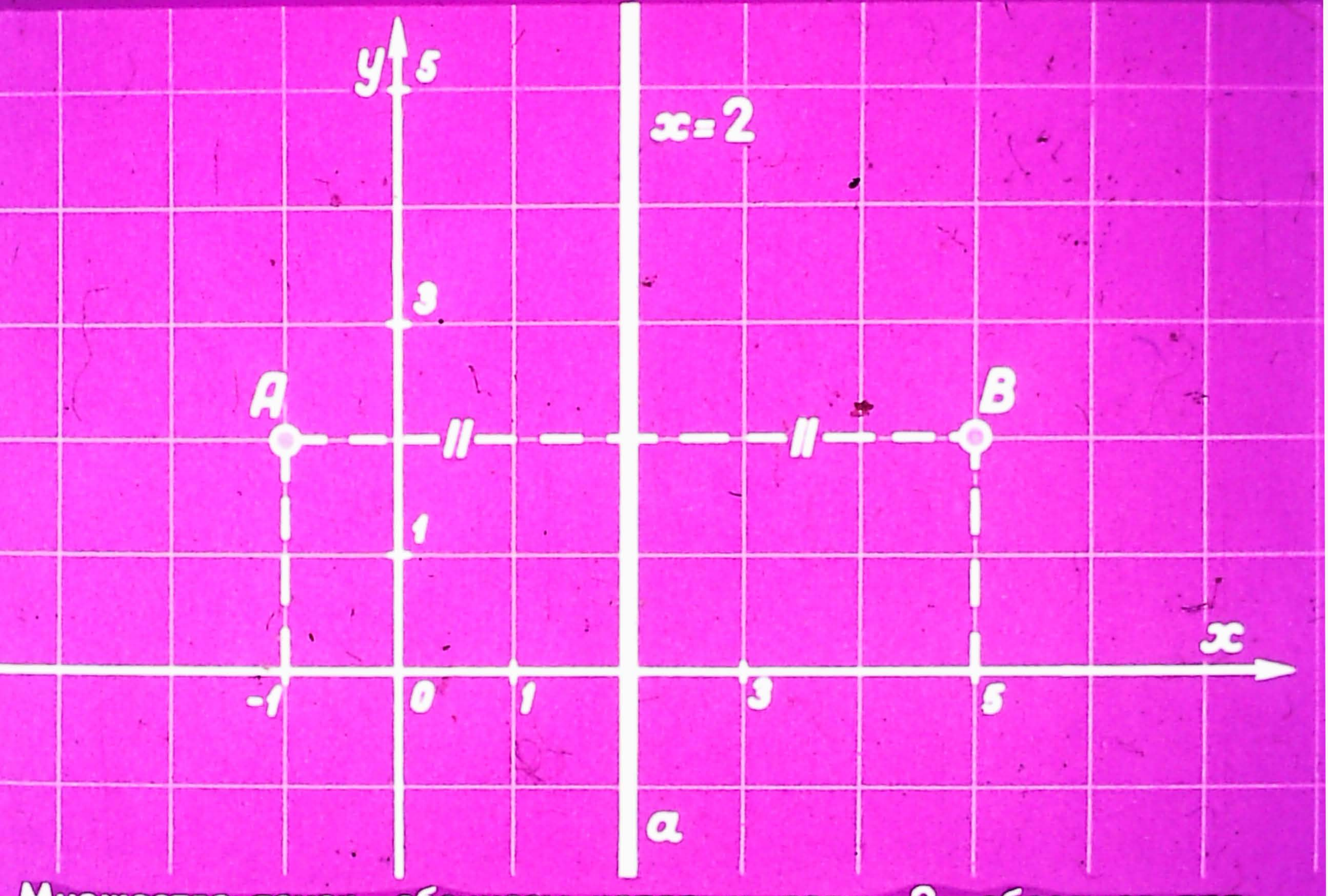
(I) $x^2+px+q=0$,

то верны равенства: $x_1+x_2=-p$ и $x_1x_2=q$.

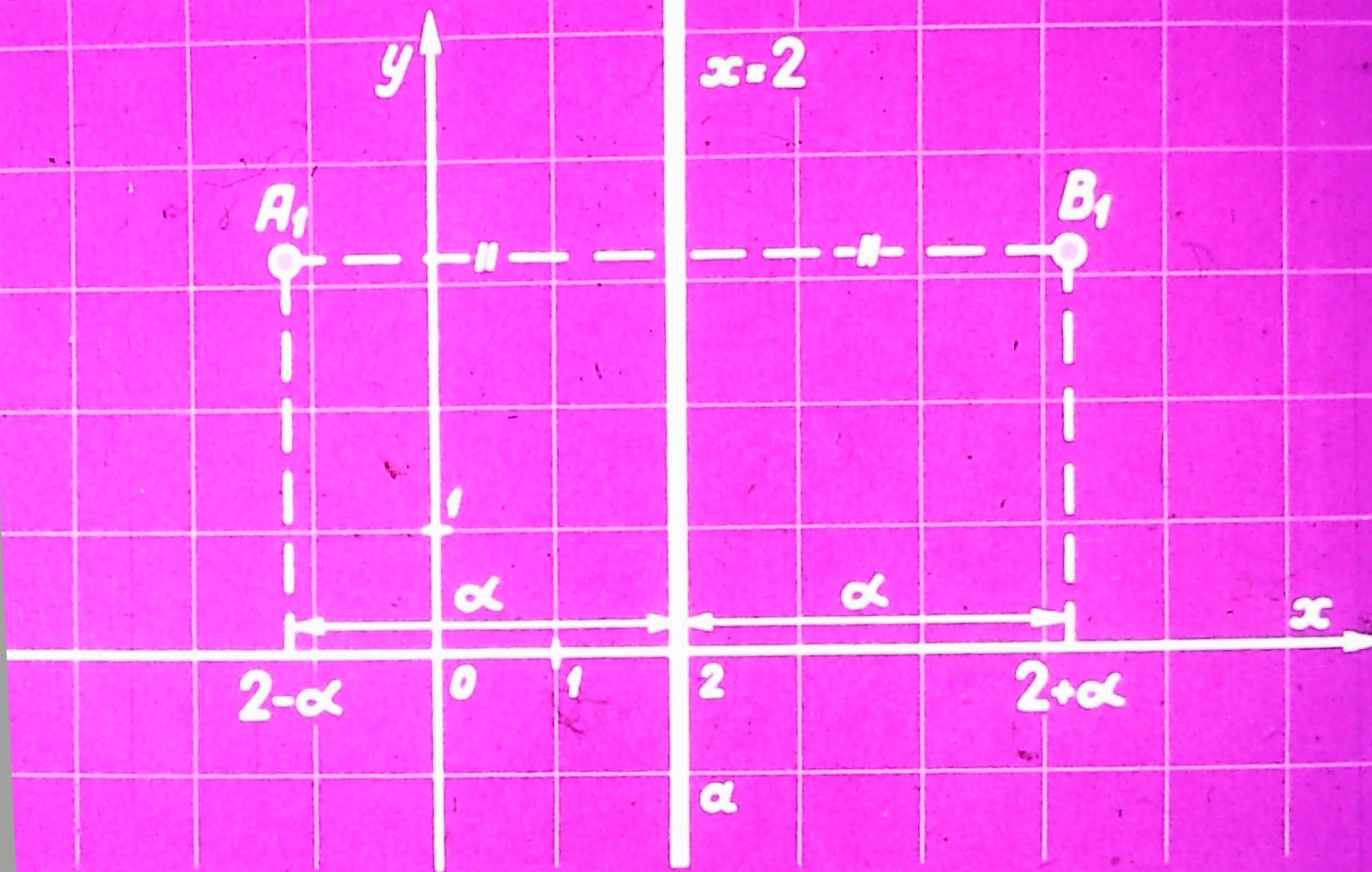
Это утверждение носит название теоремы Виета. Выясним геометрический смысл коэффициентов p и q уравнения (I).



Рассмотрим квадратный трёхчлен $y=x^2+px+q$ при $p=-4$ и $q=-3$. Если $y=2$, то, сделав подстановку в уравнение $y=x^2-4x-3$, можно найти, что $x=-1$ или $x=5$. Значит, точки $A(-1;2)$ и $B(5;2)$ принадлежат графику G этого трёхчлена. 4

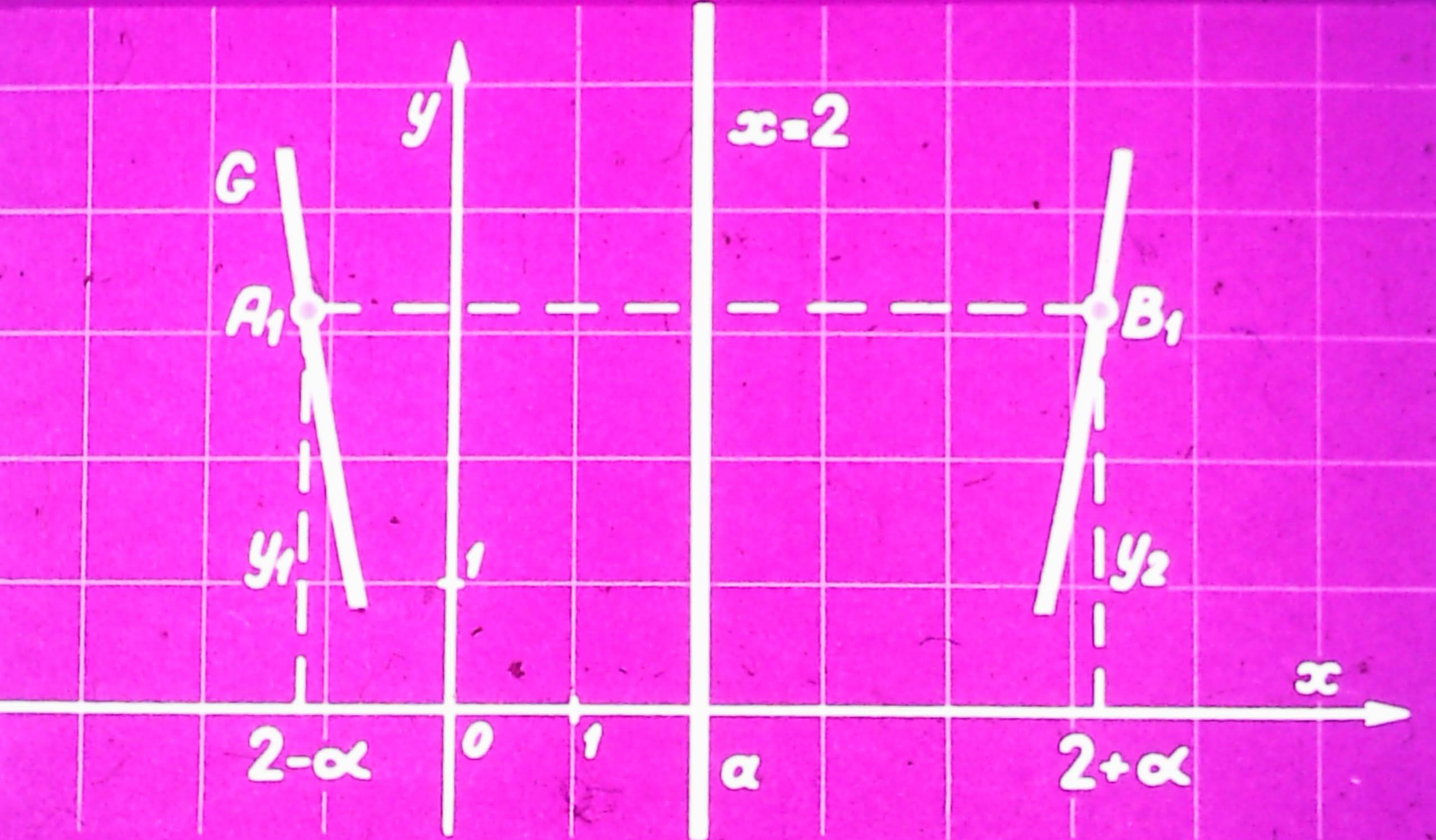


Множество точек, абсциссы которых равны 2, образуют прямую a — ось симметрии точек A и B. Уравнение прямой a: $x=2$ (число 2 равно полусумме абсцисс точек A и B).



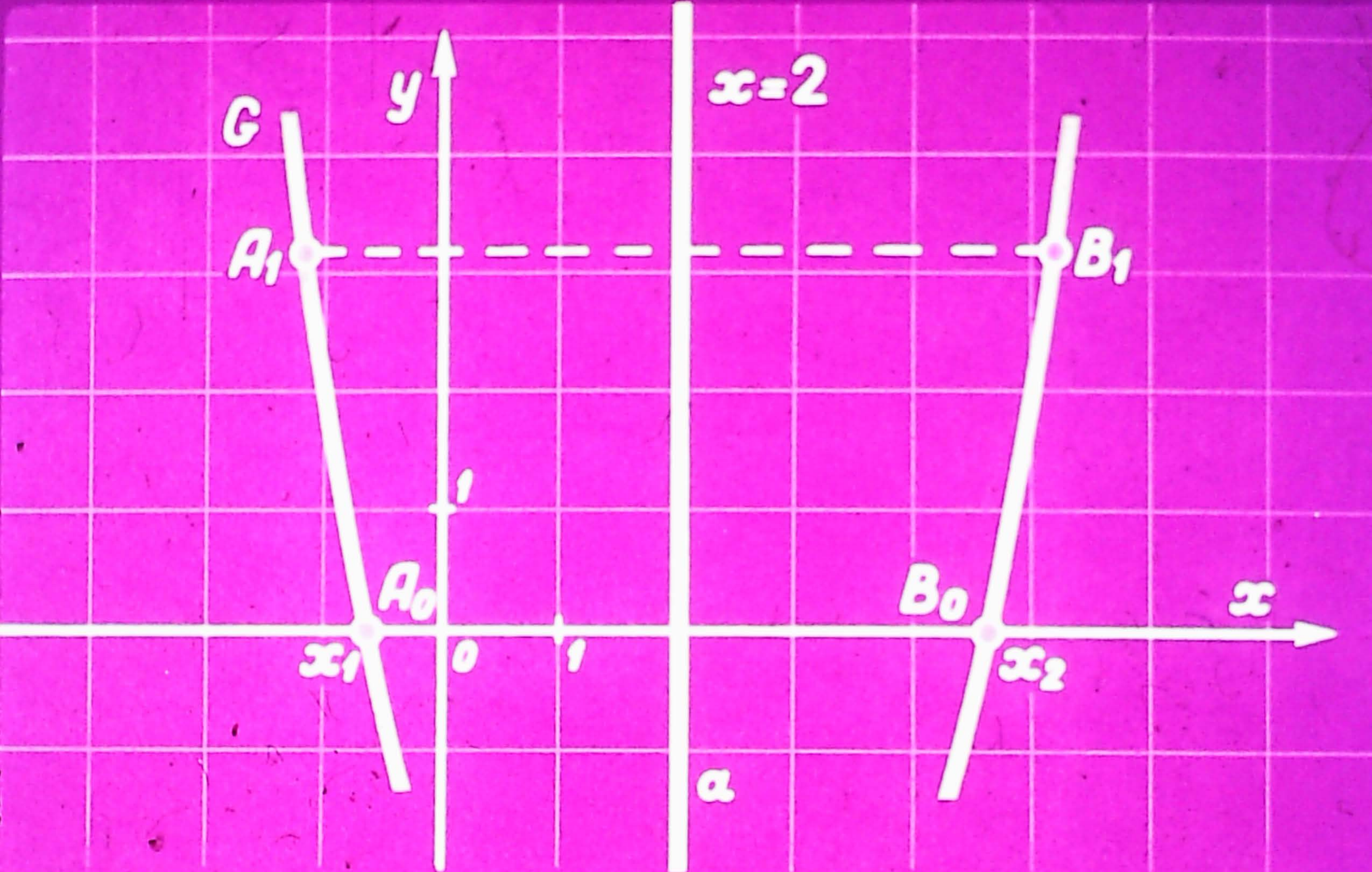
Пусть точка A_1 удалена от прямой a на α единиц $(\alpha \geq 0)$; тогда её абсцисса равна $2-\alpha$. Точка B_1, симметричная A_1 относительно прямой a, имеет абсциссу $2+\alpha$.

6



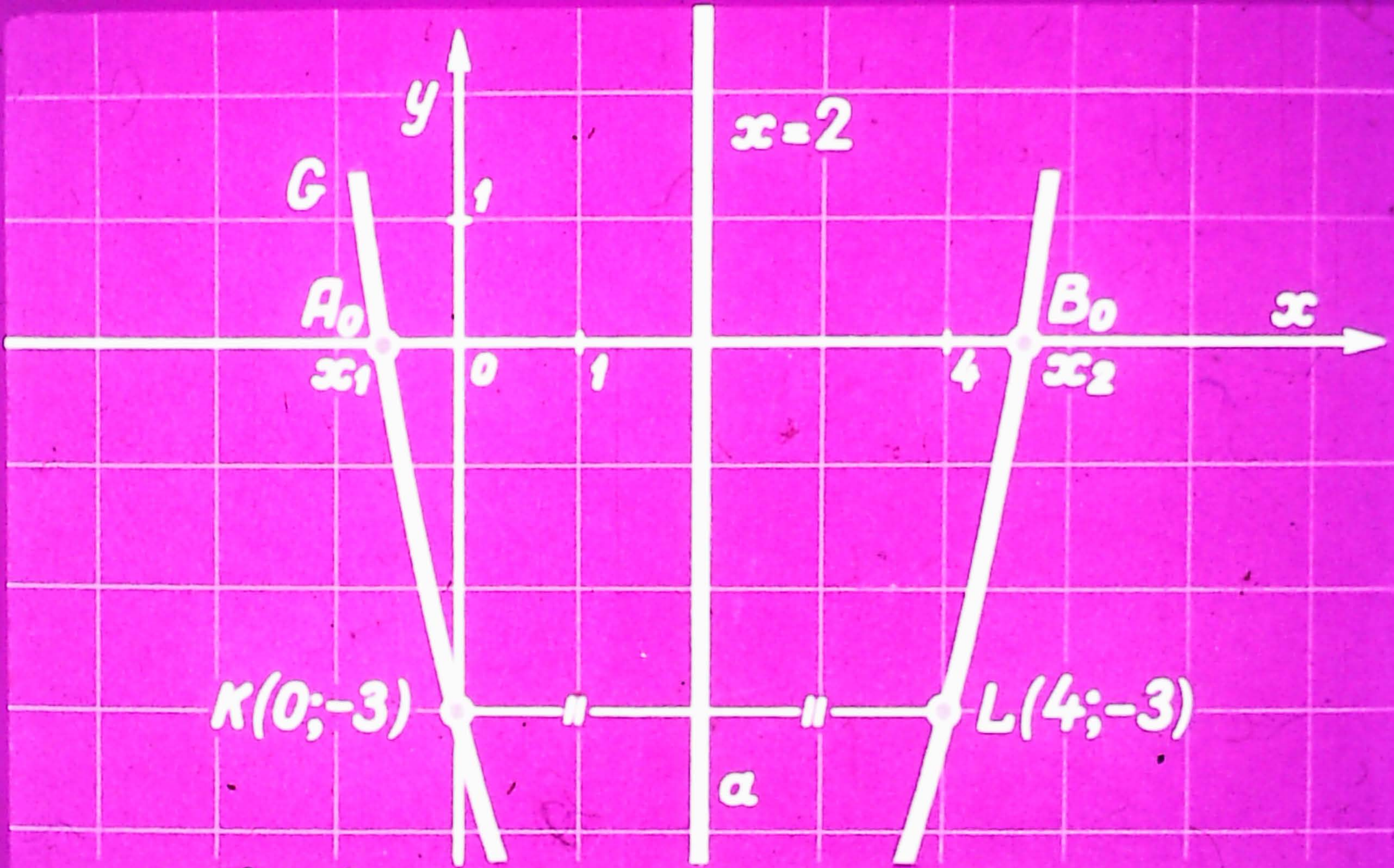
Если точка A_1 принадлежит графику G трёхчлена $y=x^2-4x-3$, то B_1 тоже принадлежит ему (и наоборот). Действительно, $y_1=(2-\alpha)^2-4(2-\alpha)-3=\alpha^2-7$; $y_2=(2+\alpha)^2-4(2+\alpha)-3=\alpha^2-7$, и поэтому $y_1=y_2$. Значит, прямая a — ось симметрии графика G.

7



Если график G пересекается с осью Ox, то точки пересечения A_0 и B_0 симметричны относительно прямой a. Их абсциссы x_1 и x_2 являются корнями трёхчлена.

8



Точка $K(0;-3)$ есть точка пересечения графика G с осью Oy, так как при $x=0$ значение $y=-3$. Точка L, симметричная K относительно прямой a, имеет координаты $(4;-3)$.

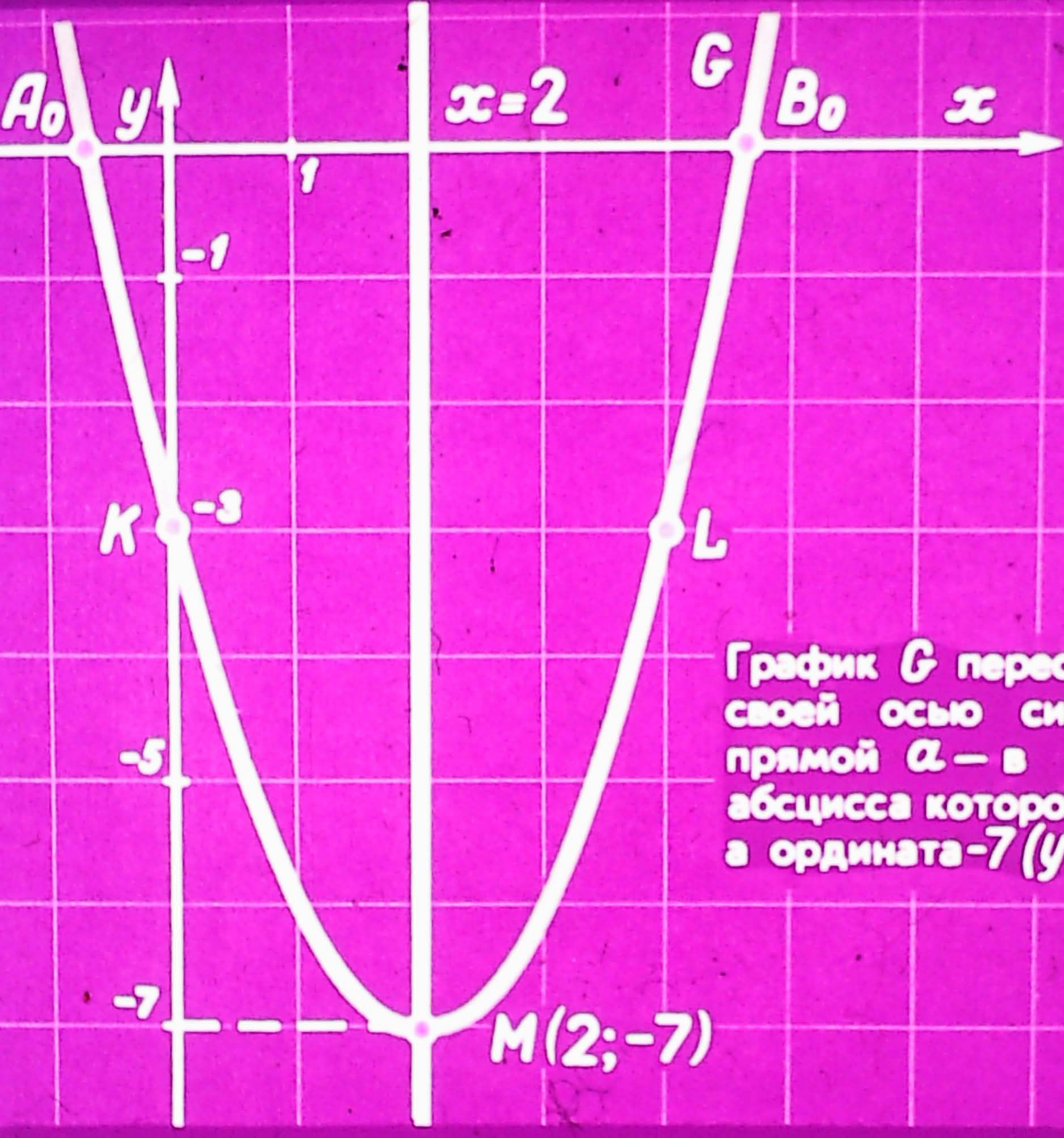
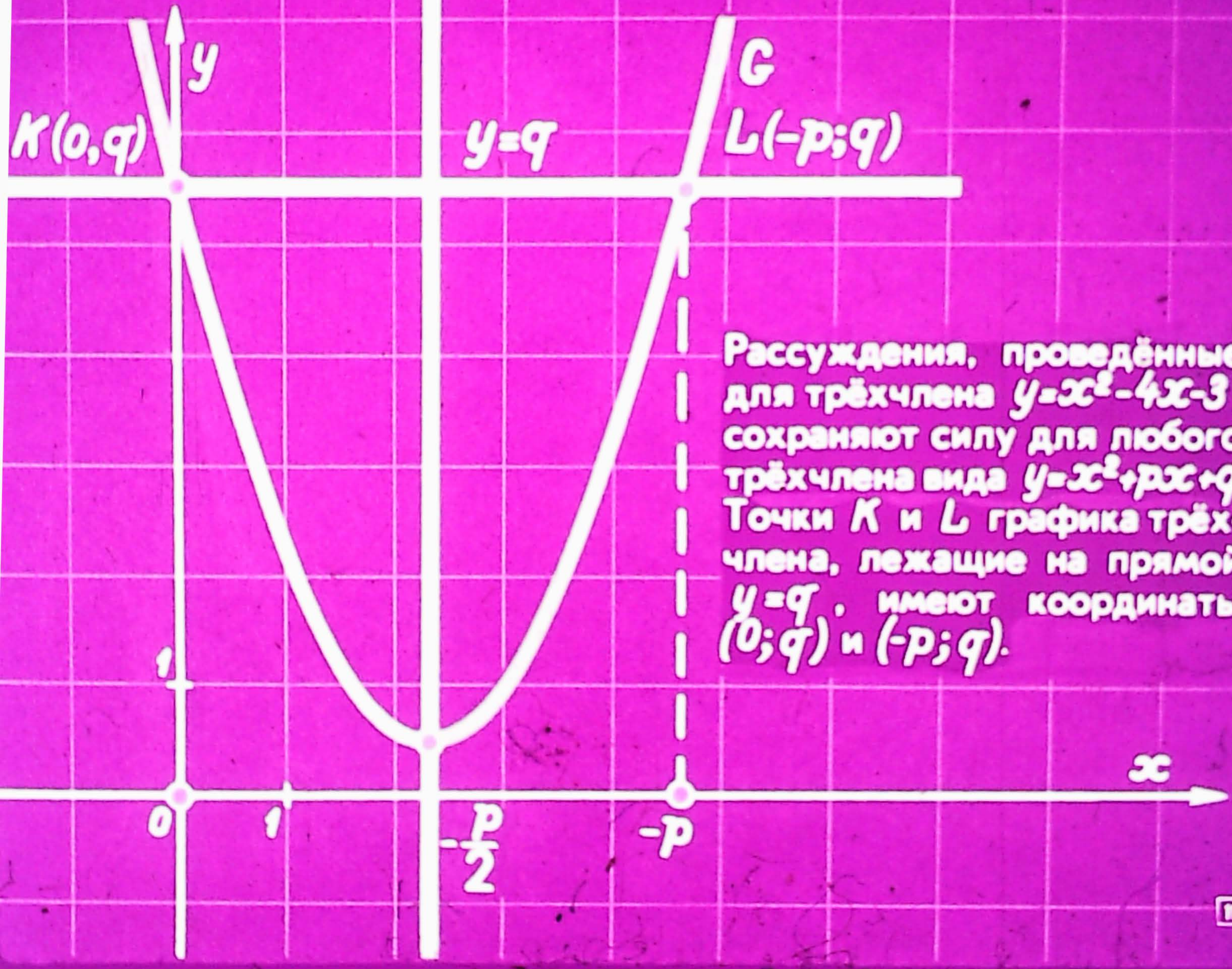
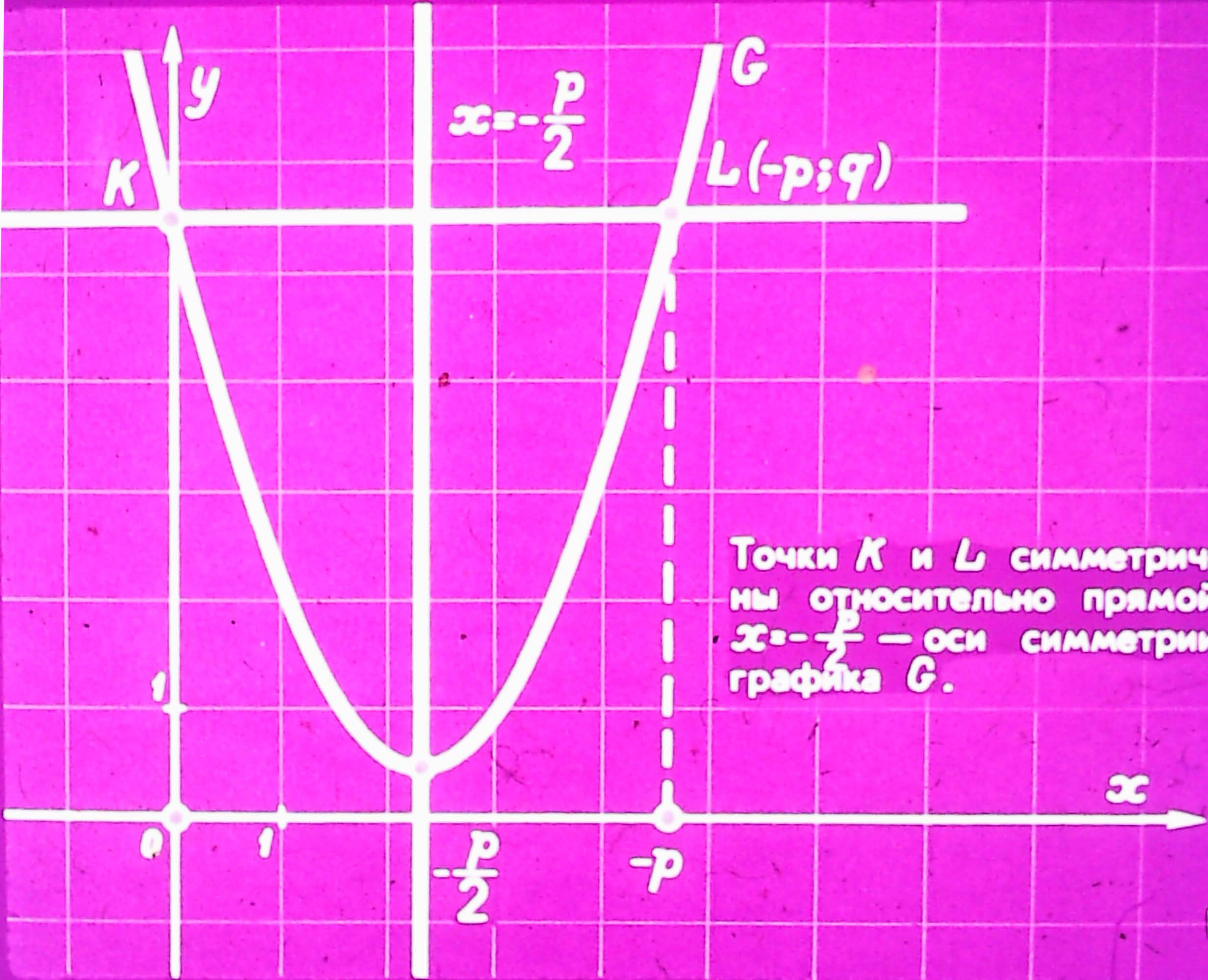


График G пересекается со своей осью симметрии — прямой a — в точке M, абсцисса которой равна 2, а ордината −7 ($y=2^2-4\cdot2-3=-7$).

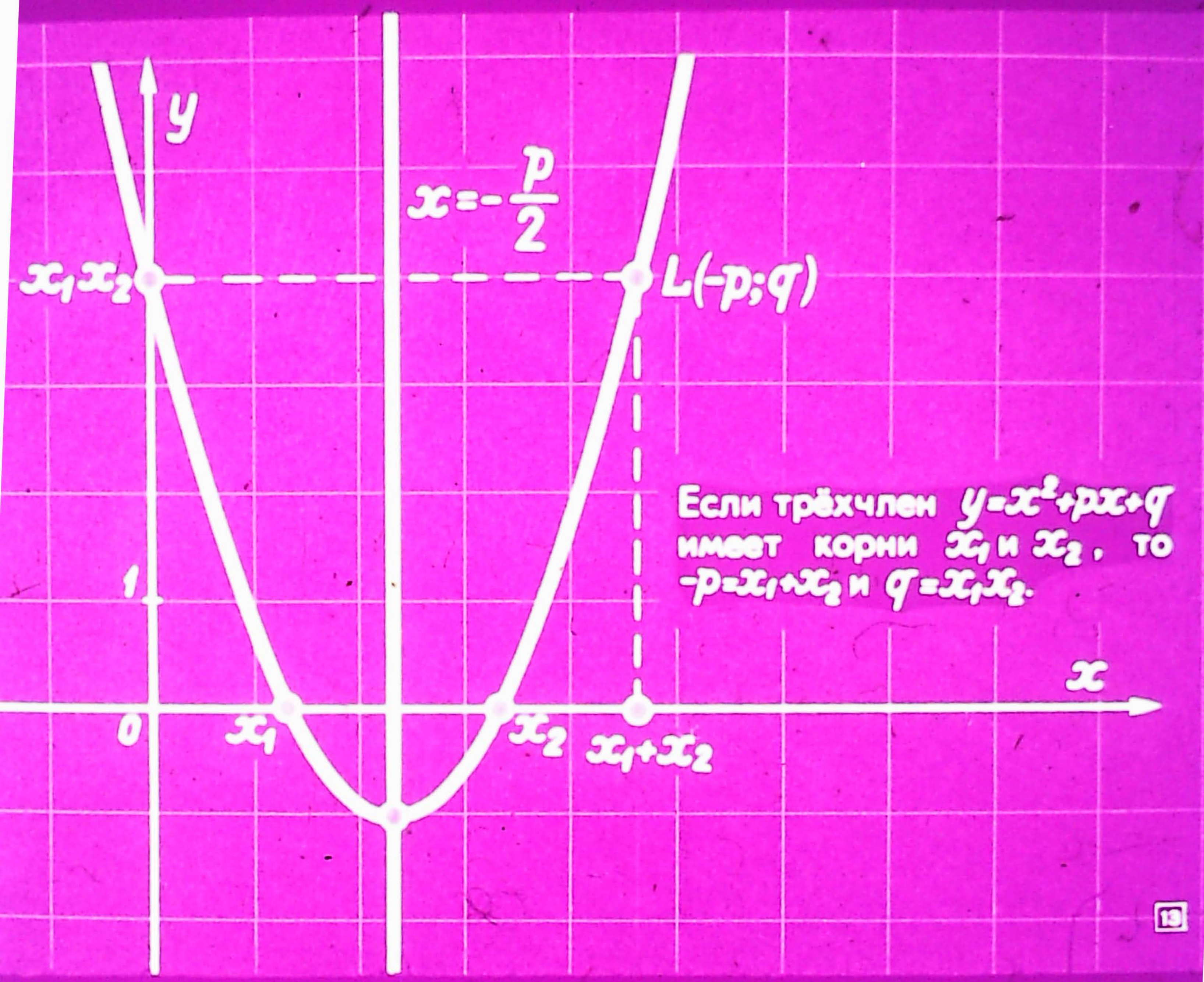


Рассуждения, проведённые для трёхчлена $y=x^2-4x-3$, сохраняют силу для любого трёхчлена вида $y=x^2+px+q$. Точки K и L графика трёхчлена, лежащие на прямой $y=q$, имеют координаты $(0;q)$ и $(-p;q)$.



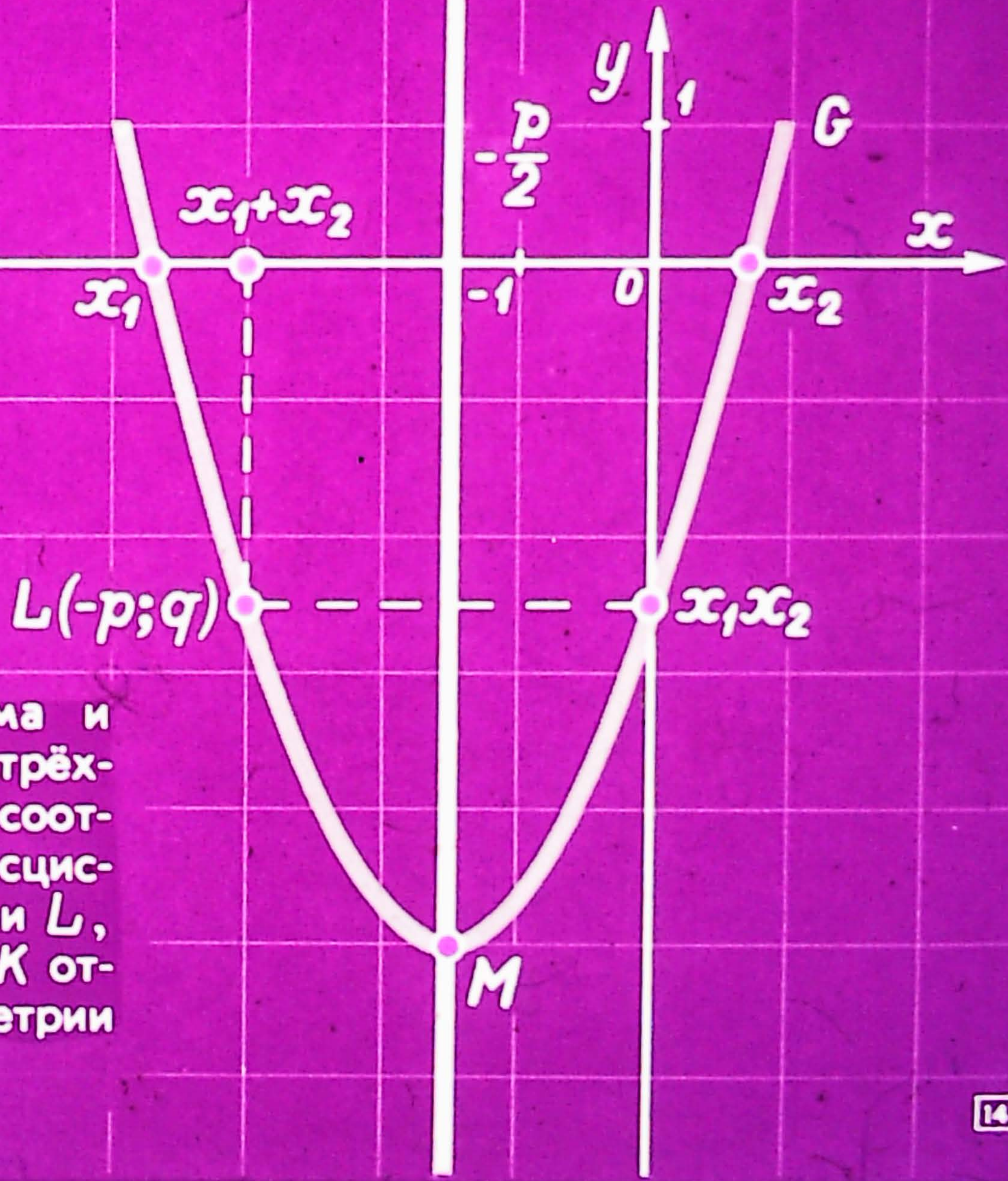
Точки K и L симметричны относительно прямой $x=-\frac{p}{2}$ — оси симметрии графика G.

12



Если трёхчлен $y = x^2 + px + q$ имеет корни x_1 и x_2, то $-p = x_1 + x_2$ и $q = x_1x_2$.

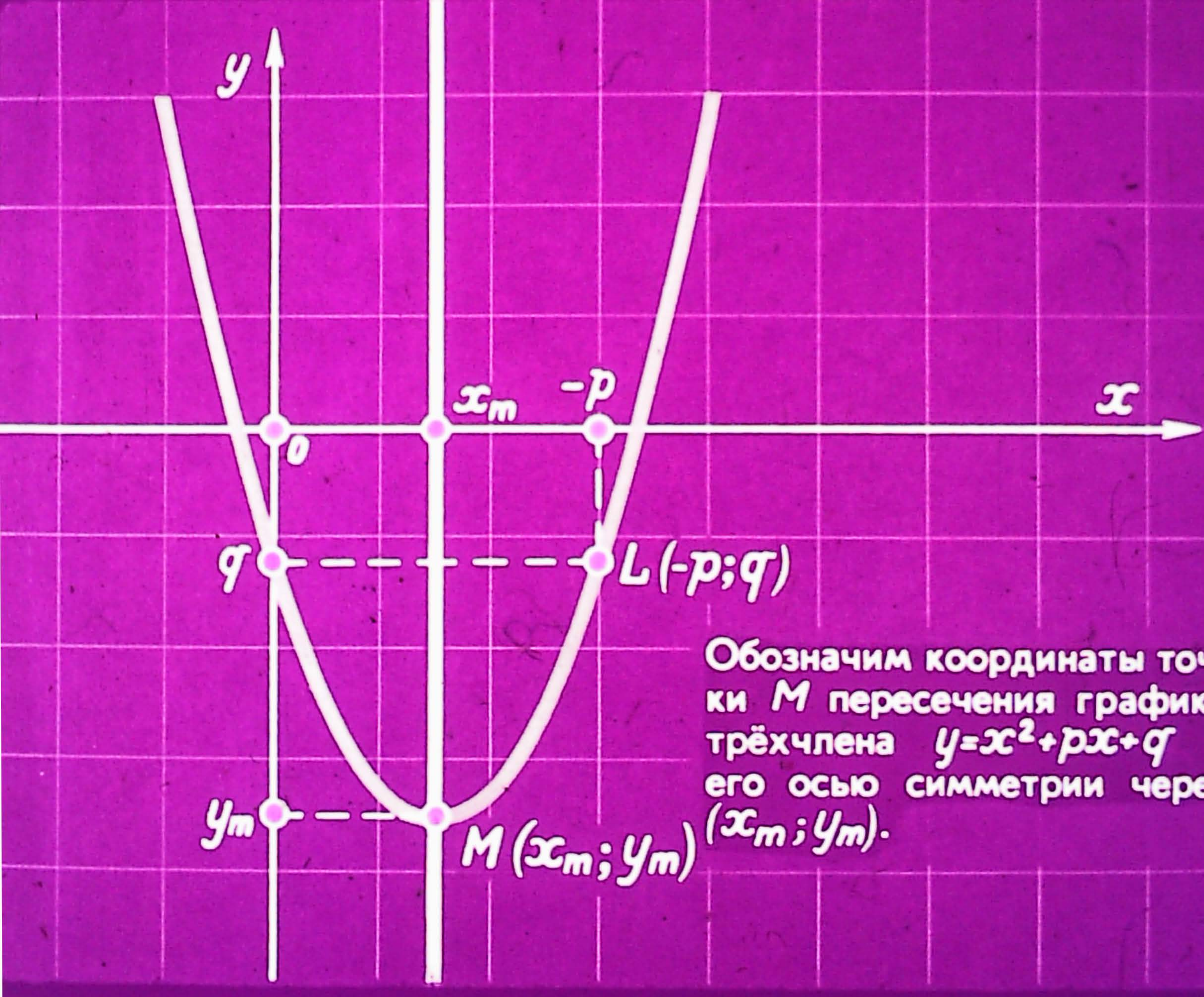
13



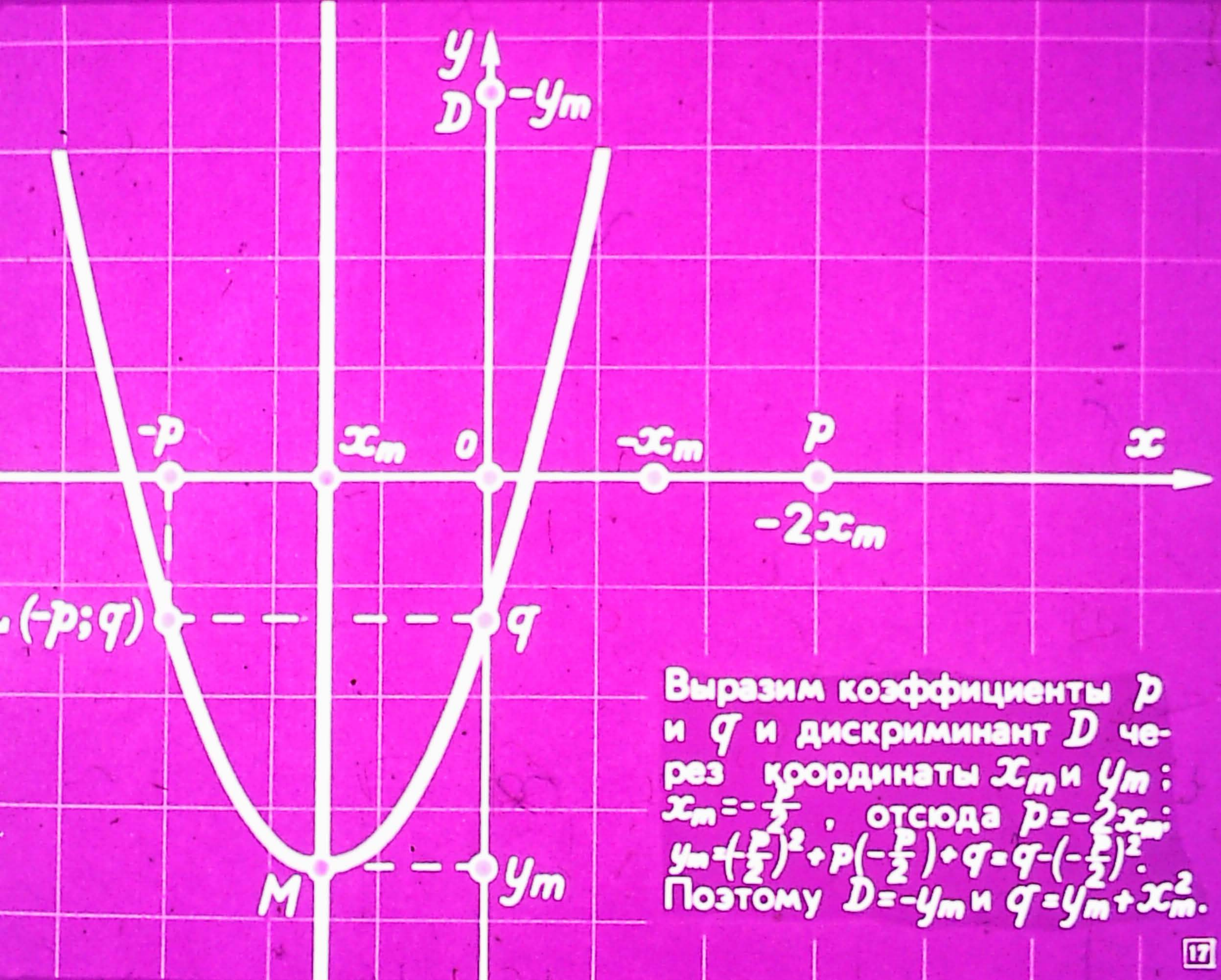
Следовательно, сумма и произведение корней трёхчлена $y=x^2+px+q$ соответственно равны абсциссе и ординате точки L, симметричной точке K относительно оси симметрии параболы G.

Выражение $\left(\frac{p}{2}\right)^2-q$ называют дискриминантом уравнения $x^2+px+q=0$ и обозначают буквой D.

Выясним геометрический смысл дискриминанта.

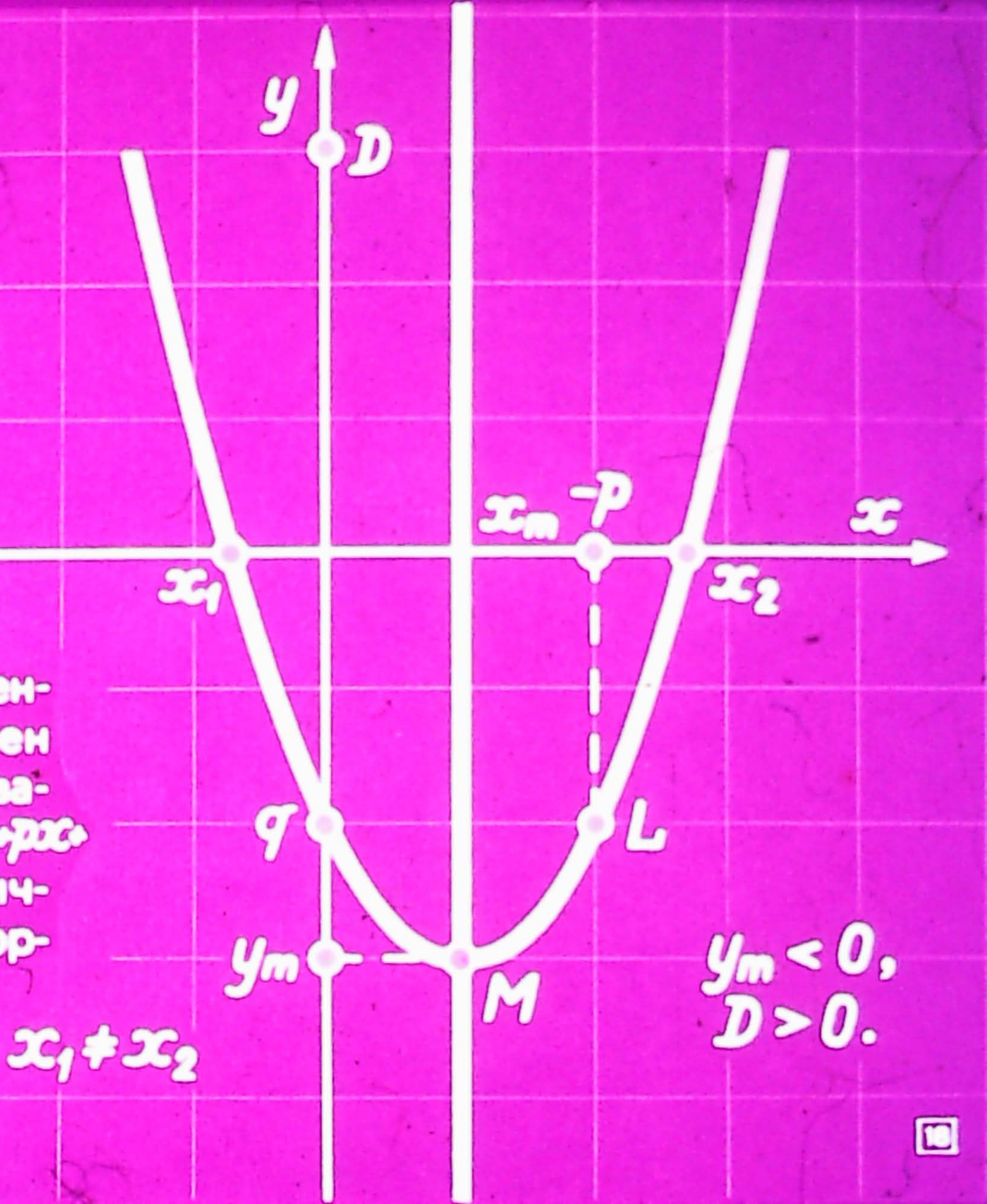


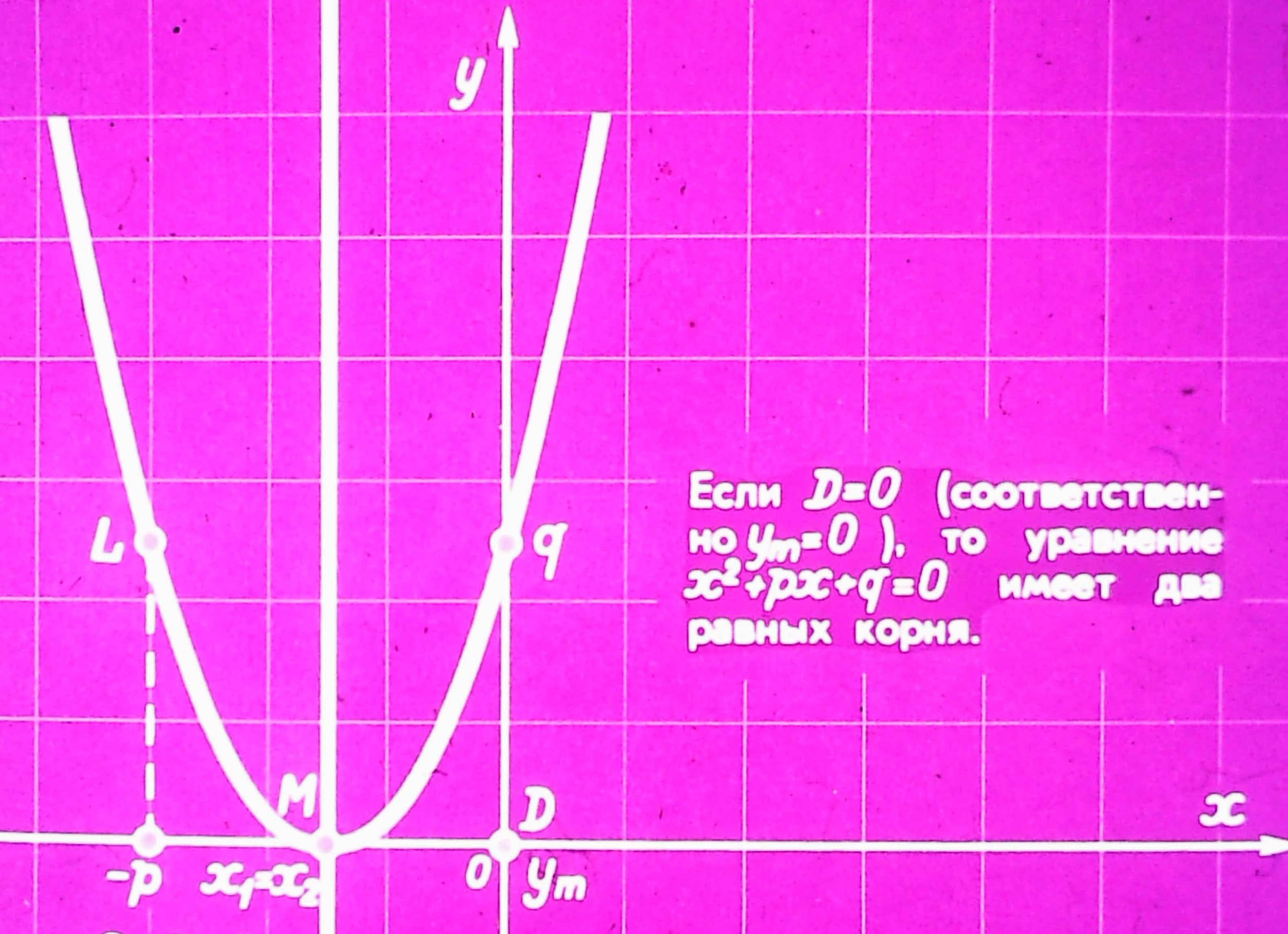
Обозначим координаты точки M пересечения графика трёхчлена $y=x^2+px+q$ с его осью симметрии через $(x_m;y_m)$.



Выразим коэффициенты p и q и дискриминант D через координаты x_m и y_m: $x_m = -\frac{p}{2}$, отсюда $p = -2x_m$; $y_m = \left(-\frac{p}{2}\right)^2 + p\left(-\frac{p}{2}\right) + q = q - \left(-\frac{p}{2}\right)^2$. Поэтому $D = -y_m$ и $q = y_m + x_m^2$.

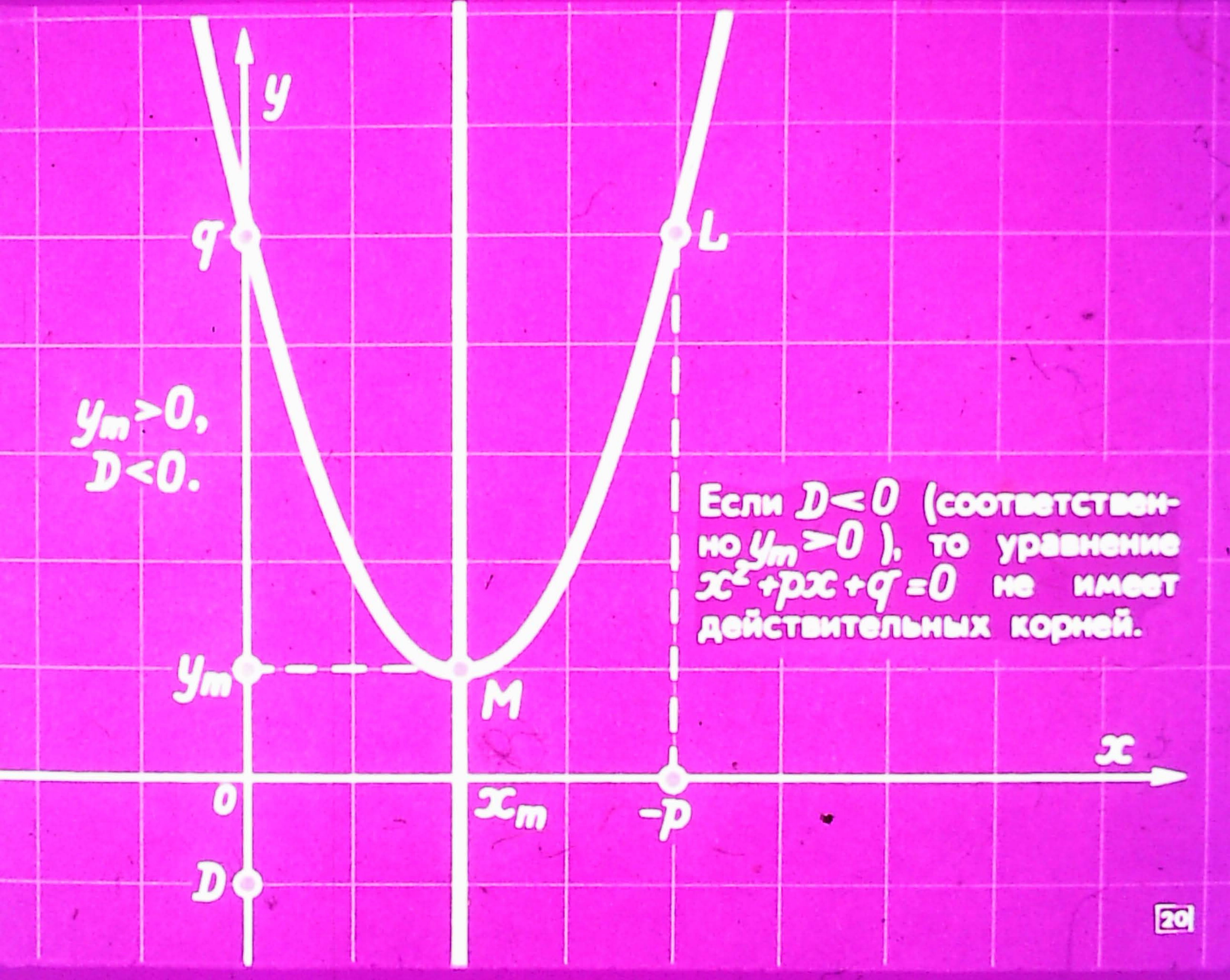
Если $D > 0$ (соответственно $y_m < 0$), то трёхчлен $y = x^2 + px + q$, а следовательно, и уравнение $x^2 + px + q = 0$ имеют два различных (действительных) корня.



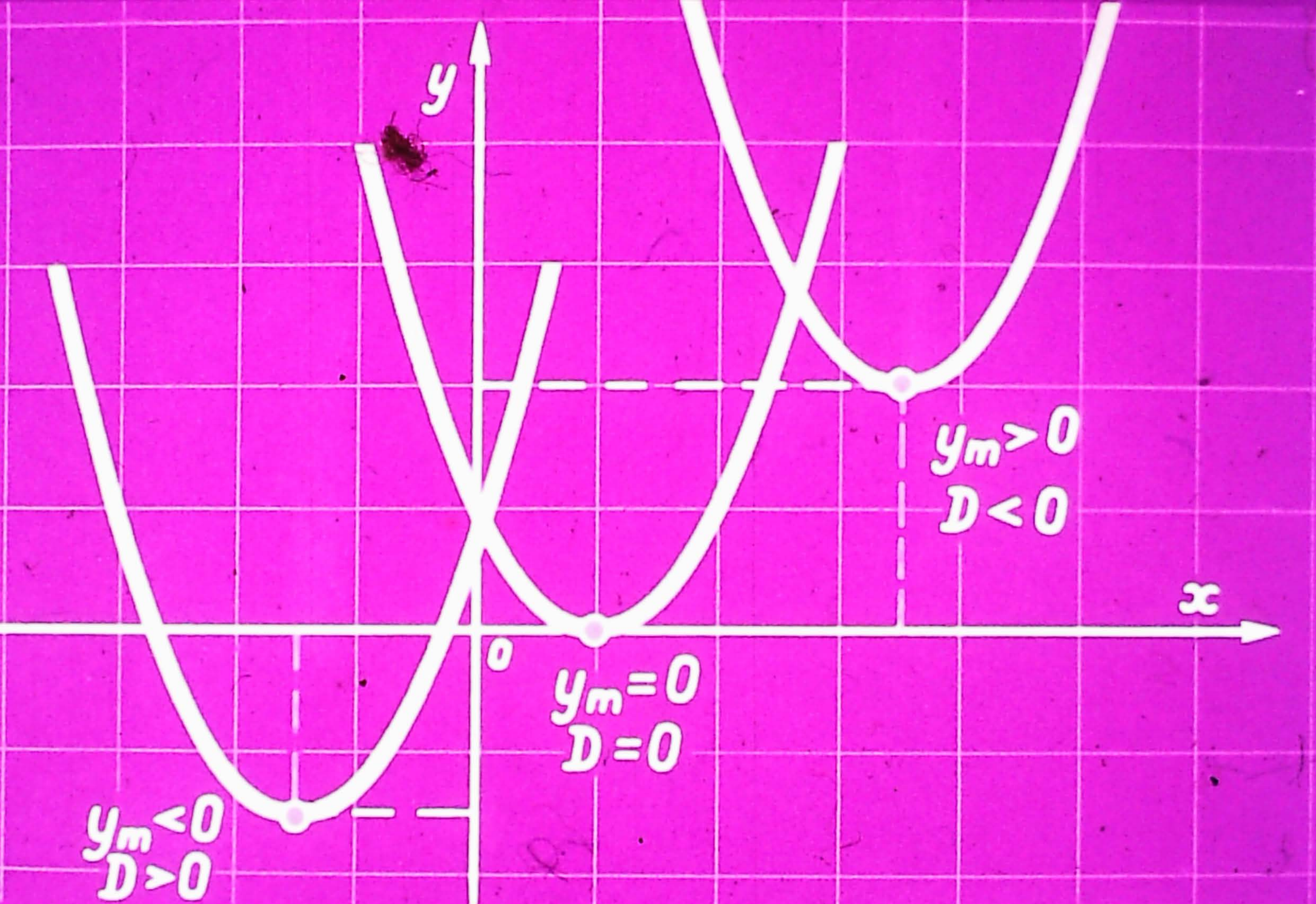


Если $D=0$ (соответственно $y_m=0$), то уравнение $x^2+px+q=0$ имеет два равных корня.

$y_m=0$, $D=0$.



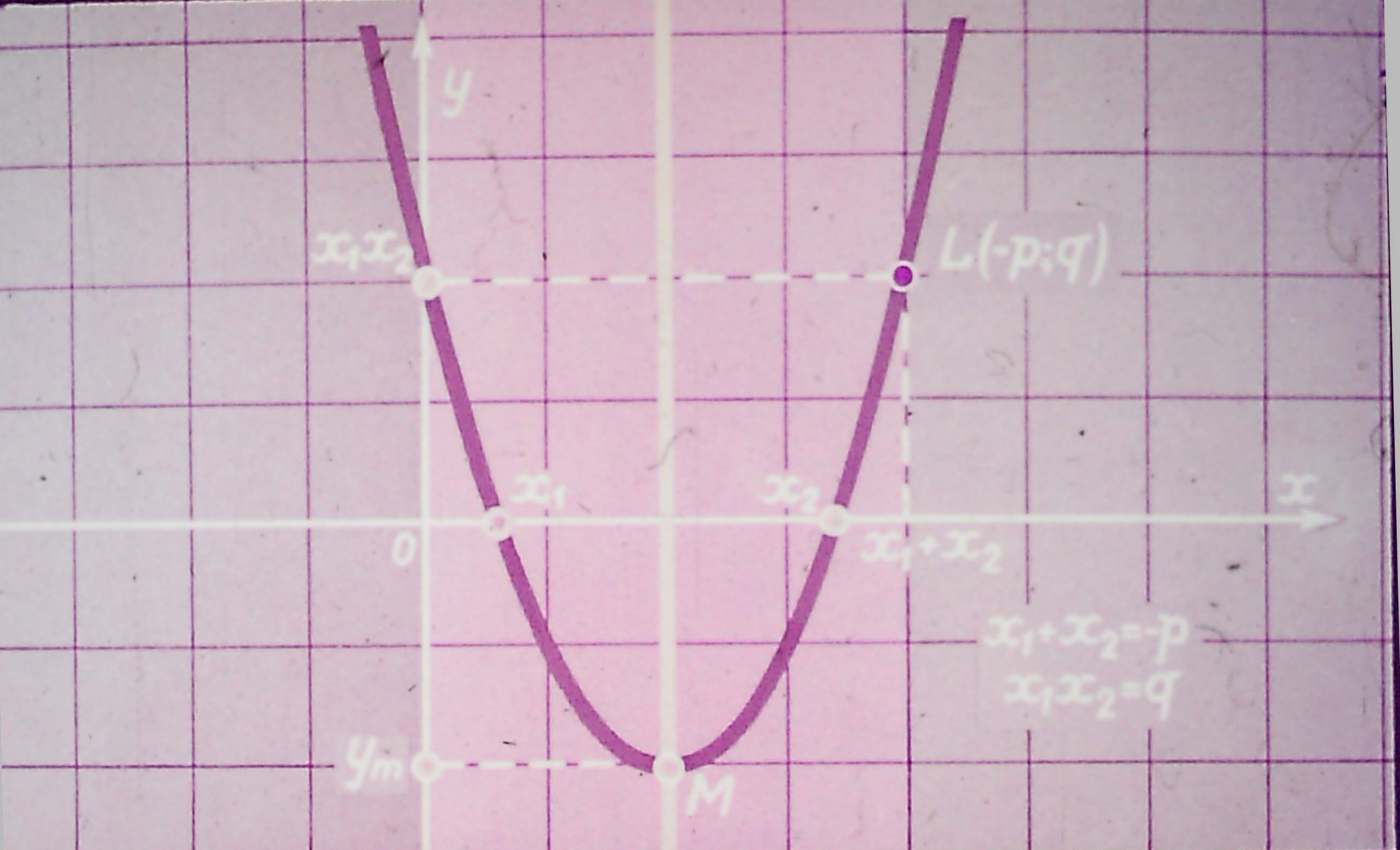
y
q
L
$y_m > 0,$
$D < 0.$
Если $D < 0$ (соответственно $y_m > 0$), то уравнение $x^2 + px + q = 0$ не имеет действительных корней.
y_m
M
x
0
x_m
$-p$
D
20



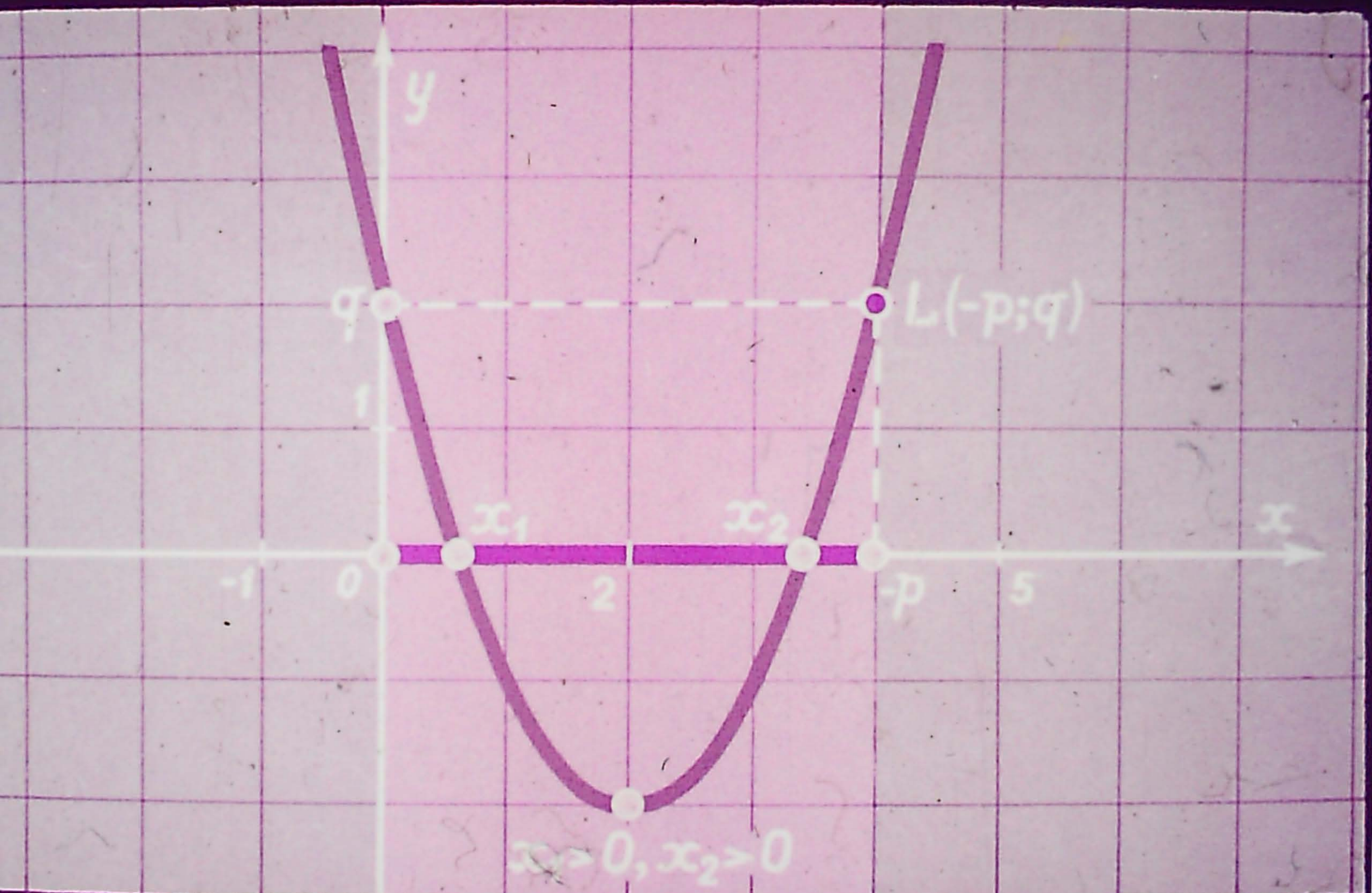
ким образом, с геометрической точки зрения значение ди-
риминанта D —это число, противоположное ординате y_m
ршины параболы.

Исследование *квадратного* уравнения

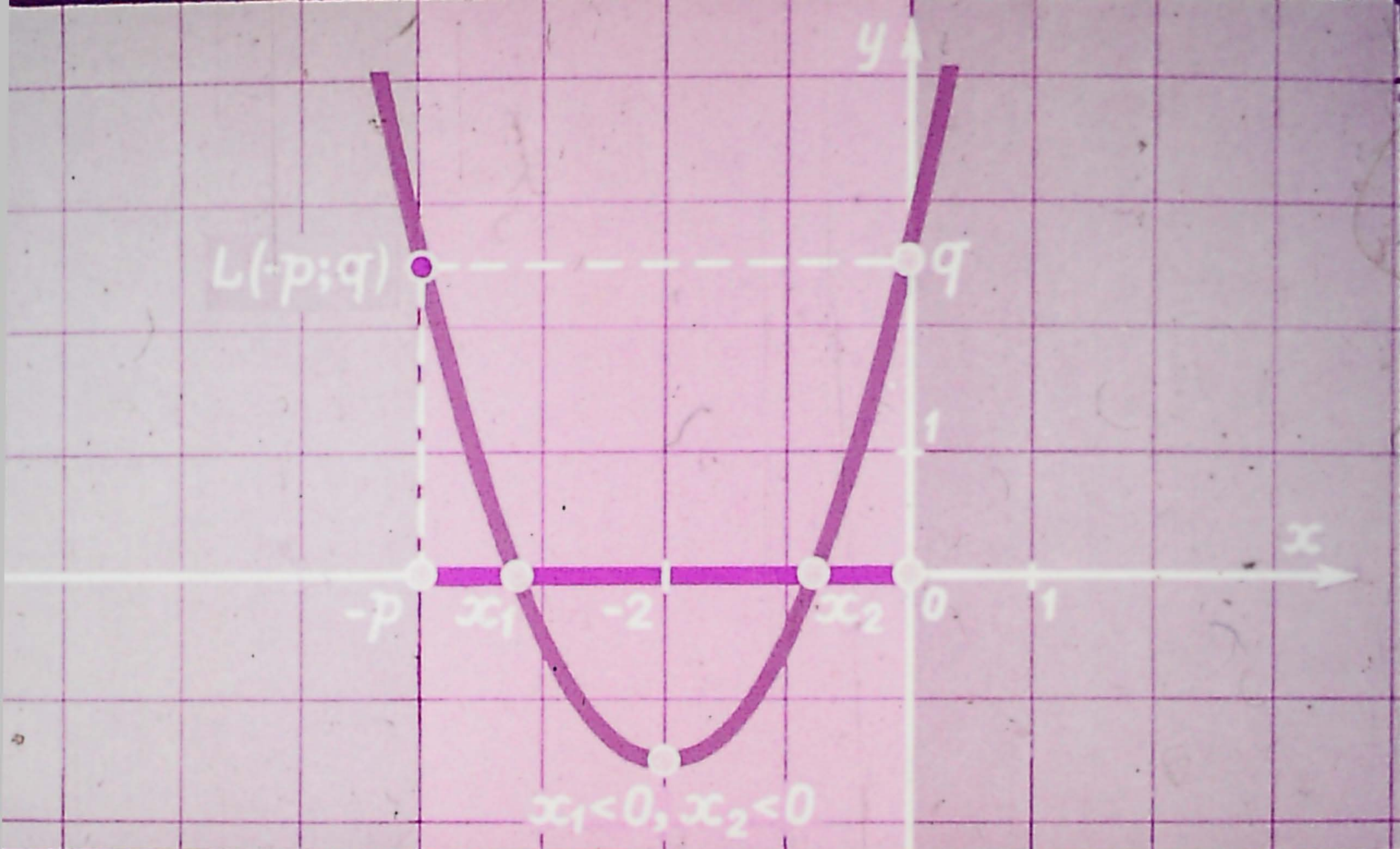
Мы установили, что с помощью дискриминанта можно узнавать, в каком случае уравнение имеет различные корни, равные корни или не имеет корней. Если $D>0$, то по коэффициентам p и q можно выяснить, каковы знаки корней и какой из них по модулю больше другого.



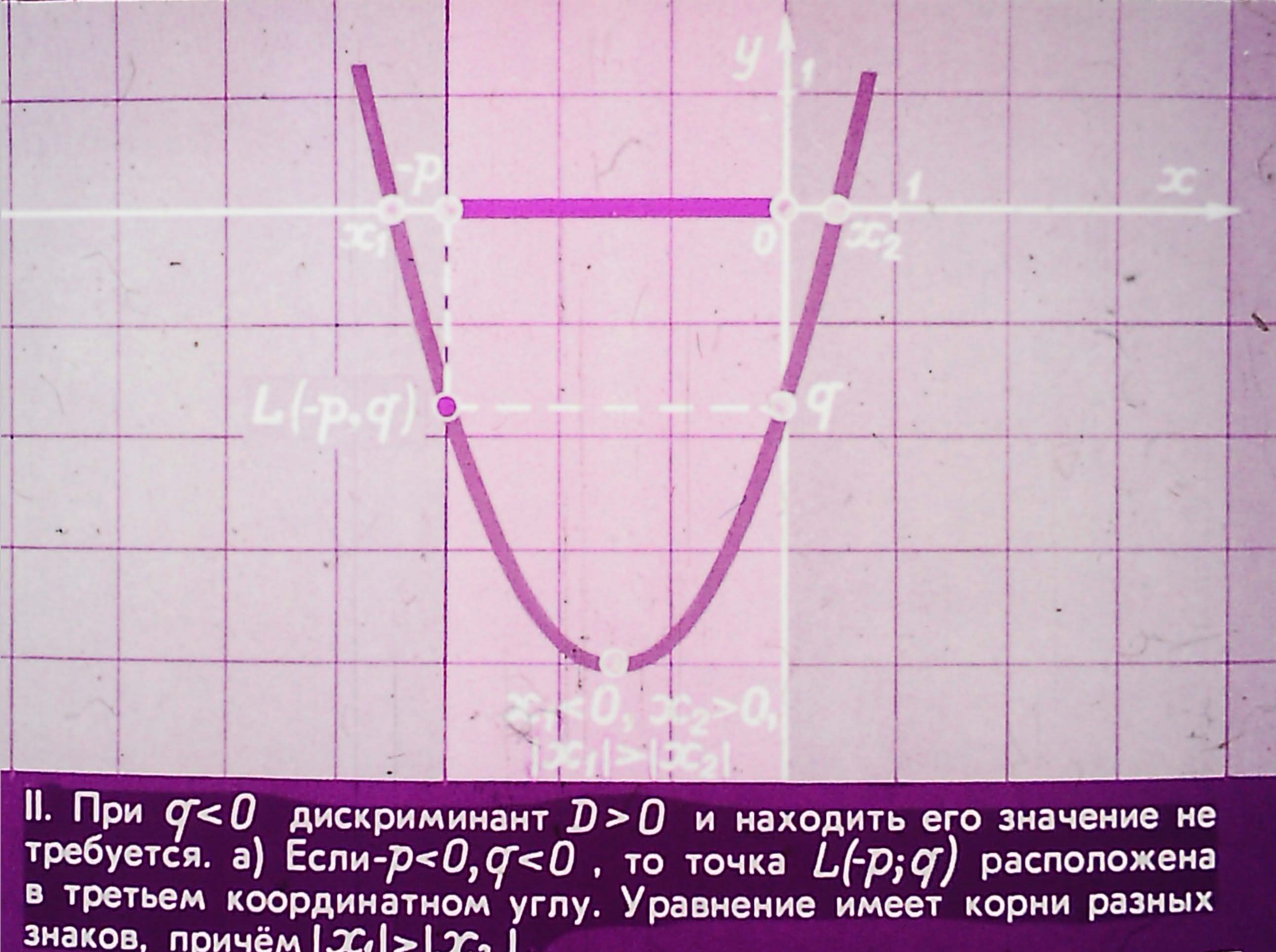
Ответить на поставленные вопросы в случае положительного дискриминанта можно легко, если знать расположение точки $L(-p;q)$ в координатной плоскости. Рассмотрим основные случаи.



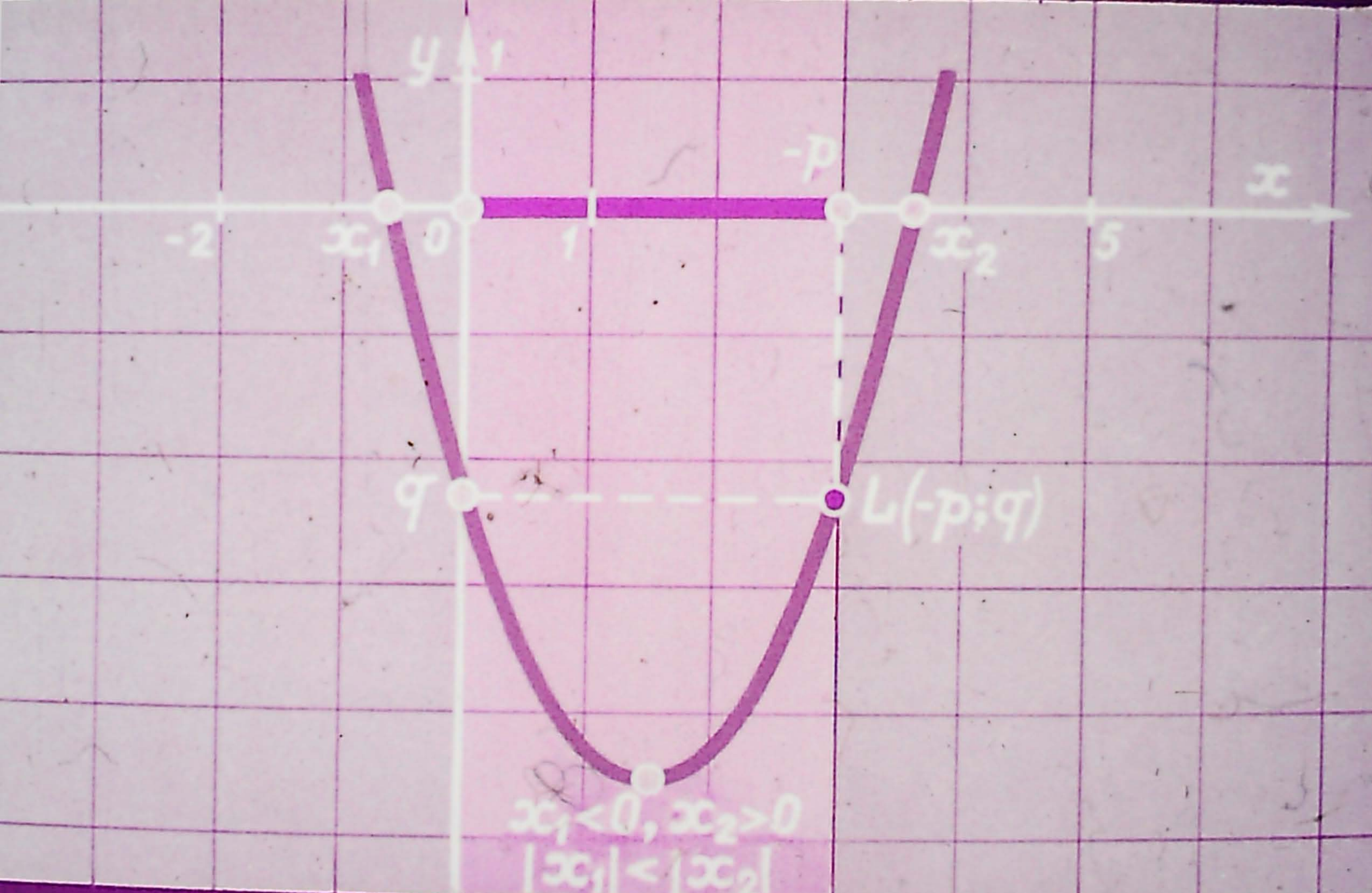
. Пусть $D>0$. а) Если $-p>0, q>0$, то точка $L(-p;q)$ расположена в первом координатном углу. Уравнение имеет два различных положительных корня.



б) Если $-p<0, q>0$, то точка $L(-p;q)$ расположена во втором координатном углу. Уравнение имеет два различных отрицательных корня.

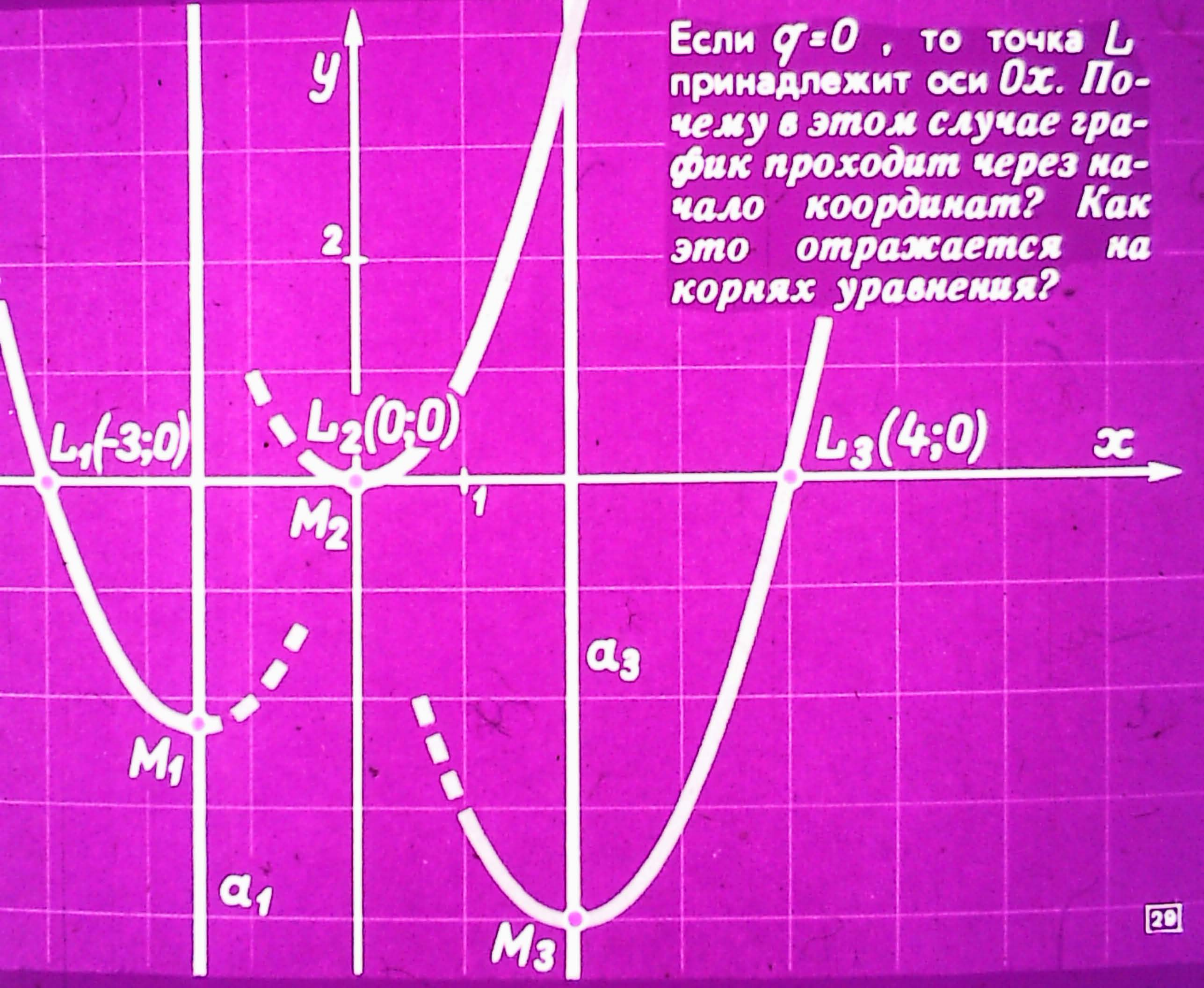


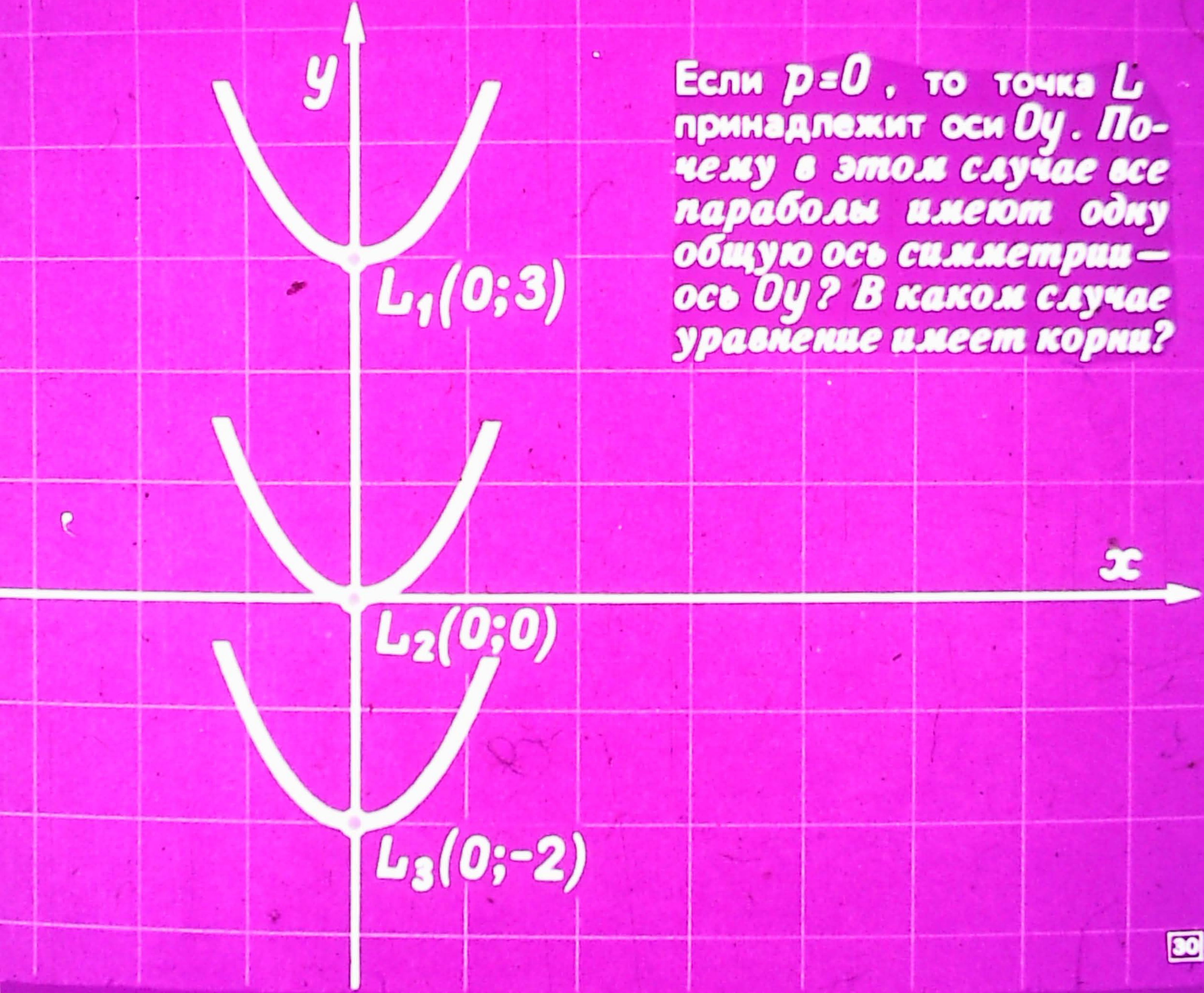
II. При $q<0$ дискриминант $D>0$ и находить его значение не требуется. а) Если $-p<0, q<0$, то точка $L(-p;q)$ расположена в третьем координатном углу. Уравнение имеет корни разных знаков, причём $|x_1|>|x_2|$.



б) Если $-p>0,\ q<0$, то точка $L(-p;q)$ расположена в четвёртом координатном углу. Уравнение имеет корни разных знаков, причём $|x_1|<|x_2|$.

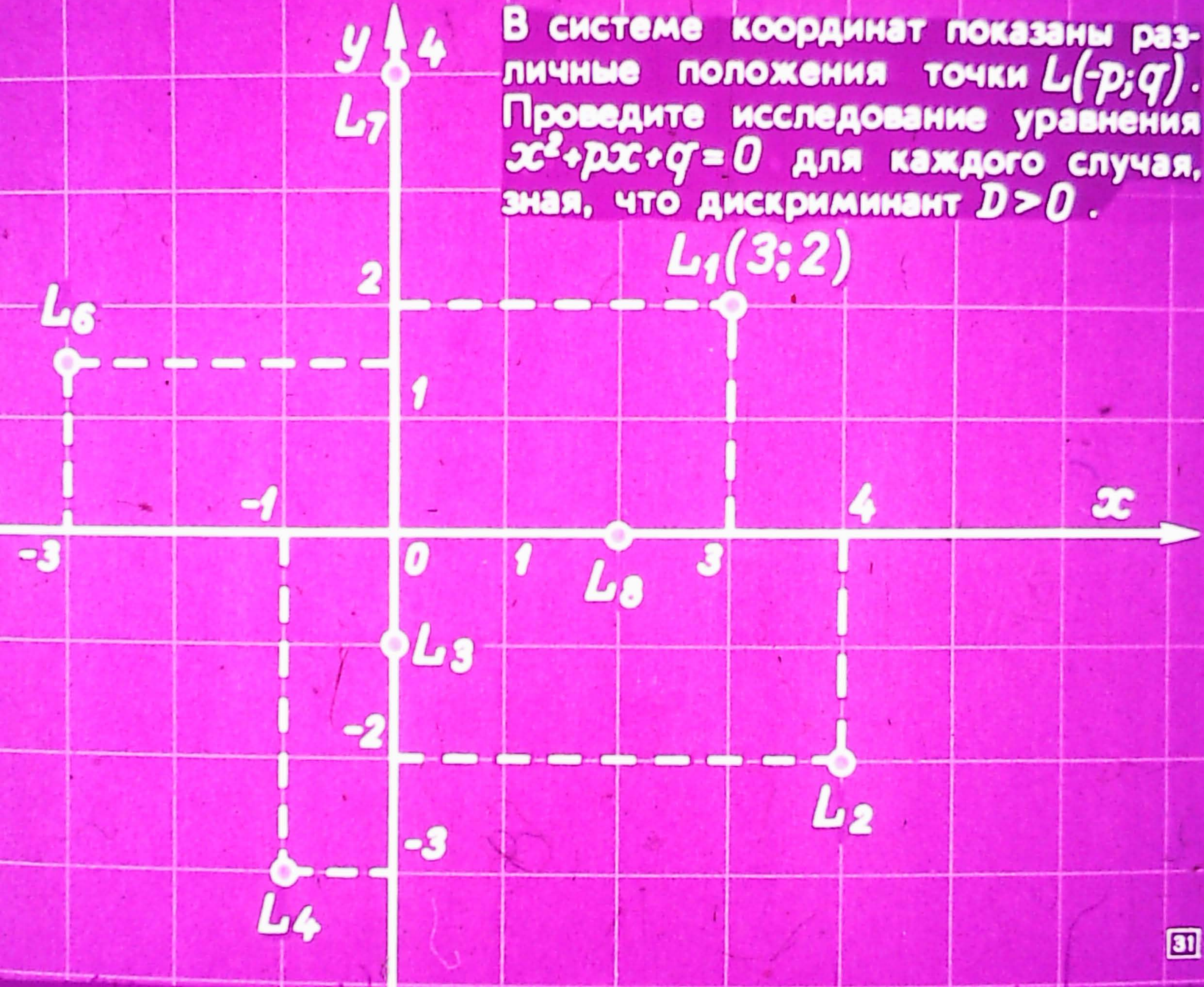
Если $q = 0$, то точка L принадлежит оси Ox. Почему в этом случае график проходит через начало координат? Как это отражается на корнях уравнения?



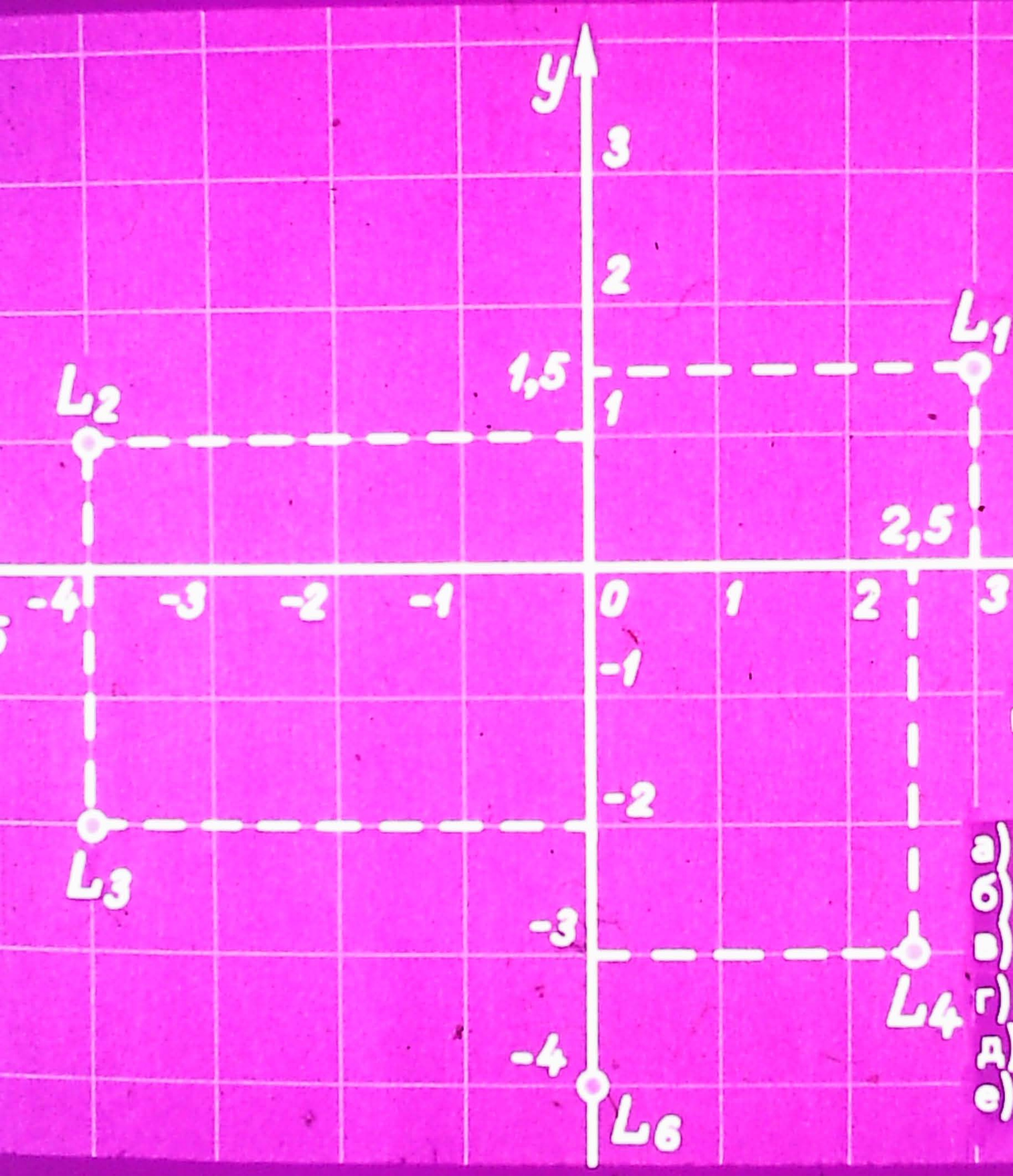


Если $p=0$, то точка L принадлежит оси Oy. Почему в этом случае все параболы имеют одну общую ось симметрии — ось Oy? В каком случае уравнение имеет корни?

В системе координат показаны различные положения точки $L(-p;q)$. Проведите исследование уравнения $x^2+px+q=0$ для каждого случая, зная, что дискриминант $D>0$.



31

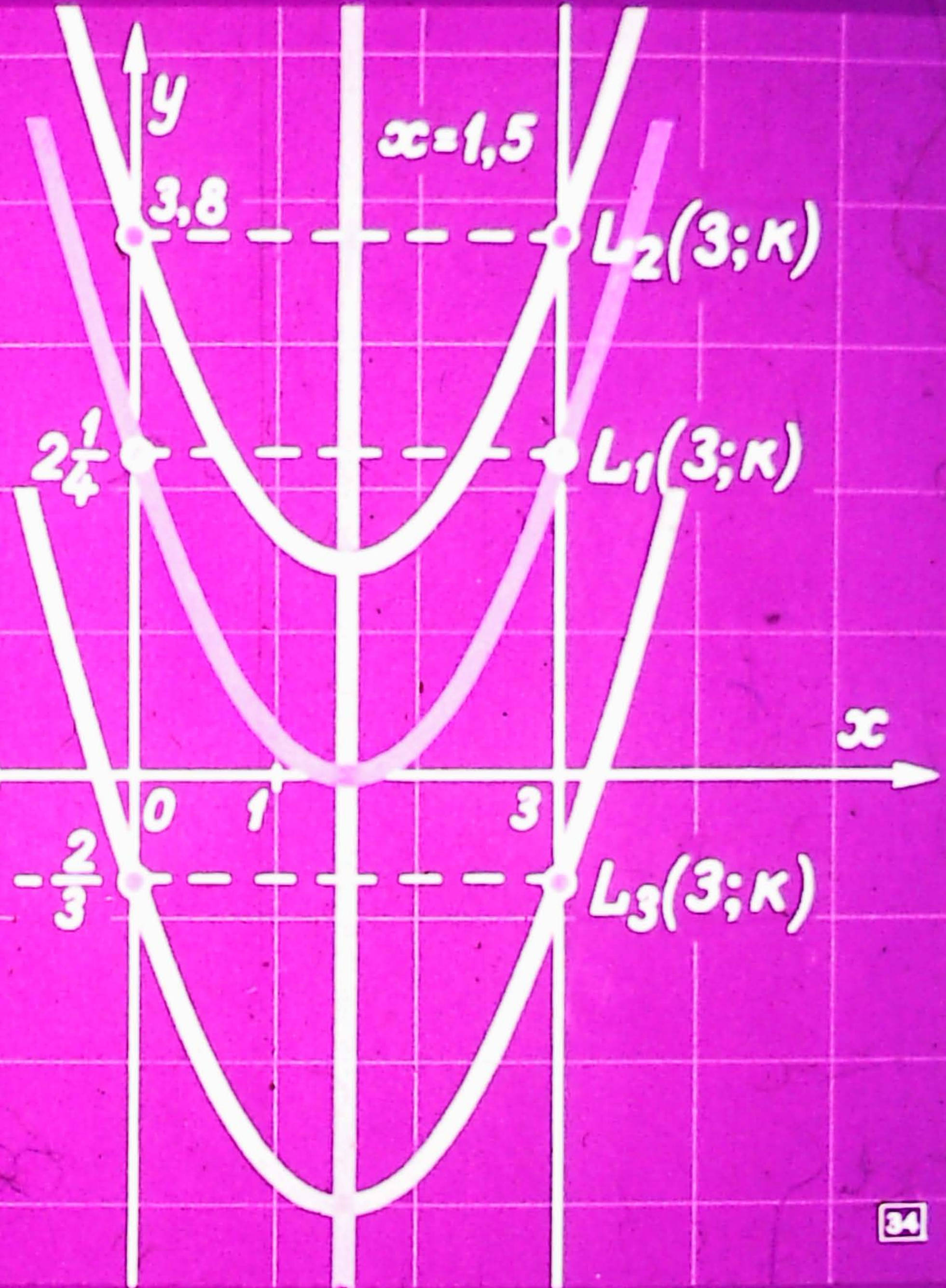


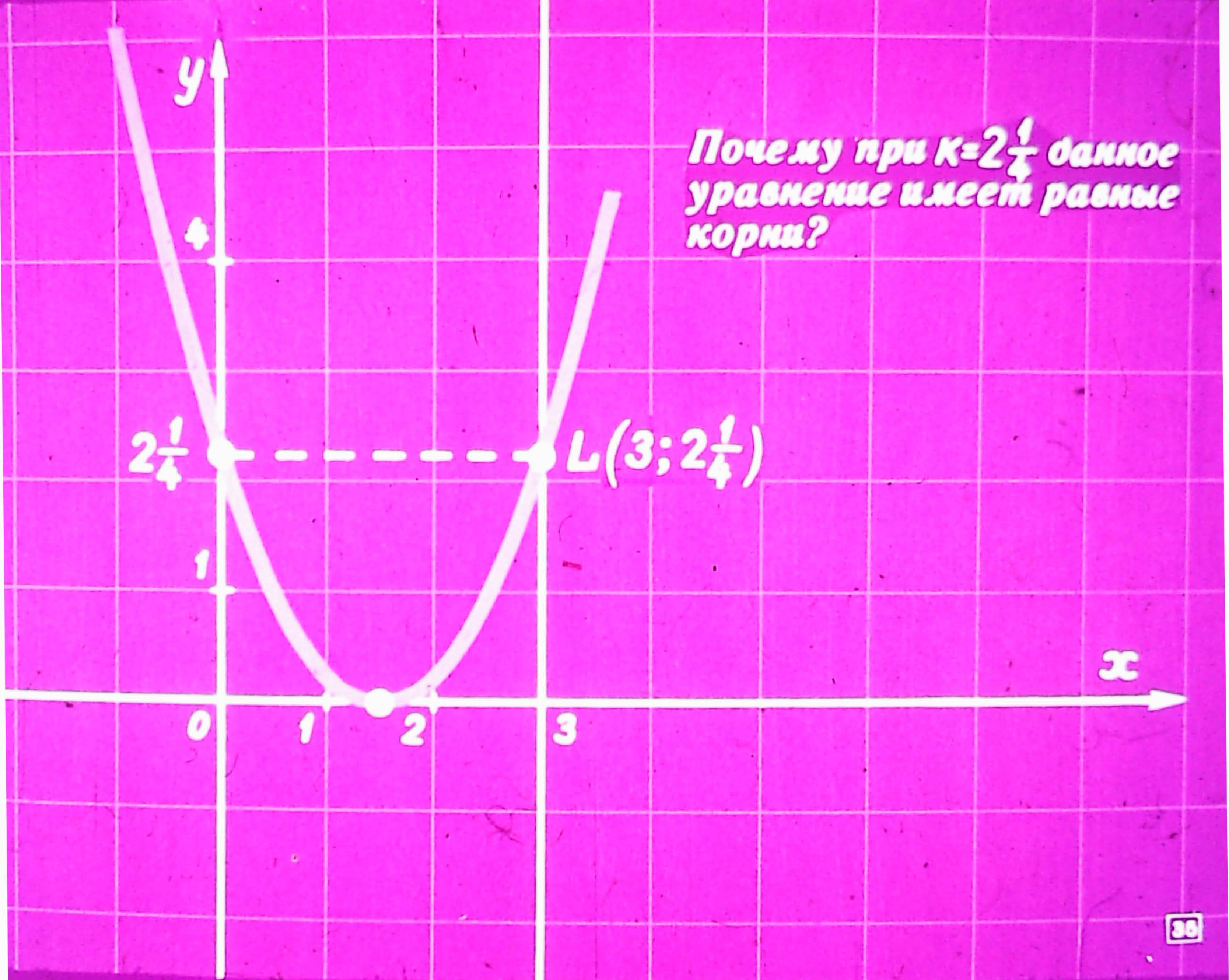
Проведите исследование уравнений:

а) $x^2-3x+1{,}5=0;$
б) $x^2+4x+1=0;$
в) $x^2+4x-2=0;$
г) $2x^2-5x-6=0;$
д) $x^2+5x=0;$
е) $x^2-4=0.$

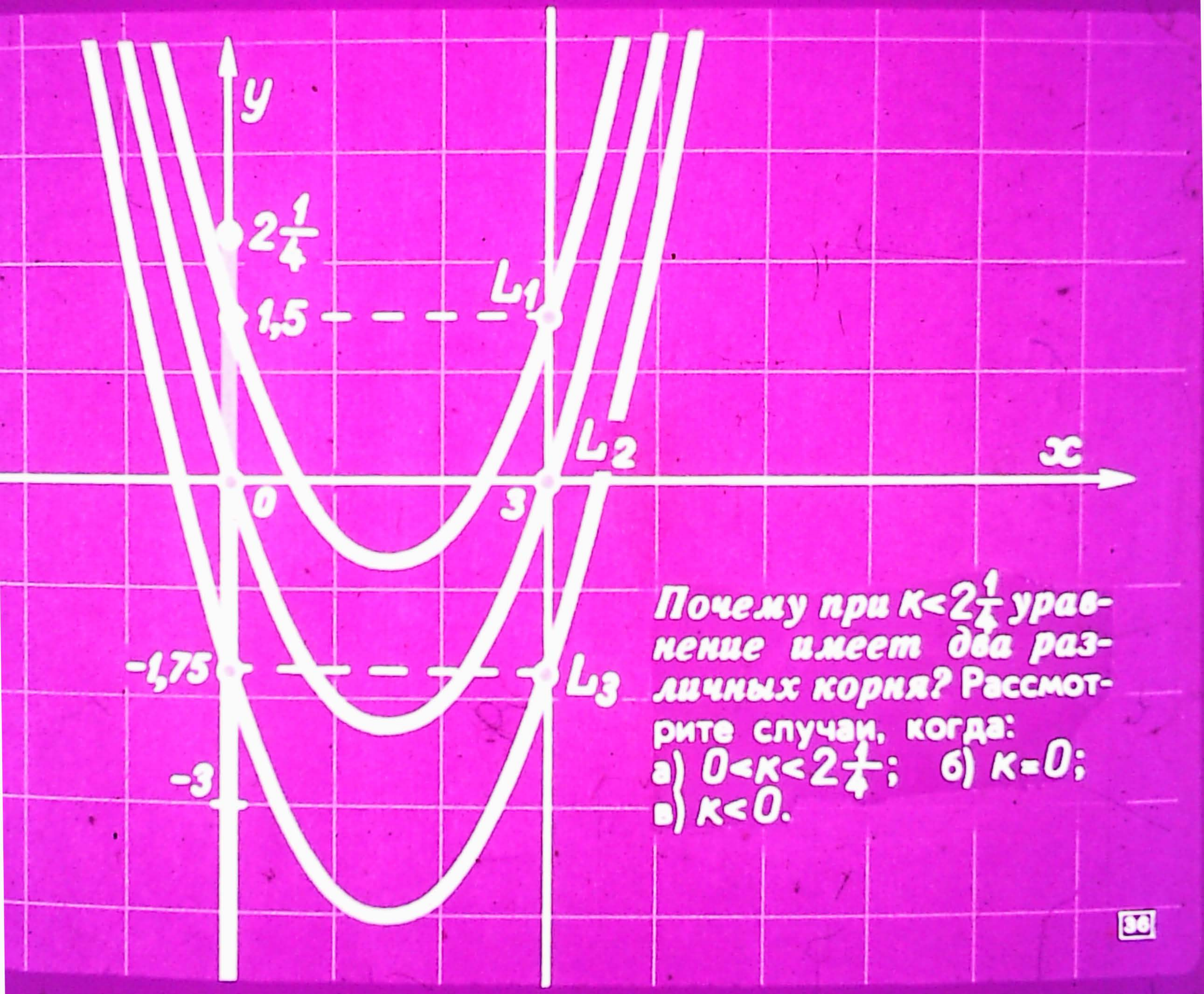
Задачи

Задача 1. Дано уравнение $x^2-3x+k=0$. В нём $-p=3$, $q=k$, поэтому точка L имеет координаты $(3;k)$. *Объясните, почему прямая $x=1,5$ является осью симметрии графика трёхчлена $y=x^2-3x+k$ при любом k?*





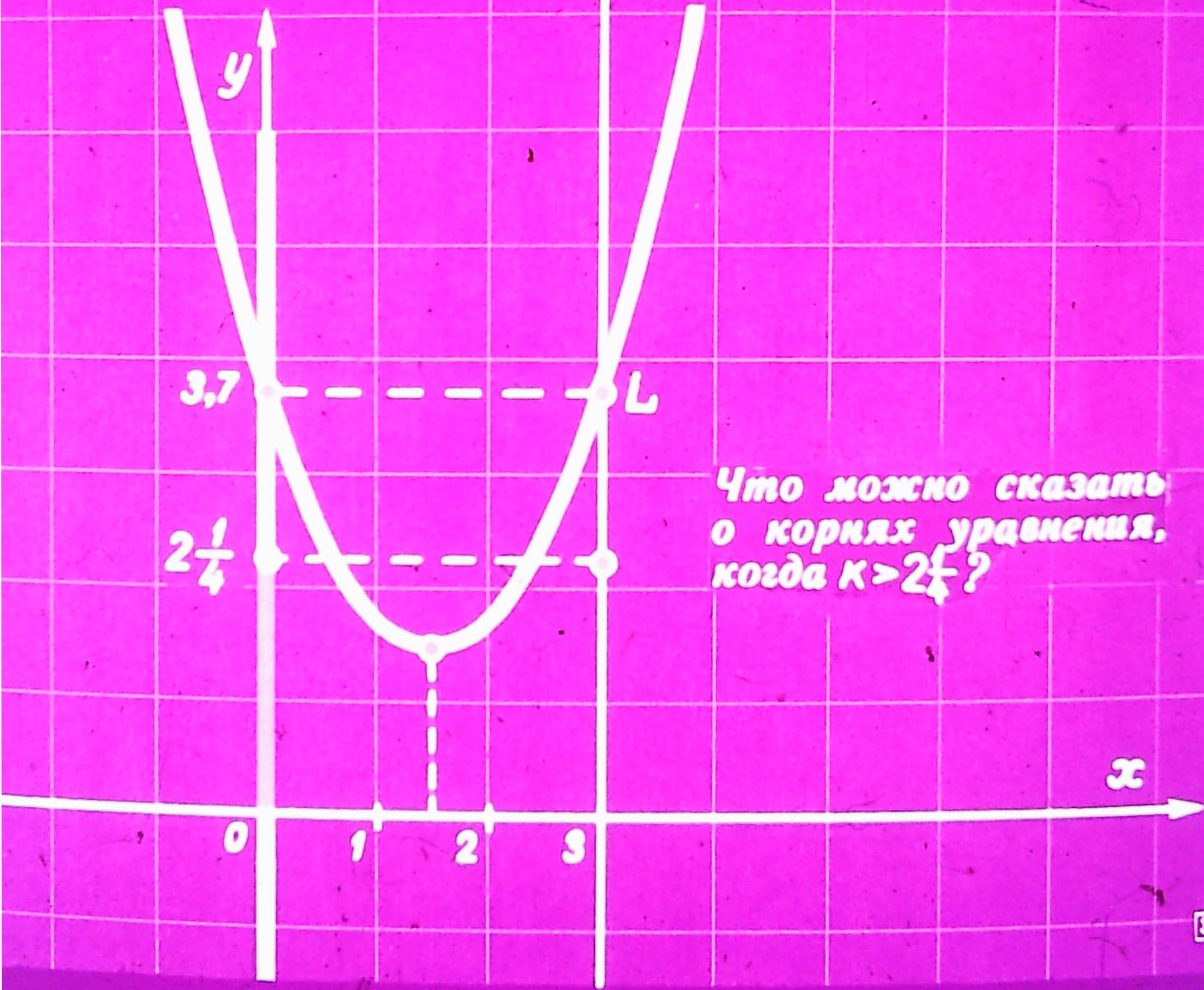
y
x
4
1
$2\frac{1}{4}$
$L(3; 2\frac{1}{4})$
0
1
2
3
Почему при $k=2\frac{1}{4}$ данное уравнение имеет равные корни?
38



Почему при $k < 2\frac{1}{4}$ уравнение имеет два различных корня? Рассмотрите случаи, когда:

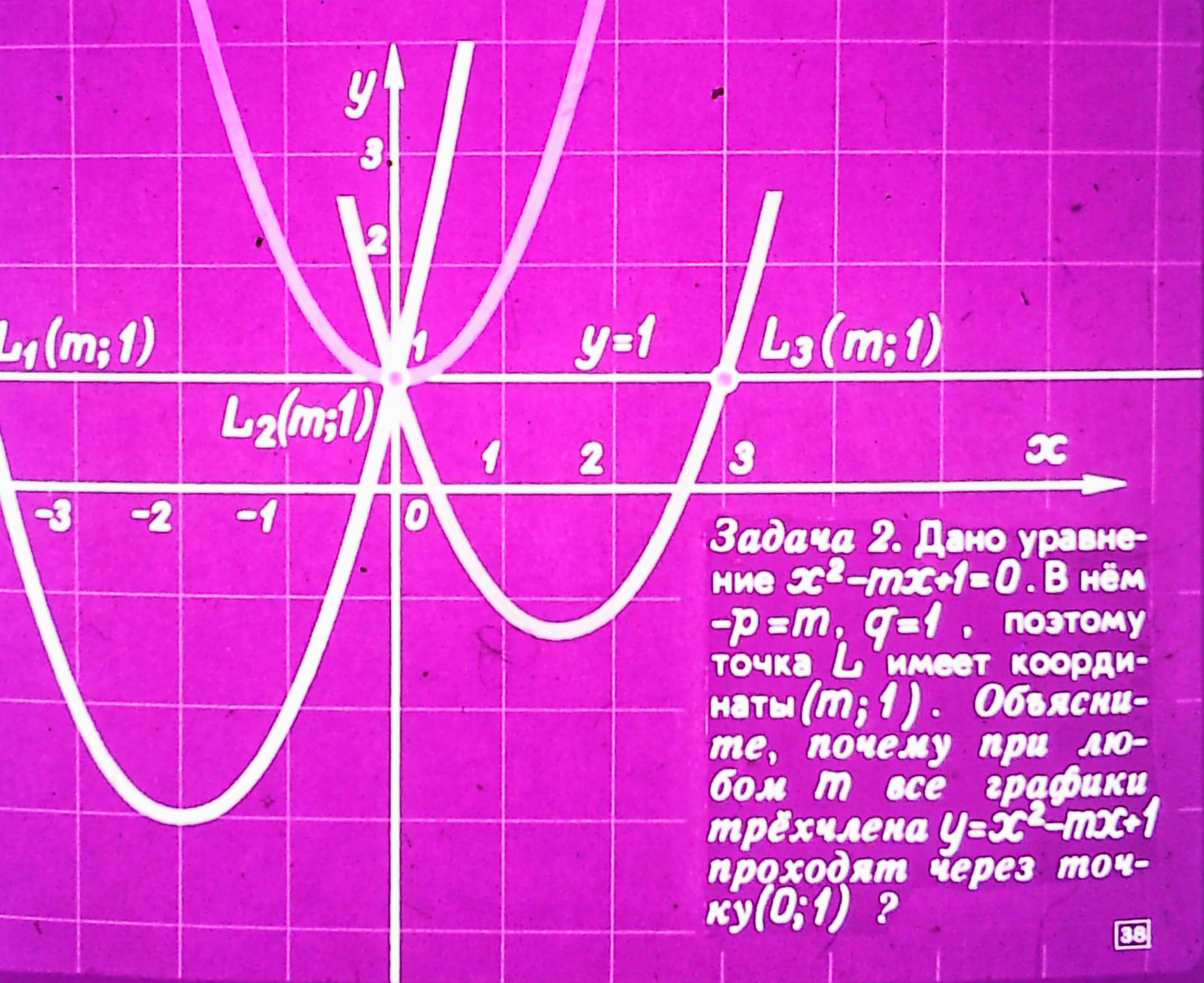
а) $0 < k < 2\frac{1}{4}$; б) $k = 0$;

в) $k < 0$.

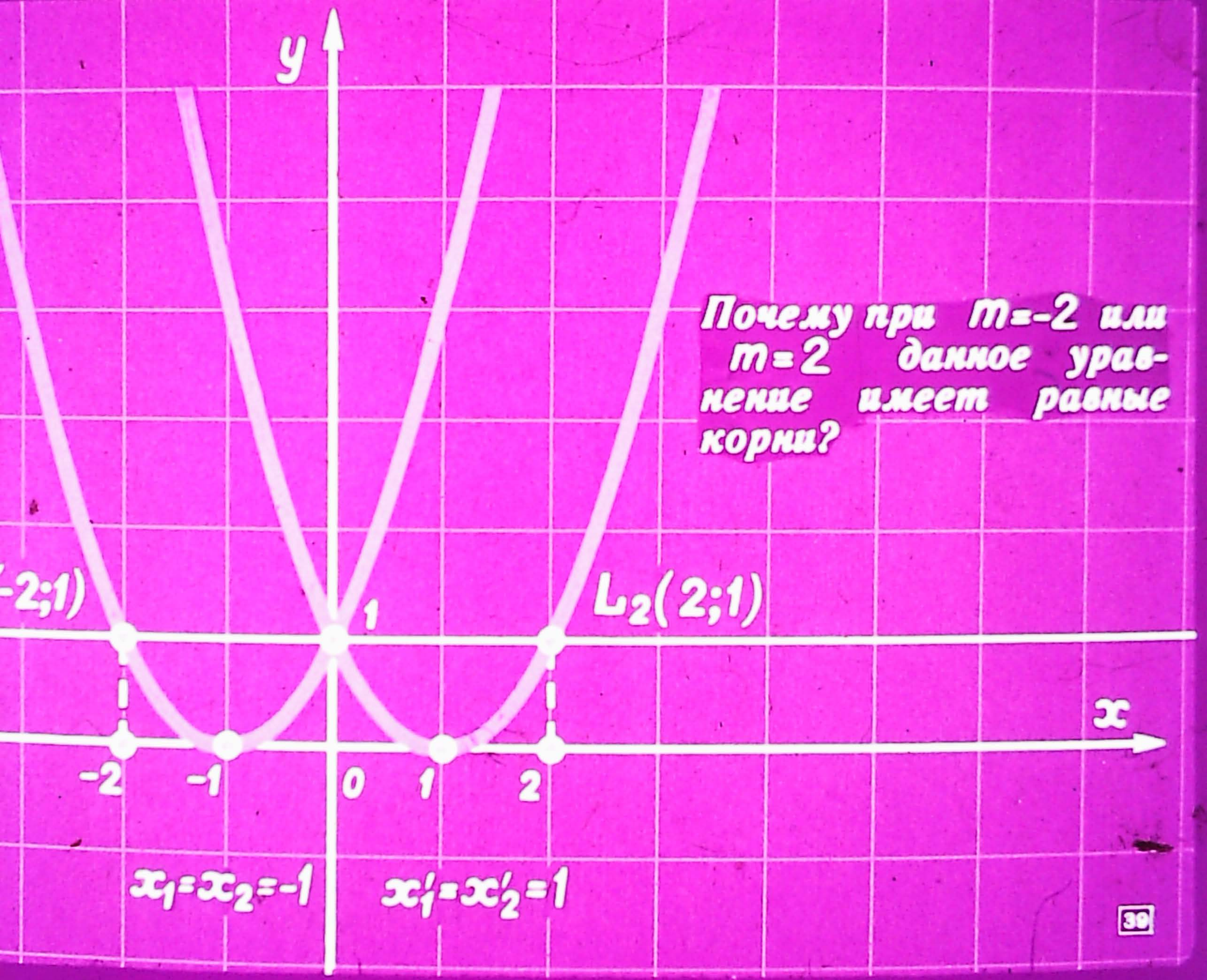


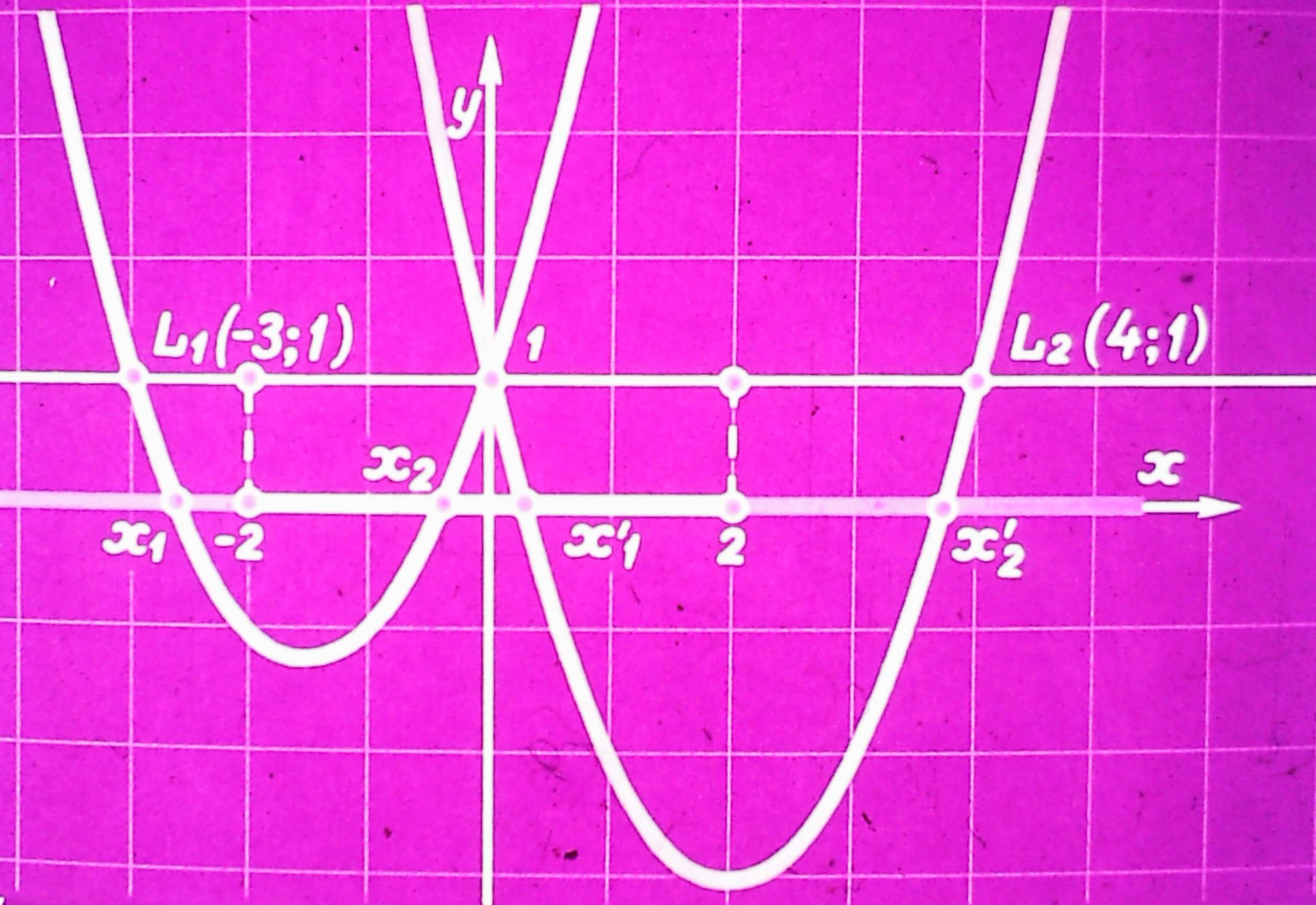
Что можно сказать о корнях уравнения, когда $k > 2\frac{1}{4}$?

37

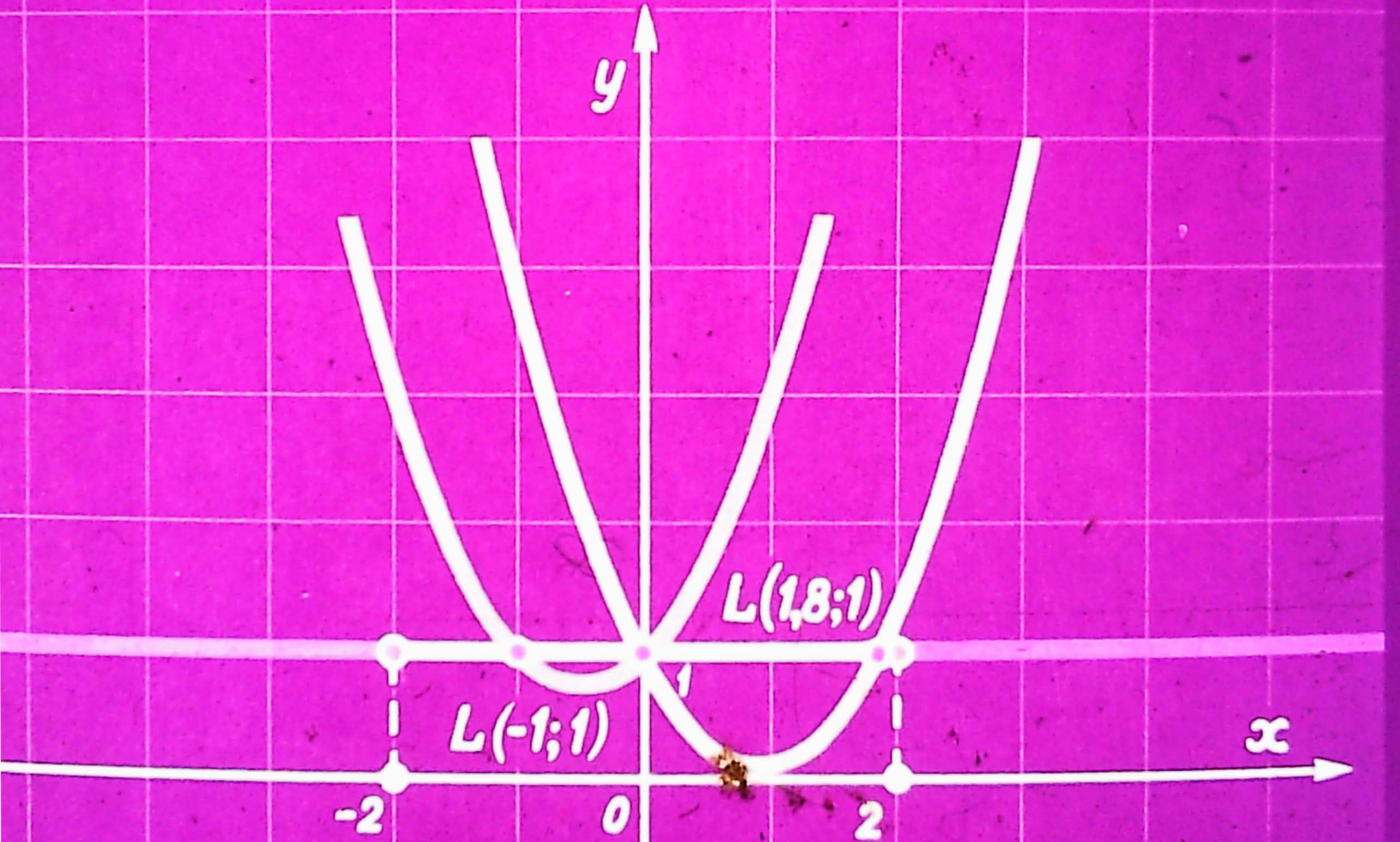


Задача 2. Дано уравнение $x^2-mx+1=0$. В нём $-p=m$, $q=1$, поэтому точка L имеет координаты $(m;1)$. *Объясните, почему при любом* m *все графики трёхчлена* $y=x^2-mx+1$ *проходят через точку* $(0;1)$?


y
x
-2;1)
$L_2(2;1)$
1
-2
-1
0
1
2
Почему при m=-2 или m=2 данное уравнение имеет равные корни?
$x_1=x_2=-1$
$x_1'=x_2'=1$
39



…очему при $m<-2$ или $m>2$ уравнение имеет два …азличных корня? Какие корни имеет уравнение при …) $m<-2$; б) $m>2$?



…очему при условии, что $-2<m<2$, уравнение не имеет …орней?

КОНЕЦ

Автор Ю. Н. Макарычев
Чертежи и оформление Г. Г. Рожковского
Редактор Л. Б. Книжникова

Д-241-68

Студия «Диафильм», 1968 г.
Москва, Центр, Старосадский пер., д. № 7

Цветной 0-30