В. А. ПОДОЛЬСКИЙ
А. М. СУХОДСКИЙ

Сборник задач по математике

В. А. ПОДОЛЬСКИЙ,
А. М. СУХОДСКИЙ

СБОРНИК ЗАДАЧ ПО МАТЕМАТИКЕ

ДЛЯ ТЕХНИКОВ-ПРОГРАММИСТОВ

Допущено Министерством высшего и среднего специального образования РСФСР в качестве учебного пособия для техникумов по специальности 1735 „Программирование для быстродействующих машин"

МОСКВА «ВЫСШАЯ ШКОЛА» 1978

517
П 44
УДК 516/517(076)

Рецензенты: канд. физ.-мат. наук доц. Э. З. Шувалова
и ст. препод. Г. Б. Шнайдер

Подольский В. А., Суходский А. М.

П44 Сборник задач по математике для техников-программистов: Учеб. пособие для техникумов.— М.: Высш. школа, 1978.— 352 с., ил.

В пер. 85 к.

Задачник предназначен для учащихся техникумов, обучающихся по специальности 1735 «Программирование для быстродействующих машин». В него включены примеры и задачи по аналитической геометрии на плоскости и в пространстве, теории пределов, дифференциальному и интегральному исчислению функций одной и нескольких переменных, числовым и функциональным рядам и дифференциальным уравнениям.

В каждом параграфе приводится необходимый теоретический материал. Типовые задачи и примеры сопровождаются подробными решениями. Всего в «Сборнике» содержится около 3000 задач.

Предназначается для учащихся средних специальных учебных заведений.

$П\frac{20203\text{-}183}{001(01)\text{-}78}$ 205-78 517

ПРЕДИСЛОВИЕ

Настоящий «Сборник задач» предназначен для учащихся техникумов, обучающихся по специальности 1735 «Программирование для быстродействующих машин». Он содержит примеры и задачи по аналитической геометрии на плоскости и в пространстве, теории пределов, дифференциальному и интегральному исчислению функций одной и нескольких переменных, числовым и функциональным рядам и дифференциальным уравнениям.

В начале каждого раздела программы кратко излагаются основные теоретические сведения, после чего приводится достаточное количество типовых задач и примеров. Часть из них сопровождается решениями, к некоторым задачам имеются указания, облегчающие их решения.

Следует заметить, что задачник по математике для указанной специальности создается впервые. Его содержание определяется повышенными требованиями, предъявляемыми к математической подготовке будущих техников-программистов. В силу этого в «Сборнике» содержится большое количество (около 3000) примеров и задач, необходимых для закрепления теоретического материала и привития учащимся прочных практических навыков. Вместе с тем «Сборник» может быть использован и учащимися других специальностей, для которых программа по математике не является столь обширной.

Авторы заранее признательны всем лицам, которые выскажут свои замечания и пожелания, направленные на улучшение данного «Сборника».

Авторы

СОДЕРЖАНИЕ

ГЛАВА 1

ДЕКАРТОВЫ ПРЯМОУГОЛЬНЫЕ КООРДИНАТЫ НА ПЛОСКОСТИ

§ 1. МЕТОД КООРДИНАТ НА ПРЯМОЙ

Система координат на прямой l считается заданной, если на этой прямой указаны:

1) положительное направление;
2) точка O — начало координат;
3) линейная единица для измерения длин.

Координатой произвольной точки M прямой l называется число x, равное длине отрезка $[OM]$, взятой со знаком плюс, если направление от начала координат O к точке M совпадает с положительным направлением на прямой, и со знаком минус — в противном случае. Тот факт, что точка M имеет координату x, записывается следующим образом: $M(x)$.

Рассмотрим основные задачи аналитической геометрии на прямой.

Расстояние $|AB|$ *между точками* $A(x_A)$ и $B(x_B)$ вычисляется по формуле

$$|AB| = |x_B - x_A|. \tag{1}$$

Координата x_M *точки* M, *делящей отрезок* AB *в отношении* $\lambda \geqslant 0$ (т. е. точка M удовлетворяет соотношению $|AM|:|MB| = \lambda$), находится по формуле

$$x_M = \frac{x_A + \lambda x_B}{1+\lambda}. \tag{2}$$

В частности, при делении отрезка пополам, т. е. при $\lambda = 1$, получаем *формулу для нахождения координаты середины отрезка:*

$$x = \frac{x_A + x_B}{2}. \tag{3}$$

1.1. Построить точки: $A(3)$, $B(-2)$, $C(1/4)$, $D(-\sqrt{2})$, $E(3\sqrt{2})$, принимая масштабный отрезок равным 1 см.

1.2. Указать на координатной прямой точки, координаты которых удовлетворяют неравенствам: 1) $2 < x < 3$; 2) $-4 \leqslant x \leqslant 0$; 3) $2 \leqslant x < 5$; 4) $-8 < x \leqslant 1$; 5) $x \leqslant 3$; 6) $x \geqslant -1$; 7) $x > 0$.

1.3. Даны точки $A(5)$ и $B(-1)$. Найти длину отрезка $[AB]$.

Решение. Длина отрезка $[AB]$ находится по формуле (1):

$$|AB| = |x_B - x_A| = |-1-5| = 6.$$

1.4. Определить расстояние между точками A и B в каждом из следующих случаев: 1) $A(0)$, $B(-1)$; 2) $A(-2)$, $B(8)$; 3) $A(3)$, $B(-1)$; 4) $A(-7)$, $B(-5)$. Полученные результаты проверить построением.

1.5. Найти точку B, зная, что она имеет положительную координату и отстоит от точки $A(-2)$ на расстоянии, равном 5 единицам. Результат проверить построением.

1.6. Найти координату точки M, делящей отрезок, ограниченный точками $M_1(2)$ и $M_2(8)$, в отношении $\lambda = 1/2$.

Решение. По формуле (2) имеем

$$x_M = \frac{x_{M_1} + \lambda x_{M_2}}{1+\lambda} = \frac{2 + (1/2)\cdot 8}{1 + 1/2} = 4.$$

1.7. Даны точки $M_1(-3)$ и $M_2(4)$. Найти точку M, делящую отрезок $[M_1M_2]$ в отношении: 1) $\lambda=2$; 2) $\lambda=3/4$; 3) $\lambda=1$; 4) $\lambda=0$.

1.8. На отрезке $[AB]$ найти точку M, отстоящую от точки $A(-9)$ на расстоянии, вдвое большем, чем от точки $B(3)$.

Решение. Задача сводится к делению отрезка $[AB]$ точкой M в отношении $\lambda=|AM|:|MB|=2:1=2$. По формуле (2) имеем

$$x_M=\frac{x_A+\lambda x_B}{1+\lambda}=\frac{-9+2\cdot 3}{1+2}=-1.$$

Таким образом, $M(-1)$.

1.9. Найти точку A', симметричную точке $A(3)$ относительно точки $B(-1)$.

Решение. Точка B является серединой отрезка $[AA']$. По формуле (3) имеем $x_B=(x_A+x_{A'})/2$. Подставляя в это равенство $x_A=3$ и $x_B=-1$, найдем координату $x_{A'}$ точки A:

$$-1=(3+x_{A'})/2,$$

откуда $x_{A'}=-5$.

1.10. Определить координату середины отрезка $[AB]$ в каждом из следующих случаев: 1) $A(-8)$, $B(-3)$; 2) $A(5)$, $B(9)$; 3) $A(-3)$, $B(3)$.

1.11. Найти координаты точек, симметричных точке $A(-2)$ относительно: 1) начала координат; 2) точки $B(2)$. Результаты проверить построением.

1.12. Найти точку M, отстоящую от точки $A(-5)$ на расстоянии, втрое большем, чем от $B(-2)$, и лежащую вне отрезка $[AB]$.

Указание: точка B делит отрезок $[AM]$ в отношении $|AB|:|BM|=2:1$.

1.13. В точках, координаты которых 1, 2, 3, 4, соответственно помещены массы 1, 2, 3, 4 кг. Найти координату центра тяжести системы.

1.14. В точках $A(-3)$ и $B(7)$ помещены грузы весом 6 Н и 18 Н. Найти точку приложения равнодействующей.

Указание: из механики известно, что точка M приложения равнодействующей делит отрезок $[AB]$ в отношении $\lambda=18:6=3:1$.

§ 2. МЕТОД КООРДИНАТ НА ПЛОСКОСТИ

Прямоугольная декартова система координат на плоскости считается заданной, если на плоскости указаны:

1) две взаимно перпендикулярные прямые, на каждой из которых выбрано положительное направление,— *оси координат*. Первая из осей называется *осью абсцисс*, вторая — *осью ординат*. Точка O пересечения осей координат называется *началом координат*;

2) линейная единица для измерения длин.

Прямоугольными декартовыми координатами произвольной точки M плоскости называется упорядоченная пара чисел x и y, где x — координата проекции точки M на ось абсцисс, а y — координата проекции точки M на ось ординат. Тот факт, что точка M имеет координаты x и y, записывается так: $M(x; y)$.

1.15. Построить точки $A(3;\ 2)$ $B(0;\ 5)$, $C(-2;\ 0)$, $D(-3;\ -7)$; $E(6;\ -2)$.

1.16. Построить пятиугольник $ABCDE$, если известны координаты его вершин: $A(6;\ 0)$; $B(5;\ 2)$; $C(0;\ 3)$; $D(-7;\ 1)$, $E(-4;\ -6)$.

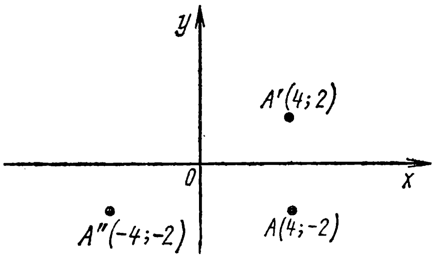


Рис. 1.

1.17. Указать, в каких четвертях находятся точки $A(-2;\ 1)$, $B(3;\ -1)$, $C(4;\ 5)$, $D(-9/4;\ -2)$.

1.18. В каких четвертях может находиться точка, если: 1) ее ордината отрицательна; 2) ее абсцисса положительна?

1.19. На оси Oy взята точка с координатой -3. Каковы ее координаты на плоскости?

1.20. Где расположены точки, имеющие: 1) равные абсциссы; 2) равные ординаты; 3) равные координаты?

1.21. Определить координаты точки, симметричной точке $A(4;\ -2)$ относительно оси абсцисс; относительно оси ординат.

Решение. Точка A', симметричная точке A относительно оси абсцисс, лежит на перпендикуляре к оси абсцисс (рис. 1); поэтому A' имеет такую же абсциссу, что и A, т. е. $x_{A'}=4$. Кроме того, A' отстоит от оси абсцисс на том же расстоянии, что и точка A, т. е. на расстоянии, равном 2 единицам. Следовательно, ордината точки A' равна 2. Таким образом, получаем $A'(4;\ 2)$.

Рассуждая аналогично, находим точку $A''(-4;\ -2)$, симметричную точке A относительно оси ординат.

1.22. Найти точки, симметричные точкам $A(-3;\ -1)$ и $B(0;\ -4)$ относительно оси абсцисс, оси ординат и начала координат.

1.23. Длина стороны квадрата равна 3 единицам. Две смежные стороны квадрата лежат на осях координат. Определить координаты его вершин (рассмотреть 4 случая).

1.24. Диагонали квадрата, длина стороны которого равна единице, лежат на осях координат. Найти координаты его вершин.

1.25. Одна из вершин правильного треугольника, длина стороны которого равна 6 единицам, совпадает с началом координат. Найти координаты остальных вершин, если известно, что одна из сторон треугольника лежит на оси абсцисс (рассмотреть 4 случая).

§ 3. РАССТОЯНИЕ МЕЖДУ ДВУМЯ ТОЧКАМИ

Расстояние $|AB|$ *между точками* $A(x_A;\ y_A)$ и $B(x_B;\ y_B)$ вычисляется по формуле

$$|AB|=\sqrt{(x_B-x_A)^2+(y_B-y_A)^2}. \qquad (1)$$

В частности, *расстояние от точки A до начала координат O* определяется следующим образом:

$$|OA|=\sqrt{x_A^2+y_A^2}. \qquad (2)$$

1.26. Определить расстояние между точками A (13; —1) и B (—2; 7).

Решение. Длину отрезка $[AB]$ вычислим по формуле (1):

$$|AB| = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2} = \sqrt{(-2-13)^2 + (7+1)^2} = 17.$$

1.27. Найти расстояние между точками A и B, если: 1) A (3; —4) B (6; —8); 2) A (10; 0), B (2; —6); 3) A (—11; —4), B (1; —9); 4) A (8; —4), B (—2; 1).

1.28. Найти расстояние от начала координат каждой из следующих точек: 1) A (—3; —4); 2) B (—12; 0); 3) C (—10; 24); 4) D (8; —15); 5) E (—6; $6\sqrt{3}$).

1.29. Найти периметр треугольника, вершины которого находятся в точках A (2; —1), B (—1; 3) и C (2; 7).

1.30. Убедиться в том, что точки A (0; 1), B (—1; —2) и C (2; 7) лежат на одной прямой.

Указание: точки A, B и C лежат на одной прямой, если длина большего из трех отрезков, попарно соединяющих эти точки, равна сумме длин двух остальных.

1.31. Установить, является ли треугольник ABC остроугольным, тупоугольным или прямоугольным в каждом из следующих случаев: 1) A (1; 4), B (5; 8), C (3; 2); 2) A (2; 1), B (—2; 5), C (—1; 3); 3) A (1; —1), B (—2; 1), C (1; 2).

Указание: треугольник является остроугольным, прямоугольным или тупоугольным в зависимости от того, будет ли квадрат большей его стороны меньше, равен или больше суммы квадратов двух других сторон.

1.32. На оси ординат найти точку, равноудаленную от точек A (—5; 1) и B (3; 2).

Решение. Искомая точка M лежит на оси ординат, поэтому ее абсцисса $x_M = 0$. Для нахождения ординаты y_M этой точки воспользуемся тем фактом, что $|AM| = |BM|$. По формуле (1) имеем

$$|AM| = \sqrt{(x_M - x_A)^2 + (y_M - y_A)^2} = \sqrt{(0+5)^2 + (y_M - 1)^2} = \sqrt{25 + (y_M - 1)^2},$$
$$|BM| = \sqrt{(x_M - x_B)^2 + (y_M - y_B)^2} = \sqrt{(0-3)^2 + (y_M - 2)^2} = \sqrt{9 + (y_M - 2)^2}.$$

Отсюда получаем уравнение относительно y_M:

$$\sqrt{25 + (y_M - 1)^2} = \sqrt{9 + (y_M - 2)^2}.$$

Решая его, найдем ординату y_M точки M:

$$25 + y^2 - 2y + 1 = 9 + y^2 - 4y + 4, \quad \text{или} \quad 2y = -13,$$

откуда $y_M = -6{,}5$. Таким образом, искомая точка M (0; —6,5).

1.33. На осях координат найти точки, отстоящие от точки K (—6; 8) на расстоянии, равном 10.

1.34. Из точки $A(-7;\ -3)$ к окружности с центром в точке $C(5;\ -8)$ и радиусом, равным 5, проведены касательные. Найти их длины.

1.35. Найти точку D, равноудаленную от точек $A(1;\ 2)$, $B(9;\ 2)$, $C(2;\ -5)$.

1.36. Найти точку, равноудаленную от осей координат и от точки $C(2;\ 4)$.

§ 4. ДЕЛЕНИЕ ОТРЕЗКА В ДАННОМ ОТНОШЕНИИ

Координаты точки M, делящей отрезок $[AB]$ в отношении $\lambda \geqslant 0$ (т. е. точка M удовлетворяет условию $|AM|:|MB| = \lambda$), находятся по формулам

$$x_M = \frac{x_A + \lambda x_B}{1+\lambda}, \quad y_M = \frac{y_A + \lambda y_B}{1+\lambda}. \tag{1}$$

В частности, при делении отрезка пополам, т. е. при $\lambda = 1$, получаем *формулы для нахождения координат середины отрезка:*

$$x = \frac{x_A + x_B}{2}, \quad y = \frac{y_A + y_B}{2}. \tag{2}$$

1.37. Отрезок, ограниченный точками $A(1;\ 4)$ и $B(4;\ -14)$, разделен на три конгруэнтные части. Найти координаты точек деления C и D.

Решение. Точка C делит отрезок $[AB]$ в отношении $\lambda = |AC|:|CB| = 1:2$. Следовательно, по формулам (1) имеем

$$x_C = \frac{x_A + \lambda x_B}{1+\lambda} = \frac{1 + (1/2)\cdot 4}{1 + 1/2} = 2,$$

$$y_C = \frac{y_A + \lambda y_B}{1+\lambda} = \frac{4 + (1/2)\cdot(-14)}{1 + 1/2} = -2.$$

Таким образом, $C(2;\ -2)$.

Точка D делит отрезок $[AB]$ в отношении $\lambda = |AD|:|DB| = 2:1 = 2$. Отсюда

$$x_D = \frac{x_A + \lambda x_B}{1+\lambda} = \frac{1 + 2\cdot 4}{1 + 2} = 3,$$

$$y_D = \frac{y_A + \lambda y_B}{1+\lambda} = \frac{4 + 2\cdot(-14)}{1+2} = -8$$

и, следовательно, $D(3;\ -8)$.

1.38. Найти координаты точки, делящей отрезок $[AB]$, где $A(3;\ 5)$, $B(1;\ -4)$, в отношении: 1) $\lambda = 3$; 2) $\lambda = 1$; 3) $\lambda = 1/4$; 4) $\lambda = 2/3$.

1.39. Найти координаты середины отрезка $[AB]$, если координаты его концов таковы: 1) $A(-1;\ 2)$, $B(3;\ -6)$, 2) $A(4;\ 7)$, $B(-2;\ -3)$, 3) $A(0;\ -5)$, $B(5;\ 0)$.

1.40. Найти длины медиан треугольника ABC, вершины которого $A(2;\ 1)$; $B(-4;\ -1)$, $C(-2;\ 5)$.

1.41. Найти координаты центра тяжести треугольника ABC, вершины которого $A(-3;\ 1)$, $B(0;\ -5)$, $C(-2;\ 4)$.

Указание: центр тяжести треугольника лежит в точке пересечения его медиан, причем эта точка делит каждую из медиан в отношении 2:1, считая от вершины.

1.42. Доказать, что координаты центра тяжести треугольника ABC можно найти по формулам

$$x=\frac{x_A+x_B+x_C}{3},\quad y=\frac{y_A+y_B+y_C}{3}.$$

1.43. Даны две вершины $A(6;\ 2)$ и $B(3;\ -2)$ треугольника ABC и точка $M(3;\ 1)$ пересечения его медиан. Определить координаты вершины C.

1.44. Дан треугольник ABC: $A(-1;\ 3)$, $B(2;\ 1)$, $C(7;\ -3)$. Определить длину биссектрисы угла A.

Указание: биссектриса внутреннего угла треугольника делит противоположную сторону на части, пропорциональные прилежащим сторонам.

1.45. Отрезок, координаты концов которого $A(-3;\ 7)$ и $B(6;\ -1)$, разделен на четыре конгруэнтные части. Найти координаты точек деления.

1.46. Даны две точки $A(-4;\ 3)$ и $B(2;\ -1)$. На прямой (AB) найти точку C, удаленную от A на расстояние, втрое большее, чем от B, и расположенную по ту же сторону от A, что и B.

Решение. Точка B делит отрезок $[AC]$ в отношении $\lambda=|AB|:|BC|=2:1$. По формуле (1) имеем:

$$x_B=\frac{x_A+\lambda x_C}{1+\lambda},\quad y_B=\frac{y_A+\lambda y_C}{1+\lambda}.$$

Подставляя в эти соотношения координаты точек A и B и $\lambda=2$, получим уравнения относительно координат искомой точки C:

$$2=\frac{-4+2x_C}{3},\quad -1=\frac{3+2y_C}{3},$$

откуда $x_C=5$, $y_C=-3$. Таким образом, $C(5;\ -3)$.

1.47. Один из концов отрезка $[AB]$ находится в точке $A(5;\ -4)$, его серединой является точка $C(0;\ -3)$. Найти координаты другого конца отрезка.

1.48. Известны две вершины $A(3;\ 0)$ и $B(-5;\ 7)$ треугольника ABC и координата центра тяжести $M(1;\ 14)$. Найти координаты третьей вершины C треугольника.

1.49. Даны две вершины $A(-6;\ -5)$ и $B(2;\ 4)$ параллелограмма $ABCD$ и точка $M(3;\ 1)$ пересечения его диагоналей. Найти координаты вершин C и D.

1.50. В параллелограмме $ABCD$ известны вершины $A(1;\ -2)$, $B(2;\ 3)$ и $C(5;\ 6)$. Найти вершину D.

1.51. Отрезок $[AB]$ разделен точками $C(0;\ -2)$ и $D(-3;\ 1)$ на три конгруэнтные части. Найти координаты концов отрезка.

1.52. На прямой, проходящей через точки $A(-3;\ 8)$ и $B(1;\ -2)$, найти точку C, абсцисса которой $x_C=-2$.

Решение. Так как $x_A < x_C < x_B$, то точка C лежит внутри отрезка $[AB]$. Найдем отношение $\lambda = |AC|:|CB|$, в котором точка C делит этот отрезок. Для этого воспользуемся формулой (1):

$$x_C = \frac{x_A + \lambda x_B}{1+\lambda}.$$

Подставляя в это соотношение абсциссы точек A, B и C, получим уравнение относительно λ:

$$-2 = \frac{-3+\lambda \cdot 1}{1+\lambda},$$

откуда $\lambda = 1/3$. Теперь можно найти ординату y_C точки C:

$$y_C = \frac{y_A + \lambda y_B}{1+\lambda} = \frac{8 + (1/3)\cdot(-2)}{1+1/3} = \frac{11}{2}.$$

Таким образом, $C(-2;\ 11/2)$.

1.53. На прямой (AB), где $A(4;\ -2)$, $B(7;\ 4)$, найти точку C, ордината которой $y_C = 1$.

1.54. Найти точки пересечения с осями координат прямой (AB), где $A(4;\ -3)$, $B(1;\ 2)$.

1.55. На прямой (AB), где $A(1;\ -2)$, $B(0;\ -8)$, найти точку C, имеющую равные координаты.

§ 5. УРАВНЕНИЕ ЛИНИИ

Всякое уравнение, связывающее две переменные x и y, вообще говоря, определяет *линию*, т. е. множество всех точек плоскости, координаты которых удовлетворяют этому уравнению.

Имеет место и обратное утверждение. *Каждой линии на плоскости соответствует уравнение с двумя переменными x и y*, а именно, *такое уравнение, которому удовлетворяют координаты любой точки, принадлежащей этой линии, и не удовлетворяют координаты ни одной точки, не принадлежащей ей.*

Одна из основных задач аналитической геометрии состоит в составлении уравнения линии, если известен геометрический закон ее образования.

При этом желательно придерживаться следующего плана:

1) подходящим образом задать систему координат;

2) взять произвольную (текущую) точку $M(x;\ y)$, принадлежащую данному множеству точек;

3) составить соотношение между текущими координатами x и y, используя свойство, определяющее рассматриваемое множество точек;

4) проверить, действительно ли найденная зависимость между x и y есть уравнение данной линии, т. е. убедиться в том, что любая точка, координаты которой удовлетворяют полученному уравнению, принадлежит данной линии, а любая точка, координаты которой этому уравнению не удовлетворяют, данной линии не принадлежит.

1.56. Проверить, лежат ли на линии l, определяемой уравнением $y = 2x^3 - 1$, следующие точки: 1) $A(-1;\ -3)$; 2) $B(2;\ 1)$.

Решение. Если координаты точки M удовлетворяют уравнению линии l, то эта точка лежит на данной линии; в противном случае точка M на линии l не лежит.

1) Подставив координаты $x = -1$, $y = -3$ точки A в уравнение $y = 2x^3 - 1$, в результате получим тождественное равенство: $-3 = 2(-1)^3 - 1$, или $-3 = -3$. Это означает, что точка A лежит на линии l, т. е. $A \in l$.

2) Координаты $x=2$, $y=1$ точки B уравнению $y=2x^3-1$ не удовлетворяют, так как $1 \neq 2 \cdot 2^3-1$. Следовательно, точка $B(2;\ 1)$ не лежит на линии l, т. е. $B \notin l$.

1.57. Выяснить, какие из указанных точек лежат на линии l, заданной уравнением $y=1/(1-x^2)$: 1) $A(2;\ 0)$, 2) $B(1/2;\ 4/3)$, 3) $C(-1;\ 2)$, 4) $D(-3;\ -1/8)$, 5) $E(3;\ -1/8)$.

1.58. Указать несколько точек, координаты которых удовлетворяют одному из следующих уравнений: 1) $2x-4y+3=0$; 2) $y=0$; 3) $x^2+y^2=4$; 4) $y^2=2x+1$.

1.59. Построить линии l_1 и l_2, определяемые уравнениями: 1) $y-x=0$; 2) $x-y^2=0$.

Решение. 1) Линия l_1, определяемая уравнением $y-x=0$, или, что то же, $y=x$, состоит из точек, у которых абсцисса x и ордината y равны между собой. Очевидно, эта линия есть биссектриса I и III координатных углов.

2) Выразим в уравнении $x-y^2=0$ одну из координат через другую: $x=y^2$. Придавая y различные произвольные значения, например, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, найдем соответствующие значения x: 9, 4, 1, 0, 1, 4, 9. В результате мы получим точки $(-3;\ 9)$, $(-2;\ 4)$, $(-1;\ 1)$, $(0;\ 0)$, $(1;\ 1)$, $(2;\ 4)$, $(3;\ 9)$, лежащие на линии l_2. Построив эти точки на координатной плоскости и соединив их плавной линией, получим искомую кривую* (рис. 2).

1.60. Построить (по точкам) линии, соответствующие уравнениям: 1) $y=-x$; 2) $2x-y+1=0$; 3) $y=\sqrt{9-x^2}$; 4) $y=1/(1+x^2)$; 5) $y=1/x$; 6) $y=x^3$; 7) $y=x^2-1$.

1.61. Найти точку пересечения линий l_1 и l_2, уравнения которых $y^2-x^2=5$ и $2x-y-1=0$.

Решение. Координаты точки пересечения линий l_1 и l_2 должны удовлетворять каждому из уравнений, определяющих эти линии. Следовательно, нахождение точки пересечения сводится к совместному решению системы уравнений

$$\left.\begin{aligned} y^2-x^2&=5,\\ 2x-y-1&=0.\end{aligned}\right\}$$

Из второго уравнения имеем $y=2x-1$. Подставляя выражение для y в первое уравнение, получим $-x^2+(2x-1)^2=5$.

Упростим последнее уравнение: $3x^2-4x-4=0$, откуда $x_1=2$, $x_2=-2/3$. Тогда $y_1=3$, $y_2=-7/3$. Таким образом, линии l_1 и l_2 пересекаются в двух точках: $(2;\ 3)$ и $(-2/3;\ -7/3)$.

1.62. Найти точки пересечения следующих линий:

1) $2x-y+1=0$ и $2x+y-5=0$; 2) $x^2+y^2=25$ и $x=3$;
3) $y=1/(1+x)$ и $x+y-1=0$; 4) $y=6/x$ и $x^2+y^2=13$.

1.63. Составить уравнение множества точек, равноудаленных от двух данных точек A и B. Построить полученное множество точек.

Решение. 1. За ось абсцисс примем прямую (AB) с положительным направлением от A к B; начало координат поместим в середине отрезка $[AB]$

---

* В гл. 10 будет дан детальный способ построения линии, определяемой уравнением.

(рис. 3). Тогда, обозначая длину отрезка $[AB]$ через $2a$, получим $A(-a; 0)$, $B(a; 0)$.

2. Возьмем текущую точку $M(x; y)$, принадлежащую данному множеству точек.

3. Из определения данного множества точек следует, что $|MA| = |MB|$. Выражая длины отрезков $[MA]$ и $[MB]$ по формуле расстояния между двумя точками, получим

$$|MA| = \sqrt{(x+a)^2+y^2}, \quad |MB| = \sqrt{(x-a)^2+y^2}.$$

Тогда условие $|MA| = |MB|$ выражается следующим уравнением относительно текущих координат x и y:

$$\sqrt{(x+a)^2+y^2} = \sqrt{(x-a)^2+y^2}. \qquad (*)$$

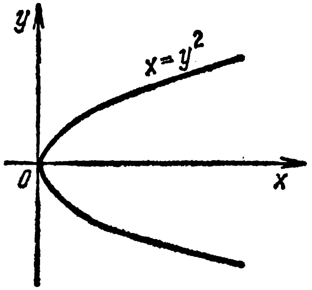


Рис. 2.

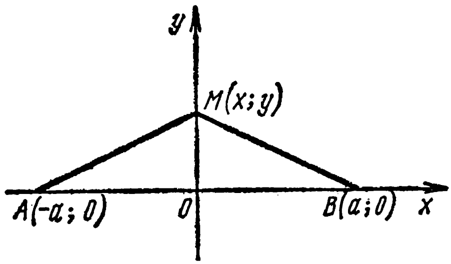


Рис. 3.

Упростим это уравнение. Для этого возведем обе его части в квадрат и приведем подобные члены:

$$(x+a)^2 = (x-a)^2, \quad \text{или} \quad x^2+2ax+a^2 = x^2-2ax+x^2,$$

откуда

$$x = 0. \qquad (**)$$

Очевидно, что уравнения (*) и (**) равносильны.

4. Уравнение $x=0$ есть уравнение искомого множества точек. Действительно, любая точка $M(0; y)$, координаты которой удовлетворяют этому уравнению, принадлежит искомому множеству, поскольку

$$|MA| = |MB| = \sqrt{a^2+y^2}.$$

Таким образом, множество точек, равноудаленных от двух данных точек A и B, есть прямая, перпендикулярная отрезку $[AB]$ и проходящая через его середину.

1.64. Составить уравнение множества точек, равноудаленных от начала координат и точки $A(-2; -3)$.

1.65. Составить уравнение множества точек, равноудаленных от начала координат и точки $A(1; 3)$.

1.66. Составить уравнение множества точек, равноудаленных от точки $A(3; 0)$ и оси ординат.

1.67. Составить уравнение окружности с центром в точке $S(a; b)$ и радиусом r.

1.68. Найти уравнение множества точек, сумма квадратов расстояний которых от двух данных точек $A(1; -2)$ и $B(-1; 2)$, есть величина постоянная, равная 20.

1.69. Записать уравнение множества точек, разность квадратов расстояний которых от двух данных точек A (0; 4) и B (—1; 2) есть величина постоянная, равная 1.

1.70. Вывести уравнение траектории точки M, если в каждый момент движения расстояние ее от точки A $(4\sqrt{3};\ -4)$ вдвое больше, чем от точки B $(\sqrt{3};\ -1)$.

§ 6. ПАРАМЕТРИЧЕСКИЕ УРАВНЕНИЯ ЛИНИИ

Два уравнения

$$\left.\begin{array}{l} x=\varphi(t), \\ y=\psi(t), \end{array}\right\} \qquad (1)$$

где t — вспомогательная переменная, определяют в декартовой системе координат некоторую линию l. При этом величины x и y для каждого значения t рассматриваются как координаты точки, принадлежащей этой линии.

Равенства (1) называются *параметрическими уравнениями* линии l, а t — переменным *параметром*.

Если из уравнений (1) исключить параметр t, то уравнение той же линии l запишется в виде $F(x,\ y)=0$.

1.71. Составить параметрические уравнения окружности радиуса r, центр которой находится в начале координат.

Решение. Нетрудно убедиться в том, что текущие координаты x и y точки M, лежащей на окружности, являются функциями угла t между осью Ox и радиусом $[OM]$ (рис. 4). Поэтому угол t примем за переменный параметр. Выразим текущие координаты x и y через параметр t:

$$\left.\begin{array}{l} x=r\cos t, \\ y=r\sin t. \end{array}\right\}$$

Эти равенства и являются параметрическими уравнениями окружности.

Если обе части каждого из полученных уравнений возвести в квадрат и почленно сложить (этим достигается исключение параметра t из уравнений), то уравнение той же окружности запишется в виде

$$x^2+y^2=r^2.$$

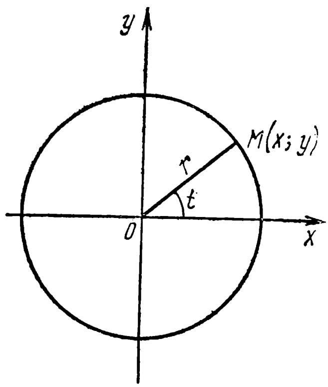


Рис. 4.

1.72. Линия задана параметрическими уравнениями

$$\left.\begin{array}{l} x=t^2, \\ y=t-1. \end{array}\right\}$$

Найти декартовы координаты точек, если соответствующие значения параметра t равны 1; —2; 2; 1/3; 0.

1.73. Указать декартовы координаты точек линии

$$\left.\begin{array}{l} x=\cos t, \\ y=2\sin t, \end{array}\right\}$$

если соответствующие значения параметра t равны 0; $\pi/2$; $-\pi$; π; 2π.

1.74. На линии

$$\left.\begin{array}{l} x=t^3+2, \\ y=t^2-4t+3 \end{array}\right\}$$

дана точка $A(3;\ 0)$. Найти значение параметра t, соответствующее этой точке.

Решение. Подставив в первое уравнение $x=3$, приходим к уравнению относительно t:

$$3=t^3+2, \qquad (*)$$

или $t^3-1=0$. Решая полученное уравнение, находим $t=1$.

Аналогично, подставляя во второе уравнение $y=0$, получаем уравнение

$$t^2-4t+3=0, \qquad (**)$$

корни которого $t=1$ и $t=3$.

Значение параметра $t=1$ является единственным общим корнем уравнений (*) и (**). Следовательно, точке $A(3;\ 0)$ соответствует значение $t=1$.

1.75. На линии

$$\left.\begin{array}{l} x=t^2, \\ y=1/t \end{array}\right\}$$

даны точки $A(1;\ 1)$, $B(1;\ -1)$, $C(1/9;\ 3)$. Найти значения параметра t, соответствующие этим точкам.

1.76. Линия l задана параметрическими уравнениями

$$\left.\begin{array}{l} x=t^2-5t+6, \\ y=t^2-4t+3. \end{array}\right\}$$

Выделить из нижеследующих точек те, которые принадлежат линии l, и указать соответствующие им значения параметра t: 1) $A(6;\ 3)$, 2) $B(2;\ 0)$; 3) $C(0;\ -1)$, 4) $D(12;\ 7)$; 5) $E(2;\ 3)$, 6) $F(6;\ 8)$, 7) $K(0;\ 0)$, 8) $P(-1;\ 2)$.

1.77. Даны параметрические уравнения линии

$$\left.\begin{array}{l} x=2t, \\ y=3t+1. \end{array}\right\}$$

Исключив параметр t, записать уравнение этой линии в виде $F(x,\ y)=0$.

1.78. Линия задана параметрическими уравнениями

$$\left.\begin{array}{l} x=\cos^3 t, \\ y=\sin^3 t. \end{array}\right\}$$

Записать уравнение линии в виде $F(x,\ y)=0$.

1.79. Написать уравнения линии

$$\left.\begin{array}{l} x=t^2, \\ y=t-2 \end{array}\right\}$$

в виде $F(x,\ y)=0$.

1.80. Отрезок $[AB]$ постоянной длины скользит своими концами по осям декартовой системы координат. Составить параметрические уравнения линии, которую описывает точка M этого отрезка, делящая его на части $|MA|=a$ и $|MB|=b$ (рис. 5).

Указание: за параметр t принять угол, образуемый отрезком $[AB]$ с отрицательным направлением оси Ox.

1.81. Отрезок постоянной длины $2a$ скользит своими концами по осям декартовой системы координат. Из начала координат на этот отрезок опущен перпендикуляр. Составить параметрические уравнения множества оснований таких перпендикуляров.

Указание: за параметр t взять угол, образуемый отрезком с отрицательным направлением оси Ox.

§ 7. ПРЕОБРАЗОВАНИЕ ДЕКАРТОВЫХ КООРДИНАТ

Задача преобразования координат состоит в том, чтобы, зная координаты (x, y) точки в одной (старой) системе координат, найти ее координаты (x', y') в другой (новой) системе.

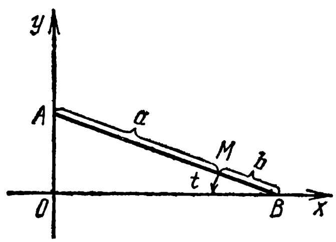


Рис. 5.

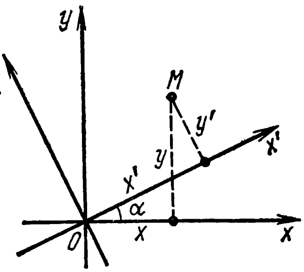


Рис. 6.

Формулы преобразования прямоугольных координат при параллельном переносе осей координат имеют вид

$$x=x'+a, \quad y=y'+b, \tag{1}$$

или

$$x'=x-a, \quad y'=y-b, \tag{1'}$$

где a и b — координаты нового начала O' в старой системе координат.

Формулы преобразования прямоугольных координат при повороте R^{α} осей координат на угол α без изменения начала координат имеют следующий вид*:

$$x=x'\cos\alpha-y'\sin\alpha, \quad y=x'\sin\alpha+y'\cos\alpha, \tag{2}$$

или

$$x'=x\cos\alpha+y\sin\alpha, \quad y'=-x\sin\alpha+y\cos\alpha. \tag{2'}$$

При этом угол α берется положительным, если поворот осей координат совершается в положительном направлении («против часовой стрелки»), и отрицательным в противном случае (рис. 6).

1.82. Дана точка $A(2; -1)$. Найти координаты этой точки, если: 1) сохраняя направления осей, перенести начало координат в точку $O'(-4; 2)$; 2) произвести поворот $R^{30°}$ осей координат.

---

* Отметим, что формулы (2′) получаются из формул (2), если в них поменять местами старые и новые координаты, заменяя одновременно α на $-\alpha$,

Решение. 1) Полагая в формулах (1') $x=2$, $y=-1$, $a=-4$, $b=2$, получим

$$x'=2-(-4)=6,\quad y'=-1-2=-3.$$

Итак, в новой системе точка A имеет координаты (6; —3).

2) В этом случае $x=2$, $y=-1$, $\alpha=30°$. По формулам (2') имеем

$$x'=2\cos 30°+(-1)\sin 30°=(2\sqrt{3}-1)/2,$$
$$y'=-2\sin 30°+(-1)\cos 30°=-(2+\sqrt{3})/2.$$

1.83. Найти новые координаты точек A (2; —3), B (0; 1), C (—5; 4) в системе, полученной переносом начала координат с сохранением направления осей в точку O' (1; —2).

1.84. Дана точка A (—4; 3). Каковы новые координаты этой точки, если сохраняя направления осей, перенести начало координат в точку O', координаты которой: 1) (2; 3), 2) (—2; 1); 3) (2; 0), 4) (—3; —1)?

1.85. Относительно двух систем координат, имеющих одно и то же направление осей, известны координаты некоторой точки A: (5; —2) и (—3; 4). Каковы координаты начала каждой из этих систем относительно другой?

1.86. Две системы координат имеют одинаковые направления осей. Точка (3; 2) служит началом второй системы координат относительно первой. Чему равны координаты начала первой системы относительно второй?

1.87. Известны координаты точек $A(1; \sqrt{3})$ и B (0; —2) в новой системе, полученной из старой поворотом $R^{30°}$. Вычислить координаты этих же точек в старой системе.

1.88. Даны точки A (2; 0), B (0; —3), C (—2; 1). Найти новые координаты этих точек при повороте $R^{-45°}$.

1.89. Найти координаты точки A (—1; 1) в системе, полученной при повороте R^{α}, если: 1) $\alpha=30°$; 2) $\alpha=45°$; 3) $\alpha=60°$, 4) $\alpha=90°$.

1.90. Какой вид примет уравнение параболы $y=2x^2-4x+5$, если, сохраняя направления осей, перенести начало координат в точку O' (1; 3)?

Решение. Полагая в формулах (1) $a=1$, $b=3$, получим выражения старых координат через новые:

$$x=x'+1,\quad y=y'+3.$$

Запишем уравнение параболы в новой системе координат. Для этого заменим x и y в уравнении параболы их выражениями через x' и y':

$$y'+3=2(x'+1)^2-4(x'+1)+5.$$

После приведения подобных членов получим

$$y'=2x'^2.$$

1.91. Какой вид примет уравнение параболы $y=x^2+4x$, если перенести начало координат в точку O' (—2; —4), сохраняя направления осей?

1.92. Гипербола задана уравнением $y=(2x+1)/(x-1)$. Записать ее уравнение в системе координат, полученной переносом начала координат с сохранением направления осей в точку O' (1; 2).

1.93. Какой вид примет уравнение гиперболы $y=1/x$, если произвести поворот $R^{45°}$ осей координат?

1.94. Какой вид примет уравнение окружности $x^2+y^2=r^2$, если произвести поворот R^{α} осей координат?

§ 8. ПОЛЯРНЫЕ КООРДИНАТЫ

Полярная система координат определяется заданием некоторой точки O, называемой *полюсом*, исходящего из полюса луча $[Op)$, называемого *полярной осью*, а также масштаба для измерения длин. Тогда для произвольной точки M (не совпадающей с полюсом) ее положение на плоскости вполне определено двумя числами: расстоянием $\rho=|OM|$ (где $\rho \geqslant 0$) от полюса O (*полярным радиусом*) и углом φ ($0 \leqslant \varphi < 2\pi$ или $-\pi < \varphi \leqslant \pi$), образованным отрезком $[OM]$ с полярной осью (*полярным углом*). При этом полярный угол φ считается положительным при отсчете от полярной оси против часовой стрелки (рис. 7). Тот факт, что точка M имеет полярные координаты ρ и φ, записывается так: $M(\rho;\ \varphi)$.

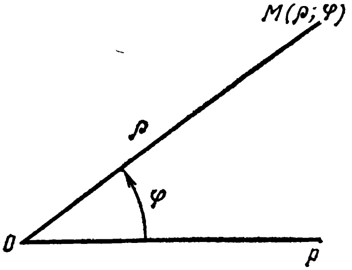


Рис. 7.

Если совместить начало прямоугольной декартовой системы координат с полюсом, а ось Ox направить по полярной оси, то получим следующие формулы, связывающие прямоугольные координаты x и y точки M и ее полярные координаты ρ и φ:

$$x=\rho\cos\varphi,\quad y=\rho\sin\varphi; \tag{1}$$

$$\rho=\sqrt{x^2+y^2},\quad \operatorname{tg}\varphi=\frac{y}{x}. \tag{2}$$

1.95. Построить точки, заданные полярными координатами: $A(4;\ \pi/6)$, $B(2;\ \pi/4)$; $C(3;\ -\pi/3)$, $D(2;\ 3\pi/4)$; $E(1;\ \pi)$; $F(1;\ -\pi/3)$; $G(2;\ 3\pi/2)$.

1.96. Найти прямоугольные координаты точки $M(4;\ 2\pi/3)$.

Решение. Используя формулы (1), находим

$$x=4\cos(2\pi/3)=4\cdot(-1/2)=-2;$$
$$y=4\sin(2\pi/3)=4\cdot(\sqrt{3}/2)=2\sqrt{3}.$$

1.97. Найти полярные координаты точки $M(\sqrt{3};\ -1)$.

Решение. На основании формул (2) имеем

$$\rho=\sqrt{3+1}=2,\quad \operatorname{tg}\varphi=-1/\sqrt{3}.$$

Очевидно, что точка M лежит в IV четверти и, следовательно, $\varphi=11\pi/6$. Итак, $M(2;\ 11\pi/6)$.

1.98. Найти прямоугольные координаты следующих точек: $A(3;\ \pi/4)$, $B(2;\ 5\pi/6)$, $C(1;\ 7\pi/4)$, $D(4;\ -4\pi/3)$, $E(2;\ -2\pi/3)$, $F(5;\ \pi)$; $G(3;\ 3\pi/2)$.

1.99. Найти полярные координаты следующих точек: $A(4;\ 4\sqrt{3})$, $B(0;\ 7)$, $C(-2;\ 2)$, $D(\sqrt{5};\ -\sqrt{5})$, $E(-\sqrt{6};\ -\sqrt{2})$, $F(-8;\ 0)$, $G(0;\ -3)$, $H(5;\ 0)$.

1.100. Найти полярные координаты точек, симметричных точке $M(\rho;\ \varphi)$ относительно: 1) полярной оси; 2) полюса; 3) прямой, проходящей через полюс перпендикулярно полярной оси.

1.101. Построить линии, заданные уравнениями в полярных координатах: 1) $\rho = a\varphi$; 2) $\rho = 2a(1+\cos\varphi)$; 3) $\rho = a\sin 3\varphi$.

Решение. 1) Придавая полярному углу φ различные значения, например 0, $\pi/4$, $\pi/2$, $3\pi/4$, π, $3\pi/2$, 2π, ..., найдем соответствующие значения ρ: $0{,}78a$, $\approx 1{,}57a$, $\approx 2{,}36a$, $\approx 3{,}14a$, $\approx 4{,}71a$, $\approx 6{,}28a$, ... По значениям ρ и φ построим точки и соединим их плавной кривой (рис. 8). Полученная кривая называется *спиралью Архимеда*.

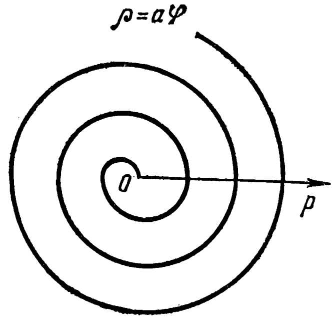


Рис. 8.

2) Заметим прежде всего, что в силу четности косинуса данная линия симметрична относительно полярной оси. Следовательно, достаточно построить ту часть линии, которая лежит выше полярной оси, а затем отразить ее симметрично относительно этой оси. Полагая значения полярного угла равными 0, $\pi/3$, $\pi/2$, $2\pi/3$, π, находим соответствующие значения ρ: $4a$, $3a$, $2a$, a, 0. Соединяя найденные точки плавной кривой и отражая ее симметрично относительно полярной оси, получаем искомую линию (рис. 9). Она называется *кардиоидой*.

3) Так как функция $\sin 3\varphi$ периодическая с периодом $2\pi/3$, то достаточно построить график функции $\rho = a\sin 3\varphi$ в промежутке изменения φ от 0 до $2\pi/3$. Далее, в рассматриваемом промежутке изменения φ величина $\rho \geqslant 0$ только для $0 \leqslant \varphi < \pi/3$. Придавая полярному углу φ в промежутке от 0 до $\pi/3$ значения 0, $\pi/12$, $\pi/6$, $\pi/4$, $\pi/3$, вычислим соответствующие значения ρ: 0, $a\sqrt{2}/2$, a, $a\sqrt{2}/2$, 0. Соединим найденные точки плавной кривой — тем самым построен график функции в промежутке $0 \leqslant \varphi < 2\pi/3$. Теперь, дважды повернув на угол

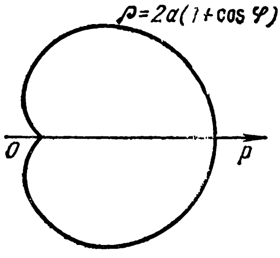


Рис. 9.

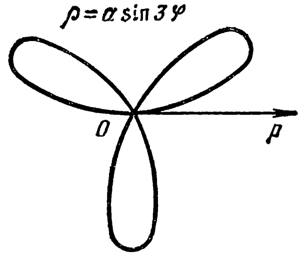


Рис. 10.

$2\pi/3$ часть плоскости, ограниченную лучами $\varphi = 0$ и $\varphi = 2\pi/3$, получим график данной функции в промежутках $2\pi/3 \leqslant \varphi < 4\pi/3$ и $4\pi/3 \leqslant \varphi < 2\pi$. Искомая кривая изображена на рис. 10. Она называется *трехлепестковой розой*.

1.102. Построить линии: 1) $\rho = R$; 2) $\varphi = \pi/6$, 3) $\rho = a/\cos\varphi$; 4) $\rho = b/\sin\varphi$; 5) $\rho = a(1-\cos\varphi)$.

1.103. Построить линии, заданные уравнениями в полярных координатах:

1) $\rho = a/\varphi$ (*гиперболическая спираль*);

2) $\rho = e^{\varphi}$ (*логарифмическая спираль*);

3) $\rho = a\sqrt{\cos 2\varphi}$ (*лемниската*);

4) $\rho = a \sin 2\varphi$ (*четырехлепестковая роза*);

5) $\rho = a(1+2\cos\varphi)$ (*улитка Паскаля*).

1.104. Написать в полярных координатах уравнение окружности с центром в точке $(0;\ a)$ и радиусом, равным a.

1.105. Отрезок постоянной длины $2a$ скользит своими концами по осям декартовой системы координат. Из начала координат на этот отрезок опущен перпендикуляр $[OM]$. Составить в полярных координатах уравнение множества оснований таких перпендикуляров.

1.106. Найти в полярных координатах уравнение множества точек, произведение расстояний которых до двух данных точек A и B есть величина постоянная, равная a^2. Длину отрезка $[AB]$ считать равной $2a$.

ГЛАВА 2
ПРЯМАЯ

§ 1. ОБЩЕЕ УРАВНЕНИЕ ПРЯМОЙ

Если на плоскости произвольно взята декартова система координат, то *всякое уравнение первой степени относительно текущих координат x и y*

$$Ax+By+C=0, \tag{1}$$

где A и B одновременно не равны нулю, определяет прямую в этой системе координат.

Верно и обратное утверждение: *в декартовой системе координат всякая прямая может быть представлена уравнением первой степени вида* (1).

Уравнение (1) называется *общим уравнением прямой.*

Частные случаи уравнения (1) приведены в следующей таблице.

	Значения коэффициентов	Уравнение прямой	Положение прямой
1	$C=0$	$Ax+By=0$	Проходит через начало координат
2	$A=0$	$y=b$, где $b=-C/B$	Параллельна оси Ox
3	$B=0$	$x=a$, где $a=-C/A$	« « Oy
4	$A=C=0$	$y=0$	Совпадает с осью Ox
5	$B=C=0$	$x=0$	« « « Oy

2.1. Проверить, проходит ли прямая $2x+3y-5=0$ через точки $A(-2;\ 3)$, $B(1;\ 1)$, $C(-1/2;\ -2)$, $D(0;\ 5/3)$, $E(5;\ -5/3)$, $F(5/2;\ 0)$.

2.2. Проверить, проходит ли через точку $A(2;\ -1)$ каждая из следующих прямых: 1) $x-2=0$; 2) $3x+5y-1=0$; 3) $y+1=0$; 4) $x-4y+1=0$; 5) $x+2y=0$; 6) $2x-3=0$.

2.3. Построить прямую $3x-2y+6=0$.

Решение. Для построения прямой достаточно знать какие-либо две ее точки, например, точки ее пересечения с осями координат. Точку A пересечения прямой с осью Ox можно получить, если в уравнении прямой принять $y=0$. Тогда имеем $3x+6=0$, т. е. $x=-2$. Таким образом, $A(-2;\ 0)$.

Тогда B пересечения прямой с осью Oy имеет абсциссу $x=0$; следовательно, ордината точки B находится из уравнения $-2y+6=0$, т. е. $y=3$. Таким образом, $B(0;\ 3)$.

2.4. Построить следующие прямые: 1) $2x-4y+1=0$; 2) $x-3y=0$, 3) $3x+5=0$; 4) $2y-3=0$.

2.5. Написать уравнения прямых, проходящих через точку $A(-1;\ 2)$ параллельно координатным осям.

2.6. Прямая, параллельная оси ординат, отсекает на положительной полуоси абсцисс отрезок, равный 3 единицам. Написать уравнение этой прямой.

2.7. Одна из вершин квадрата совпадает с началом координат, а противоположная — с точкой $A(5;\ -5)$. Написать уравнения сторон * квадрата.

---

* Здесь и в дальнейшем под уравнением стороны понимается уравнение прямой, на которой лежит эта сторона.

2.8. Одна из вершин квадрата находится в начале координат, а точка пересечения его диагоналей — в точке $S(-1;\ 1)$. Составить уравнения сторон квадрата.

2.9. Две стороны прямоугольника лежат на координатных осях, а одна из вершин имеет координаты $(-2;\ -3)$. Составить уравнения сторон прямоугольника.

§ 2. УГЛОВОЙ КОЭФФИЦИЕНТ ПРЯМОЙ. УРАВНЕНИЕ ПРЯМОЙ С УГЛОВЫМ КОЭФФИЦИЕНТОМ И НАЧАЛЬНОЙ ОРДИНАТОЙ

Углом наклона прямой к оси Ox называется наименьший угол φ, на который нужно повернуть в положительном направлении ось абсцисс до ее совпадения с данной прямой. Направление любой прямой характеризуется ее *угловым коэффициентом k*, который определяется как тангенс угла наклона φ этой прямой к оси Ox, т. е. $k=\operatorname{tg}\varphi$ Исключение составляет лишь прямая, перпендикулярная оси Ox, которая не имеет углового коэффициента.

Уравнение прямой, имеющей угловой коэффициент k и пересекающий ось Oy в точке, ордината которой равна b (начальная ордината), записывается в виде

$$y=kx+b. \tag{1}$$

Угловой коэффициент k прямой, заданной общим уравнением $Ax+By+C=0$, находится как коэффициент при x в выражении y через x: $k=-A/B$.

Угловой коэффициент k прямой, заданной двумя точками $A(x_A;\ y_A)$ и $B(x_B;\ y_B)$, вычисляется по формуле *

$$k_{AB}=\frac{y_B-y_A}{x_B-x_A}. \tag{2}$$

2.10. Написать уравнение с угловым коэффициентом и начальной ординатой для прямой $2x+3y+7=0$.

2.11. Найти угловой коэффициент каждой из следующих прямых:

1) $x-4y-7=0$, 2) $3y+5=0$;
3) $5x-2y=0$; 4) $10x+5y+12=0$.

2.12. Найти угол наклона к оси Ox каждой из следующих прямых, заданных двумя точками: 1) $A(2;\ 5)$ и $B(7;\ 6)$; 2) $C(-3;\ 2)$ и $D(-1;\ 5)$; 3) $E(1;\ -3)$ и $F(-2;\ 1)$; 4) $K(3;\ -4)$ и $L(-3;\ 2)$; 5) $M(2;\ -4)$ и $N(-3;\ -4)$.

Указание: воспользоваться формулой (2).

2.13. Составить уравнение прямой, которая отсекает на отрицательной полуоси Oy отрезок, равный 2 единицам, и образует с осью Ox угол $\varphi=30°$.

Решение. Прямая пересекает ось Oy в точке $B(0;\ -2)$ и имеет угловой коэффициент $k=\operatorname{tg}\varphi=\sqrt{3}/3$. Полагая в уравнении (1) $k=\sqrt{3}/3$ и $b=-2$, получим искомое уравнение

$$y=\frac{\sqrt{3}}{3}x-2, \quad \text{или} \quad \sqrt{3}x-3y-6=0.$$

2.14. Написать уравнения прямых, отсекающих на положительной полуоси Oy отрезок, равный 3 единицам, и образующих с осью Ox углы: 1) 45°; 2) 60°; 3) 135°; 4) 150°.

---

* Эта формула имеет смысл в случае, если $x_A \neq x_B$.

2.15. Составить уравнение прямой, проходящей через начало координат и образующей с осью Ox углы: 1) 45°; 2) 60°; 3) 120°.

2.16. Составить уравнение прямой, проходящей через точки $A(-1;\ 2)$ и $B(0;\ -3)$.

Указание: угловой коэффициент прямой находится по формуле (2); начальная ордината $b=-3$.

2.17. Составить уравнение прямой, проходящей через точки: 1) $A(2;\ 3)$ и $B(0;\ 1)$; 2) $C(0;\ -5)$ и $D(-2;\ -5)$; 3) $E(-3;\ 4)$ и $F(0;\ 0)$.

2.18. Прямая, проходящая через точку $A(-2;\ 3)$, образует с осью Ox угол 135°. Составить уравнение этой прямой.

Решение. Уравнение прямой будем искать в виде $y=kx+b$. Угловой коэффициент прямой $k=\operatorname{tg}135°=-1$. Искомая прямая $y=-x+b$ проходит через точку $A(-2;\ 3)$, поэтому ее координаты $x=-2$, $y=3$ должны удовлетворять уравнению прямой, т. е. $3=-(-2)+b$, откуда $b=1$. Следовательно, уравнение прямой имеет вид

$$y=-x+1, \text{ или } x+y-1=0.$$

2.19. По прямой $2x+5y-15=0$ направлен луч света, который, дойдя до оси абсцисс, отражается от нее. Написать уравнение отраженного луча.

2.20. Найти уравнение прямой, проходящей через точку (0; 2) и образующей с осью Ox угол, вдвое больший угла, который составляет с той же осью прямая $\sqrt{3}x-y+1=0$.

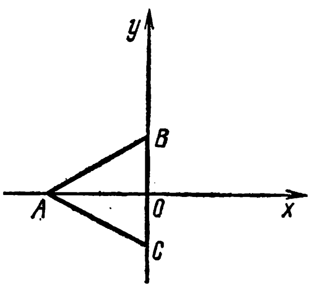


Рис. 11.

2.21. Равносторонний треугольник ABC, длина стороны которого равна 2 единицам, расположен так, как показано на рис. 11. Составить уравнения его сторон.

2.22. Уравнение одной из сторон ромба $2x+y-3=0$. Написать уравнения остальных его сторон, если диагонали ромба лежат на осях координат.

2.23. Составить уравнения сторон квадрата, диагонали которого лежат на осях координат. Длина стороны квадрата равна a.

2.24. Основания равнобочной трапеции равны 18 и 6 единицам, а боковые стороны составляют с основанием угол 30°. Написать уравнения сторон трапеции, если в качестве осей координат взяты прямые, содержащие большее основание и ось симметрии трапеции.

§ 3. УРАВНЕНИЕ ПРЯМОЙ В ОТРЕЗКАХ

Уравнением прямой в отрезках называется уравнение вида

$$\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1, \tag{1}$$

где a и b — абсцисса и ордината точек пересечения прямой с осями Ox и Oy, т. е. длины отрезков, отсекаемых прямой на координатных осях, взятые с соответствующими знаками.

2.25. Общее уравнение прямой $2x-3y-6=0$ привести к уравнению в отрезках.

Решение. Запишем данное уравнение в виде $2x-3y=6$ и разделим обе его части на свободный член:

$$\frac{x}{3}+\frac{y}{-2}=1.$$

Это и есть уравнение данной прямой в отрезках.

2.26. Привести к уравнениям в отрезках следующие уравнения прямых: 1) $3x-4y+12=0$; 2) $5x-6y-30=0$; 3) $4x+5y-20=0$; 4) $3x-2y-1=0$. Построить эти прямые.

2.27. Составить уравнение прямой, пересекающей ось абсцисс в точке $(-3;\ 0)$, а ось ординат — в точке $(0;\ 4)$.

2.28. Составить уравнение прямой, отсекающей на положительной полуоси абсцисс отрезок, равный 2 единицам, а на отрицательной полуоси ординат — отрезок, равный 5 единицам.

2.29. Привести к общему виду уравнение $x/7+y/(-5)=1$.

2.30. Найти углы наклона к оси Ox и начальные ординаты следующих прямых:

1) $x/(-1)+y/\sqrt{3}=1$; 2) $x/1+y/(-1)=1$;
3) $x/(-2)+y/1=1$; 4) $x/(-1)+y/(-3)=1$.

2.31. Какая зависимость существует между a и b, если угол наклона прямой $x/a+y/b=1$ к оси Ox равен: 1) 45°; 2) 135°; 3) 30°; 4) 150°?

2.32. Диагонали ромба равны 8 и 3 единицам. Написать уравнения сторон ромба, если бо́льшая диагональ лежит на оси Ox, а меньшая — на оси Oy.

2.33. Найти площадь треугольника, заключенного между осями координат и прямой $2x-5y+20=0$.

2.34. Через точку $A(1;\ 2)$ провести прямую, отсекающую на положительных полуосях координат конгруэнтные отрезки.

Решение. Пусть уравнение искомой прямой имеет вид $x/a+y/b=1$. По условию $a=b$. Следовательно, уравнение прямой принимает вид $x+y=a$. Так как точка с координатами $(1;\ 2)$ принадлежит этой прямой, то числа $x=1$, $y=2$ удовлетворяют уравнению $x+y=a$: $1+2=a$, откуда $a=3$.

Итак, искомое уравнение записывается следующим образом:

$$x+y=3, \text{ или } x+y-3=0.$$

2.35. Составить уравнение прямой, которая проходит через точку $(2;\ 3)$ и отсекает от координатного угла треугольник, площадь которого равна 12 кв. ед.

2.36. Прямая проходит через точку $(-1;\ -9)$ и отсекает на отрицательной полуоси абсцисс отрезок, втрое меньший, чем на отрицательной полуоси ординат. Составить уравнение этой прямой.

§ 4. УРАВНЕНИЕ ПРЯМОЙ, ПРОХОДЯЩЕЙ ЧЕРЕЗ ТОЧКУ В ДАННОМ НАПРАВЛЕНИИ

Уравнение прямой, проходящей через точку $A(x_A;\ y_A)$ *и имеющей угловой коэффициент* k, записывается в виде

$$y-y_A=k(x-x_A). \tag{1}$$

Пучком прямых называется совокупность прямых плоскости, проходящих через одну и ту же точку A — центр пучка. Уравнение (1) можно рассматривать как уравнение пучка прямых, поскольку любая прямая пучка может быть получена из уравнения (1) при соответствующем значении углового коэффициента k. Исключение составляет лишь одна прямая пучка, которая параллельна оси Oy, — ее уравнение $x=x_A$.

2.37. Составить уравнение прямой, проходящей через точку (—2; 5) и образующей с осью Ox угол 45°.

Решение. Угловой коэффициент искомой прямой $k=\operatorname{tg} 45°=1$. Поэтому, воспользовавшись уравнением (1), получаем

$$y-5=1\cdot[x-(-2)], \text{ или } x-y+7=0.$$

2.38. Составить уравнение прямой, проходящей через точку (2; —3) и образующей с осью Ox угол 120°.

2.39. Составить уравнение прямой, которая проходит через точку (—2; 1) и образует с осью Ox угол, вдвое меньший, чем прямая $2\sqrt{3}x+2y-1=0$ с той же осью.

2.40. Точка C делит отрезок $[AB]$, где $A(4;\ -3)$, $B(-8;\ 6)$, в отношении $\lambda=2:1$. Через эту точку провести прямую, составляющую с осью Ox угол 135°.

2.41. Из точки $A(-3;\ 5)$ под углом 45° к оси абсцисс направлен луч света, который, дойдя до этой оси, отражается от нее. Составить уравнения падающего и отраженного лучей.

2.42. Луч света, выходящий из точки $A(5;\ -2)$, отражается от оси абсцисс, причем отраженный луч проходит через точку $B(-7;\ -6)$. Составить уравнения падающего и отраженного лучей.

Указание: угловые коэффициенты падающего и отраженного от оси абсцисс лучей равны по величине и противоположны по знаку. Можно также воспользоваться тем фактом, что отраженный луч лежит на прямой, проходящей через точку, симметричную точке A относительно оси абсцисс.

2.43. Составить уравнение пучка прямых, проходящих через точку (—4; 3). Выбрать из этого пучка прямые, составляющие с осью Ox углы: 1) 30°; 2) 45°; 3) 60°; 4) 120°; 5) 135°. Построить эти прямые.

2.44. Из пучка прямых, проходящих через точку (—2; 5), выбрать прямую, отсекающую на положительных полуосях координат конгруэнтные отрезки.

2.45. Составить уравнение прямой, проходящей через точки $A(3;\ -5)$ и $B(-4;\ 3)$.

Решение. Угловой коэффициент искомой прямой

$$k=\frac{y_A-y_B}{x_A-x_B}=\frac{-5-3}{3-(-4)}=-\frac{8}{7}.$$

Зная угловой коэффициент $k=-8/7$ и точку $A(3;\ -5)$, через которую эта прямая проходит, запишем ее уравнение:

$$y+5=-\frac{8}{7}(x-3), \text{ или } 8x+7y+11=0.$$

Ясно, что получится то же уравнение, если вместо точки A взять точку B.

2.46. Из пучка прямых с центром в точке $(2;\ -5)$ выбрать прямую: 1) проходящую через точку $(3;\ -2)$; 2) через точку $(-3;\ -5)$; 3) через точку $(2;\ 6)$; 4) отсекающую на положительной полуоси ординат отрезок, равный 3 единицам.

§ 5. УРАВНЕНИЕ ПРЯМОЙ, ПРОХОДЯЩЕЙ ЧЕРЕЗ ДВЕ ТОЧКИ

Уравнение прямой, проходящей через две данные точки $A(x_A;\ y_A)$ и $B(x_B;\ y_B)$, имеет вид

$$\frac{x-x_A}{x_B-x_A}=\frac{y-y_A}{y_B-y_A}. \qquad (1)$$

Если точки A и B определяют прямую, *параллельную оси* Ox $(y_A=y_B)$ или *оси* Oy $(x_A=x_B)$, то уравнение такой прямой записывается соответственно в виде

$$y=y_A \text{ или } x=x_A. \qquad (2)$$

2.47. Составить уравнение прямой, проходящей через точки $A(-3;\ 5)$ и $B(7;\ -2)$.

Решение. Воспользуемся уравнением (1):

$$\frac{x-(-3)}{7-(-3)}=\frac{y-5}{-2-5}, \text{ или } \frac{x+3}{10}=\frac{y-5}{-7},$$

откуда

$$7x+10y-29=0.$$

2.48. Составить уравнение прямой, проходящей через две точки: 1) $A(4;\ -1)$ и $B(-2;\ -9)$; 2) $C(0;\ 3)$ и $D(-4;\ 2)$, 3) $E(-3;\ 7)$ и $F(-3;\ -5)$; 4) $K(9;\ -2)$ и $L(-3;\ -2)$.

2.49. Составить уравнение прямой, проходящей через точку $A(-2;\ 8)$ и середину отрезка $[MN]$, где $M(6;\ -5)$, $N(-2;\ 1)$.

2.50. Даны координаты вершин треугольника: $M(-1;\ 3)$, $N(4;\ -2)$, $P(0;\ -5)$. Составить уравнения его сторон.

2.51. Вершины четырехугольника имеют координаты $P(1;\ 0)$, $Q(2;\ 5/3)$, $R(5;\ 2)$, $S(6;\ -1)$. Найти точку пересечения его диагоналей.

2.52. Вершины треугольника имеют координаты $A(2;\ 6)$, $B(-6;\ 0)$, $C(-3;\ -4)$. Составить уравнения его сторон и медиан.

2.53. Даны вершины треугольника: $A(-12;\ -2)$, $B(4;\ 10)$, $C(-6;\ -10)$. Написать уравнение биссектрисы угла A.

Указание: точка K пересечения искомой биссектрисы с прямой (BC) делит отрезок $[BC]$ в отношении $\lambda=|AB|:|BC|$.

2.54. Найти длину биссектрисы угла A треугольника с вершинами $A(4;\ -2)$, $B(7;\ -2)$, $C(4;\ 5)$.

2.55. Под каким углом к оси Ox должен быть направлен луч света, чтобы отраженный луч проходил через точки $A(-2;\ \sqrt{3})$ и $B(-3;\ 2\sqrt{3})$?

2.56. Проверить, лежат ли точки $A(5;\ 2)$, $B(3;\ 1)$ и $C(-1;\ -1)$ на одной прямой.

Решение. Составим уравнение прямой, проходящей через точки A и C:

$$\frac{x-x_A}{x_C-x_A}=\frac{y-y_A}{y_C-y_A},\quad \text{или}\quad \frac{x-5}{-6}=\frac{y-2}{-3}.$$

Подставляя в это уравнение координаты точки B ($x_B=3$ и $y_B=1$), получим $(3-5)/(-6)=(1-2)/(-3)$, т. е. $1/3=1/3$. Таким образом, координаты точки B удовлетворяют уравнению прямой (AC), т. е. $B\in(AC)$.

2.57. Проверить, лежат ли на одной прямой три данные точки: 1) $A(-2;\ -7)$, $B(1;\ -1)$, $C(4;\ 5)$; 2) $D(-2;\ 9)$, $E(2;\ -7)$, $F(0;\ 1)$; 3) $K(-1;\ -1)$, $L(-3;\ -7)$, $M(2;\ 7)$.

2.58. Найти ординату точки $P(5;\ y)$, лежащей на одной прямой с точками $M(-1;\ 8)$ и $N(2;\ -1)$.

2.59. Найти точку $M(x;\ y)$, лежащую на одной прямой с точками $P(1;\ -7)$ и $Q(-2;\ 5)$, если координаты искомой точки равны между собой.

2.60. Треугольник ABC задан координатами своих вершин: $A(-3;\ 4)$, $B(-9;\ 6)$ и $C(5;\ 2)$. Составить уравнение средней линии, параллельной (AC).

§ 6. ВЗАИМНОЕ РАСПОЛОЖЕНИЕ ДВУХ ПРЯМЫХ. УСЛОВИЕ ПАРАЛЛЕЛЬНОСТИ

Условия *пересечения*, *параллельности* или *совпадения* двух прямых, заданных своими общими уравнениями

$$A_1x+B_1y+C_1=0 \quad \text{и} \quad A_2x+B_2y+C_2=0,$$

приведены в следующей таблице.

Взаимное расположение прямых	Условие
Пересечение	$\frac{A_1}{A_2}\neq\frac{B_1}{B_2}$
Параллельность	$\frac{A_1}{A_2}=\frac{B_1}{B_2}\neq\frac{C_1}{C_2}$
Совпадение	$\frac{A_1}{A_2}=\frac{B_1}{B_2}=\frac{C_1}{C_2}$

Если известны угловые коэффициенты k_1 и k_2 прямых, то *условие параллельности** этих прямых состоит в равенстве их угловых коэффициентов: $k_1=k_2$.

* Здесь совпадение рассматривается как частный случай параллельности.

2.61. Установить, совпадают, параллельны или пересекаются (в последнем случае найти точку пересечения) следующие пары прямых:

1) $x-y+3=0,\quad 2x-2y-7=0;$
2) $2x-y+4=0,\quad 4x-2y+9=0;$
3) $x+3y-1=0,\quad 2x+6y-2=0;$
4) $5x-y+1=0,\quad 10x-3y+2=0;$
5) $3x+2y-4=0,\quad 5x+6y-12=0;$
6) $2x-3y=0,\quad 6x-9y=0;$
7) $y-5=0,\quad 3y+15=0;$
8) $4x-1=0,\quad 8y+2=0;$
9) $2x+3=0,\quad 2x-1=0;$
10) $4x-y+1=0,\quad 2x+3y-17=0;$
11) $5x+3=0,\quad 10x+7y+2=0.$

2.62. Через точку пересечения прямых $x-2y-4=0$ и $2x-3y-7=0$ провести прямую, составляющую с осью Ox угол 45°.

2.63. Найти периметр треугольника, ограниченного прямыми $4x-3y+6=0$, $x+3y-36=0$ и осью ординат.

2.64. Проверить, проходят ли через одну и ту же точку следующие прямые:

1) $2x+y-5=0,\quad 3x-2y-3=0,\quad x-5y-14=0;$
2) $x-2y+5=0,\quad 2x+3y-4=0,\quad x+1=0;$
3) $2x-y+7=0,\quad x=0,\quad 3x+2y-14=0;$
4) $3y+5=0,\quad 3x+6y+8=0,\quad 6x+3y+1=0.$

Указание: найти точку пересечения любых двух прямых и проверить, проходит ли через нее третья прямая.

2.65. При каком значении m прямые $mx+(1-m)y-3=0$, $2x-3y-5=0$ и $7x+5y-2=0$ проходят через одну точку? Найти эту точку.

2.66. Составить уравнение прямой, параллельной прямой $2x+3y-1=0$ и отсекающей на положительной полуоси абсцисс отрезок, равный 4 единицам.

Решение. Искомая прямая проходит через точку $A(4;\ 0)$, а ее угловой коэффициент равен угловому коэффициенту данной прямой, т. е. $k=-2/3$. Воспользовавшись уравнением прямой, проходящей через данную точку в заданном направлении, получим

$$y-0=-\frac{2}{3}(x-4),\quad \text{или}\quad 2x+3y-8=0.$$

2.67. Составить уравнение прямой, если известно, что она проходит через точку $(-1;\ 4)$ и параллельна: 1) прямой $2x+3y+5=0$; 2) оси абсцисс; 3) оси ординат; 4) биссектрисе II и IV координатных углов, 5) прямой $x/(-5)+y/2=1$.

2.68. Составить уравнение прямой, проходящей через точку $A(4;\ -7)$ и параллельной прямой (PQ), где $P(-4;\ 3)$, $Q(2;\ -5)$.

2.69. Составить уравнение прямой, проходящей через точку пересечения прямых $3x+2y+7=0$ и $4x+3y+9=0$ и параллельной прямой $y=-2x+3$.

2.70. Через точку пересечения прямых $7x-2y-3=0$ и $5x+y-7=0$ провести прямую, параллельную биссектрисе I и III координатных углов.

2.71. Даны две точки $A(-1;\ 6)$ и $B(9;\ -8)$. Через середину отрезка $[AB]$ провести прямую, параллельную прямой $2x-3y+5=0$.

2.72. Даны координаты вершин треугольника: $A(-2;\ 3)$, $B(4;\ -2)$ и $C(1;\ 5)$. Составить уравнения прямых, проходящих через каждую из вершин параллельно противолежащей стороне.

2.73. В треугольнике ABC известны вершины $A(-3;\ -4)$, $B(1;\ -2)$ и $C(7;\ -2)$. Составить уравнение средней линии, параллельной (AC).

2.74. Даны вершины четырехугольника $A(-4;\ -2)$, $B(-3;\ 1)$, $C(4;\ 3)$, $D(5;\ -3)$. Показать, что середины сторон этого четырехугольника являются вершинами параллелограмма.

2.75. Зная уравнения двух сторон параллелограмма $x-y+1=0$ и $2x+3y-6=0$ и одну из его вершин $C(7;\ 1)$, составить уравнения двух других сторон.

2.76. В параллелограмме $ABCD$ даны вершины $A(-1;\ 3)$, $B(4;\ 6)$, $C(1;\ -5)$. Составить уравнения его сторон.

2.77. В параллелограмме $ABCD$ известны уравнения сторон $2x+y-1=0$ (AB), $3x-2y-5=0$ (AD) и точка $K(-3;\ 5)$ пересечения диагоналей. Найти уравнения двух других сторон.

Решение. 1. Вершину A параллелограмма найдем как точку пересечения прямых (AB) и (AD):

$$\left.\begin{aligned} 2x+\ y-1&=0,\\ 3x-2y-5&=0. \end{aligned}\right\}$$

Отсюда получаем $A(1;\ -1)$.

2. Координаты точки C найдем исходя из того, что K есть середина отрезка $[AC]$:

$$x_K=(x_A+x_C)/2,\quad y_K=(y_A+y_C)/2.$$

Подставляя в эти равенства координаты точек A и K, получим уравнения для нахождения координат точки C:

$$-3=(1+x_C)/2,\quad 5=(-1+y_C)/2.$$

Отсюда $x_C=-7$, $y_C=11$ и $C(-7;\ 11)$.

3. Так как $(BC)\parallel(AD)$, то угловые коэффициенты этих прямых равны между собой: $k_{BC}=k_{AD}=3/2$. Аналогично $k_{CD}=k_{AB}=-2$.

4. Уравнение стороны (BC) найдем как уравнение прямой, проходящей через данную точку $C(-7;\ 11)$ с заданным угловым коэффициентом $k=3/2$:

$$y-11=\frac{3}{2}(x+7),\quad \text{или}\quad 3x-2y+43=0.$$

Аналогично найдем уравнение стороны (CD):

$$y-11=-2(x+7),\quad \text{или}\quad 2x+y+3=0.$$

2.78. В параллелограмме $ABCD$ известны уравнения сторон $x-4y+1=0$ (AB) и $3x+y-2=0$ (AD) и точка $M(1;\ -3)$ — середина $[BC]$. Найти уравнения двух других сторон параллелограмма.

§ 7. УСЛОВИЕ ПЕРПЕНДИКУЛЯРНОСТИ ДВУХ ПРЯМЫХ

Условие перпендикулярности двух прямых, угловые коэффициенты которых соответственно равны k_1 и k_2, состоит в выполнении соотношения

$$k_1k_2+1=0, \quad \text{или} \quad k_1=-1/k_2,$$

т. е. *угловые коэффициенты этих прямых обратны по абсолютной величине и противоположны по знаку.*

2.79. Составить уравнение прямой, проходящей через точку $A(-4;\ 3)$ перпендикулярно прямой $2x-3y-4=0$.

Решение. Угловой коэффициент данной прямой $k_1=2/3$; искомая прямая перпендикулярна данной, поэтому ее угловой коэффициент $k_2=-1/k_1=-3/2$. Используя уравнение прямой, проходящей через данную точку с заданным угловым коэффициентом, получим уравнение искомой прямой:

$$y-y_A=k_2(x-x_A), \quad \text{или} \quad y-3=-\frac{3}{2}(x+4),$$

откуда

$$3x+2y+6=0.$$

2.80. Даны прямые $x+y-4=0$ (1), $6x+8y-11=0$ (2), $2x-2y+3=0$ (3), $4x-3y+7=0$ (4), $9x+9y+5=0$ (5) и $x-y+2=0$ (6). Указать, какие из них между собой параллельны, а какие — перпендикулярны.

2.81. Дана прямая $4x+5y-2=0$ и точка $M(-3;\ 2)$. Через точку M провести две прямые, из которых одна параллельна, а другая перпендикулярна данной прямой.

2.82. Из начала координат провести перпендикуляр к прямой $2x+7y-3=0$.

2.83. Проверить, является ли прямоугольным треугольник с вершинами $A(4;\ -5)$, $B(7;\ 6)$ и $C(-7;\ -2)$.

2.84. Составить уравнение прямой, проходящей через точку $M(2;\ 3)$ перпендикулярно прямой (PQ), где $P(1;\ 7)$, $Q(-2;\ -5)$.

2.85. Составить уравнение серединного перпендикуляра к отрезку $[MN]$, где $M(-1;\ 7)$ и $N(3;\ -1)$.

2.86. Составить уравнение серединного перпендикуляра к отрезку прямой $2x+y-4=0$, заключенному между осями координат.

2.87. Даны координаты двух противоположных вершин ромба $M(-3;\ 2)$ и $N(7;\ -6)$. Составить уравнения диагоналей ромба.

2.88. Треугольник ABC задан уравнениями своих сторон: $2x+7y-1=0$ (AB), $3x-2y+11=0$ (BC) и $3x-5y+7=0$ (AC). Составить уравнение высоты, опущенной из вершины B.

2.89. Написать уравнения высот треугольника, вершины которого находятся в точках $K(2;\ 5)$, $L(-4;\ 3)$ и $M(6;\ -2)$.

2.90. На прямой $2x-5y-12=0$ найти точку, равноудаленную от точек $A(-1;\ 3)$ и $B(3;\ -5)$.

2.91. Найти точку, равноудаленную от трех данных точек $P(2; -3)$, $Q(6; -1)$ и $R(7; 2)$.

2.92. Найти основание перпендикуляра, проведенного из точки $(3; 4)$ к прямой $2x+5y+3=0$.

2.93. Найти точку, симметричную точке $(-2; -2)$ относительно прямой $x+y-3=0$.

§ 8. НОРМАЛЬНОЕ УРАВНЕНИЕ ПРЯМОЙ. РАССТОЯНИЕ ОТ ТОЧКИ ДО ПРЯМОЙ

Нормальным уравнением прямой называется уравнение вида

$$x\cos\alpha+y\sin\alpha-p=0, \tag{1}$$

где p — длина перпендикуляра, проведенного из начала координат к данной прямой, а α — угол, образованный этим перпендикуляром с осью Ox.

Для приведения общего уравнения прямой $Ax+By+C=0$ к нормальному виду (1) следует умножить все его члены на нормирующий множитель

$$\mu=\pm\frac{1}{\sqrt{A^2+B^2}}, \tag{2}$$

где знак перед радикалом противоположен знаку свободного члена C в общем уравнении прямой.

Расстояние от точки $M_0(x_0; y_0)$ *до прямой* $Ax+By+C=0$ находится по формуле

$$d=\frac{|Ax_0+By_0+C|}{\sqrt{A^2+B^2}}, \tag{3}$$

т. е. *расстояние от точки до прямой равно взятому по абсолютной величине результату подстановки координат точки в нормальное уравнение прямой.*

2.94. Уравнение прямой $5x-12y+26=0$ привести к нормальному виду.

Решение. Найдем сначала нормирующий множитель

$$\mu=-\frac{1}{\sqrt{5^2+(-12)^2}}=-\frac{1}{13}$$

(берется знак минус, так как $C=26>0$). Следовательно, нормальное уравнение данной прямой имеет вид

$$-\frac{5}{13}x+\frac{12}{13}y-2=0.$$

2.95. В треугольнике с вершинами $A(-3; 10)$, $B(2; 5)$ и $C(3; 2)$ найти длину высоты, проведенной из вершины A.

Решение. Данная задача сводится к определению расстояния от точки A до прямой (BC). Запишем уравнение этой прямой:

$$\frac{y-2}{5-2}=\frac{x-3}{2-3}, \quad \text{или} \quad 3x+y-11=0.$$

Расстояние от точки $A(-3; 10)$ до прямой (BC) найдем по формуле (3):

$$d=\frac{|3\cdot(-3)+1\cdot10-11|}{\sqrt{3^2+1^2}}=\sqrt{10}.$$

2.96. Привести к нормальному виду уравнения следующих прямых: 1) $4x-3y-15=0$; 2) $x-7y+30=0$; 3) $12x+5y+78=0$; 4) $y=8x-5$; 5) $y=kx+b^2$.

2.97. Определить, какие из уравнений прямой являются нормальными:

$$1)\ \frac{8}{17}x-\frac{15}{17}y-2=0;\quad 2)\ \frac{3}{5}x+\frac{4}{5}y+1=0;$$

$$3)\ \frac{2}{3}x-\frac{2}{3}y-4=0;\quad 4)\ \frac{x}{\sqrt{10}}+\frac{3}{\sqrt{10}}y-\frac{15}{2\sqrt{10}}=0.$$

2.98. Найти длину перпендикуляра, проведенного из начала координат к прямой $x-y+8=0$, и угол, образованный этим перпендикуляром с осью Ox.

2.99. Найти расстояние от точки $(-1;\ 3)$ до прямой $3x-4y+40=0$.

2.100. Найти расстояние от начала координат до прямой $15x-8y-68=0$.

2.101. Известны уравнения сторон треугольника: $x+3y-3=0$, $3x+y+11=0$ и $x-y-3=0$. Найти длину высоты, которая проведена из вершины, лежащей на оси абсцисс.

2.102. Какая из точек $A(8;\ 9)$, $B(-5;\ -7)$ и $C(-11;\ -3)$ расположена ближе всего к прямой $6x+8y-15=0$?

2.103. К какой из двух прямых: $3x+5y-8=0$ или $5x-3y+15=0$ точка $M(-1;\ 2)$ находится ближе?

2.104. Найти расстояние между параллельными прямыми $2x-3y-5=0$ и $2x-3y+21=0$.

Указание: задача сводится к отысканию расстояния от точки, взятой на одной из этих прямых, до второй прямой.

2.105. Составить уравнение прямой, проходящей через точку $A(2;\ -4)$ и отстоящей от начала координат на расстоянии, равном 2 единицам.

Решение. Пусть уравнение искомой прямой имеет вид

$$y-y_A=k(x-x_A),\quad \text{или}\quad y+4=k(x-2),$$

т. е.

$$kx-y-(4+2k)=0. \qquad (*)$$

Найдем расстояние d этой прямой от начала координат. По формуле (3) имеем

$$d=\frac{|4+2k|}{\sqrt{k^2+1}}.$$

С другой стороны, по условию $d=2$. Таким образом, получаем уравнение для нахождения углового коэффициента искомой прямой:

$$\frac{|4+2k|}{\sqrt{k^2+1}}=2,\quad \text{или}\quad |k+2|=\sqrt{k^2+1},$$

откуда $k=-3/4$. Подставляя теперь найденное значение k в уравнение (*), получаем

$$-\frac{3}{4}x-y-\left(4-2\cdot\frac{3}{4}\right)=0,\quad \text{или}\quad 3x+4y+10=0.$$

В заключение отметим, что отыскивая уравнение прямой в виде $y-y_A=k(x-x_A)$, мы предполагали тем самым, что эта прямая не параллельна оси ординат. Но очевидно, что прямая $x=2$ (параллельная оси Oy) также удовлетворяет условию задачи, так как она проходит через точку $A(2; -4)$ и отстоит от начала координат на расстоянии, равном 2 единицам (рис. 12).

2.106. Написать уравнения прямых, проходящих через точку $A(4; 1)$ и отстоящих от точки $B(-4; 0)$ на расстоянии, равном 4 единицам.

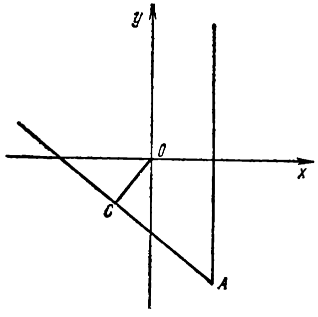


Рис. 12.

2.107. Составить уравнения прямых, параллельных прямой $3x+4y-1=0$ и отстоящих от нее на расстоянии, равном 1.

2.108. Составить уравнение прямых, удаленных от точки $A(3; -4)$ на 5 единиц и параллельных прямой $10x-24y+7=0$.

2.109. Найти точки пересечения с прямой $5x-3y+4=0$ двух прямых, параллельных прямой $5x+12y-5=0$ и отстоящих от нее на расстоянии, равном 3 единицам.

2.110. Найти точки, равноудаленные от точек $P(5; -2)$ и $Q(3; 0)$ и отстоящие от прямой $4x+3y+5=0$ на расстоянии, равном 2 единицам.

2.111. Написать уравнения биссектрис углов, образованных прямыми $4x-3y-10=0$, $9x-12y-7=0$.

§ 9. УГОЛ МЕЖДУ ДВУМЯ ПРЯМЫМИ

Под *углом между двумя прямыми* понимается один из двух смежных углов, образованных при их пересечении. Тангенс угла φ между двумя прямыми, угловые коэффициенты которых соответственно равны k_1 и k_2, вычисляется по формуле

$$\operatorname{tg}\varphi=\pm\left|\frac{k_2-k_1}{1+k_1k_2}\right|, \tag{1}$$

причем знак плюс соответствует острому углу φ, а знак минус — тупому.

Заметим, что если хотя бы одна из данных прямых параллельна оси Oy, то формула (1) не имеет смысла. В этом случае острый угол φ вычисляется непосредственно по формуле $\varphi=|\varphi_1-\varphi_2|$, где φ_1 и φ_2 — углы наклона прямых к оси Ox.

2.112. Найти острый угол между прямыми

$$x-3y+5=0 \quad \text{и} \quad 2x+4y-7=0.$$

Решение. Угловые коэффициенты данных прямых таковы: $k_1=1/3$, $k_2=-1/2$. Тангенс острого угла между этими прямыми найдем по формуле (1):

$$\operatorname{tg}\varphi=\left|\frac{-1/2-1/3}{1+(1/2)\cdot(-1/3)}\right|=1.$$

Отсюда $\varphi=45°$.

2.113. Вычислить острый угол между прямыми:

1) $y=3x-5$ и $y=-2x+3$;
2) $8x-2y-5=0$ и $2x-2y+1=0$;
3) $3x+y+7=0$ и $10x+2y-3=0$;
4) $x+2y-8=0$ и $5x-y+3=0$.

2.114. Найти острый угол между прямой $9x+3y-7=0$ и прямой, проходящей через точки $A(1;\ -1)$ и $B(5;\ 7)$.

2.115. Стороны треугольника заданы уравнениями $3x-2y+6=0\ (AB)$; $2x+y-10=0\ (BC)$; $x-3y+2=0\ (AC)$. Найти углы, которые медиана, проведенная из точки B, образует со сторонами (AB) и (BC).

2.116. Найти внутренние углы треугольника ABC с вершинами $A(1;\ 2)$, $B(2;\ 2)$, $C(0;\ 3)$.

Решение. Прежде всего выясним, не является ли один из углов треугольника ABC прямым или тупым. Для этого вычислим длины его сторон:

$$|AB|=\sqrt{(x_B-x_A)^2+(y_B-y_A)^2}=\sqrt{(2-1)^2+(2-2)^2}=1,$$
$$|AC|=\sqrt{2},\quad |BC|=\sqrt{5}.$$

Так как $|BC|^2>|AB|^2+|AC|^2$, то треугольник ABC — тупоугольный, причем его угол A, как лежащий против большей стороны, — тупой и, следовательно, углы B и C — острые.

Найдем, далее, угловые коэффициенты прямых (AB), (BC) и (AC):

$$k_{AB}=\frac{y_B-y_A}{x_B-x_A}=\frac{2-2}{1-2}=0,$$
$$k_{AC}=\frac{2-3}{1-0}=-1,\quad k_{BC}=\frac{2-3}{2-0}=-\frac{1}{2}.$$

Теперь, воспользовавшись формулой (1), вычислим тангенсы внутренних углов треугольника ABC:

$$\operatorname{tg}\hat{A}=-\left|\frac{k_{AB}-k_{AC}}{1+k_{AB}k_{AC}}\right|=-\left|\frac{0-(-1)}{1+0\cdot(-1)}\right|=-1$$

(перед модулем берется знак минус, так как угол A — тупой);

$$\operatorname{tg}\hat{B}=\left|\frac{k_{AB}-k_{BC}}{1+k_{AB}k_{BC}}\right|=\left|\frac{0-(-1/2)}{1+0\cdot(-1/2)}\right|=\frac{1}{2},$$
$$\operatorname{tg}\hat{C}=\left|\frac{k_{AC}-k_{BC}}{1+k_{AC}k_{BC}}\right|=\left|\frac{-1-(-1/2)}{1+(-1)\cdot(-1/2)}\right|=\frac{1}{3}$$

(в выражениях для $\operatorname{tg}\hat{B}$ и $\operatorname{tg}\hat{C}$ перед модулем берется знак плюс, поскольку углы B и C — острые).

Отсюда $\hat{A}=135°$, $\hat{B}=\operatorname{arctg}(1/2)$, $\hat{C}=\operatorname{arctg}(1/3)$.

2.117. Вычислить углы треугольника, заданного координатами своих вершин: $A(2;\ 4)$, $B(-1;\ -2)$ и $C(11;\ 13)$.

2.118. Составить уравнение прямой, проходящей через точку $M(-1;\ 2)$ и составляющей угол 45° с прямой $x-3y+2=0$.

2.119. В равнобедренном прямоугольном треугольнике ABC известны вершина острого угла $A(2;\ 6)$ и уравнение противолежащего катета: $x-7y+15=0\ (BC)$. Составить уравнения двух других сторон.

Решение. 1. Найдем угловой коэффициент прямой (AC), перпендикулярной к (BC): $k_{AC}=-1/k_{BC}=-7$. Поэтому уравнение прямой (AC) имеет вид

$$y-y_A=k_{AC}(x-x_A), \text{ или } y-6=-7(x-2),$$

т. е.

$$7x+y-20=0.$$

2. Уравнение прямой (AB) будем искать в виде

$$y-y_A=k_{AB}(x-x_A), \text{ или } y-6=k_{AB}(x-2).$$

Угловой коэффициент прямой (AB) найдем, воспользовавшись формулой (1):

$$\operatorname{tg}\widehat{ABC}=\left|\frac{k_{AB}-k_{BC}}{1+k_{AB}k_{BC}}\right|$$

(перед модулем берется знак плюс, так как $\widehat{ABC}=45°$ — острый). Подставляя

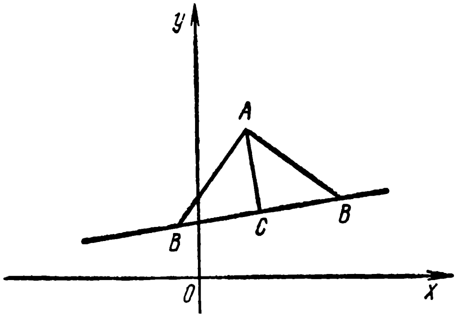


Рис. 13.

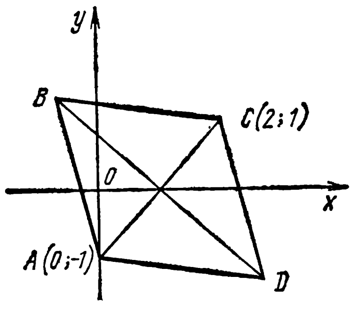


Рис. 14.

в это равенство $\widehat{ABC}=45°$, $k_{BC}=1/7$, получим уравнение относительно k_{AB}:

$$1=\left|\frac{k_{AB}-1/7}{1+k_{AB}/7}\right|,$$

откуда

$$\frac{k_{AB}-1/7}{1+k_{AB}/7}=1 \text{ и } \frac{k_{AB}-1/7}{1+k_{AB}/7}=-1.$$

Решая каждое из полученных уравнений, находим $k_{AB}=4/3$ и $k_{AB}=-3/4$. Таким образом, задача имеет два решения (рис. 13). В первом случае уравнение прямой (AB) имеет вид

$$y-6=\frac{4}{3}(x-2), \text{ или } 4x-3y+10=0,$$

а во втором —

$$y-6=-\frac{3}{4}(x-2), \text{ или } 3x+4y-18=0.$$

2.120. В равнобедренном прямоугольном треугольнике ABC даны вершина острого угла $A(1;3)$ и уравнение противолежащего катета: $2x-y+4=0$ (BC). Составить уравнения двух других сторон треугольника.

2.121. Противоположные вершины квадрата находятся в точках $B(-2;2)$ и $D(0;-3)$. Составить уравнения сторон квадрата.

2.122. В ромбе $ABCD$ с острым углом $60°$ точки $A(0;-1)$ и $C(2;1)$ являются противоположными вершинами, причем $[AC]$ — меньшая диагональ (рис. 14). Написать уравнения сторон ромба.

§ 10. СМЕШАННЫЕ ЗАДАЧИ

2.123. Написать уравнение прямой, которая проходит через точку $(-4; 2)$ и 1) параллельна оси Ox; 2) параллельна оси Oy; 3) параллельна биссектрисе II и IV координатных углов; 4) образует угол $60°$ с прямой $y=\sqrt{3}x-2$; 5) перпендикулярна прямой $4x+5y-3=0$.

2.124. Показать, что точки $A(1; 2)$ и $B(-2; 3)$ лежат по разные стороны от прямой l, уравнение которой $2x-y+4=0$.

Указание: сравнить абсциссу точки пересечения прямых (AB) и l с абсциссами точек A и B.

2.125. Через точку пересечения прямых $3x-2y+1=0$ и $x+3y-7=0$ проведена прямая перпендикулярно первой из данных прямых. Каково расстояние полученной прямой от начала координат?

2.126. Даны вершины треугольника: $A(-6; 2)$, $B(10; 10)$, $C(0; -10)$. Составить уравнения и найти длины его медианы, высоты и биссектрисы, проведенных из вершины A.

2.127. Даны две вершины $A(4; 4)$ и $B(1; 0)$ треугольника ABC и точка $M(1; 3)$ пересечения его медиан. Составить уравнения сторон треугольника.

2.128. В треугольнике ABC, заданном своими вершинами $A(5; -2)$, $B(-3; 3)$, $C(-1; -6)$, определить острый угол между биссектрисой угла C и медианой, проведенной из вершины A.

2.129. Найти точку, симметричную точке $A(-5; 2)$ относительно прямой $3x-4y-7=0$.

2.130. Луч света, выйдя из точки $A(-3; 10)$, отражается от прямой $2x-3y+23=0$ и попадает в точку $B(2; 12)$. Найти уравнение отраженного луча.

Указание: отраженный луч лежит на прямой, проходящей через точку B и точку, симметричную точке A относительно данной прямой.

2.131. Даны вершины треугольника: $A(-1; 6)$, $B(-5; -2)$; $C(1; 0)$. Показать, что этот треугольник—прямоугольный. Найти центр и радиус описанной около него окружности.

2.132. Вершинами треугольника служат точки $A(-8; 1)$, $B(1; -2)$, $C(6; 3)$. Найти центр и радиус описанной около него окружности.

2.133. Треугольник задан своими вершинами $A(-2; -1)$, $B(1; 3)$, $C(-2; 3)$. Найти центр и радиус вписанной в него окружности.

2.134. В треугольнике ABC известны координаты середин его сторон: $M_1(-1; 5)$, $M_2(3; 1)$, $M_3(-5; -1)$. Составить уравнения сторон и медиан треугольника.

2.135. Составить уравнение прямой, проходящей через начало координат и точку пересечения медиан треугольника, стороны которого заданы уравнениями $x-y-10=0$, $2x-11y-20=0$ и $2x+7y+16=0$.

2.136. Даны вершины четырехугольника: $A(-1; 0)$, $B(0; 5)$, $C(11/4; 5)$, $D(2; -1)$. Показать, что около этого четырехугольника можно описать окружность. Найти центр этой окружности.

2.137. Даны координаты вершин треугольника: $K(4; -2)$, $L(-2; 5)$, $M(-5; 0)$. Требуется: 1) составить уравнения высот; 2) убедиться в том, что все высоты пересекаются в одной точке.

2.138. Составить уравнения прямых, отстоящих от точки $P(4; 1)$ на расстояние, равное 3 единицам, и параллельных прямой $8x+15y-1=0$.

2.139. Показать, что отрезки прямых $2x-y+4=0$, $x-3y+5=0$, $4x-2y+1=0$ и $2x+y-5=0$ образуют трапецию. Найти внутренние углы трапеции и ее высоту.

2.140. Известны уравнения сторон четырехугольника $x-2y+2=0$, $x-2y-10=0$, $x-4y-8=0$ и $x-4y+8=0$. Найти его площадь.

2.141. Показать, что точки $M(4; 3)$, $N(5; 0)$, $P(-5; -6)$ и $Q(-1; 0)$ являются вершинами трапеции. Найти острый угол между диагоналями и высоту этой трапеции.

2.142. Известны две вершины $A(5; -4)$ и $B(7; 4)$ треугольника ABC и точка $P(6; -4)$ пересечения его высот. Составить уравнения сторон треугольника и найти его площадь.

2.143. В параллелограмме известны уравнения двух сторон $7x-24y+13=0$ и $3x-4y+20=0$ и точка пересечения диагоналей $(-7; 1)$. Определить длины высот параллелограмма.

2.144. Даны уравнения двух сторон ромба $x+2y-7=0$ и $x+2y-13=0$ и уравнение его диагонали $x-y+2=0$. Найти координаты вершин ромба и вычислить его площадь.

2.145. Две вершины равностороннего треугольника находятся в точках $A(1; 0)$ и $B(2; \sqrt{3})$. Найти третью вершину C.

2.146. В равнобедренном прямоугольном треугольнике даны вершина прямого угла $(-3; -1)$ и уравнение гипотенузы $3x+y-2=0$. Составить уравнения катетов и найти две остальные вершины.

2.147. Точки $(-3; 1)$ и $(-7; -5)$ являются противоположными вершинами квадрата. Найти две его другие вершины.

2.148. Известны уравнения высот треугольника $2x-3y+1=0$ и $x+y=0$ и координаты одной из его вершин $(1; 2)$. Составить уравнения сторон треугольника.

ГЛАВА 3

КРИВЫЕ ВТОРОГО ПОРЯДКА

§ 1. ОКРУЖНОСТЬ

Уравнение окружности с центром в точке $S(a;\ b)$ и радиусом r имеет вид

$$(x-a)^2+(y-b)^2=r^2. \tag{1}$$

Это — *каноническое* уравнение окружности (рис. 15).

Уравнение второй степени относительно текущих координат x и y является уравнением окружности тогда и только тогда, когда в этом уравнении коэффициенты при квадратах координат равны, а член с произведением координат отсутствует. Таким образом, это уравнение имеет вид

$$Ax^2+Ay^2+Cx+Dy+F=0. \tag{2}$$

В этом случае говорят, что окружность задана *общим* уравнением.

Для определения координат центра и радиуса окружности, заданной общим уравнением, надо с помощью тождественных преобразований уравнение 2) привести к виду (1).

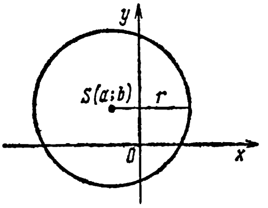


Рис. 15.

3.1. Составить уравнение окружности с центром в заданной точке S и данным радиусом r: 1) $S(4;\ -7)$, $r=5$; 2) $S(-6;\ 3)$, $r=\sqrt{2}$; 3) $S(3;\ -2)$, $r=3$; 4) $S(0;\ -2)$, $r=1/2$; 5) $S(-1;\ 0)$, $r=\sqrt{3}$.

3.2. Как расположены по отношению к окружности $(x-2)^2+(y-3)^2=25$ следующие точки: $A(-1;\ -1)$; $B(2;\ -3)$; $C(-3;\ 5)$; $D(4;\ -1)$; $E(2;\ -2)$; $F(5;\ 7)$; $G(1;\ 0)$?

3.3. Проходит ли окружность с центром в точке $S(-5;\ 7)$ и радиусом, равным 10, через точку $M(-11;\ 15)$?

3.4. Окружность с центром в точке $S(12;\ -5)$ проходит через начало координат. Составить уравнение этой окружности.

3.5. Известно, что концы одного из диаметров окружности находятся в точках $M_1(2;\ -7)$ и $M_2(-4;\ 3)$. Составить уравнение окружности.

3.6. Составить уравнение окружности, диаметром которой является отрезок прямой $12x+5y+60=0$, заключенный между осями координат.

3.7. Окружность касается оси Ox в начале координат и пересекает ось Oy в точке $(0;\ -10)$. Составить уравнение окружности.

3.8. Составить уравнение окружности, имеющей центр на оси Ox и проходящей через точки $A(6;\ 4\sqrt{2})$ и $B(0;\ -2\sqrt{5})$.

3.9. Окружность, проходящая через точки $A(3;\ -1)$ и $B(-4;\ -8)$, имеет радиус $r=13$. Написать ее уравнение.

3.10. Составить уравнение окружности, касающейся осей координат и проходящей через точку $M(2;\ 1)$.

Решение. Так как окружность касается осей координат, то она полностью лежит в одной из координатных четвертей, а именно в I четверти, поскольку одна из ее точек $M(2;\ 1)$ находится в этой четверти. По той же причине центр искомой окружности $S(a;\ b)$ равноотстоит от осей координат. Следовательно, он имеет равные положительные координаты ($a=b>0$), а радиус r этой окружности равен a. Таким образом, каноническое уравнение искомой окружности принимает вид

$$(x-a)^2+(y-a)^2=a^2.$$

Для нахождения a воспользуемся тем, что точка $M(2;\ 1)$ лежит на окружности:

$$(2-a)^2+(1-a)^2=a^2, \text{ или } a^2-6a+5=0.$$

Отсюда $a_1=1$ и $a_2=5$. Это означает, что условию задачи удовлетворяют две окружности:

$$(x-1)^2+(y-1)^2=1 \text{ и } (x-5)^2+(y-5)^2=25.$$

3.11. Окружность, касающаяся осей координат, проходит через точку $M(-2;\ -4)$. Написать ее уравнение.

3.12. Составить уравнение окружности, касающейся координатных осей и лежащей в IV четверти, если ее радиус равен $\sqrt{5}$.

3.13. Центр окружности, касающейся осей координат, лежит на прямой $2x-y+3=0$. Составить уравнение окружности.

3.14. Составить уравнение окружности, проходящей через три данные точки: $A(-1;\ 3)$, $B(-2;\ -4)$, $C(6;\ 2)$.

3.15. Вершины треугольника имеют координаты $A(-2;\ 9)$, $B(-4;\ 5)$ и $C(5;\ 8)$. Найти уравнение описанной около треугольника окружности.

3.16. Окружность, центр которой лежит на прямой $x-y-1=0$, проходит через точки $M(4;\ -11)$ и $N(6;\ 3)$. Составить уравнение окружности.

3.17. Окружность, проходящая через точки $M(-8;\ -10)$ и $N(-1;\ 7)$, касается оси ординат. Составить уравнение этой окружности.

3.18. Определить координаты центра S и радиус r окружности, заданной общим уравнением

$$9x^2+9y^2+36x-18y+20=0.$$

Решение. Приведем данное уравнение к виду (1). Для этого разделим все его члены на 9, а затем сгруппируем отдельно члены, содержащие x и y:

$$(x^2+4x)+(y^2-2y)+\frac{20}{9}=0.$$

Дополним выражения, стоящие в каждой из скобок, до полного квадрата:

$$x^2+4x=(x^2+2x\cdot 2+2^2)-4=(x+2)^2-4;$$

$$y^2-2y=(y^2-2y\cdot 1+1^2)-1=(y-1)^2-1.$$

Теперь данное уравнение принимает вид

$$(x+2)^2-4+(y-1)^2-1+\frac{20}{9}=0,$$

или

$$(x+2)^2+(y-1)^2-\frac{25}{9}=0,$$

откуда

$$(x+2)^2+(y-1)^2=\left(\frac{5}{3}\right)^2.$$

Сравнивая это уравнение с уравнением (1), получим $a=-2$, $b=1$ и $r=5/3$. Таким образом, данная окружность имеет центр в точке $S(-2;\ 1)$ и радиус $r=5/3$.

3.19. Для указанных окружностей определить координаты центра S и радиус r: 1) $x^2+y^2-8x+12y-29=0$; 2) $x^2+y^2+16x-20y-5=0$; 3) $x^2+y^2+7y-18=0$; 4) $2x^2+2y^2-12x-7=0$; 5) $4x^2+4y^2+16x-32y-41=0$; 6) $9x^2+9y^2-72x+18y-208=0$.

3.20. Найти точки пересечения с осями координат каждой из окружностей: 1) $x^2+y^2+4x+4y+3=0$; 2) $x^2+y^2+6x+11y+10=0$; 3) $9x^2+9y^2-9x-4=0$.

3.21. Составить уравнение окружности, проходящей через точку $A(3;\ -6)$ и концентрической с окружностью $x^2+y^2+6x-4y-62=0$.

3.22. Найти расстояние между центрами окружностей $x^2+y^2+6x-14y-6=0$ и $x^2+y^2-24x+2y-51=0$.

3.23. Найти точки пересечения прямой $x-y+1=0$ с окружностью $x^2+y^2-4x+16y-5=0$.

3.24. Составить уравнение общей хорды двух пересекающихся окружностей $x^2+y^2+12x-10y+45=0$ и $x^2+y^2-8x+6y=0$.

3.25. Показать, что окружности $x^2+y^2+12x-14y+49=0$ и $x^2+y^2-18x+2y-39=0$ касаются внешним образом, и написать уравнение их общей касательной в точке касания.

Указание: две окружности касаются друг друга внешним образом в том и только в том случае, если длина отрезка, соединяющего их центры, равна сумме радиусов этих окружностей.

3.26. Как расположены относительно окружности $x^2+y^2+8x-4y-5=0$ следующие прямые: 1) $x-y+2=0$; 2) $3x+4y-21=0$; 3) $x-y-2=0$?

3.27. Окружность задана уравнением $x^2+y^2-6x+14y-6=0$. Составить уравнение ее диаметра, перпендикулярного хорде $x-2y-2=0$.

3.28. Дана окружность $x^2+(y-2)^2=9$. Через точку $P(1;\ 3/2)$ провести такую хорду, которая в этой точке делилась бы пополам.

3.29. Составить уравнение окружности, которая имеет центр в точке $S(8;\ 6)$ и касается прямой $5x-12y-46=0$.

3.30. Написать уравнение касательной к окружности $x^2+y^2=13$ в точке $M(-2;\ -3)$.

3.31. Окружность задана уравнением $(x-2)^2+(y+4)^2=25$. Составить уравнение касательной в точке $M(-2;\ -1)$.

3.32. Провести касательную к окружности $x^2+y^2-4x+6y=0$ в точке $M(4;\ -6)$.

§ 2. ЭЛЛИПС

Эллипс есть множество точек, сумма расстояний которых от двух фиксированных т чек, называемых фокусами эллипса, есть величина постоянная ($2a$), *большая чем расстояние между фокусами* ($2c$).

Простейшее уравнение эллипса получается, если расположить координатную систему следующим образом: за ось Ox принять прямую, проходящую через фокусы F_1 и F_2, а за ось Oy — перпендикуляр к оси абсцисс в середине отрезка $[F_1F_2]$ (рис. 16). Тогда уравнение эллипса примет вид

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1, \tag{1}$$

где $b^2=a^2-c^2$.

Точки A_1 и A_2, B_1 и B_2 пересечения эллипса с его осями симметрии (координатными осями) называются *вершинами* эллипса. Отрезки $[A_1A_2]$ и $[B_1B_2]$, длины которых соответственно равны $2a$ и $2b$, называются *осями* эллипса, причем $[A_1A_2]$ — *большой осью*, а $[B_1B_2]$ — *малой осью*, так как $a > b$. Таким образом, параметры a и b, входящие в уравнение эллипса, равны его полуосям.

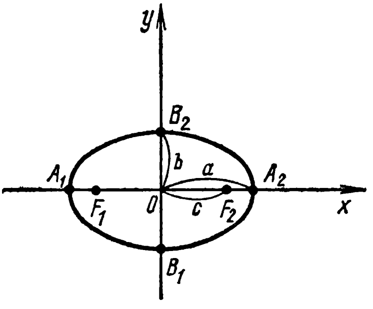


Рис. 16.

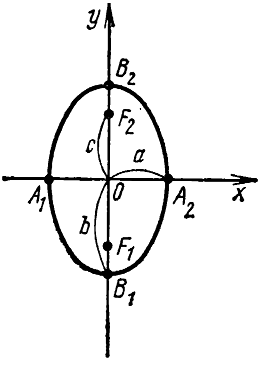


Рис. 17.

Эксцентриситетом эллипса называется отношение расстояния между фокусами к его большой оси, т. е.

$$e=c/a. \tag{2}$$

Очевидно, что $e < 1$.

Если эллипс, определяемый уравнением вида (1), расположен так, что его фокусы лежат на оси Oy (рис. 17), то тогда $b > a$ и большой осью служит отрезок $[B_1B_2]$ длиной $2b$, а малой осью — отрезок $[A_1A_2]$ длиной $2a$. Эксцентриситет такого эллипса вычисляется по формуле

$$e=c/b, \tag{2'}$$

где $c=\sqrt{b^2-a^2}$.

3.33. Найти оси, вершины, фокусы и эксцентриситет эллипса

$$9x^2+25y^2-225=0.$$

Решение. Приведем данное уравнение к простейшему виду (1), для чего свободный член перенесем вправо и разделим на него все члены уравнения. В результате получим

$$\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{9}=1, \text{ или } \frac{x^2}{5^2}+\frac{y^2}{3^2}=1.$$

Сравнивая полученное уравнение с уравнением (1), имеем $a=5$, $b=3$. Отсюда находим оси эллипса $2a=10$, $2b=6$ и координаты вершин $A_1(-5;\ 0)$, $A_2(5;\ 0)$, $B_1(0;\ -3)$, $B_2(0;\ 3)$. Далее, находим $c=\sqrt{a^2-b^2}=\sqrt{25-9}=4$.

Следовательно, фокусами эллипса служат точки $F_1(-4;\ 0)$ и $F_2(4;\ 0)$. Эксцентриситет эллипса вычисляем по формуле (2): $e=c/a=4/5$.

3.34. Найти координаты вершин, оси, фокусы и эксцентриситет эллипсов: 1) $16x^2+25y^2=400$; 2) $4x^2+9y^2=36$; 3) $16x^2+9y^2=144$; 4) $25x^2+9y^2=900$.

3.35. Как расположены по отношению к эллипсу $x^2/9+y^2/16=1$ следующие точки: $A(-3;\ 0)$, $B(0;\ -5)$; $C(2;\ 3)$; $D(-3/4;\ \sqrt{15})$; $E(-2;\ -2)$ и $F(3;\ 4/3)$?

3.36. Составить простейшее уравнение эллипса, фокусы которого лежат на оси Ox, если его полуоси равны 4 и $\sqrt{5}$.

3.37. Составить простейшее уравнение эллипса, фокусы которого лежат на оси Ox, если известно, что он проходит через точки $M_1(1;\ -3/2)$ и $M_2(-2;\ 0)$. Найти координаты фокусов эллипса.

3.38. Известны большая полуось эллипса $a=4$ и точка $M(-2;\ 3\sqrt{3}/2)$, лежащая на эллипсе. Составить простейшее уравнение эллипса и найти расстояние от точки M до фокусов эллипса.

3.39. Составить простейшее уравнение эллипса, у которого длина малой оси равна 24, а один из фокусов имеет координаты $(-5;\ 0)$.

3.40. Расстояние между фокусами эллипса равно 30, а большая ось, лежащая на оси Ox, равна 34. Написать простейшее уравнение эллипса и найти его эксцентриситет.

3.41. Написать простейшее уравнение эллипса, у которого сумма полуосей равна 36, а расстояние между фокусами, лежащими на оси Oy, равно 48.

3.42. Малая полуось эллипса, расположенная на оси Oy, равна $3\sqrt{2}$, а эксцентриситет $e=\sqrt{2}/2$. Составить простейшее уравнение эллипса и найти координаты его фокусов.

3.43. Составить простейшее уравнение эллипса, если известно, что один из его фокусов находится в точке $(6;\ 0)$, а эксцентриситет $e=2/3$.

3.44. Определить эксцентриситет эллипса, если известно, что малая ось его видна из фокуса под прямым углом.

3.45. Расстояние между фокусами эллипса равно расстоянию между вершинами большой и малой осей. Найти эксцентриситет эллипса.

3.46. Показать, что уравнение

$$5x^2+9y^2-30x+18y+9=0$$

представляет собой уравнение эллипса. Найти центр, оси, вершины, фокусы и эксцентриситет этого эллипса.

Решение. Приведем данное уравнение к простейшему виду. Для этого сгруппируем отдельно члены, содержащие переменные x и y:

$$(5x^2-30x)+(9y^2+18y)+9=0.$$

В каждой из скобок вынесем коэффициент при квадрате переменной, а затем выделим полный квадрат:

$$5x^2-30x=5\,[(x^2-2\cdot 3x+9)-9]=5\,(x-3)^2-45;$$
$$9y^2+18y=9\,[(y^2+2y+1)-1]=9\,(y+1)^2-9.$$

Данное уравнение преобразуем теперь к виду

$$5\,(x-3)^2+9\,(y+1)^2-45-9+9=0,$$

или

$$5(x-3)^2+9(y+1)^2=45,$$

откуда

$$\frac{(x-3)^2}{9}+\frac{(y+1)^2}{5}=1.$$

Введем обозначения $x'=x-3$, $y'=y+1$. Произведенную замену переменных будем рассматривать как преобразование декартовых координат x, y в координаты x', y' при параллельном сдвиге координатных осей, причем новое начало координат находится в точке $O'(3;\ -1)$. В этой системе координат уравнение эллипса имеет вид

$$\frac{x'^2}{9}+\frac{y'^2}{5}=1.$$

Таким образом, заданное уравнение определяет эллипс с центром в точке $O'(3;\ -1)$ и полуосями $a=3$ и $b=\sqrt{5}$ (рис. 18). Кроме того, $c=\sqrt{a^2-b^2}=\sqrt{9-5}=2$; отсюда находим эксцентриситет $e=c/a=2/3$.

Остается найти координаты вершин и фокусов эллипса. В новой системе координаты вершин таковы: $A_1(-3;\ 0)$, $A_2(3;\ 0)$, $B_1(0;\ -\sqrt{5})$ и $B_2(0;\ \sqrt{5})$; координаты фокусов $F_1(-2;\ 0)$ и $F_2(2;\ 0)$. Так как старые координаты выражаются через новые по формулам $x=x'+3$, $y=y'-1$, то, возвращаясь к первоначальной системе координат, окончательно получим: $A_1(0;\ -1)$, $A_2(6;\ -1)$, $B_1(3;\ -\sqrt{5}-1)$; $B_2(3;\ \sqrt{5}-1)$, $F_1(1;\ -1)$, $F_2(5;\ -1)$.

3.47. Найти центр, оси, вершины, фокусы и эксцентриситет эллипсов: 1) $9x^2+18x+16y^2-64y-71=0$; 2) $9x^2+10y^2+40y-50=0$.

3.48. Составить уравнение эллипса, длина большой оси которого равна 20, а фокусами служат точки $F_1(-1;\ 0)$ и $F_2(5;\ 0)$.

3.49. Составить уравнение эллипса, фокусы которого $F_1(-4;\ -2)$ и $F_2(2;\ -2)$, а эксцентриситет $e=3/5$.

3.50. Малой осью эллипса служит отрезок $[B_1B_2]$, где $B_1(5;\ 1)$, $B_2(5;\ -7)$; расстояние между фокусами равно 10. Составить уравнение эллипса и найти координаты фокусов.

3.51. На эллипсе $5x^2+9y^2=180$ найти точку, расстояние которой от правого фокуса в два раза меньше расстояния ее от левого фокуса.

3.52. Дан эллипс $16x^2+25y^2=400$ и окружность с центром в верхней вершине малой оси эллипса, проходящая через его фокусы. Найти точки пересечения эллипса и окружности.

3.53. В эллипс $8x^2+10y^2=160$ вписан прямоугольник, две противоположные стороны которого проходят через фокусы. Найти площадь этого прямоугольника.

3.54. Эллипс, эксцентриситет которого $e=1/2$, а фокусы лежат на оси Ox, проходит через точку $M(-4;\ \sqrt{15})$. Составить простейшее уравнение эллипса и найти расстояния от его фокусов до точки M.

3.55. Найти длину отрезка прямой $3x-4y-12=0$, заключенного внутри эллипса $9x^2+16y^2=144$.

3.56. Найти точки пересечения эллипса $x^2/9+y^2/7=1$ с биссектрисами координатных углов.

3.57. Найти точки пересечения эллипсов $x^2/36+y^2/3=1$ и $x^2/12+y^2/4=1$.

3.58. Составить уравнение общей хорды эллипса $x^2/16+y^2/4=1$ и окружности $x^2+y^2-8y=0$.

3.59. На эллипсе $6x^2+8y^2=120$ найти точки, отстоящие от его большой оси на расстоянии, равном трем единицам.

3.60. Найти длину хорды, проходящей через фокус эллипса $13x^2+18y^2=468$ и перпендикулярной его большой оси.

§ 3. ГИПЕРБОЛА

Гиперболой называется множество точек, абсолютная величина разности расстояний которых до двух данных точек, называемых фокусами, есть величина постоянная ($2a$), *меньшая, чем расстояние между фокусами* ($2c$).

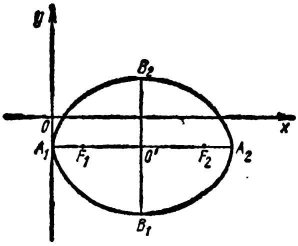


Рис. 18.

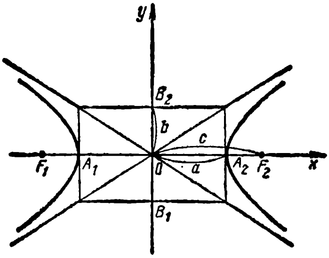


Рис. 19.

Простейшее уравнение гиперболы получается, если расположить координатную систему следующим образом: за ось Ox принять прямую, проходящую через фокусы F_1 и F_2, а за ось Oy — перпендикуляр в середине отрезка $[F_1F_2]$ (рис. 19). Тогда уравнение гиперболы примет вид

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1, \tag{1}$$

где $b^2=c^2-a^2$.

Гипербола имеет две оси симметрии (координатные оси), с одной из которых (осью абсцисс) она пересекается в двух точках A_1 и A_2, называемых *вершинами* гиперболы. Отрезок $[A_1A_2]$ длиной $2a$ называется *действительной осью* гиперболы, а отрезок $[B_1B_2]$ длиной $2b$ — *мнимой осью* гиперболы. Таким образом, параметры a и b, входящие в уравнение гиперболы, равны ее полуосям.

Эксцентриситетом гиперболы называется отношение расстояния между фокусами к ее действительной оси:

$$e=c/a. \tag{2}$$

Очевидно, что $e>1$.

Гипербола имеет две *асимптоты*, уравнения которых

$$y=\frac{b}{a}x \quad \text{и} \quad y=-\frac{b}{a}x. \tag{3}$$

Если мнимая ось гиперболы направлена по оси Ox и имеет длину $2a$, а действительная ось длиной $2b$ направлена по оси Oy (рис. 20), то уравнение гиперболы имеет вид

$$-\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1. \tag{4}$$

Эксцентриситет такой гиперболы вычисляется по формуле

$$e = c/b. \qquad (2')$$

Ее асимптоты те же, что и у гиперболы (1).

Гиперболы (1) и (4) называются *сопряженными*.

Гипербола называется *равносторонней*, если ее действительная и мнимая оси равны, т. е. $a = b$. Простейшее уравнение равносторонней гиперболы имеет вид

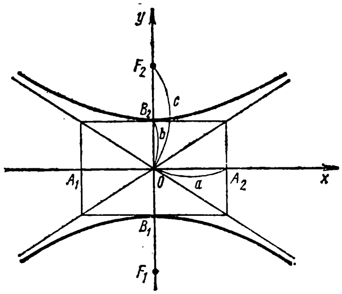


Рис. 20.

$$x^2 - y^2 = a^2 \qquad (5)$$

или

$$-x^2 + y^2 = a^2. \qquad (5')$$

3.61. Найти оси, вершины, фокусы, эксцентриситет и уравнения асимптот гиперболы

$$16x^2 - 9y^2 - 144 = 0.$$

Решение. Перенесем свободный член вправо и разделим на него все члены данного уравнения. В результате получим простейшее уравнение гиперболы

$$\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{16} = 1, \text{ или } \frac{x^2}{3^2} - \frac{y^2}{4^2} = 1.$$

Сравнивая это уравнение с уравнением (1), имеем $a = 3$, $b = 4$. Таким образом, действительная ось гиперболы $2a = 6$, а мнимая ось $2b = 8$; координаты вершин $A_1(-3;\ 0)$ и $A_2(3;\ 0)$. Далее, $c = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{9 + 16} = 5$; следовательно, фокусами гиперболы служат точки $F_1(-5;\ 0)$ и $F_2(5;\ 0)$. Эксцентриситет гиперболы вычисляем по формуле (2): $e = c/a = 5/3$. Наконец, подставляя значения $a = 3$, $b = 4$ в формулы (3), получаем уравнения асимптот гиперболы: $y = 4x/3$ и $y = -4x/3$.

3.62. Найти координаты вершин, оси, фокусы, эксцентриситет и уравнения асимптот следующих гипербол: 1) $4x^2 - 5y^2 - 100 = 0$; 2) $9x^2 - 4y^2 - 144 = 0$; 3) $16x^2 - 9y^2 + 144 = 0$; 4) $9x^2 - 7y^2 + 252 = 0$.

3.63. Составить простейшее уравнение гиперболы, действительная ось которой лежит на оси абсцисс, если известно, что гипербола проходит через точки $M_1(3;\ -2)$ и $M_2(-6;\ 2\sqrt{10})$. Найти эксцентриситет и координаты фокусов гиперболы.

3.64. Составить простейшее уравнение гиперболы, действительная ось которой равна 6, а расстояние между фокусами равно 8. Написать уравнение сопряженной гиперболы.

3.65. Сумма полуосей гиперболы равна 17, а эксцентриситет $e = 13/12$. Написать простейшее уравнение гиперболы и найти координаты ее фокусов.

3.66. Составить уравнения прямых, проходящих через фокусы гиперболы $7x^2 - 5y^2 = 35$ и образующих с осью Ox угол $60°$.

3.67. Через точку $M(-5;\ 2)$ провести прямые, параллельные асимптотам гиперболы $9x^2 - 4y^2 = 36$.

3.68. Асимптотами гиперболы являются прямые $y = \pm 3x/4$, а один из фокусов находится в точке $(-10;\ 0)$. Написать уравнение гиперболы и найти ее эксцентриситет.

3.69. Эксцентриситет гиперболы равен $\sqrt{3}$, а фокусами служат точки (6; 0) и (—6; 0). Составить уравнение гиперболы и написать уравнения ее асимптот.

3.70. Определить острый угол между асимптотами и эксцентриситет гиперболы $x^2-3y^2=27$.

3.71. Точка $M(6;\ -2\sqrt{2})$ лежит на гиперболе, уравнения асимптот которой $y=\pm 2x/3$. Составить уравнение гиперболы.

3.72. Составить уравнение гиперболы, имеющей общие фокусы с эллипсом $x^2/64+y^2/28=1$ при условии, что эксцентриситет ее $e=1{,}2$.

3.73. Известно, что гипербола проходит через фокусы эллипса $x^2/289+y^2/225=1$, а ее фокусы находятся в вершинах этого эллипса. Составить уравнение гиперболы.

3.74. Составить простейшее уравнение гиперболы с фокусами на оси Oy, если известно отношение ее полуосей $b/a=3/2$ и точка $M(4;\ -3\sqrt{6})$, лежащая на гиперболе.

3.75. Написать уравнения гиперболы и ее асимптот, если вершины ее находятся в точках (0; 4) и (0; —4), а эксцентриситет $e=3/2$.

3.76. Уравнения асимптот гиперболы имеют вид $y=\pm 4x/3$, а одним из ее фокусов является точка $(0;\ 5\sqrt{2})$. Составить уравнение гиперболы и найти ее эксцентриситет.

3.77. Составить уравнение равносторонней гиперболы, проходящей через точку $A(-\sqrt{11};\ \sqrt{2})$.

3.78. Составить уравнение равносторонней гиперболы, фокусы которой совпадают с фокусами гиперболы $5x^2-3y^2=60$.

3.79. Для равносторонней гиперболы, один из фокусов которой находится в точке $(-7\sqrt{2};\ 0)$, написать уравнение сопряженной гиперболы.

3.80. Показать, что уравнение

$$5x^2-4y^2+30x+8y+21=0$$

представляет собой уравнение гиперболы. Найти центр, оси, вершины, фокусы, эксцентриситет и асимптоты этой гиперболы.

Решение. Приведем данное уравнение к простейшему виду (ср. с решением задачи **3.46**):

$$5(x^2+6x+9)-4(y^2-2y+1)-45+4+21=0;$$

$$5(x+3)^2-4(y-1)^2=20;\quad \frac{(x+3)^2}{4}-\frac{(y-1)^2}{5}=1.$$

Обозначим $x'=x+3$, $y'=y-1$. Таким образом, мы производим преобразование параллельного переноса осей координат в точку O' (—3; 1). В новой системе координат данное уравнение принимает вид

$$\frac{x'^2}{4}-\frac{y'^2}{5}=1,$$

т. е. определяет гиперболу с центром в точке $O'(-3;\ 1)$ и полуосями $a=2$ и $b=\sqrt{5}$ (рис. 21). Так как $c=\sqrt{a^2+b^2}=\sqrt{4+5}=3$, то $e=c/a=3/2$.

Нетрудно найти координаты вершин и фокусов в новой координатной системе: $A_1(-2;\ 0)$, $A_2(2;\ 0)$, $F_1(-3;\ 0)$, $F_2(3;\ 0)$. Так как $x=x'-3$, $y=y'+1$, то, возвращаясь к старой системе координат, получим $A_1(-5;\ 1)$, $A_2(-1;\ 1)$, $F_1(-6;\ 1)$, $F_2(0;\ 1)$.

Остается найти асимптоты гиперболы. В новой системе координат уравнения асимптот имеют вид $y'=\pm bx'/a$, т. е. $y'=\pm\sqrt{5}x'/2$. Заменяя теперь x' на $x+3$, а y' на $y-1$, получим уравнения асимптот в первоначальной системе координат:

$$y-1=\pm\frac{\sqrt{5}}{2}(x+3).$$

3.81. Найти центр, оси, вершины, эксцентриситет и асимптоты следующих гипербол: 1) $16x^2-9y^2-64x-54y-161=0$; 2) $x^2-y^2+4x-10y-25=0$; 3) $x^2-3y^2+6y-15=0$.

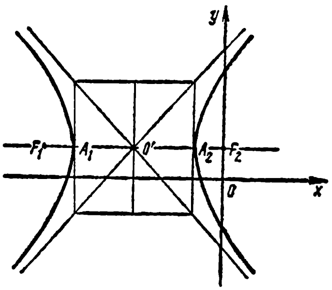


Рис. 21.

3.82. Составить уравнение гиперболы, фокусы которой находятся в точках $F_1(-5;\ 0)$ и $F_2(11;\ 0)$, а расстояние между вершинами равно 12.

3.83. Даны вершины гиперболы $A_1(-9;\ 2)$ и $A_2(1;\ 2)$ и ее эксцентриситет $e=2{,}6$. Составить уравнение гиперболы, найти ее фокусы и асимптоты.

3.84. Асимптоты гиперболы взаимно перпендикулярны, а фокусами ее служат точки $F_1(-3;\ -5)$ и $F_2(5;\ -5)$. Написать уравнения гиперболы и ее асимптот.

3.85. Найти точки пересечения гиперболы $x^2/36-y^2/4=1$ со следующими прямыми: 1) $x+6y=0$; 2) $x-3y=0$; 3) $5x+21y+6=0$.

3.86. Через левый фокус гиперболы $9x^2-16y^2=144$ проведены прямые, параллельные ее асимптотам. Найти расстояние между точками пересечения этих прямых с гиперболой.

3.87. Найти точки пересечения равносторонней гиперболы $x^2-y^2=33$ с окружностью $x^2+y^2=65$.

3.88. Найти расстояние между точками пересечения гипербол $x^2-y^2=15$ и $xy=4$.

§ 4. ПАРАБОЛА

Параболой называется множество точек, равноудаленных от данной точки, называемой фокусом, и данной прямой, называемой директрисой параболы.

Величина p, равная расстоянию от фокуса до директрисы, называется *параметром* параболы; прямая, проходящая через фокус параболы перпендикулярно ее директрисе, называется *осью*, а точка пересечения параболы с ее осью — *вершиной* параболы.

Простейшее уравнение параболы получается, если координатная система расположена следующим образом: за одну из координатных осей берется ось параболы, а за другую — прямая, перпендикулярная оси параболы и проведенная посредине между фокусом и директрисой.

Тогда уравнение параболы примет вид:

$$y^2 = 2px \quad \text{(рис. 22)}; \tag{1}$$
$$y^2 = -2px \quad \text{(рис. 23)}; \tag{2}$$
$$x^2 = 2py \quad \text{(рис. 24)}; \tag{3}$$
$$x^2 = -2py \quad \text{(рис. 25)}. \tag{4}$$

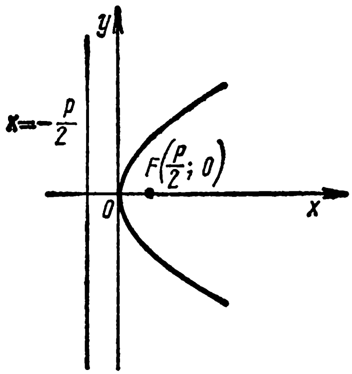


Рис. 22.

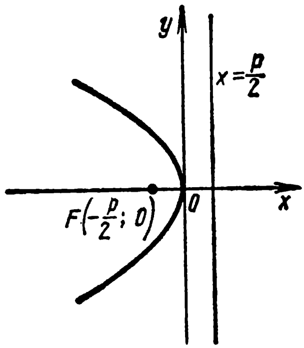


Рис. 23.

Уравнение

$$y = ax^2 + bx + c \quad (a \neq 0) \tag{5}$$

определяет параболу, ось которой перпендикулярна оси абсцисс.

Аналогично, уравнение

$$x = my^2 + ny + p \quad (m \neq 0) \tag{6}$$

определяет параболу, ось которой перпендикулярна оси ординат.

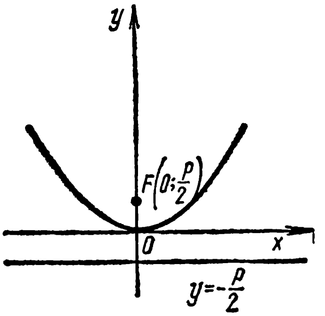


Рис. 24.

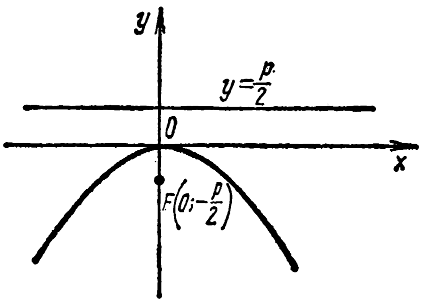


Рис. 25.

Уравнения (5) и (6) приводятся к простейшему виду (1)—(4) путем тождественных преобразований с последующим параллельным переносом координатной системы.

3.89. Определить координаты фокуса и составить уравнение директрисы параболы $y^2 = 4x$.

Решение. Сравнивая это уравнение с уравнением (1), находим, что $2p=4$, откуда $p/2=1$. Таким образом, точка $F(1;\ 0)$—фокус параболы, а прямая $x+1=0$—ее директриса.

3.90. Найти координаты фокуса и написать уравнение директрисы для каждой из парабол: 1) $y^2=8x$; 2) $y^2=-12x$; 3) $x^2=10y$; 4) $x^2=-16y$.

3.91. Составить уравнение параболы с вершиной в начале координат и фокусом в точке $F(0;\ -8)$.

Решение. Фокус параболы лежит на оси ординат, а вершина—в начале координат, поэтому уравнение параболы можно записать либо в виде $x^2=2py$, либо в виде $x^2=-2py$. Далее, поскольку ордината фокуса отрицательна, уравнение параболы следует искать в виде $x^2=-2py$. Фокусное расстояние параболы $|OF|=p/2=8$, откуда $2p=32$ и окончательно получаем $x^2=-32y$.

3.92. Составить уравнение параболы с вершиной в начале координат, зная координаты фокуса: 1) $F(0;\ 4)$; 2) $F(0;\ -3)$; 3) $F(6;\ 0)$; 4) $F(-2{,}5;\ 0)$.

3.93. Парабола симметрична относительно оси Ox, вершина ее находится в начале координат, а расстояние между фокусом и вершиной равно 12. Написать уравнение параболы.

3.94. Парабола, симметричная относительно оси Oy, имеет вершину в начале координат и проходит через точку $(6;\ -2)$. Написать уравнение параболы и определить координаты ее фокуса.

3.95. Парабола с вершиной в начале координат и осью симметрии Ox проходит через точку $M(1/3;\ 4)$. Составить уравнение параболы, найти ее фокус и директрису и определить длину отрезка, соединяющего фокус с точкой M.

3.96. Директрисой параболы, вершина которой находится в начале координат, является прямая $2x-3=0$. Составить уравнение параболы и найти ее фокус.

3.97. На параболе $y^2=36x$ найти точки, расстояния которых до фокуса равны 34.

3.98. Через фокус параболы $x^2=-8y$ проведена прямая, составляющая с осью Ox угол 135°. Написать уравнение этой прямой и найти точку ее пересечения с директрисой.

3.99. На параболе $y^2=36x$ взята точка $M(x;\ y)$, находящаяся от директрисы на расстоянии, равном 13. Определить расстояние этой точки от вершины параболы.

3.100. Через фокус параболы $y^2=48x$ проведена прямая, параллельная заданной прямой $y=\sqrt{3}x+1$. Найти длину образовавшейся хорды.

3.101. Найти точки пересечения параболы $y^2=9x$ с прямыми: 1) $3x+y-6=0$; 2) $2x-y+5=0$; 3) $y-6=0$.

3.102. Найти точки пересечения параболы $y^2=24x$ с эллипсом $x^2/100+y^2/64=1$.

3.103. Составить уравнение и найти длину общей хорды параболы $y^2=36x$ и окружности $(x+12)^2+y^2=400$.

3.104. Найти длину общей хорды двух парабол, вершины которых находятся в начале координат, а фокусы—в точках $F_1(6;\ 0)$ и $F_2(0;\ -6)$.

3.105. Показать, что уравнение

$$2x^2-12x+y+13=0$$

представляет собой уравнение параболы. Найти вершину, фокус, ось и директрису этой параболы.

Решение. Приведем данное уравнение к простейшему виду. Для этого выразим y через x и в полученном выражении выделим полный квадрат:

$$y=-2x^2+12x-13, \quad \text{или} \quad y=-2\left(x^2-6x+\frac{13}{2}\right),$$

т. е.

$$y=-2\left[(x^2-2\cdot 3x+9)-9+\frac{13}{2}\right],$$

откуда

$$y=-2(x-3)^2+5.$$

Следовательно,

$$y-5=-2(x-3)^2, \quad \text{или} \quad -\frac{1}{2}(y-5)=(x-3)^2.$$

Положим теперь $y'=y-5$, $x'=x-3$. Тем самым мы производим преобразование параллельного переноса координатных осей без изменения их направления в точку $O'(3;\ 5)$. В новой системе координат уравнение параболы примет вид

$$-\frac{1}{2}y'=x'^2.$$

Отсюда $2p=1/2$, т. е. $p/2=1/8$. Таким образом, в новой системе координат данная парабола имеет фокус $F(0;\ -1/8)$, осью параболы является ось $O'y'$ (ее уравнение $x'=0$), а уравнение директрисы $y'=1/8$ (рис. 26).

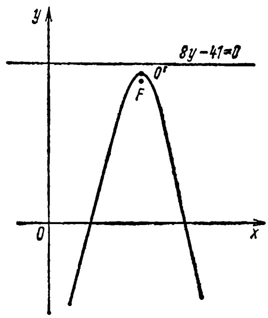


Рис. 26.

Возвращаясь к старой системе координат, получим:

вершину параболы $O'(3;\ 5)$;

координаты фокуса:

$$x_F=x'_F+3=0+3=3,$$

$$y_F=y'_F+5=-1/8+5=39/8, \quad \text{т. е.} \quad F(3;\ 39/8);$$

уравнение оси параболы $x-3=0$;

уравнение директрисы $y-5=1/8$, или $8y-41=0$.

3.106. Найти координаты вершины и фокуса, составить уравнения оси и директрисы для каждой из следующих парабол: 1) $y^2+2y+4x-11=0$; 2) $4x^2+4x-8y-19=0$; 3) $x^2-6x+8y-47=0$; 4) $y^2+8y-x+16=0$; 5) $x^2+10x+6y+25=0$.

3.107. Найти расстояние между фокусом параболы $x^2+4x-4y+24=0$ и точкой ее директрисы, абсцисса которой равна 5.

3.108. Фокусом параболы служит точка $(-1/2;\ 4)$, а параметр $p=3$. Составить уравнение параболы, если направление ее оси симметрии совпадает с положительным направлением оси абсцисс.

3.109. Составить уравнение параболы, вершина которой находится в точке $(7;\ 2)$, а фокус — в точке $(7;\ 5)$.

3.110. Вершина параболы, симметричной относительно оси Ox, находится в точке (3; 0), а на оси ординат парабола отсекает хорду, длина которой равна 24. Составить уравнение параболы, найти ее фокус и директрису.

3.111. Парабола, симметричная относительно оси Oy, проходит через точку (—6; 1), а вершиной ее является точка (0; —5). Составить уравнение параболы, найти ее фокус и директрису.

3.112. Составить уравнение параболы, фокус которой находится в точке (9/2; —1), а директрисой служит прямая $2x-3=0$.

3.113. Вершина параболы находится в точке (—3; 4), а директрисой является прямая $2y-9=0$. Составить уравнение параболы.

3.114. Парабола, ось симметрии которой параллельна оси Ox, проходит через начало координат; вершина параболы A (—8; —4). Составить уравнения параболы, ее оси и директрисы и найти координаты фокуса.

3.115. Мостовая арка имеет вид параболы, уравнение которой $y^2=96x$. Найти величину пролета арки, если ее высота равна 6 м.

3.116. Диаметр параболического зеркала равен 120 см, а глубина его 15 см. На каком расстоянии от вершины параболы необходимо поместить источник света, чтобы отраженный луч был параллелен оси параболы?

3.117. Струя воды, выбрасываемая фонтаном, имеет форму параболы, параметр которой $p=8$. Определить, на каком расстоянии от места выхода струя падает на землю, если наибольшая высота подъема равна 4 м.

3.118. Тело, брошенное под острым углом к горизонту, описало дугу параболы и упало на расстоянии 32 м от начального положения. Определить параметр параболической траектории, если наибольшая высота, достигнутая телом, равна 12 м.

§ 5. СМЕШАННЫЕ ЗАДАЧИ

3.119. Какие кривые описываются следующими уравнениями:

1) $x^2+2y^2+2x-8y+5=0$;
2) $2x^2+2y^2-3x-4y-10=0$;
3) $3x^2-4y-12x=0$;
4) $3x^2-4y^2-12x=0$;
5) $3x^2-4y^2-12x+24=0$;
6) $y^2+2y-4x+9=0$;
7) $2x^2-2y^2+2x=0$?

3.120. Через фокус параболы $y^2=-8x$ проведены две прямые, одна из которых составляет с осью Ox угол 60°; а другая — 120°. Точки пересечения этих прямых с параболой последовательно соединены между собой. Найти площадь полученного четырехугольника.

3.121. Составить уравнение эллипса, имеющего общие фокусы с гиперболой $x^2-2y^2=24$, если эксцентриситет его равен 3/5.

3.122. Найти длину стороны квадрата, вписанного в эллипс $9x^2+16y^2=576$.

3.123. Найти расстояние от центра окружности x^2+y^2+6x+ $+2y-5=0$ до асимптот гиперболы $9x^2-16y^2=144$.

3.124. На параболе $y^2=32x$ взяты две точки M_1 и M_2, расстояния которых до фокуса этой параболы равны 10. Составить уравнение окружности, диаметром которой служит отрезок $[M_1M_2]$.

3.125. Вершина параболы лежит в конце одного из диаметров окружности $x^2+y^2=9$. Составить уравнение параболы, если общая хорда параболы и окружности лежит на прямой $y-2=0$.

3.126. Под какими углами видны из центра окружности x^2+y^2- $-8y-9=0$ отрезок, соединяющий фокусы эллипса $9x^2+25y^2=225$, и большая ось этого эллипса?

3.127. Равносторонняя гипербола $x^2-y^2=16$ проходит через фокусы эллипса. Составить простейшее уравнение этого эллипса, если отношение эксцентриситетов гиперболы и эллипса равно $\sqrt{3}$.

3.128. Из фокуса параболы $y=x^2/16$ опущен перпендикуляр на прямую, проходящую через центр эллипса $x^2+2y^2+6x-7=0$ и составляющую с осью Ox угол 135°. Составить уравнение и найти длину этого перпендикуляра.

3.129. Директриса параболы пересекает эллипс $9x^2+20y^2=324$ в точках (—4; 3) и (4; 3), а расстояние от этих точек до фокуса параболы равно $2\sqrt{5}$. Составить уравнение параболы.

3.130. Окружность с центром в начале координат проходит через фокусы гиперболы $x^2/144-y^2/25=1$. Найти площадь прямоугольника, образованного в результате последовательного соединения точек пересечения асимптот гиперболы с окружностью.

3.131. Вершина параболы совпадает с центром окружности $x^2+y^2-4x-5=0$, а фокус — с началом координат. Составить уравнение параболы; найти точки ее пересечения с окружностью; вычислить площадь трапеции, одним из оснований которой является общая хорда параболы и окружности, а другим — отрезок директрисы параболы, заключенный внутри окружности.

3.132. Найти угол, под которым из фокуса параболы x^2-4x+ $+8y-20=0$ видна большая ось эллипса $x^2+2y^2=16$.

3.133. Вершина параболы совпадает с одним из фокусов гиперболы $9x^2-16y^2=144$. Составить уравнение параболы, если известно, что ее директриса проходит через точки (—4; —3) и (—4; 3).

3.134. Ось симметрии параболы параллельна оси ординат, а уравнение директрисы $y-10=0$. Составить уравнение параболы, если она пересекает ось Ox в точках (—5; 0) и (11; 0).

3.135. Вершины эллипса, большая ось которого лежит на оси абсцисс, совпадают с вершинами равносторонней гиперболы. Составить уравнения обеих кривых, если известно, что точка M (6; 2), лежащая на гиперболе, равноудалена от ближайших к ней фокусов эллипса и гиперболы.

ГЛАВА 4

ЭЛЕМЕНТЫ ВЕКТОРНОЙ АЛГЕБРЫ. ДЕКАРТОВЫ ПРЯМОУГОЛЬНЫЕ КООРДИНАТЫ В ПРОСТРАНСТВЕ

§ 1. ОПРЕДЕЛИТЕЛИ ВТОРОГО И ТРЕТЬЕГО ПОРЯДКОВ. СИСТЕМЫ ЛИНЕЙНЫХ УРАВНЕНИЙ С ДВУМЯ И С ТРЕМЯ НЕИЗВЕСТНЫМИ

1. Определители второго и третьего порядков. *Определителем второго порядка* называется число, определяемое равенством

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} = a_1b_2 - a_2b_1. \tag{1}$$

Числа a_1, b_1, a_2, b_2 называются *элементами* определителя; при этом элементы a_1 и b_2 образуют *главную диагональ*, а элементы a_2 и b_1 — *побочную диагональ*. Таким образом, *определитель второго порядка равен произведению элементов главной диагонали минус произведение элементов побочной диагонали.*

Определителем третьего порядка называется число, определяемое равенством

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = a_1b_2c_3 + b_1c_2a_3 + a_2b_3c_1 - c_1b_2a_3 - b_1a_2c_3 - a_1c_2b_3. \tag{2}$$

Таким образом, *каждый член определителя третьего порядка представляет собой произведение трех его элементов, взятых по одному из каждой строки и каждого столбца.* Эти произведения берутся с определенными знаками: *со знаком плюс — три члена, состоящие из элементов главной диагонали и из элементов, расположенных в вершинах треугольников с основаниями, параллельными главной диагонали; со знаком минус — три члена, расположенные аналогичным образом относительно побочной диагонали.*

Минором элемента a_{ij} определителя третьего порядка называется определитель второго порядка, получаемый вычеркиванием i-й строки и j-го столбца, на пересечении которых стоит этот элемент.

Алгебраическим дополнением элемента a_{ij} называется его минор, умноженный на $(-1)^{i+j}$.

Основные свойства определителей

1°. *Величина определителя не изменится, если все его строки заменить на столбцы с теми же номерами*, т. е.

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}.$$

2°. *При перестановке двух строк (столбцов) определитель меняет свой знак;* например,

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} a_2 & b_2 & c_2 \\ a_1 & b_1 & c_1 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$$

3°. *Общий множитель всех элементов какой-либо строки (столбца) определителя можно вынести за знак определителя;* например,

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ \lambda a_2 & \lambda b_2 & \lambda c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = \lambda \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}.$$

4°. *Если некоторые строки (столбцы) определителя целиком состоят из нулей, то определитель равен нулю.*

5°. *Если элементы какой-либо строки (столбца) определителя пропорциональны* (в частности, равны) *соответствующим элементам другой строки (столбца), то определитель равен нулю.* Например,

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ \lambda a_3 & \lambda b_3 & \lambda c_3 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = 0.$$

6°. *Если каждый элемент какой-либо i-й строки (столбца) определителя есть сумма двух слагаемых, то определитель равен сумме двух определителей, отличающихся от данного определителя только i-й строкой (столбцом); i-я строка (столбец) одного из этих определителей состоит из первых слагаемых, другого определителя — из вторых слагаемых.* Например,

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1+b_1' & c_1 \\ a_2 & b_2+b_2' & c_2 \\ a_3 & b_3+b_3' & c_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_1 & b_1' & c_1 \\ a_2 & b_2' & c_2 \\ a_3 & b_3' & c_3 \end{vmatrix}.$$

7°. *Определитель не изменится, если к элементам какой-либо строки (столбца) прибавить соответствующие элементы другой строки (столбца), умноженные на любой общий множитель.* Например,

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1+\lambda a_1 \\ a_2 & b_2 & c_2+\lambda a_2 \\ a_3 & b_3 & c_3+\lambda a_3 \end{vmatrix}.$$

8°. *Определитель равен сумме произведений элементов какой-либо строки (столбца) на их алгебраические дополнения.* Например,

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = a_1 \begin{vmatrix} b_2 & c_2 \\ b_3 & c_3 \end{vmatrix} - b_1 \begin{vmatrix} a_2 & c_2 \\ a_3 & c_3 \end{vmatrix} + c_1 \begin{vmatrix} a_2 & b_2 \\ a_3 & b_3 \end{vmatrix}.$$

Равенство, выражаемое этим свойством, называют *разложением определителя по элементам строки (столбца).*

9°. *Сумма произведений элементов какой-либо строки (столбца) определителя на алгебраические дополнения соответствующих элементов другой строки (столбца) равна нулю.* Например,

$$a_1 \begin{vmatrix} b_1 & c_1 \\ b_3 & c_3 \end{vmatrix} - b_1 \begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_3 & c_3 \end{vmatrix} + c_1 \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_3 & b_3 \end{vmatrix} = 0$$

(здесь взяты элементы первой строки и алгебраические дополнения элементов второй строки).

2. Решение систем линейных уравнений с двумя и с тремя неизвестными при помощи определителей. *Система двух линейных уравнений с двумя неизвестными*

$$\left.\begin{aligned} a_1x+b_1y=c_1, \\ a_2x+b_2y=c_2 \end{aligned}\right\} \tag{3}$$

при условии, что определитель системы $\Delta = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} \neq 0$, имеет единственное решение, которое находится по формулам

$$x = \frac{\begin{vmatrix} c_1 & b_1 \\ c_2 & b_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}} = \frac{\Delta_x}{\Delta}, \quad y = \frac{\begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_2 & c_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}} = \frac{\Delta_y}{\Delta}. \tag{4}$$

Здесь Δ_x и Δ_y — определители, получающиеся из определителя Δ заменой столбца коэффициентов при соответствующем неизвестном столбцом свободных членов.

Система трех линейных уравнений с тремя неизвестными

$$\left.\begin{aligned} a_1x+b_1y+c_1z=d_1, \\ a_2x+b_2y+c_2z=d_2, \\ a_3x+b_3y+c_3z=d_3 \end{aligned}\right\} \qquad (5)$$

при условии, что определитель системы $\Delta=\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} \neq 0$, имеет единственное решение

$$x=\frac{\Delta_x}{\Delta}, \quad y=\frac{\Delta_y}{\Delta}, \quad z=\frac{\Delta_z}{\Delta}, \qquad (6)$$

где

$$\Delta_x=\begin{vmatrix} d_1 & b_1 & c_1 \\ d_2 & b_2 & c_2 \\ d_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}, \quad \Delta_y=\begin{vmatrix} a_1 & d_1 & c_1 \\ a_2 & d_2 & c_2 \\ a_3 & d_3 & c_3 \end{vmatrix}, \quad \Delta_z=\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & d_1 \\ a_2 & b_2 & d_2 \\ a_3 & b_3 & d_3 \end{vmatrix}.$$

4.1. Вычислить определители:

$$1)\ \begin{vmatrix} -2 & 7 \\ 3 & 8 \end{vmatrix}; \quad 2)\ \begin{vmatrix} 2 & 4 & 1 \\ -1 & 3 & 5 \\ 8 & -2 & 6 \end{vmatrix}.$$

Решение. 1) По формуле (1) находим

$$\begin{vmatrix} -2 & 7 \\ 3 & 8 \end{vmatrix}=-2\cdot 8-3\cdot 7=-37.$$

2) На основании формулы (2) имеем

$$\begin{vmatrix} 2 & 4 & 1 \\ -1 & 3 & 5 \\ 8 & -2 & 6 \end{vmatrix}=2\cdot 3\cdot 6+(-1)(-2)\cdot 1+4\cdot 5\cdot 8-8\cdot 3\cdot 1-2\cdot 5(-2)-4\cdot(-1)\cdot 6=218.$$

Тот же результат получится, если разложить данный определитель, например по элементам первой строки:

$$\begin{vmatrix} 2 & 4 & 1 \\ -1 & 3 & 5 \\ 8 & -2 & 6 \end{vmatrix}=2\begin{vmatrix} 3 & 5 \\ -2 & 6 \end{vmatrix}-4\begin{vmatrix} -1 & 5 \\ 8 & 6 \end{vmatrix}+1\cdot\begin{vmatrix} -1 & 3 \\ 8 & -2 \end{vmatrix}=$$
$$=2\cdot 28-4\cdot(-46)+1\cdot(-22)=218.$$

4.2. Решить системы уравнений:

$$1)\ \left.\begin{aligned} 5x+2y=11, \\ 4x-\ y=14; \end{aligned}\right\} \quad 2)\ \left.\begin{aligned} 3x+4y+2z=8, \\ x+5y+2z=5, \\ 2x+3y+4z=3. \end{aligned}\right\}$$

Решение. 1) Определитель системы $\Delta=\begin{vmatrix} 5 & 2 \\ 4 & -1 \end{vmatrix}=-13 \neq 0$; поэтому система имеет единственное решение, которое находим по формулам (4):

$$x=\frac{\begin{vmatrix} 11 & 2 \\ 14 & -1 \end{vmatrix}}{-13}=\frac{-39}{-13}=3, \quad y=\frac{\begin{vmatrix} 5 & 11 \\ 4 & 14 \end{vmatrix}}{-13}=\frac{26}{-13}=-2.$$

2) Находим определитель системы

$$\Delta=\begin{vmatrix}3&4&2\\1&5&2\\2&3&4\end{vmatrix}=28\neq 0.$$

Следовательно, система имеет единственное решение; находим его по формулам (6):

$$x=\frac{\begin{vmatrix}8&4&2\\5&5&2\\3&3&4\end{vmatrix}}{28}=\frac{56}{28}=2,\quad y=\frac{\begin{vmatrix}3&8&2\\1&5&2\\2&3&4\end{vmatrix}}{28}=\frac{28}{28}=1,\quad z=\frac{\begin{vmatrix}3&4&8\\1&5&5\\2&3&3\end{vmatrix}}{28}=\frac{-28}{28}=-1.$$

4.3. Вычислить определители второго порядка:

1) $\begin{vmatrix}-1&4\\3&-2\end{vmatrix}$; 2) $\begin{vmatrix}5&-2\\7&-3\end{vmatrix}$; 3) $\begin{vmatrix}-8&-10\\20&25\end{vmatrix}$;

4) $\begin{vmatrix}-\sqrt{a}&a\\1&\sqrt{a}\end{vmatrix}$; 5) $\begin{vmatrix}a+b&a-b\\a-b&a+b\end{vmatrix}$; 6) $\begin{vmatrix}\sin\alpha&\cos\alpha\\-\cos\alpha&\sin\alpha\end{vmatrix}$.

4.4. Решить следующие системы уравнений:

1) $\left.\begin{aligned}2x+3y&=8;\\x-2y&=-3;\end{aligned}\right\}$ 2) $\left.\begin{aligned}x+7y&=0,\\3x-5y&=2;\end{aligned}\right\}$

3) $\left.\begin{aligned}x+4y&=12,\\3x-2y&=-6;\end{aligned}\right\}$ 4) $\left.\begin{aligned}9x+2y&=8,\\4x+y&=3;\end{aligned}\right\}$

5) $\left.\begin{aligned}3x+ay&=7,\\2x-ay&=-2;\end{aligned}\right\}$ 6) $\left.\begin{aligned}(a+1)x-ay&=a+1,\\ax+(1-a)y&=a-1.\end{aligned}\right\}$

4.5. Вычислить определители третьего порядка:

1) $\begin{vmatrix}1&3&5\\0&2&1\\4&1&2\end{vmatrix}$; 2) $\begin{vmatrix}2&4&1\\3&6&2\\4&-1&-3\end{vmatrix}$; 3) $\begin{vmatrix}3&4&5\\5&-6&-3\\-4&5&1\end{vmatrix}$; 4) $\begin{vmatrix}3&-2&7\\-1&5&2\\5&-12&3\end{vmatrix}$;

5) $\begin{vmatrix}2&-3&1\\6&-6&2\\2&-1&2\end{vmatrix}$; 6) $\begin{vmatrix}3&4&-5\\8&7&-2\\2&-1&8\end{vmatrix}$; 7) $\begin{vmatrix}1&-a&-1\\a&1&a\\1&a&1\end{vmatrix}$; 8) $\begin{vmatrix}1&1&1\\m&n&p\\m^2&n^2&p^2\end{vmatrix}$.

4.6. Найти x из уравнений:

1) $\begin{vmatrix}x^2&x&1\\4&2&1\\9&3&1\end{vmatrix}=0$; 2) $\begin{vmatrix}x^2&1&4\\x&-1&2\\1&1&1\end{vmatrix}=0.$

4.7. Решить следующие системы уравнений:

1) $\left.\begin{aligned}x+2y-z&=2,\\2x-3y+2z&=2,\\3x+y+z&=8;\end{aligned}\right\}$ 2) $\left.\begin{aligned}x+3y-6z&=12,\\3x+2y+5z&=-10,\\2x+5y-3z&=6;\end{aligned}\right\}$

$$3)\ \left.\begin{aligned} 2x+4y+\ z&=4,\\ 3x+6y+2z&=4,\\ 4x-\ y-3z&=1;\end{aligned}\right\}\qquad 4)\ \left.\begin{aligned} 2x+\ y-\ z&=\ 0,\\ x-\ y-3z&=\ 13,\\ 3x-2y+4z&=-15;\end{aligned}\right\}$$

$$5)\ \left.\begin{aligned} 2x+\ z&=6,\\ 3x-4y&=-2,\\ 2y-\ z&=2,\end{aligned}\right\}\qquad 6)\ \left.\begin{aligned} 2x-3y+3z&=-10,\\ x+3y-3z&=13,\\ x+\ z&=0.\end{aligned}\right\}$$

§ 2. ВЕКТОРЫ. ЛИНЕЙНЫЕ ОПЕРАЦИИ НАД ВЕКТОРАМИ

1. Основные понятия. *Направленным отрезком* $[AB]$ называется отрезок, у которого указаны его начальная точка A и конечная точка B.

Вектором называется любой параллельный перенос (в пространстве). Определенный таким способом вектор может быть задан с помощью направленного отрезка $[AB]$, где A — какая-либо точка пространства, а B — ее образ при данном параллельном переносе. При этом направленные отрезки $[AB]$ и $[CD]$ изображают один и тот же вектор, если их длины равны, прямые (AB) и (CD) параллельны или совпадают и направление от A к B одинаково с направлением от C к D.

В дальнейшем мы будем *отождествлять вектор* (как параллельный перенос) *с любым изображающим его направленным отрезком.*

Вектор, изображаемый направленным отрезком $[AB]$, обозначается $\overrightarrow{AB}$ или просто $\vec{a}$.

Равенство $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{CD}$ означает, что направленные отрезки $[AB]$ и $[CD]$ определяют один и тот же вектор.

Длиной (*модулем*) вектора $\overrightarrow{AB}$ называется длина отрезка $[AB]$. Длина вектора $\overrightarrow{AB}$ обозначается через $|\overrightarrow{AB}|$. Вектор, длина которого равна нулю, называется *нулевым* и обозначается $\vec{0}$. Вектор, длина которого равна единице, называется *единичным* (или *ортом*). На чертеже вектор $\overrightarrow{AB}$ изображается прямолинейной стрелкой с началом в точке A и концом в точке B.

Два ненулевых вектора называются *коллинеарными*, если они могут быть изображены направленными отрезками одной и той же прямой.

Три ненулевых вектора называются *компланарными*, если они могут быть изображены направленными отрезками, принадлежащими одной и той же плоскости.

2. Линейные операции над векторами. Отложить вектор $\vec{a}$ от точки C — это значит построить направленный отрезок $[CD]$, изображающий вектор $\vec{a}$.

Под *суммой* векторов понимается композиция (последовательное выполнение) соответствующих параллельных переносов. Сумма $\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}+\ldots+\vec{k}$ векторов $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$, ..., $\vec{k}$ строится так: от произвольной точки O откладывают вектор $\vec{a}$, затем от конца отложенного вектора $\vec{a}$ откладывают вектор $\vec{b}$, затем от конца отложенного вектора $\vec{b}$ откладывают вектор $\vec{c}$ и т. д. При этом началом вектора суммы $\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}+\ldots+\vec{k}$ служит точка O, а его концом — конец последнего отложенного вектора $\vec{k}$ (рис. 27).

Преобразование, обратное по отношению к вектору $\vec{a}$, называется *противоположным вектором* (обозначение — $\vec{a}$). Противоположный вектор $-\vec{a}$ имеет ту же длину, что и вектор $\vec{a}$, и направлен в сторону, противоположную $\vec{a}$.

Разностью $\vec{a}-\vec{b}$ называется такой вектор $\vec{x}$, что $\vec{x}+\vec{b}=\vec{a}$. Для построения разности $\vec{a}-\vec{b}$ поступают следующим образом: от одной и той же точки O откладывают векторы $\overrightarrow{OA}=\vec{a}$ и $\overrightarrow{OB}=\vec{b}$; тогда $\overrightarrow{BA}=\vec{a}-\vec{b}$ (рис. 28).

Свойства сложения векторов

1°. $\vec{a}+\vec{b}=\vec{b}+\vec{a}$.

2°. $(\vec{a}+\vec{b})+\vec{c}=\vec{a}+(\vec{b}+\vec{c})$.

3°. $\vec{a}+\vec{0}=\vec{a}$.

4°. $\vec{a}+(-\vec{a})=\vec{0}$.

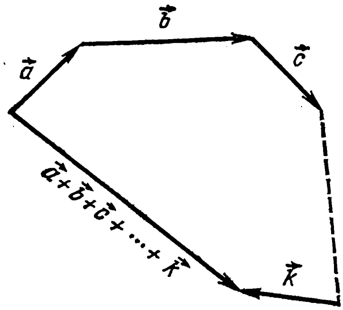


Рис. 27.

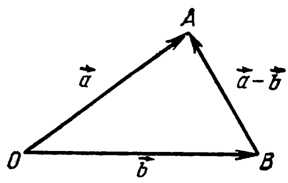


Рис. 28.

Произведением ненулевого *вектора* $\vec{a}$ *на число* λ называется вектор $\lambda\vec{a}$, коллинеарный вектору $\vec{a}$, имеющий длину $|\lambda|\,|\vec{a}|$ и направленный в ту же сторону, что и вектор $\vec{a}$, если $\lambda > 0$, и в противоположную сторону, если $\lambda < 0$.

Свойства умножения вектора на число

1°. $(\lambda\mu)\,\vec{a}=\lambda\,(\mu\vec{a})$.

2°. $\lambda\vec{a}+\mu\vec{a}=(\lambda+\mu)\,\vec{a}$.

3°. $\lambda\vec{a}+\lambda\vec{b}=\lambda\,(\vec{a}+\vec{b})$.

4°. $0\vec{a}=\lambda\vec{0}=\vec{0}$.

3. Проекция вектора на ось. Пусть даны ось l и вектор $\vec{a}=\overrightarrow{AB}$. Обозначим через A' и B' соответственно проекции точек A и B на ось l (рис. 29). *Проекцией вектора* $\overrightarrow{AB}$ *на ось* l (обозначение $\text{пр}_l\overrightarrow{AB}$) называется число, равное длине вектора $\overrightarrow{A'B'}$, взятой со знаком плюс, если направление вектора $\overrightarrow{A'B'}$ совпадает с направлением оси l, и со знаком минус — в противном случае. Аналогично определяется проекция вектора на вектор.

Свойства проекций вектора на ось

1°. $\text{пр}_l\,\vec{a}=|\vec{a}|\cos\varphi$, где φ — угол между вектором $\vec{a}$ и осью l.

2°. $\text{пр}_l\,(\vec{a}+\vec{b})=\text{пр}_l\,\vec{a}+\text{пр}_l\,\vec{b}$.

3°. $\text{пр}_l\,(\lambda\vec{a})=\lambda\,\text{пр}_l\,\vec{a}$.

4.8. По данным векторам $\vec{a}$ и $\vec{b}$ построить векторы $\vec{a}+2\vec{b}$ и $\vec{b}/2-2\vec{a}$.

Решение приведено на рис. 30.

4.9. В треугольнике ABC проведены медиана $[AD]$. Выразить вектор $\overrightarrow{AD}$ через векторы $\overrightarrow{AB}=\vec{b}$ и $\overrightarrow{AC}=\vec{c}$ (рис. 31).

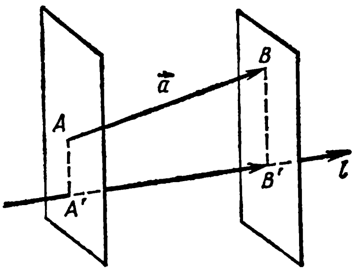


Рис. 29.

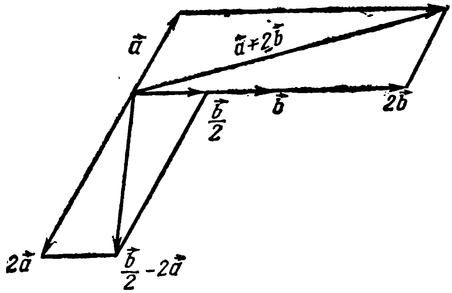


Рис. 30.

Решение. Очевидно, что вектор $\overrightarrow{BC}$ есть разность векторов $\overrightarrow{AC}$ и $\overrightarrow{AB}$, т.е. $\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AB}=\vec{c}-\vec{b}$. Далее, имеем $\overrightarrow{BD}=\overrightarrow{BC}/2=(\vec{c}-\vec{b})/2$. Следовательно,

$$\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BD}=b+(\vec{c}-\vec{b})/2=(\vec{b}+\vec{c})/2.$$

4.10. В тетраэдре $ABCD$ даны ребра, выходящие из вершины A: $\overrightarrow{AB}=\vec{b}$, $\overrightarrow{AC}=\vec{c}$, $\overrightarrow{AD}=\vec{d}$ (рис. 32). Выразить вектор $\overrightarrow{AM}$, где M — центр тяжести грани BCD, через данные векторы.

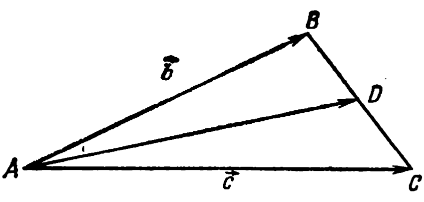


Рис. 31.

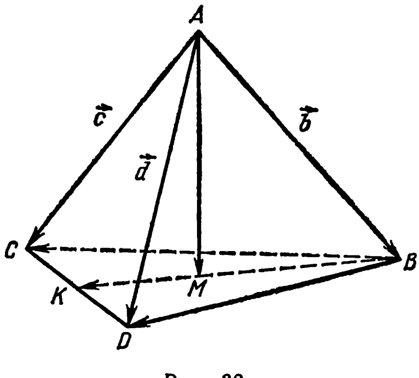


Рис. 32.

Решение. Из треугольников ABC и ABD, соответственно находим $\overrightarrow{BC}=$ $=\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AB}=\vec{c}-\vec{b}$, $\overrightarrow{BD}=\overrightarrow{AD}-\overrightarrow{AB}=\vec{d}-\vec{b}$. Далее, $\overrightarrow{BK}=(\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{BD})/2$ (см. предыдущую задачу), т. е. $\overrightarrow{BK}=(\vec{c}+\vec{d}-2\vec{b})/2$. Так как точка M — центр тяжести треугольника BCD — лежит на медиане $[BK]$ и делит эту медиану в отношении

2:1, считая от вершины B, то $\overrightarrow{BM}=(2\overrightarrow{BK})/3=(\vec{c}+\vec{d}-2\vec{b})/3$. Наконец, из треугольника ABM получаем

$$\overrightarrow{AM}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BM}=\vec{b}+(\vec{c}+\vec{d}-2\vec{b})/3=(\vec{b}+\vec{c}+\vec{d})/3.$$

4.11. Какому условию должны удовлетворять ненулевые векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$, чтобы выполнялось равенство $|\vec{a}+\vec{b}|=|\vec{a}-\vec{b}|$?

Решение. Отложим данные векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ от некоторой точки и построим на них параллелограмм (рис. 33). Тогда $|\vec{a}+\vec{b}|$ и $|\vec{a}-\vec{b}|$ — соответственно длины диагоналей $[OC]$ и $[AB]$ этого параллелограмма. Для того чтобы диагонали параллелограмма были равны, необходимо и достаточно, чтобы этот параллелограмм был прямоугольником. Таким образом, равенство $|\vec{a}+\vec{b}|=|\vec{a}-\vec{b}|$ возможно только в случае перпендикулярности векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$.

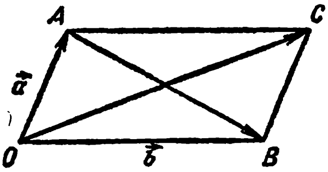


Рис. 33.

4.12. Пусть $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$ — векторы, составляющие с осью l соответственно углы $\pi/3$, π и $2\pi/3$, причем $|\vec{a}|=1$, $|\vec{b}|=2$, $|\vec{c}|=3$. Найти проекцию вектора $3\vec{a}-\vec{b}+5\vec{c}$ на ось l.

Решение. По свойству 1° проекций имеем:

$$\text{пр}_l\vec{a}=|\vec{a}|\cos(\pi/3)=1/2,\quad \text{пр}_l\vec{b}=|\vec{b}|\cos\pi=2(-1)=-2,$$
$$\text{пр}_l\vec{c}=|\vec{c}|\cos(2\pi/3)=3(-1/2)=-3/2.$$

Согласно свойствам 2° и 3° проекций находим

$$\text{пр}_l(3\vec{a}-\vec{b}+5\vec{c})=3\,\text{пр}_l\vec{a}-\text{пр}_l\vec{b}+5\,\text{пр}_l\vec{c}=3/2+2-15/2=-4.$$

4.13. По данным векторам $\vec{a}$ и $\vec{b}$ построить следующие векторы: 1) $\vec{b}-\vec{a}$; 2) $-\vec{a}-\vec{b}$; 3) $2\vec{a}$; 4) $-\vec{b}/3$; 5) $2\vec{a}+3\vec{b}$; 6) $\vec{a}/2-2\vec{b}$.

4.14. В параллелограмме $ABCD$ даны стороны $\overrightarrow{AB}=\vec{p}$, $\overrightarrow{AD}=\vec{q}$. Выразить через $\vec{p}$ и $\vec{q}$ векторы $\overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{CB}$, $\overrightarrow{CD}$, $\overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{BD}$ и $\overrightarrow{DB}$.

4.15. В треугольнике ABC сторона $[AB]$ разделена точками D и E на три конгруэнтных отрезка: $|AD|=|DE|=|EB|$. Найти векторы $\overrightarrow{CD}$ и $\overrightarrow{CE}$, если $\overrightarrow{CA}=\vec{a}$, $\overrightarrow{CB}=\vec{b}$.

4.16. В треугольнике ABC проведены медианы $[AK]$, $[BL]$ и $[CM]$. Выразить векторы $\overrightarrow{AK}$, $\overrightarrow{BL}$ и $\overrightarrow{CM}$ через векторы $\overrightarrow{BC}=\vec{a}$ и $\overrightarrow{AB}=\vec{c}$.

4.17. В треугольнике ABC проведена биссектриса $[AL]$ угла BAC. Найти вектор $\overrightarrow{AL}$, если $\overrightarrow{AB}=\vec{b}$, $\overrightarrow{AC}=\vec{c}$.

4.18. В треугольнике ABC проведены медианы $[AD]$, $[BE]$ и $[CF]$. Доказать, что $\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{BE}+\overrightarrow{CF}=\vec{0}$.

4.19. Точки E и F служат серединами сторон $[AB]$ и $[CD]$ четырехугольника $ABCD$. Доказать, что $\overrightarrow{EF}=(\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{AD})/2$.

4.20. Дан прямоугольник $ABCD$. Коллинеарны ли следующие векторы: $\overrightarrow{AD}$ и $\overrightarrow{CB}$; $\overrightarrow{AD}-\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{DA}-\overrightarrow{DC}$; $\overrightarrow{DA}+\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CD}$?

4.21. Дан ромб $ABCD$. Равны ли векторы $\overrightarrow{AD}$ и $\overrightarrow{DC}$, $\overrightarrow{AD}$ и $\overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{CD}$?

4.22. В параллелепипеде $ABCDA'B'C'D'$ даны стороны $\overrightarrow{AB}=\vec{p}$, $\overrightarrow{AD}=\vec{q}$, $\overrightarrow{AA'}=\vec{r}$. Выразить через $\vec{p}$, $\vec{q}$ и $\vec{r}$ векторы $\overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{AC'}$, $\overrightarrow{B'D'}$, $\overrightarrow{B'C}$, $\overrightarrow{BA'}$, $\overrightarrow{D'A}$, $\overrightarrow{D'B}$ и $\overrightarrow{DB'}$.

4.23. В тетраэдре $SABC$ даны ребра, выходящие из вершины S: $\overrightarrow{SA}=\vec{a}$, $\overrightarrow{SB}=\vec{b}$, $\overrightarrow{SC}=\vec{c}$. Выразить через $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$ векторы $\overrightarrow{MQ}$, $\overrightarrow{NR}$ и $\overrightarrow{PS}$, где M, N и P—середины ребер $[SA]$, $[SB]$ и $[SC]$, а Q, R и S—соответственно середины противоположных ребер.

4.24. Найти проекцию суммы векторов $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$ на ось l, если $|\vec{a}|=2$, $|\vec{b}|=4$, $|\vec{c}|=3$, а углы, составляемые этими векторами с осью l, соответственно равны $\pi/4$, $\pi/3$ и π.

4.25. Дано $|\vec{a}|=5$, $|\vec{b}|=8$, $|\vec{c}|=4$, $|\vec{d}|=10$. Найти проекцию на ось l вектора $2\vec{a}-3\vec{b}-6\vec{c}+\vec{d}$, если векторы $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ и $\vec{d}$ составляют с этой осью соответственно углы $\pi/6$, $\pi/3$, $2\pi/3$ и $3\pi/4$.

§ 3. ДЕКАРТОВЫ ПРЯМОУГОЛЬНЫЕ КООРДИНАТЫ В ПРОСТРАНСТВЕ. КООРДИНАТЫ ВЕКТОРА

1. Координаты точек. *Прямоугольная декартова система координат в пространстве* считается заданной, если указаны:

1) три взаимно перпендикулярные прямые, пересекающиеся в одной точке O, на каждой из которых выбрано положительное направление,— *оси координат*. Первая из осей называется *осью абсцисс*, вторая—*осью ординат*, третья—*осью аппликат*; точка O—*начало координат*;

2) линейная единица для измерения длин.

Базисными ортами называются единичные векторы $\vec{i}$, $\vec{j}$, $\vec{k}$, направленные соответственно по координатным осям Ox, Oy, Oz.

Пусть M—некоторая точка пространства; обозначим через M_x проекцию точки M на ось Ox. *Абсциссой* x точки M называется длина вектора $\overrightarrow{OM_x}$, взятая со знаком плюс, если направление этого вектора совпадает с направлением орта $\vec{i}$, и со знаком минус—в противном случае. Аналогично определяются *ордината* y и *аппликата* z точки M. Упорядоченная тройка чисел x, y, z составляет координаты точки M. Тот факт, что точка M имеет координаты x, y, z, записывают так: $M(x;\ y;\ z)$.

Система координат называется *правой*, если кратчайший поворот от оси Ox к оси Oy виден с положительного направления оси Oz совершаемым против часовой стрелки, и *левой*, если—по часовой стрелке. Мы будем пользоваться правой системой координат (рис. 34).

2. Координаты векторов. *Координатами a_x, a_y, a_z вектора $\vec{a}$* называются проекции этого вектора на оси Ox, Oy, Oz. В этом случае пишут: $\vec{a}=\{a_x;\ a_y;\ a_z\}$. Координаты вектора являются коэффициентами его разложения по ортам:

$$\vec{a}=a_x\vec{i}+a_y\vec{j}+a_z\vec{k}.$$

Радиусом-вектором некоторой точки $M(x;\ y;\ z)$ называется вектор $\vec{r}=\overrightarrow{OM}=\{x;\ y;\ z\}$, направленный из начала координат в эту точку.

Если известны координаты точек $A(x_A;\ y_A;\ z_A)$ и $B(x_B;\ y_B;\ z_B)$, то *координаты вектора $\overrightarrow{AB}$ равны разностям соответствующих координат его конца B и начала A*, т. е. $\overrightarrow{AB}=\{x_B-x_A;\ y_B-y_A;\ z_B-z_A\}$.

При сложении (вычитании) векторов их координаты складываются (вычитаются), при умножении вектора на число его координаты умножаются на это число.

Необходимое и достаточное условие коллинеарности двух ненулевых *векторов* $\vec{a}=\{a_x;\ a_y;\ a_z\}$ и $\vec{b}=\{b_x;\ b_y;\ b_z\}$ заключается в пропорциональности соответствующих координат:

$$\frac{a_x}{b_x}=\frac{a_y}{b_y}=\frac{a_z}{b_z}. \qquad (1)$$

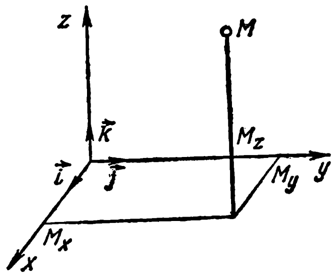


Рис. 34.

Длина вектора $\vec{a}=\{a_x;\ a_y;\ a_z\}$ вычисляется по формуле

$$|\vec{a}|=\sqrt{a_x^2+a_y^2+a_z^2}. \qquad (2)$$

Расстояние между двумя точками $A(x_A;\ y_A;\ z_A)$ и $B(x_B;\ y_B;\ z_B)$ вычисляется по формуле

$$|AB|=\sqrt{(x_B-x_A)^2+(y_B-y_A)^2+(z_B-z_A)^2}. \qquad (3)$$

3. Деление отрезка в данном отношении. Если *точка $M(x;\ y;\ z)$ делит отрезок между точками $A(x_A;\ y_A;\ z_A)$* и *$B(x_B;\ y_B;\ z_B)$ в отношении λ, то ее координаты находятся по формулам*

$$x_M=\frac{x_A+\lambda x_B}{1+\lambda}, \quad y_M=\frac{y_A+\lambda y_B}{1+\lambda}, \quad z_M=\frac{z_A+\lambda z_B}{1+\lambda}. \qquad (4)$$

В частности, при делении отрезка пополам, т. е. при $\lambda=1$, получаем *формулы для нахождения координат середины отрезка*:

$$x=\frac{x_A+x_B}{2}, \quad y=\frac{y_A+y_B}{2}, \quad z=\frac{z_A+z_B}{2}. \qquad (5)$$

4. Направляющие косинусы. Пусть ось l образует с осями координат углы α, β, γ. *Направляющими косинусами* оси l называются косинусы этих углов, т. е. величины $\cos\alpha$, $\cos\beta$, $\cos\gamma$; они связаны между собой соотношением

$$\cos^2\alpha+\cos^2\beta+\cos^2\gamma=1.$$

Если направление l задано произвольным вектором $\vec{a}=\{a_x;\ a_y;\ a_z\}$, то направляющие косинусы находятся по формулам

$$\cos\alpha=\frac{a_x}{\sqrt{a_x^2+a_y^2+a_z^2}}, \quad \cos\beta=\frac{a_y}{\sqrt{a_x^2+a_y^2+a_z^2}}, \quad \cos\gamma=\frac{a_z}{\sqrt{a_x^2+a_y^2+a_z^2}}. \qquad (6)$$

4.26. Даны три вектора $\vec{a}=\{2;\ 4;\ 0\}$, $\vec{b}=\{0;\ -3;\ 1\}$, $\vec{c}=\{5;\ -1;\ 2\}$. Найти вектор $2\vec{a}-3\vec{b}+\vec{c}$.

Решение. Так как при умножении вектора на число его координаты умножаются на это число, то имеем $2\vec{a}=\{4;\ 8;\ 0\}$, $-3\vec{b}=\{0;\ 9;\ -3\}$. Далее, при сложении векторов их соответствующие координаты складываются; следовательно, $2\vec{a}-3\vec{b}+\vec{c}=\{9;\ 16;\ -1\}$.

4.27. Доказать, что точки $A\ (4;\ 4;\ 3)$, $B\ (1;\ -2;\ 0)$ и $C\ (-1;\ -6;\ -2)$ лежат на одной прямой.

Решение. Убедимся в том, что векторы $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{AC}$ коллинеарны — это и будет означать принадлежность точек A, B, C одной прямой. Найдем координаты векторов $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{AC}$: $\overrightarrow{AB}=\{-3;\ -6;\ -3\}$, $\overrightarrow{AC}=\{-5;\ -10;\ -5\}$. Так как координаты векторов $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{AC}$ пропорциональны: $(-3)/(-5)=(-6)/(-10)=$ $=(-3)/(-5)$, то эти векторы коллинеарны.

4.28. Проверить, что точки $A\ (2;\ 1;\ 0)$, $B\ (0;\ 4;\ -3)$, $C\ (-2;\ 3;\ -5)$ и $D\ (2;\ -3;\ -1)$ являются вершинами трапеции. Найти длины ее оснований.

Решение. Найдем координаты векторов $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{CD}$ и $\overrightarrow{AD}$, совпадающих со сторонами четырехугольника: $\overrightarrow{AB}=\{-2;\ 3;\ -3\}$, $\overrightarrow{BC}=\{-2;\ -1;\ -2\}$; $\overrightarrow{CD}=$ $=\{4;\ -6;\ 6\}$, $\overrightarrow{AD}=\{0;\ -4;\ 1\}$. Координаты векторов $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{CD}$ пропорциональны $(-2/4=3/(-6)=-3/6)$; следовательно, эти векторы коллинеарны, т. е. прямые (AB) и (CD) параллельны. Векторы $\overrightarrow{BC}$ и $\overrightarrow{AD}$ не являются коллинеарными, так как их координаты не пропорциональны; поэтому прямые (BC) и (AD) не параллельны. Таким образом, четырехугольник $ABCD$ — трапеция, основаниями которой служат $[AB]$ и $[CD]$. Используя формулу (2), найдем длины этих сторон:

$$|AB|=|\overrightarrow{AB}|=\sqrt{(-2)^2+3^2+(-3)^2}=\sqrt{22},$$
$$|CD|=|\overrightarrow{CD}|=\sqrt{4^2+(-6)^2+6^2}=2\sqrt{22}.$$

4.29. На прямой, проходящей через точки $A\ (-3;\ 8;\ 2)$ и $B\ (1;\ -2;\ 0)$, найти точку C, абсцисса которой $x_C=-2$.

Решение. Точка C делит отрезок $[AB]$ в отношении $\lambda=1/3$ (см. решение задачи **1.52**). Используя теперь вторую и третью из формул (4), находим

$$y_C=\frac{y_A+\lambda y_B}{1+\lambda}=\frac{8+(1/3)\cdot(-2)}{1+1/3}=\frac{11}{2},$$
$$z_C=\frac{z_A+\lambda z_B}{1+\lambda}=\frac{2+(1/3)\cdot 0}{1+1/3}=\frac{3}{2}.$$

Следовательно, $C\ (-2;\ 11/2;\ 3/2)$.

4.30. Найти направляющие косинусы вектора $\vec{a}=8\vec{i}-4\vec{j}+\vec{k}$.

Решение. По формулам (6) получаем

$$\cos\alpha=\frac{8}{\sqrt{8^2+(-4)^2+1^2}}=\frac{8}{9},\quad \cos\beta=-\frac{4}{9},\quad \cos\gamma=\frac{1}{9}.$$

4.31. Построить точки $A\ (2;\ 6;\ 4)$, $B\ (-1;\ -3;\ 2)$; $C\ (4;\ -1;\ -5)$, $D\ (0;\ 6;\ -2)$, $E\ (-5;\ -3;\ -4)$, $F\ (3;\ 0;\ -8)$.

4.32. Указать, в каких октантах лежат точки $M\ (-3;\ 5;\ 6)$, $N\ (-1;\ -4;\ 7)$, $P\ (6;\ -3;\ -9)$, $Q\ (4;\ 1;\ -2)$.

4.33. Как расположены относительно системы координат точки $A\ (-1;\ 0;\ 0)$, $B\ (0;\ 0;\ 3)$, $C\ (0;\ -2;\ 4)$, $D\ (7;\ -5;\ 0)$ и $E\ (-3;\ 0;\ 6)$?

4.34. На оси Oz взята точка с аппликатой —4. Каковы ее координаты на плоскости?

4.35. Найти координаты точек, симметричных точке $M(3; -1; -4)$ относительно: 1) плоскости xOy; 2) плоскости xOz; 3) оси Ox; 4) оси Oy; 5) начала координат.

4.36. Ребра куба лежат на осях координат, а сам куб расположен в V октанте. Найти координаты всех его вершин, если длина ребра равна 2.

4.37. Даны точки $A(2; -6; -3)$ и $B(4; -1; -7)$. Найти вектор $\overrightarrow{AB}$.

4.38. Даны векторы $\vec{a}=\{-3; 4; -1\}$, $\vec{b}=\{-1; 2; 3\}$, $\vec{c}=\{-4; -2; 1\}$. Найти векторы $4\vec{a}+3\vec{b}-2\vec{c}$, $-5\vec{a}+4\vec{b}+\vec{c}$.

4.39. Найти проекции вектора $\vec{a}$ на оси координат, если $\vec{a}=\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{CD}$, где $A(0; 0; -3)$, $B(4; -1; 2)$, $C(-3; 2; -4)$, $D(-5; 4; 1)$.

4.40. Определить длину и направление радиуса-вектора точки $M(6; -6; -7)$.

4.41. Найти длину и направление вектора $\overrightarrow{M_1M_2}$, где $M_1(3; -4; 6)$, $M_2(1; 2; 3)$.

4.42. Может ли некоторая ось l составлять с координатными осями углы: 1) $\alpha=60°, \beta=90°, \gamma=120°$; 2) $\alpha=45°, \beta=60°, \gamma=135°$?

4.43. Известны модуль вектора $|\vec{a}|=4$ и углы, образуемые им с координатными осями: $\alpha=60°$, $\beta=120°$ и $\gamma=45°$. Найти координаты вектора $\vec{a}$.

4.44. Вектор $\vec{a}$ составляет с осью абсцисс и осью аппликат углы 60°. Найти угол между вектором $\vec{a}$ и осью ординат.

4.45. Радиус-вектор точки M составляет с осью Oy угол 60°, а с осью Oz угол 45°, его длина $r=8$. Найти координаты точки M, если известно, что ее абсцисса отрицательна.

4.46. Найти расстояние между точками $M(4; -1; 2)$ и $N(1; 3; -10)$.

4.47. Проверить, что треугольник с вершинами $A(-1; -5; -2)$, $B(-4; 0; -2)$ и $C(-7; -4; -3)$ является равнобедренным.

4.48. Найти значения α и β, при которых векторы $\vec{a}=\{-3; \alpha; 9\}$ и $\vec{b}=\{2; -8; \beta\}$ являются коллинеарными.

4.49. Даны точки $A(-3; -2; -3)$, $B(-2; -5; -1)$ и $C(-4, \alpha; \beta)$. При каких значениях α и β точка C лежит на прямой (AB)?

4.50. Показать, что точки $A(3; 4; 1)$, $B(1; 0; -1)$ и $C(-2; -6; -4)$ лежат на одной прямой.

4.51. Доказать, что четырехугольник с вершинами $A(3; 2; -3)$, $B(2; 4; 6)$, $C(8; 3; 4)$, $D(9; 1; -5)$ есть параллелограмм. Найти длины его сторон.

4.52. Вершины четырехугольника находятся в точках $A(-3; -5; -1)$, $B(2; -20; 9)$, $C(-6; 1; 2)$, $D(-9; 10; -8)$. Показать, что $ABCD$ есть трапеция и найти длины ее оснований.

4.53. На оси аппликат найти точку, равноудаленную от точек (3; 9; —1) и (7; —3; 9).

4.54. Даны три последовательные вершины параллелограмма $A(-1; -1; 2)$, $B(0; 1; -3)$, $C(-4; 0; -2)$. Найти четвертую вершину D, противоположную B.

Указание: записать равенство $\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{BC}$ и воспользоваться тем, что у равных векторов координаты равны.

4.55. Найти координаты середин сторон треугольника с вершинами $A(3; -2; 5)$, $B(-1; 2; 3)$ и $C(5; 4; -3)$.

4.56. Даны точки $A(-3; 6; 1)$ и $B(7; -9; -4)$. Найти координаты точек C, D, E и F, делящих отрезок $[AB]$ на пять конгруэнтных частей.

4.57. Определить координаты концов P и Q отрезка, который точками $M(3; 1; 3)$ и $N(6; -1; 1)$ разделен на три конгруэнтные части.

4.58. Найти координаты центра тяжести треугольника с вершинами $A(-2; -1; 0)$; $B(-1; -3; -2)$, $C(0; -5; -1)$.

4.59. Найти отношение, в котором координатная плоскость xOy делит отрезок между точками $A(-1; -4; 4)$ и $B(1; 2; -5)$. Определить точку пересечения прямой (AB) с плоскостью xOy.

4.60. Дан треугольник с вершинами $A(-1; -1; -1)$, $B(3; -1; -4)$, $C(5; 7; -1)$. Найти координаты точки пересечения биссектрисы угла A с противолежащей стороной.

§ 4. СКАЛЯРНОЕ ПРОИЗВЕДЕНИЕ

Скалярным произведением $\vec{a}\vec{b}$ векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ называется число, равное произведению их длин на косинус угла между ними:

$$\vec{a}\vec{b}=|\vec{a}|\,|\vec{b}|\cos\varphi. \tag{1}$$

Свойства скалярного произведения

1°. $\vec{a}\vec{b}=\vec{b}\vec{a}$.

2°. $(\vec{a}+\vec{b})\vec{c}=\vec{a}\vec{c}+\vec{b}\vec{c}$.

3°. $(\lambda\vec{a})\vec{b}=\lambda(\vec{a}\vec{b})$.

4°. *Скалярное произведение двух ненулевых векторов равно нулю тогда и только тогда, когда эти векторы перпендикулярны.*

5°. *Скалярный квадрат вектора равен квадрату его длины:* $\vec{a}^{\,2}=|\vec{a}|^2$.

Пусть векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ заданы своими координатами: $\vec{a}=\{a_x; a_y; a_z\}$, $\vec{b}=\{b_x; b_y; b_z\}$. Тогда скалярное произведение этих векторов находится по формуле

$$\vec{a}\vec{b}=a_xb_x+a_yb_y+a_zb_z, \tag{2}$$

косинус угла между ними—по формуле

$$\cos\varphi=\frac{a_xb_x+a_yb_y+a_zb_z}{\sqrt{a_x^2+a_y^2+a_z^2}\sqrt{b_x^2+b_y^2+b_z^2}}, \tag{3}$$

а проекция одного из векторов на другой — по формуле

$$\text{пр}_{\vec{b}}\,\vec{a}=\frac{a_xb_x+a_yb_y+a_zb_z}{\sqrt{b_x^2+b_y^2+b_z^2}}. \qquad (4)$$

4.61. Векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ образуют угол $\varphi=\pi/3$. Найти длину вектора $\vec{c}=2\vec{a}-3\vec{b}$, если $|\vec{a}|=2$, $|\vec{b}|=1$.

Решение. Согласно свойству 5^0 скалярного произведения, квадрат длины вектора $\vec{c}$ равен его скалярному квадрату. Найдем скалярный квадрат вектора $\vec{c}$:

$$|\vec{c}\,|^2=4\vec{a}^2-12\vec{a}\,\vec{b}+9\vec{b}^2=4\,|\vec{a}\,|^2-12\,|\vec{a}\,|\,|\vec{b}\,|\cos\varphi+9\,|\vec{b}\,|^2=$$
$$=4\cdot2^2-12\cdot2\cdot1\cos(\pi/3)+9\cdot1^2=16-12+9=13.$$

Следовательно, $|\vec{c}\,|=\sqrt{13}$.

4.62. Найти угол $\hat{A}$ в треугольнике с вершинами $A(1;\ 2;\ -1)$, $B(5;\ 5;\ 11)$ и $C(13;\ 18;\ 20)$.

Решение. Искомый угол — это угол между векторами $\vec{a}=\overrightarrow{AB}=\{4;\ 3;\ 12\}$ и $\vec{b}=\overrightarrow{AC}=\{12;\ 16;\ 21\}$. По формуле (3) имеем

$$\cos\hat{A}=\frac{4\cdot12+3\cdot16+12\cdot21}{\sqrt{4^2+3^2+12^2}\sqrt{12^2+16^2+21^2}}=\frac{358}{13\cdot29}=\frac{12}{13}.$$

Таким образом, $\hat{A}=\arccos(12/13)\approx 23°$.

4.63. Даны векторы $\vec{a}=\{2;\ -4;\ 2\}$, $\vec{b}=\{0;\ 6;\ -2\}$, $\vec{c}=\{2;\ 6;\ 5\}$. Найти проекцию вектора $\vec{a}+\vec{c}$ на вектор $\vec{b}+\vec{c}$.

Решение. Найдем координаты векторов $\vec{a}+\vec{c}$ и $\vec{b}+\vec{c}$; имеем $\vec{a}+\vec{c}=\{4;\ 2;\ 7;\}$, $\vec{b}+\vec{c}=\{2;\ 12;\ 3\}$. Теперь по формуле (4) получаем

$$\text{пр}_{\vec{b}+\vec{c}}\,\vec{a}+\vec{c}==\frac{4\cdot2+2\cdot12+7\cdot3}{\sqrt{2^2+12^2+3^2}}=\frac{53}{\sqrt{157}}\approx 4{,}23.$$

4.64. Дано $|\vec{a}\,|=5$, $|\vec{b}\,|=6$. Найти скалярное произведение векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$, если угол φ между ними равен: 1) 45°; 2) 60°; 3) 90°; 4) 120°; 5) 180°.

4.65. Найти скалярное произведение векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ и угол φ между ними: 1) $\vec{a}=\{2;\ -5;\ 4\}$, $\vec{b}=\{-1;\ 2;\ 7\}$; 2) $\vec{a}=\{1;\ -2;\ 2\}$, $\vec{b}=\{-1;\ 1;\ 0\}$; 3) $\vec{a}=\{3;\ -1;\ 5\}$; $\vec{b}=\{1;\ -2;\ -3\}$.

4.66. Дано $\vec{a}=\{1;\ -2;\ 2\}$, $\vec{b}=\{2;\ -2;\ -1\}$. Найти $2\vec{a}^2-4\vec{a}\,\vec{b}+5\vec{b}^2$.

4.67. Найти работу, произведенную силой $\vec{F}=\{1;\ -2;\ -5\}$, если точка ее приложения, двигаясь прямолинейно, перемещается из положения $M_1(0;\ -4;\ 2)$ в положение $M_2(4;\ -7;\ 0)$.

4.68. Даны силы $\vec{F}_1=\{4;\ -2;\ 5\}$ и $\vec{F}_2=\{1;\ -6;\ -7\}$. Найти работу их равнодействующей при перемещении точки из начала координат в положение $(-3;\ -4;\ 1)$.

4.69. Даны векторы $\vec{a}=\{4;\ m;\ -6\}$ и $\vec{b}=\{m;\ 2;\ -7\}$. При каком значении m эти векторы перпендикулярны?

4.70. Векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ образуют угол $2\pi/3$. Найти длину вектора $\vec{c}=5\vec{a}+3\vec{b}$, если $|\vec{a}|=2$, $|\vec{b}|=4$.

4.71. Найти $(3\vec{a}-5\vec{b})(2\vec{a}+7\vec{b})$, если $|\vec{a}|=3$, $|\vec{b}|=1$, $\vec{a}\perp\vec{b}$.

4.72. Найти вектор $\vec{x}$, коллинеарный вектору $\vec{a}=\{3;\ -1;\ 4\}$ и удовлетворяющий условию $\vec{x}\vec{a}=-52$.

4.73. Векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ взаимно перпендикулярны, а вектор $\vec{c}$ образует с ними углы, равные $\pi/3$. Зная, что $|\vec{a}|=|\vec{b}|=1$, $|\vec{c}|=4$, найти: 1) $(\vec{a}-2\vec{b})(\vec{c}-\vec{a})$; 2) $(\vec{a}+\vec{b}+\vec{c})^2$.

4.74. Определить углы треугольника с вершинами $A(-1;\ -4;\ 0)$, $B(-2;\ -2;\ -2)$ и $C(-3;\ -3;\ 2)$.

4.75. Даны вершины четырехугольника $A(-4;\ -3;\ -2)$, $B(2;\ -2;\ -3)$, $C(-8;\ -5;\ 1)$ и $D(4;\ -3;\ -1)$. Доказать, что его диагонали взаимно перпендикулярны.

4.76. Найти острый угол между диагоналями параллелограмма, построенного на векторах $\vec{a}=\{2;\ 1;\ 0\}$ и $\vec{b}=\{0;\ -1;\ 1\}$.

4.77. При каком условии векторы $\vec{a}+\vec{b}$ и $\vec{a}-\vec{b}$ взаимно перпендикулярны?

4.78. Найти проекцию вектора $\vec{a}=\{5;\ 4;\ -6\}$ на вектор $\vec{b}=\{2;\ -1;\ -1\}$.

4.79. Даны вершины треугольника: $A(1;\ -2;\ -3)$, $B(-1;\ -1;\ -2)$ и $C(3;\ 0;\ -2)$. Найти проекцию $\overrightarrow{AB}$ на $\overrightarrow{AC}$.

4.80. Даны векторы $\vec{a}=\{3;\ -6;\ 2\}$ и $\vec{b}=\{-2;\ -1;\ 2\}$. Найти проекции вектора $\vec{c}=2\vec{a}-5\vec{b}$ на векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$.

4.81. Даны векторы $\vec{a}=\{-4;\ -1;\ 4\}$, $\vec{b}=\{1;\ -6;\ 8\}$ и $\vec{c}=\{3;\ 5;\ -2\}$. Найти проекцию вектора $\vec{b}+\vec{c}$ на вектор $\vec{a}-\vec{c}$.

§ 5. ВЕКТОРНОЕ ПРОИЗВЕДЕНИЕ

Векторным произведением вектора $\vec{a}$ на вектор $\vec{b}$ называют такой вектор $\vec{c}$, который строится по следующему правилу:

1) *вектор $\vec{c}$ перпендикулярен векторам $\vec{a}$ и $\vec{b}$ и направлен таким образом, что кратчайший поворот от $\vec{a}$ к $\vec{b}$ виден из его конца совершающимся против часовой стрелки;*

2) *длина вектора $\vec{c}$ равна произведению длин векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ на синус угла φ между ними:* $|\vec{c}|=|\vec{a}||\vec{b}|\sin\varphi$.

Векторное произведение $\vec{a}$ на $\vec{b}$ обозначается так: $[\vec{a}\vec{b}]$ или $\vec{a}\times\vec{b}$.

Свойства векторного произведения

1^0. $[\vec{a}\vec{b}]=-[\vec{b}\vec{a}]$.

2^0. $[(\vec{a}+\vec{b})\,\vec{c}]=[\vec{a}\vec{c}]+[\vec{b}\vec{c}]$.

3^0. $[(\lambda\vec{a})\,\vec{b}]=\lambda[\vec{a}\vec{b}]$.

4^0. *Векторное произведение двух ненулевых векторов равно нулю тогда и только тогда, когда эти векторы коллинеарны.*

Модуль векторного произведения двух неколлинеарных векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ равен площади параллелограмма, построенного на этих векторах.

Пусть векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ заданы своими координатами: $\vec{a}=\{a_x;\ a_y;\ a_z\}$, $\vec{b}=\{b_x;\ b_y;\ b_z\}$. Тогда векторное произведение $[\vec{a}\vec{b}]$ может быть вычислено путем разложения определителя

$$[\vec{a}\vec{b}]=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ a_x & a_y & a_z\\ b_x & b_y & b_z\end{vmatrix} \qquad (1)$$

по элементам первой строки.

4.82. Найти орт $\vec{e}$, перпендикулярный векторам $\vec{a}=\{3;\ 3;\ 1\}$ и $\vec{b}=\{2;\ -2,\ -1\}$.

Решение. Искомый орт параллелен вектору $\vec{c}=[\vec{a}\vec{b}]$. По формуле (1) находим

$$\vec{c}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ 3 & 3 & 1\\ 2 & -2 & -1\end{vmatrix}=-\vec{i}+5\vec{j}-12\vec{k}.$$

Отсюда $|\vec{c}|=\sqrt{(-1)^2+5^2+(-12)^2}=\sqrt{1+25+144}=\sqrt{170}$. Таким образом,

$$\vec{e}=\pm\frac{\vec{c}}{|\vec{c}|}=\pm\left(-\frac{1}{\sqrt{170}}\vec{i}+\frac{5}{\sqrt{170}}\vec{j}-\frac{12}{\sqrt{170}}\vec{k}\right).$$

4.83. Найти площадь треугольника с вершинами $A(2;\ 2;\ 2)$, $B(1;\ 3;\ 3)$, $C(3;\ 4;\ 2)$.

Решение. Площадь треугольника ABC равна половине площади параллелограмма, построенного на векторах $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{AC}$, т. е. половине длины векторного произведения этих векторов. Так как $\overrightarrow{AB}=\{-1;\ 1;\ 1\}$, $\overrightarrow{AC}=\{1;\ 2;\ 0\}$, то

$$\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ -1 & 1 & 1\\ 1 & 2 & 0\end{vmatrix}=-2\vec{i}+\vec{j}-3\vec{k}.$$

Отсюда $|\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}|=\sqrt{(-2)^2+1^2+(-3)^2}=\sqrt{14}$ и $S_{ABC}=\sqrt{14}/2$.

4.84. Дано $|\vec{a}|=3$, $|\vec{b}|=8$. Найти векторное произведение $\vec{a}\times\vec{b}$, если угол φ между векторами равен: 1) 0; 2) 30°; 3) 90°; 4) 120°; 5) 150°.

4.85. Упростить выражения:

1) $(2\vec{a}-3\vec{b})\times(\vec{a}+4\vec{b})$; 2) $(3\vec{i}-4\vec{j}+5\vec{k})\times(2\vec{i}+6\vec{j}-\vec{k})$.

4.86. Найти и построить вектор $\vec{c}=\vec{a}\times\vec{b}$, если: 1) $\vec{a}=2\vec{i}$; $\vec{b}=3\vec{k}$; 2) $\vec{a}=\vec{i}+\vec{j}$, $\vec{b}=\vec{i}-2\vec{j}$; 3) $\vec{a}=3\vec{i}+\vec{j}$, $\vec{b}=\vec{i}+4\vec{k}$. Определить в каждом случае площадь параллелограмма, построенного на векторах $\vec{a}$ и $\vec{b}$.

4.87. Найти векторное произведение $\vec{a}\times\vec{b}$ для следующих векторов: 1) $\vec{a}=\{2;\ 3;\ 5\}$, $\vec{b}=\{1;\ 2;\ 1\}$, 2) $\vec{a}=\{5;\ -4;\ 7\}$, $\vec{b}=\{1;\ 1;\ -2\}$; 3) $\vec{a}=\{-1;\ 2;\ 4\}$; $\vec{b}=\{2;\ -1;\ -4\}$.

4.88. Найти орт $\vec{e}$, перпендикулярный векторам $\vec{a}=\{1;\ -5;\ -3\}$ и $\vec{b}=\{-2;\ 4;\ 3\}$.

4.89. Вычислить площадь параллелограмма, построенного на векторах $\vec{a}=\{3;\ -2;\ 6\}$ и $\vec{b}=\{6;\ 3;\ -2\}$.

4.90. Вычислить площадь треугольника с вершинами $A(-3;\ -2;-4)$, $B(-1;\ -4;\ -7)$ и $C(1;\ -2;\ 2)$.

4.91. Найти синус угла между векторами $\vec{a}=\{3;\ 0;\ -4\}$ и $\vec{b}= =\{1;\ -2;\ 2\}$.

4.92. Сила $\vec{F}=\{4;\ -3;\ -2\}$ приложена к точке $M(1;\ -5;\ 3)$. Найти момент этой силы относительно начала координат.

Указание: если $\vec{F}$ — сила, приложенная к точке M, то момент этой силы относительно точки A равен векторному произведению векторов $\overrightarrow{AM}$ и $\vec{F}$.

4.93. Дана сила $\vec{F}=\{1;\ -2;\ 4\}$ и точка ее приложения $M(3;\ 2;\ -1)$. Найти момент этой силы относительно точки $A(1;\ 2;\ 3)$ и углы, составляемые им с координатными осями.

4.94. Даны векторы $\vec{a}=\{1;\ 2;\ -1\}$ и $\vec{b}=\{3;\ -1;\ -2\}$. Найти векторное произведение $(2\vec{a}-\vec{b})\times(\vec{a}+2\vec{b})$.

4.95. Вычислить площадь параллелограмма, построенного на векторах $\vec{m}+4\vec{n}$ и $4\vec{m}+\vec{n}$, если $|\vec{m}|=|\vec{n}|=1$ и $(\widehat{\vec{m},\vec{n}})=30°$.

4.96. Векторы $\vec{m}$ и $\vec{n}$ составляют угол $45°$. Найти площадь треугольника, построенного на векторах $\vec{m}-3\vec{n}$ и $3\vec{m}+4\vec{n}$, если $|\vec{m}|= =|\vec{n}|=2$.

4.97. Дан треугольник с вершинами $A(9;\ -9;\ 13)$, $B(7;\ -13;\ 17)$ и $C(17;\ -3;\ 17)$. Найти длину его высоты, проведенной из вершины C.

4.98. Доказать, что $[\vec{a}\vec{b}]^2+(\vec{a}\vec{b})^2=|\vec{a}|^2|\vec{b}|^2$.

4.99. Дано $|\vec{a}|=5$, $|\vec{b}|=2$, $\vec{a}\vec{b}=6$. Найти $|[\vec{a}\vec{b}]|$.

4.100. Дано $|\vec{a}|=10$, $|\vec{b}|=2$, $|[\vec{a}\vec{b}]|=16$. Найти $\vec{a}\vec{b}$.

4.101. Стороны параллелограмма Π_1 равны диагоналям параллелограмма Π_2. Какая зависимость существует между их площадями S_1 и S_2?

§ 6. СМЕШАННОЕ ПРОИЗВЕДЕНИЕ ТРЕХ ВЕКТОРОВ

Смешанным произведением $\vec{a}\vec{b}\vec{c}$ трех векторов $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ называется их векторно-скалярное произведение:

$$\vec{a}\vec{b}\vec{c}=[\vec{a}\vec{b}]\,\vec{c}.$$

Если некомпланарные векторы $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ приведены к общему началу, то модуль смешанного произведения равен объему параллелепипеда, построенного на этих векторах.

Три ненулевых вектора компланарны тогда и только тогда, когда их смешанное произведение равно нулю.

Пусть векторы $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$ заданы своими координатами: $\vec{a}=\{a_x;\ a_y;\ a_z\}$, $\vec{b}=\{b_x;\ b_y;\ b_z\}$, $\vec{c}=\{c_x;\ c_y;\ c_z\}$. Тогда смешанное произведение $\vec{a}\vec{b}\vec{c}$ равно определителю третьего порядка, составленному из координат векторов $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$:

$$\vec{a}\vec{b}\vec{c}=\begin{vmatrix} a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \\ c_x & c_y & c_z \end{vmatrix}. \qquad (1)$$

4.102. Доказать компланарность векторов $\vec{a}=\{1;\ 1;\ 3\}$, $\vec{b}=\{0;\ 2;\ -1\}$, $\vec{c}=\{1;\ -1;\ 4\}$.

Решение. По формуле (1) находим смешанное произведение $\vec{a}\vec{b}\vec{c}$:

$$\vec{a}\vec{b}\vec{c}=\begin{vmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 0 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 4 \end{vmatrix}=1\cdot\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 4 \end{vmatrix}+1\cdot\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 2 & -1 \end{vmatrix}=7-7=0$$

(определитель вычислен путем его разложения по элементам первого столбца).

Так как смешанное произведение векторов $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$ равно нулю, то эти векторы компланарны.

4.103. Найти объем тетраэдра с вершинами в точках $A(-1;\ 1;\ 0)$, $B(2;\ -2;\ 1)$, $C(3;\ 1;\ -1)$, $D(1;\ 0;\ -2)$.

Решение. Рассмотрим векторы $\vec{a}=\overrightarrow{AB}=\{3;\ -3;\ 1\}$, $\vec{b}=\overrightarrow{AC}=\{4;\ 0;\ -1\}$, $\vec{c}=\overrightarrow{AD}=\{2;\ -1;\ -2\}$. Очевидно, что искомый объем тетраэдра равен 1/6 объема параллелепипеда, построенного на векторах $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$. Таким образом,

$$V_{\text{тетр}}=\frac{1}{6}\operatorname{mod}(\vec{a}\vec{b}\vec{c})=\frac{1}{6}\operatorname{mod}\begin{vmatrix} 3 & -3 & 1 \\ 4 & 0 & -1 \\ 2 & -1 & -2 \end{vmatrix}=\frac{1}{6}\operatorname{mod}\left[-4\begin{vmatrix} -3 & 1 \\ -1 & -2 \end{vmatrix}+1\cdot\begin{vmatrix} 3 & -3 \\ 2 & -1 \end{vmatrix}\right]=$$

$$=\frac{1}{6}\operatorname{mod}[-4\cdot 7+3]=\frac{25}{6}.$$

4.104. Найти смешанное произведение $\vec{a}\vec{b}\vec{c}$, если: 1) $\vec{a}=\{1;\ 1;\ 2\}$, $\vec{b}=\{1;\ -2;\ 3\}$, $\vec{c}=\{2;\ 1;\ 1\}$; 2) $\vec{a}=\{5;\ -2;\ -1\}$, $\vec{b}=\{1;\ -2;\ 1\}$, $\vec{c}=\{1;\ 2;\ -2\}$; 3) $\vec{a}=\{1;\ 1;\ 4\}$, $\vec{b}=\{2;\ -1;\ -1\}$, $\vec{c}=\{1;\ 3;\ -1\}$.

4.105. Показать, что векторы $\vec{a}=\{1;\ 2;\ 2\}$, $\vec{b}=\{2;\ 5;\ 7\}$ и $\vec{c}=\{1;\ 1;\ -1\}$ компланарны.

4.106. Установить, компланарны ли векторы: 1) $\vec{a}=\{1;\ -1;\ 2\}$, $\vec{b}=\{3;\ 5;\ 0\}$, $\vec{c}=\{5;\ 3;\ 4\}$; 2) $\vec{a}=\{1;\ 1;\ -1\}$, $\vec{b}=\{1;\ -1;\ 1\}$, $\vec{c}=\{1;\ 1;\ 1\}$.

4.107. Показать, что точки $A(3;\ 5;\ -4)$, $B(1;\ -1;\ -3)$, $C(7;\ 2;\ -6)$ и $D(-1;\ 3;\ -2)$ принадлежат одной плоскости.

4.108. Вычислить объем тетраэдра с вершинами в точках $A(-4;\ -4;\ -3)$, $B(-2;\ -1;\ 1)$, $C(2;\ -2;\ -1)$ и $D(-1;\ 3;\ -2)$.

4.109. В тетраэдре с вершинами $A(3;\ 1;\ 1)$, $B(1;\ 4;\ 1)$, $C(1;\ 1;\ 6)$ и $D(3;\ 4;\ 9)$ найти площадь грани ABC и длину высоты, проведенной к этой грани.

4.110. Вычислить объем параллелепипеда, построенного на векторах $\vec{a}=\{3;\ 2;\ 1\}$, $\vec{b}=\{1;\ 0;\ -1\}$ и $\vec{c}=\{1;\ -2;\ 1\}$.

4.111. Доказать тождество $(\vec{a}+\vec{b})(\vec{b}+\vec{c})(\vec{c}+\vec{a})=2\vec{a}\vec{b}\vec{c}$. Дать геометрическое истолкование этого тождества.

4.112. Доказать, что смешанное произведение трех векторов, из которых два компланарны, равно нулю.

4.113. Доказать, что если векторы $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$ удовлетворяют условию $[\vec{a}\vec{b}]+[\vec{b}\vec{c}[+[\vec{c}\vec{a}]=0$, то они компланарны.

Указание: обе части данного равенства умножить скалярно на вектор $\vec{a}$.

§ 7. СМЕШАННЫЕ ЗАДАЧИ

4.114. Дано $\overrightarrow{AB}=\vec{a}+2\vec{b}$, $\overrightarrow{BC}=-4\vec{a}-\vec{b}$, $\overrightarrow{CD}=-5\vec{a}-3\vec{b}$. Доказать, что $ABCD$ — трапеция.

4.115. Радиусы-векторы вершин треугольника равны $\vec{r}_1$, $\vec{r}_2$ и $\vec{r}_3$. Найти радиус-вектор точки пересечения медиан треугольника.

4.116. Дан вектор $\vec{a}=4\vec{i}-2\vec{j}+2\vec{k}$. Найти вектор $\vec{b}$, если $|\vec{a}|=|\vec{b}|$, $b_x=0$, $a_y=b_y$.

4.117. Показать, что в треугольнике с вершинами $A(-1;\ 0;\ 1)$, $B(5;\ 8;\ 1)$ и $C(-3;\ 1;\ -1)$ угол A является тупым.

4.118. Точки M и N служат серединами сторон $[BC]$ и $[CD]$ параллелограмма $ABCD$. Полагая $\overrightarrow{AM}=\vec{m}$, $\overrightarrow{AN}=\vec{n}$, выразить векторы $\overrightarrow{BC}$ и $\overrightarrow{CD}$ через $\vec{m}$ и $\vec{n}$.

4.119. Дано $|\vec{a}|=4$, $|\vec{b}|=7$. При каком значении α векторы $\vec{a}+\alpha\vec{b}$ и $a-\alpha\vec{b}$ перпендикулярны?

4.120. Показать, что четырехугольник с вершинами $M(-3;\ 5;\ 6)$, $N(1;\ -5;\ 7)$, $P(8;\ -3;\ -1)$ и $Q(4;\ 7;\ -2)$ есть квадрат.

4.121. Дан треугольник с вершинами $A(-1;\ 7;\ 8)$, $B(3;\ -3;\ 9)$ и $C(10;\ -1;\ 1)$. Найти внутренний угол при вершине A и внешний угол при вершине C.

4.122. Силы $\vec{F}_1=\{1;\ 2;\ -6\}$, $\vec{F}_2=\{3;\ -4;\ 2\}$ и $\vec{F}_3=\{-5;\ -4;\ 2\}$ приложены в одной точке. Найти работу, произведенную равнодействующей этих сил, если точка ее приложения, двигаясь прямолинейно, перемещается из положения (5; 3; —7) в положение (4; —1; —4).

4.123. Даны три вектора $\vec{a}=\{7; -2; -6\}$, $\vec{b}=\{4; 3; -5\}$ и $\vec{c}=\{2; -1; 3\}$. Найти вектор $\vec{x}$, удовлетворяющий условиям $\vec{x}\vec{a}=8$, $\vec{x}\vec{b}=0$, $\vec{x}\vec{c}=10$.

4.124. Даны векторы $\vec{a}=\{3; 0; -4\}$ и $\vec{b}=\{1; -2; 2\}$. Найти их векторное произведение, площадь построенного на них параллелограмма и синус угла между этими векторами.

4.125. Упростить выражения:

1) $(2\vec{i}-\vec{j})\cdot\vec{j}+(\vec{j}-2\vec{k})\cdot\vec{k}+(\vec{i}-3\vec{k})^2$;

2) $(3\vec{i}-4\vec{j}-5\vec{k})\times(2\vec{i}+6\vec{j}-\vec{k})$;

3) $3\vec{i}\cdot(\vec{j}\times\vec{k})+5\vec{j}\cdot(\vec{i}\times\vec{k})-6\vec{k}\cdot(\vec{i}\times\vec{j})$;

4) $\vec{i}\times(\vec{j}\times\vec{k})-\vec{j}\times(\vec{i}\times\vec{k})+\vec{k}\times(\vec{i}+\vec{j}+\vec{k})$.

4.126. Найти длины диагоналей параллелограмма, построенного на векторах $\vec{a}=3\vec{m}+\vec{n}$ и $\vec{b}=\vec{m}-3\vec{n}$, где $|\vec{m}|=|\vec{n}|=1$, $(\widehat{\vec{m}, \vec{n}})=\pi/3$.

4.127. Векторы $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$ образуют с осью l соответственно углы $\pi/3$, $2\pi/3$ и π. Найти проекцию на ось l вектора $4\vec{a}+3\vec{b}+\vec{c}$, если известно, что $|\vec{a}|=2$, $|\vec{b}|=6$, $|\vec{c}|=5$.

4.128. Показать, что векторы $\vec{b}\times\vec{a}$ и $3\vec{b}\times(4\vec{a}+5\vec{b})$ коллинеарны.

4.129. Дано $|\vec{a}|=19$, $|\vec{b}|=13$, $|\vec{a}-\vec{b}|=22$. Найти $|\vec{a}+\vec{b}|$.

4.130. Дано $|\vec{a}|=23$, $|\vec{a}-\vec{b}|=20$, $|\vec{a}+\vec{b}|=30$. Найти $|\vec{b}|$.

4.131. Три силы $\vec{F}_1=\{-2; 4; 6\}$, $\vec{F}_2=\{1; 1; -5\}$ и $\vec{F}_3=\{3; -2; 3\}$ приложены в точке $M(6; -6; -3)$. Определить величину и направляющие косинусы момента равнодействующей $\vec{F}$ этих сил: 1) относительно начала координат; 2) относительно точки $A(5; -8; -5)$.

4.132. Найти площадь параллелограмма, построенного на векторах $\vec{a}=\vec{m}+2\vec{n}$ и $\vec{b}=2\vec{m}+\vec{n}$, где $|\vec{m}|=|\vec{n}|=1$, $(\widehat{\vec{m}, \vec{n}})=\pi/3$.

4.133. Установить, лежат ли в одной плоскости точки $A(4; 3; 10)$, $B(5; 1; 5)$, $C(2; 2; 5)$ и $D(3; 4; 12)$.

4.134. В тетраэдре с вершинами $S(-3; -3; -3)$, $A(2; -1; -3)$, $B(-1; 2; -3)$ и $C(-2; -1; 1)$ найти площадь грани ABC и длину высоты, проведенной к этой грани.

4.135. Доказать, что вектор $\vec{x}=\vec{b}(\vec{a}\vec{c})-\vec{a}(\vec{b}\vec{c})$ перпендикулярен вектору $\vec{c}$.

Указание: обе части данного равенства умножить скалярно на вектор $\vec{c}$.

ГЛАВА 5

ПЛОСКОСТЬ. ПРЯМАЯ В ПРОСТРАНСТВЕ. ПОВЕРХНОСТИ ВТОРОГО ПОРЯДКА

§ 1. ПЛОСКОСТЬ

1. Если в пространстве произвольно взята прямоугольная декартова система координат, то *всякое уравнение первой степени относительно текущих координат* x, y и z

$$Ax+By+Cz+D=0, \tag{1}$$

где A, B и C одновременно не равны нулю, определяет плоскость в этой системе координат.

Справедливо и обратное утверждение: в пространственной прямоугольной декартовой системе координат всякая плоскость может быть представлена уравнением вида (1).

Уравнение (1) называется *общим уравнением плоскости.*

Отметим, что *если в уравнении* (1) *отсутствует свободный член D, то плоскость проходит через начало координат; если в уравнении* (1) *отсутствует одна из переменных, то плоскость параллельна той оси, название которой не входит в это уравнение.*

Например: $Ax+By+D=0$ — уравнение плоскости, параллельной оси Oz; $By+D$ — уравнение плоскости, параллельной осям Ox и Oz, т. е. параллельной координатной плоскости xOz; $Ax+By=0$ — уравнение плоскости, параллельной оси Oz и проходящей через начало координат, т. е. проходящей через ось Oz.

2. *Уравнение плоскости, проходящей через точку $M_0(x_0; y_0; z_0)$ и перпендикулярной вектору* $\vec{N}=\{A; B; C\}$ имеет вид

$$A(x-x_0)+B(y-y_0)+C(z-z_0)=0. \tag{2}$$

Вектор $\vec{N}$ называется *нормальным вектором плоскости.*

3. *Уравнением плоскости в отрезках* называется уравнение

$$\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}=1, \tag{3}$$

где a, b и c — длины отрезков, отсекаемых плоскостью на координатных осях, взятые с соответствующими знаками.

4. *Уравнение плоскости, проходящей через три данные точки* $M_1(x_1; y_1; z_1)$, $M_2(x_2; y_2; z_2)$ и $M_3(x_3; y_3; z_3)$, имеет вид

$$\begin{vmatrix} x-x_1 & y-y_1 & z-z_1 \\ x_2-x_1 & y_2-y_1 & z_2-z_1 \\ x_3-x_1 & y_3-y_1 & z_3-z_1 \end{vmatrix}=0. \tag{4}$$

5. *Нормальным уравнением плоскости* называется уравнение вида

$$x\cos\alpha+y\cos\beta+z\cos\gamma-p=0, \tag{5}$$

где $\cos\alpha$, $\cos\beta$, $\cos\gamma$ — направляющие косинусы перпендикуляра, проведенного из начала координат к данной плоскости, а p — его длина.

Для приведения общего уравнения плоскости (1) к нормальному виду (5) следует умножить все его члены на нормирующий множитель

$$\mu=\pm\frac{1}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}, \tag{6}$$

где знак перед радикалом противоположен знаку свободного члена D в общем уравнении плоскости.

5.1. Составить уравнения плоскостей по следующим данным: 1) плоскость перпендикулярна оси Ox и проходит через точку

$K(4; -1; -6)$; 2) плоскость проходит через ось Oz и точку $L(5; -2; 7)$; 3) плоскость параллельна оси Ox и проходит через точки $M(1; -1; -3)$ и $N(-5; 4; -2)$.

Решение. 1) Плоскость, перпендикулярная оси Ox, параллельна координатной плоскости yOz и ее уравнение имеет вид $Ax+D=0$. Подставляя в это уравнение координаты точки K, получим $4A+D=0$, т. е. $D=-4A$. Следовательно, $Ax-4A=0$, или $A(x-4)=0$, откуда получаем искомое уравнение $x-4=0$.

2) Так как плоскость проходит через ось Oz, то ее уравнение имеет вид $Ax+By=0$. Подставляя в это уравнение координаты точки L, получим $5A-2B=0$, или $A=2B/5$. Таким образом, имеем $2Bx/5+By=0$, т. е. $B(2x/5+y)=0$, откуда получаем искомое уравнение $2x+5y=0$.

3) Поскольку плоскость параллельна оси Ox, ее уравнение имеет вид $By+Cz+D=0$. Подставляя в это уравнение координаты точек M и N, имеем

$$-B-3C+D=0,\ 4B-2C+D=0,$$

откуда $B=-D/14$, $C=5D/14$. Следовательно, искомое уравнение записывается в виде

$$-\frac{D}{14}y+\frac{5D}{14}z+D=0, \text{ или } y-5z-14=0.$$

5.2. Даны точки $M_1(-3; 7; -5)$ и $M_2(-8; 3; -4)$. Составить уравнение плоскости, проходящей через точку M_1 и перпендикулярной вектору $\vec{N}=\overrightarrow{M_1M_2}$.

Решение. Найдем координаты нормального вектора $\vec{N}$; имеем $\vec{N}=\{-5; -4; 1\}$. Подставляя в соотношение (2) значения $A=-5$, $B=-4$, $C=1$, $x_1=-3$, $y_1=7$, $z_1=-5$, получим искомое уравнение

$$-5(x+3)-4(y-7)+(z+5)=0, \text{ или } 5x+4y-z-18=0.$$

5.3. Найти отрезки, отсекаемые плоскостью $3x-12y-8z+6=0$ на осях координат.

Решение. Записав уравнение плоскости в виде $3x-12y-8z=-6$ и разделив все его члены на -6, получим уравнение в отрезках на осях:

$$\frac{x}{-2}+2y+\frac{4}{3}z=1, \text{ или } \frac{x}{-2}+\frac{y}{1/2}+\frac{z}{3/4}=1.$$

Сравнивая полученное уравнение с уравнением (3), находим $a=-2$, $b=1/2$, $c=3/4$.

5.4. Составить уравнение плоскости, проходящей через три точки: $M_1(1; -3; 4)$, $M_2(0; -2; -1)$ и $M_3(1; 1; -1)$.

Решение. На основании равенства (4) искомое уравнение имеет вид

$$\begin{vmatrix} x-1 & y+3 & z-4 \\ -1 & 1 & -5 \\ 0 & 4 & -5 \end{vmatrix}=0.$$

Разлагая этот определитель по элементам первой строки, получим

$$15(x-1)-5(y+3)-4(z-4)=0, \quad \text{или } 15x-5y-4z-14=0.$$

5.5. Уравнение плоскости $6x-3y-2z+35=0$ привести к нормальному виду.

Решение. Находим нормирующий множитель

$$\mu=-\frac{1}{\sqrt{6^2+3^2+2^2}}=-\frac{1}{7}$$

(знак минус берется потому, что $D=35>0$). Таким образом, нормальное уравнение заданной плоскости имеет вид

$$-\frac{6}{7}x+\frac{3}{7}y+\frac{2}{7}z-5=0.$$

5.6. Построить плоскости: 1) $3x-4y-2z+12=0$; 2) $2x+5y-3z=0$; 3) $5x-2y+10=0$; 4) $4x+7y=0$; 5) $z+y=0$; 6) $3y-8=0$.

5.7. Составить уравнение плоскости, перпендикулярной оси Oy и проходящей через точку $M(-1;\ 7/2;\ 8)$.

5.8. Написать уравнение плоскости, проходящей через ось Ox и точку $M(9;\ -3;\ 8)$.

5.9. Написать уравнение плоскости, параллельной оси Oz и проходящей через точки $M(-1;\ 4;\ -7)$ и $N(2;\ -3;\ 6)$.

5.10. Написать уравнение плоскости, параллельной оси Oy и проходящей через точки $M(0;\ -3;\ 2)$ и $N(5;\ -4;\ -1)$.

5.11. Написать уравнение плоскости, проходящей через точку $M(-3;\ -5;\ 4)$ и перпендикулярной вектору $\vec{N}=\{2;\ -1;\ 6\}$.

5.12. Даны точки $P(-1;\ 3;\ -4)$ и $Q(0;\ -2;\ 7)$. Составить уравнения плоскостей, проходящих через точки P и Q и перпендикулярных вектору $\vec{N}=\overrightarrow{PQ}$.

5.13. Уравнение плоскости $2x-16y+3z-12=0$ записать в виде уравнения в отрезках.

5.14. Найти отрезки, отсекаемые плоскостью $4x-3y-36z+24=0$ на координатных осях.

5.15. Написать уравнение плоскости, проходящей через точку $(-5;\ 4;\ 13)$ и отсекающей на осях координат конгруэнтные отрезки.

5.16. Составить уравнение плоскости, проходящей через точку $(6;\ -1;\ 2)$ и отсекающей на оси абсцисс отрезок $a=-3$, а на оси аппликат — отрезок $c=4$.

5.17. Составить уравнение плоскости, проходящей через точки $(4;\ 6;\ -3)$, $(-2;\ -1;\ 7)$ и отсекающей конгруэнтные отрезки на осях Oy и Oz.

5.18. Написать уравнение плоскости, проходящей через начало координат и через точки $A(-5;\ 7;\ 3)$ и $B(2;\ -9;\ -4)$.

5.19. Написать уравнение плоскости (KLN), где $K(1;\ -6;\ 7)$, $L(4;\ 5;\ -3)$, $N(3;\ 0;\ 2)$.

5.20. Из точки $(-4;\ 5;\ 3)$ проведены перпендикуляры к координатным плоскостям. Найти уравнение плоскости, проходящей через их основания.

5.21. Привести к нормальному виду уравнения следующих плоскостей: 1) $2x-9y+6z+55=0$; 2) $11x-10y-2z-30=0$; 3) $3x+4y-5z+10=0$.

5.22. Определить, какие из уравнений плоскости являются нормальными: 1) $\frac{x}{\sqrt{3}}+\frac{y}{\sqrt{3}}-\frac{z}{\sqrt{3}}+2=0$; 2) $\frac{2}{3}x-\frac{1}{3}y-\frac{1}{3}z-1=0$; 3) $-\frac{6}{11}x+\frac{6}{11}y+\frac{7}{11}z-4=0$.

5.23. Найти длину перпендикуляра, проведенного из начала координат к плоскости $4x-5y-20z+63=0$, и углы, образуемые этим перпендикуляром с координатными осями.

§ 2. УГОЛ МЕЖДУ ПЛОСКОСТЯМИ. УСЛОВИЯ ПАРАЛЛЕЛЬНОСТИ И ПЕРПЕНДИКУЛЯРНОСТИ ДВУХ ПЛОСКОСТЕЙ. РАССТОЯНИЕ ОТ ТОЧКИ ДО ПЛОСКОСТИ

1. *Острый угол* φ *между плоскостями* $A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0$ и $A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0$ определяется по формуле

$$\cos\varphi=\frac{|A_1A_2+B_1B_2+C_1C_2|}{\sqrt{A_1^2+B_1^2+C_1^2}\sqrt{A_2^2+B_2^2+C_2^2}}. \tag{1}$$

Условие параллельности двух плоскостей имеет вид

$$\frac{A_1}{A_2}=\frac{B_1}{B_2}=\frac{C_1}{C_2}. \tag{2}$$

Условие перпендикулярности двух плоскостей имеет вид

$$A_1A_2+B_1B_2+C_1C_2=0. \tag{3}$$

2. *Расстояние от точки* $M_0(x_0;\ y_0;\ z_0)$ *до плоскости* $Ax+By+Cz+D=0$ находится по формуле

$$d=\frac{|Ax_0+By_0+Cz_0+D|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}, \tag{4}$$

т. е. *расстояние от точки до плоскости равно взятому по абсолютной величине результату подстановки координат точки в нормальное уравнение плоскости.*

5.24. Найти острый угол между плоскостями $7x-11y+8z+19=0$ и $x+4y-10z-5=0$.

Решение. Используя формулу (1), получим

$$\cos\varphi=\frac{|7\cdot1+(-11)\cdot4+8\cdot(-10)|}{\sqrt{7^2+11^2+8^2}\sqrt{1^2+4^2+10^2}}=\frac{117}{\sqrt{234}\sqrt{117}}=\frac{1}{\sqrt{2}},$$

т. е. $\varphi=\pi/4$.

5.25. Составить уравнение плоскости, проходящей через точку $M(-4;\ 3;\ -7)$ параллельно плоскости $6x-5y+4z-15=0$.

Решение. Так как искомая плоскость параллельна плоскости $6x-5y+4z-15=0$, то в качестве ее нормального вектора можно взять нормальный вектор $\vec{N}=\{6;\ -5;\ 4\}$ данной плоскости. Используя теперь уравнение плоскости, проходящей через точку M перпендикулярно данному вектору $\vec{N}$, получаем

$$6(x+4)-5(y-3)+4(z+7)=0, \text{ или } 6x-5y+4z+67=0.$$

Это и есть искомое уравнение.

5.26. Написать уравнение плоскости, проходящей через точки $A(1;\ 4;\ -5)$ и $B(4;\ 2;\ -3)$ и перпендикулярной плоскости $3x+5y-6z-8=0$.

Решение. Очевидно, что в качестве нормального вектора $\vec{N}_1$ искомой плоскости можно взять вектор, перпендикулярный вектору $\overrightarrow{AB}=\{3;\ -2;\ 2\}$ и нормальному вектору $\vec{N}=\{3;\ 5;\ -6\}$ данной плоскости. Так как векторное произведение двух векторов есть вектор, перпендикулярный векторам-сомножителям, то за $\vec{N}_1$ можно принять векторное произведение $\overrightarrow{AB}$ и $\vec{N}$, т. е. $\vec{N}_1=\overrightarrow{AB}\times\vec{N}$. Следовательно,

$$\vec{N}_1=\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 3 & -2 & 2 \\ 3 & 5 & -6 \end{vmatrix}=2\vec{i}+24\vec{j}+21\vec{k}.$$

Остается использовать уравнение плоскости, проходящей через данную точку $A(1;\ 4;\ -5)$ перпендикулярно вектору $\vec{N}_1=\{2;\ 24;\ 21\}$:

$$2(x-1)+24(y-4)+21(z+5)=0, \text{ или } 2x+24y+21z+7=0.$$

Заметим, что при составлении уравнения искомой плоскости вместо точки A можно было взять точку B.

5.27. Написать уравнение плоскости, проходящей через точку $M(-1;\ -1;\ 2)$ и перпендикулярной плоскостям $x-2y+z-4=0$ и $x+2y-2z+4=0$.

Решение. В качестве нормального вектора $\vec{N}$ искомой плоскости возьмем векторное произведение нормальных векторов $\vec{N}_1=\{1;\ -2;\ 1\}$ и $\vec{N}_2=\{1;\ 2;\ -2\}$ данных плоскостей:

$$\vec{N}=\vec{N}_1\times\vec{N}_2=\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & 2 & -2 \end{vmatrix}=2\vec{i}+3\vec{j}+4\vec{k}.$$

Теперь остается воспользоваться уравнением плоскости, проходящей через данную точку $M(-1;\ -1;\ 2)$ перпендикулярно вектору $\vec{N}=\{2;\ 3;\ 4\}$:

$$2(x+1)+3(y+1)+4(z-2)=0, \text{ или } 2x+3y+4z-3=0.$$

5.28. Написать уравнение плоскости, параллельной плоскости $x-2y+2z-7=0$ и отстоящей от нее на расстоянии, равном 5.

Решение. Запишем уравнение искомой плоскости в виде

$$x-2y+2z+D=0. \qquad (*)$$

Найдем расстояние между плоскостями; для этого возьмем произвольную точку данной плоскости и определим ее расстояние до плоскости (*). Полагая $x=0$, $y=0$, найдем $z=7/2$, т. е. получим точку $M(0;\ 0;\ 7/2)$. Используя теперь формулу (4), имеем

$$d=\frac{|1\cdot 0-2\cdot 0+2\cdot 7/2+D|}{\sqrt{1^2+2^2+2^2}}=\frac{|7+D|}{3}.$$

Так как по условию $d=5$, то для определения D получаем уравнение

$$|7+D|/3=5, \text{ или } 7+D=\pm 15,$$

откуда $D_1=8$, $D_2=-22$. Подставляя в уравнение (*) найденные значения D, получим две плоскости

$$x-2y+2z+8=0, \quad x-2y+2z-22=0.$$

5.29. Найти острый угол между плоскостями:

1) $x-y+\sqrt{2}z-5=0$ и $x+y+\sqrt{2}z+3=0$;

2) $2x-2y+z-9=0$ и $3x+6y-2z+7=0$;

3) $6x-6y-3z+10=0$ и $7x+4y-4z-12=0$.

5.30. Через точку $M(-4; 3; -7)$ провести плоскость, параллельную плоскости $5x-y-6z+2=0$.

5.31. Составить уравнение плоскости, проведенной через точку $A(-2; 4; 1)$ параллельно плоскости (BCD), где $B(0; -3; 2)$, $C(4; -6; 1)$, $D(-7; 5; -2)$.

5.32. Дана вершина параллелепипеда $A(-3; -2; 4)$ и уравнения плоскостей, в которых лежат три его непараллельные грани: $x-4y+5z-8=0$, $3x-y-2z+6=0$, $2x+5y+z-9=0$. Составить уравнения плоскостей, в которых лежат остальные три грани.

5.33. Показать, что параллелепипед, грани которого лежат в плоскостях $2x+4y-6z+13=0$, $9x-3y+z-4=0$, $x+4y+3z-5=0$, является прямоугольным.

5.34. Составить уравнение плоскости, проходящей через точки $A(-2; 7; 3)$ и $B(1; -2; 8)$ и перпендикулярной плоскости $7x-3y+2z-10=0$.

5.35. Одна из граней прямоугольного параллелепипеда лежит в плоскости $3x+4y-z+12=0$. Найти уравнение плоскости, в которой лежит перпендикулярная ей грань, если известно, что она проходит через точки $(-1; -3; -4)$ и $(4; -5; 3)$.

5.36. Составить уравнения плоскостей, проходящих через оси координат перпендикулярно плоскости $6x-5y+7z-10=0$.

5.37. Составить уравнение плоскости, проходящей через точку $(1; 3; 2)$ и перпендикулярной плоскостям $x+2y+z-4=0$ и $2x+y+3z+5=0$.

5.38. Написать уравнение плоскости, проведенной через точку $(-4; -8; 6)$ параллельно вектору $\vec{a}=\{2; -4; -3\}$ и перпендикулярно плоскости $3x-7y-5z-8=0$.

5.39. Найти расстояния от точек $A(-9; 6; 6)$, $B(-2; 7; 1)$ и $C(1; -3; 4)$ до плоскости $2x-6y-3z+27=0$.

5.40. Дан тетраэдр с вершинами $A(1; -2; 2)$, $B(2; -3; -6)$, $C(5; 1; 4)$ и $D(0; -4; 4)$. Найти длину высоты, проведенной из вершины B.

5.41. Какая из плоскостей $7x-6y-6z+44=0$ и $2x-y-2z+13=0$ расположена ближе к началу координат?

5.42. На оси Oy найти точку, равноудаленную от двух плоскостей $3x-4y+2z-9=0$ и $4x+2y-3z-21=0$.

5.43. Найти расстояние между параллельными плоскостями $3x-5y+4z-24=0$ и $12x-20y+16z+9=0$.

5.44. Составить уравнения плоскостей, параллельных плоскости $4x-7y-4z-13=0$ и отстоящих от нее на расстоянии, равном 8.

5.45. Найти уравнения плоскостей, параллельных плоскости $9x-6y-2z+4=0$ и отстоящих от точки $M(-3; -2; -5)$ на расстоянии, равном 3.

§ 3. УРАВНЕНИЯ ПРЯМОЙ В ПРОСТРАНСТВЕ

1. *Уравнения прямой, проходящей через точку* $M_0(x_0; y_0; z_0)$ и параллельной вектору $\vec{s}=\{l; m; n\}$, записываются в виде

$$\frac{x-x_0}{l}=\frac{y-y_0}{m}=\frac{z-z_0}{n}. \qquad (1)$$

Уравнения (1) называются *каноническими уравнениями* прямой, а вектор $\vec{s}$ — *направляющим вектором* прямой.

2. Если каждое из отношений (1) приравнять параметру t, то получаются *параметрические уравнения* прямой:

$$x=x_0+lt, \quad y=y_0+mt, \quad z=z_0+nt. \qquad (2)$$

3. *Уравнения прямой, проходящей через две точки* $M_1(x_1; y_1; z_1)$ и $M_2(x_2; y_2; z_2)$, имеют вид

$$\frac{x-x_1}{x_2-x_1}=\frac{y-y_1}{y_2-y_1}=\frac{z-z_1}{z_2-z_1}. \qquad (3)$$

4. *Общие уравнения прямой* записываются так:

$$\left.\begin{aligned} A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0, \\ A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0. \end{aligned}\right\} \qquad (4)$$

Таким образом, прямая в пространстве рассматривается как линия пересечения двух плоскостей.

5. *Острый угол между прямыми*

$$\frac{x-x_1}{l_1}=\frac{y-y_1}{m_1}=\frac{z-z_1}{n_1} \qquad (5)$$

и

$$\frac{x-x_2}{l_2}=\frac{y-y_2}{m_2}=\frac{z-z_2}{n_2} \qquad (6)$$

определяется по формуле

$$\cos\varphi=\frac{|l_1l_2+m_1m_2+n_1n_2|}{\sqrt{l_1^2+m_1^2+n_1^2}\sqrt{l_2^2+m_2^2+n_2^2}}. \qquad (7)$$

Условие параллельности двух прямых (5) и (6) имеет вид

$$\frac{l_1}{l_2}=\frac{m_1}{m_2}=\frac{n_1}{n_2}. \qquad (8)$$

Условие перпендикулярности двух прямых (5) и (6) имеет вид

$$l_1l_2+m_1m_2+n_1n_2=0. \qquad (9)$$

5.46. Составить канонические уравнения прямой, проходящей через точку $A(-5; 8; -3)$ и параллельной вектору $\vec{s}=\{2; 4; -1\}$.

Решение. Воспользуемся формулами (1) при $x_0=-5$, $y_0=8$, $z_0=-3$, $l=2$, $m=4$, $n=-1$:

$$\frac{x+5}{2}=\frac{y-8}{4}=\frac{z+3}{-1}.$$

Это и есть канонические уравнения прямой.

5.47. Составить параметрические уравнения прямой, проходящей через точку $A(-7;\ -3;\ 2)$ и перпендикулярной плоскости $x-4y-5z+8=0$. Найти точку M прямой, соответствующую значению параметра $t=2$.

Решение. Так как нормальный вектор $\vec{N}=\{1;\ -4;\ -5\}$ данной плоскости перпендикулярен ей, то по условию он должен быть параллелен искомой прямой. По формулам (2), где $x_0=-7$, $y_0=-3$, $z_0=2$, $l=1$, $m=-4$, $n=-5$, получаем параметрические уравнения прямой:

$$x=-7+t,\quad y=-3-4t,\quad z=2-5t.$$

При $t=2$ находим $x=-5$, $y=-11$, $z=-8$, т. е. получим точку $M(-5;\ -11;\ -8)$.

5.48. Написать уравнения прямой l, проходящей через точки $A(-1;\ 2;\ 3)$ и $B(5;\ -2;\ 1)$. Лежат ли на этой прямой точки $K(-7;\ 6;\ 5)$, $L(2;\ 0;\ 1)$, $M(-4;\ 4;\ 4)$?

Решение. Используя формулы (3), при $x_1=-1$, $y_1=2$, $z_1=3$, $x_2=5$, $y_2=-2$, $z_2=1$ получим искомые канонические уравнения прямой l:

$$\frac{x+1}{6}=\frac{y-2}{-4}=\frac{z-3}{-2}.$$

Подставляя в эти уравнения координаты точек K, L и M, соответственно находим

$$\frac{-7+1}{6}=\frac{6-2}{-4}=\frac{5-3}{-2}=-1,\ \frac{2+1}{6}=\frac{0-2}{-4}\neq\frac{1-3}{2},\ \frac{-4+1}{6}=\frac{4-2}{-4}=\frac{4-3}{-2}=-\frac{1}{2}.$$

Следовательно, $K\in l$ и $M\in l$, а $L\notin l$.

5.49. Общие уравнения прямой

$$\left.\begin{aligned} x-2y+3z+15=0,\\ 2x+3y-4z-12=0 \end{aligned}\right\}$$

привести к каноническому виду.

Решение. Найдем направляющий вектор $\vec{s}=\{l;\ m;\ n\}$ прямой. Так как он должен быть перпендикулярен нормальным векторам заданных плоскостей $\vec{N}_1=\{1;\ -2;\ 3\}$ и $\vec{N}_2=\{2;\ 3;\ -4\}$, то в качестве его можно взять векторное произведение векторов $\vec{N}_1$ и $\vec{N}_2$:

$$\vec{s}=\vec{N}_1\times\vec{N}_2=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ 1 & -2 & 3\\ 2 & 3 & -4\end{vmatrix}=-\vec{i}+10\vec{j}+7\vec{k}.$$

Таким образом, $l=-1$, $m=10$, $n=7$.

За точку $M_0(x_0;\ y_0;\ z_0)$, через которую проходит искомая прямая, можно принять точку ее пересечения с любой из координатных плоскостей, например с плоскостью xOy. Поскольку при этом $z_0=0$, координаты x_0 и y_0 определятся из системы уравнений заданных плоскостей, если положить в них $z=0$:

$$\left.\begin{array}{r} x-2y+15=0, \\ 2x+3y-12=0. \end{array}\right\}$$

Отсюда получаем $x_0=-3$, $y_0=6$. Итак, искомые канонические уравнения прямой имеют вид

$$\frac{x+3}{-1}=\frac{y-6}{10}=\frac{z}{7}.$$

5.50. Найти острый угол φ между прямыми

$$\frac{x-1}{2}=\frac{y+5}{-6}=\frac{z-7}{3} \quad \text{и} \quad \frac{x-4}{1}=\frac{y+5}{2}=\frac{z-6}{-2}.$$

Решение. По формуле (7) получаем

$$\cos\varphi=\frac{|2\cdot 1+(-6)\cdot 2+3\cdot(-2)|}{\sqrt{2^2+6^2+3^2}\,\sqrt{1^2+2^2+2^2}}=\frac{16}{21},$$

т. е. $\varphi=\arccos(16/21)\approx 40°$.

5.51. Составить уравнения прямой, проходящей через точку $A(-3;\ 8;\ -9)$ и параллельной прямой $x=4-5t$, $y=2t$, $z=-7+10t$.

Решение. Запишем уравнения данной прямой в каноническом виде:

$$\frac{x-4}{-5}=\frac{y}{2}=\frac{z+7}{10}.$$

Так как искомая прямая параллельна данной, то в качестве ее направляющего вектора можно взять направляющий вектор $\vec{s}=\{-5;\ 2;\ 10\}$ данной прямой. Используя теперь уравнения прямой, проходящей через точку A и параллельной вектору $\vec{s}$, получаем

$$\frac{x+3}{-5}=\frac{y-8}{2}=\frac{z+9}{10}.$$

5.52. Составить уравнения прямой, проведенной через точку $M(-7;\ 0;\ 9)$ перпендикулярно двум данным прямым

$$\frac{x-3}{-2}=\frac{y+4}{-1}=\frac{z-5}{3} \quad \text{и} \quad \frac{x+1}{4}=\frac{y-3}{6}=\frac{z-2}{-5}.$$

Решение. Найдем направляющий вектор $\vec{s}=\{l;\ m;\ n\}$ искомой прямой. Так как он должен быть перпендикулярен направляющим векторам заданных прямых $\vec{s}_1=\{-2;\ -1;\ 3\}$ и $\vec{s}_2=\{4;\ 6;\ -5\}$, то в качестве его можно взять векторное произведение векторов $\vec{s}_1$ и $\vec{s}_2$:

$$\vec{s}=\vec{s}_1\times\vec{s}_2=\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -2 & -1 & 3 \\ 4 & 6 & -5 \end{vmatrix}=-13\vec{i}+2\vec{j}-8\vec{k}.$$

Теперь, зная направляющий вектор прямой $\vec{s}=\{-13; 2; -8\}$ и точку $M(-7; 0; 9)$, через которую проходит эта прямая, получаем канонические уравнения искомой прямой:

$$\frac{x+7}{-13}=\frac{y}{2}=\frac{z-9}{-8}.$$

5.53. Написать канонические уравнения прямой, проходящей через точку $M(-7; -4; 5)$ параллельно вектору $\vec{s}=\{2; -6; 9\}$. Какие углы составляет эта прямая с осями координат?

5.54. Написать параметрические уравнения прямой l, проходящей через точку $A(-4; 9; -3)$ параллельно вектору $\vec{s}=\{5; -2; -1\}$. Лежат ли точки $K(-6; 5; -5)$, $L(-9; 10; -2)$ и $M(-11; 3; -6)$ на этой прямой?

5.55. Составить параметрические уравнения прямых, проходящих через точку $M(8; -3; -1)$, для каждого из следующих случаев: 1) прямая параллельна вектору $\vec{s}=\{-3; 4; 5\}$; 2) прямая параллельна прямой $x=1+8t$, $y=2-7t$, $z=3t$; 3) прямая параллельна оси Ox; 4) прямая параллельна оси Oz; 5) прямая перпендикулярна плоскости $6x-9y+4z+3=0$.

5.56. Точка $M(x; y; z)$ движется по прямой $x=3-t$, $y=-9+2t$, $z=6-2t$. Вычислить расстояние, пройденное точкой M за промежуток времени от $t_1=2$ до $t_2=7$.

Указание: искомое расстояние равно $|M_1M_2|$, где M_1 и M_2 — точки, соответствующие значениям параметра $t_1=2$ и $t_2=7$.

5.57. Составить уравнения прямой, проходящей через точки $M(-3; -2; 1)$ и $N(4; -8; 7)$, и найти ее направляющие косинусы.

5.58. Составить уравнения сторон треугольника с вершинами $A(7; 2; -6)$, $B(11; -3; 5)$, $C(-3; 4; -2)$ и уравнения его медианы, проведенной из вершины B.

5.59. Тремя вершинами параллелограмма служат точки $A(-2; 8; -4)$, $B(9; -5; 6)$ и $C(-6; -2; 10)$. Составить уравнения диагоналей (AC) и (BD).

5.60. Привести к каноническому виду общие уравнения прямых:

$$1)\ \left.\begin{aligned}3x-4y+5z-18&=0,\\ 6x-5y+z-27&=0;\end{aligned}\right\}\qquad 2)\ \left.\begin{aligned}2x+3y+z-10&=0,\\ 4x-5y-z+24&=0.\end{aligned}\right\}$$

5.61. Найти углы, образуемые прямой

$$\left.\begin{aligned}x-3z+8&=0,\\ x+2y-5&=0\end{aligned}\right\}$$

с координатными осями.

5.62. Написать уравнения прямой, проходящей через точку $A(3; -5; -8)$ параллельно прямой $x=4t$, $y=1-6t$, $z=-7+10t$.

5.63. Составить уравнения прямой, проходящей через точку $M(-4; -7; 1)$ и параллельной прямой

$$\left.\begin{aligned}2x+3y+z-6&=0,\\ 4x-5y-z+2&=0.\end{aligned}\right\}$$

5.64. Точки $A(-4;\ 3;\ 7)$, $B(2;\ -1;\ 5)$ и $C(-2;\ -6;\ 11)$ являются тремя вершинами параллелограмма. Составить уравнение стороны (BD).

5.65. Найти острые углы между прямыми:

1) $\frac{x-2}{11}=\frac{y+5}{7}=\frac{z-3}{-8}$ и $\frac{x+2}{4}=\frac{y-4}{-1}=\frac{z-9}{-10}$;

2) $x=2+3t,\quad y=1-t,\quad z=3+2t$ и
$x=1+2t,\quad y=-2+4t,\quad z=-1-2t$;

3) $\left.\begin{aligned} y\sqrt{2}-z-\sqrt{2}=0, \\ x-y=0 \end{aligned}\right\}$ и $\left.\begin{aligned} y\sqrt{2}-z-1=0, \\ x+y-4=0. \end{aligned}\right\}$

5.66. Найти острый угол прямой

$$\left.\begin{aligned} x-2z+1=0, \\ y+2z-1=0 \end{aligned}\right\}$$

с прямой, проходящей через начало координат и точку $(1;\ -1;\ -1)$.

5.67. Показать, что прямые

$$\frac{x-2}{-5}=\frac{y}{-9}=\frac{z+1}{7} \quad \text{и} \quad \left.\begin{aligned} x+\ y+z-\ 4=0, \\ 2x+3y-z-32=0 \end{aligned}\right\}$$

взаимно перпендикулярны.

5.68. Составить уравнения прямой, проходящей через точку $M(-4;\ 3;\ -8)$ перпендикулярно двум прямым

$$\frac{x+1}{-3}=\frac{y-5}{2}=\frac{z}{-4} \quad \text{и} \quad \frac{x-5}{3}=\frac{y+2}{-6}=\frac{z-1}{5}.$$

5.69. Даны точки $A(-1;\ 3;\ -4)$, $B(0;\ 2;\ -7)$, $C(4;\ -3;\ 6)$. Составить уравнения прямой, проходящей через точку A и перпендикулярной векторам $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{AC}$.

§ 4. ПРЯМАЯ И ПЛОСКОСТЬ

Угол между прямой

$$\frac{x-x_0}{l}=\frac{y-y_0}{m}=\frac{z-z_0}{n} \tag{1}$$

и плоскостью

$$Ax+By+Cz+D=0 \tag{2}$$

определяется по формуле

$$\sin\varphi=\frac{|Al+Bm+Cn|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}\ \sqrt{l^2+m^2+n^2}}. \tag{3}$$

Условие параллельности прямой (1) *и плоскости* (2) имеет вид

$$Al+Bm+Cn=0. \tag{4}$$

Условие перпендикулярности прямой (1) *и плоскости* (2) имеет вид

$$\frac{A}{l}=\frac{B}{m}=\frac{C}{n}. \tag{5}$$

Условие принадлежности прямой (1) *плоскости* (2) имеет вид

$$\left.\begin{aligned} Al+Bm+Cn=0, \\ Ax_0+By_0+Cz_0+D=0. \end{aligned}\right\} \qquad (6)$$

5.70. Найти угол между прямой $x=9+t$, $y=5-2t$, $z=-1-t$ и плоскостью $4x-2y+2z+7=0$.

Решение. Запишем уравнения данной прямой в виде $(x-9)/1=(y-5)/(-2)=$ $=(z+1)/(-1)$. Теперь, используя формулу (3) при $A=4$, $B=-2$, $C=2$, $l=1$, $m=-2$, $n=-1$, получим

$$\sin\varphi=\frac{|4\cdot 1+(-2)\cdot(-2)+2\cdot(-1)|}{\sqrt{4^2+2^2+2^2}\sqrt{1^2+2^2+1^2}}=\frac{6}{\sqrt{24}\sqrt{6}}=\frac{1}{2}.$$

Таким образом, $\varphi=\pi/6$.

5.71. При каком значении m прямая $x=2-7t$, $y=-3+mt$, $z=4-15t$ параллельна плоскости $6x-9y+5z-11=0$?

Решение. Используем условие параллельности прямой и плоскости. Подставляя в соотношение (4) соответствующие значения, получим уравнение

$$-7\cdot 6+m(-9)-15\cdot 5=0, \quad \text{или} \quad 9m+117=0,$$

откуда $m=-13$.

5.72. Составить уравнение плоскости, проходящей через точку $M(-4;\ 3;\ -8)$ и перпендикулярной прямой

$$\frac{x-5}{2}=\frac{y}{-5}=\frac{z+1}{7}.$$

Решение. Очевидно, что за нормальный вектор $\vec{N}$ искомой плоскости можно принять параллельный ему направляющий вектор $\vec{s}=\{2;\ -5;\ 7\}$ данной прямой. Используя уравнение плоскости, проходящей через данную точку $M(-4;\ 3;\ -8)$ перпендикулярно вектору $\vec{N}$, получим

$$2(x+4)-5(y-3)+7(z+8)=0, \quad \text{или} \quad 2x-5y+7z+79=0.$$

5.73. Найти точку пересечения прямой

$$\frac{x+1}{2}=\frac{y-2}{1}=\frac{z-1}{-1}$$

с плоскостью $3x-2y+z-3=0$.

Решение. Запишем уравнения прямой в параметрическом виде: $x=-1+2t$, $y=2+t$, $z=1-t$. Подставляя значения x, y и z в уравнение плоскости, имеем

$$3(-1+2t)-2(2+t)+(1-t)-3=0,$$

откуда $t=3$. Подставляя теперь это значение t в параметрические уравнения прямой, находим координаты точки пересечения: $x=5$, $y=5$, $z=-2$.

5.74. Найти угол между прямой

$$\frac{x}{2}=\frac{y+1}{-6}=\frac{z-1}{3}$$

и плоскостью $2x+y+z-5=0$.

5.75. Найти угол между прямой

$$\left.\begin{array}{l} x+y+z-24=0, \\ 3x-y+z-26=0 \end{array}\right\}$$

и плоскостью $6x-3y-3z+5=0$.

5.76. Показать, что прямая $(x-2)/5=(y+4)/2=(z-8)/3$ параллельна плоскости $2x+4y-6z+7=0$, а прямая $x=4-t$, $y=5-2t$, $z=3t$ перпендикулярна этой плоскости.

5.77. Найти значение l, при котором прямая $x=3+lt$, $y=-1+4t$, $z=5-9t$ параллельна плоскости $7x-3y+8z-10=0$.

5.78. При каких значениях B и n прямая $x=5-3t$, $y=9+4t$, $z=-2+nt$ перпендикулярна плоскости $6x+By-10z+9=0$?

5.79. Составить уравнение плоскости, проходящей через точку $M(1;\ 2;\ -1)$ перпендикулярно прямой $(x-3)/1=(y-2)/(-3)=(z+1)/4$.

5.80. Написать уравнение плоскости, проходящей через точку $M(-3;\ 5;\ -1)$ и перпендикулярной прямой

$$\left.\begin{array}{l} x-4y+5z-1=0, \\ 2x+\ y-\ z+3=0. \end{array}\right\}$$

5.81. Найти уравнения перпендикуляра к плоскости $8x-3y-z+9=0$, проходящего через точку $M(-2;\ -4;\ 5)$.

5.82. Найти точку пересечения прямой $(x-1)/3=(y+1)/(-1)=(z-2)/5$ с плоскостью $x+y-2z-4=0$.

5.83. Найти точку пересечения прямой

$$\left.\begin{array}{l} 2x-2y-\ z+1=0, \\ 3x-2y-2z\ \ \ \ \ =0 \end{array}\right\}$$

с плоскостью $x+2y+3z-29=0$.

5.84. Составить уравнения перпендикуляра к плоскости $x+4y-8z-4=0$, проходящего через точку $A(3;\ -6;\ 7)$, и найти координаты основания этого перпендикуляра.

5.85. Найти точку, симметричную точке $A(-3;\ 1;\ -9)$ относительно плоскости $4x-3y-z-7=0$.

5.86. Найти проекцию точки $M(-6;\ 5;\ 7)$ на прямую $x=1+3t$, $y=7-2t$, $z=4+t$.

Указание: искомая проекция является точкой пересечения данной прямой и плоскости, проведенной через точку M перпендикулярно этой прямой.

5.87. Найти точку, симметричную точке $A(2;\ -4;\ 5)$ относительно прямой $(x-1)/(-3)=(y+3)/1=(z-3)/(-4)$.

5.88. Показать, что прямая $x=2+2t$, $y=3+t$, $z=-1+3t$ лежит в плоскости $x+y-z-6=0$.

5.89. При каких значениях A и C прямая

$$\frac{x+3}{-7}=\frac{y-2}{4}=\frac{z-1}{3}$$

лежит в плоскости $Ax-5y+Cz+6=0$?

§ 5. ПОВЕРХНОСТИ ВТОРОГО ПОРЯДКА

Поверхностью второго порядка называется поверхность, определяемая в декартовой системе координат уравнением второй степени относительно текущих координат x, y и z. При соответствующем выборе прямоугольной декартовой си-

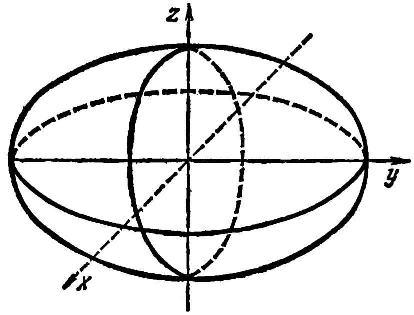


Рис. 35.

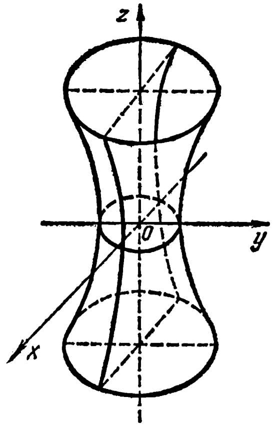


Рис. 36.

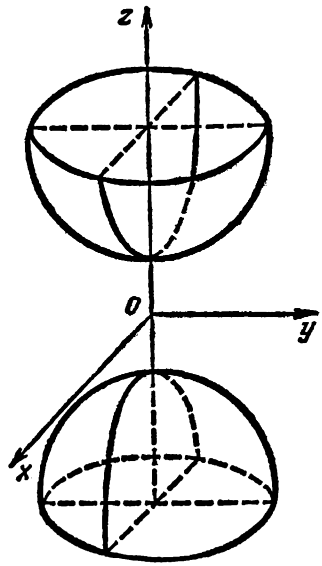


Рис. 37.

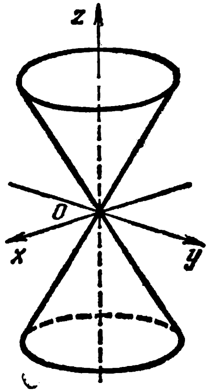


Рис. 38.

стемы координат в пространстве уравнение поверхности второго порядка можно привести к одному из следующих видов:

$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$ (*эллипсоид* *, рис. 35); (1)

$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1$ (*однополостный гиперболоид*, рис. 36); (2)

$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=-1$ (*двуполостный гиперболоид*, рис. 37); (3)

---

* В частности, при $a=b=c=R$ получается уравнение $x^2+y^2+z^2=R^2$ — это уравнение *сферы* с центром в начале координат и радиусом R.

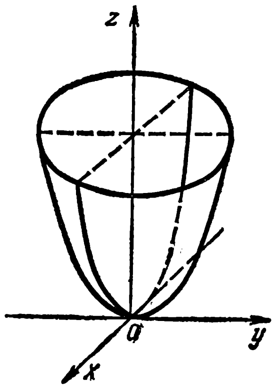


Рис. 39.

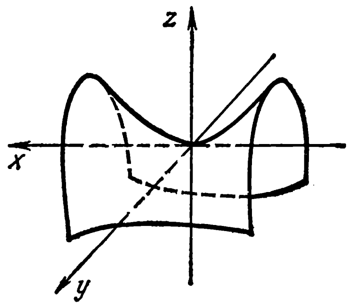


Рис. 40.

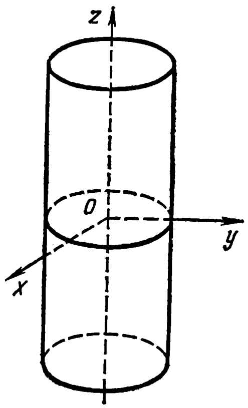


Рис. 41.

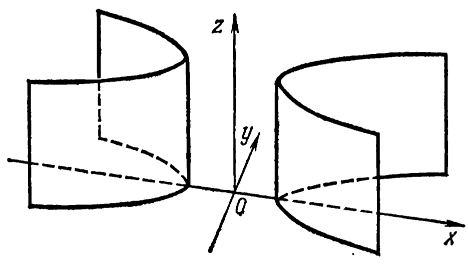


Рис. 42.

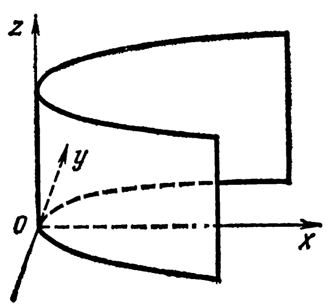


Рис. 43.

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=0 \text{ (\textit{конус}, рис. 38);} \quad (4)$$

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=2z \text{ (\textit{эллиптический параболоид}, рис. 39);} \quad (5)$$

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=2z \text{ (\textit{гиперболический параболоид}, рис. 40);} \quad (6)$$

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1 \text{ (\textit{эллиптический цилиндр}, рис. 41);} \quad (7)$$

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1 \text{ (\textit{гиперболический цилиндр}, рис. 42);} \quad (8)$$

$$y^2=2px \text{ (\textit{параболический цилиндр}, рис. 43).} \quad (9)$$

5.90. Определить, какую поверхность представляет уравнение

$$9x^2+12y^2+4z^2-36=0.$$

Решение. Приведем данное уравнение к простейшему виду; для этого перенесем свободный член вправо и разделим на него все члены уравнения. В результате получим

$$\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{3}+\frac{z^2}{9}=1, \quad \text{или} \quad \frac{x^2}{2^2}+\frac{y^2}{(\sqrt{3})^2}+\frac{z^2}{3^2}=1.$$

Это уравнение определяет эллипсоид с полуосями $a=2$, $b=\sqrt{3}$, $c=3$. Сечения его координатными плоскостями xOy, xOz и yOz (*главные сечения эллипсоида*) дают соответственно эллипсы

$$\left.\begin{aligned}\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{3}&=1,\\ z&=0,\end{aligned}\right\} \quad \left.\begin{aligned}\frac{x^2}{4}+\frac{z^2}{9}&=1,\\ y&=0\end{aligned}\right\} \quad \text{и} \quad \left.\begin{aligned}\frac{y^2}{3}+\frac{z^2}{9}&=1,\\ x&=0.\end{aligned}\right\}$$

5.91. Определить вид поверхности $2x^2+3y^2-6z^2-54=0$.

Решение. Данное уравнение приводится к виду

$$\frac{x^2}{27}+\frac{y^2}{18}-\frac{z^2}{9}=1, \quad \text{или} \quad \frac{x^2}{(3\sqrt{3})^2}+\frac{y^2}{(3\sqrt{2})^2}-\frac{z^2}{3^2}=1.$$

Сравнивая полученное уравнение с уравнением (2), заключаем, что оно представляет однополостный гиперболоид. Его продольная ось расположена на оси Oz и равна $2c=3$.

Найдем линии пересечения исследуемой поверхности с координатными плоскостями — *главные сечения гиперболоида*. В сечении его плоскостью xOy получаем эллипс

$$\left.\begin{aligned}\frac{x^2}{27}+\frac{y^2}{18}&=1,\\ z&=0\end{aligned}\right\}$$

(*горловой эллипс*). При пересечении данного однополостного гиперболоида плоскостями xOz и yOz получаются соответственно гиперболы

$$\left.\begin{aligned}\frac{x^2}{27}-\frac{z^2}{9}&=1,\\ y&=0\end{aligned}\right\} \quad \text{и} \quad \left.\begin{aligned}\frac{y^2}{18}-\frac{z^2}{9}&=1,\\ x&=0.\end{aligned}\right\}$$

5.92. Определить вид поверхности $4x^2-y^2+8z^2+16=0$.

Решение. Данное уравнение преобразуется к виду

$$\frac{x^2}{4}-\frac{y^2}{16}+\frac{z^2}{2}=-1, \quad \text{или} \quad \frac{x^2}{2^2}+\frac{z^2}{(\sqrt{2})^2}-\frac{y^2}{4^2}=-1.$$

Это—уравнение двуполостного гиперболоида, у которого продольная ось находится на оси Oy и равна $2b=4$, а поперечные оси длиной $2a=2$ и $2c=\sqrt{2}$ расположены соответственно на осях Ox и Oz.

Исследуем данную поверхность методом сечений. Очевидно, что плоскости $y=h$ не пересекают поверхности двуполостного гиперболоида при $|h|<4$. При $h=\pm 4$ они касаются его поверхности, а при $|h|>4$ в сечении получаются эллипсы

$$\left.\begin{aligned}\frac{x^2}{4}+\frac{z^2}{2}=\frac{h^2}{16}-1,\\ y=h,\end{aligned}\right\}$$

размеры которых увеличиваются по мере их удаления от плоскости xOz. Координатные плоскости xOy и yOz пересекают данный двуполостный гиперболоид соответственно по гиперболам

$$\left.\begin{aligned}\frac{x^2}{4}-\frac{y^2}{16}=1,\\ z=0\end{aligned}\right\} \text{ и } \left.\begin{aligned}\frac{z^2}{2}-\frac{y^2}{16}=1,\\ x=0.\end{aligned}\right\}$$

5.93. Определить вид поверхности $3x^2+4y^2-24z^2=0$.

Решение. Запишем уравнение поверхности в виде

$$\frac{x^2}{8}+\frac{y^2}{6}-\frac{z^2}{1}=0.$$

Сравнивая полученное уравнение с уравнением (4), заключаем, что оно определяет конус, ось которого совпадает с осью Oz.

Сечения данного конуса плоскостями $z=h$ ($h\neq 0$) дают эллипсы

$$\left.\begin{aligned}\frac{x^2}{8}+\frac{y^2}{6}=h^2,\\ z=h\end{aligned}\right\}$$

с осями $2a=4\sqrt{2}$, $2b=2\sqrt{6}$. Сечение конуса координатной плоскостью yOz (т. е. $x=0$) представляется уравнениями

$$\left.\begin{aligned}\frac{y^2}{6}-\frac{z^2}{1}=0,\\ x=0.\end{aligned}\right\}$$

Таким образом, в плоскости yOz получаются две прямые $y=\pm z\sqrt{6}$. Аналогично, сечение координатной плоскостью xOz определяет в этой плоскости две прямые $x=\pm 2z\sqrt{2}$.

5.94. Определить вид поверхности $16x^2+9y^2-144z=0$.

Решение. Приведя данное уравнение к виду

$$\frac{x^2}{9/2}+\frac{y^2}{8}=2z,$$

заключаем, что оно определяет эллиптический параболоид. При пересечении его плоскостями $z=h$ (где $h>0$) получаются эллипсы

$$\left.\begin{aligned}\frac{x^2}{9/2}+\frac{y^2}{8}=2h,\\ z=h\end{aligned}\right\}$$

с полуосями $a=\sqrt{2h\cdot 9/2}=3\sqrt{h}$ и $b=\sqrt{2h\cdot 8}=4\sqrt{h}$; размеры этих эллипсов увеличиваются по мере их удаления от плоскости xOy. Сечения данного эллиптического параболоида координатными плоскостями xOz и yOz (главные сечения) представляют собой параболы

$$\left.\begin{array}{l} x^2=9z, \\ y=0 \end{array}\right\} \text{ и } \left.\begin{array}{l} y^2=16z, \\ x=0, \end{array}\right\}$$

обращенные вогнутостью в одну сторону (в сторону оси Oz).

5.95. Определить вид поверхности $3x^2-2y^2-24z=0$.

Решение. Данное уравнение приводится к виду

$$\frac{x^2}{4}-\frac{y^2}{6}=2z.$$

Следовательно, оно определяет гиперболический параболоид.

Заметим прежде всего, что при пересечении поверхности гиперболического параболоида координатными плоскостями xOz и yOz получаются соответственно параболы

$$\left.\begin{array}{l} x^2=8z, \\ y=0 \end{array}\right\} \text{ и } \left.\begin{array}{l} y^2=-12z, \\ x=0, \end{array}\right\}$$

которые в отличие от главных сечений эллиптического параболоида (см. предыдущую задачу) обращены вогнутостью в противоположные стороны. Сечение поверхности плоскостью xOy определяет в этой плоскости две прямые $y=\pm x\sqrt{6}/2$. Наконец, плоскости $z=h$, параллельные плоскости xOy, пересекают гиперболический параболоид по гиперболам

$$\left.\begin{array}{r} \dfrac{x^2}{4}-\dfrac{y^2}{6}=2h, \\ z=h, \end{array}\right\}$$

причем при $h>0$ действительная ось этих гипербол параллельна оси Ox, а при $h<0$ действительная ось параллельна оси Oy.

5.96. Определить вид поверхности $2y^2-5z^2-20=0$.

Решение. Записав уравнение поверхности в виде

$$\frac{y^2}{10}-\frac{z^2}{4}=1,$$

заключаем, что оно определяет гиперболический цилиндр с образующими, параллельными оси Ox. При этом направляющей цилиндра служит гипербола $y^2/10-z^2/4=1$, лежащая в плоскости yOz.

5.97. Найти главные сечения эллипсоида $x^2/25+y^2/4+z^2/16=1$ и определить координаты их вершин и длины осей.

5.98. Показать, что плоскость $y+3=0$ пересекает эллипсоид $x^2/4+y^2/25+z^2/64=1$ по эллипсу; найти его полуоси и вершины.

5.99. Найти главные сечения однополостного гиперболоида $x^2/24+y^2/16-z^2/15=1$ и линии пересечения его с плоскостями $y+2=0$ и $z-3=0$.

5.100. В каких точках прямая $x/3=(y-8)/2=z/4$ пересекает однополостный гиперболоид $x^2/36-y^2/16+z^2/64$?

5.101. Показать, что плоскость $y-8=0$ пересекает гиперболический параболоид $x^2/81-y^2/16=4z$ по параболе; найти ее параметр и вершину.

5.102. Составить уравнение множества точек, одинаково удаленных от точки $F(0;\ 0;\ 4)$ и от плоскости $z+4=0$.

В задачах **5.103—5.118** определить вид заданных поверхностей. Исследовать эти поверхности методом сечений и схематически построить их.

5.103. $x^2+2y^2-6z^2=0$.

5.104. $x^2+3y^2-9z=0$.

5.105. $3x^2+2y^2-4z^2+12=0$.

5.106. $4x^2+y^2=9$.

5.107. $3x^2-4y^2+24z=0$.

5.108. $x^2+4y^2+8z^2-16=0$.

5.109. $x^2+14y=0$.

5.110. $10x^2+5y^2-2z^2-50=0$.

5.111. $4y^2+z^2+8x=0$.

5.112. $4z^2-5y^2+40=0$.

5.113. $x^2-9y^2-4z^2+1=0$.

5.114. $z^2-6y^2=12x$.

5.115. $6x^2-y^2+4z^2=0$.

5.116. $z^2=4y-1$.

5.117. $4x^2-12y^2-6z^2=12$.

5.118. $z=4-x^2-y^2$.

ГЛАВА 6

ФУНКЦИИ

§ 1. ПОНЯТИЕ ФУНКЦИИ

1. Абсолютная величина действительного числа. *Действительными* (или *вещественными*) числами называются числа рациональные и иррациональные.

Абсолютной величиной (или *модулем*) действительного числа a называется неотрицательное число $|a|$, определяемое следующим образом:

$$|a|=\begin{cases} a, \text{ если } a>0; \\ -a, \text{ если } a<0; \\ 0, \text{ если } a=0. \end{cases}$$

2. Числовые промежутки. *Числовым множеством* называется любое множество, элементами которого служат действительные числа. Наиболее важными и часто встречающимися числовыми множествами являются *числовые промежутки*:

1) *замкнутый промежуток* (*отрезок*) $[a, b]$ — множество действительных чисел, удовлетворяющих двойному неравенству $a \leqslant x \leqslant b$;

2) *открытый промежуток* (*интервал*) $]a, b[$ — множество действительных чисел, удовлетворяющих двойному неравенству $a<x<b$;

3) *полуоткрытые промежутки* $]a, b]$, $[a, b[$ — множества действительных чисел, удовлетворяющих соответственно двойному неравенству $a<x\leqslant b$ или $a\leqslant x<b$;

4) *бесконечные промежутки* (*лучи числовой прямой*) $]a, +\infty[$, $[a, +\infty[$, $]-\infty, b[$, $]-\infty, b]$ — множества действительных чисел, удовлетворяющих соответственно неравенствам $a<x<+\infty$, $a\leqslant x<+\infty$, $-\infty<x<b$, $-\infty<x\leqslant b$;

5) *бесконечный промежуток* (*числовая прямая*) $]-\infty, +\infty[$ — множество действительных чисел, удовлетворяющих неравенству $-\infty<x<+\infty$.

Окрестностью данной точки x_0 называется произвольный интервал $]a, b[$, содержащий эту точку, т. е. такой, что $a<x_0<b$. Интервал $]x_0-\delta, x_0+\delta[$ называется *δ-окрестностью* точки x_0 и обозначается $U_\delta(x_0)$. Обычно x_0 называется *центром* окрестности, а δ — ее *радиусом*.

3. Понятие функции. Если даны два множества A и A' и каждому элементу $a\in A$ поставлен в соответствие один и только один элемент $a'\in A'$, то говорят, что задано *отображение* f множества A в множество A'. При этом пишут $A \overset{f}{\Longrightarrow} A'$ или $f: A \Longrightarrow A'$. Элемент a' называется *образом* элемента a при отображении f; это записывается так: $a \overset{f}{\longrightarrow} a'$ или $a'=f(a)$.

Пусть X — числовое множество. Отображение, сопоставляющее каждому числу $x\in X$ число y, называется *функцией*, заданной на X. Это записывается следующим образом: $y=f(x)$.

Переменная x называется *независимой переменной* (или *аргументом*), а y — *зависимой переменной* (или *функцией*).

Множество X называется *областью определения* функции, а множество Y, состоящее из всех чисел вида $f(x)$, где $x\in X$, — *множеством значений* функции. Область определения функции f обозначается через $D(f)$, а множество ее значений — через $E(f)$.

Если нужно указать значение y_0, соответствующее некоторому значению x_0, то пишут $y_0=f(x_0)$.

Графиком функции $y=f(x)$ называется множество точек на плоскости xOy с координатами $(x; f(x))$, где $x\in X$.

Если указана совокупность операций, которые надо совершить над аргументом x, чтобы получить значение функции, то говорят, что функция задана *явным аналитическим выражением*. Одно и то же аналитическое выражение определяет различные функции в зависимости от области определения X. В том случае, когда область определения не указана явно, считают, что функция задана для всех значений аргумента, при которых возможны все указанные действия.

Функция $y=f(x)$ задана *неявно*, если дано уравнение, связывающее функцию y и аргумент x, не разрешенное относительно y.

4. Классификация функций по их свойствам.

1) Числовое множество X называется *симметричным относительно начала координат*, если вместе с каждым числом x оно содержит противоположное ему число $-x$.

Функция $y=f(x)$, заданная на симметричном относительно начала координат множестве X, называется *четной*, если для любого $x \in X$ выполняется равенство

$$f(-x)=f(x).$$

Функция $y=f(x)$, заданная на симметричном относительно начала координат множестве X, называется *нечетной*, если для любого $x \in X$ выполняется равенство

$$f(-x)=-f(x).$$

График четной функции симметричен относительно оси ординат, а график нечетной функции симметричен относительно начала координат.

2) Функция $y=f(x)$ называется *периодической* с периодом T, если при всех x, принадлежащих области определения функции, выполняется равенство $f(x+T)=f(x)$. Наименьшее число T, обладающее указанным свойством, называется *основным периодом* функции.

При построении графика периодической функции достаточно построить этот график на промежутке $[0, T[$, а затем сдвинуть его на $\pm T$, $\pm 2T$, ... вдоль оси абсцисс.

3) Функция $y=f(x)$ называется *возрастающей* в некотором промежутке X, если в этом промежутке каждому большему значению аргумента соответствует большее значение функции, т. е. из условия $x_1 < x_2$ следует, что $f(x_1) < f(x_2)$ для любых x_1 и x_2 из данного промежутка X:

$$(\forall x_1,\ x_2 \in X)\ x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2).$$

Аналогичным образом, функция $y=f(x)$ называется *убывающей* в некотором промежутке X, если из условия $x_1 < x_2$ следует, что $f(x_1) > f(x_2)$ для любых x_1 и x_2 из данного промежутка X:

$$(\forall x_1,\ x_2 \in X)\ x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) > f(x_2).$$

Возрастающие и убывающие функции называются *монотонными*.

4) Функция $y=f(x)$ называется *ограниченной* в своей области определения X, если существует такое число $M > 0$, что для всех $x \in X$ значения $f(x)$ по абсолютной величине не превосходят этого числа M, т. е. $|f(x)| \leqslant M$:

$$(\exists M > 0)\ (\forall x \in X)\ |f(x)| \leqslant M.$$

В противном случае функция называется *неограниченной*.

5. Сложная функция. Если y является функцией от переменной u, заданной явным аналитическим выражением $y=f(u)$, а u, в свою очередь,— функцией от переменной x, также заданной явным аналитическим выражением $u=\varphi(x)$, то заменяя u на $\varphi(x)$ в выражении $f(u)$, получим так называемую *сложную функцию* (или *функцию от функции*) $y=f[\varphi(x)]$.

6. Обратная функция. Пусть $X \overset{f}{\Rightarrow} Y$ — отображение множества X на * множество Y, при котором различные элементы множества X переходят в различные элементы множества Y: $x_1 \neq x_2 \longrightarrow f(x_1) \neq f(x_2)$. Если $y \in Y$, то существует один и только один элемент $x \in X$ такой, что $y=f(x)$. Отображение $Y \Rightarrow X$ называют *обратным* по отношению к отображению f и обозначают f^{-1}. Ясно, что если $y=f(x)$, то $x=f^{-1}(y)$, а если $x=f^{-1}(y)$, то $y=f(x)$.

Пусть на множестве X задана монотонная функция $y=f(x)$, определяющая отображение f числового множества X на числовое множество Y. Обратное отображение f^{-1} определяет *обратную функцию* $x=f^{-1}(y)$. Так как переход от функции $y=f(x)$ к обратной ей функции $x=f^{-1}(y)$ сводится лишь к изменению ролей множеств X и Y, то графики функций $y=f(x)$ и $x=f^{-1}(y)$ совпадают. Но, как правило, для обратной функций аргумент обозначают через x, а значение функции — через y, т. е. записывают ее в виде $y=f^{-1}(x)$. Графики функций $y=f(x)$ и $y=f^{-1}(x)$ симметричны относительно прямой $y=x$.

---

* Говорят, что f отображает X на Y (а не в Y), если каждый элемент из Y является образом некоторого элемента из X.

6.1. Определить промежутки изменения переменной величины x, заданные следующими неравенствами:

$$1)\ x^2 \leqslant 9; \quad 2)\ |x-2| > 1; \quad 3)\ -9 < 3-2x \leqslant 5.$$

Решение. 1) Извлекая квадратный корень из обеих частей неравенства, имеем $|x| \leqslant 3$, откуда следует, что $-3 \leqslant x \leqslant 3$. Полученное двойное неравенство определяет на числовой оси замкнутый промежуток $[-3, 3]$, симметричный относительно $x=0$.

2) Освобождаясь от знака модуля в данном неравенстве, получим два неравенства: $x-2 < -1$ и $x-2 > 1$. Решая каждое из них, найдем $x < 1$ и $x > 3$. Следовательно, область изменения переменной x состоит из совокупности двух бесконечных промежутков: $]-\infty, 1[\cup]3, +\infty[$.

3) Для решения данного двойного неравенства вычтем из всех его частей по 3 и разделим их на -2:

$$-12 \leqslant -2x \leqslant 2; \quad -1 \leqslant x < 6.$$

Таким образом, область изменения величины x представляет собой полуоткрытый промежуток $[-1, 6[$.

6.2. Вычислить частные значения функций:

$$1)\ f(x) = \sqrt{x^2+4x-5} \text{ при } x=3; \text{ при } x=a-2;$$
$$2)\ \varphi(x) = \sin 3x - 4\cos 2x \text{ при } x=\pi/4; \text{ при } x=\pi/2;$$
$$3)\ \psi(x) = 3\arcsin x + 2\operatorname{arctg} 2x \text{ при } x=-1/2.$$

Решение. 1) Подставляя значение $x=3$, получим соответствующее частное значение функции $f(x)$:

$$f(3) = \sqrt{3^2+4\cdot 3-5} = \sqrt{16} = 4.$$

Аналогичным образом, при подстановке значения $x=a-2$ находим

$$f(a-2) = \sqrt{(a-2)^2+4(a-2)-5} = \sqrt{a^2-9}.$$

2) При $x=\pi/4$ и $x=\pi/2$ соответственно получаем

$$\varphi(\pi/4) = \sin(3\pi/4) - 4\cos(\pi/2) = \sqrt{2}/2;$$
$$\varphi(\pi/2) = \sin(3\pi/2) - 4\cos\pi = -1+4 = 3.$$

3) Подставляя значение $x=-1/2$, находим

$$\psi(-1/2) = 3\arcsin(-1/2) + 2\operatorname{arctg}(-1) = 3(-\pi/6) + 2(-\pi/4) = -\pi.$$

6.3. Найти области определения функций:

$$1)\ y = \sqrt{x+6} - \sqrt{4-x}; \quad 2)\ y = \sqrt{x^2-7x+12} + \frac{2x-3}{x-5};$$
$$3)\ y = \lg(8x-x^2); \quad 4)\ y = \arcsin\frac{1-4x}{5}.$$

Решение. 1) Область определения данной функции состоит из тех значений x, при которых оба слагаемых принимают действительные значения. Поэтому выражения, стоящие под знаком квадратного корня, должны быть неотрицательны. Решая систему неравенств

$$\left.\begin{array}{l} x+6 \geqslant 0, \\ 4-x \geqslant 0, \end{array}\right\}$$

получаем $-6 \leqslant x \leqslant 4$. Следовательно, областью определения данной функции служит замкнутый промежуток $[-6, 4]$, т. е. $D(y) = [-6, 4]$.

2) Так как выражение, стоящее под знаком корня, должно быть неотрицательным, а знаменатель во втором слагаемом не должен обращаться в нуль, то необходимо, чтобы

$$\left.\begin{aligned} x^2-7x+12 \geqslant 0, \\ x-5 \neq 0. \end{aligned}\right\}$$

Решая квадратное неравенство, получим $x \leqslant 3$ и $x \geqslant 4$. Таким образом, область определения данной функции состоит из совокупности трех промежутков: $D(y) =]-\infty, 3] \cup [4, 5[\cup]5, +\infty[$.

3) Выражение, стоящее под знаком логарифма, должно быть положительным. Решая неравенство $8x-x^2 > 0$, получим $0 < x < 8$; областью определения функции является открытый промежуток $]0, 8[$.

4) Данная функция определена только при тех значениях x, для которых выполнено двойное неравенство

$$-1 \leqslant \frac{1-4x}{5} \leqslant 1.$$

Решая его, получим

$$-5 \leqslant 1-4x \leqslant 5; \quad -6 \leqslant -4x \leqslant 4; \quad -1 \leqslant x \leqslant 3/2.$$

Итак, область определения заданной функции — замкнутый промежуток $[-1, 3/2]$.

6.4. Найти множества значений функций:

$$1)\ y = -x^2+6x-4; \qquad 2)\ y = 1+2\cos x.$$

Решение. 1) Выделяя полный квадрат из квадратного трехчлена, получим

$$y = -(x^2-6x+9)+5 = -(x-3)^2+5.$$

Так как первое слагаемое является неположительным числом, то отсюда видно, что функция y принимает значения, не превосходящие 5. Следовательно, множество значений данной функции — бесконечный промежуток $]-\infty, 5]$, т. е. $E(y) =]-\infty, 5]$.

2) Учитывая, что косинус принимает значения, не превосходящие по модулю единицы, запишем неравенство $|\cos x| \leqslant 1$, или $-1 \leqslant \cos x \leqslant 1$. Умножая все части последнего двойного неравенства на 2 и прибавляя к ним по 1, получим

$$-2 \leqslant 2\cos x \leqslant 2; \quad -1 \leqslant 1+2\cos x \leqslant 3.$$

Таким образом, $E(y) = [-1, 3]$.

6.5. Установить четность или нечетность функций:

$$1)\ f(x) = x^3\cos 5x; \qquad 2)\ f(x) = \frac{1}{2}(3^x+3^{-x});$$

$$3)\ f(x) = x^2-4x+1; \qquad 4)\ f(x) = \lg\frac{2+x}{2-x}.$$

Решение. В рассматриваемых примерах область определения каждой из функций симметрична относительно начала координат: в первых трех примерах $D(f) =]-\infty, +\infty[$, в четвертом примере $D(f) =]-2, 2[$.

1) Заменяя x на $-x$, получим

$$f(-x) = (-x)^3\cos 5(-x) = -x^3\cos 5x = -f(x).$$

Следовательно, данная функция нечетная.

2) Имеем

$$f(-x) = \frac{1}{2}(3^{-x}+3^x) = f(x),$$

т. е. исследуемая функция является четной.

3) В этом случае

$$f(-x) = (-x)^2-4(-x)+1 = x^2+4x+1.$$

Таким образом, здесь $f(-x) \neq f(x)$ и $f(-x) \neq -f(x)$. Поэтому данная функция не четная и не нечетная.

4) Находим

$$f(-x) = \lg \frac{2-x}{2+x} = \lg \left(\frac{2+x}{2-x}\right)^{-1} = -\lg \frac{2+x}{2-x} = -f(x).$$

Следовательно, данная функция является нечетной.

6.6. Найти основные периоды функций:

$$1)\ f(x) = \sin 6x; \quad 2)\ f(x) = \cos 12x + \operatorname{tg} 4x.$$

Решение. 1) Так как основной период функции $\sin x$ равен 2π, то основной период функции $f(x) = \sin 6x$ равен $2\pi/6$, т. е. $\pi/3$.

2) Основной период первого слагаемого ($\cos 12x$) равен $2\pi/12 = \pi/6$, а основной период второго ($\operatorname{tg} 4x$) равен $\pi/4$. Очевидно, что основной период данной функции есть наименьшее общее кратное чисел $\pi/6$ и $\pi/4$, т. е. $\pi/2$. В самом деле, имеем

$$f(x+\pi/2) = \cos 12(x+\pi/2) + \operatorname{tg} 4(x+\pi/2) =$$
$$= \cos(12x+6\pi) + \operatorname{tg}(4x+2\pi) = \cos 12x + \operatorname{tg} 4x = f(x).$$

6.7. Найти промежутки возрастания и убывания, а также наибольшее и наименьшее значения следующих функций:

$$1)\ f(x) = -2x^2 + 7x - 5; \quad 2)\ f(x) = \sin x - \cos x.$$

Решение. 1) Выделяя полный квадрат из квадратного трехчлена, имеем

$$f(x) = -2\left(x^2 - \frac{7}{2}x + \frac{5}{2}\right) = -2\left[\left(x - \frac{7}{4}\right)^2 - \frac{49}{16} + \frac{5}{2}\right] = -2\left(x - \frac{7}{4}\right)^2 + \frac{9}{8}.$$

Отсюда следует, что функция $f(x)$ возрастает при тех значениях x, для которых $x < 7/4$, т. е. при $x \in]-\infty, 7/4[$, и убывает при тех значениях x, для которых $x > 7/4$, т. е. при $x \in]7/4, +\infty[$. Очевидно, что при $x = 7/4$ функция $f(x)$ принимает наибольшее значение $f_{\max} = 9/8$. Наименьшее значение данная функция не принимает.

2) Используя известные тригонометрические формулы, находим

$$f(x) = \sin x - \cos x = \sin x + \sin(x - \pi/2) = \sqrt{2} \sin(x - \pi/4).$$

Так как функция $\sin x$ возрастает на каждом промежутке $-\pi/2 + 2\pi k < x < \pi/2 + 2\pi k$ и убывает на каждом промежутке $\pi/2 + 2\pi k < x < 3\pi/2 + 2\pi k$ (где $k \in \mathbb{Z}$), то отсюда следует, что данная функция возрастает при $x \in]-\pi/4 + 2\pi k, 3\pi/4 + 2\pi k[$ и убывает при $x \in]3\pi/4 + 2\pi k, 7\pi/4 + 2\pi k[$, $k \in \mathbb{Z}$.

Наибольшее значение функции $f(x)$, равное $\sqrt{2}$, достигается в точках $x = 3\pi/4 + 2\pi k$, а ее наименьшее значение, равное $-\sqrt{2}$, — в точках $x = -\pi/4 + 2\pi k$.

6.8. Сложные функции, заданные цепочкой равенств, записать в виде одного равенства:

$$1)\ y = u^3,\ u = 4x - 1; \quad 2)\ y = \lg u,\ u = \sqrt[5]{v},\ v = \cos x;$$
$$3)\ y = \sin u,\ u = \operatorname{arctg} v,\ v = 3 + w^2,\ w = \sqrt{x-2}.$$

Решение. 1) Исключая из данных равенств промежуточный аргумент u, находим $y = (4x-1)^3$.

2) В данном случае сложная функция y содержит два промежуточных аргумента: u и v. Последовательно исключая их, получим

$$y = \lg u = \lg \sqrt[5]{v} = \lg \sqrt[5]{\cos x} = \frac{1}{5} \lg \cos x.$$

3) Аналогичным образом находим

$$y = \sin u = \sin \operatorname{arctg} v = \sin \operatorname{arctg}(3 + w^2) = \sin \operatorname{arctg}[3 + (x-2)] = \sin \operatorname{arctg}(x+1).$$

6.9. Для данных функций найти обратные. Построить графики прямой и обратной функций:

$$1)\ y=4-3x;\qquad 2)\ y=2^{x+1}.$$

Решение. 1) Так как данная функция $y=f(x)=4-3x$ определена и убывает на всей числовой оси, то обратная для нее функция существует и также

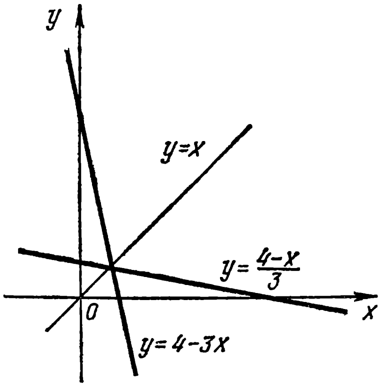


Рис. 44.

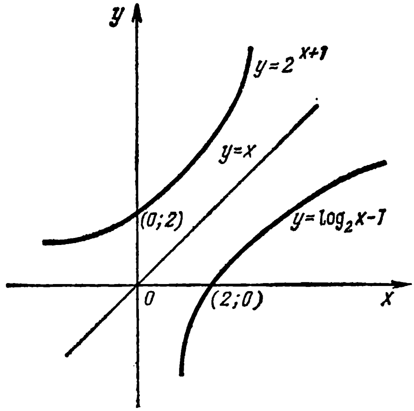


Рис. 45.

убывает при всех x. Разрешая уравнение $y=4-3x$ относительно x, получим обратную функцию $x=f^{-1}(y)=(4-y)/3$. Обозначив ее аргумент через x, а функцию — через y, построим графики функций $y=4-3x$ и $y=(4-x)/3$ в одной и той же системе координат (рис. 44); они симметричны относительно биссектрисы I и III координатных углов.

2) Данная функция $y=f(x)=2^{x+1}$ определена и возрастает при всех x; следовательно, обратная функция существует и возрастает также при всех x. Найдем эту функцию. Логарифмируя равенство $2^{x+1}=y$ по основанию 2, получим $x+1=\log_2 y$, или $x=f^{-1}(y)=\log_2 y-1$. Возвращаясь к общепринятым для аргумента и функции обозначениям и построив графики функций $y=2^{x+1}$ и $y=\log_2 x-1$, убеждаемся в том, что они симметричны относительно прямой $y=x$ (рис. 45).

6.10. Определить и построить на числовой оси промежутки изменения переменной x, заданные неравенствами:

$$1)\ |x|>4;\quad 2)\ (x-1)^2\leqslant 1;\quad 3)\ -4\leqslant x+2<5;$$
$$4)\ -3\leqslant 2-5x<8.$$

6.11. Дано $f(x)=x^2-4x+1$. Найти $f(0)$, $f(3)$, $f(4)$, $f(-1)$, $f(2-\sqrt{3})$, $f(a-1)$, $f(a)-1$, $f(a^2)$, $[f(a)]^2$.

6.12. Дано $\varphi(x)=(x+3)/(2x^2-1)$. Найти $\varphi(0)$, $\varphi(-1/2)$, $\varphi(-x)$, $\varphi(2x)$, $\varphi(1/x)$, $1/\varphi(x)$.

6.13. Дано $F(x)=\lg x$, $\Phi(x)=x^2-1$. Найти $F[\Phi(3)]$, $F[\Phi(\sqrt{a+1})]$, $\Phi[F(0{,}1)]$, $\Phi[F(100)]$, $F[F(1000)]$, $\Phi[\Phi(4)]$.

6.14. Пусть $f(x)=5(x-2)^4+\cos(x-2)$. Показать, что $f(2-a)=$ $=f(2+a)$.

6.15. Показать, что если $f(x)=4^x$, то $f(x+2)-6f(x+1)+$ $+8f(x)=0$.

6.16. Найти область определения каждой из следующих функций:

$$1)\ y=\sqrt{x^2+9x};\quad 2)\ y=\sqrt{3-x}+\lg(x+5);$$
$$3)\ y=\sqrt{8x-x^2-12}+\frac{1}{25-x^2};\quad 4)\ y=\sqrt{2-\lg x};$$
$$5)\ y=\lg(1-8x)+\lg(3x+2);\quad 6)\ y=\sqrt{\lg(4x-x^2)};$$
$$7)\ y=\frac{3}{1+\lg(6-x)};\quad 8)\ y=\lg\lg(x^2-x+1);\quad 9)\ y=\arcsin(1-2x);$$
$$10)\ y=\arccos\frac{5x+2}{4};\quad 11)\ y=\sqrt{\sin x};\quad 12)\ y=\sqrt{2\cos x-1}.$$

6.17. Совпадают ли области определения функций:

$$1)\ f(x)=\frac{1}{x^2-3x+10}\ \text{и}\ g(x)=\sqrt{(x+5)(x-2)};$$
$$2)\ f(x)=\sqrt{x}\sqrt{x-5}\ \text{и}\ g(x)=\sqrt{x(x-5)};$$
$$3)\ f(x)=\frac{1}{\sqrt{x(x-10)(x-0{,}1)}}\ \text{и}\ g(x)=\frac{1}{\lg^2 x-1};$$
$$4)\ f(x)=\arcsin(1-x)\ \text{и}\ g(x)=\sqrt{2x-x^2}?$$

6.18. Найти множество значений каждой из следующих функций:

$$1)\ y=|x|;\quad 2)\ y=2-|x|;\quad 3)\ y=3/x;\quad 4)\ y=-1/x^2;$$
$$5)\ y=x^2-8x+13;\quad 6)\ y=\sqrt{25-x^2};\quad 7)\ y=3-4\sin x;$$
$$8)\ y=\pi+2\arccos x;\quad 9)\ y=2^{-x^2};\quad 10)\ y=\lg\cos x.$$

6.19. Установить четность или нечетность функций:

$$1)\ y=x\sin 6x;\quad 2)\ y=4x-5\sqrt[3]{x};\quad 3)\ y=|x|-1;$$
$$4)\ y=|x-1|;\quad 5)\ y=\lg\sin x;\quad 6)\ y=\sin\cos x;$$
$$7)\ y=\frac{25^x-1}{5^x};\quad 8)\ y=\lg\left(x+\sqrt{x^2+1}\right).$$

6.20. Найти основной период каждой из функций:

$$1)\ y=\cos 4x;\quad 2)\ y=\sin^2 3x;\quad 3)\ y=\operatorname{tg} 2\pi x;\quad 4)\ y=\cos\sin x;$$
$$5)\ y=\sin 2x+\operatorname{ctg} 4x;\quad 6)\ y=\operatorname{tg} 9x+\cos 12x.$$

6.21. Определить, какие из заданных функций являются периодическими, и найти их основные периоды *;

$$1)\ y=x\cos x;\quad 2)\ y=\arcsin\sin x;\quad 3)\ y=\lg|\sin x|;$$
$$4)\ y=\cos x^2;\quad 5)\ y=|x|;\quad 6)\ y=\{x\}.$$

---

* Функция $f(x)=[x]$, называемая *целой частью* числа x, определяется следующим образом:

$$f(x)=n \text{ при } x\in[n,\ n+1[,$$

где n — целое число.

Функция $f(x)=\{x\}$, называемая *дробной частью* числа x, определяется так:

$$f(x)=x-n \text{ при } x\in[n,\ n+1[.$$

6.22. Для указанных ниже функций найти промежутки возрастания и убывания, а также наибольшее и наименьшее значения (если они существуют):

1) $y=2x^2-8x+13$; 2) $y=-x^2-12x-32$;
3) $y=-1/x$; 4) $y=1+2^{-x}$;
5) $y=\sin x+\cos x$; 6) $y=1/\sin x$.

6.23. Записать в явном виде функции, заданные неявно следующими уравнениями:

1) $xy=15$; 2) $x^2+y^2=4$; 3) $x^2/9-y^2/4=1$;
4) $3^{x+y}=10$; 5) $\lg x+\lg y=4$; 6) $x+\arcsin y=\pi$.

6.24. Записать в виде одного равенства сложные функции, заданные цепочкой равенств:

1) $y=u^5$, $u=4-3x$;
2) $y=1/u^4$, $u=\operatorname{tg} x$;
3) $y=\sqrt{u}$, $u=\lg v$, $v=\sin x$;
4) $y=2^u$, $u=-\cos v$, $v=5x+1$;
5) $y=\lg u$, $u=\operatorname{arctg} v$, $v=\sqrt{w}$, $w=x^2-1$.
6) $y=\arcsin u$, $u=v^2$, $v=\lg w$, $w=1/x$;
7) $y=1/(u-1)$, $u=v^2$, $v=\sin w$, $w=2x+3$.

6.25. Указанные ниже сложные функции записать с помощью промежуточных аргументов:

1) $y=(6x-5)^7$; 2) $y=\sqrt{x^2-4}$;
3) $y=\lg\cos x$; 4) $y=\sin\sqrt[3]{x-6}$;
5) $y=2^{\operatorname{arctg} x^2}$; 6) $y=\dfrac{1}{\cos^2(x+\pi/4)}$;
7) $y=\arcsin(3^{\operatorname{tg}\sqrt{x}})$; 8) $y=\sqrt{\lg\operatorname{ctg}(1-2x)}$.

6.26. Для заданных ниже функций найти обратные и построить соответствующие графики:

1) $y=2x-7$; 2) $y=1/(x-4)$; 3) $y=5^x$;
4) $y=\lg(x+1)$; 5) $y=\sin(x/2)$; 6) $y=\operatorname{arctg} 3x$.

6.27. Убедиться в том, что функция $y=(3x+5)/(2x-3)$ совпадает со своей обратной.

§ 2. ПОСТРОЕНИЕ ГРАФИКОВ ФУНКЦИЙ

При построении графиков функций обычно применяются следующие приемы: 1) построение «по точкам»; 2) действия с графиками (сложение, вычитание, умножение и деление графиков); 3) преобразования графиков (параллельный перенос, растяжение или сжатие, зеркальное отображение).

Приведем **правила простейших преобразований графиков.**

I. График функции $y=f(x-a)$ получается из графика функции $y=f(x)$ сдвигом его вдоль оси Ox на a единиц (вправо при $a>0$ и влево при $a<0$).

II. График функции $y=f(x)+b$ получается из графика функции $y=f(x)$ сдвигом его вдоль оси ординат (вверх при $b>0$ и вниз при $b<0$).

III. График функции $y=f(kx)$ (где $k>0$) получается из графика функции $y=f(x)$ сжатием к оси Oy в k раз при $k>1$ и растяжением от оси Oy в $1/k$ раз при $k<1$.

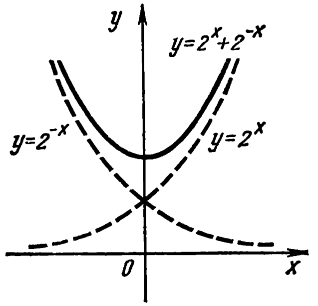


Рис. 46.

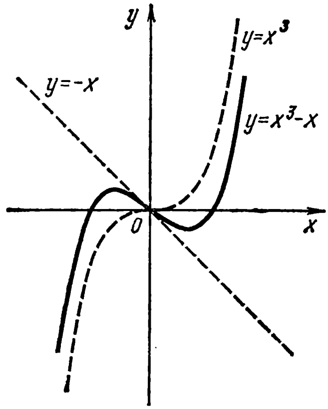


Рис. 47.

IV. График функции $y=\lambda f(x)$ (где $\lambda>0$) получается из графика функции $y=f(x)$ растяжением от оси Ox в λ раз при $\lambda>1$ и сжатием к оси Ox в $1/\lambda$ раз при $\lambda<1$.

V. График функции $f(-x)$ получается из графика функции $y=f(x)$ симметричным отображением относительно оси Oy.

VI. График функции $y=-f(x)$ получается из графика функции $y=f(x)$ симметричным отображением относительно оси Ox.

VII. График функции $|f(x)|$ получается из графика функции $y=f(x)$ следующим образом: часть графика $y=f(x)$, лежащая над осью Ox, остается без изменения, а часть его, лежащая под осью Ox, отображается симметрично относительно оси Ox.

VIII. График функции $f(|x|)$ получается из графика функции $y=f(x)$ следующим образом: для $x\geqslant 0$ часть графика $y=f(x)$ сохраняется, а затем эта часть отображается симметрично относительно оси Oy.

6.28. Построить графики следующих функций:

1) $y=2^x+2^{-x}$; 2) $y=x^3-x$; 3) $y=x\sin x$; 4) $y=\frac{x}{x^2-4}$.

Решение. 1) Представим данную функцию как сумму двух функций $y_1=2^x$ и $y_2=2^{-x}$ и построим графики y_1 и y_2 (пунктирные линии на рис. 46). Тогда, складывая соответствующие ординаты графиков функций-слагаемых, получим график суммы (сплошная линия на рис. 46).

2) Полагая $y_1=x^3$ и $y_2=-x$, построим графики функций y_1 и y_2. График искомой функции получается путем геометрического сложения соответствующих ординат графиков y_1 и y_2 (рис. 47).

3) Так как данная функция представляет собой произведение двух нечетных функций, то она является четной; поэтому достаточно построить ее график при $x \geqslant 0$. Сначала построим графики функций $y_1 = x$ и $y_2 = \sin x$ (пунктирные линии на рис. 48). Очевидно, что в точках, где $y_2 = \sin x = 0$, имеем $y = y_1 y_2 = 0$; в точках, где $y_2 = \sin x = 1$, получаем $y = y_1 y_2 = y_1$; наконец, в точках, где $y_2 = \sin x = -1$, имеем $y = y_1 y_2 = -y_1 = -x$ (т. е. соответствующие точки искомого гра-

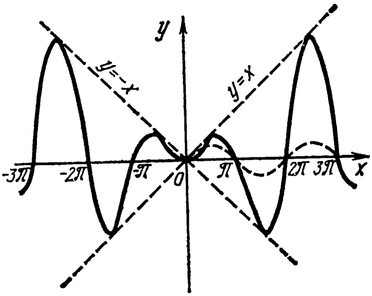


Рис. 48.

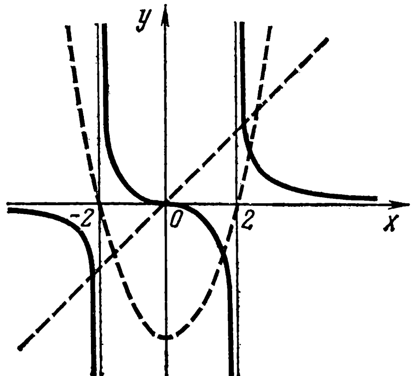


Рис. 49.

фика лежат на прямой $y = -x$). Соединяя найденные точки плавной кривой и отображая ее симметрично относительно оси Oy, получаем искомый график (сплошная линия на рис. 48).

4) Поскольку функция нечетная, достаточно исследовать ее при $x \geqslant 0$. Будем рассматривать данную функцию как частное функций $y_1 = x$ и $y_2 = x^2 - 4$. Заметим, что при $x = 2$ знаменатель $y_2 = 0$, поэтому функция y в точке $x = 2$ не определена. Если $x \to 2$ так, что $x < 2$, то $y \to -\infty$; если же $x \to 2$ так, что $x > 2$, то $y \to +\infty$. Наконец, если $x \to +\infty$, то $y \to 0$ (при этом $y > 0$). Общий вид графика изображен на рис. 49.

6.29. Исходя из графика функции $y = \sqrt{x}$, путем его деформаций и сдвигов построить график функции

$$y = 2\sqrt{-3(x-2,5)} - 1,8.$$

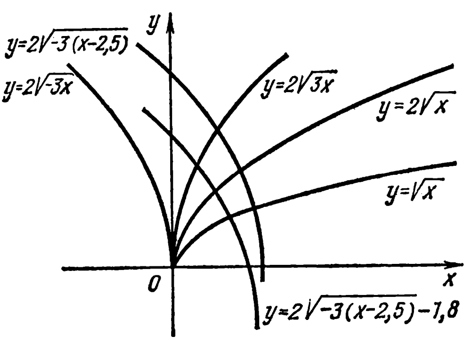


Рис. 50.

Решение. Преобразуем последовательно график функции $y = \sqrt{x}$ следующим образом:

а) увеличивая в 2 раза ординаты точек исходного графика и сохраняя неизменными их абсциссы, получаем график функции $y = 2\sqrt{x}$ (правило IV):

б) уменьшая в 3 раза абсциссы точек графика функции $y = 2\sqrt{x}$ и сохраняя неизменными их ординаты, получаем график функции $y = 2\sqrt{3x}$ (правило III);

в) с помощью зеркального отображения последнего графика относительно оси Oy строим график функции $y = 2\sqrt{-3x}$ (правило V);

г) перенося график функции $y = 2\sqrt{-3x}$ на 2,5 единицы вправо и на 1,8 единиц вниз (правила I и II), получим искомый график $y = 2\sqrt{-3(x-2,5)} - 1,8$ (рис. 50).

6.30. Исходя из графика функции $y=x^2-4x+3$ (рис. 51, *а*), построить графики функций:

1) $y=|x^2-4x+3|$; 2) $y=x^2-4|x|+3$; 3) $y=|x^2-4|x|+3|$.

Решение. 1) На основании правила VII чтобы из графика $y=f(x)$ получить график $y=|f(x)|$, оставляем без изменения часть графика $y=f(x)$, лежа-

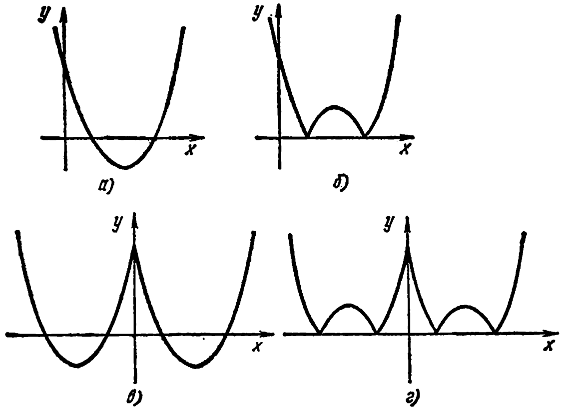


Рис. 51.

щую над осью Ox, а ту его часть, которая лежит над осью Ox, отображаем симметрично относительно этой оси. Полученная кривая изображена на рис. 51, *б*.

2) Так как $x^2=|x|^2$, то функцию можно записать в виде $y=|x|^2-4|x|+3$. Следовательно, нужно построить график $y=f(|x|)$ по данному графику $y=f(x)$; для этого в соответствии с правилом VIII оставляем без изменения часть графика $y=f(x)$ при $x\geqslant 0$, а затем эту часть отображаем симметрично относительно оси Oy (рис. 51, *в*).

3) Применяя правило VII к графику, построенному в п. 2, получим искомый график (рис. 51, *г*).

6.31. Построить график функции

$$y=\begin{cases} 1 \text{ при } & x\leqslant -1, \\ -x \text{ при } & -1<x<0, \\ x^2 \text{ при } & x\geqslant 0. \end{cases}$$

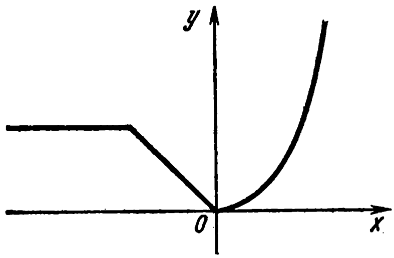


Рис. 52.

Решение. Если $x\leqslant -1$, то функция задана равенством $y=1$ и ее графиком служит полупрямая, параллельная оси Ox. В промежутке $-1<x<0$ функция определяется равенством $y=-x$; ее графиком является отрезок биссектрисы II координатного угла, соответствующий значениям аргумента из промежутка $]-1, 0[$. Наконец, для $x\geqslant 0$ функция задается равенством $y=x^2$ и ее график—это часть параболы, расположенная в I четверти. Искомый график изображен на рис. 52.

В задачах **6.32—6.58** построить графики функций:

6.32. 1) $y=x^2-4x$; 2) $y=x^2-4|x|$; 3) $y=|x^2-4x|$.

6.33. 1) $y=2x-x^2-8$; 2) $y=|2x-x^2-8|$; 3) $y=2|x|-x^2-8$.

6.34. 1) $y=2^{x-3}$; 2) $y=2^{2x+1}$; 3) $x=\frac{1}{3}\cdot 2^{2x+1}-2$; 4) $y=2^{-x+2}$;
5) $y=2^{-2x+5}$; 6) $y=5\cdot 2^{-2x+5}+1$; 7) $y=-2^{x+1}$;
8) $y=4-2^{3x-1}$; 9) $y=2^{-|x|}$.

6.35. 1) $y=\log_2(x-1)$; 2) $y=\log_2(2x+3)+1$;
3) $y=\log_2|2x+3|$; 4) $y=|\log_2(2x+3)|-1$.

6.36. 1) $y=\log_{1/2}(x+2)$; 2) $y=\log_{1/2}(2x-1)-3$;
3) $y=2\log_{1/2}(1-2x)$; 4) $y=3-\log_{1/2}|1-2x|$.

6.37. 1) $y=\sin 3x$; 2) $y=\frac{1}{2}\sin\left(3x+\frac{\pi}{4}\right)$;
3) $y=1-\frac{1}{2}\sin\left(3x+\frac{\pi}{4}\right)$; 4) $y=\cos\frac{x}{2}$;
5) $y=1+\cos\left(\frac{x}{2}-\frac{\pi}{3}\right)$; 6) $y=\pi\cos\left(\frac{x+1}{2}\right)$.

6.38. 1) $y=\sin|x|$; 2) $y=|\sin x|$;
3) $y=\sin\left|x-\frac{\pi}{3}\right|$; 4) $y=-|\sin(\pi x-1)|$.

6.39. 1) $y=\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4}-x\right)$; 2) $y=\frac{1}{\pi}\operatorname{tg}\left(2x-\frac{\pi}{6}\right)$;
3) $y=\operatorname{ctg}\left(\frac{x}{2}-1\right)$; 4) $y=\frac{2}{3}\operatorname{ctg}(\pi x+1)$.

6.40. 1) $y=\arcsin(2x+1)$; 2) $y=\arccos(2-x)$;
3) $y=\frac{1}{\pi}\operatorname{arctg} 3x$; 4) $y=\frac{2}{\pi}\operatorname{arcctg}\left(x-\frac{\pi}{2}\right)$.

6.41. $y=x+\frac{1}{x}$.

6.42. $y=2^x-2^{-x}$.

6.43. $y=\sqrt{x}-\sqrt{6-x}$.

6.44. $y=3x+\cos x$.

6.45. $y=\sin x+\cos x$.

6.46. $y=1-2\sin x$.

6.47. $y=x^2(x-1)$.

6.48. $y=x\sqrt{9-x^2}$.

6.49. $y=\frac{1}{\arccos x}$.

6.50. $y=\frac{x}{x^2+1}$.

6.51. $y=\frac{1}{x^2-9}$.

6.52. $y=\frac{x^2+1}{x^2-1}$.

6.53. $y=\begin{cases} -x^2 & \text{при } x\leqslant 0, \\ x/3 & \text{при } x>0. \end{cases}$

6.54. $y=\begin{cases} 2 & \text{при } x<0, \\ x+2 & \text{при } x\geqslant 0. \end{cases}$

6.55. $y=\begin{cases} -x \text{ при } x\leqslant -1, \\ 1 \text{ при } -1<x<0, \\ 4^x \text{ при } x\geqslant 0. \end{cases}$

6.56. $y=\begin{cases} \sin x \text{ при } x\leqslant 0, \\ 0 \text{ при } 0<x<1, \\ \lg x \text{ при } x\geqslant 1. \end{cases}$

6.57. $y=\begin{cases} 2x-x^2 \text{ при } x<0, \\ x^2 \text{ при } 0<x\leqslant 2, \\ 8-2x \text{ при } x>2. \end{cases}$

6.58. $y=\begin{cases} \cos x \text{ при } x\leqslant -\pi/3, \\ 1/2 \text{ при } -\pi/3<x<2, \\ 1/x \text{ при } x\geqslant 2. \end{cases}$

ГЛАВА 7
ТЕОРИЯ ПРЕДЕЛОВ

§ 1. ОПРЕДЕЛЕНИЯ ПРЕДЕЛА ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТИ И ПРЕДЕЛА ФУНКЦИИ. БЕСКОНЕЧНО МАЛЫЕ И БЕСКОНЕЧНО БОЛЬШИЕ ФУНКЦИИ

1. Предел последовательности. *Последовательностью* называется функция, заданная на множестве N натуральных чисел. Другими словами, последовательность задана, если каждому натуральному числу n ставится в соответствие по некоторому закону число x_n. Последовательность обозначают следующим образом:

$$x_1,\ x_2,\ x_3,\ \ldots,\ x_n,\ \ldots \text{ или } (x_n); \tag{1}$$

числа x_1, x_2, x_3, ... называются *членами* последовательности (1), а x_n—ее *общим членом*. Обычно закон образования последовательности дается формулой его общего члена.

Число a называется *пределом последовательности* (1), если для всякого $\varepsilon > 0$ существует такое число $N = N(\varepsilon)$, что при всех $n > N(\varepsilon)$ выполняется неравенство $|x_n - a| < \varepsilon$:

$$(\forall \varepsilon > 0)\,(\exists N)\,(\forall n > N)\,|x_n - a| < \varepsilon.$$

В этом случае пишут

$$\lim_{n \to \infty} x_n = a.$$

Последовательность называется *бесконечно большой*, если для всякого $M > 0$ существует такое N, что при всех $n > N$ выполняется неравенство $|x_n| > M$:

$$(\forall M > 0)\,(\exists N)\,(\forall n > N)\,|x_n| > M.$$

Это записывается следующим образом: $\lim\limits_{n \to \infty} x_n = \infty$.

2. Предел функции. Число A называется *пределом функции $y = f(x)$ при x, стремящемся к a*, если для любого $\varepsilon > 0$ существует число $\delta > 0$ такое, что при $0 < |x - a| < \delta$ выполняется неравенство $|f(x) - A| < \varepsilon$:

$$(\forall \varepsilon > 0)\,(\exists \delta > 0)\,(\forall x \mid 0 < |x - a| < \delta)\,|f(x) - A| < \varepsilon.$$

Это записывается так:

$$\lim_{x \to a} f(x) = A.$$

Если число A_1 есть предел функции $y = f(x)$ при x, стремящемся к a так, что x принимает только значения, меньшие a, то число A_1 называется *левым пределом* функции $f(x)$ в точке a. При этом пишут

$$\lim_{x \to a-0} f(x) = A_1.$$

Аналогично определяется *правый предел* функции $y = f(x)$ при x, стремящемся к a:

$$\lim_{x \to a+0} f(x) = A_2.$$

В случае, если левый и правый пределы функции $y = f(x)$ существуют и равны, т. е. $A_1 = A_2 = A$, число A есть предел этой функции.

Число B называется *пределом функции $y = f(x)$ при x, стремящемся к бесконечности*, если для любого $\varepsilon > 0$ существует число $M > 0$ такое, что при $|x| > M$ выполняется неравенство $|f(x) - B| < \varepsilon$:

$$(\forall \varepsilon > 0)\,(\exists M)\,(\forall\,|x| > M)\,|f(x) - B| < \varepsilon.$$

Математическая запись имеет вид:

$$\lim_{x \to \infty} f(x) = B.$$

3. Бесконечно малые и бесконечно большие функции. Функция $\alpha(x)$ называется *бесконечно малой* при x, стремящемся к a, если

$$\lim_{x \to a} \alpha(x) = 0.$$

Функция $f(x)$ называется *бесконечно большой* при x, стремящемся к a, если для любого $N > 0$ существует число $\delta > 0$ такое, что при $0 < |x-a| < \delta$ выполняется неравенство $|f(x)| > N$:

$$(\forall N > 0)\ (\exists \delta > 0)\ (\forall x \mid 0 < |x-a| < \delta)\ |f(x)| > N.$$

В этом случае пишут

$$\lim_{x \to a} f(x) = \infty.$$

Аналогично определяются бесконечно малые и бесконечно большие функции при $x \longrightarrow \infty$.

Между бесконечно малой и бесконечно большой функциями существует тесная связь, которая выражается следующими теоремами.

1. *Функция, обратная по величине бесконечно большой, является бесконечно малой.*

2. *Функция, обратная по величине бесконечно малой, отличной от нуля, есть бесконечно большая.*

Бесконечно малые функции обладают следующими свойствами.

1^0. *Сумма или разность двух бесконечно малых функций есть функция бесконечно малая.*

2^0. *Произведение бесконечно малой функции на функцию ограниченную* (в частности, *на постоянную или бесконечно малую функцию) есть функция бесконечно малая.*

Бесконечно большие функции обладают следующими свойствами.

1^0. *Сумма бесконечно большой функции и функции ограниченной есть бесконечно большая функция того же знака.*

2^0. *Сумма двух бесконечно больших функций одинакового знака есть бесконечно большая функция того же знака.*

3^0. *Произведение бесконечно большой функции на функцию, превосходящую по абсолютному значению некоторую положительную постоянную* (в частности, *на бесконечно большую функцию) есть функция бесконечно большая.*

7.1. Исходя из определения предела последовательности, доказать, что последовательность $1/3,\ 2/5,\ 3/7,\ \ldots,\ n/(2n+1),\ \ldots$ при $n \longrightarrow \infty$ имеет пределом число $1/2$.

Решение. Пусть ε — произвольное положительное число. Требуется доказать: существует такое число $N = N(\varepsilon)$, что при всех значениях $n > N(\varepsilon)$ выполняется неравенство $|x_n - 1/2| < \varepsilon$.

Найдем абсолютную величину разности

$$\left|\frac{n}{2n+1} - \frac{1}{2}\right| = \left|\frac{-1}{2(2n+1)}\right| = \frac{1}{2(2n+1)}.$$

Таким образом, неравенство $|x_n - 1/2| < \varepsilon$ выполняется, если $1/[2(2n+1)] < \varepsilon$, откуда $n > 1/(4\varepsilon) - 1/2$. Поэтому в качестве $N(\varepsilon)$ можно взять целую часть числа $1/(4\varepsilon) - 1/2$; это записывается так: $N = E(1/(4\varepsilon) - 1/2)$.

Итак, для любого ε найдено такое $N(\varepsilon)$, что из неравенства $n > N$ следует неравенство $|x_n - 1/2| < \varepsilon$, а это и означает, что $\lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{n}{2n+1} = \dfrac{1}{2}$.

7.2. Пользуясь определением предела последовательности, доказать, что последовательность с общим членом $x_n = (3n^2 - 1)/(4n^2 + 1)$ при $n \longrightarrow \infty$ имеет предел, равный $3/4$. Начиная с какого n будет выполнено неравенство $|x_n - 3/4| < 0{,}01$?

Решение. Задав произвольное положительное число ε, решим неравенство $|x_n-3/4|<\varepsilon$, т. е.

$$\left|\frac{3n^2-1}{4n^2+1}-\frac{3}{4}\right|=\left|\frac{-7}{4(4n^2+1)}\right|=\frac{7}{4(4n^2+1)}<\varepsilon,$$

откуда находим, что

$$4(4n^2+1)>\frac{7}{\varepsilon}, \quad \text{или} \quad n>\frac{1}{4}\sqrt{\frac{7-4\varepsilon}{\varepsilon}}.$$

Следовательно, полагая $N=E\left(\frac{1}{4}\sqrt{\frac{7-4\varepsilon}{\varepsilon}}\right)$, мы приходим к выводу, что при $n>N$ выполняется неравенство $|x_n-3/4|<\varepsilon$, т. е. что число $3/4$ служит пределом данной последовательности.

При $\varepsilon=0{,}01$ получим

$$N=E\left(\frac{1}{4}\sqrt{\frac{7-4\varepsilon}{\varepsilon}}\right)=E\left(\frac{1}{4}\sqrt{696}\right)=5.$$

Это значит, что все члены последовательности, начиная с 6-го, содержатся в интервале $]3/4-0{,}01,\ 3/4+0{,}01[$.

7.3. Исходя из определения предела функции, доказать, что

$$\lim_{x\to 2}(2x-1)=3.$$

Решение. Пусть ε — произвольное положительное число. Требуется доказать: существует такое число $\delta>0$, что при всех значениях x, удовлетворяющих условию $0<|x-2|<\delta$, будет выполняться неравенство

$$|(2x-1)-3|<\varepsilon.$$

Для выполнения этого неравенства необходимо, чтобы

$$2|x-2|<\varepsilon, \quad \text{или} \quad |x-2|<\varepsilon/2.$$

Следовательно, взяв в качестве δ число $\varepsilon/2$, получим: для любого $\varepsilon>0$ найдено такое $\delta=\varepsilon/2$, что из неравенства $0<|x-2|<\delta$ следует неравенство $|(2x-1)-3|<\varepsilon$.

Таким образом, доказано, что $\lim\limits_{x\to 2}(2x-1)=3$.

7.4. Доказать, что $\log_a x\ (0<a<1)$ есть положительная бесконечно большая функция при x, стремящемся к нулю справа.

Решение. Для любого $M>0$ неравенство $\log_a x>M$ выполняется при всех x, удовлетворяющих неравенству $0<x<a^M$. Поэтому, полагая $\delta=a^M$, получим: для любого положительного числа M указано такое число δ, что из неравенства $0<x<\delta$ вытекает неравенство $\log_a x>M$. Следовательно, $\lim\limits_{x\to+0}\log_a x=+\infty$, т. е. $\log_a x\ (0<a<1)$ — положительная бесконечно большая функция при x, стремящемся к нулю справа.

7.5. Доказать, что функция $a^x\ (a>1)$ есть бесконечно малая при $x\to-\infty$ и положительная бесконечно большая при $x\to+\infty$.

Решение. 1. Для любого $\varepsilon>0$ неравенство $|a^x-0|<\varepsilon$ выполняется при всех $x<\log_a\varepsilon=N$. Таким образом, произвольному $\varepsilon>0$ поставлено в соответствие такое число $N=\log_a\varepsilon$, что из неравенства $x<N$ вытекает неравенство $a^x<\varepsilon$. Это и означает, что $\lim\limits_{x\to-\infty}a^x=0$, т. е. $a^x\ (a>1)$ — бесконечно малая функция при $x\to-\infty$.

2. Пусть M — любое положительное число. Тогда неравенство $a^x > M$ выполняется при всех $x > \log_a M = N$. Таким образом, для любого положительного числа M указано такое число $N = \log_a M$, что из неравенства $x > N$ вытекает неравенство $a^x > M$. Следовательно, $\lim\limits_{x \to +\infty} a^x = +\infty$, т. е. a^x $(a > 1)$ есть положительная бесконечно большая функция при $x \to +\infty$.

7.6. Доказать, что последовательность с общим членом $x_n = (-1)^n$ не имеет предела.

Решение. Предположим, что указанная последовательность имеет предел, равный A. Это означает, что для всякого $\varepsilon > 0$ можно указать такой номер N, что для всех членов последовательности с номерами $n \geqslant N$ выполняется неравенство $A - \varepsilon < x_n < A + \varepsilon$. Из этого неравенства следует, что любые два соседних члена последовательности после N-го члена отличаются друг от друга меньше, чем на 2ε.

Достаточно взять $\varepsilon = 0{,}1$, чтобы получилось противоречие. В самом деле, любые два соседних члена последовательности должны отличаться друг от друга менее, чем на $2\varepsilon = 0{,}2$, а в действительности они отличаются на 2.

Ясно, что рассматриваемая последовательность не является и бесконечно большой, так ее члены принимают лишь два значения -1 и 1 и, следовательно, нет такого члена, начиная с которого все члены последовательности превзойдут по абсолютной величине наперед заданное число M, равное, например, 100.

7.7. Исходя непосредственно из определения, доказать, что предел последовательности $1/3, 1/9, 1/27, \ldots, 1/3^n, \ldots$ равен нулю. Начиная с какого n выполняется неравенство: а) $|x_n| < 0{,}01$; б) $|x_n| < 0{,}001$; в) $|x_n| < 0{,}0001$?

7.8. Показать, что последовательность с общим членом $x_n = 2n/(n+5)$ при $n \to \infty$ имеет предел, равный 2. При каких значениях n будет выполнено неравенство $|x_n - 2| < 0{,}01$?

7.9. Показать, что предел последовательности $1/4, 4/7, 9/12, \ldots, n^2/(n^2+3), \ldots$ равен единице. Найти число членов последовательности, лежащих вне интервала $]0{,}99, 1{,}01[$.

7.10. Доказать, что последовательность с общим членом $x_n = (2n^2+1)/(5n^2-1)$ при $n \to \infty$ имеет предел, равный 2/5. При каких значениях $n > N$ будет выполнено неравенство $|x_n - 2/5| < \varepsilon$? Найти N для $\varepsilon = 0{,}001$.

7.11. Пользуясь определением предела последовательности, доказать, что:

$$1)\ \lim_{n \to \infty} \frac{(-1)^n}{n^2} = 0; \qquad 2)\ \lim_{n \to \infty} \frac{5n+1}{1-2n} = -\frac{5}{2};$$

$$3)\ \lim_{n \to \infty} \frac{n^2}{4n^2+3} = \frac{1}{4}; \qquad 4)\ \lim_{n \to \infty} \frac{2^n + (-1)^n}{2^n} = 1.$$

7.12. Доказать, что последовательность с общим членом $x_n = 3 + (-1)^n$ предела не имеет.

7.13. Используя определение предела функции, доказать, что $\lim\limits_{x \to 1} (4x+5) = 9$. Каким должно быть число $\delta > 0$, чтобы из неравенства $|x - 1| < \delta$ вытекало бы неравенство $|f(x) - 9| < \varepsilon = 0{,}01$?

7.14. Исходя из определения предела функции, доказать, что $\lim\limits_{x \to \infty} \frac{x^2}{x^2+1} = 1$. Каким должно быть число $M > 0$, чтобы из неравенства $|x| > M$ вытекало бы неравенство $|f(x)-1| < \varepsilon$? Найти M для $\varepsilon = 0{,}001$.

7.15. Доказать, что функция $f(x) = x^3$ при $x \to 0$ является бесконечно малой. При каких x значения функции будут отличаться от нуля меньше, чем на: а) 0,01; б) 0,001; в) 0,0001?

7.16. Доказать, что функция $f(x) = 1/(x-6)^2$ при $x \to 6$ является положительной бесконечно большой. Каким должно быть число $\delta > 0$, чтобы из неравенства $|x-6| < \delta$ следовало бы неравенство $|f(x)| > N$? Найти δ, если: а) $N = 100$; б) $N = 1000$; в) $N = 10\,000$.

7.17. Исходя из определения предела функции, доказать, что:

1) $\lim\limits_{x \to -3} (4x+7) = -5$; 2) $\lim\limits_{x \to 0} (8-5x) = 8$;

3) $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{1}{x} = 1$; 4) $\lim\limits_{x \to -1} (x^2+2x-3) = -4$;

5) $\lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{4x+1}{x-3} = 4$; 6) $\lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{1}{x^2+1} = 0$.

7.18. Исходя из определения предела функции, доказать, что $\log_a x \, (a > 1)$ при x, стремящемся к нулю справа, есть отрицательная бесконечно большая функция.

7.19. Доказать, что

$$\lim_{x \to +\infty} \log_a x = +\infty, \quad \text{если} \quad a > 1;$$

$$\lim_{x \to -\infty} \log_a x = -\infty, \quad \text{если} \quad 0 < a < 1.$$

7.20. Убедиться в том, что при $0 < a < 1$

$$\lim_{x \to +\infty} a^x = 0, \qquad \lim_{x \to -\infty} a^x = +\infty.$$

Решение. Представим функцию a^x в виде $1/(1/a^x)$. Как было показано в задаче 7.5, функция $1/a^x$ есть положительная бесконечно малая при $x \to -\infty$ и положительная бесконечно большая при $x \to +\infty$ (поскольку $1/a > 1$). Следовательно, в силу теоремы о связи между бесконечно малой и бесконечно большой величинами, функция a^x является положительной бесконечно большой при $x \to -\infty$ и положительной бесконечно малой при $x \to +\infty$.

7.21. Используя свойства бесконечно малых и бесконечно больших функций, вычислить:

1) $\lim\limits_{x \to -\infty} 3^x \sin x$; 2) $\lim\limits_{x \to +\infty} x \log_4 x$;

3) $\lim\limits_{x \to -\infty} (2^x + 5^x)$; 4) $\lim\limits_{x \to +\infty} (-8x + \log_{1/2} x)$;

5) $\lim\limits_{x \to \infty} (x^2 + \operatorname{arctg} x)$; 6) $\lim\limits_{x \to -\infty} x^3 (2 + \cos x)$.

7.22. Доказать, что:

1) $\lim\limits_{x \to a} \dfrac{c}{f(x)} = \infty$, если $\lim\limits_{x \to a} f(x) = 0$;

2) $\lim\limits_{x \to a} \dfrac{c}{\varphi(x)} = 0$, если $\lim\limits_{x \to a} \varphi(x) = \infty$.

7.23. Доказать, что

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{\varphi(x)}=0,$$

если $\lim\limits_{x\to a} f(x)=0,\quad \lim\limits_{x\to a}\varphi(x)=\infty.$

Указание: представить отношение $f(x)/\varphi(x)$ в виде $f(x)\cdot 1/\varphi(x)$ и использовать теорему о связи между бесконечно большой и бесконечно малой функциями.

7.24. Вычислить:

$$1)\ \lim_{x\to\infty}\frac{\operatorname{arctg}x}{x};\qquad 2)\ \lim_{x\to+\infty}\frac{\cos x}{4^x};$$

$$3)\ \lim_{x\to+0}\frac{x}{\log_2 x};\qquad 4)\ \lim_{x\to+0}\frac{\log_{1/3}x}{x}.$$

§ 2. ТЕХНИКА ВЫЧИСЛЕНИЯ ПРЕДЕЛОВ

При вычислении предела элементарной функции $f(x)$ приходится сталкиваться с двумя существенно различными типами примеров.

1. Функция $f(x)$ определена в предельной точке $x=a$. Тогда

$$\lim_{x\to a} f(x)=f(a). \tag{1}$$

2. Функция $f(x)$ в предельной точке $x=a$ не определена или же вычисляется предел функции при $x\to\infty$. Тогда вычисление предела требует в каждом случае индивидуального подхода. В одних случаях (наиболее простых) вопрос сводится непосредственно к применению теорем о свойствах бесконечно больших и бесконечно малых функций и связи между ними.

Более сложными случаями нахождения предела являются такие, когда функция $f(x)$ в точке $x=a$ или при $x\to\infty$ представляет собой неопределенность $\left(\text{типа } \frac{0}{0},\ \frac{\infty}{\infty},\ 0\cdot\infty,\ \infty-\infty,\ 1^\infty,\ 0^0,\ \infty^0\right)$.

Приведем основные теоремы, на которых основано вычисление пределов.

1. *Если существуют* $\lim\limits_{x\to a} f_1(x)$ *и* $\lim\limits_{x\to a} f_2(x)$, *то:*

а) $\lim\limits_{x\to a}[f_1(x)+f_2(x)]=\lim\limits_{x\to a} f_1(x)+\lim\limits_{x\to a} f_2(x)$;

б) $\lim\limits_{x\to a}[f_1(x)\cdot f_2(x)]=\lim\limits_{x\to a} f_1(x)\cdot\lim\limits_{x\to a} f_2(x)$;

в) $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f_1(x)}{f_2(x)}=\dfrac{\lim\limits_{x\to a} f_1(x)}{\lim\limits_{x\to a} f_2(x)}\quad\left[\lim\limits_{x\to a} f_2(x)\neq 0\right]$.

2. *Если в некоторой окрестности точки* $x=a$ *(кроме, быть может, точки* a*) выполнено условие* $f(x)=\varphi(x)$ *и если предел одной из этих функций в точке* a *существует, то*

$$\lim_{x\to a} f(x)=\lim_{x\to a}\varphi(x).$$

3. *Если существует* $\lim\limits_{x\to a}\varphi(x)$ *и* $f(x)$ *— элементарная функция, то*

$$\lim_{x\to a} f[\varphi(x)]=f\left[\lim_{x\to a}\varphi(x)\right].$$

Например,

$$\lim_{x\to a}\sqrt{\varphi(x)}=\sqrt{\lim_{x\to a}\varphi(x)},\quad \lim_{x\to a}\log_c\varphi(x)=\log_c\lim_{x\to a}\varphi(x).$$

4. *Первый замечательный предел:*

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1. \tag{2}$$

5. *Второй замечательный предел:*

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x=\lim_{\alpha\to 0}(1+\alpha)^{1/\alpha}=e. \tag{3}$$

7.25. Найти следующие пределы:

1) $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{x^2+5x-3}{\log_2(x^2+1)}$; 2) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{x}{\lg|x|}+\cos x\right)$; 3) $\lim\limits_{x\to+\infty}(x\lg x-2^{-x})$.

Решение. 1) Функция $f(x)=\dfrac{x^2+5x-3}{\log_2(x^2+1)}$ определена в предельной точке $x=-1$. Следовательно, по формуле (1) имеем

$$\lim_{x\to -1}\frac{x^2+5x-3}{\log_2(x^2+1)}=\frac{(-1)^2+5\cdot(-1)-3}{\log_2[(-1)^2+1]}=\frac{-7}{\log_2 2}=-7.$$

2) Функция $\varphi(x)=\dfrac{x}{\lg|x|}+2\cos x$ в предельной точке $x=0$ не определена. Имеем

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{x}{\lg|x|}+2\cos x\right)=\lim_{x\to 0}\frac{x}{\lg|x|}+\lim_{x\to 0}(2\cos x).$$

Так как

$$\lim_{x\to 0}\frac{x}{\lg|x|}=0$$

(под знаком предела стоит произведение двух бесконечно малых функций x и $1/\lg|x|$), а

$$\lim_{x\to 0}2\cos x=2$$

в силу формулы (1), то

$$\lim_{x\to 0}\varphi(x)=0+2=2.$$

3) Так как $\lim\limits_{x\to+\infty}x\lg x=+\infty$ (под знаком предела стоит произведение двух бесконечно больших функций x и $\lg x$) и $\lim\limits_{x\to+\infty}2^{-x}=0$, то

$$\lim_{x\to+\infty}(x\lg x-2^{-x})=+\infty.$$

В задачах 7.26—7.45 найти пределы.

7.26. $\lim\limits_{x\to 0,1}\dfrac{5x+4}{1-x}$. **7.27.** $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^3-4x+5}{x^2+6}$. **7.28.** $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^4-1}{x^3+5x-2}$.

7.29. $\lim\limits_{x\to 64}(2\sqrt[3]{x}-\sqrt[3]{x^2}+5)$. **7.30.** $\lim\limits_{x\to\pi/4}\dfrac{\sin(\pi/6-2x)}{\cos(2x+\pi/6)}$.

7.31. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\cos 2x}{\operatorname{tg}^2 x}$.

7.32. $\lim\limits_{x\to 0,5} \arcsin(x-1)$.

7.33. $\lim\limits_{x\to 0,75} \arccos\sqrt{x}$.

7.34. $\lim\limits_{x\to +\infty} \operatorname{arctg} 5x$.

7.35. $\lim\limits_{x\to -\infty} (2/x+3\operatorname{arcctg} x)$.

7.36. $\lim\limits_{x\to \infty} [x(x-1)]$.

7.37. $\lim\limits_{x\to \infty} [x(x-5)+3]$.

7.38. $\lim\limits_{x\to \infty} (x^2-2x+7)$.

7.39. $\lim\limits_{x\to \infty} (-x^2-6x+15)$.

7.40. $\lim\limits_{x\to -1} \dfrac{x+3}{(x+1)^2}$.

7.41. $\lim\limits_{x\to +\infty} (\sqrt{5x-4}\log_2 x)$.

7.42. $\lim\limits_{x\to -\infty} \dfrac{7x-x^2}{6x}$.

7.43. $\lim\limits_{x\to +\infty} (x^3-\log_{1/5} x)$.

7.44. $\lim\limits_{x\to 3} 0{,}99^{5/|x-3|}$.

7.45. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sqrt[3]{x}}{\log_{1/7}|x|}$.

7.46. Вычислить односторонние пределы:

$$1)\ \lim_{x\to 2\pm 0} \frac{4}{(x-2)^3};\quad 2)\ \lim_{x\to 1\pm 0} \frac{1}{1+2^{1/(x-1)}}.$$

Решение. 1) Пусть $x<2$. Тогда при $x\to 2-0$ функция $x-2$, а следовательно, и $(x-2)^3$ есть отрицательная бесконечно малая; поэтому функция $4\cdot 1/(x-2)^3$ — отрицательная бесконечно большая, т. е.

$$\lim_{x\to 2-0} \frac{4}{(x-2)^3} = -\infty.$$

При $x\to 2+0$ функция $x-2$, а следовательно, и $(x-2)^3$ — положительная бесконечно малая; поэтому $4\cdot 1/(x-2)^3$ — положительная бесконечно большая функция, т. е.

$$\lim_{x\to 2+0} \frac{4}{(x-2)^3} = +\infty.$$

2) Пусть $x<1$. Тогда при $x\to 1-0$ имеем: $x-1$ — отрицательная бесконечно малая величина; следовательно, $1/(x-1)\to -\infty$ и $2^{1/(x-1)}\to 0$. Отсюда

$$\lim_{x\to 1-0} \frac{1}{1+2^{1/(x-1)}} = 1.$$

Если $x>1$, то при $x\to 1+0$ получим: $x-1$ — положительная бесконечно малая величина; следовательно, $1/(x-1)\to +\infty$ и $2^{1/(x-1)}\to +\infty$; тогда $1/(1+2^{1/(x-1)})\to 0$. Таким образом,

$$\lim_{x\to 1+0} \frac{1}{1+2^{1/(x-1)}} = 0.$$

В задачах **7.47—7.56** найти односторонние пределы.

7.47. $\lim\limits_{x\to 1\pm 0} \dfrac{x+2}{x-1}$.

7.48. $\lim\limits_{x\to 5\pm 0} \dfrac{3-x}{(x-5)^2}$.

7.49. $\lim\limits_{x\to \pi/4\pm 0} \operatorname{tg} 2x$.

7.50. $\lim\limits_{x\to 3\pi\pm 0} \operatorname{ctg}(x/3)$.

7.51. $\lim\limits_{x\to \pm 0} (6^{1/x}+5)$.

7.52. $\lim\limits_{x\to 2-0} \dfrac{\lg(2-x)}{2-x}$.

7.53. $\lim\limits_{x\to 1+0} \log_7 \log_4 x$. **7.54.** $\lim\limits_{x\to +0} \left(\dfrac{1}{\log_3 x}+2\arccos x\right)$.

7.55. $\lim\limits_{x\to \pm 0} \operatorname{arctg}(1/x)$. **7.56.** $\lim\limits_{x\to -0} (7x+\operatorname{ctg} 3x)$.

7.57. Найти пределы:

1) $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{x^2-5x+6}{x^2-3x+2}$; 2) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{3-\sqrt{x+9}}{x}$; 3) $\lim\limits_{x\to \infty} \dfrac{2x^3+1}{3x^4+2x^2-1}$;

4) $\lim\limits_{x\to 0} (x \operatorname{ctg} 3x)$; 5) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\arcsin 5x}{x}$; 6) $\lim\limits_{x\to \infty} (x-\sqrt{x^2-3})$;

7) $\lim\limits_{x\to \infty} \left(\dfrac{x-3}{x+1}\right)^{x-1}$; 8) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\ln(1+6x)}{x}$.

Решение. 1) Функция $f(x)=(x^2-5x+6)/(x^2-3x+2)$ в предельной точке $x=2$ не определена. Так как при $x=2$ числитель и знаменатель дроби обращаются в нуль, то мы имеем неопределенность типа 0/0. Преобразуем дробь, разделив числитель и знаменатель на выражение $x-2$, дающее неопределенность. Тогда

$$f(x)=\frac{x^2-5x+6}{x^2-3x+2}=\frac{(x-2)(x-3)}{(x-2)(x-1)}=\frac{x-3}{x-1}.$$

Последнее равенство справедливо при всех $x\neq 2$. Таким образом,

$$f(x)=\frac{x-3}{x-1} \text{ (при } x\neq 2).$$

Поэтому $\lim\limits_{x\to 2} f(x)=\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x-3}{x-1}$. Так как дробь $(x-3)/(x-1)$ в предельной точке $x=2$ определена, то по формуле (1) получим

$$\lim_{x\to 2} f(x)=\frac{2-3}{2-1}=-1.$$

2) В этом случае также получаем неопределенность типа 0/0. Преобразование функции $\varphi(x)=(3-\sqrt{x+9})/x$ сводится к уничтожению иррациональности в числителе: для этого умножим числитель и знаменатель на выражение $3+\sqrt{x+9}$ и затем сократим дробь на $x\neq 0$. Отсюда

$$\lim_{x\to 0} \frac{3-\sqrt{x+9}}{x}=\lim_{x\to 0} \frac{-1}{3+\sqrt{x+9}}=-\frac{1}{3+\sqrt{0+9}}=-\frac{1}{6}.$$

3) Здесь имеет место неопределенность типа ∞/∞. Разделим числитель и знаменатель на x^4 (наивысшую степень x в данной дроби). Тогда

$$\lim_{x\to\infty} \frac{2x^3+1}{3x^4+2x^2-1}=\lim_{x\to\infty} \frac{2/x+1/x^4}{3+2/x^2-1/x^4}=\frac{0}{3}=0.$$

4) Здесь получается неопределенность типа $0\cdot\infty$. Представим функцию $p(x)=x \operatorname{ctg} 3x$ в виде дроби, которая в точке $x=0$ дает неопределенность типа 0/0, после чего преобразуем ее так, чтобы можно было воспользоваться первым замечательным пределом:

$$\lim_{x\to 0} (x \operatorname{ctg} 3x)=\lim_{x\to 0} \frac{x\cos 3x}{\sin 3x}=\lim_{x\to 0} \left(\frac{x}{\sin 3x}\cdot\cos 3x\right)=$$

$$=\lim_{x\to 0} \frac{x}{\sin 3x}\cdot\lim_{x\to 0}\cos 3x=\lim_{x\to 0} \frac{x}{\sin 3x}\cdot 1=\lim_{x\to 0} \frac{x}{\sin 3x}.$$

Но $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x}{\sin 3x}=\dfrac{1}{3}$, поскольку, сделав замену переменной $3x=t$ (если $x\longrightarrow 0$, то и $t\to 0$) получим

$$\lim_{x\to 0}\frac{x}{\sin 3x}=\lim_{t\to 0}\frac{t/3}{\sin t}=\lim_{t\to 0}\left(\frac{1}{3}\cdot\frac{t}{\sin t}\right)=\frac{1}{3}\lim_{t\to 0}\frac{t}{\sin t}=\frac{1}{3}\cdot 1=\frac{1}{3}.$$

Таким образом*, $\lim\limits_{x\to 0}(x\operatorname{ctg} 3x)=\frac{1}{3}$.

5) Положим $\arcsin 5x=y$; тогда $5x=\sin y$, откуда $x=(1/5)\sin y$; если $x\to 0$, то $y\to 0$. Следовательно,

$$\lim_{x\to 0}\frac{\arcsin 5x}{x}=\lim_{y\to 0}\frac{y}{(1/5)\sin y}=5\lim_{y\to 0}\frac{y}{\sin y}=5.$$

6) В этом случае имеем неопределенность типа $\infty-\infty$. Умножив и разделив выражение под знаком предела на $x+\sqrt{x^2+3}$, получим

$$\lim_{x\to\infty}(x-\sqrt{x^2-3})=\lim_{x\to\infty}\frac{(x-\sqrt{x^2-3})(x+\sqrt{x^2+3})}{x+\sqrt{x^2+3}}=\lim_{x\to\infty}\frac{3}{x+\sqrt{x^2+3}}=0.$$

7) Функция $r(x)=\left(\frac{x-3}{x+1}\right)^{x-1}$ при $x\to\infty$ представляет собой степень, основание которой стремится к единице, а показатель — к бесконечности (неопределенность типа 1^∞).

Преобразуем функцию $r(x)$ таким образом, чтобы использовать второй замечательный предел. Для этого из дроби $(x-3)/(x+1)$ исключим целую часть:

$$\frac{x-3}{x+1}=\frac{(x+1)-4}{x+1}=1+\frac{-4}{x+1}$$

и сделаем замену переменной, положив $-4/(x+1)=t$. Тогда если $x\to\infty$, то $t\to 0$ и

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x-3}{x+1}\right)^{x-1}=\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{-4}{x+1}\right)^{x-1}=\lim_{t\to 0}(1+t)^{-4/t-2}=$$

$$=\lim_{t\to 0}\left[(1+t)^{-4/t}\cdot(1+t)^{-2}\right]=\lim_{t\to 0}(1+t)^{-4/t}\cdot\lim_{t\to 0}(1+t)^{-2}=$$

$$=\lim_{t\to 0}\left[(1+t)^{1/t}\right]^{-4}\cdot 1=\left[\lim_{t\to 0}(1+t)^{1/t}\right]^{-4}=e^{-4}.$$

8) Так как

$$\frac{\ln(1+6x)}{x}=6\cdot\frac{1}{6x}\cdot\ln(1+6x)=6\ln(1+6x)^{1/(6x)},$$

то, используя второй замечательный предел, находим

$$\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+6x)}{x}=6\lim_{x\to 0}\left[\ln(1+6x)^{1/(6x)}\right]=$$

$$=6\ln\left[\lim_{x\to 0}(1+6x)^{1/(6x)}\right]=6\ln e=6.$$

В задачах 7.58.—7.144 найти пределы.

7.58. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{x^3-x^2+2x}{x^2+x}$. **7.59.** $\lim\limits_{x\to -2}\frac{x^2-4}{x+2}$. **7.60.** $\lim\limits_{x\to 3}\frac{3-x}{x^3-27}$.

7.61. $\lim\limits_{x\to -1}\frac{x^2-4x-5}{x^2-2x-3}$. **7.62.** $\lim\limits_{x\to 3/2}\frac{2x^2-x-3}{2x^2-5x+3}$.

---

* Более простые методы решения подобных примеров приводятся в § 3 этой главы и в § 2 гл. 9.

7.63. $\lim\limits_{x\to -1} \dfrac{3x^2+2x-1}{-x^2+x+2}$. 7.64. $\lim\limits_{x\to -1/2} \dfrac{2x^2-7x-4}{-2x^2+5x+3}$.

7.65. $\lim\limits_{x\to 3} \dfrac{3x^2-11x+6}{2x^2-5x-3}$. 7.66. $\lim\limits_{x\to 4} \dfrac{16-x^2}{x^3-64}$. 7.67. $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{x^3-8}{x^2+x-6}$.

7.68. $\lim\limits_{x\to 1/3} \dfrac{3x^2+2x-1}{27x^3-1}$. 7.69. $\lim\limits_{z\to -a} \dfrac{z^3+a^3}{a^2-z^2}$. 7.70. $\lim\limits_{z\to a} \dfrac{z^2-a^2}{a^4-z^4}$.

7.71. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x}{\sqrt{x+4}-2}$. 7.72. $\lim\limits_{x\to 3} \dfrac{\sqrt{2x+3}-3}{3-x}$

7.73. $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{\sqrt{x}-\sqrt{2-x}}{x-1}$. 7.74. $\lim\limits_{x\to -2} \dfrac{2-\sqrt{6+x}}{\sqrt{7-x}-3}$.

7.75. $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{\sqrt{4x+1}-3}{\sqrt{x+2}-2}$. 7.76. $\lim\limits_{x\to -1} \dfrac{x+1}{x+\sqrt{x+2}}$.

7.77. $\lim\limits_{x\to 4} \dfrac{x-\sqrt{3x+4}}{16-x^2}$. 7.78. $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{\sqrt[3]{x}-1}{\sqrt{x}-1}$. 7.79. $\lim\limits_{x\to 64} \dfrac{\sqrt{x}-8}{4-\sqrt[3]{x}}$.

7.80. $\lim\limits_{\varphi\to 0} \dfrac{16^{\varphi}-1}{1-4^{\varphi}}$. 7.81. $\lim\limits_{x\to \infty} \dfrac{x^2-4x+3}{x+5}$. 7.82. $\lim\limits_{x\to \infty} \dfrac{x^2-2x+5}{x^3+3x+7}$.

7.83. $\lim\limits_{x\to \infty} \dfrac{x^4+2x^3-1}{100x^3+2x^2}$. 7.84. $\lim\limits_{x\to \infty} \dfrac{2x^2+7x-1}{3x^2-5x+6}$.

7.85. $\lim\limits_{x\to \infty} \dfrac{3x^3-4x^2+8}{-5x^3+2x^2+x}$. 7.86. $\lim\limits_{x\to \infty} \dfrac{a_px^p+a_{p-1}x^{p-1}+\ldots+a_1x+a_0}{b_px^p+b_{p-1}x^{p-1}+\ldots+b_1x+b_0}$.

7.87. $\lim\limits_{x\to 1} \left(\dfrac{1}{x-1}-\dfrac{2}{x^2-1}\right)$. 7.88. $\lim\limits_{x\to -3} \left(\dfrac{1}{x+3}-\dfrac{6}{9-x^2}\right)$.

7.89. $\lim\limits_{x\to 1} \left(\dfrac{3}{x^3-1}-\dfrac{1}{x-1}\right)$. 7.90. $\lim\limits_{x\to 2} \left(\dfrac{1}{x-2}-\dfrac{12}{x^3-8}\right)$.

7.91. $\lim\limits_{x\to \infty} \left(x-\dfrac{x^3}{x^2+1}\right)$. 7.92. $\lim\limits_{x\to +\infty} \left(\dfrac{x^2}{x+3}-x\right)$.

7.93. $\lim\limits_{x\to \pi/2} (\operatorname{tg} x-\cos^{-1} x)$. 7.94. $\lim\limits_{x\to 0} (\operatorname{ctg} 2x-2\sin^{-1} 4x)$.

7.95. $\lim\limits_{x\to +\infty} (\sqrt{x+5}-\sqrt{x})$. 7.96. $\lim\limits_{x\to +\infty} (x-\sqrt{2x-3})$.

7.97. $\lim\limits_{x\to +\infty} (\sqrt{2x+1}-\sqrt{x+2})$. 7.98. $\lim\limits_{x\to +\infty} (\sqrt{4x-1}-x)$.

7.99. $\lim\limits_{x\to \pm\infty} (\sqrt{x^2+10x}-x)$. 7.100. $\lim\limits_{x\to \pm\infty} (x-\sqrt{x^2+7x})$.

7.101. $\lim\limits_{x\to \pm\infty} (\sqrt{4x^2+3x}-2x)$. 7.102. $\lim\limits_{x\to \pm\infty} \dfrac{3^x+1}{3^x-1}$.

7.103. $\lim\limits_{x\to \pm\infty} \dfrac{2\cdot 5^x-3}{9\cdot 5^x+4}$. 7.104. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1-\cos x}{3\cos^2 \dfrac{x}{2}}$.

7.105. $\lim\limits_{x\to \pi/2} \dfrac{\cos x}{\cos \dfrac{x}{2}-\sin \dfrac{x}{2}}$. 7.106. $\lim\limits_{x\to -\pi/4} \dfrac{1+\sin 2x}{\sin x+\cos x}$.

7.107. $\lim\limits_{x\to \pi/4} \dfrac{1-\operatorname{tg} x}{\sin x-\cos x}$. 7.108. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin x-\operatorname{tg} x}{4\sin^2 \dfrac{x}{2}}$.

7.109. $\lim\limits_{x\to-\pi/4}\dfrac{1+\operatorname{ctg} x}{\sin^{-1} x+\cos^{-1} x}$. **7.110.** $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 7x}{\sin 3x}$.

7.111. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\operatorname{tg} 6x}{\sin 8x}$. **7.112.** $\lim\limits_{x\to 0} x^2\operatorname{ctg} 5x$. **7.113.** $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\operatorname{tg} 10x}{\sin^2 2x}$.

7.114. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 10\pi x}{\operatorname{tg} 5x}$. **7.115.** $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos 3x}{\operatorname{tg}^2 6x}$.

7.116. $\lim\limits_{x\to 0}\operatorname{ctg}^2\dfrac{x}{8}\operatorname{tg}^2\dfrac{5x}{4}$. **7.117.** $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sin(1-x)}{x^2-1}$.

7.118. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{4x}{\arcsin 12x}$. **7.119.** $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\arcsin 5x}{\operatorname{tg} 2x}$.

7.120. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\operatorname{arctg} 6x}{\sin 3x}$. **7.121.** $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin^2 5x}{\arcsin 10x}$.

7.122. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2-1}{\arcsin(x-1)}$. **7.123.** $\lim\limits_{x\to -2}\dfrac{\operatorname{arctg}(x+2)}{4-x^2}$.

7.124. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{x-1}\right)^x$. **7.125.** $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1-\dfrac{1}{x+1}\right)^x$.

7.126. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{x+1}\right)^{2x}$. **7.127.** $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x+5}{x+2}\right)^{x-1}$.

7.128. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x-5}{x-2}\right)^x$. **7.129.** $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{2x-1}{2x+1}\right)^{x+3}$.

7.130. $\lim\limits_{x\to 0}(1+\sin x)^{1/x}$. **7.131.** $\lim\limits_{x\to\pi/2}(1+\cos x)^{-1/\cos x}$.

7.132. $\lim\limits_{x\to\pi/4}(\operatorname{tg} x)^{\operatorname{tg} 2x}$. **7.133.** $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1+mx)}{x}$.

Указание: положить $\operatorname{tg} x=1+\alpha$;
тогда если $x\to\pi/4$, то $\alpha\to 0$.

7.134. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1-5x)}{x}$. **7.135.** $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{a^x-1}{x}$ $(a>0,\ a\neq 1)$.

7.136. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{8^x-6^x}{x}$. **7.137.** $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{2x}-e^{5x}}{x}$. **7.138.** $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-4^x}{1-e^x}$.

7.139. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1+x)}{5^x-1}$. **7.140.** $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(x+3)-\ln 3}{x}$.

7.141. $\lim\limits_{x\to\infty} x[\ln(x+5)-\ln x]$. **7.142.** $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{-x}-1}{4x}$.

7.143. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^x-1}{x\ln x}$. **7.144.** $\lim\limits_{x\to e}\dfrac{\ln x-1}{x-e}$.

§ 3. СРАВНЕНИЕ БЕСКОНЕЧНО МАЛЫХ. ПРИНЦИП ЗАМЕНЫ ЭКВИВАЛЕНТНЫМИ

Бесконечно малые величины $\alpha(x)$ и $\beta(x)$ при $x\to a$ сравниваются между собой путем вычисления предела их отношения.

1) *Если* $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{\alpha}{\beta}=0$, *то* α *есть бесконечно малая высшего порядка, чем* β.

2) *Если* $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{\alpha}{\beta}=\infty$, *то* α *есть бесконечно малая низшего порядка, чем* β.

3) *Если* $\lim\limits_{x\to a}\frac{\alpha}{\beta}=c\neq 0$, *то* α *есть бесконечно малая того же порядка, что и* β.

В частности, если $\lim\limits_{x\to a}\frac{\alpha}{\beta}=1$, то α и β называются *эквивалентными бесконечно малыми* ($\alpha\sim\beta$). Например, $\sin x\sim x$ при $x\to 0$.

Вычисление некоторых пределов заметно упрощается, если воспользоваться **принципом замены эквивалентными:** *при нахождении предела дроби можно бесконечно малые множители, стоящие в числителе и знаменателе, заменять эквивалентными величинами.*

7.145. Пусть $x\to 0$. Сравнить с бесконечно малой $\beta(x)=x$ бесконечно малую $\alpha(x)$, если: 1) $\alpha(x)=\operatorname{tg}x$; 2) $\alpha(x)=\sin^3 x$; 3) $\alpha(x)=\sqrt[3]{x}$; 4) $\alpha(x)=x^2+\sin 2x$.

Решение. 1) Имеем

$$\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{tg}x}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}\cdot\lim_{x\to 0}\frac{1}{\cos x}=1.$$

Следовательно, $\operatorname{tg}x\sim x$ при $x\to 0$.

2) Так как

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin^3 x}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}\cdot\lim_{x\to 0}\sin^2 x=1\cdot 0=0,$$

то $\alpha(x)=\sin^3 x$ есть бесконечно малая высшего порядка, чем $\beta(x)$.

3) Поскольку

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt[3]{x}}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{1}{\sqrt[3]{x^2}}=\infty,$$

$\alpha(x)=\sqrt[3]{x}$ есть бесконечно малая низшего порядка, чем $\beta(x)=x$.

4) Находим

$$\lim_{x\to 0}\frac{x^2+\sin 2x}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{x^2}{x}+\lim_{x\to 0}\frac{\sin 2x}{x}=$$

$$=\lim_{x\to 0}x+\lim_{x\to 0}\left(2\cdot\frac{\sin 2x}{2x}\right)=2\lim_{x\to 0}\frac{\sin 2x}{2x}=2.$$

Таким образом, $\alpha(x)=x^2+\sin 2x$ и $\beta(x)=x$ — бесконечно малые одного порядка.

7.146. Пусть $x\to 0$. Сравнить с бесконечно малой $\delta(x)=x^2$ бесконечно малую $\gamma(x)$: 1) $\gamma(x)=\operatorname{tg}^2 3x$; 2) $\gamma(x)=x^3-2x^2+4x-1$; 3) $\gamma(x)=x\sqrt[3]{x}+\sin x$; 4) $\gamma(x)=2-2\cos x$; 5) $\gamma(x)=\ln^2(1+3x)$.

7.147. Какая из величин $1-x$ или $\sqrt{1-x}$ представляет собой бесконечно малую более высокого порядка при $x\to 1$?

7.148. Показать, что при $x\to 0$

$$\arcsin x\sim x \text{ и } \operatorname{arctg}x\sim x.$$

7.149. Показать, что $\cos 2x$ при $x\to\pi/4$ есть бесконечно малая величина того же порядка малости, что и $\sin 4x$.

7.150. Показать, что $\lg(1+x)$ при $x\to 0$ есть бесконечно малая того же порядка, что и x.

7.151. Сравнить порядки бесконечно малых величин $\sin x-\operatorname{tg}x$ и $x^2\sqrt{x}$ при $x\to 0$.

7.152. Радиус шара стремится к нулю. Показать, что объем шара представляет собой бесконечно малую более высокого порядка, нежели его поверхность, и того же порядка, что и объем описанного около шара цилиндра.

В задачах **7.153—7.158** доказать эквивалентность бесконечно малых при $x \to 0$.

7.153. $1-\cos x \sim x^2/2$. **7.154.** $\sqrt{1+x}-1 \sim x/2$.

7.155. $\sin x+\operatorname{tg} x \sim 2x$. **7.156.** $\operatorname{tg} x-\sin x \sim x^3$.

7.157. $\sqrt[3]{x+8}-2 \sim x/12$. **7.158.** $a^x-1 \sim x\ln a$.

7.159. Найти $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1-\cos x}{\sin^2 x}$.

Решение. Здесь мы имеем отношение двух бесконечно малых функций $1-\cos x$ и $\sin^2 x$ при $x \to 0$. Для вычисления данного предела воспользуемся принципом замены эквивалентными.

Заменим бесконечно малые $\sin^2 x$ и $1-\cos x$ простейшими эквивалентными им бесконечно малыми: так как $\sin x \sim x$, то

$$(\sin x)^2 \sim x^2,\ 1-\cos x = 2\sin^2\frac{x}{2} \sim 2\left(\frac{x}{2}\right)^2 = \frac{x^2}{2}.$$

Тогда

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{\sin^2 x} = \lim_{x\to 0}\frac{x^2/2}{x^2} = \frac{1}{2}.$$

В задачах **7.160—7.173**, применяя принцип замены эквивалентными, найти следующие пределы.

7.160. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 15x}{\operatorname{tg} 10x}$. **7.161.** $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin^2 3x}{1-\cos 5x}$. **7.162.** $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\arcsin (x/3)}{\operatorname{tg} 2x}$.

7.163. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\operatorname{arctg}^2 5x}{x\sin 2x}$. **7.164.** $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^3+2x^2}{\sin^2 (x/4)}$. **7.165.** $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\arcsin\sqrt[3]{x^4}}{x\sqrt{x}}$.

7.166. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{4x-\operatorname{arctg} x}{4x+\operatorname{arctg} x}$. **7.167.** $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1+\alpha x)}{\beta x}$.

7.168. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln^2(1+2x)}{\sin^2 6x}$. **7.169.** $\lim\limits_{x\to \infty}\dfrac{\operatorname{tg} 5x}{2x-x^2}$.

7.170. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin^2 2x^3}{x^2\operatorname{arctg}^2 4x^2}$. **7.171.** $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\arcsin\sqrt{x}}{\sqrt[3]{e^x-1}\,\sqrt[6]{\operatorname{tg} x}}$.

7.172. $\lim\limits_{\alpha\to 0}\dfrac{\ln(1+8\alpha)\sin^2(\alpha/2)}{\operatorname{tg}^2(\alpha/4)\sin 6\alpha}$. **7.173.** $\lim\limits_{\varphi\to 0}\dfrac{\arcsin 9\varphi^2 \operatorname{tg}(\varphi^2/2)}{\sin^3\varphi\left(e^{\varphi/4}-1\right)}$.

§ 4. ПРИРАЩЕНИЕ АРГУМЕНТА И ПРИРАЩЕНИЕ ФУНКЦИИ

Если x_1 и x_2 — значения аргумента x, а $f(x_1)$ и $f(x_2)$ — соответствующие значения функции $y=f(x)$, то величина $\Delta x = x_2 - x_1$ называется *приращением аргумента* на отрезке $[x_1, x_2]$, а величина $\Delta y = f(x_2)-f(x_1) = f(x_1+\Delta x)-f(x_1)$ — *приращением функции* на этом отрезке.

7.174. Дана функция $y=x^2-2x+3$. Вычислить приращения аргумента и функции, соответствующие изменению аргумента: а) от $x_1=0$ до $x_2=1$; б) от $x_1=-1$ до $x_2=3$.

Решение. Имеем

а) $\Delta x = x_2 - x_1 = 1$, $\Delta y = (1^2 - 2\cdot1 + 3) - (0^2 - 2\cdot0 + 3) = -1$;

б) $\Delta x = x_2 - x_1 = 3 - (-1) = 4$, $\Delta y = (3^2 - 2\cdot3 + 3) - [(-1)^2 - 2\cdot(-1) + 3] = 6 - 6 = 0$.

7.175. Найти приращение функции $y = x^3$, соответствующее приращению аргумента от $x_1 = 1$ до $x_2 = 2$.

7.176. Найти приращение функции $y = x^2 - 2x + 3$, соответствующее приращению аргумента: а) от $x_1 = -1$ до $x_2 = 0$; б) от $x_1 = 0$ до $x_2 = 1/2$; в) от $x_1 = 2$ до $x_2 = 5$.

7.177. Найти приращение функции $y = \cos x$, соответствующее приращению аргумента: а) от $x_1 = \pi/4$ до $x_2 = \pi/3$; б) от $x_1 = \pi/2$ до $x_2 = 0$; в) от $x_1 = -\pi/6$ до $x_2 = \pi/6$.

7.178. Для функции $y = 9 - x^2$ найти Δy, если: а) $x = 0$, $\Delta x = 0{,}5$; б) $x = 2$, $\Delta x = -1$; в) $x = -1$, $\Delta x = 0{,}2$.

7.179. Найти приращение функции $y = 3x - x^3$ в точке $x = -2$, если независимая переменная x получает приращение: а) $\Delta x = 2$; б) $\Delta x = 0{,}5$; в) $\Delta x = -3$.

7.180. Сторона квадрата равна 2 см. Найти приращение площади квадрата, если его сторона: а) увеличивается на 0,1 см; б) уменьшается на 0,2 см.

7.181. Радиус шара равен 5 см. Найти приращение поверхности и объема шара, если его радиус получает приращение 0,3 см.

§ 5. НЕПРЕРЫВНОСТЬ И ТОЧКИ РАЗРЫВА ФУНКЦИИ

Первое определение непрерывности. *Функция $y = f(x)$ называется непрерывной в точке $x = a$, если бесконечно малому приращению аргумента в этой точке соответствует бесконечно малое приращение функции*, т. е.

$$\lim_{\Delta x \to 0} \Delta y = 0.$$

Второе определение непрерывности. *Функция $y = f(x)$ называется непрерывной в точке $x = a$, если существует предел функции в этой точке, который равен значению функции в этой точке*, т. е.

$$\lim_{x \to a} f(x) = f(a).$$

Примером непрерывной функции может служить любая элементарная функция, которая непрерывна в каждой точке своей области определения.

Точка $x = a$ называется *точкой разрыва* функции $y = f(x)$, если эта функция определена в некоторой окрестности точки $x = a$, но в самой точке $x = a$ не удовлетворяет условию непрерывности.

Точки разрыва функции делятся на два типа. К *точкам разрыва* I *рода* относятся такие точки, в которых *существуют конечные односторонние пределы:* $\lim\limits_{x \to a-0} f(x)$ (левый предел) и $\lim\limits_{x \to a+0} f(x)$ (правый предел). К *точкам разрыва* II *рода* относятся те точки, в которых *хотя бы один из односторонних пределов не существует или бесконечен.*

Заметим, что точки разрыва I рода подразделяются в свою очередь на *точки устранимого разрыва* $\left[\text{когда } \lim\limits_{x \to a-0} f(x) = \lim\limits_{x \to a+0} f(x) \neq f(a)\right]$ и на *точки скачка* функции $\left[\text{когда } \lim\limits_{x \to a-0} f(x) \neq \lim\limits_{x \to a+0} f(x)\right]$; в последнем случае разность $f(a+0) - f(a-0)$ называется *скачком* функции $f(x)$ в точке $x = a$.

7.182. Показать, используя первое определение непрерывности, что функция $y=x^2$ непрерывна в любой точке числовой прямой.

Решение. Пусть $x=x_0$ — любая точка числовой прямой; значение функции в этой точке $y(x_0)=x_0^2$. Придадим аргументу $x=x_0$ произвольное приращение Δx. В результате функция получит некоторое приращение Δy, равное

$$\Delta y=(x_0+\Delta x)^2-x_0^2=2x_0\,\Delta x+(\Delta x)^2.$$

Тогда

$$\lim_{\Delta x\to 0}\Delta y=\lim_{\Delta x\to 0}[2x_0\,\Delta x+(\Delta x)^2]=\lim_{\Delta x\to 0}(2x_0)\Delta x+\lim_{\Delta x\to 0}(\Delta x)^2=0,$$

так как $(2x_0)\Delta x$ и $(\Delta x)^2$ — бесконечно малые величины при $\Delta x\to 0$. Следовательно, функция $y=x^2$, согласно первому определению, непрерывна в любой точке $x=x_0$ числовой прямой.

В задачах **7.183—7.188**, пользуясь первым определением непрерывности, показать, что данные функции непрерывны во всей своей области определения.

7.183. $y=x^2-2x$. **7.184.** $y=1-x^3$. **7.185.** $y=1/(x^2+1)$.

7.186. $y=e^x$. **7.187.** $y=\sin x$. **7.188.** $y=\cos 3x$.

7.189. Даны функции: 1) $y=\dfrac{1}{x+3}$ и 2) $y=\dfrac{1}{1+2^{1/x}}$. Найти точки разрыва и исследовать их характер. Построить схематично графики функций в окрестности точек разрыва.

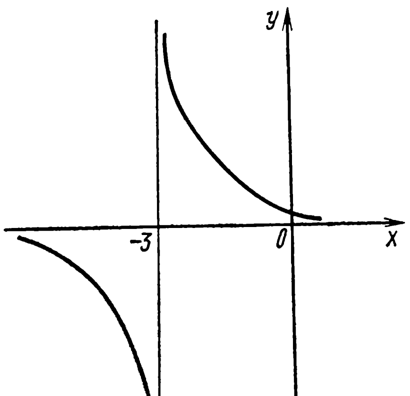


Рис. 53.

Решение. 1) Функция $y=1/(x+3)$ определена при всех значениях x, кроме $x=-3$. Так как эта функция является элементарной, то она непрерывна в каждой точке своей области определения, состоящей из двух промежутков $]-\infty, -3[$ и $]-3, +\infty[$.

Следовательно, единственной точкой разрыва является точка $x=-3$ (функция определена в окрестности этой точки, в самой же точке нарушается условие непрерывности — функция в ней не определена). Для исследования характера разрыва найдем левый и правый пределы этой функции при стремлении аргумента к точке разрыва $x=-3$:

$$\lim_{x\to -3+0}\frac{1}{x+3}=+\infty,$$

$$\lim_{x\to -3-0}\frac{1}{x+3}=-\infty.$$

Следовательно, при $x=-3$ функция $y=1/(x+3)$ имеет бесконечный разрыв (рис. 53); $x=-3$ есть точка разрыва II рода.

2) Рассуждая аналогично, получим, что точкой разрыва функции $y=1/(1+2^{1/x})$ является $x=0$.

Найдем односторонние пределы этой функции в точке $x=0$:

$$\lim_{x\to +0}\frac{1}{1+2^{1/x}}=0,\quad \lim_{x\to -0}\frac{1}{1+2^{1/x}}=1.$$

Таким образом, левый и правый пределы исследуемой функции при $x=0$ конечны (рис. 54). Поэтому $x=0$—точка скачка функции.

7.190. Дана функция

$$y=\begin{cases} 2-x & \text{при} \quad x\leqslant 0, \\ \cos x & \text{при} \quad 0<x<\pi/2, \\ 0 & \text{при} \quad x\geqslant \pi/2. \end{cases}$$

Найти ее точки разрыва и исследовать их характер.

Решение. Числовая ось, являющаяся областью определения функции $y=f(x)$, разбита на три промежутка $]-\infty,\ 0]$, $]\,0,\ \pi/2\,[$, $[\pi/2,\ +\infty\,[$, в каждом из которых $f(x)$ задана соответственно элементарными функциями: $\varphi(x)=2-x$, $\psi(x)=\cos x$, $\eta(x)=0$ (рис. 55). Внутри каждого из указанных проме-

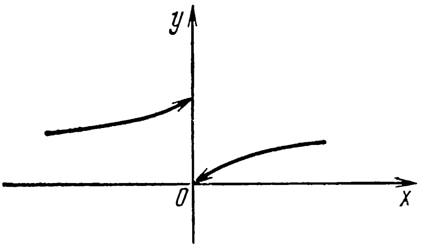


Рис. 54.

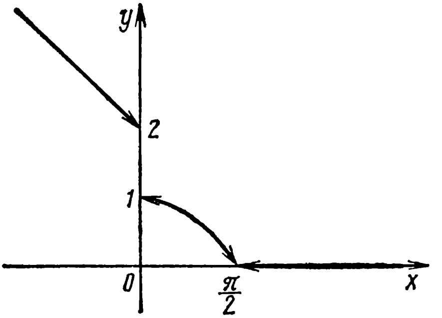


Рис. 55.

жутков эти функции определены и, следовательно, непрерывны. Таким образом, остается исследовать функцию $f(x)$ на непрерывность только в точках $x=0$ и $x=\pi/2$, в которых «стыкуются» области определения функций, составляющих функцию $y=f(x)$.

Вычислим односторонние пределы функции $y=f(x)$ в точке $x=0$. Так как $f(x)=2-x$ при $x\leqslant 0$, то

$$\lim_{x\to -0} f(x)=\lim_{x\to -0}(2-x)=2.$$

Так как $f(x)=\cos x$ при $0<x<\pi/2$, то

$$\lim_{x\to +0} f(x)=\lim_{x\to +0}\cos x=1.$$

Следовательно, $x=0$—точка разрыва I рода; в ней функция $y=f(x)$ претерпевает скачок.

Односторонние пределы функции $y=f(x)$ в точке $x=\pi/2$ таковы:

$$\lim_{x\to \pi/2-0} f(x)=\lim_{x\to \pi/2-0}\cos x=0\ [f(x)=\cos x \text{ при } 0<x<\pi/2];$$

$$\lim_{x\to \pi/2+0} f(x)=\lim_{x\to \pi/2+0} 0=0\ [f(x)=0 \text{ при } x\geqslant \pi/2].$$

Значение функции $f(x)$ в точке $x=\pi/2$ равно $f(\pi/2)=0$. Отсюда следует, что в этой точке функция $f(x)$ непрерывна, так как

$$\lim_{x\to \pi/2-0} f(x)=\lim_{x\to \pi/2+0} f(x)=f(\pi/2)=0.$$

Таким образом, исследуемая функция $y=f(x)$ непрерывна на всей числовой оси за исключением точки $x=0$, в который она претерпевает разрыв I рода — скачок.

В задачах **7.191—7.212** для каждой из заданных функций найти точки разрыва и исследовать их характер.

7.191. $y=\frac{1}{2-x}$. **7.192.** $y=\frac{1}{(x+5)^2}$. **7.193.** $y=\frac{2}{x^2-1}$.

7.194. $y=\frac{1}{4x-x^2-3}$. **7.195.** $y=\frac{3}{2^x-1}$. **7.196.** $y=\frac{\sin x}{x}$.

7.197. $y=[x]$. **7.198.** $y=\{x\}$. **7.199.** $y=\frac{|x+1|}{x+1}$.

7.200. $y=\frac{x-2}{x^2+x-6}$. **7.201.** $y=\lg|x-3|$. **7.202.** $y=\frac{1}{\lg|x|}$.

7.203. $y=5^{1/x}+3$. **7.204.** $y=\operatorname{arctg}(1/x)$. **7.205.** $y=\lg|\sin x|$.

7.206. $y=3^{1/(x+4)}$.

7.207. $y=\begin{cases} x^2 \text{ при } x\leqslant 1, \\ x+1 \text{ при } x>1. \end{cases}$

7.208. $y=\begin{cases} x \text{ при } x\leqslant 0, \\ 1/x \text{ при } x>0. \end{cases}$

7.209. $y=\begin{cases} -x-1 \text{ при } x<-1, \\ 0 \text{ при } -1<x<0, \\ \sqrt{x} \text{ при } x\geqslant 0. \end{cases}$

7.210. $y=\begin{cases} 1/x \text{ при } x<0, \\ \sin x \text{ при } 0<x<\pi/2, \\ 0 \text{ при } x\geqslant \pi/2. \end{cases}$

7.211. $y=\begin{cases} x^2-2x \text{ при } x\leqslant 1, \\ 2-x \text{ при } 1<x<2, \\ 4-x^2 \text{ при } x\geqslant 2. \end{cases}$

7.212. $y=\begin{cases} 3^{-x} \text{ при } x\leqslant -1, \\ 2 \text{ при } -1<x\leqslant 0, \\ \lg x \text{ при } x>0. \end{cases}$

§ 6. ПРОМЕЖУТКИ ЗНАКОПОСТОЯНСТВА ФУНКЦИИ

Для нахождения *промежутков знакопостоянства* элементарной функции $y=f(x)$, рассматриваемой на некотором промежутке $]a, b[$ оси абсцисс, поступают следующим образом. На промежуток $]a, b[$ наносят все те точки, в которых функция $f(x)$ обращается в нуль или претерпевает разрыв. Эти точки разбивают промежуток $]a, b[$ на несколько частей, в каждой из которых функция непрерывна и не обращается в нуль и, следовательно, сохраняет свой знак. Чтобы определить этот знак, достаточно найти знак функции в какой-либо точке рассматриваемой части оси Ox.

7.213. Найти промежутки знакопостоянства функции

$$y=\frac{x^2-5x+6}{x^2+x}.$$

Решение. Данная функция определена на всей числовой оси, за исключением точек $x=-1$ и $x=0$. Представив исследуемую функцию в виде

$$y=\frac{(x-2)(x-3)}{x(x+1)},$$

убеждаемся, что она обращается в нуль при $x=2$ и $x=3$ и претерпевает бесконечные разрывы в точках $x=0$ и $x=-1$.

Полученные точки $x=-1$, $x_2=0$, $x_3=2$, $x_4=3$ разбивают ось Ox на пять промежутков: $]-\infty, -1[$, $]-1, 0[$, $]0, 2[$, $]2, 3[$, $]3, +\infty[$, в каждом из которых функция сохраняет определенный знак (рис. 56).

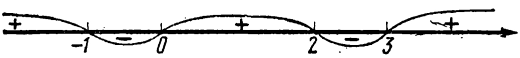


Рис. 56.

Методом проб находим этот знак в каждом промежутке, для чего подставляем в выражение для y какие-либо значения из этих промежутков, например $x=-2$, $x=-0{,}5$, $x=1$, $x=2{,}5$, $x=5$. Тогда:

на $]-\infty, -1[$	имеем	$y(-2)>0$;
» $]-1, 0[$	»	$y(-0{,}5)<0$;
» $]0, 2[$	»	$y(1)>0$;
» $]2, 3[$	»	$y(2{,}5)<0$;
» $]3, +\infty[$	»	$y(5)>0$.

В задачах **7.214—7.235** найти промежутки знакопостоянства следующих функций.

7.214. $y=\frac{x}{x-1}$. **7.215.** $y=x^2-4x+4$. **7.216.** $y=x^2+3x+2$

7.217. $y=1-x^2$. **7.218.** $y=\frac{x^2-4}{3x-x^2}$. **7.219.** $y=\frac{(x-4)^2}{x^2-4x+3}$.

7.220. $y=\frac{x^3-1}{x^2-5x+6}$. **7.221.** $y=(x^2-2x-3)\sqrt{x}$.

7.222. $y=\frac{\sqrt{1-x}}{4-x^2}$. **7.223.** $y=\frac{x^2-9}{(x-5)\sqrt[3]{x+1}}$.

7.224. $y=3^x-1$. **7.225.** $y=\frac{2-4^x}{x}$. **7.226.** $y=\lg x+1$.

7.227. $y=\lg(x+1)$. **7.228.** $y=\lg(5-x)$. **7.229.** $y=\log_{1/3}x-2$.

7.230. $y=\log_{1/9}(x+3)$. **7.231.** $y=(1-x)\lg x$.

7.232. $y=\sin x$ $(0<x<2\pi)$. **7.233.** $y=\cos x$ $(-\pi<x<\pi)$.

7.234. $y=\sin 2x$ $(-\pi/2<x<\pi/2)$. **7.235.** $y=\cos(x+\pi/4)$ $(-\pi/2<x<\pi/2)$.

7.236. Решить неравенство $\frac{x^2-9}{x^2-x-2}>0$.

Решение. Найдем промежутки знакопостоянства функции $y=(x^2-9)/(x^2-x-2)$:

$$]-\infty, -3[,\ ]-3, -1[,\ ]-1, 2[,\ ]2, 3[,\ ]3, +\infty[.$$

Выделив из них те, в которых функция положительна, получим решение данного неравенства: $y > 0$ при $x \in]-\infty, -3[\cup [-1, 2[\cup]3, +\infty[$.

В задачах **7.237—7.254** решить неравенства.

7.237. $\frac{x-3}{x+2} < 0$. **7.238.** $x^2+2x-3 > 0$.

7.239. $x^3+x^2-2x < 0$. **7.240.** $x^4-1 > 0$. **7.241.** $\frac{x^3+1}{x} < 0$.

7.242. $\frac{3x-x^2}{x^2+4x+4} < 0$. **7.243.** $\frac{x^2-5x+6}{x^3-1} < 0$.

7.244. $\frac{x^2+3x+2}{x^2-3x+2} > 0$. **7.245.** $\frac{\sqrt{x}\,(3-x)}{x+5} > 0$. **7.246.** $\frac{x^2-5x}{\sqrt[3]{x-1}} < 0$.

7.247. $8^x-2^x < 0$. **7.248.** $7^{-x}-7 < 0$. **7.249.** $\lg(x+2) < 0$.

7.250. $\lg x+2 < 0$. **7.251.** $\log_{1/4}(x-1) < 0$. **7.252.** $\lg\lg x > 0$.

7.253. $\log_{1/2}(x^2-3x+2) > 0$. **7.254.** $\lg(\lg^2 x-4\lg x) > 0$.

ГЛАВА 8

ПРОИЗВОДНАЯ И ДИФФЕРЕНЦИАЛ

§ 1. ПОНЯТИЕ ПРОИЗВОДНОЙ

Производной функции $y=f(x)$ в точке x *называется предел отношения ее приращения* Δy *к приращению* Δx *аргумента* x, *когда приращение аргумента стремится к нулю:*

$$y'=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}. \qquad (1)$$

Если этот предел конечный, то функция $y=f(x)$ называется *дифференцируемой* в точке x. Если же этот предел есть ∞, то говорят, что функция $y=f(x)$ имеет в точке x *бесконечную производную.*

8.1. Пользуясь определением производной, найти производную функции $y=\sqrt{2x-1}$. Вычислить $y'(5)$.

Решение. Найдем приращение функции $y=\sqrt{2x-1}$, соответствующее данному приращению Δx аргумента x:

$$\Delta y=y(x+\Delta x)-y(x)=\sqrt{2(x+\Delta x)-1}-\sqrt{2x-1}.$$

Тогда

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{\sqrt{2x+2\Delta x-1}-\sqrt{2x-1}}{\Delta x}$$

и

$$y'=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\sqrt{2x+2\Delta x-1}-\sqrt{2x-1}}{\Delta x}=$$

$$=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{(\sqrt{2x+2\Delta x-1}-\sqrt{2x-1})(\sqrt{2x+2\Delta x-1}+\sqrt{2x-1})}{\Delta x(\sqrt{2x+2\Delta x-1}+\sqrt{2x-1})}=$$

$$=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{2}{\sqrt{2x+2\Delta x-1}+\sqrt{2x-1}}=\frac{1}{\sqrt{2x-1}}.$$

Подставляя в выражение для y' значение $x=5$, получим

$$y'(5)=\frac{1}{\sqrt{2\cdot 5-1}}=\frac{1}{3}.$$

В задачах 8.2—8.9 найти производные от указанных функций, пользуясь непосредственно определением производной.

8.2. $y=3x-5$. **8.3.** $y=x^2-9$. **8.4.** $y=x^2-4x+3$.
8.5. $y=4x-x^3$. **8.6.** $y=\sqrt{3x+1}$. **8.7.** $y=1/(x-2)$.
8.8. $y=\sin x$. **8.9.** $y=\operatorname{tg} 2x$.

8.10. Дана функция $f(x)=3x^2-4x+9$. Найти $f'(1)$.

8.11. Дана функция $f(x)=\sin 2x$. Найти $f'(\pi/4)$.

8.12. Дана функция $f(x)=\operatorname{ctg}(x/2)$. Найти $f'(x)$, а затем вычислить $f'(\pi/3)$, $f'(\pi)$.

8.13. Дана функция $f(x)=\sqrt[3]{x^2}$. Найти $f'(1/8)$, $f'(0)$.

8.14. Дана функция $f(x)=\sqrt[3]{x-1}$. Найти $f'(0)$, $f'(1)$.

8.15. Дана функция $\varphi(x)=8/x$. Показать, что $\varphi'(-2)=\varphi'(2)$.

8.16. Показать, что функция $y=|x|$ не имеет производной в точке $x=0$.

§ 2. ОСНОВНЫЕ ПРАВИЛА ДИФФЕРЕНЦИРОВАНИЯ. ДИФФЕРЕНЦИРОВАНИЕ ОСНОВНЫХ ЭЛЕМЕНТАРНЫХ ФУНКЦИЙ

Основные правила дифференцирования

а) $c'=0$; б) $(u\pm v)'=u'\pm v'$; в) $(uv)'=u'v+uv'$; г) $\left(\dfrac{u}{v}\right)'=\dfrac{u'v-uv'}{v^2}$.

Здесь $c=\text{const}$, а u и v — дифференцируемые функции.

Таблица производных основных элементарных функций

1. $(x^n)'=nx^{n-1}$.
2. $(\sin x)'=\cos x$.
3. $(\cos x)'=-\sin x$.
4. $(\operatorname{tg} x)'=\dfrac{1}{\cos^2 x}$.
5. $(\operatorname{ctg} x)'=-\dfrac{1}{\sin^2 x}$.
6. $(\arcsin x)'=\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$.
7. $(\arccos x)'=-\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$.
8. $(\operatorname{arctg} x)'=\dfrac{1}{1+x^2}$.
9. $(\operatorname{arcctg} x)'=-\dfrac{1}{1+x^2}$.
10. $(a^x)'=a^x\ln a$, $(e^x)'=e^x$.
11. $(\log_a x)'=\dfrac{1}{x\ln a}$, $(\ln x)'=\dfrac{1}{x}$.

8.17. Найти производные следующих функций:

1) $y=4x^3-\dfrac{1}{\sqrt{x}}+\dfrac{6}{\sqrt[3]{x^2}}$; 2) $y=(x^3+1)\cos x$;

3) $y=\dfrac{x-1}{2\arccos x}$; 4) $y=5^x+x\ln x$.

Решение. 1) Запишем данную функцию следующим образом:

$$y=4x^3-x^{-1/2}+6x^{-2/3}.$$

Тогда

$$y'=(4x^3-x^{-1/2}+6x^{-2/3})'=(4x^3)'-(x^{-1/2})'+(6x^{-2/3})'=$$
$$=4(x^3)'-(x^{-1/2})'+6(x^{-2/3})'=4\cdot 3x^2-\left(-\frac{1}{2}\right)x^{-3/2}+6\left(-\frac{2}{3}\right)x^{-5/3}=$$
$$=12x^2+\frac{1}{2x\sqrt{x}}-\frac{4}{x\sqrt[3]{x^2}}.$$

2) Имеем

$$y'=[(x^3+1)\cos x]'=(x^3+1)'\cos x+(x^3+1)(\cos x)'=$$
$$=[(x^3)'+(1)']\cos x+(x^3+1)(\cos x)'=(3x^2+0)\cos x+$$
$$+(x^3+1)(-\sin x)=3x^2\cos x-(x^3+1)\sin x.$$

3) Имеем

$$y'=\left(\frac{1}{2}\cdot\frac{x-1}{\arccos x}\right)'=\frac{1}{2}\left(\frac{x-1}{\arccos x}\right)'=\frac{1}{2}\cdot\frac{(x-1)'\arccos x-(\arccos x)'(x-1)}{\arccos^2 x}=$$

$$=\frac{1}{2}\cdot\frac{1\cdot\arccos x-(-1/\sqrt{1-x^2})(x-1)}{\arccos^2 x}=$$

$$=\frac{\arccos x+(x-1)/\sqrt{1-x^2}}{2\arccos^2 x}=\frac{\sqrt{1-x^2}\arccos x+x-1}{2\sqrt{1-x^2}\arccos^2 x}.$$

4) Имеем

$$y'=(5^x+x\ln x)'=(5^x)'+(x\ln x)'=5^x\ln 5+$$

$$+[x'\ln x+x(\ln x)']=5^x\ln 5+1\cdot\ln x+x\cdot\frac{1}{x}=5^x\ln 5+\ln x+1.$$

Используя таблицу производных основных элементарных функций и правила дифференцирования, в задачах **8.18—8.127** найти производные указанных функций *.

8.18. $y=3-5x$. **8.19.** $y=4x^2-0{,}6x+7$.

8.20. $y=11x^3-x^2-0{,}4$. **8.21.** $y=x^5-4x^3-x^2+\frac{x}{2}$.

8.22. $y=-9x^3+0{,}2x^2-0{,}14x+5$.

8.23. $y=ax^3+(b-2a)x^2+(3a+b)x-2a$.

8.24. $y=2x^{-2}-x^{-1}+5$. **8.25.** $y=x^{-4}-3x^{-3}-0{,}7x^{-2}$.

8.26. $r=0{,}32\varphi^{-3}-0{,}11\varphi^{-1}+0{,}24\varphi$. **8.27.** $y=\frac{2}{x}-\frac{4}{x^2}+\frac{5}{x^3}-\frac{6}{7x^4}$.

8.28. $y=\frac{3x^2-6x+7}{4x}$. **8.29.** $y=\frac{6x^4-7x^3+x^2-5x+3}{2x^3}$.

8.30. $y=x^{1/4}-8x^{3/4}$. **8.31.** $y=x^{3/2}-2x^{2/3}+3x^{1/3}$.

8.32. $y=4x^{7/2}-9x^{5/2}+2x^{-3/2}$. **8.33.** $y=6x^{-1/3}-3x^{-2/3}+1$.

8.34. $s=5t^{1/2}-2t^{-2/3}+3t^{-1}$. **8.35.** $y=-6\sqrt{x}+\frac{3}{x}$.

8.36. $y=5\sqrt{x}+3x\sqrt[3]{x}-\sqrt[4]{x}$. **8.37.** $y=6x^2-\frac{5}{x^3}-\sqrt[3]{x^2}$.

8.38. $y=2\sqrt[4]{x}+9x^2\sqrt[3]{x^2}-3x\sqrt[5]{x^3}+\frac{7}{x^2}$.

8.39. $y=(3x-2)(7x+4)$. **8.40.** $y=(2x+5)(4x+2-3x^2)$.

8.41. $y=(4x^3-2x^2-5x)(x^2-7x)$.

8.42. $y=(9-2x)(2x^3-9x^2+1)$. **8.43.** $y=\left(\frac{2}{x}+3x\right)(\sqrt{x}-1)$.

8.44. $y=\left(6\sqrt[3]{x}-\frac{1}{x^2}\right)(7x-3)$. **8.45.** $y=\left(3x^2-\frac{1}{x^3}\right)(\sqrt[3]{x}+0{,}1x)$.

8.46. $s=(2\sqrt[4]{t^3}+t^3)\left(\frac{2}{t}-\sqrt{t}\right)$. **8.47.** $y=\frac{x}{x+1}$.

---

* Учащимся не рекомендуется увлекаться упрощением выражений, полученных в результате дифференцирования, так как основная цель этой главы заключается в освоении техники дифференцирования, а не в проверке умения производить тождественные преобразования.

8.48. $y=\frac{x-1}{5x-2}$. 8.49. $y=\frac{2x+3}{3x+7}$. 8.50. $y=\frac{5x^2}{x-3}$.

8.51. $y=\frac{x^2+2x}{3-4x}$. 8.52. $y=\frac{1+\sqrt{x}}{1-\sqrt{x}}$. 8.53. $y=\frac{\sqrt[3]{x}-2}{\sqrt[3]{x}+2}$.

8.54. $s=\frac{\sqrt[3]{t^2}-t}{t+\sqrt[3]{t^2}}$. 8.55. $y=\frac{x^2+7x+5}{x^2-3x}$. 8.56. $y=\frac{-x^2+2x+3}{x^3-2}$.

8.57. $r=\frac{\sqrt{\varphi}-2\varphi}{\sqrt[4]{\varphi}+1}$. 8.58. $y=3\sin x-5x\cos x$.

8.59. $y=2\sqrt{x}\sin x-\frac{\cos x}{x}$. 8.60. $y=(\sin x+3\cos x)\sqrt[3]{x}$.

8.61. $y=\frac{3\cos x}{2x+1}$. 8.62. $y=\frac{-5\sin x}{2+\sqrt{x}}$. 8.63. $y=\frac{x-\sin x}{\sqrt{x}}$.

8.64. $s=\frac{t^2+2\cos t}{\sin t}$. 8.65. $y=\frac{1+4\sin x}{2-3\cos x}$. 8.66. $r=\frac{2\cos\varphi-\sin\varphi}{3\sin\varphi+\cos\varphi}$.

8.67. $y=\frac{3\sqrt[3]{x}-\cos x}{2\sin x}$. 8.68. $y=x^2\operatorname{tg} x$. 8.69. $y=\frac{\operatorname{tg} x}{\sin x+2}$.

8.70. $y=\frac{4\cos x}{\operatorname{tg} x-2x}$. 8.71. $y=\frac{\sqrt[3]{x^2}}{\operatorname{ctg} x-1}$. 8.72. $s=\frac{\operatorname{ctg} t}{2\sqrt{t}-1}$.

8.73. $y=x^{4/5}\operatorname{ctg} x-\frac{\operatorname{tg} x}{x}$. 8.74. $y=\frac{\sin x}{x^2}+x^{2/3}\cos x$.

8.75. $y=\pi x^2-\arccos x$. 8.76. $y=3\arcsin x-4\sqrt{x}$.

8.77. $y=\arccos x-x^2\arcsin x$. 8.78. $y=\sin x\cdot\arccos x$.

8.79. $y=(\operatorname{tg} x-1)\arcsin x$. 8.80. $y=\frac{\arcsin x}{x+1}-\frac{2}{x^2}$.

8.81. $y=\sqrt{x}\arccos x-\frac{2}{\arcsin x}$. 8.82 $y=\frac{9\sqrt[3]{x^2}+2}{\arccos x}$.

8.83. $y=\frac{\arccos x}{x-\arcsin x}$. 8.84. $y=\frac{\operatorname{arctg} x}{x^3}$.

8.85. $y=-8\sqrt[4]{x}\operatorname{arcctg} x$. 8.86. $y=\frac{2\operatorname{arctg} x-x}{3\operatorname{arcctg} x}$.

8.87. $y=(x-\operatorname{arcctg} x)(\operatorname{arctg} x-2x)$. 8.88. $y=\frac{\operatorname{arcctg} x}{\sin x+1}$.

8.89. $y=(\sqrt[5]{x^3}-1)\operatorname{arctg} x$. 8.90. $y=\frac{3}{\operatorname{arctg} x+\operatorname{arcctg} x}$.

8.91. $y=e^x-3x^2$. 8.92. $y=8\sin x-4^x$. 8.93. $y=e^x\operatorname{tg} x$.

8.94. $y=\frac{\cos x}{e^x}$. 8.95. $y=x^2 3^x$. 8.96. $y=e^x(x^2+\sqrt{x}-1)$.

8.97. $y=\frac{9^x-1}{9^x+1}$. 8.98. $y=5^x(x^5-10x)$. 8.99. $y=\frac{7^x-3}{\sin x}$.

8.100. $r=\frac{\cos\varphi+\varphi^2}{e^\varphi}$. 8.101. $y=6^x\operatorname{arctg} x$. 8.102. $s=\frac{3\operatorname{ctg} t}{e^t-1}$.

8.103. $y=4^x\arccos x-\frac{e^x}{x^2}$. 8.104. $y=\frac{x^2}{2^x}-\frac{4^x-1}{\operatorname{tg} x}$.

8.105. $y=2\ln x-\frac{3}{x^2}$. 8.106. $y=8\sqrt[4]{x^3}-3\log_9 x$.

8.107. $y=x^2 \log_4 x$. 8.108. $y=\frac{3 \ln x}{x}$. 8.109. $y=\frac{\sin x+1}{\lg x}$.

8.110. $y=\frac{e^x-2}{\ln x}$. 8.111. $y=\frac{\log_2 x+1}{\sqrt[3]{x}}$. 8.112. $y=\frac{\log_5 x}{5^x}$.

8.113. $r=\frac{\varphi^3+\ln \varphi}{e^4}$. 8.114. $y=\frac{\operatorname{tg} x}{e^x-x}$.

8.115. $y=\ln x \cdot \operatorname{arctg} x-\frac{2^x}{x}$. 8.116. $s=(\ln t-\log_2 t)\sqrt[5]{t^2}$.

8.117. $y=\frac{e^x \cos x}{1+\ln x}$. 8.118. $y=(\sqrt[4]{x^3}+\ln x)(e^x-2\sqrt{x})$.

8.119. $y=(\cos x-2^x)(4^x+3\sin x)$. 8.120. $y=\frac{3\sin x-\cos x}{x \operatorname{tg} x}$.

8.121. $y=\frac{2^x \arcsin x-4}{\sqrt[3]{x^2}}$. 8.122. $y=\frac{7^x+1}{x^2 \operatorname{arctg} x}$. 8.123. $y=\frac{\operatorname{tg} x \ln x}{5^x}$.

8.124. $y=\frac{(\sqrt{x}+2)\,6^x}{\operatorname{arctg} x}$. 8.125. $r=\frac{10^\varphi \ln \varphi}{\operatorname{ctg} \varphi}$.

8.126. $y=(e^x \cos x-4x)(x^2-e^x \sin x)$.

8.127. $y=(3^x \arccos x-3 \arcsin x)(e^x+3^x)$.

8.128. Показать, что если S — площадь круга, а r — его радиус, то $\frac{dS}{dr}$ равняется длине окружности.

8.129. Показать, что если V — объем шара, а R — его радиус, то $\frac{dV}{dR}$ равняется поверхности шара.

8.130. Пусть V — объем кругового цилиндра, h — его высота, а r — радиус основания. Показать, что при постоянном r производная $\frac{dV}{dh}$ равна площади основания цилиндра, а при постоянном h производная $\frac{dV}{dr}$ равна площади боковой поверхности цилиндра.

8.131. Найти множество, на которое производная функции $y=x(2+\ln x)$ отображает луч $[1, +\infty[$.

8.132. На какое множество отображает производная функции $y=1-\sqrt[3]{x^2}$ промежуток $[1/27, 8]$?

8.133. Дана функция $f(x)=5x^2-16\sqrt{x}+7$. Найти $f'(1)$, $f'(4)$, $f'(1/4)$.

8.134. Дана функция $f(x)=\sqrt[3]{x^2}-x$. Найти $f'(1)-f'(-1)$.

8.135. Дана функция $\varphi(x)=3x+60/x-64/x^3+5$. Найти корни $\varphi'(x)$.

8.136. Даны функции $f_1(x)=(\cos x)/x$ и $f_2(x)=x\sin x$. Найти $f_1'(1)/f_2'(1)$.

8.137. Показать, что функция $y=xe^x$ удовлетворяет уравнению $\frac{dy}{dx}-\frac{(x+1)y}{x}=0$.

8.138. Показать, что функция $y=x^2 \ln x$ удовлетворяет уравнению $xy'-2y=x^2$.

§ 3. ДИФФЕРЕНЦИРОВАНИЕ СЛОЖНОЙ ФУНКЦИИ

Пусть $y=y(u)$ и $u=u(x)$ — дифференцируемые функции. Тогда сложная функция $y=y[u(x)]$ есть также дифференцируемая функция, причем

$$y'_x=y'_u\cdot u'_x, \quad \text{или} \quad \frac{dy}{dx}=\frac{dy}{du}\cdot\frac{du}{dx}. \tag{1}$$

Это правило распространяется на цепочку из любого конечного числа дифференцируемых функций: *производная сложной функции равна произведению производных функций, ее составляющих.*

8.139. Найти производные функций:

$$1)\ y=\ln(x^3-3x^2+4x); \quad 2)\ y=\cos^2\frac{x}{6}.$$

Решение. 1) Положим $y=\ln u$, где $u=x^3-3x^2+4x$. Тогда по формуле (1) найдем

$$y'_x=y'_u\cdot u'_x=\frac{1}{u}(3x^2-6x+4)=\frac{3x^2-6x+4}{x^3-3x^2+4x}.$$

2) Полагая $y=u^2$, $u=\cos v$, $v=x/6$, получим

$$y'_x=y'_u\cdot u'_v\cdot v'_x=2u(-\sin v)\frac{1}{6}=-\frac{1}{3}\cos\frac{x}{6}\sin\frac{x}{6}=-\frac{1}{6}\sin\frac{x}{3}.$$

В задачах 8.140—8.320 вычислить производные от заданных функций.

8.140. $y=\sin(2x-1)$. **8.141.** $y=(5x+2)^4$.

8.142. $y=\cos\left(\frac{\pi}{6}-3x\right)$. **8.143.** $y=\arcsin\frac{x}{2}$.

8.144. $y=\operatorname{arcctg}2\sqrt{x}$. **8.145.** $y=\sqrt[3]{e^x-1}$. **8.146.** $y=\ln^3 x$.

8.147. $y=\ln(3x^2-2x+5)$. **8.148.** $y=\sqrt{x^2+4}$.

8.149. $y=\sin^2 x$. **8.150.** $y=\sqrt{1+\sqrt[3]{x}}$. **8.151.** $y=\cos x^2$.

8.152. $y=\sqrt[3]{\operatorname{tg}^2 x}$. **8.153.** $y=e^{\sqrt[4]{x}}$. **8.154.** $y=10^{5-3x}$.

8.155. $y=2^{1/x}$. **8.156.** $y=\sqrt[3]{x^2-6x}$. **8.157.** $y=\frac{1}{\ln 3x}$.

8.158. $y=\operatorname{arctg}(3-x^2)$. **8.159.** $y=2\sqrt[4]{\arcsin^3 x}$.

8.160. $y=3^{\operatorname{ctg}x}$. **8.161.** $y=\log_3\sqrt{2x^2-5x+1}$.

8.162. $y=\sqrt[3]{2+\log_2 x}$. **8.163.** $y=e^{\arccos x}$. **8.164.** $y=\operatorname{arctg}5^{-x}$.

8.165. $y=\ln\frac{5x-3}{2x+7}$. **8.166.** $y=\ln\frac{x}{\sqrt[3]{x^3-1}}$. **8.167.** $y=\sin\operatorname{arcctg}x$.

8.168. $y=\ln\sqrt[6]{\cos x}$. **8.169.** $y=\sqrt[3]{2^{4-5x}}$. **8.170.** $y=\operatorname{arctg}\ln x$.

8.171. $y=\frac{1}{\ln^2 x}$. **8.172.** $y=\sqrt{1-e^x}$. **8.173.** $y=\frac{2}{\cos 5x}$.

8.174. $y=\sin\frac{1}{x^2}$. **8.175.** $y=\frac{1}{\sqrt{x^2-9}}$. **8.176.** $y=e^{2^x}$.

8.177. $y=\ln(\arcsin x-x)$. **8.178.** $y=5^{x^3-3x^2+2x}$.

8.179. $y=\arccos(x^2-1)$. **8.180.** $y=7e^{-x^2}$.

8.181. $y=\sqrt{\frac{x-2}{x+2}}$. 8.182. $y=\arcsin \sin x$. 8.183. $y=\frac{1}{\ln \sin x}$.

8.184. $y=\operatorname{ctg} \sqrt[3]{x^2}$. 8.185. $y=\frac{\sin x^2}{x}$. 8.186. $y=\frac{\sqrt{x}}{\cos 2x}$.

8.187. $y=\frac{x}{\sqrt{x^2+16}}$. 8.188. $y=\operatorname{arctg} \frac{1}{\sqrt{x}}$. 8.189. $y=\cos \frac{x}{x+1}$.

8.190. $y=\ln (x+\sqrt{1+x^2})$. 8.191. $y=\operatorname{tg}^2 x-\operatorname{ctg} x^2$.

8.192. $y=\cos 2^x+4^{\sqrt{x}}$. 8.193. $y=\frac{1}{6}(e^{6x}-e^{-6x})$.

8.194. $y=2 \ln \ln x-\ln 2x$. 8.195. $y=\sqrt{x} \operatorname{ctg} 2x$.

8.196. $y=e^{-x^2} \ln x$. 8.197. $y=(x-2) \sqrt{x^2+1}$.

8.198. $y=(3-2x)^3(x-1)^2$. 8.199. $y=3x\sqrt{1-x^3}$.

8.200. $y=2e^{\sqrt{x}}(\sqrt{x}-1)$. 8.201. $y=3^{\operatorname{tg} x} \cos x$.

8.202. $y=\frac{\arccos 2x}{e^{\sqrt{x}}}$. 8.203. $y=\frac{x^2-1}{\sin 3x}$.

8.204. $y=12x^3 \operatorname{arctg} \sqrt[3]{x^2}$. 8.205. $y=\frac{\ln \cos x}{x^2+1}$.

8.206. $y=\frac{1-\sin 2x}{1+\sin 2x}$. 8.207. $y=7^{-x^3} e^{-5x}$.

8.208. $y=\ln (1-\sqrt{x})+2 \sqrt{\operatorname{tg} x}$. 8.209. $y=e^{-x} \ln \operatorname{tg} x$.

8.210. $y=\arcsin^2 x-\sqrt{\operatorname{arcctg} x}$. 8.211. $y=e^{-3x} \sin 3x$.

8.212. $y=\frac{e^{2x}-e^{-2x}}{e^{2x}+e^{-2x}}$. 8.213. $y=\frac{\arcsin x}{\sqrt{1-x^2}}$. 8.214. $y=\frac{\lg ex}{\cos 2x}$.

8.215. $y=\cos (1-\pi x) \sqrt{1-e^{2x}}$. 8.216. $y=\sin 8x \cdot \ln \frac{x}{8}$.

8.217. $y=\sqrt{4-x^2}+2 \arcsin \frac{x}{2}$. 8.218. $y=e^{\cos x} \sqrt{\sin x}$.

8.219. $y=3 \sin^2 x \cos x+\cos^3 x$. 8.220. $y=\frac{\operatorname{ctg} 2x}{2^{3-2x}}$.

8.221. $y=6 \sqrt[3]{e^{4x}}-7^{\operatorname{tg} x}$. 8.222. $y=3^{2x} \operatorname{ctg} \ln x$.

8.223. $y=\frac{\arcsin x^2}{2-3x}$. 8.224. $y=\frac{\ln \operatorname{tg} x}{e^{1-2x}}$.

8.225. $y=(5x^2-3x)^3-\sqrt[4]{e^{4x-5}+2}$.

8.226. $y=\arccos \left(-\frac{1}{x}\right)+\frac{1}{4} \ln (x^2-2x)$.

8.227. $y=\sqrt{7-4x} \operatorname{ctg} 3x$. 8.228. $y=\frac{\ln (2x-1)}{\sqrt[3]{(5-x)^2}}$.

8.229. $y=\frac{x}{\sqrt{3-x^2}}-\log_4 e^x$. 8.230. $y=\cos^2 \frac{x}{3} \operatorname{tg} \frac{x}{2}$.

8.231. $y=2^{\sqrt[5]{x}} \sin^3 x$. 8.232. $y=\sqrt{2x-x^2}-\arccos (1-x)$.

8.233. $y=2^{x^2-x} \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{6}-3x\right)$. 8.234. $y=\sqrt[3]{\cos x}\, e^{-\arcsin x}$.

8.235. $y=\ln \operatorname{tg} x-\operatorname{ctg}^2 x-\frac{1}{4}\operatorname{ctg}^4 x$.

8.236. $y=\sqrt{3x-1}\,[\ln(3x-1)+5]$. 8.237. $y=\operatorname{arctg}\frac{x-1}{x+1}$.

8.238. $y=\ln(x^2-a^2)+\ln\frac{x-a}{x+a}$. 8.239. $y=x\arcsin\frac{x}{3}+\sqrt{9-x^2}$.

8.240. $y=\arccos\frac{1}{x}-\frac{\sqrt{x^2-1}}{x}$. 8.241. $y=\frac{\ln\cos x}{\ln\sin x}$.

8.242. $y=\frac{\arcsin 7x}{1-7x}$. 8.243. $y=\arccos\frac{1-\sqrt{x}}{1+\sqrt{x}}$.

8.244. $y=2\ln\operatorname{tg} x-\frac{1}{\sin^2 x}$. 8.245. $y=\frac{1}{3}\sin^3 x\,(6\cos^2 x+7)$.

8.246. $y=\ln(e^{-2x}+xe^{-2x})$. 8.247. $y=\operatorname{arctg}\frac{e^x-e^{-x}}{2}$.

8.248. $y=\ln\frac{\sqrt[3]{x^2-3x}}{2x+1}$. 8.249. $y=\operatorname{arctg}\frac{2x}{1-x^2}$.

8.250. $y=\ln\sqrt{x^2-2x+2}-4\operatorname{arctg}(x-1)$.

8.251. $y=\sqrt{1+x^2}\operatorname{arctg} x-\ln(x+\sqrt{1+x^2})$.

8.252. $y=xe^{1/\ln x}$. 8.253. $y=e^{\cos 5x}$.

8.254. $y=\sqrt{\sin\left(2x-\frac{\pi}{6}\right)}$. 8.255. $y=2^{\operatorname{tg} x^2}$.

8.256. $y=\operatorname{ctg}\sqrt{1-x^2}$. 8.257. $y=\ln^2\ln x$.

8.258. $y=\arcsin(2\ln^3 x)$. 8.259. $y=\sqrt[3]{\cos e^x}$.

8.260. $y=\sin^2(\operatorname{tg} x)$. 8.261. $y=\arccos\sin\frac{x}{3}$.

8.262. $y=e^{2^{\cos\left(x+\frac{\pi}{4}\right)}}$. 8.263. $y=\ln\log_4\sin x$.

8.264. $y=3^{1-2\sqrt{\cos x}}$. 8.265. $y=\sin^6(\sqrt[3]{x}-1)$.

8.266. $y=2\arccos\sqrt{\sin x}$. 8.267. $y=\ln^3(x^2-2\ln x)$.

8.268. $y=\sqrt[3]{\arcsin(2x+1)}$. 8.269. $y=\ln\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4}-\frac{x}{2}\right)$.

8.270. $y=\operatorname{arcctg}(\sqrt{\operatorname{tg} x-1})$. 8.271. $y=\operatorname{tg}^2\left(\frac{\pi}{8}-\sqrt{x}\right)$.

8.272. $y=\cos\ln(2x-x^2)$. 8.273. $y=4\operatorname{arctg}\sqrt{e^x-1}$.

8.274. $y=\sin^4\cos(\pi x-3)$. 8.275. $y=\ln(1+\sin^2 x)$.

8.276. $y=\ln\cos\frac{1}{x}$. 8.277. $y=\frac{1}{2}\arcsin\sqrt{1-4x}$.

8.278. $y=e^{\operatorname{ctg}(-1/x)}$. 8.279. $y=4^{\operatorname{arctg} 3x}$.

8.280. $y=e^{\cos^2 x}-e^{\sin^2 x}$. 8.281. $y=x^2\ln^3(-1/x)$.

8.282. $y=\ln\sin\frac{x+2}{x}$. 8.283. $y=\operatorname{arctg}\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$.

8.284. $y=\sqrt{\sin x}\,e^{\sqrt{\sin x}}$. 8.285. $y=\frac{7}{\operatorname{arctg} e^{4x}}$.

8.286. $y=\operatorname{arcctg}\ln\frac{1}{x^2}$. 8.287. $y=\frac{1}{\cos^2 3x}$.

8.288. $y=x\arcsin(3\ln^2 x)$. 8.289. $y=\frac{2}{\sqrt{1+\cos^2 x}}$.

8.290. $y=7^{\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}}$. 8.291. $y=\operatorname{arctg}\sqrt{\frac{1}{x}}$.

8.292. $y=12^{\cos^2\left(\frac{\pi}{4}-x\right)}$. 8.293. $y=\frac{\cos\sqrt{x^2+1}}{\sqrt{x^2+1}}$.

8.294. $y=\ln\operatorname{ctg}\frac{x}{2}+\frac{x}{\sin x}$. 8.295. $y=\arcsin\sqrt{1-e^x}$.

8.296. $y=\sin x\cdot e^{0,5\operatorname{ctg}^2 x}$. 8.297. $y=6^{\sin^2 x+4\sin x}$.

8.298. $y=\frac{1+\ln\sin 2x}{\sin 2x}$. 8.299. $y=e^{-x^2}\sqrt{\sin\frac{x}{2}}$.

8.300. $y=4(\sqrt{5x}-\operatorname{tg}\sqrt{5x})$. 8.301. $y=\sin 3^x\cdot\cos^2 3^x$.

8.302. $y=\ln x\sin\sqrt{\ln x}$. 8.303. $y=5\operatorname{arctg}e^{\sqrt{5x}}-\ln(e^{5x}+1)$.

8.304. $y=2^{\sqrt{\sin x}}\operatorname{tg}x$. 8.305. $y=\sin 4x\cdot e^{1/\cos 4x}$.

8.306. $y=2\ln\operatorname{tg}\frac{x}{8}+\cos^{-2}\frac{x}{8}$. 8.307. $y=\ln\frac{1+\sin 3x}{1-\sin 3x}$.

8.308. $y=\frac{1}{2}(\operatorname{tg}2x+\ln\cos^2 2x)$. 8.309. $y=5^{\ln\operatorname{ctg}2x-0,5\operatorname{ctg}4x}$.

8.310. $y=\sqrt{e^x-1}-\operatorname{arctg}\sqrt{e^x-1}$. 8.311. $y=\sin^2\frac{1-x}{1+x}$.

8.312. $y=\frac{1}{4}\ln\frac{\operatorname{tg}(x/2)-1}{\operatorname{tg}(x/2)+1}$. 8.313. $y=\operatorname{ctg}^2\operatorname{ctg}x+2\operatorname{ctg}\operatorname{ctg}x$.

8.314. $y=\frac{4^{\operatorname{tg}\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}$. 8.315. $y=10x\arccos\sqrt{1-5x}$.

8.316. $y=\sqrt{x^2-1}\,e^{\arcsin(1/x)}$. 8.317. $y=\frac{1}{6}\operatorname{arctg}\frac{e^{3x}-e^{-3x}}{2}$.

8.318. $y=\sqrt{1-9x^2}\,e^{\arcsin 3x}$. 8.319. $y=4e^{\sqrt{\ln x}}(1-\sqrt{\ln x})$.

8.320. $y=\frac{\arcsin^2 2x}{2}-\sqrt{1-4x^2}$.

§ 4. ПРОИЗВОДНЫЕ ВЫСШИХ ПОРЯДКОВ

Производная второго порядка (вторая производная) от функции $y=f(x)$ есть производная от ее производной:

$$y''=[f'(x)]'.$$

Производная третьего порядка (третья производная) от функции $y=f(x)$ есть производная от ее второй производной:

$$y'''=[f''(x)]' \text{ и т. д.}$$

Производная n-го порядка (n-я производная) от функции $y=f(x)$ есть производная от ее $(n-1)$-й производной:

$$y^{(n)}=[f^{(n-1)}(x)]'.$$

8.321. Найти третью производную от функции $y=x\ln 2x$ в точке $x=2$.

Решение. Дифференцируя данную функцию, получим

$$y' = \ln 2x + x \cdot \frac{2}{2x} = \ln 2x + 1.$$

Дифференцируя производную y', найдем

$$y'' = (y')' = 1/x.$$

Таким образом, третья производная

$$y''' = (y'')' = -1/x^2.$$

При $x=2$ имеем $y'''(2) = -1/2^2 = -1/4$.

В задачах 8.322—8.333 найти производные второго порядка от указанных функций.

8.322. $y = 3x^4 - 5x^3 + 2x^2 - x$. **8.323.** $y = (2x+5)^3$.

8.324. $y = 1/(x-1)$. **8.325.** $y = \cos^2 x$. **8.326.** $y = e^{-x^2}$.

8.327. $y = 5^{\sqrt{x}}$. **8.328.** $y = \operatorname{arctg} 3x$. **8.329.** $y = x \sin 2x$.

8.330. $y = \ln(x + \sqrt{1+x^2})$. **8.331.** $y = \ln \operatorname{tg} x$.

8.332. $y = (e^{3x} + e^{-3x})/6$. **8.333.** $y = e^x \cos x$.

8.334. Дана функция $f(x) = \sin 3x$. Найти $f''(-\pi/2)$, $f''(0)$, $f''(\pi/18)$.

8.335. Дана функция $r(\varphi) = \varphi^2 e^{-\varphi}$. Найти $r''(-1)$, $r''(0)$, $r''(2-\sqrt{2})$.

8.336. Показать, что функция $y = x^2 \ln x$ удовлетворяет уравнению $xy'' - y' = 2x$.

8.337. Показать, что функция $s(t) = \arcsin t$ удовлетворяет уравнению $(t^2-1)\dfrac{d^2s}{dt^2} + t\dfrac{ds}{dt} = 0$.

8.338. Показать, что функция $y = e^x \sin 2x$ удовлетворяет уравнению $y'' - 2y' + 5y = 0$.

8.339. Дана функция $f(x) = xe^x$. Найти $f'''(-3)$, $f'''(-1)$, $f'''(0)$.

8.340. Дана функция $r(\varphi) = \cos^2 2\varphi$. Найти $r'''(-\pi/2)$, $r'''(-\pi/24)$, $r'''(2\pi/3)$.

8.341. Показать, что функция $y = 4e^{-2x} - 5e^x$ удовлетворяет уравнению $y''' - 3y' + 2y = 0$.

8.342. Для функции $y = x^\alpha$ (α — любое действительное число) вычислить $y^{(n)}$.

8.343. Дана функция $y = 2^x$. Вычислить $y^{(n)}$.

8.344. Найти производную n-го порядка от функции $y = \sin x$.

§ 5. ПРОИЗВОДНАЯ НЕЯВНОЙ ФУНКЦИИ

Если функция $y = y(x)$ задана уравнением, не разрешенным относительно y, то для нахождения производной y' надо продифференцировать по x обе части этого уравнения, учитывая, что y есть функция от x, и затем разрешить полученное уравнение относительно y'. Чтобы найти y'', надо уравнение продифференцировать дважды по x и т. д.

8.345. Найти вторую производную y'' от функции y, заданной неявно уравнением $y^3 - 3y + 3x = 1$.

Решение. Дифференцируя по x обе части данного равенства и считая при этом y функцией от x, находим

$$3y^2y'-3y'+3=0,$$

или

$$y^2y'-y'+1=0, \qquad (*)$$

откуда

$$y'=1/(1-y^2).$$

Равенство (*) снова продифференцируем по x:

$$2yy'\cdot y'+y^2y''-y''=0.$$

Найдем отсюда $y''=2yy'^2/(1-y^2)$ и, заменяя y' через $1/(1-y^2)$, окончательно получим

$$y''=2y/(1-y^2)^3.$$

В задачах **8.346—8.355** найти производную $y'=\frac{dy}{dx}$ от неявной функции.

8.346. $3x+7y-15=0$. **8.347.** $x^2-y^2-2y=0$.
8.348. $x^2/4-y^2/9=1$. **8.349.** $x^3+y^3=8$. **8.350.** $y=\cos(x+y)$.
8.351. $xy=\operatorname{ctg} y$. **8.352.** $x=\operatorname{arctg}(x+y)$. **8.353.** $x^3-y^3=x^2y^2$.
8.354. $\ln y+y/x=0$. **8.355.** $6^x+6^y=6^{x+y}$.

В задачах **8.356—8.361** найти вторую производную $y''=\frac{d^2y}{dx^2}$ от неявной функции.

8.356. $x^2+y^2=1$. **8.357.** $x=e^{x+y}$. **8.358.** $x=\ln xy$.
8.359. $x^2/9+y^2/36=1$. **8.360.** $y=2x+\operatorname{arctg} y$.
8.361. $x^3+y^3-3y=0$.

8.362. Найти значение y' в точке $x=1$ для функции $y=y(x)$, заданной уравнением $x^2-2xy^2+1=0$, если $y(1)=-1$.

Решение. Продифференцировав по x обе части уравнения, имеем

$$2x-2(y^2+2xyy')=0, \text{ или } x-y^2-2xyy'=0.$$

Полагая $x=1$, $y=-1$, получим

$$1-1-2\cdot1\cdot(-1)\,y'=0,$$

откуда $y'(1)=0$.

8.363. Найти $y'(1)$ для функции $y=y(x)$, заданной уравнением $5^x-\sin y=5x+y^2$, если $y(1)=0$.

8.364. Вычислить $y'(\sqrt{2}/2)$ для функции $y=y(x)$, заданной уравнением $y\operatorname{arctg} y-\arcsin x=0$, если $y(\sqrt{2}/2)=1$.

8.365. Показать, что функция $y=y(x)$, заданная уравнением $e^x=xy$, удовлетворяет соотношению $xy'=y(x-1)$.

8.366. Показать, что функция $y=y(x)$, заданная уравнением $\sin y=x^2-y$, удовлетворяет соотношению $x=y'\cos^2(y/2)$.

8.367. Проверить, что функция $s=s(t)$, заданная уравнением $s=t+\ln s$, удовлетворяет соотношению $s'=-s''(s-1)^2$.

§ 6. ЛОГАРИФМИЧЕСКОЕ ДИФФЕРЕНЦИРОВАНИЕ

Логарифмическая производная функции $f(x)>0$ есть производная от логарифма данной функции $\ln f(x)$:

$$[\ln f(x)]' = \frac{f'(x)}{f(x)}.$$

Вычисление логарифмической производной называется *логарифмическим дифференцированием*. Логарифмическое дифференцирование применяется при вычислении производной *степенно-показательной функции*, т. е. функции вида

$$y=[u(x)]^{v(x)},$$

а также при нахождении производной произведения нескольких функций или производной дроби.

8.368. Вычислить производную y' от функции $y=(\sin 3x)^{\sqrt{x}}$.

Решение. Найдем логарифм данной функции:

$$\ln y = \sqrt{x}\ln\sin 3x.$$

Дифференцируя обе части этого равенства, получим

$$\frac{y'}{y}=\frac{1}{2\sqrt{x}}\ln\sin 3x+\sqrt{x}\,\frac{3\cos 3x}{\sin 3x},$$

откуда

$$y'=y\left(\frac{\ln\sin 3x}{2\sqrt{x}}+3\sqrt{x}\operatorname{ctg} 3x\right),$$

или

$$y'=(\sin 3x)^{\sqrt{x}}\left(\frac{\ln\sin 3x}{2\sqrt{x}}+3\sqrt{x}\operatorname{ctg} 3x\right).$$

8.369. Дана функция $y=\dfrac{\sqrt[3]{6x-1}\,\sqrt{2x+1}}{\sqrt[5]{15x-4}}$. Найти y'.

Решение. Непосредственное вычисление производной сопряжено с громоздкими выкладками, поэтому предварительно найдем логарифм данной функции:

$$\ln y=\frac{1}{3}\ln(6x-1)+\frac{1}{2}\ln(2x+1)-\frac{1}{5}\ln(15x-4).$$

Дифференцируя обе части последнего равенства, получим

$$\frac{y'}{y}=\frac{6}{3(6x-1)}+\frac{2}{2(2x+1)}-\frac{15}{5(15x-4)},$$

или

$$y'=y\left(\frac{2}{6x-1}+\frac{1}{2x+1}-\frac{3}{15x-4}\right).$$

Отсюда найдем

$$y'=\frac{\sqrt[3]{6x-1}\,\sqrt{2x+1}}{\sqrt[5]{15x-4}}\left(\frac{2}{6x-1}+\frac{1}{2x+1}-\frac{3}{15x-4}\right).$$

В задачах **8.370—8.381** найти производные следующих функций.

8.370. $y=x^{x+1}$. **8.371.** $y=x^{\sin 2x}$. **8.372.** $y=(\sqrt{x})^{\operatorname{tg} 2x}$.

8.373. $y=(\cos x)^{\sqrt[3]{x}}$. **8.374.** $y=(\sin 3x)^{x^2-1}$.

8.375. $y=(\cos 2x)^{\sin x}$. **8.376.** $y=(\operatorname{arctg} x)^{\sqrt{x^2+1}}$.
8.377. $y=(1/x)^{\arcsin x}$. **8.378.** $y=(\sqrt[4]{x})^{\cos 4x}$.
8.379. $y=(\operatorname{tg} 3x)^{\sin 6x}$. **8.380.** $y=(x^2-1)^{1/x}$.
8.381. $y=(\sqrt{1-x^3})^{x^2}$.
8.382. Дана функция $y=(x+1)^{\sqrt{x}}$. Вычислить $y'(1)$.

В задачах **8.383—8.389** найти производные следующих функций.

8.383. $y=(2x-5)^3(7x-1)(x-3)$.
8.384. $y=(3x-4)^4(2x+7)^5(x-2)^3$.
8.385. $y=\sqrt[5]{(x+2)^2}\,(x^2-1)^3\sqrt{x-4}$.

8.386. $y=\dfrac{\sqrt[4]{(6x+5)^3}\,(4x-7)^2}{(2x+9)^3}$. **8.387.** $y=\dfrac{e^x \arcsin x}{x^2-1}$.

8.388. $y=\dfrac{(4x+9)^3\sqrt[5]{(10x+1)^4}}{\sqrt[3]{(6x-1)^2}}$. **8.389.** $y=\dfrac{\ln^3 x}{\sqrt{x-1}\sin 2x}$.

8.390. Вычислить $y'(0)$ для функции $y=\sqrt[5]{\dfrac{(1-x^2)\cos x}{(x^2+1)^3}}$.

8.391. Дана функция $y=\dfrac{(2x-1)^3\sqrt[4]{4x^2-1}}{(2x+1)^3}$. Найти корни ее производной.

§ 7. ПРОИЗВОДНАЯ ФУНКЦИИ, ЗАДАННОЙ ПАРАМЕТРИЧЕСКИ

Если зависимость функции y от независимой переменной x задана с помощью вспомогательной переменной (параметра) t:

$$\left.\begin{aligned} x&=x(t),\\ y&=y(t),\end{aligned}\right\}$$

то

$$y'_x=\frac{y'_t}{x'_t},\quad y''_{xx}=\frac{(y'_x)'_t}{x'_t}.$$

8.392. Дана функция

$$\left.\begin{aligned} x&=t^2-1,\\ y&=t^3+5.\end{aligned}\right\}$$

Определить первую и вторую производные от y по x.

Решение. Имеем

$$y'_x=\frac{y'_t}{x'_t}=\frac{3t^2}{2t}=\frac{3}{2}t,$$

$$y''_{xx}=\frac{d}{dx}(y'_x)=\frac{d}{dt}(y'_x)\frac{dt}{dx}=\frac{\frac{d}{dt}(y'_x)}{x'(t)}=\frac{\frac{d}{dt}\left(\frac{3}{2}t\right)}{2t}=\frac{\frac{3}{2}}{2t}=\frac{3}{4t}.$$

В задачах **8.393—8.403** для функций, заданных параметрически, найти указанные производные.

8.393. $\left.\begin{array}{l} x=3t-2, \\ y=t^3+t. \end{array}\right\}$ Найти $\frac{dy}{dx}$. 8.394. $\left.\begin{array}{l} x=\sqrt[3]{t}, \\ y=\sqrt[4]{t}. \end{array}\right\}$ Найти $\frac{dy}{dx}$.

8.395. $\left.\begin{array}{l} x=e^{-2t}, \\ y=e^{t}. \end{array}\right\}$ Найти $\left(\frac{dy}{dx}\right)_{t=1}$.

8.396. $\left.\begin{array}{l} x=5\sin t, \\ y=5\cos t. \end{array}\right\}$ Найти $\left(\frac{dy}{dx}\right)_{t=\pi/3}$.

8.397. $\left.\begin{array}{l} x=\ln(1+t^2), \\ y=\operatorname{arcctg} t. \end{array}\right\}$ Найти $\left(\frac{dy}{dx}\right)_{t=-1/6}$.

8.398. $\left.\begin{array}{l} x=a(\sin t-t\cos t), \\ y=a(\cos t+t\sin t). \end{array}\right\}$ Найти $\left(\frac{dy}{dx}\right)_{t=\pi/4}$.

8.399. $\left.\begin{array}{l} x=3t/(1+t^3), \\ y=3t^2/(1+t^3). \end{array}\right\}$ Найти $\left(\frac{dy}{dx}\right)_{t=0}$, $\left(\frac{dy}{dx}\right)_{t=1}$.

8.400. $\left.\begin{array}{l} x=t^2+3, \\ y=t^5-7. \end{array}\right\}$ Найти $\frac{dy}{dx}$, $\frac{d^2y}{dx^2}$.

8.401. $\left.\begin{array}{l} x=3\cos t, \\ y=3\sin t. \end{array}\right\}$ Найти $\frac{dy}{dx}$, $\frac{d^2y}{dx^2}$.

8.402. $\left.\begin{array}{l} x=e^{-\varphi}, \\ y=e^{3\varphi}. \end{array}\right\}$ Найти $\left(\frac{d^2y}{d\varphi^2}\right)_{\varphi=0}$, $\left(\frac{d^2y}{d\varphi^2}\right)_{\varphi=1/5}$.

8.403. $\left.\begin{array}{l} x=\ln t, \\ y=t^2. \end{array}\right\}$ Найти $\left(\frac{dy}{dx}\right)_{t=1}$, $\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)_{t=1}$.

§ 8. ГЕОМЕТРИЧЕСКИЕ ПРИЛОЖЕНИЯ ПРОИЗВОДНОЙ

Производная функции $y=y(x)$ при данном значении аргумента $x=x_0$ равна угловому коэффициенту касательной, проведенной к графику этой функции в точке с абсциссой x_0 (рис. 57):

$$y'(x_0)=\operatorname{tg}\alpha. \tag{1}$$

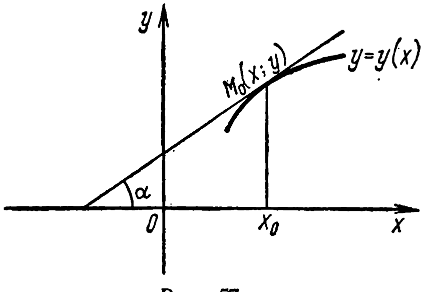


Рис. 57.

Уравнение касательной к графику функции $y=y(x)$ в точке $M_0(x_0;\ y_0)$ имеет вид

$$y-y_0=y'(x_0)(x-x_0). \tag{2}$$

Если $y(x)$ имеет при $x=x_0$ бесконечную производную, то уравнение касательной таково:

$$x=x_0. \tag{3}$$

Уравнение нормали, т. е. прямой, проходящей через точку касания $M_0(x_0;\ y_0)$ перпендикулярно касательной, записывается в виде

$$y-y_0=-\frac{1}{y'(x_0)}(x-x_0). \tag{4}$$

8.404. Составить уравнения касательной и нормали к параболе $y=2x^2-6x+3$ в точке $M_0(1;\ -1)$.

Решение. Найдем производную функции $y=2x^2-6x+3$ при $x=1$. Имеем $y'=4x-6$, откуда $y'(1)=-2$.

Воспользовавшись уравнением (2), получим искомое уравнение касательной:

$$y-(-1)=-2(x-1), \text{ или } 2x+y-1=0.$$

Уравнение нормали получим, используя уравнение (4):

$$y+1=\frac{1}{2}(x-1), \text{ или } x-2y-3=0.$$

8.405. Составить уравнения касательной и нормали:

1) к гиперболе $y=(x+1)/(x-1)$ в точке $A(2;\ 3)$;

2) к кривой $y=x^3+4x^2-1$ в точке с абсциссой $x_0=-1$;

3) к параболе $y=x^2-4x+4$ в точках, ординаты которых равны единице.

8.406. Дана кривая $y=\sqrt[3]{(x-1)^2}$. Написать уравнение касательной к этой кривой в точке с абсциссой $x_0=1$.

Указание: при $x=1$ данная функция имеет бесконечную производную и, следовательно, уравнение касательной записывается в виде (3).

8.407. Найти угол наклона к оси Ox касательной, проведенной к гиперболе $x^2-4y^2=1$ в точке $A(2;\ \sqrt{3}/2)$.

8.408. Составить уравнения касательных к окружности $x^2+y^2-2x+2y-3=0$ в точках ее пересечения с осью абсцисс.

8.409. Из точки $A(-1;\ -5)$, не лежащей на параболе $y=x^2-3x-8$, провести касательные к ней.

Решение. Пусть x_0, $y(x_0)$ — координаты точки касания M_0 одной из касательных к данной параболе. Тогда уравнение касательной имеет вид (2):

$$y-y(x_0)=y'(x_0)(x-x_0),$$

или

$$y-(x_0^2-3x_0-8)=(2x_0-3)(x-x_0). \qquad (*)$$

Так как касательная проходит через точку $A(-1;\ -5)$, то координаты этой точки должны удовлетворять уравнению (*), т. е.

$$-5-(x_0^2-3x_0-8)=(2x_0-3)(-1-x_0).$$

Тем самым получено уравнение относительно абсциссы точки касания; решая его, находим $x_0=0$ и $x_0=-2$. Подставляя полученные значения абсцисс точек касания в уравнение (*), находим искомые уравнения касательных:

$$y-(-8)=(2\cdot 0-3)(x-0) \text{ и } y-2=[2\cdot(-2)-3](x-2),$$

или

$$3x+y+8=0 \text{ и } 7x+y+12=0.$$

8.410. Составить уравнение касательной, проведенной из точки $A(0;\ -1/2)$ к ветви гиперболы $y=\sqrt{x^2-1}$.

8.411. На линии $y=x^3-3x^2$ найти точки, в которых касательная параллельна оси абсцисс.

8.412. На синусоиде $y=\sin x$ найти точки, в которых касательная параллельна прямой $x-y+1=0$.

8.413. К кривой $y=x^4-2x^2+3x-1$ провести касательные, параллельные прямой $3x-y+1=0$.

8.414. Составить уравнения касательных, проведенных к окружности $x^2+y^2=32$ перпендикулярно прямой $x+y+4=0$.

8.415. Доказать, что отрезок касательной к гиперболе $y=a/x$, заключенный между координатными осями, делится в точке касания пополам.

8.416. Составить уравнение касательной к кривой

$$\left.\begin{aligned} x&=t^2-1, \\ y&=t^2+t-3 \end{aligned}\right\}$$

в точке $M(3;\ -1)$.

Решение. Определим прежде всего значение t, соответствующее точке $M(3;\ -1)$. Это значение должно одновременно удовлетворять уравнениям

$$t^2-1=3 \text{ и } t^2+t-3=-1,$$

т. е.

$$t^2=4 \text{ и } t^2+t-2=0.$$

Корни первого уравнения $t_1=-2$ и $t_2=2$; корни второго уравнения $t_1=$ $=-2$ и $t_2=1$. Таким образом, точке M соответствует значение $t=-2$.

Угловой коэффициент касательной к кривой в точке M равен значению производной y'_x в этой точке:

$$y'_x=\frac{y'_t}{x'_t}=\left.\frac{2t+1}{2t}\right|_{t=-2}=\frac{3}{4}.$$

Следовательно, искомое уравнение касательной имеет вид

$$y-(-1)=\frac{3}{4}(x-3), \text{ или } 3x-4y-13=0.$$

8.417. Найти уравнения касательной и нормали к кривой

$$\left.\begin{aligned} x&=2\cos t, \\ y&=4\sin t \end{aligned}\right\}$$

в точке $t=\pi/4$.

8.418. Найти точки кривой

$$\left.\begin{aligned} x&=2t^3-9t^2+12t, \\ y&=t^2-t+1, \end{aligned}\right\}$$

в которых касательная параллельна оси Oy.

Указание: найти значения параметра t, при которых $x'_t=0$.

8.419. Составить уравнения касательной и нормали к кривой

$$\left.\begin{aligned} x&=t^2-3t+3, \\ y&=t^2-4t+3 \end{aligned}\right\}$$

в точке $M(1;\ -1)$.

§ 9. МЕХАНИЧЕСКИЕ ПРИЛОЖЕНИЯ ПРОИЗВОДНОЙ

Производная $y'(x_0)$ от функции $y=y(x)$, вычисленная при значении аргумента $x=x_0$, представляет собой *скорость изменения этой функции* относительно независимой переменной x в точке $x=x_0$.

В частности, если зависимость между пройденным путем s и временем t при прямолинейном движении выражается формулой $s=s(t)$, то скорость движения в любой момент времени t есть $\frac{ds}{dt}$, а ускорение (т. е. скорость изменения скорости движения) есть $\frac{d^2s}{dt^2}$.

8.420. Точка движется прямолинейно по закону $s=t^3/3+2t^2-t$ (s выражается в метрах, t — в секундах). Найти скорость и ускорение движения через 1 с после начала движения.

Решение. Скорость прямолинейного движения равна производной пути по времени:

$$v(t)=\frac{ds}{dt}=t^2+4t-1.$$

Отсюда $v(1)=4$ (м/с).

Ускорение прямолинейного движения равно второй производной пути по времени:

$$a(t)=\frac{d^2s}{dt^2}=2t+4$$

и, следовательно, $a(1)=6$ (м/с^2).

8.421. Закон прямолинейного движения точки выражается формулой $s=1+t^2-t^4/4$ (s — в метрах, t — в секундах). Найти скорость и ускорение движения в моменты времени $t=0$, $t=2$, $t=3$.

8.422. Точка движется по оси абсцисс по закону $x=(t^4-4t^3+2t^2-12t)/4$ (x — в метрах, t — в секундах). В какой момент времени точка остановится?

8.423. Тело массой 25 кг движется прямолинейно по закону $s=\ln(1+t^2)$. Найти кинетическую энергию тела ($mv^2/2$) через 2 с после начала движения.

8.424. Скорость прямолинейно движущегося тела прямо пропорциональна квадратному корню из пройденного пути. Доказать, что это движение происходит под действием постоянной силы.

8.425. Вращающееся колесо задерживается тормозом. Угол φ, на который колесо поворачивается в течение t с, определяется равенством $\varphi=1+2t-5t^2$. Найти угловую скорость и угловое ускорение движения через 2 с после включения тормоза. Определить, в какой момент времени колесо остановится.

Указание: угловая скорость $\omega=\frac{d\varphi}{dt}$, угловое ускорение $a=\frac{d^2\varphi}{dt^2}$.

8.426. Радиус основания цилиндра увеличивается со скоростью 3 см/с, а высота его уменьшается со скоростью 2 см/с. Какова скорость изменения объема цилиндра?

Решение. Объем цилиндра $V=\pi r^2 h$, где r — радиус основания, h — высота цилиндра. Продифференцируем обе части этого равенства по времени t, учитывая, что V, r и h зависят от t:

$$\frac{dV}{dt}=\pi\left(2r\frac{dr}{dt}h+r^2\frac{dh}{dt}\right).$$

Так как по условию $\frac{dr}{dt}=3$ (см/с), $\frac{dh}{dt}=-2$ (см/с), то

$$\frac{dV}{dt}=\pi(6rh-2r^2).$$

Полученная формула и определяет скорость изменения объема.

8.427. Радиус круга изменяется со скоростью 5 см/с. С какой скоростью изменяется длина окружности?

8.428. Сторона квадрата увеличивается со скоростью 3 см/с. Какова скорость изменения площади квадрата в момент, когда его сторона равна 4 см?

8.429. Точка движется по параболе $y=\sqrt{x}$. Какая из ее координат изменяется быстрее?

§ 10. ДИФФЕРЕНЦИАЛ ФУНКЦИИ

Дифференциалом dy *функции* $y=y(x)$ *называется главная часть ее приращения, пропорциональная приращению* Δx *независимой переменной* x.

Дифференциал dx независимой переменной x равен ее приращению Δx:

$$dx=\Delta x.$$

Дифференциал любой дифференцируемой функции $y=y(x)$ равен *произведению ее производной на дифференциал независимой переменной*:

$$dy=y'(x)\,dx. \tag{1}$$

Соотношение (1) остается в силе и в том случае, когда x есть функция другого аргумента — в этом заключается *инвариантность* формы дифференциала.

Если Δx достаточно мало по абсолютной величине, то с точностью до бесконечно малых более высокого порядка, чем Δx, имеет место приближенное равенство

$$\Delta y\approx dy,$$

или

$$y(x+\Delta x)\approx y(x)+y'(x)\,\Delta x. \tag{2}$$

8.430. Найти приращение Δy и дифференциал dy функции $y=x^2-x+1$ при $x=3$ и $\Delta x=0{,}01$. Каковы абсолютная и относительная погрешности, которые получаются при замене приращения функции ее дифференциалом?

Решение. Имеем

$$\Delta y=y(x+\Delta x)-y(x)=y(3+0{,}01)-y(3)=$$
$$=[(3+0{,}01)^2-(3+0{,}01)+1]-(3^2-3+1)=0{,}0501.$$

Дифференциал функции найдем по формуле (1):

$$dy=y'(x)\,\Delta x=y'(3)\cdot 0{,}01=(2x-1)_{x=3}\cdot 0{,}01=(2\cdot 3-1)\cdot 0{,}01=0{,}05.$$

Абсолютная погрешность

$$|dy-\Delta y|=|0{,}05-0{,}0501|=0{,}0001.$$

Относительная погрешность

$$\left|\frac{dy-\Delta y}{\Delta y}\right|=\frac{0{,}0001}{0{,}0501}\approx 0{,}002=0{,}2\%.$$

В задачах 8.431—8.438 найти дифференциалы функций для произвольных значений аргумента и его приращения.

8.431. $y=1/x^2$. **8.432.** $y=(x+2)/(x-1)$. **8.433.** $y=\operatorname{arctg} 3x$.
8.434. $y=\ln(1+x^2)$. **8.435.** $y=\sin^2 x$. **8.436.** $y=e^x\cos x$.
8.437. $y=5^{x^2}\arccos(1/x)$. **8.438.** $y=(\operatorname{tg}\sqrt{x})/\sqrt{x}$.

8.439. Показать, что дифференциал dy и приращение Δy линейной функции $y=ax+b$ при любом значении аргумента совпадают.

8.440. Найти приращение и дифференциал функции $y=\sqrt{x}$ при $x=9$ и $\Delta x=0{,}2$. Вычислить абсолютную и относительную погрешности, которые получаются при замене приращения функции ее дифференциалом.

8.441. Найти приращение и дифференциал функции $y=1/(x-1)$ при $x=2$ и $\Delta x=0{,}01$. Вычислить абсолютную и относительную погрешности, получающиеся при замене приращения функции ее дифференциалом.

8.442. На сколько (приблизительно) увеличилось ребро куба, если объем его изменился с 27 м^3 до 27,2 м^3?

Решение. Если y — ребро куба, то его объем $V=y^3$. Таким образом, задача сводится к отысканию приращения Δy функции $y=\sqrt[3]{V}$ при $V=27$ и $\Delta V=27{,}2-27=0{,}2$. Приращение Δy найдем, исходя из приближенного равенства $\Delta y\approx dy$, т. е.

$$\Delta y\approx dy=y'dV=\frac{1}{3\sqrt[3]{V^2}}\cdot\Delta V=\frac{1}{3\cdot 9}\cdot 0{,}2\approx 0{,}007 \text{ (м)}.$$

8.443. На сколько приблизительно изменится сторона квадрата, если его площадь уменьшить с 16 м^2 до 15,82 м^2?

8.444. При измерении стороны квадрата допущена ошибка в 1%. По полученному приближенному значению вычислена площадь квадрата. Какая при этом допущена погрешность?

Решение. Если x — точное значение стороны квадрата, а $x+dx$ — полученное в результате измерения ее значение, то ошибка измерения $dx=\Delta x=\pm 0{,}01x$. Ошибка ΔS, сделанная при измерении площади S квадрата, приближенно равна

$$\Delta S\approx dS=d(x^2)=2x\cdot dx=2x(\pm 0{,}01x)=\pm 0{,}02x^2=\pm 0{,}002S,$$

что составляет 2% площади.

8.445. В результате измерения радиуса круга допущена ошибка в 1%. Показать, что при вычислении площади круга по формуле $S=\pi r^2$, где r — полученный в результате измерения радиус, погрешность составляет 2% от площади.

8.446. Вычислить приближенно $\sqrt[3]{8,01}$.

Решение. Рассмотрим функцию $y=\sqrt[3]{x}$ и положим $x=8$, $\Delta x=0,01$. Тогда, воспользовавшись формулой (2), найдем $y(8,01)=\sqrt[3]{8,01}$:

$$y(8+0,01)\approx y(8)+y'(8)\cdot 0,01,$$

т. е.

$$y(8,01)\approx\sqrt[3]{8}+\frac{1}{3\sqrt[3]{64}}\cdot 0,01=2+\frac{1}{3\cdot 4}\cdot 0,01=2+\frac{0,01}{12}\approx 2,0008.$$

Таким образом, $\sqrt[3]{8,01}\approx 2,0008$.

8.447. Доказать справедливость следующих приближенных равенств:

а) $(1+\alpha)^k\approx 1+k\alpha$; б) $\sqrt[k]{1+\alpha}\approx 1+k/\alpha$; в) $\ln(1+\alpha)\approx\alpha$.

Указание: рассмотреть функции $(1+x)^k$, $\sqrt[k]{1+x}$, $\ln(1+x)$ и воспользоваться формулой (2), считая $x=0$ и $\Delta x=\alpha$.

В задачах **8.448—8.456** найти приближенные значения заданных выражений.

8.448. $\sqrt[4]{17}$. **8.449.** $e^{0,2}$. **8.450.** $\cos 32°$. **8.451.** $\operatorname{tg} 44°52'$.
8.452. $0,96^3$. **8.453.** $\lg 10,08$. **8.454.** $\arcsin 0,48$.
8.455. $\ln 1,01$. **8.456.** $\sqrt[3]{26,97}$.

8.457. Выразить абсолютную погрешность функции $y=\ln x$ через абсолютную погрешность ее аргумента.

Решение. Если при непосредственном измерении некоторой величины x допущена достаточно малая погрешность Δx, то при вычислении величины y по формуле $y=\ln x$ это приводит к некоторой погрешности $\Delta y=\ln(x+\Delta x)-\ln x$. Заменяя приращение Δy функции $y=\ln x$ ее дифференциалом dy, получим выражение для абсолютной погрешности натурального логарифма:

$$\Delta y=|y'_x|\,\Delta x=\frac{\Delta x}{x},$$

т. е. абсолютная погрешность равна относительной погрешности аргумента.

8.458. Для следующих функций получить выражения для определения абсолютных погрешностей через абсолютные погрешности их аргументов:

1) $y=\sin x$ $(0<x<\pi/2)$;
2) $y=\ln\sin x$ $(0<x<\pi/2)$;
3) $y=\ln\operatorname{tg} x$ $(0<x<\pi/2)$.

ГЛАВА 9

ОСНОВНЫЕ ТЕОРЕМЫ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО ИСЧИСЛЕНИЯ

§ 1. ТЕОРЕМЫ ФЕРМА, РОЛЛЯ, ЛАГРАНЖА И КОШИ

1. Теорема Ферма. *Пусть функция $f(x)$ непрерывна в интервале $]a, b[$ и в некоторой внутренней точке $x=c$ этого интервала принимает наибольшее (или наименьшее) значение. Тогда если в этой точке существует конечная производная $f'(x)$, то она равна нулю, т. е. $f'(c)=0$.*

Геометрический смысл теоремы Ферма иллюстрирует рис. 58: в точке C графика функции, удовлетворяющей условиям указанной теоремы, *касательная параллельна оси Ox.*

2. Теорема Ролля. *Если функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a, b]$, дифференцируема в интервале $]a, b[$ и принимает равные значения на его концах,*

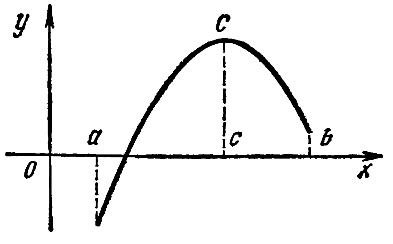


Рис. 58.

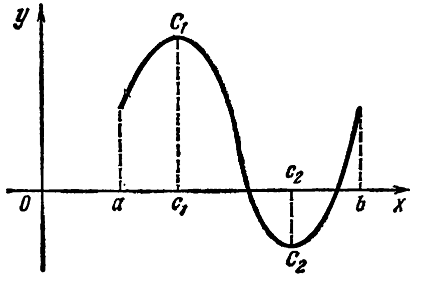


Рис. 59.

т. е. $f(a)=f(b)$, то в интервале $]a, b[$ найдется по крайней мере одна такая точка c, что $f'(c)=0$.

Геометрический смысл теоремы Ролля состоит в следующем: если крайние ординаты графика дифференцируемой функции $y=f(x)$ равны, то на кривой *найдется хотя бы одна точка, в которой касательная параллельна оси Ox* (для случая, изображенного на рис. 59, существуют две такие точки: C_1 и C_2).

3. Теорема Лагранжа (теорема о конечном приращении). *Если функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a, b]$ и дифференцируема в интервале $]a, b[$, то в этом интервале найдется по крайней мере одна такая точка c, что*

$$f(b)-f(a)=(b-a)f'(c). \qquad (1)$$

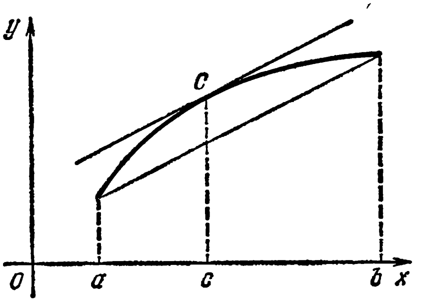


Рис. 60.

Геометрический смысл теоремы Лагранжа: на произвольной дуге графика дифференцируемой функции всегда *найдется такая точка, в которой касательная к графику параллельна хорде, стягивающей концы дуги* (рис. 60).

4. Теорема Коши (теорема об отношении приращений двух функций). *Если функции $f(x)$ и $\varphi(x)$ непрерывны на отрезке $[a, b]$ и дифференцируемы в интервале $]a, b[$, причем $\varphi'(x)\neq 0$, то в этом интервале найдется по крайней мере одна такая точка c, что*

$$\frac{f(b)-f(a)}{\varphi(b)-\varphi(a)}=\frac{f'(c)}{\varphi'(c)}. \qquad (2)$$

Геометрический смысл теоремы Коши тот же, что и теоремы Лагранжа, если рассматривать функции $y=f(x)$ и $x=\varphi(x)$ как параметрические уравнения некоторой кривой на плоскости xOy, а x при этом считать параметром кривой.

9.1. Удовлетворяет ли функция $f(x)=3-x^2$ условиям теоремы Ферма на отрезке $[1, 4]$?

Решение. Данная функция условиям теоремы Ферма на отрезке $[1, 4]$ не удовлетворяет, так как она монотонно убывает на этом отрезке и, следовательно, принимает наибольшее значение при $x=1$ и наименьшее значение при $x=4$, т. е. не во внутренних точках отрезка $[1, 4]$. Поэтому теорема Ферма здесь неприменима; иными словами, нельзя утверждать, что $f'(1)=f'(4)=0$. Действительно, $f'(1)=-2$, $f'(4)=-8$.

9.2. Справедлива ли теорема Ролля: 1) для функции $f(x)=x^2+6x-35$ на отрезке $[-5, -1]$; 2) для функции $f(x)=\sqrt[3]{(x-4)^2}$ на отрезке $[0, 8]$?

Решение. 1) Так как функция $f(x)$ непрерывна и дифференцируема при всех x и ее значения на концах отрезка $[-5, -1]$ равны, т. е. $f(-5)=f(-1)=-40$, то в данном случае все условия теоремы Ролля выполняются. Значение $x=c$, при котором производная $f'(x)$ обращается в нуль, найдем из уравнения $f'(c)=2c+6=0$, откуда $c=-3$.

2) Функция непрерывна на отрезке $[0, 8]$, кроме того, $f(0)=f(8)=2\sqrt[3]{2}$; значит, два условия теоремы Ролля выполнены. Однако производная $f'(x)=2/(3\sqrt[3]{x-4})$ не существует во внутренней точке $x=4$ интервала $]0, 8[$ и, следовательно, третье условие теоремы Ролля не выполняется. Таким образом, эта теорема к данной функции неприменима. В самом деле, $f'(x)\neq 0$ на отрезке $[0, 8]$.

9.3. На дуге AB кривой $y=x^3-3x$ найти точку, в которой касательная параллельна хорде, соединяющей точки $A(-1; 2)$ и $B(3; 18)$.

Решение. Функция $y=x^3-3x$ на отрезке $[-1, 3]$ непрерывна и дифференцируема, поэтому к ней применима теорема Лагранжа. Запишем формулу Лагранжа применительно к данной функции:

$$f(3)-f(-1)=f'(c)[3-(-1)], \text{ т. е. } 18-2=(3c^2-3)4,$$

откуда $c_1=-\sqrt{7/3}$, $c_2=\sqrt{7/3}$. Очевидно, что только значение c_2 удовлетворяет условию задачи, так как c_2 является внутренней точкой отрезка $[-1, 3]$. Подставив это значение в уравнение кривой, найдем $y=(-2/3)\sqrt{7/3}$. Итак, искомой является точка $M\left(\sqrt{\frac{7}{3}};\ -\frac{2}{3}\sqrt{\frac{7}{3}}\right)$.

9.4. Проверить, что функции $f(x)=x^2+4x$ и $\varphi(x)=x^3-x-2$ удовлетворяют условиям теоремы Коши на отрезке $[1, 3]$ и найти соответствующее значение c.

Решение. Функции $f(x)$ и $\varphi(x)$ непрерывны при всех x, а, следовательно, и на отрезке $[1, 3]$; их производные $f'(x)=2x+4$ и $\varphi'(x)=3x^2-1$ существуют везде; кроме того, $\varphi'(x)$ на заданном отрезке в нуль не обращается.

Следовательно, к данным функциям применима теорема Коши:

$$\frac{f(3)-f(1)}{\varphi(3)-\varphi(1)}=\frac{f'(c)}{\varphi'(c)}, \text{ т. е. } \frac{21-5}{22-(-2)}=\frac{2c+4}{3c^2-1},$$

откуда находим два значения c:

$$c_1=(3-\sqrt{93})/6,\quad c_2=(3+\sqrt{93})/6.$$

Из полученных значений только c_2 удовлетворяет условию задачи, так как c_2 является внутренней точкой отрезка [1, 3].

9.5. Показать, что функция $3+2x-x^2$ удовлетворяет условиям теоремы Ферма на отрезке [0, 4] и найти соответствующее значение c.

9.6. Проверить справедливость теоремы Ролля для следующих функций:

1) $f(x)=x^2-3x+5$ на отрезке $[1, 2]$;
2) $f(x)=x^3-x^2-x+1$ на отрезке $[-1, 1]$;
3) $f(x)=\sqrt[3]{x^2+9x+14}$ на отрезке $[-7, -2]$;
4) $f(x)=\ln\sin x$ на отрезке $[\pi/6, 5\pi/6]$.

Найти соответствующие значения c.

9.7. Функция $f(x)=x^2+\sqrt[3]{x^2}$ принимает на концах отрезка $[-1, 1]$ равные значения: $f(-1)=f(1)=2$. Справедлива ли для этой функции теорема Ролля на отрезке $[-1, 1]$?

9.8. Показать, что производная многочлена $f(x)=x^3-6x^2+11x-6$ имеет действительный корень, лежащий в интервале $]1, 3[$.

Указание: найти корни данного многочлена и воспользоваться теоремой Ролля.

9.9. Проверить справедливость теоремы Лагранжа для следующих функций:

1) $f(x)=2x-x^2$ на отрезке $[0, 1]$;
2) $f(x)=\sqrt{x}$ на отрезке $[1, 4]$;
3) $f(x)=x^3-4x^2+5x$ на отрезке $[0, 3]$;
4) $f(x)=\ln x$ на отрезке $[1, e]$.

Найти соответствующие значения c.

9.10. Показать, что теорема Лагранжа на отрезке $[-2, 2]$ неприменима к функциям $f_1(x)=1/x$ и $f_2(x)=1-\sqrt[5]{x^4}$. Пояснить это утверждение графически.

9.11. В какой точке касательная к кривой $y=x^2-8x$ параллельна хорде, стягивающей точки $A(-1;\ 9)$ и $B(5;\ -15)$?

9.12. Проверить справедливость теоремы Коши для следующих пар функций:

1) $f(x)=x^3$, $\varphi(x)=x^2$ на отрезке $[1, 2]$;
2) $f(x)=x^2-2x+3$, $\varphi(x)=x^3-7x^2+20x-5$ на отрезке $[1, 4]$;
3) $f(x)=\sqrt{x+9}$, $\varphi(x)=\sqrt{x}$ на отрезке $[0, 16]$;
4) $f(x)=\sin x$, $\varphi(x)=\cos x$ на отрезке $[0, \pi/2]$.

Найти соответствующие значения c.

§ 2. РАСКРЫТИЕ НЕОПРЕДЕЛЕННОСТЕЙ. ПРАВИЛО ЛОПИТАЛЯ

1. Неопределенности вида 0/0 и ∞/∞. *Пусть функции $f(x)$ и $\varphi(x)$ дифференцируемы в некоторой окрестности точки a (за исключением, быть может, ее самой), причем $\varphi'(x) \neq 0$. Тогда если*

$$\lim_{x\to a} f(x) = \lim_{x\to a} \varphi(x) = 0 \quad \text{или} \quad \lim_{x\to a} f(x) = \lim_{x\to a} \varphi(x) = \infty,$$

то

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{\varphi(x)} = \lim_{x\to a} \frac{f'(x)}{\varphi'(x)} \tag{1}$$

при условии, что предел правой части равенства (1) существует (**правило Лопиталя**). Это правило применимо и в том случае, когда $x \to \infty$.

2. Неопределенности вида $0\cdot\infty$ и $\infty-\infty$. Такие неопределенности с помощью алгебраических преобразований приводятся к неопределенностям вида 0/0 или ∞/∞.

3. Неопределенности вида 1^∞, ∞^0 и 0^0. Эти неопределенности с помощью логарифмирования сводятся к неопределенности вида $0\cdot\infty$.

9.13. Применяя правило Лопиталя, найти пределы следующих функций:

1) $\lim\limits_{x\to -1} \dfrac{3x^2+2x-1}{-x^2+x+2}$; 2) $\lim\limits_{x\to +0} \dfrac{\ln x}{\operatorname{ctg} x}$;

3) $\lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{x^n}{\ln x}$; $\lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{e^x}{x^n}$ (n — целое положительное число);

4) $\lim\limits_{x\to 0} x \operatorname{ctg} 3x$; 5) $\lim\limits_{x\to -3} \left(\dfrac{6}{9-x^2} - \dfrac{1}{x+3}\right)$;

6) $\lim\limits_{x\to 1} x^{1/(1-x)}$; 7) $\lim\limits_{x\to \pi/2} (\operatorname{tg} x)^{\cos x}$; 8) $\lim\limits_{x\to +0} x^{4/(1-2\ln x)}$.

Решение. 1) Если в заданное отношение подставить $x=-1$, то получим неопределенность вида 0/0. Воспользуемся правилом Лопиталя, т. е. заменим отношение функций отношением их производных:

$$\lim_{x\to -1} \frac{3x^2+2x-1}{-x^2+x+2} = \lim_{x\to -1} \frac{6x+2}{-2x+1} = -\frac{4}{3}.$$

2) Здесь имеет место неопределенность вида ∞/∞. По правилу Лопиталя находим

$$\lim_{x\to +0} \frac{\ln x}{\operatorname{ctg} x} = \lim_{x\to +0} \frac{1/x}{-1/\sin^2 x} = -\lim_{x\to +0} \frac{\sin^2 x}{x}.$$

Последний предел дает неопределенность вида 0/0. Снова применяя правило Лопиталя, получим

$$\lim_{x\to +0} \frac{\ln x}{\operatorname{ctg} x} = -\lim_{x\to +0} \frac{\sin^2 x}{x} = -\lim_{x\to +0} \frac{\sin 2x}{1} = 0.$$

3) В обоих случаях получается неопределенность вида ∞/∞. На основании правила Лопиталя находим

$$\lim_{x\to +\infty} \frac{x^n}{\ln x} = \lim_{x\to +\infty} \frac{nx^{n-1}}{1/x} = \lim_{x\to +\infty} nx^n = +\infty.$$

Аналогичным образом, применяя правило Лопиталя n раз подряд, получим

$$\lim_{x\to +\infty} \frac{e^x}{x^n} = \lim_{x\to +\infty} \frac{e^x}{nx^{n-1}} = \ldots = \lim_{x\to +\infty} \frac{e^x}{n!} = +\infty.$$

Следовательно, *степенная функция* x^n (*при* $n>0$) *растет быстрее, чем логарифмическая, а экспоненциальная функция — быстрее, чем степенная.*

4) В данном случае имеет место неопределенность вида $0\cdot\infty$. Записав данную функцию как дробь $x/\operatorname{tg}3x$, получаем неопределенность вида 0/0, которую раскрываем по правилу Лопиталя:

$$\lim_{x\to 0} x\operatorname{ctg}3x=\lim_{x\to 0}\frac{x}{\operatorname{tg}3x}=\lim_{x\to 0}\frac{1}{3/\cos^2 3x}=\frac{1}{3}.$$

5) Здесь обе дроби при $x\to -3$ являются бесконечно большими величинами, т. е. получается неопределенность вида $\infty-\infty$. Приведя выражение в скобках к общему знаменателю, получим

$$\lim_{x\to -3}\frac{6-(3-x)}{9-x^2}=\lim_{x\to -3}\frac{x+3}{9-x^2},$$

т. е. неопределенность вида 0/0. Применяя правило Лопиталя, находим

$$\lim_{x\to -3}\frac{x+3}{9-x^2}=\lim_{x\to -3}\frac{1}{-2x}=\frac{1}{6}.$$

6) В данном случае имеем неопределенность вида 1^∞. Пусть $y=x^{1/(1-x)}$; тогда, логарифмируя, находим $\ln y=(\ln x)/(1-x)$, и, следовательно,

$$\lim_{x\to 1}\ln y=\lim_{x\to 1}\frac{\ln x}{1-x}$$

(неопределенность вида 0/0). Применяем правило Лопиталя:

$$\lim_{x\to 1}\ln y=\lim_{x\to 1}\frac{\ln x}{1-x}=\lim_{x\to 1}\frac{1/x}{-1}=-1.$$

Таким образом, окончательно получаем $\lim\limits_{x\to 1} y=e^{-1}$.

7) Здесь имеет место неопределенность вида ∞^0. Полагая $y=(\operatorname{tg}x)^{\cos x}$ и логарифмируя, получим

$$\lim_{x\to \pi/2}\ln y=\lim_{x\to \pi/2}(\cos x\cdot\ln\operatorname{tg}x)=\lim_{x\to \pi/2}\frac{\ln\operatorname{tg}x}{1/\cos x}$$

(неопределенность вида ∞/∞). По правилу Лопиталя находим

$$\lim_{x\to \pi/2}\ln y=\lim_{x\to \pi/2}\frac{\ln\operatorname{tg}x}{1/\cos x}=\lim_{x\to \pi/2}\left(\frac{1}{\operatorname{tg}x\cos^2 x}:\frac{\sin x}{\cos^2 x}\right)=\lim_{x\to \pi/2}\frac{\cos x}{\sin^2 x}=0,$$

т. е.

$$\lim_{x\to \pi/2} y=e^0=1.$$

8) В данном случае получается неопределенность вида 0^0. Обозначая $y=x^{4/(1-2\ln x)}$ и логарифмируя, имеем

$$\lim_{x\to +0}\ln y=\lim_{x\to +0}\frac{4\ln x}{1-2\ln x}$$

(неопределенность вида ∞/∞). Применяем правило Лопиталя:

$$\lim_{x\to +0}\ln y=4\lim_{x\to +0}\frac{\ln x}{1-2\ln x}=4\lim_{x\to +0}\frac{1/x}{-2/x}=-2.$$

Следовательно, искомый предел равен e^{-2}.

В задачах 9.14—9.47 найти пределы следующих функций.

9.14. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 6x}{\operatorname{tg} 2x}$. **9.15.** $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{3-x}{x^3-27}$. **9.16.** $\lim\limits_{x\to -0,5}\dfrac{2x^2-7x-4}{-2x^2+5x+3}$.

9.17. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1+x)}{e^x-e^{-x}}$. **9.18.** $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^2}{1-\cos 6x}$. **9.19.** $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sin 7\pi x}{\sin 2\pi x}$.

9.20. $\lim\limits_{x\to +\infty}\dfrac{\pi-2\operatorname{arctg} x}{e^{1/x}-1}$. **9.21.** $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x-\sin x}{x^3}$. **9.22.** $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x-\sin x}{x-\operatorname{tg} x}$.

9.23. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x-e^{-x}-2x}{x-\sin x}$. **9.24.** $\lim\limits_{x\to +\infty}\dfrac{\ln(1+x)}{x}$. **9.25.** $\lim\limits_{x\to \pi/2}\dfrac{\operatorname{tg} 3x}{\operatorname{tg} 5x}$.

9.26. $\lim\limits_{x\to 1-0}\dfrac{\operatorname{tg}(\pi x/2)}{\ln(1-x)}$. **9.27.** $\lim\limits_{x\to \pi/2-0}\dfrac{\ln \operatorname{tg} x}{\operatorname{tg} x}$. **9.28.** $\lim\limits_{x\to +0} xe^{1/x}$.

9.29. $\lim\limits_{x\to 0}(1-\cos x)\operatorname{ctg} x$. **9.30.** $\lim\limits_{x\to 1}\sin(x-1)\operatorname{tg}(\pi x/2)$.

9.31. $\lim\limits_{x\to 0}\operatorname{ctg} x\ln(x+e^x)$. **9.32.** $\lim\limits_{x\to 2}\left(\dfrac{1}{x-2}-\dfrac{12}{x^3-8}\right)$.

9.33. $\lim\limits_{x\to \pi/2}(\operatorname{tg} x-\cos^{-1} x)$. **9.34.** $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{1}{e^x-1}-\dfrac{1}{x}\right)$.

9.35. $\lim\limits_{x\to 1}\left(\dfrac{x}{x-1}-\dfrac{1}{\ln x}\right)$. **9.36.** $\lim\limits_{x\to \infty}\sqrt[x]{x^2}$.

9.37. $\lim\limits_{x\to 0}(\cos x)^{-\operatorname{ctg}^2 x}$. **9.38.** $\lim\limits_{x\to +0}(\operatorname{ctg} x)^{1/\ln x}$.

9.39. $\lim\limits_{x\to \pi/2}(\cos x)^{\pi/2-x}$. **9.40.** $\lim\limits_{x\to \infty}\left(1+\dfrac{5}{x}\right)^x$.

9.41. $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{1}{x}\right)^{\operatorname{tg} x}$. **9.42.** $\lim\limits_{x\to +0}(\operatorname{arctg} x)^{1/\ln x}$.

9.43. $\lim\limits_{x\to +\infty}(1+e^x)^{1/x}$. **9.44.** $\lim\limits_{x\to +\infty}\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^{x^2}$.

9.45. $\lim\limits_{x\to 0}(\cos 4x)^{1/x^2}$. **9.46.** $\lim\limits_{x\to \pi/4}(\operatorname{tg} x)^{\operatorname{tg} 2x}$.

9.47. $\lim\limits_{x\to +0} x^{3/(5+\ln x)}$.

ГЛАВА 10

ИССЛЕДОВАНИЕ ФУНКЦИЙ И ПОСТРОЕНИЕ ГРАФИКОВ

§ 1. ПРОМЕЖУТКИ МОНОТОННОСТИ ФУНКЦИИ

Функция называется *возрастающей (убывающей)* в некотором промежутке, если в этом промежутке каждому большему значению аргумента соответствует большее (меньшее) значение функции. Как возрастающие, так и убывающие функции называются *монотонными*. Если функция не является монотонной, то область ее определения можно разбить на конечное число промежутков монотонности (которые иногда чередуются с промежутками постоянства функции).

Монотонность функции $y=f(x)$ характеризуется знаком ее первой производной $f'(x)$, а именно, *если в некотором промежутке* $f'(x)>0$ $[f'(x)<0]$, *то функция возрастает (убывает) в этом промежутке*. Следовательно, отыскание промежутков монотонности функции $y=f(x)$ сводится к нахождению промежутков знакопостоянства ее первой производной $f'(x)$.

Отсюда получаем **правило для нахождения промежутков монотонности функции $y=f(x)$.**

1. Найти нули и точки разрыва $f'(x)$.

2. Определить методом проб знак $f'(x)$ в промежутках, на которые полученные в п. 1 точки делят область определения функции $f(x)$; промежутки, в которых $f'(x)>0$, являются промежутками возрастания функции, а промежутки, в которых $f'(x)<0$,—промежутками убывания функции. При этом если на двух соседних промежутках, граничная точка которых является нулем производной $f'(x)$, знак $f'(x)$ одинаков, то они составляют единый промежуток монотонности.

10.1. Найти промежутки монотонности функции $y=x^4-x^3/3-2x^2+x$.

Решение. Данная функция определена на всей числовой оси, т. е. $D(y)=\mathbf{R}$. Дифференцируя, получим

$$y'=4x^3-x^2-4x+1=4x(x^2-1)-(x^2-1)=(x^2-1)(4x-1)=(x+1)(x-1)(4x-1).$$

Точек разрыва производная y' не имеет, а в нуль она обращается в трех точках $x=-1$, $x=1/4$, $x=1$. Этими точками область определения функции разбивается на четыре промежутка $]-\infty, -1[$, $]-1, 1/4[$, $]1/4, 1[$ и $]1, +\infty[$, в каждом из которых y' сохраняет постоянный знак. Подставим в выражение для y' значения $x=-2$, $x=0$, $x=1/2$, $x=2$ из указанных промежутков; тогда:

на	$]-\infty, -1[$	имеем	$y'(-2)<0$;
«	$]-1, 1/4[$	«	$y'(0)>0$;
«	$]1/4, 1[$	«	$y'(1/2)<0$;
«	$]1, +\infty[$	«	$y'(2)>0$.

Следовательно, в промежутках $]-\infty, -1[$ и $]1/4, 1[$ функция убывает, а в промежутках $]-1, 1/4[$ и $]1, +\infty[$—возрастает.

10.2. Найти промежутки монотонности функции $y=4x-3\sqrt[3]{x}$.

Решение. Здесь $D(y)=\mathbf{R}$. Дифференцируя данную функцию, находим

$$y'=4-\frac{1}{\sqrt[3]{x^2}}=\frac{4\sqrt[3]{x^2}-1}{\sqrt[3]{x^2}}=\frac{(2\sqrt[3]{x}-1)(2\sqrt[3]{x}+1)}{\sqrt[3]{x^2}}.$$

Производная y' обращается в нуль при $x=-1/8$ и $x=1/8$ и имеет одну точку разрыва $x=0$. Эти три точки делят числовую ось на четыре промежутка

$]-\infty, -1/8[$, $]-1/8, 0[$, $]0, 1/8[$ и $]1/8, +\infty[$. Методом проб определим знак y' в каждом из них:

на	$]-\infty, -1/8[$	имеем	$y'(-1) > 0$;
«	$]-1/8, 0[$	«	$y'(-1/27) < 0$;
«	$]0, 1/8[$	«	$y'(1/27) < 0$;
«	$]1/8, +\infty[$	«	$y'(1) > 0$.

Таким образом, в промежутках $]-\infty, -1/8[$ и $]1/8, +\infty[$ функция возрастает, а в промежутке $]-1/8, 1/8[$ — убывает.

10.3. Показать, что функция $y=-x+\cos x$ убывает на всей числовой оси.

10.4. Показать, что функция $y=-1/x^3$ возрастает во всей своей области определения.

10.5. Доказать, что функции $y=\operatorname{tg} x$ и $y=\operatorname{ctg} x$ монотонны во всей своей области определения.

В задачах **10.6—10.19** найти промежутки монотонности функций.

10.6. $y=-x^2+10x+7$. **10.7.** $y=4x^2+12x+9$.
10.8. $y=x^3-6x^2+9x$. **10.9.** $y=3x^2-8x^3$. **10.10.** $y=x^4+8x^3+5$.
10.11. $y=16x+2x^2-16x^3/3-x^4$. **10.12.** $y=\dfrac{1}{(x-5)^2}$.
10.13. $y=\dfrac{2x-3}{x+7}$. **10.14.** $y=\sqrt{x}(x-3)$. **10.15.** $y=2\sqrt{x}-3\sqrt[3]{x^2}$.
10.16. $y=\ln(1+x^2)-x$. **10.17.** $y=-x^3\ln x$. **10.18.** $y=xe^{-5x}$.
10.19. $y=x+2\cos x$, $x\in]0, \pi[$.

§ 2. ЭКСТРЕМУМ ФУНКЦИИ

Точка $x=x_0$ называется *точкой максимума (минимума)* функции $y=f(x)$, если существует такая окрестность точки x_0, что для всех x $(x\neq x_0)$ этой окрестности выполняется неравенство

$$f(x) < f(x_0) \qquad [f(x) > f(x_0)].$$

Точки максимума и минимума функции называются *точками ее экстремума*, а значение функции в точке максимума (минимума) — *максимумом (минимумом)* или *экстремумом* функции.

Точками экстремума могут служить только критические точки I рода, т. е. точки, принадлежащие области определения функции, в которых первая производная $f'(x)$ обращается в нуль или терпит разрыв.

Точками экстремума являются лишь те из критических точек, при переходе через которые первая производная $f'(x)$ меняет знак, а именно, *если при переходе через критическую точку $x=x_0$ в положительном направлении знак $f'(x)$ меняется с плюса на минус (с минуса на плюс), то точка $x=x_0$ есть точка максимума (минимума)*.

Отсюда получаем **правило отыскания экстремумов функции $y=f(x)$**.

1. Найти нули и точки разрыва $f'(x)$.

2. Определить методом проб знак $f'(x)$ в промежутках, на которые полученные в п. 1 точки делят область определения функции $f(x)$.

3. Из этих точек выделить те, в которых функция $f(x)$ определена и по разные стороны от каждой из которых производная $f'(x)$ имеет разные знаки — это и есть экстремальные точки. При этом экстремальная точка $x=x_0$ является точкой максимума, если при движении по оси Ox в положительном направлении она отделяет промежуток, в котором производная $f'(x) > 0$, от промежутка, в котором $f'(x_0) < 0$, и точкой минимума — в противном случае.

В заключение заметим, что точки, в которых производная обращается в нуль, иногда проще исследовать на экстремум, выяснив знак второй производной $f''(x_0)$: *точка* $x=x_0$, *в которой* $f'(x_0)=0$, *а* $f''(x)$ *существует и отлична от нуля, является экстремальной*, а именно, *точкой максимума, если* $f''(x_0)<0$, *и точкой минимума, если* $f''(x_0)>0$.

10.20. Найти экстремумы функции $y=6x^4-8x^3-3x^2+6x$.

Решение. Здесь $D(y)=\mathbf{R}$. Дифференцируя данную функцию, находим

$$y'=24x^3-24x^2-6x+6=6(4x^3-4x^2-x+1)=$$
$$=6[4x^2(x-1)-(x-1)]=6(4x^2-1)(x-1)=6(2x+1)(2x-1)(x-1).$$

Производная обращается в нуль при $x=-1/2$, $x=1/2$ и $x=1$. Эти три точки разбивают всю числовую ось на четыре промежутка $]-\infty, -1/2[$, $]-1/2, 1/2[$, $]1/2, 1[$ и $]1, +\infty[$, внутри которых y' сохраняет определенный знак. Найдем знак производной в каждом из указанных промежутков:

на	$]-\infty, -1/2[$	имеем	$y'(-1)<0$;
«	$]-1/2, 1/2[$	«	$y'(0)>0$;
«	$]1/2, 1[$	«	$y'(3/4)<0$;
«	$]1, +\infty[$	«	$y'(2)>0$.

Отсюда следует, что точки $x=-1/2$, $x=1/2$ и $x=1$ являются экстремальными, так как при переходе через каждую из них производная меняет свой знак. При этом в точках $x=-1/2$ и $x=1$ происходит смена знаков с минуса на плюс, т. е. это — точки минимума; при переходе через точку $x=1/2$ знак производной меняется с плюса на минус, значит, это — точка максимума.

Экстремумы функции найдем, вычислив ее значения в экстремальных точках:

$$y_{\min}=y(-1/2)=-19/8,\quad y_{\max}=y(1/2)=13/8,\quad y_{\min}=y(1)=1.$$

10.21. Найти экстремумы функции $y=x^2\sqrt[3]{x+4}$.

Решение. Здесь $D(y)=\mathbf{R}$. Находим производную:

$$y'=2x\sqrt[3]{x+4}+x^2\frac{1}{3\sqrt[3]{(x+4)^2}}=\frac{x}{3\sqrt[3]{(x+4)^2}}(6x+24+x)=\frac{x(7x+24)}{3\sqrt[3]{(x+4)^2}}.$$

Производная y' обращается в нуль при $x=-24/7$ и $x=0$ и не существует при $x=-4$. Эти точки разбивают числовую ось на четыре промежутка:

на	$]-\infty, -4[$	имеем	$y'(-5)>0$;
«	$]-4, -24/7[$	«	$y'(-25/7)>0$;
«	$]-24/7, 0[$	«	$y'(-3)<0$;
«	$]0, +\infty[$	«	$y'(4)>0$.

Точки $x=-24/7$ и $x=0$ являются экстремальными, поскольку при переходе через эти точки производная меняет знак. Первая из них служит точкой максимума (смена знаков «плюс» — «минус»), вторая — точкой минимума («минус» — «плюс»). Вычислим значения функции в этих точках:

$$y_{\max}=y(-24/7)=(576/49)\sqrt[3]{4/7}\approx 9{,}8,\quad y_{\min}=y(0)=0.$$

Точка $x=-4$ экстремальной не является, поскольку при переходе через нее функция не меняет свой знак.

10.22. Найти экстремумы функции $y=\cos^2 x-\sin x$.

Решение. Данная функция является периодической с основным периодом 2π, поэтому достаточно найти ее экстремумы в промежутке $[-\pi, \pi]$. Дифференцируя, получаем

$$y = -2\cos x \sin x - \cos x = -2\cos x \left(\sin x + \frac{1}{2}\right).$$

Производная y' существует во всем промежутке $[-\pi, \pi]$ и обращается в нуль в точках $x = -5\pi/6$, $x = -\pi/2$, $x = -\pi/6$ и $x = \pi/2$.

Для исследования функции на экстремум найдем вторую производную:

$$y'' = (-\sin 2x - \cos x)' = -2\cos 2x + \sin x$$

и определим ее знак в каждой из критических точек. Имеем:

$$y''(-5\pi/6) = (-2)(1/2) - 1/2 < 0;$$
$$y''(-\pi/2) = (-2)(-1) - 1 > 0;$$
$$y''(-\pi/6) = (-2)(1/2) - 1/2 < 0;$$
$$y''(\pi/2) = (-2)(-1) + 1 > 0.$$

Таким образом, получаем

при $x = -5\pi/6$ $y = y_{\max} = 5/4$;
при $x = -\pi/2$ $y = y_{\min} = 1$;
при $x = -\pi/6$ $y = y_{\max} = 5/4$;
при $x = \pi/2$ $y = y_{\min} = -1$.

Итак, исследуемая функция в точках $x = -\pi/2 + 2\pi k$ и $x = \pi/2 + 2\pi k$ $(k \in \mathbb{Z})$ имеет минимум, соответственно равный 1 и -1, а в точках $x = -\pi/6 + 2\pi k$ и $x = -5\pi/6 + 2\pi k$ $(k \in \mathbb{Z})$ — максимум, равный 5/4.

10.23. Показать, что функция $y = e^{-x} - 2x$ не имеет экстремумов.

10.24. Убедиться в том, что функция $y = (x^2 - 1)/x$ экстремумов не имеет.

В задачах **10.25—10.44** исследовать на экстремум следующие функции.

10.25. $y = 2x^2 + 7x - 5$. **10.26.** $y = x^3 - 3x^2 - 24x + 7$.

10.27. $y = 10 + 15x + 6x^2 - x^3$. **10.28.** $y = x^4 - 8x^3 + 432$.

10.29. $y = (x+1)^3(5-x)$. **10.30.** $y = (x+2)^2(x-3)^3$.

10.31. $y = \dfrac{x}{9-x^2}$. **10.32.** $y = \dfrac{x+1}{x^2+8}$. **10.33.** $y = \dfrac{(x-4)^2}{x^2-2x+5}$.

10.34. $y = \dfrac{x^4+48}{x}$. **10.35.** $y = x - 6\sqrt[3]{x^2}$. **10.36.** $y = (7-x)\sqrt[3]{x+5}$.

10.37. $y = \dfrac{x}{\sqrt{10-x^2}}$. **10.38.** $y = \dfrac{x^3}{\sqrt{x^2-6}}$. **10.39.** $y = (x^2-8)e^x$.

10.40. $y = \sqrt[3]{x^2}\,e^x$. **10.41.** $y = x\ln x$. **10.42.** $y = x/2 - \operatorname{arctg} x$.

10.43. $y = \cos x - \sin x$. **10.44.** $y = \cos 2x - 2\cos x$.

§ 3. НАИМЕНЬШЕЕ И НАИБОЛЬШЕЕ ЗНАЧЕНИЯ ФУНКЦИИ

Для отыскания *наименьшего и наибольшего значений функции*, непрерывной в некотором промежутке, надо вычислить значения функции на концах промежутка и во всех ее критических точках, принадлежащих этому промежутку (такими точками в данном случае являются точки, в которых первая производная функции обращается в нуль или не существует). Наименьшее и наибольшее из полученных значений являются соответственно наименьшим и наибольшим значением функции в рассматриваемом промежутке.

Заметим, что если функция непрерывна в некотором промежутке, который не является отрезком (в частности, в бесконечном промежутке), то она может не достигать своего наименьшего или наибольшего значения.

10.45. Найти наименьшее и наибольшее значения следующих функций:

1) $f(x)=2x^3-3x^2-12x+10$ на отрезке $[-3, 3]$;

2) $\varphi(x)=1/\sin x$ на отрезке $[0, \pi]$.

Решение. 1) Функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[-3, 3]$. Найдем производную

$$f'(x)=6x^2-6x-12=6(x^2-x-2).$$

В данном случае критическими являются точки, в которых производная равна нулю, т. е. $x=-1$ и $x=2$, причем обе они принадлежат отрезку $[-3, 3]$. Вычислим значения функции в критических точках и на концах отрезка:

$$f(-1)=17, \quad f(2)=-10, \quad f(-3)=-35, \quad f(3)=1.$$

Таким образом, наименьшее значение данной функции равно -35 и достигается на левой границе отрезка, а наибольшее значение функции равно 17 и достигается ею во внутренней точке $x=-1$:

$$\min_{[-3,\ 3]} y=y(-3)=-35, \quad \max_{[-3,\ 3]} y=y(-1)=17.$$

2) Функция $\varphi(x)$ претерпевает разрывы на концах данного отрезка. Исследуем ее поведение в окрестностях точек разрыва:

$$\lim_{x\to+0}\varphi(x)=+\infty, \quad \lim_{x\to\pi-0}\varphi(x)=+\infty.$$

Следовательно, вблизи точек $x=0$ и $x=\pi$ функция $\varphi(x)$ достигает сколь угодно больших положительных значений, т. е. наибольшего значения данной функции на заданном отрезке не существует.

Из выражения для производной

$$\varphi'(x)=-\frac{\cos x}{\sin^2 x}$$

видно, что она обращается в нуль в точке $x=\pi/2$, принадлежащей отрезку $[0, \pi]$. В точке $x=\pi/2$ функция $\varphi(x)$ принимает наименьшее значение, равное 1. Таким образом, $\min\limits_{[0,\pi]} y=y(\pi/2)=1$.

В задачах **10.46—10.53** найти наименьшее и наибольшее значения функций в указанных промежутках.

10.46. $y=-3x^2+4x-8,\ x\in[0,\ 1]$.

10.47. $y=x^3+3x^2-9x-7,\ x\in[-4,\ 3]$.

10.48. $y=\sqrt{25-x^2},\ x\in[-4,\ 4]$.

10.49. $y=x/(4+x^2),\ x\in\,]-\infty,\ +\infty[$.

10.50. $y=x\ln^2 x,\ x\in[1/e,\ e]$.

10.51. $y=\arccos x^2,\ x\in[-\sqrt{2}/2,\ \sqrt{2}/2]$.

10.52. $y=1/\cos x,\ x\in\,]\pi/2,\ 3\pi/2[$.

10.53. $y=\ln x-2\operatorname{arctg} x,\ x\in[1,\ +\infty[$.

§ 4. ЗАДАЧИ НА ОТЫСКАНИЕ НАИМЕНЬШИХ И НАИБОЛЬШИХ ЗНАЧЕНИЙ ВЕЛИЧИН

При решении задач на вычисление наименьших и наибольших значений величин надо прежде всего определить, для какой величины в задаче требуется найти наименьшее или наибольшее значение. Эта величина и будет исследуемой функцией. Затем одну из величин, от изменения которых зависит изменение функции, следует взять за независимую переменную и выразить через нее функцию. При этом желательно в качестве независимой переменной выбрать ту величину, через которую исследуемая функция выражается проще всего. После этого решается задача на нахождение наименьшего или наибольшего значения полученной функции в некотором промежутке изменения независимой переменной, который обычно устанавливается из самого существа задачи.

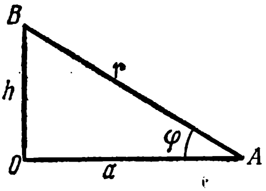


Рис. 61.

Заметим, что в случаях, когда решение вопроса о том, является ли значение функции, вычисленное в полученной критической точке, наименьшим или наибольшим, подсказывается условием задачи, аналитическое исследование может быть опущено.

10.54. В данный шар радиуса R вписать цилиндр наибольшего объема.

Решение. Обозначим высоту, радиус основания и объем цилиндра соответственно через h, r и V. Тогда объем цилиндра $V=\pi r^2 h$. Учитывая, что $r^2 = R^2 - h^2/4$, получим

$$V=\pi\left(R^2-\frac{h^2}{4}\right)h=\pi\left(R^2h-\frac{h^3}{4}\right).$$

Таким образом, задача сводится к нахождению наибольшего значения функции

$$V(h)=\pi\left(R^2h-\frac{h^3}{4}\right)$$

в промежутке $]0,\ 2R[$. Производная этой функции

$$V'(h)=\pi\left(R^2-\frac{3}{4}h^2\right).$$

Приравнивая $V'(h)$ нулю, получим единственную критическую точку $h_0=2R/\sqrt{3}$, принадлежащую промежутку $]0, 2R[$, в которой $V(h)$ и принимает наибольшее значение

$$V(h_0)=\frac{4\pi R^3}{3\sqrt{3}}.$$

Итак, наибольший объем имеет цилиндр, высота которого $h=2R/\sqrt{3}$.

10.55. Электрическую лампочку можно передвигать по вертикальной прямой (OB) (рис. 61). На каком расстоянии от горизонтальной плоскости ее следует поместить, чтобы в точке A этой плоскости получить наибольшую освещенность?

Решение. Освещенность вычисляется по формуле

$$J=c\frac{\sin\varphi}{r^2},$$

где $r=|AB|$, $\varphi=\widehat{OAB}$, $c=\text{const}$ (сила света источника B). За независимую переменную, с изменением которой меняется расстояние лампочки от плоскости стола, а следовательно, и освещенность J, можно выбрать любую из следующих величин: прежде всего саму величину h, затем φ или r. Взяв за независимую переменную угол φ и воспользовавшись тем, что $r=a/\cos\varphi$, получим довольно простое выражение J через φ:

$$J=\frac{c}{a^2}\sin\varphi\cos^2\varphi.$$

Найдем наибольшее значение полученной функции $J(\varphi)$ в промежутке $]0, \pi/2[$ изменения независимой переменной φ. Дифференцируя $J(\varphi)$, получим

$$J'(\varphi)=\frac{c}{a^2}(\cos^3\varphi-2\sin^2\varphi\cos\varphi)=2\frac{c}{a^2}\cos^3\varphi\left(\frac{1}{2}-\operatorname{tg}^2\varphi\right).$$

Решая уравнение $J'(\varphi)=0$, находим, что функция $J(\varphi)$ в промежутке $]0, \pi/2[$ имеет единственную критическую точку $\varphi_0=\operatorname{arctg}(1/\sqrt{2})$. Так как на концах промежутка $]0, \pi/2[$ функция $J(\varphi)$ равна нулю, а $J(\varphi_0)>0$, то при $\varphi=\varphi_0$ освещенность $J(\varphi)$ является наибольшей.

Таким образом,

$$h=a\operatorname{tg}\varphi_0=a/\sqrt{2}.$$

Это и есть искомая величина.

10.56. Данное положительное число m разложить на два слагаемых так, чтобы их произведение было наибольшим.

10.57. Разность двух чисел равна 13. Каковы должны быть эти числа, чтобы их произведение было наименьшим?

10.58. Из куска проволоки длиной 30 см требуется согнуть прямоугольник наибольшей площади. Каковы размеры этого прямоугольника?

10.59. В данный полукруг радиуса R вписать прямоугольник с наибольшим периметром.

10.60. Показать, что из всех равнобедренных треугольников, вписанных в данный круг, наибольший периметр имеет равносторонний треугольник.

10.61. Боковая сторона равнобочной трапеции конгруэнтна ее меньшему основанию и имеет длину, равную 9 см. Какова должна быть длина большего основания, чтобы площадь трапеции была наибольшей?

10.62. Найти длины сторон прямоугольника наибольшей площади, вписанного в эллипс $x^2/a^2+y^2/b^2=1$.

10.63. На странице книги печатный текст должен занимать (вместе с промежутками между строками) 192 см². Верхнее и нижнее поля должны быть по 4 см, правое и левое поля — по 3 см. Если принимать во внимание только экономию бумаги, то каковы должны быть наиболее выгодные размеры страницы?

10.64. Из круглого бревна диаметра D вырезать балку прямоугольного сечения так, чтобы площадь сечения была наибольшей.

Указание: в круг диаметра D вписать прямоугольник наибольшей площади.

10.65. Определить размеры цилиндра объемом 10 см³, имеющего наименьшую полную поверхность.

10.66. Бак с квадратным основанием должен вмещать 27 л. Каковы должны быть его размеры, чтобы полная поверхность была наименьшей?

10.67. Из квадратного листа жести, длина стороны которого 54 см, вырезают по углам одинаковые квадраты и из оставшейся части склеивают открытую коробку. Какова должна быть длина стороны вырезаемых квадратов, чтобы вместимость коробки была наибольшей?

10.68. В данный шар радиуса R вписать цилиндр, имеющий наибольшую боковую поверхность.

10.69. В шар радиуса R вписать прямой круговой конус с наибольшей боковой поверхностью.

10.70. В данный прямой круговой конус вписать цилиндр наибольшего объема.

10.71. Боковое ребро правильной треугольной пирамиды имеет постоянную заданную длину и составляет с плоскостью основания угол α. При каком значении α объем пирамиды является наибольшим?

10.72. Из круглого бревна диаметра D требуется вырезать балку прямоугольного сечения. Каковы должны быть ширина x и высота y этого сечения, чтобы балка оказывала наибольшее сопротивление на изгиб?

Указание: сопротивление балки на изгиб прямо пропорционально произведению ширины сечения на квадрат его высоты.

10.73. Секундный расход воды при истечении ее через отверстие в толстой стене определяется по формуле $Q=cy\sqrt{h-y}$, где y — диаметр отверстия, h — глубина его низшей точки, c — некоторая постоянная. При каком y значение Q является наибольшим?

10.74. Показать, что мощность N тока, получаемого от гальванического элемента во внешней цепи, будет наибольшей, если сопротивление R внешней цепи равно внутреннему сопротивлению r самого элемента.

Указание: мощность тока определяется по формуле $N=r^2/R+R$.

§ 5. ВЫПУКЛОСТЬ И ВОГНУТОСТЬ КРИВОЙ. ТОЧКИ ПЕРЕГИБА

Кривая называется *выпуклой* (*вогнутой*) в некотором промежутке, если она расположена ниже (выше) касательной, проведенной к кривой в любой точке этого промежутка. Выпуклость или вогнутость кривой, являющейся графиком функции $y=f(x)$, характеризуется знаком второй производной $f''(x)$, а именно, *если в некотором промежутке* $f''(x)<0$ $[f''(x)>0]$, *то кривая выпукла* (*вогнута*) *в этом промежутке*.

Таким образом, отыскание промежутков выпуклости и вогнутости графика функции $y=f(x)$ сводится к нахождению промежутков знакопостоянства ее второй производной $f''(x)$.

Точкой перегиба кривой называется такая ее точка, которая отделяет участок выпуклости от участка вогнутости.

Точками перегиба графика функции $y=f(x)$ могут служить только точки, абсциссы которых являются критическими точками II рода, т. е. точки, находящиеся внутри области определения функции $y=f(x)$, в которых вторая производная $f''(x)$ обращается в нуль или терпит разрыв.

Точками перегиба графика функции $y=f(x)$ являются лишь те из указанных точек, *при переходе через которые вторая производная $f''(x)$ меняет знак.*

Отсюда получаем **правило отыскания промежутков выпуклости и вогнутости и точек перегиба графика функции.**

1. Найти точки, в которых вторая производная $f''(x)$ обращается в нуль или терпит разрыв.

2. Определить методом проб знак $f''(x)$ в промежутках, на которые полученные в п. 1 точки делят область определения $f(x)$; промежутки, в которых $f''(x)<0$, являются промежутками выпуклости, а промежутки, в которых $f''(x)>0$,— промежутками вогнутости графика функции $y=f(x)$. При этом если на двух соседних промежутках, граничная точка которых является нулем второй производной, знак $f''(x)$ одинаков, то они составляют единый промежуток выпуклости или вогнутости.

3. Из полученных в п. 1 точек выделить те, в которых функция $f(x)$ определена и по разные стороны от каждой из которых вторая производная $f''(x)$ имеет противоположные знаки — это и есть абсциссы точек перегиба графика функции $y=f(x)$.

10.75. Найти промежутки выпуклости и вогнутости и точки перегиба графика функции $f(x)=x^4-10x^3+36x^2-31x-37$.

Решение. Область определения данной функции $D(y)=\boldsymbol{R}$. Дифференцируя $f(x)$ дважды, получим

$$f'(x)=4x^3-30x^2+72x-31,\quad f''(x)=12x^2-60x+72=12(x-2)(x-3).$$

Вторая производная существует на всей числовой оси и обращается в нуль при $x=2$ и $x=3$. Этими точками область определения $f''(x)$ разбивается на три промежутка $]-\infty, -2[$, $]2, 3[$ и $]3, +\infty[$, внутри которых вторая производная сохраняет знак. Найдем знак $f''(x)$ в каждом из них:

$$\begin{array}{lll} \text{на }]-\infty, 2[& \text{имеем} & f''(0)>0; \\ « \ ]2, 3[& « & f''(2{,}5)<0; \\ « \ ]3, +\infty[& « & f''(4)>0. \end{array}$$

Таким образом, в промежутках $]-\infty, 2[$ и $]3, +\infty[$ кривая вогнута, а в промежутке $]2, 3[$ — выпукла. Граничные точки $x=2$ и $x=3$ указанных промежутков являются абсциссами точек перегиба. Вычислим значения функции $f(x)$ в этих точках: $f(2)=-19$, $f(3)=5$. Итак, данная функция имеет две точки перегиба: $(2; -19)$ и $(3; 5)$.

10.76. Найти промежутки выпуклости и вогнутости и точки перегиба графика функции $f(x)=(x^2+7x)\sqrt[3]{x}-5x-8$.

Решение. Здесь $D(y)=\boldsymbol{R}$. Найдем первую и вторую производные:

$$f'(x)=\frac{7}{3}x^{4/3}+\frac{28}{3}x^{1/3}-5,\ f''(x)=\frac{28}{9}x^{1/3}+\frac{28}{9}x^{-2/3}=\frac{28}{9}\cdot\frac{x+1}{\sqrt[3]{x^2}}.$$

Из последнего выражения видно, что вторая производная обращается в нуль при $x=-1$ и не существует при $x=0$. Эти две точки разбивают область определения $f''(x)$ на три промежутка $]-\infty, -1[$, $]-1, 0[$ и $]0, +\infty[$. Определим знак $f''(x)$ в каждом из них:

$$\begin{array}{lll} \text{на }]-\infty, -1[& \text{имеем} & f''(-2)<0; \\ « \ ]-1, 0[& « & f''(-0{,}5)>0; \\ « \ ]0, +\infty[& « & f''(1)>0. \end{array}$$

Следовательно, в промежутке $]-\infty, -1[$ кривая выпукла, а в промежутке $]-1, +\infty[$ — вогнута. Значение $x=-1$ является абсциссой точки перегиба, а сама точка перегиба имеет координаты $(-1; 3)$.

10.77. Показать, что кривая $y=3x-x^4$ выпукла на всей числовой оси.

10.78. Показать, что кривая $y=x^2/2-\sin x$ вогнута на всей числовой оси.

В задачах **10.79—10.90** исследовать на выпуклость, вогнутость и точки перегиба графики следующих функций.

10.79. $y=-x^4-2x^3+12x^2+15x-6$.

10.80. $y=3x^5-10x^4-30x^3+12x+7$.

10.81. $y=\frac{x}{x^2+9}$. **10.82.** $y=x\sqrt[3]{x^2}(x+8)$. **10.83.** $y=\frac{x-5}{x+7}$.

10.84. $y=\frac{x^3+8}{x}$. **10.85.** $y=5+\sqrt[3]{x-4}$. **10.86.** $y=\ln(x^2+4)$.

10.87. $y=x\ln^2 x$. **10.88.** $y=\frac{e^x-e^{-x}}{2}$. **10.89.** $y=2^{1/x}$.

10.90. $y=\cos x$, $x\in]0, 2\pi[$.

10.91. Выяснить вид графика функции, если известно, что в интервале $]a, b[$: 1) $y>0$, $y'>0$, $y''>0$; 2) $y>0$, $y'<0$, $y''<0$; 3) $y<0$, $y'>0$, $y''<0$; 4) $y<0$, $y'>0$, $y''>0$.

§ 6. АСИМПТОТЫ

Прямая называется *асимптотой* кривой $y=f(x)$, если расстояние от точки M, лежащей на кривой, до этой прямой стремится к нулю при удалении точки M вдоль какой-нибудь ветви кривой в бесконечность. Различают три вида асимптот: вертикальные, горизонтальные и наклонные.

Вертикальные асимптоты. Если по крайней мере один из пределов функции $y=f(x)$ в точке a справа или слева равен бесконечности, т. е. если

$$\lim_{x\to a-0} f(x)=\infty \quad \text{или} \quad \lim_{x\to a+0} f(x)=\infty,$$

то прямая $x=a$ является *вертикальной асимптотой*.

Горизонтальные асимптоты. Если существует конечный предел функции при $x\to+\infty$ или $x\to-\infty$, т. е. если

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=b \quad \text{или} \quad \lim_{x\to-\infty} f(x)=c,$$

то прямая $y=b$ ($y=c$) является *горизонтальной асимптотой* (при $x\to+\infty$ она называется *правой*, а при $x\to-\infty$ — *левой*).

Наклонные асимптоты. Если существуют пределы

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=k_1 \quad \text{и} \quad \lim_{x\to+\infty}[f(x)-k_1x]=b_1,$$

то прямая $y=k_1x+b_1$ служит *наклонной* (*правой*) *асимптотой*.

Аналогично, если существуют пределы

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{f(x)}{x}=k_2 \quad \text{и} \quad \lim_{x\to-\infty}[f(x)-k_2x]=b_2,$$

то прямая $y=k_2x+b_2$ является *наклонной* (*левой*) *асимптотой*.

Заметим, что горизонтальную асимптоту можно рассматривать как частный случай наклонной асимптоты при $k=0$.

10.92. Найти асимптоты следующих кривых:

1) $y=\frac{-5x+3}{x+2}$; 2) $y=\frac{-x^2+7x}{x-3}$; 3) $y=\sqrt{1+x^2}-2x$.

Решение. 1) Кривая имеет вертикальную асимптоту $x=-2$, так как

$$\lim_{x\to-2-0}\frac{-5x+3}{x+2}=-\infty,\quad \lim_{x\to-2+0}\frac{-5x+3}{x+2}=+\infty$$

($x=-2$—точка разрыва II рода).

Найдем горизонтальную асимптоту:

$$\lim_{x\to\pm\infty}\frac{-5x+3}{x+2}=-5.$$

Итак, данная кривая имеет вертикальную асимптоту $x=-2$ и горизонтальную асимптоту $y=-5$.

2) Кривая имеет вертикальную асимптоту $x=3$, поскольку

$$\lim_{x\to3-0}\frac{-x^2+7x}{x-3}=+\infty,\quad \lim_{x\to3+0}\frac{-x^2+7x}{x-3}=-\infty.$$

Так как при $x\to\infty$ функция не имеет конечного предела, то горизонтальных асимптот у данной кривой нет. Ищем наклонные асимптоты:

$$k=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{y}{x}=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{-x^2+7x}{(x-3)x}=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{-x^2+7x}{x^2-3x}=-1,$$

$$b=\lim_{x\to\pm\infty}(y-kx)=\lim_{x\to\pm\infty}\left(\frac{-x^2+7x}{x-3}+x\right)=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{4x}{x-3}=4.$$

Следовательно, прямая $y=-x+4$ служит наклонной асимптотой (рис. 62).

3) Вертикальных асимптот кривая не имеет, так как данная функция непрерывна на всей числовой оси. Будем искать наклонные асимптоты; поскольку пределы при $x\to+\infty$ и $x\to-\infty$ различны, надо рассмотреть отдельно два случая.

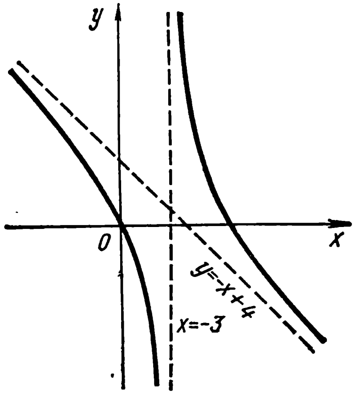


Рис. 62.

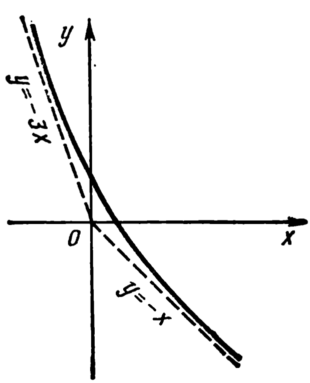


Рис. 63.

Находим правую асимптоту (при $x \to +\infty$):

$$k_1 = \lim_{x\to+\infty} \frac{\sqrt{1+x^2}-2x}{x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{\sqrt{1/x^2+1}-2}{1} = -1;$$

$$b_1 = \lim_{x\to+\infty} (\sqrt{1+x^2}-2x+x) = \lim_{x\to+\infty} (\sqrt{1+x^2}-x) = \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{\sqrt{1+x^2}+x} = 0.$$

Следовательно, при $x \to +\infty$ кривая имеет наклонную асимптоту $y = -x$. Найдем теперь левую асимптоту (при $x \to -\infty$):

$$k_2 = \lim_{x\to-\infty} \frac{\sqrt{1+x^2}-2x}{x} = \lim_{z\to+\infty} \frac{\sqrt{1+z^2}+2z}{-z} = \lim_{z\to+\infty} \frac{\sqrt{1/z^2+1}+2}{-1} = -3;$$

$$b_2 = \lim_{x\to-\infty} (\sqrt{1+x^2}-2x+3x) = \lim_{x\to-\infty} (\sqrt{1+x^2}+x) =$$

$$= \lim_{x\to-\infty} \frac{1}{\sqrt{1+x^2}-x} = 0,$$

так как при $x < 0$ оба слагаемых в знаменателе положительны. Итак, при $x \to -\infty$ кривая имеет наклонную асимптоту $y = -3x$ (рис. 63).

В задачах **10.93—10.108** найти асимптоты заданных кривых.

10.93. $y = \frac{1}{x+5}$. **10.94.** $y = \frac{3}{(x-4)^2}$. **10.95.** $y = \frac{2x+1}{x-3}$.

10.96. $y = \frac{x^2-1}{x}$. **10.97.** $y = \frac{x^2}{x^2+9}$. **10.98.** $y = \frac{x^3}{4-x^2}$.

10.99. $y = \sqrt{x^2-16}$. **10.100.** $y = \frac{x^2-5x+3}{x+2}$.

10.101. $y = \sqrt{\frac{x^3}{x-6}}$. **10.102.** $y = \sqrt{1+x^2}+2x$.

10.103. $y = xe^{-x}-2$. **10.104.** $y = 4x - \frac{\sin x}{x}$.

10.105. $y = \ln(1-x^2)$. **10.106.** $y = x \operatorname{arctg} x$.

10.107. $y = \sqrt[3]{8-x^3}$. **10.108.** $y = xe^{1/x}$.

§ 7. ОБЩАЯ СХЕМА ИССЛЕДОВАНИЯ ФУНКЦИИ И ПОСТРОЕНИЕ ЕЕ ГРАФИКА

Общее исследование функции и построение ее графика рекомендуется выполнять **по следующей схеме.**

1. Найти область определения функции.
2. В случае, если область определения функции симметрична относительно начала координат, проверить, не является ли функция четной или нечетной; проверить также, не является ли она периодической.
3. Найти промежутки знакопостоянства функции; выяснить поведение функции на концах промежутков знакопостоянства (в том числе, и на бесконечности), построить схематично график на концах промежутков знакопостоянства.
4. Найти асимптоты графика функции.
5. Найти промежутки монотонности функции, ее экстремумы.
6. Найти промежутки выпуклости и вогнутости графика функции, его точки перегиба.
7. Построить график функции, используя полученные результаты исследования.

10.109. Построить график функции $y=\frac{x^2}{x+1}$.

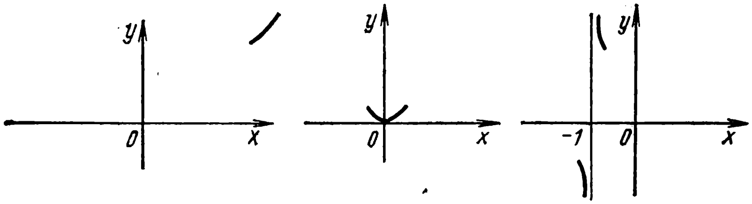
Решение. 1. Здесь $D(y)=]-\infty, -1[\,\cup\,]-1, +\infty[$.

2. Так как область определения функции не симметрична относительно начала координат, то исследуемая функция не является ни четной, ни нечетной; кроме того, она непериодична.

3. Функция обращается в нуль при $x=0$ и терпит разрыв при $x=-1$. Полученными точками область определения функции делится на три промежутка $]-\infty, -1[$, $]-1, 0[$ и $]0, +\infty[$, в каждом из которых она сохраняет определенный знак, а именно:

на	$]-\infty, -1[$	имеем	$y(-2)<0$;
«	$]-1, 0[$	«	$y(-0{,}5)>0$;
«	$]0, +\infty[$	«	$y(1)>0$.

Для выяснения поведения функции на концах промежутков знакопостоянства вычислим следующие пределы (рис. 64):



а) б) в)

Рис. 64.

$$\lim_{x\to\pm\infty}\frac{x^2}{x+1}=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{1}{1/x+1/x^2}=\pm\infty,$$

$$\lim_{x\to\pm 0}\frac{x^2}{x+1}=0,\quad \lim_{x\to-1\pm 0}\frac{x^2}{x+1}=\pm\infty.$$

4. Так как в точке $x=-1$ функция претерпевает бесконечный разрыв, то график функции имеет вертикальную асимптоту $x=-1$. Для отыскания наклонной асимптоты найдем следующие пределы:

$$k=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{x^2}{x(x+1)}=1;\ b=\lim_{x\to\pm\infty}\left(\frac{x^2}{x+1}-x\right)=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{-x}{x+1}=-1.$$

Таким образом, прямая $y=x-1$ служит наклонной асимптотой графика.

5. Дифференцируя данную функцию, получим

$$y'=\frac{2x(x+1)-x^2}{(x+1)^2}=\frac{x^2+2x}{(x+1)^2}=\frac{x(x+2)}{(x+1)^2}.$$

Производная y' обращается в нуль при $x=-2$ и $x=0$ и терпит разрыв при $x=-1$. Этими точками числовая ось делится на четыре промежутка: $]-\infty, -2[$, $]-2, -1[$, $]-1, 0[$, $]0, +\infty[$. Выясним знак y' в каждом из них:

на	$]-\infty, -2[$	имеем	$y'(-3)>0$;
«	$]-2, -1[$	«	$y'(-1{,}5)<0$;
«	$]-1, 0[$	«	$y'(-0{,}5)<0$;
«	$]0, +\infty[$	«	$y'(1)>0$.

Следовательно, в промежутках $]-\infty, -2[$ и $]0, +\infty[$ функция возрастает, а в промежутках $]-2, -1[$ и $]-1, 0[$ — убывает. Точки $x=-2$ и $x=0$ являются соответственно точками максимума и минимума. Находим значения функции в экстремальных точках:

$$y_{\max}=y(-2)=-4, \quad y_{\min}=y(0)=0.$$

6. Дифференцируя дважды данную функцию, получим

$$y''=\frac{(2x+2)(x+1)^2-2(x+1)(x^2+2x)}{(x+1)^4}=$$

$$=2\cdot\frac{x^2+2x+1-x^2-2x}{(x+1)^3}=\frac{2}{(x+1)^3}.$$

Вторая производная y'' терпит разрыв при $x=-1$. Этой точкой числовая ось разбивается на два промежутка: $]-\infty, -1[$ и $]-1, +\infty[$. Определим знак второй производной в этих промежутках; в первом из них $y''<0$, а во втором $y''>0$. Таким образом, в промежутке $]-\infty, -1[$ кривая выпукла, а в промежутке $]-1, +\infty[$ — вогнута. Точек перегиба нет.

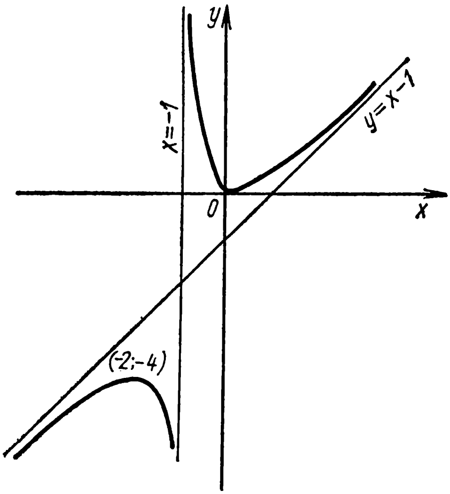


Рис. 65.

7. Используя полученные данные, строим график функции (рис. 65).

10.110. Построить график функции $y=xe^x$.

Решение. 1. Здесь $D(y)=\mathbf{R}$.

2. Функция не является ни четной, ни нечетной. Исследуемая функция непериодична.

3. Так как функция обращается в нуль только при $x=0$, то она имеет два промежутка знакопостоянства $]-\infty, 0[$ и $]0, +\infty[$. В первом из них $y<0$, во втором $y>0$. Для выяснения поведения функции на концах промежутков знакопостоянства вычислим следующие пределы (рис. 66):

$$\lim_{x\to\pm 0} xe^x=\pm 0, \quad \lim_{x\to+\infty} xe^x=+\infty,$$

$$\lim_{x\to-\infty} xe^x=-\lim_{z\to+\infty}\frac{z}{e^z}=-\lim_{z\to+\infty}\frac{1}{e^z}=-0$$

(при вычислении последнего предела использовано правило Лопиталя).

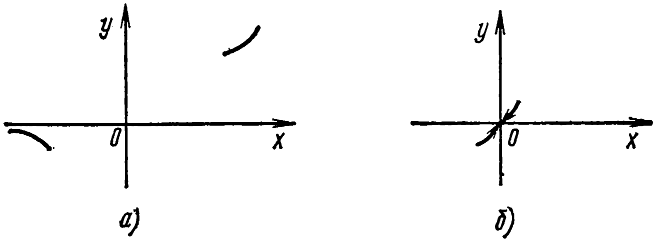


Рис. 66.

4. Так как $y\to 0$ при $x\to-\infty$, то исследуемая кривая имеет левую горизонтальную асимптоту — прямую $y=0$. Вертикальных и наклонных асимптот кривая не имеет.

5. Найдем производную данной функции:

$$y' = e^x + xe^x = e^x (x+1).$$

Производная y' обращается в нуль при $x = -1$. Точка $x = -1$ делит область определения функции на два промежутка $]-\infty, -1[$ и $]-1, +\infty[$, в первом из которых $y' < 0$, а во втором $y' > 0$. Следовательно, исследуемая функция в промежутке $]-\infty, -1[$ убывает, а в промежутке $]-1, +\infty[$ — возрастает. Точка $x = -1$ есть точка минимума, минимум функции равен $y_{\min} = y(-1) = -1/e$.

6. Находим вторую производную

$$y'' = e^x (x+1) + e^x = e^x (x+2).$$

Она обращается в нуль при $x = -2$; мы получили два промежутка знакопостоянства второй производной: $]-\infty, -2[$ и $]-2, +\infty[$. В первом из них $y'' < 0$, во втором $y'' > 0$. Следовательно, график функции в промежутке $]-\infty, -2[$ выпуклый, а в промежутке $]-2, +\infty[$ вогнутый: $x = -2$ — абсцисса точки перегиба. Точка перегиба имеет координаты $(-2; -2/e^2)$.

7. По полученным данным строим график функции (рис. 67).

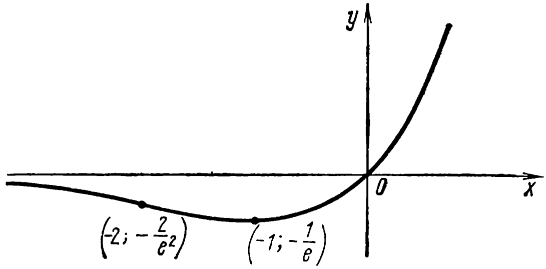


Рис. 67.

10.111. Исследовать функцию $y = \sin x + \frac{1}{\sin x}$ и построить ее график.

Решение. 1. Данная функция определена при всех значениях x, исключая точки $x = \pi k$, $k \in \mathbf{Z}$.

2. Функция является нечетной, так как

$$f(-x) = \sin(-x) + \frac{1}{\sin(-x)} = -\sin x + \frac{1}{-\sin x} = -f(x).$$

Функция периодическая с основным периодом 2π, поскольку

$$f(x+2\pi) = \sin(x+2\pi) + \frac{1}{\sin(x+2\pi)} = \sin x + \frac{1}{\sin x} = f(x).$$

Отсюда следует, что достаточно исследовать данную функцию в промежутке $]0, \pi[$.

3. Так как в промежутке $]0, \pi[$ выполняется неравенство $\sin x > 0$, то функция положительна в каждой точке этого промежутка.

Исследуем поведение функции на концах промежутка — в точках $x = 0$ и $x = \pi$:

$$\lim_{x \to +0} \left(\sin x + \frac{1}{\sin x}\right) = +\infty, \quad \lim_{x \to \pi - 0} \left(\sin x + \frac{1}{\sin x}\right) = +\infty.$$

4. Прямые $x = 0$ и $x = \pi$ служат вертикальными асимптотами графика. Горизонтальных и наклонных асимптот кривая не имеет.

5. Вычислим производную

$$y' = \cos x - \frac{\cos x}{\sin^2 x} = \cos x \left(1 - \frac{1}{\sin^2 x}\right) = -\frac{\cos^3 x}{\sin^2 x}.$$

Производная определена в каждой точке промежутка $]0, \pi[$ и обращается в нуль только в точке $x = \pi/2$. Таким образом, получаем два промежутка $]0, \pi/2[$ и $]\pi/2, \pi[$, в первом из которых $y' < 0$ и, следовательно, данная функция убывает, а во втором $y' > 0$ и функция возрастает. Точка $x = \pi/2$ — точка минимума; минимальное значение $y_{\min} = y(\pi/2) = 2$.

6. Вычислим вторую производную

$$y''=\frac{3\cos^2 x\sin^3 x+2\sin x\cos^4 x}{\sin^4 x}=\frac{\cos^2 x\,(3\sin^2 x+2\cos^2 x)}{\sin^3 x}.$$

Из полученного выражения для второй производной видим, что она положительна во всем пр.межутке $]0, \pi[$, за исключением точки $x=\pi/2$, в которой y'' обращается в нуль. Отсюда следует, что кривая вогнута в промежутке $]0, \pi[$.

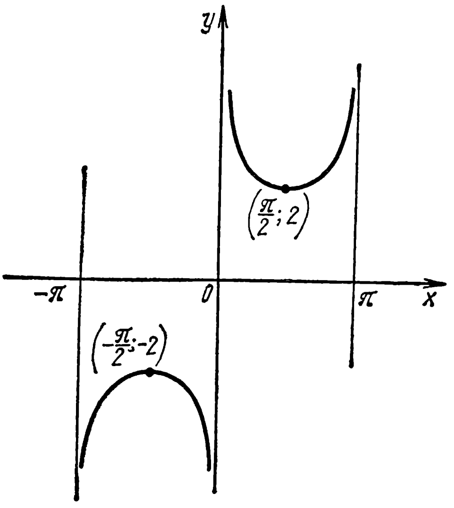


Рис. 68.

7. По данным исследования строим график функции в промежутке $]0, \pi[$. Затем, используя симметрию графика относительно начала координат (функция нечетна), строим кривую в промежутке $]-\pi, 0[$ (рис. 68).

В задачах **10.112—10.161** исследовать заданные функции и построить их графики.

10.112. $y=10-3x-x^2$.

10.113. $y=x^3-4x^2-3x+6$.

10.114. $y=6x^2-9x-x^3$.

10.115. $y=3x^3-x+2$.

10.116. $y=(x+4)^2(x-5)$.

10.117. $y=x^4-8x^2-9$.

10.118. $y=\dfrac{2x+1}{x+5}$.

10.119. $y=\dfrac{1}{x^2+4}$.

10.120. $y=\dfrac{8}{16-x^2}$.

10.121. $y=\dfrac{x}{x^2-4}$. **10.122.** $y=\dfrac{x^2}{x-3}$. **10.123.** $y=\dfrac{x^2-5x}{x-1}$.

10.124. $y=\dfrac{x^2+6}{x^2-1}$. **10.125.** $y=x^2-\dfrac{8}{x}$ **10.126.** $y=\dfrac{x^3+4}{x^2}$.

10.127. $y=\dfrac{x^3}{1-x^2}$. **10.128.** $y=\sqrt{x}-2x$. **10.129.** $y=x-6\sqrt[3]{x^2}$.

10.130. $y=(x+4)\sqrt[3]{x}$. **10.131.** $y=3\sqrt[3]{x^2}-4\sqrt{x}$.

10.132. $y=\sqrt{9x^2-1}$. **10.133.** $y=\sqrt{16-x^2}$.

10.134. $y=x\sqrt{x+6}$. **10.135.** $y=\dfrac{x}{\sqrt{x-5}}$.

10.136. $y=\sqrt{4x^2+7}$. **10.137.** $y=\sqrt{x^3+27}$.

10.138. $y=\sqrt[3]{x^2-16}$. **10.139.** $y=\sqrt[3]{8-x^3}$.

10.140. $y=\dfrac{x}{\sqrt{x^2-4}}$. **10.141.** $y=\dfrac{x}{\sqrt[3]{x^2-4}}$. **10.142.** $y=3^{1/x}$.

10.143. $y=xe^{-x}$. **10.144.** $y=(x^2+1)e^{-x}$. **10.145.** $y=\dfrac{e^x}{x^2}$.

10.146. $y=\dfrac{1}{xe^x}$. **10.147.** $y=\dfrac{1}{e^x-1}$. **10.148.** $y=x-e^x$.

10.149. $y=x^2\ln x$. **10.150.** $y=\frac{x}{\ln x}$. **10.151.** $y=\frac{\ln x}{x^2}$.

10.152. $y=\ln(x^2+4)$. **10.153.** $y=x-2\operatorname{arcctg} x$.

10.154. $y=\operatorname{arctg}\frac{1}{x}$. **10.155.** $y=\sin x+\cos x$.

10.156. $y=\sin 2x-2\cos^2 x$. **10.157.** $y=2\sin x-\sin^2 x$.

10.158. $y=\cos x-\frac{1}{\cos x}$. **10.159.** $y=3-4\sin^2 x$.

10.160. $y=\ln\sin 2x$. **10.161.** $y=\ln(1-\cos x)$.

ГЛАВА 11

НЕОПРЕДЕЛЕННЫЙ ИНТЕГРАЛ

§ 1. НЕПОСРЕДСТВЕННОЕ ИНТЕГРИРОВАНИЕ

Функция $F(x)$ называется *первообразной* для функции $f(x)$, если $F'(x)=f(x)$ [или $dF(x)=f(x)\,dx$].

Любая непрерывная функция $f(x)$ имеет бесконечное множество первообразных, которые отличаются друг от друга постоянным слагаемым.

Общее выражение $F(x)+C$ совокупности всех первообразных для функции $f(x)$ называется *неопределенным интегралом* от этой функции:

$$\int f(x)\,dx=F(x)+C, \text{ если } d[F(x)+C]=f(x)\,dx.$$

Основные свойства неопределенного интеграла

1°. *Производная от неопределенного интеграла равна подынтегральной функции, а дифференциал от него равен подынтегральному выражению:*

$$\left(\int f(x)\,dx\right)'=f(x); \quad d\left(\int f(x)\,dx\right)=f(x)\,dx.$$

2°. *Неопределенный интеграл от дифференциала функции равен этой функции плюс произвольная постоянная:*

$$\int df(x)=f(x)+C.$$

3°. *Постоянный множитель можно выносить за знак неопределенного интеграла:*

$$\int kf(x)\,dx=k\int f(x)\,dx.$$

4°. *Неопределенный интеграл от алгебраической суммы функций равен алгебраической сумме неопределенных интегралов от слагаемых функций:*

$$\int [f_1(x)\pm f_2(x)]\,dx=\int f_1(x)\,dx\pm\int f_2(x)\,dx.$$

Таблица простейших интегралов

1. $\int x^n\,dx=\frac{x^{n+1}}{n+1}+C \quad (n\neq-1).$
2. $\int \frac{dx}{x}=\ln|x|+C.$
3. $\int a^x\,dx=\frac{a^x}{\ln a}+C.$

   $\int e^x\,dx=e^x+C.$
4. $\int \cos x\,dx=\sin x+C.$
5. $\int \sin x\,dx=-\cos x+C.$
6. $\int \frac{dx}{\cos^2 x}=\operatorname{tg} x+C.$
7. $\int \frac{dx}{\sin^2 x}=-\operatorname{ctg} x+C.$
8. $\int \frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}}=\arcsin\frac{x}{a}+C.$
9. $\int \frac{dx}{a^2+x^2}=\frac{1}{a}\operatorname{arctg}\frac{x}{a}+C.$
10. $\int \frac{dx}{a^2-x^2}=\frac{1}{2a}\ln\left|\frac{a+x}{a-x}\right|+C.$
11. $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+a}}=\ln\left|x+\sqrt{x^2+a}\right|+C.$

Проинтегрировать функцию $f(x)$ — значит найти ее неопределенный интеграл. Непосредственное интегрирование основано на прямом использовании основных свойств неопределенного интеграла и таблицы простейших интегралов.

11.1. Найти интегралы:

$$1)\ \int \frac{2x^4-5x\sqrt[3]{x}+7\sqrt{x}}{x\sqrt{x}}\,dx;\quad 2)\ \int \frac{x^2}{9-x^2}\,dx;$$

$$3)\ \int (1-6^x)^2\,dx;\qquad 4)\ \int \operatorname{ctg}^2 x\,dx;\quad 5)\ \int 8\sin^2\frac{x}{2}\,dx.$$

Решение. 1) Разделим почленно числитель на знаменатель; в результате подынтегральная функция раскладывается на слагаемые, каждое из которых проинтегрируем:

$$\int \frac{2x^4-5x\sqrt[3]{x}+7\sqrt{x}}{x\sqrt{x}}\,dx=\int\left(2x^{5/2}-5x^{-1/6}+\frac{7}{x}\right)dx=$$

$$=\int 2x^{5/2}\,dx-\int 5x^{-1/6}\,dx+\int\frac{7}{x}\,dx=$$

$$=2\cdot\frac{x^{5/2+1}}{5/2+1}-5\cdot\frac{x^{-1/6+1}}{-1/6+1}+7\ln|x|+C=\frac{4}{7}x^{7/2}-6x^{5/6}+7\ln|x|+C.$$

Заметим, что произвольные постоянные, получающиеся при интегрировании каждого слагаемого, здесь объединены в одну произвольную постоянную C.

2) Вычитая и прибавляя в числителе подынтегральной функции число 9, получим

$$\int\frac{x^2-9+9}{9-x^2}\,dx=\int\left(-1+\frac{9}{9-x^2}\right)dx=-\int dx+9\int\frac{dx}{9-x^2}=$$

$$=-x+9\cdot\frac{1}{2\cdot 3}\ln\left|\frac{3+x}{3-x}\right|+C=-x+\frac{3}{2}\ln\left|\frac{3+x}{3-x}\right|+C.$$

3) Возводя в квадрат и интегрируя каждое слагаемое, имеем

$$\int(1-6^x)^2\,dx=\int(1-2\cdot 6^x+36^x)\,dx=x-\frac{2}{\ln 6}\cdot 6^x+\frac{36^x}{2\ln 6}+C.$$

4) Используя тригонометрическую формулу $1+\operatorname{ctg}^2 x=1/\sin^2 x$, находим

$$\int\operatorname{ctg}^2 x=\int\left(\frac{1}{\sin^2 x}-1\right)dx=\int\frac{dx}{\sin^2 x}-\int dx=-\operatorname{ctg} x-x+C.$$

5) Здесь следует воспользоваться формулой понижения степени

$$\sin^2\frac{x}{2}=\frac{1-\cos x}{2},$$

откуда получаем

$$\int 8\sin^2\frac{x}{2}\,dx=\int 4(1-\cos x)\,dx=4\left(\int dx-\int\cos x\,dx\right)=4x-4\sin x+C.$$

В задачах **11.2—11.59** найти интегралы.

11.2. $\int x^7\,dx$. **11.3.** $\int 6x^4\,dx$. **11.4.** $\int\frac{dx}{6}$. **11.5.** $\int\frac{dx}{x^5}$.

11.6. $\int(x^4-4x^3+2x)\,dx$. **11.7.** $\int(-2t^3+6t^2)\,dt$.

11.8. $\int(x-1)(x+4)\,dx$. **11.9.** $\int x^2(x+1)(5x-3)\,dx$.

11.10. $\int \frac{dx}{6\sqrt{x}}$. **11.11.** $\int \sqrt[3]{x^2}\,(8\sqrt[3]{x}-1)\,dx$.

11.12. $\int (9t^2-10\sqrt[4]{t}+3\sqrt{t})\,dt$. **11.13.** $\int \frac{dx}{12x}$.

11.14. $\int \frac{1-6x+4x^2}{x^2}\,dx$. **11.15.** $\int \frac{x^2-2x+3}{x\sqrt{x}}\,dx$.

11.16. $\int \frac{(4-3\sqrt{x})^2}{x^2}\,dx$. **11.17.** $\int \frac{(\sqrt{x}-1)^3}{x\sqrt{x}}\,dx$.

11.18. $\int \frac{x-9}{\sqrt{x}+3}\,dx$. **11.19.** $\int \frac{x^3+8}{x^2-2x+4}\,dx$.

11.20. $\int \frac{125-x}{\sqrt[3]{x}-5}\,dx$. **11.21.** $\int \frac{27-\sqrt{x}}{\sqrt[3]{x}+3\sqrt[6]{x}+9}\,dx$.

11.22. $\int 7^x\,dx$. **11.23.** $\int 3^x e^x\,dx$. **11.24.** $\int 5^{x-2}\,dx$.

11.25. $\int \frac{32^x-2^x}{4^x}\,dx$. **11.26.** $\int 6^x(6^x+4)\,dx$.

11.27. $\int (5^x-1)(5^{-x}+1)\,dx$. **11.28.** $\int 8\cos x\,dx$. **11.29.** $\int \frac{\sin x}{9}\,dx$.

11.30. $\int \frac{dx}{7\sin^2 x}$. **11.31.** $\int \left(\frac{2}{\cos^2 x}-\frac{5}{\sin^2 x}\right)dx$.

11.32. $\int \frac{5-4\cos^3 x}{\cos^2 x}\,dx$. **11.33.** $\int \frac{7+2x\sin^2 x}{\sin^2 x}\,dx$.

11.34. $\int \frac{\cos 2x}{\cos^2 x}\,dx$. **11.35.** $\int \frac{1-\cos 2x}{6\sin x}\,dx$. **11.36.** $\int \frac{dx}{\sin^2 x+\cos 2x}$.

11.37. $\int \frac{dx}{\sin^2 x\cos^2 x}$. **11.38.** $\int \frac{1-4\operatorname{ctg}^2 x}{\cos^2 x}\,dx$.

11.39. $\int \frac{\cos 9x+\cos 7x}{\cos 8x}\,dx$. **11.40.** $\int \frac{\sin 3x-\sin 5x}{\cos 4x}\,dx$.

11.41. $\int \frac{\cos 4x-\cos 6x}{\sin 5x}\,dx$. **11.42.** $\int \operatorname{tg}^2 x\,dx$.

11.43. $\int (\operatorname{ctg} x-\operatorname{tg} x)^2\,dx$. **11.44.** $\int 3\cos^2\frac{x}{2}\,dx$.

11.45. $\int \frac{1+\cos^2 x}{1+\cos 2x}\,dx$. **11.46.** $\int \frac{dx}{x^2+16}$. **11.47.** $\int \frac{dx}{\sqrt{9-x^2}}$.

11.48. $\int \frac{dx}{25-x^2}$. **11.49.** $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+4}}$. **11.50.** $\int \frac{1-\sqrt{2-x^2}}{\sqrt{2-x^2}}\,dx$.

11.51. $\int \frac{\sqrt{x^2+9}-6}{x^2+9}\,dx$. **11.52.** $\int \frac{1+x^2}{x^4-1}\,dx$. **11.53.** $\int \frac{4-x^2}{16-x^4}\,dx$.

11.54. $\int \sqrt{\frac{3+x^2}{x^4-9}}\,dx$. **11.55.** $\int \frac{\sqrt{1-x^2}-\sqrt{1+x^2}}{\sqrt{1-x^4}}\,dx$.

11.56. $\int \frac{3+x^2}{1+x^2}\,dx$. **11.57.** $\int \frac{1-2x^2}{x^2(1-x^2)}\,dx$.

Указание: представить числитель в виде $3+x^2=(1+x^2)+2$.

11.58. $\int \frac{2x^2+5}{x^2(x^2+5)}\,dx$. **11.59.** $\int \frac{x^2-7}{9-x^2}\,dx$.

§ 2. ИНТЕГРИРОВАНИЕ СПОСОБОМ ПОДСТАНОВКИ

В основе интегрирования *способом подстановки* (или *замены переменной*) лежит **свойство инвариантности формул интегрирования**, которое заключается в следующем: если

$$\int f(x)\,dx = F(x) + C,$$

то

$$\int f(u)\,du = F(u) + C,$$

где $u(x)$ — произвольная дифференцируемая функция от x.

Замена переменной в неопределенном интеграле производится с помощью подстановок двух видов:

1) $x = \varphi(t)$, где t — новая переменная, а $\varphi(t)$ — непрерывно дифференцируемая функция. В этом случае формула замены переменной

$$\int f(x)\,dx = \int f[\varphi(t)]\,\varphi'(t)\,dt. \qquad (1)$$

Функцию $\varphi(t)$ стараются выбирать таким образом, чтобы правая часть формулы (1) приобрела более удобный для интегрирования вид;

2) $t = \psi(x)$, где t — новая переменная. В этом случае формула замены переменной

$$\int f[\psi(x)]\,\psi'(x)\,dx = \int f(t)\,dt. \qquad (2)$$

11.60. Найти интегралы:

1) $\int \sin 3x\,dx$; 2) $\int \frac{x^2}{8+x^3}\,dx$; 3) $\int \frac{\cos x\,dx}{4+\sin^2 x}$;

4) $\int \frac{e^x\,dx}{\sqrt{9-e^{2x}}}$; 5) $\int \frac{\cos\sqrt[3]{x}}{\sqrt[3]{x^2}}\,dx$; 6) $\int \frac{dx}{x\sqrt{1+x^2}}$.

Решение. 1) Данный интеграл окажется табличным, если под знаком дифференциала будет стоять аргумент $3x$ подынтегральной функции $\sin 3x$. Так как $d(3x) = 3\,dx$, то

$$\int \sin 3x\,dx = \frac{1}{3}\int \sin 3x\,\underbrace{d(3x)}_{3dx}.$$

Следовательно, подстановка $3x = t$ приводит рассматриваемый интеграл к табличному:

$$\int \sin 3x\,dx = \frac{1}{3}\int \sin 3x\,d(3x) = \frac{1}{3}\int \sin t\,dt = -\frac{1}{3}\cos t + C.$$

Возвращаясь к старой переменной x, окончательно получим

$$\int \sin 3x\,dx = -\frac{1}{3}\cos 3x + C.$$

2) Так как $d(8+x^3) = 3x^2\,dx$, то

$$\int \frac{x^2\,dx}{8+x^3} = \frac{1}{3}\int \frac{\overbrace{d(8+x^3)}^{3x^2\,dx}}{8+x^3}.$$

Полагая $8+x^3 = t$, получим

$$\int \frac{x^2\,dx}{8+x^3} = \frac{1}{3}\int \frac{dt}{t} = \frac{1}{3}\ln|t| + C = \frac{1}{3}\ln|8+t^3| + C.$$

3) Поскольку $d(\sin x) = \cos x\,dx$, имеем

$$\int \frac{\cos x\,dx}{4+\sin^2 x} = \int \frac{\overbrace{d(\sin x)}^{\cos x\,dx}}{4+\sin^2 x}.$$

Поэтому, используя подстановку $t = \sin x$, приходим к табличному интегралу:

$$\int \frac{\cos x\,dx}{4+\sin^2 x} = \int \frac{dt}{4+t^2} = \frac{1}{2}\,\mathrm{arctg}\left(\frac{t}{2}\right) + C = \frac{1}{2}\,\mathrm{arctg}\left(\frac{\sin x}{2}\right) + C.$$

4) Из соотношения $d(e^x) = e^x\,dx$ получаем

$$\int \frac{e^x\,dx}{\sqrt{9-e^{2x}}} = \int \frac{\overbrace{d(e^x)}^{e^x dx}}{\sqrt{9-e^{2x}}}.$$

Воспользовавшись подстановкой $t = e^x$, приходим к табличному интегралу:

$$\int \frac{e^x\,dx}{\sqrt{9-(e^x)^2}} = \int \frac{dt}{\sqrt{9-t^2}} = \arcsin\frac{t}{3} + C = \arcsin\frac{e^x}{3} + C.$$

Замечание. В простейших случаях (подобных рассмотренным выше) введение новой переменной следует выполнять в уме, применяя следующие преобразования дифференциала dx:

$$dx = \frac{1}{a}\,d(ax+b), \quad x\,dx = \frac{1}{2}\,d(x^2), \quad e^x\,dx = d(e^x),$$

$$\frac{dx}{x} = d(\ln x), \quad \cos x\,dx = d(\sin x) \text{ и т. д.}$$

5) Здесь используем подстановку $x = t^3$. Отсюда находим $dx = 3t^2\,dt$ и, следовательно, по формуле (1) имеем

$$\int \frac{\cos\sqrt[3]{x}}{\sqrt[3]{x^2}}\,dx = \int \frac{\cos t}{t^2}\cdot 3t^2\,dt = 3\int \cos t\,dt = 3\sin t + C.$$

Возвращаясь к старой переменной x, получим

$$\int \frac{\cos\sqrt[3]{x}}{\sqrt[3]{x^2}}\,dx = 3\sin\sqrt[3]{x} + C.$$

Этот пример можно решить иначе. Так как $\dfrac{dx}{\sqrt[3]{x^2}} = 3\,d\left(\sqrt[3]{x}\right)$, то данный интеграл сразу же сводится к табличному:

$$\int \frac{\cos\sqrt[3]{x}}{\sqrt[3]{x^2}}\,dx = 3\int \cos\sqrt[3]{x}\,d\left(\sqrt[3]{x}\right) = 3\sin\sqrt[3]{x} + C.$$

6) Применим подстановку $x = \dfrac{1}{t}$. Тогда $dx = -\dfrac{dt}{t^2}$, $\sqrt{1+x^2} = \dfrac{\sqrt{1+t^2}}{t}$, $t = \dfrac{1}{x}$. По формуле (1) находим

$$\int \frac{dx}{x\sqrt{1+x^2}} = -\int \frac{t\,dt}{t^2\dfrac{\sqrt{1+t^2}}{t}} = -\int \frac{dt}{\sqrt{1+t^2}} = -\ln\left|t + \sqrt{1+t^2}\right| + C.$$

Возвращаясь к старой переменной x, получим

$$\int \frac{dx}{x\sqrt{1+x^2}} = -\ln\left|\frac{1}{x}+\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}\right| + C =$$
$$= -\ln\left|\frac{1+\sqrt{1+x^2}}{x}\right| + C = \ln\left|\frac{x}{1+\sqrt{1+x^2}}\right| + C.$$

В задачах **11.61—11.124** найти интегралы.

11.61. $\int \cos 5x\,dx$. **11.62.** $\int \sin(\pi/4-3x)\,dx$.

11.63. $\int (12x-5)^7\,dx$. **11.64.** $\int \sqrt{8x+9}\,dx$. **11.65.** $\int \frac{dx}{(5-3x)^4}$.

11.66. $\int \frac{dx}{\sqrt[3]{9x-7}}$. **11.67.** $\int \frac{dx}{6x+5}$. **11.68.** $\int \frac{dx}{11-4x}$.

11.69. $\int e^{4-3x}\,dx$. **11.70.** $\int 6^{5x+2}\,dx$. **11.71.** $\int \frac{dx}{16+25x^2}$.

11.72. $\int \frac{dx}{1-16x^2}$. **11.73.** $\int \frac{dx}{4x^2-9}$. **11.74.** $\int \frac{dx}{\sqrt{25-9x^2}}$.

11.75. $\int x\sqrt{x^2-7}\,dx$. **11.76.** $\int \frac{x^2\,dx}{\sqrt[3]{1-x^3}}$. **11.77.** $\int \frac{e^x\,dx}{(e^x-5)^3}$.

11.78. $\int \frac{x\,dx}{x^2+6}$. **11.79.** $\int \frac{2x+1}{x^2+x-3}\,dx$. **11.80.** $\int \frac{2x-3}{4+3x-x^2}\,dx$.

11.81. $\int \frac{6x-5}{\sqrt{3x^2-5x+4}}$. **11.82.** $\int \frac{x-1}{\sqrt{2x-x^2}}\,dx$.

11.83. $\int \frac{10x-3x^2}{x^3-5x^2}\,dx$. **11.84.** $\int \frac{e^x\,dx}{2e^x+7}$. **11.85.** $\int \operatorname{tg} x\,dx$.

11.86. $\int \operatorname{ctg} 5x\,dx$. **11.87.** $\int \frac{(8-\sqrt{x})^3}{\sqrt{x}}\,dx$.

11.88. $\int \frac{dx}{(6+\sqrt[3]{x})^4\sqrt[3]{x^2}}$. **11.89.** $\int \frac{e^{3/x}}{x^2}\,dx$. **11.90.** $\int \frac{dx}{x\ln x}$.

11.91. $\int \frac{\sqrt[6]{\ln^5 x}}{x}\,dx$. **11.92.** $\int x^2 6^{1-x^3}\,dx$. **11.93.** $\int \sqrt[4]{e^{3x}+8}\,e^{3x}\,dx$.

11.94. $\int \frac{4^x\,dx}{7+4^x}$. **11.95.** $\int \frac{e^{5x}}{4-e^{10x}}\,dx$. **11.96.** $\int \frac{7^x}{\sqrt{49^x+1}}\,dx$.

11.97. $\int \sin x\cos^2 x\,dx$. **11.98.** $\int \frac{\cos x}{\sqrt[3]{\sin x}}\,dx$.

11.99. $\int \frac{\sin x}{\cos^2 x\sqrt{\cos x}}\,dx$. **11.100.** $\int \frac{\sqrt{5\operatorname{tg} x}}{\cos^2 x}\,dx$.

11.101. $\int \frac{dx}{\sqrt[7]{\operatorname{ctg}^4 x}\sin^2 x}$. **11.102.** $\int \frac{1-4\arcsin x}{\sqrt{1-x^2}}\,dx$.

11.103. $\int \frac{\sqrt[4]{\operatorname{arctg} x}}{1+x^2}\,dx$. **11.104.** $\int \frac{dx}{(x^2+1)\operatorname{arcctg} x}$.

11.105. $\int \sqrt{1-2\sin x}\cos x\,dx$. **11.106.** $\int e^{4\cos x-1}\sin x\,dx$.

11.107. $\int \cos^2 x\,dx$. **11.108.** $\int \sin^2 2x\,dx$. **11.109.** $\int \frac{\cos x\,dx}{2+\sin^2 x}$.

11.110. $\int \frac{\sin x\,dx}{\cos^2 x-5}$. **11.111.** $\int \frac{\cos(2/x^3)\,dx}{x^4}$. **11.112.** $\int \frac{dx}{x\sqrt{\ln^2 x-9}}$.

11.113. $\int \frac{x^3\,dx}{\sin^2 x^4}$. **11.114.** $\int \frac{e^{-1/x^4}}{x^5}\,dx$.

11.115. $\int \frac{dx}{\sin x}$. **11.116.** $\int \frac{dx}{\cos x}$.

Указание: подстановка $\operatorname{tg}(x/2)=t$.

11.117. $\int \frac{dx}{1+\sqrt{x+5}}$. **11.118.** $\int \frac{\sqrt{x}}{x+4}\,dx$.

Указание: подстановка $x+5=t^2$.

11.119. $\int \frac{dx}{x\sqrt{2x+9}}$. **11.120.** $\int \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}+1}\,dx$.

11.121. $\int \sqrt{9-x^2}\,dx$. **11.122.** $\int \frac{\sqrt{x^2-25}}{x}\,dx$.

Указание: подстановка $x=3\sin t$. Указание: подстановка $x=5/\sin t$.

11.123. $\int \frac{dx}{\sqrt{(4+x^2)^3}}$. **11.124.** $\int \sqrt{e^x-1}\,dx$.

Указание: подстановка $x=2\operatorname{tg} t$. Указание: подстановка $e^x-1=t^2$.

§ 3. ИНТЕГРИРОВАНИЕ ПО ЧАСТЯМ

Интегрированием по частям называется нахождение интеграла по формуле

$$\int u\,dv = uv - \int v\,du, \tag{1}$$

где u и v — непрерывно дифференцируемые функции от x. С помощью формулы (1) отыскание интеграла $\int u\,dv$ сводится к нахождению другого интеграла $\int v\,du$; ее применение целесообразно в тех случаях, когда последний интеграл либо проще исходного, либо ему подобен.

При этом в качестве u берется функция, которая при дифференцировании упрощается, а в качестве v — та часть подынтегрального выражения, интеграл от которой известен или может быть найден.

Так, при нахождении интегралов вида

$$\int P(x)\,e^{ax}\,dx, \quad \int P(x)\sin ax\,dx, \quad \int P(x)\cos ax\,dx$$

за u следует принять многочлен $P(x)$, а за dv — соответственно выражения $e^{ax}\,dx$, $\sin ax\,dx$, $\cos ax\,dx$; при отыскании интегралов вида

$$\int P(x)\ln x\,dx, \quad \int P(x)\arcsin x\,dx, \quad \int P(x)\arccos x\,dx$$

за u принимаются соответственно функции $\ln x$, $\arcsin x$, $\arccos x$, а за dv — выражение $P(x)\,dx$.

11.125. Найти интегралы:

1) $\int \frac{\ln x}{x^3}\,dx$; 2) $\int (x-5)\cos x\,dx$; 3) $\int x^2 e^{4x}\,dx$;

4) $\int x \operatorname{arctg} x\, dx$; 5) $\int e^{-x} \sin x\, dx$.

Решение. 1) Положим $u = \ln x$, $dv = \frac{dx}{x^3}$, откуда

$$du = \frac{dx}{x}, \quad v = \int \frac{dx}{x^3} = -\frac{1}{2x^2}.$$

Тогда по формуле (1) находим

$$\int \frac{\ln x}{x^3} dx = \ln x \left(-\frac{1}{2x^2}\right) - \int \left(-\frac{1}{2x^2}\right) \frac{dx}{x} =$$
$$= -\frac{\ln x}{2x^2} + \frac{1}{2} \int \frac{dx}{x^3} = -\frac{\ln x}{2x^2} - \frac{1}{4x^2} + C.$$

2) Полагая $u = x - 5$, $dv = \cos x\, dx$, найдем $du = dx$, $v = \int \cos x\, dx = \sin x$. Следовательно,

$$\int (x-5) \cos x\, dx = (x-5) \sin x - \int \sin x\, dx = (x-5) \sin x + \cos x + C.$$

3) Пусть $u = x^2$, $e^{4x} dx = dv$; тогда $du = 2x\, dx$, $v = \int e^{4x} dx = (1/4) e^{4x}$. По формуле (1) имеем

$$\int x^2 e^{4x} dx = \frac{1}{4} x^2 e^{4x} - \frac{1}{2} \int x e^{4x} dx. \qquad (*)$$

К последнему интегралу снова применим формулу интегрирования по частям. Положим $u = x$, $e^{4x} dx = dv$, откуда $du = dx$, $v = (1/4) e^{4x}$ и, следовательно,

$$\int x e^{4x} dx = \frac{1}{4} x e^{4x} - \frac{1}{4} \int e^{4x} dx = \frac{1}{4} x e^{4x} - \frac{1}{16} e^{4x}.$$

Подставляя найденное выражение в соотношение (*), получим

$$\int x^2 e^{4x} dx = \frac{1}{4} x^2 e^{4x} - \frac{1}{2} \left(\frac{1}{4} x e^{4x} - \frac{1}{16} e^{4x}\right) + C = \frac{e^{4x}}{32} (8x^2 - 4x + 1) + C.$$

4) Положим $u = \operatorname{arctg} x$, $dv = x\, dx$, откуда $du = [1/(1+x^2)]\, dx$, $v = x^2/2$. На основании формулы (1) находим

$$\int x \operatorname{arctg} x\, dx = \frac{x^2}{2} \operatorname{arctg} x - \int \frac{x^2}{2} \frac{dx}{x^2+1} = \frac{1}{2} x^2 \operatorname{arctg} x - \frac{1}{2} \int \frac{x^2+1-1}{x^2+1} dx =$$
$$= \frac{1}{2} x^2 \operatorname{arctg} x - \frac{1}{2} \left(\int dx - \int \frac{dx}{x^2+1}\right) = \frac{1}{2} (x^2 \operatorname{arctg} x - x + \operatorname{arctg} x) + C.$$

5) Пусть $u = e^{-x}$, $\sin x\, dx = dv$; тогда $du = -e^{-x}$, $v = -\cos x$. По формуле (1) имеем

$$I = \int e^{-x} \sin x\, dx = -e^{-x} \cos x - \int e^{-x} \cos x\, dx. \qquad (*)$$

К последнему интегралу снова применяем интегрирование по частям. Полагая $u = e^{-x}$, $\cos x\, dx = dv$, находим $du = -e^{-x}$, $v = \sin x$ и, следовательно,

$$\int e^{-x} \cos x\, dx = e^{-x} \sin x + \int e^{-x} \sin x\, dx.$$

Подставляя полученное выражение в соотношение (*), приходим к уравнению с неизвестным интегралом I:

$$I = -e^{-x} \cos x - e^{-x} \sin x - I,$$

из которого находим

$$I = -\frac{e^{-x}}{2} (\cos x + \sin x).$$

В задачах **11.126—11.143** найти интегралы.

11.126. $\int (x-7)\sin x\,dx$. **11.127.** $\int (1-3x)\cos 2x\,dx$.

11.128. $\int x^2\cos x\,dx$. **11.129.** $\int x^2\ln x\,dx$. **11.130.** $\int \frac{\ln x}{\sqrt{x}}dx$.

11.131. $\int \frac{x}{\cos^2 x}dx$. **11.132.** $\int \frac{x}{\sin^2 3x}dx$. **11.133.** $\int (4-x)e^{-3x}dx$.

11.134. $\int (x+2)3^x dx$. **11.135.** $\int (x^2-6x)e^{-x}dx$.

11.136. $\int \ln(1+x^2)dx$. **11.137.** $\int \ln(x+\sqrt{1+x^2})dx$.

11.138. $\int \operatorname{arctg} x\,dx$. **11.139.** $\int \frac{\arcsin x}{x^2}dx$. **11.140.** $\int e^{2x}\cos x\,dx$.

11.141. $\int 4^x\sin x\,dx$. **11.142.** $\int \sqrt{4+x^2}\,dx$. **11.143.** $\int \cos\sqrt{x}\,dx$.

Указание: положить $\sqrt{x}=t$.

§ 4. ИНТЕГРИРОВАНИЕ ФУНКЦИЙ, СОДЕРЖАЩИХ КВАДРАТНЫЙ ТРЕХЧЛЕН

1. Интеграл $\int \frac{dx}{ax^2+bx+c}$ находится путем выделения полного квадрата из квадратного трехчлена, стоящего в знаменателе. В результате получается табличный интеграл вида $\int \frac{dt}{t^2+k^2}$ или $\int \frac{dt}{t^2-k^2}$.

2. Для нахождения интеграла $\int \frac{Ax+B}{ax^2+bx+c}dx$ следует выделить в числителе дроби производную знаменателя и разложить полученный интеграл на сумму двух интегралов: первый из них подстановкой $ax^2+bx+c=t$ сводится к виду $\int \frac{dt}{t}=\ln|t|$, а второй—это интеграл, рассмотренный в п. 1.

3. Интеграл $\int \frac{dx}{\sqrt{ax^2+bx+c}}$ находится с помощью выделения полного квадрата из подкоренного выражения и сводится к табличным интегралам вида $\int \frac{dt}{\sqrt{t^2\pm k^2}}$ или $\int \frac{dt}{\sqrt{k^2-t^2}}$.

4. Для нахождения интеграла $\int \frac{Ax+B}{\sqrt{ax^2+bx+c}}dx$ следует выделить в числителе производную подкоренного выражения и разложить полученный интеграл на сумму двух интегралов: первый из них подстановкой $ax^2+bx+c=t$ сводится к виду $\int \frac{dt}{\sqrt{t}}=2\sqrt{t}$, а второй—это интеграл, рассмотренный в п. 3.

11.144. Найти интегралы:

1) $\int \frac{dx}{4x^2+12x+9}$; 2) $\int \frac{dx}{x^2-8x+25}$; 3) $\int \frac{dx}{-4x^2+8x+5}$;

4) $\int \frac{dx}{\sqrt{3x^2+6x+1}}$; 5) $\int \frac{dx}{\sqrt{3-x-2x^2}}$.

Решение. 1) Квадратный трехчлен $4x^2+12x+9$ есть полный квадрат двучлена $2x+3$. Следовательно,

$$\int \frac{dx}{4x^2+12x+9}=\int \frac{dx}{(2x+3)^2}=\frac{1}{2}\int \frac{d(2x+3)}{(2x+3)^2}=-\frac{1}{2(2x+3)}+C.$$

2) Выделим из квадратного трехчлена полный квадрат:

$$x^2-8x+25=(x^2-8x+16)-16+25=(x-4)^2+9.$$

Отсюда находим

$$\int \frac{dx}{x^2-8x+25}=\int \frac{dx}{(x-4)^2+9}=\int \frac{d(x-4)}{(x-4)^2+3^2}=\frac{1}{3}\operatorname{arctg}\frac{x-4}{3}+C.$$

3) Выделяя из квадратного трехчлена полный квадрат, получим

$$-4x^2+8x+5=-4\left(x^2-2x-\frac{5}{4}\right)=$$
$$=-4\left[(x^2-2x+1)-1-\frac{5}{4}\right]=4\left[\frac{9}{4}-(x-1)^2\right].$$

Таким образом,

$$\int \frac{dx}{-4x^2+8x+5}=\frac{1}{4}\int \frac{dx}{\frac{9}{4}-(x-1)^2}=\frac{1}{4}\int \frac{d(x-1)}{\left(\frac{3}{2}\right)^2-(x-1)^2}=$$
$$=\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{2\cdot(3/2)}\ln\left|\frac{3/2+(x-1)}{3/2-(x-1)}\right|+C=\frac{1}{12}\ln\left|\frac{1+2x}{5-2x}\right|+C.$$

4) Выделим из квадратного трехчлена полный квадрат:

$$3x^2+6x+1=3(x^2+2x+1)-3+1=3(x+1)^2-2=3\left[(x+1)^2-\frac{2}{3}\right].$$

Следовательно,

$$\int \frac{dx}{\sqrt{3x^2+6x+1}}=\int \frac{dx}{\sqrt{3\left[(x+1)^2-\frac{2}{3}\right]}}=\frac{1}{\sqrt{3}}\int \frac{d(x+1)}{\sqrt{(x+1)^2-\frac{2}{3}}}=$$
$$=\frac{1}{\sqrt{3}}\ln\left|x+1+\sqrt{(x+1)^2-\frac{2}{3}}\right|+C=$$
$$=\frac{1}{\sqrt{3}}\ln\left|\sqrt{3}(x+1)+\sqrt{3x^2+6x+1}\right|+C.$$

5) Выделяя из квадратного трехчлена полный квадрат, имеем

$$3-x-2x^2=-2\left(x^2+\frac{1}{2}x-\frac{3}{2}\right)=-2\left(x^2+2\cdot\frac{1}{4}x+\frac{1}{16}-\frac{1}{16}-\frac{3}{2}\right)=$$
$$=-2\left[\left(x+\frac{1}{4}\right)^2-\frac{25}{16}\right]=2\left[\frac{25}{16}-\left(x+\frac{1}{4}\right)^2\right].$$

Отсюда получаем

$$\int \frac{dx}{\sqrt{3-x-2x^2}}=\int \frac{dx}{\sqrt{2\left[\frac{25}{16}-\left(x+\frac{1}{4}\right)^2\right]}}=\frac{1}{\sqrt{2}}\int \frac{d\left(x+\frac{1}{4}\right)}{\sqrt{\left(\frac{5}{4}\right)^2-\left(x+\frac{1}{4}\right)^2}}=$$

$$=\frac{1}{\sqrt{2}}\arcsin\frac{x+1/4}{5/4}+C=\frac{1}{\sqrt{2}}\arcsin\frac{4x+1}{5}+C.$$

В задачах **11.145—11.156** найти интегралы.

11.145. $\int \frac{dx}{x^2+10x+34}$. **11.146.** $\int \frac{dx}{6x-9x^2-1}$.

11.147. $\int \frac{dx}{-x^2+4x+21}$. **11.148.** $\int \frac{dx}{2x^2+2x+5}$.

11.149. $\int \frac{dx}{4x^2-16x-9}$. **11.150.** $\int \frac{dx}{x-2x^2}$.

11.151. $\int \frac{dx}{\sqrt{5+4x-x^2}}$. **11.152.** $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+10x+28}}$.

11.153. $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+7x}}$. **11.154.** $\int \frac{dx}{\sqrt{5x-2x^2}}$.

11.155. $\int \frac{dx}{\sqrt{50x-25x^2-9}}$. **11.156.** $\int \frac{dx}{\sqrt{3x^2-3x+8}}$.

11.157. Найти интегралы:

$$1)\ \int \frac{x-2}{2x^2+5x+6}\,dx;\quad 2)\ \int \frac{-4x+3}{\sqrt{4x^2+8x+9}}\,dx.$$

Решение. 1) Выделяя в числителе производную квадратного трехчлена, стоящего в знаменателе, получим

$$x-2=\frac{1}{4}(4x+5)-\frac{13}{4}.$$

Следовательно,

$$\int \frac{x-2}{2x^2+5x+6}\,dx=\int \frac{\frac{1}{4}(4x+5)-\frac{13}{4}}{2x^2+5x+6}\,dx=$$

$$=\frac{1}{4}\int \frac{4x+5}{2x^2+5x+6}\,dx-\frac{13}{4}\int \frac{dx}{2x^2+5x+6}=\frac{1}{4}\ln(2x^2+5x+6)-$$

$$-\frac{13}{4}\int \frac{dx}{2\left(x+\frac{5}{4}\right)^2+\frac{23}{8}}=\frac{1}{4}\ln(2x^2+5x+6)-\frac{13}{8}\int \frac{dx}{\left(x+\frac{5}{4}\right)^2+\frac{23}{16}}=$$

$$=\frac{1}{4}\ln(2x^2+5x+6)-\frac{13}{8}\cdot\frac{4}{\sqrt{23}}\operatorname{arctg}\frac{(x+5/4)\,4}{\sqrt{23}}+C=$$

$$=\frac{1}{4}\ln(2x^2+5x+6)-\frac{13}{2\sqrt{23}}\operatorname{arctg}\frac{4x+5}{\sqrt{23}}+C.$$

2) Выделим в числителе производную квадратного трехчлена, стоящего в знаменателе под знаком корня:

$$-4x+3=-\frac{1}{2}(8x+8)+7.$$

Отсюда получаем

$$\int \frac{-4x+3}{\sqrt{4x^2+8x+9}}\,dx=\int \frac{-\frac{1}{2}(8x+8)+7}{\sqrt{4x^2+8x+9}}\,dx=$$

$$=-\frac{1}{2}\int \frac{8x+8}{\sqrt{4x^2+8x+9}}\,dx+7\int \frac{dx}{\sqrt{4x^2+8x+9}}=$$

$$=-\frac{1}{2}\int (4x^2+8x+9)^{-1/2}\,d\,(4x^2+8x+9)+7\int \frac{dx}{\sqrt{4(x+1)^2+5}}=$$

$$=-\frac{1}{2}\cdot 2\sqrt{4x^2+8x+9}+\frac{7}{2}\int \frac{dx}{\sqrt{(x+1)^2+\frac{5}{4}}}=$$

$$=-\sqrt{4x^2+8x+9}+\frac{7}{2}\ln\left|x+1+\sqrt{x^2+2x+\frac{9}{4}}\right|+C.$$

В задачах **11.158—11.167** найти интегралы.

11.158. $\int \frac{x-4}{x^2+x-12}\,dx.$ **11.159.** $\int \frac{6x-1}{x^2-4x+13}\,dx.$

11.160. $\int \frac{3-5x}{4x^2+16x-9}\,dx.$ **11.161.** $\int \frac{12x+11}{9x^2-6x+2}\,dx.$

11.162. $\int \frac{x^2-2x}{x^2-8x+25}\,dx.$ **11.163.** $\int \frac{(x+1)^2}{x^2-2x-15}\,dx.$

11.164. $\int \frac{3x-5}{\sqrt{x^2+6x+20}}\,dx.$ **11.165.** $\int \frac{7-x}{\sqrt{3+2x-x^2}}\,dx.$

11.166. $\int \frac{6x-5}{\sqrt{2x^2-12x+15}}\,dx.$ **11.167.** $\int \frac{8x+3}{\sqrt{27+12x-4x^2}}\,dx.$

§ 5. ИНТЕГРИРОВАНИЕ РАЦИОНАЛЬНЫХ ДРОБЕЙ

1. Простейшие дроби и их интегрирование. *Рациональной дробью* называется дробь вида $P(x)/Q(x)$, где $P(x)$ и $Q(x)$ — многочлены *. Рациональная дробь называется *правильной*, если степень $P(x)$ ниже степени $Q(x)$; в противном случае дробь называется *неправильной*.

Простейшими дробями I, II, III и IV типов называются правильные рациональные дроби следующего вида:

I. $\frac{A}{x-a}$.

II. $\frac{A}{(x-a)^m}$, где m — целое число, большее единицы.

III. $\frac{Ax+B}{x^2+px+q}$, где $\frac{p^2}{4}-q<0$, т. е. квадратный трехчлен x^2+px+q не имеет действительных корней.

IV. $\frac{Ax+B}{(x^2+px+q)^n}$, где n — целое число, большее единицы, и квадратный трехчлен x^2+px+q не имеет действительных корней.

---

* В дальнейшем будем предполагать, что коэффициент при наивысшей степени x в многочлене $Q(x)$ равен единице.

Интегрирование простейших дробей I и II типов производится непосредственно:

$$\int \frac{A}{x-a}\,dx = A\ln|x-a| + C,$$

$$\int \frac{A}{(x-a)^m}\,dx = \frac{A}{1-m}\cdot\frac{1}{(x-a)^{m-1}} + C.$$

Интегрирование простейшей дроби III типа было рассмотрено в § 4. Напомним, что для этого нужно в числителе дроби выделить производную знаменателя и разложить полученный интеграл на сумму двух интегралов: тогда первый из них подстановкой $x^2+px+q=t$ приведется к виду $\int \frac{dt}{t} = \ln t = \ln(x^2+px+q)$, а второй выделением полного квадрата — к виду $\int \frac{dt}{u^2+k^2} = \frac{1}{k}\operatorname{arctg}\frac{u}{k}$.

Для интегрирования простейшей дроби IV типа в числителе дроби нужно записать производную квадратного трехчлена и разложить полученный интеграл на сумму двух интегралов. Первый из них подстановкой $x^2+px+q=t$ приведется к виду $\int \frac{dt}{t^n} = \frac{1}{(1-n)\,t^{n-1}}$, а второй имеет вид $\int \frac{dx}{(x^2+px+q)^n}$. С помощью подстановки $x+p/2=u$ он преобразуется в интеграл вида $I_n = \int \frac{du}{(u^2+a^2)^n}$, который интегрированием по частям можно свести к более простому интегралу $I_{n-1} = \int \frac{du}{(u^2+a^2)^{n-1}}$ того же типа, но показатель в знаменателе уменьшается на единицу. При этом справедлива следующая рекуррентная формула:

$$I_n = \frac{1}{2a^2(n-1)}\cdot\frac{u}{(u^2+a^2)^{n-1}} + \frac{1}{a^2}\cdot\frac{2n-3}{2n-2}I_{n-1}.$$

Повторяя этот процесс, в конце концов получим интеграл

$$I_1 = \int \frac{du}{u^2+a^2} = \frac{1}{a}\operatorname{arctg}\frac{u}{a}.$$

В практических вычислениях следует использовать не рекуррентную формулу, а метод, с помощью которого она выводится.

2. Разложение правильной рациональной дроби на сумму простейших дробей. Любая правильная рациональная дробь $P(x)/Q(x)$ может быть единственным образом представлена в виде суммы простейших рациональных дробей. Для этого прежде всего знаменатель $Q(x)$ записывают в виде произведения сомножителей, каждый из которых является либо степенью линейной функции $x-a$, либо степенью квадратичной функции x^2+px+q, не имеющей действительных корней. После этого приступают к нахождению простейших дробей, составляющих в сумме данную дробь $P(x)/Q(x)$. Знаменателями таких простейших дробей могут быть лишь линейные и квадратичные множители, входящие в разложение $Q(x)$, причем не в бо́льших степенях, чем они входят в это разложение. Поэтому каждому сомножителю $(x-a)^k$ разложения $Q(x)$ отвечает в разложении дроби $P(x)/Q(x)$ выражение вида

$$\frac{A_1}{x-a} + \frac{A_2}{(x-a)^2} + \ldots + \frac{A_k}{(x-a)^k}, \qquad (1)$$

а каждому сомножителю $(x^2+px+q)^l$ — выражение вида

$$\frac{B_1x+C_1}{x^2+px+q} + \frac{B_2x+C_2}{(x^2+px+q)^2} + \ldots + \frac{B_lx+C_l}{(x^2+px+q)^l}. \qquad (2)$$

Отсюда получаем следующее практическое **правило разложения правильной рациональной дроби $P(x)/Q(x)$ на простейшие дроби.**

1. Разложить знаменатель $Q(x)$ на линейные и квадратичные множители, не имеющие действительных корней.

2. Записать разложение данной рациональной дроби $P(x)/Q(x)$ на простейшие дроби с неопределенными (буквенными) коэффициентами, используя выражения вида (1) и (2).

3. Полученное равенство умножить на общий знаменатель.

4. Первый способ. Раскрыть скобки, привести подобные члены и приравнять коэффициенты при одинаковых степенях x.

Второй способ. Не раскрывая скобок, дать аргументу x столько различных значений, сколько имеется неопределенных коэффициентов (используя прежде всего корни знаменателя).

5. Решить полученную систему линейных уравнений относительно искомых коэффициентов.

3. Интегрирование рациональных дробей. Для нахождения интеграла от рациональной дроби $P(x)/Q(x)$ следует прежде всего выделить из нее целую часть (если дробь неправильная), т. е. представить ее в виде

$$\frac{P(x)}{Q(x)}=M(x)+\frac{R(x)}{Q(x)},$$

где $M(x)$ — многочлен, а $R(x)/Q(x)$ — правильная рациональная дробь. После этого полученную дробь $R(x)/Q(x)$ нужно разложить на простейшие дроби и проинтегрировать каждое слагаемое в отдельности (см. п. 1 и 2).

11.168. Найти интеграл $\int \frac{5-4x}{(x+1)(x-2)}dx$.

Решение. Представим подынтегральную дробь в виде суммы простейших дробей. Линейным множителям $x+1$ и $x-2$ знаменателя данной дроби отвечают соответственно дроби вида $\frac{A}{x+1}$ и $\frac{B}{x-2}$. Следовательно,

$$\frac{5-4x}{(x+1)(x-2)}=\frac{A}{x+1}+\frac{B}{x-2}.$$

Умножим обе части равенства на общий знаменатель и, отбрасывая затем этот знаменатель, получим

$$5-4x=A(x-2)+B(x+1). \qquad (*)$$

Коэффициенты A и B можно найти одним из двух способов.

Первый способ. Запишем тождество (*) в виде

$$-4x+5=(A+B)x+(-2A+B).$$

Приравняем теперь коэффициенты при одинаковых степенях x:

$$\begin{array}{c|l} x & -4=\quad A+B, \\ x^0 & \ \ 5=-2A+B. \end{array}$$

Отсюда находим $A=-3$, $B=-1$. Следовательно,

$$\frac{5-4x}{(x+1)(x-2)}=-\frac{3}{x+1}-\frac{1}{x-2}.$$

Второй способ. Полагая $x=2$ в тождестве (*), получим

$$5-4\cdot 2=3B, \text{ откуда } B=-1.$$

Полагая $x=-1$, имеем

$$5-4\cdot(-1)=-3A, \text{ откуда } A=-3.$$

Таким образом, искомый интеграл

$$\int\frac{5-4x}{(x+1)(x-2)}=-3\int\frac{dx}{x+1}-\int\frac{dx}{x-2}=-3\ln|x+1|-\ln|x-2|+C.$$

11.169. Найти интеграл $\int \frac{x^2+6}{x(x-3)^2}dx$.

Решение. Представим подынтегральную дробь в виде суммы простейших дробей. Линейному множителю x знаменателя этой дроби отвечает дробь $\frac{A}{x}$, линейному множителю $(x-3)^2$ — сумма простейших дробей вида $\frac{B}{x-3}+\frac{C}{(x-3)^2}$. Следовательно, разложение данной дроби на простейшие дроби имеет вид

$$\frac{x^2+6}{x(x-3)^2}=\frac{A}{x}+\frac{B}{x-3}+\frac{C}{(x-3)^2}.$$

Освобождаясь от знаменателей, получаем

$$x^2+6=A(x-3)^2+Bx(x-3)+Cx. \qquad (*)$$

Для нахождения неопределенных коэффициентов A, B и C будем комбинировать оба изложенных выше способа.

Полагая $x=3$, получим $9+6=3C$, т. е. $C=5$.

При $x=0$ имеем $6=9A$, т. е. $A=2/3$.

Остается определить коэффициент B. Для этого сравним коэффициенты при x^2 в обеих частях тождества $(*)$: $1=A+B$, откуда $B=1-A=1/3$.

Итак, находим искомый интеграл:

$$\int \frac{x^2+6}{x(x-3)^2}dx=\frac{2}{3}\int\frac{dx}{x}+\frac{1}{3}\int\frac{dx}{x-3}+5\int\frac{dx}{(x-3)^2}=$$
$$=\frac{2}{3}\ln|x|+\frac{1}{3}\ln|x-3|-\frac{5}{x-3}+C.$$

11.170. Найти интеграл $\int \frac{x^2-6x-18}{(x-2)(x^2+2x+5)}dx$.

Решение. Разложим подынтегральную дробь на сумму простейших дробей. Знаменатель подынтегральной дроби есть произведение линейного множителя $x-2$ и квадратичного множителя x^2+2x+5, не имеющего действительных корней. Первому из них отвечает дробь вида $\frac{A}{x-2}$, а второму — дробь вида $\frac{Bx+C}{x^2+2x+5}$. Поэтому разложение данной дроби на простейшие дроби имеет вид

$$\frac{x^2-6x-18}{(x-2)(x^2+2x+5)}=\frac{A}{x-2}+\frac{Bx+C}{x^2+2x+5}.$$

Сравнивая числители, получаем

$$x^2-6x-18=A(x^2+2x+5)+(Bx+C)(x-2). \qquad (*)$$

Полагая $x=2$, находим A:

$$4-12-18=A(4+4+5), \text{ т. е. } A=-2.$$

Числа B и C найдем, приравнивая коэффициенты при x^2 и свободные члены в равенстве $(*)$:

$$\begin{array}{c|l} x^2 & 1=A+B, \text{ откуда } B=1-A=1-(-2)=3, \\ x^0 & -18=5A-2C, \text{ откуда } C=\frac{1}{2}(5A+18)=4. \end{array}$$

Следовательно,

$$\int \frac{x^2-6x-18}{(x-2)(x^2+2x+5)}dx=-2\int\frac{dx}{x-2}+\int\frac{3x+4}{x^2+2x+5}dx=$$

$$=-2\ln|x-2|+\int\frac{\frac{3}{2}(2x+2)+1}{x^2+2x+5}dx=$$

$$=-2\ln|x-2|+\frac{3}{2}\ln(x^2+2x+5)+\int\frac{dx}{(x+1)^2+4}=$$

$$=-2\ln|x-2|+\frac{3}{2}\ln(x^2+2x+5)+\frac{1}{2}\operatorname{arctg}\frac{x+1}{2}+C.$$

11.171. Найти интеграл $\int\frac{x^3+x}{(x^2+2x+2)^2}dx$.

Решение. Квадратный трехчлен x^2+2x+2 не имеет действительных корней. Поэтому подынтегральная дробь раскладывается на множители следующим образом:

$$\frac{x^3+x}{(x^2+2x+2)^2}=\frac{Ax+B}{x^2+2x+2}+\frac{Cx+D}{(x^2+2x+2)^2}.$$

Освобождаясь от знаменателей, имеем

$$x^3+x=(Ax+B)(x^2+2x+2)+Cx+D.$$

Приравниваем коэффициенты при одинаковых степенях x:

$$\begin{array}{c|l} x^3 & 1=A, \\ x^2 & 0=2A+B, \\ x & 1=2A+2B+C, \\ x^0 & 0=2B+D. \end{array}$$

Отсюда получаем $A=1$, $B=-2$, $C=3$, $D=4$ и, следовательно,

$$\int\frac{x^3+x}{(x^2+2x+2)^2}dx=\int\frac{x-2}{x^2+2x+2}dx+\int\frac{3x+4}{(x^2+2x+2)^2}dx=$$

$$=\int\frac{\frac{1}{2}(2x+2)-3}{(x+1)^2+1}dx+\int\frac{\frac{3}{2}(2x+2)+1}{(x^2+2x+2)^2}dx=$$

$$=\frac{1}{2}\ln(x^2+2x+2)-3\operatorname{arctg}(x+1)-\frac{3}{2}\cdot\frac{1}{x^2+2x+2}+\int\frac{dx}{(x^2+2x+2)^2}. \quad (*)$$

Для нахождения последнего интеграла воспользуемся подстановкой $x+1=t$; тогда

$$\int\frac{dx}{(x^2+2x+2)^2}=\int\frac{dx}{[(x+1)^2+1]^2}=\int\frac{dt}{(t^2+1)^2}=\int\frac{(t^2+1)-t^2}{(t^2+1)^2}dt=$$

$$=\int\frac{dt}{t^2+1}-\int\frac{t^2\,dt}{(t^2+1)^2}=\operatorname{arctg}t-\int\frac{t^2\,dt}{(t^2+1)^2}.$$

Интеграл $\int\frac{t^2\,dt}{(t^2+1)^2}$ найдем интегрированием по частям; полагая $u=t$, $dv=\frac{t\,dt}{(t^2+1)^2}$, имеем $du=dt$,

$$v=\int\frac{t\,dt}{(t^2+1)^2}=\frac{1}{2}\int\frac{d(t^2+1)}{(t^2+1)^2}=-\frac{1}{2(t^2+1)}.$$

Отсюда получим

$$\int \frac{t^2\,dt}{(t^2+1)^2}=-\frac{t}{2(t^2+1)}+\frac{1}{2}\int\frac{dt}{t^2+1}=-\frac{t}{2(t^2+1)}+\frac{1}{2}\operatorname{arctg} t+C.$$

Таким образом,

$$\int \frac{dx}{(x^2+2x+2)^2}=\operatorname{arctg} t+\frac{t}{2(t^2+1)}-\frac{1}{2}\operatorname{arctg} t+C=$$

$$=\frac{1}{2}\operatorname{arctg}(x+1)+\frac{x+1}{2(x^2+2x+2)}+C.$$

Подставляя найденное значение в соотношение (*), получаем искомый интеграл:

$$\int \frac{x^3+x}{(x^2+2x+2)^2}\,dx=\frac{1}{2}\ln(x^2+2x+2)-\frac{5}{2}\operatorname{arctg}(x+1)+\frac{x-2}{2(x^2+2x+2)}+C.$$

В задачах **11.172—11.180** найти интегралы от рациональных дробей.

11.172. $\int \frac{3x+8}{(x-2)(x+5)}\,dx.$ **11.173.** $\int \frac{7x+12}{(x-1)(3x+1)}\,dx.$

11.174. $\int \frac{5x-10-x^2}{x^2-4x+3}\,dx.$ **11.175.** $\int \frac{x^2-72}{x(x+4)(x-3)}\,dx.$

11.176. $\int \frac{x^4-16x^3+5x+8}{x^3-16x}\,dx.$ **11.177.** $\int \frac{6+8x-x^2}{x^3+3x^2+2x}\,dx.$

11.178. $\int \frac{3x+1}{(x+3)^2(x-5)}\,dx.$ **11.179.** $\int \frac{x^2+5x+9}{(x-2)^3}\,dx.$

11.180. $\int \frac{x^3-10x+25}{x^2(x-5)^2}\,dx.$ **11.181.** $\int \frac{3x^3-7x^2+6x}{(x-1)^2(1-2x)}\,dx.$

11.182. $\int \frac{4x^2-5x+9}{(x^2-4x+13)(x+1)}\,dx.$ **11.183.** $\int \frac{x^2-7x-6}{(x^2+9)(x-3)}\,dx.$

11.184. $\int \frac{5x^4-x^3+4x^2+8}{x^3-8}\,dx.$ **11.185.** $\int \frac{x^3-7x^2-3}{(x^2+4)x^2}\,dx.$

11.186. $\int \frac{x^3-12x^2-3x}{(x^2-2x+2)(x^2-1)}\,dx.$ **11.187.** $\int \frac{4x^2+3x^2-17x}{(x^2+2x+2)(x^2+9)}\,dx.$

11.188. $\int \frac{x^3+x-1}{(x^2+2)^2}\,dx.$ **11.189.** $\int \frac{x^3+1}{(x^2-4x+5)^2}\,dx.$

§ 6. ИНТЕГРИРОВАНИЕ ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ

1. Интегралы вида $\int R(\sin x, \cos x)\,dx$, где R — рациональная функция. Интегралы указанного вида приводятся к интегралам от рациональных алгебраических функций с помощью *универсальной тригонометрической подстановки* $\operatorname{tg}(x/2)=t$, так как при этом

$$\sin x=\frac{2\operatorname{tg}(x/2)}{1+\operatorname{tg}^2(x/2)}=\frac{2t}{1+t^2},\quad \cos x=\frac{1-\operatorname{tg}^2(x/2)}{1+\operatorname{tg}^2(x/2)}=\frac{1-t^2}{1+t^2},$$

$$x=2\operatorname{arctg} t,\quad dx=\frac{2\,dt}{1+t^2}$$

и, следовательно,

$$\int R(\sin x, \cos x)\,dx=\int R\left(\frac{2t}{1+t^2}, \frac{1-t^2}{1+t^2}\right)\frac{2\,dt}{1+t^2}=\int R(t)\,dt.$$

Однако универсальная подстановка часто приводит к сложным вычислениям. В некоторых случаях выражение $R(\sin x, \cos x)$ можно привести к рациональному виду с помощью других подстановок.

1. Если $R(\sin x, \cos x)$ — *нечетная функция относительно* $\sin x$, т. е. если $R(-\sin x, \cos x) = -R(\sin x, \cos x)$, то интеграл рационализируется подстановкой $\cos x = t$.

2. Если $R(\sin x, \cos x)$ — *нечетная функция относительно* $\cos x$, т. е. если $R(\sin x, -\cos x) = -R(\sin x, \cos x)$, то интеграл рационализируется с помощью подстановки $\sin x = t$.

3. Если $R(\sin x, \cos x)$ — *четная функция относительно* $\sin x$ *и* $\cos x$, т. е. если $R(-\sin x, -\cos x) = R(\sin x, \cos x)$, то целесообразно пользоваться подстановкой $\operatorname{tg} x = t$.

2. Интегралы вида $\int \sin^m x \cos^n x\, dx$, где m и n — целые числа. Рассмотрим следующие случаи:

1. Один из показателей m или n — нечетное положительное число. В этом случае применяется подстановка $\cos x = t$ (если m — нечетное) или $\sin x = t$ (если n — нечетное).

2. Оба показателя m и n — четные неотрицательные числа. Тогда следует преобразовать подынтегральную функцию с помощью тригонометрических формул

$$\sin x \cos x = \frac{1}{2} \sin 2x, \quad \sin^2 x = \frac{1}{2}(1 - \cos 2x), \quad \cos^2 x = \frac{1}{2}(1 + \cos 2x).$$

3. Показатели m и n — числа одинаковой четности (т. е. либо оба четные, либо оба нечетные), причем хотя бы один из них отрицателен. Здесь следует применить подстановку* $\operatorname{tg} x = t$ (или $\operatorname{ctg} x = t$).

4. Показатели m и n — числа различной четности, причем нечетный показатель является отрицательным. Нахождение таких интегралов требует специальных приемов, которые мы рассмотрим ниже при решении конкретных примеров.

3. Интегралы вида $\int \sin mx \cos nx\, dx$, $\int \cos mx \cos nx\, dx$, $\int \sin mx \sin nx\, dx$. Для нахождения интегралов указанного вида применяются тригонометрические формулы

$$\sin mx \cos nx = \frac{1}{2}[\sin(m+n)x + \sin(m-n)x],$$

$$\cos mx \cos nx = \frac{1}{2}[\cos(m+n)x + \cos(m-n)x],$$

$$\sin mx \sin nx = \frac{1}{2}[\cos(m-n)x - \cos(m+n)x].$$

11.190. Найти интегралы:

1) $\int \frac{dx}{3+5\cos x}$; 2) $\int \frac{\sin^3 x}{4+\cos x} dx$; 3) $\int \frac{dx}{\sin^2 x - 2\sin x \cos x + 3\cos^2 x}$;

4) $\int \frac{\cos^3 x}{\sin^6 x} dx$; 5) $\int \sin^2 x \cos^4 x\, dx$; 6) $\int \frac{\sin^2 x}{\cos^6 x} dx$;

7) $\int \frac{dx}{\sin^3 x \cos x}$; 8) $\int \frac{dx}{\sin^3 x}$; 9) $\int \frac{dx}{\sin^3 x \cos^4 x}$;

10) $\int \sin 2x \sin 3x \cos 5x\, dx$.

---

* Если один из показателей — нечетное положительное число, то лучше использовать подстановку $\sin x = t$ (или $\cos x = t$), так как при этом получается интеграл, рассмотренный в случае 1.

Решение. 1) Воспользуемся универсальной тригонометрической подстановкой. Полагая $\operatorname{tg}(x/2)=t$, находим $x=2\operatorname{arctg} t$, $dx=\frac{2\,dt}{1+t^2}$, $\cos x=\frac{1-t^2}{1+t^2}$ и, следовательно,

$$\int \frac{dx}{3+5\cos x}=\int \frac{1}{3+5\cdot\frac{1-t^2}{1+t^2}}\cdot\frac{2\,dt}{1+t^2}=2\int\frac{dt}{8-2t^2}=$$
$$=\int\frac{dt}{4-t^2}=\frac{1}{4}\ln\left|\frac{t+2}{t-2}\right|+C=\frac{1}{4}\ln\left|\frac{\operatorname{tg}(x/2)+2}{\operatorname{tg}(x/2)-2}\right|+C.$$

2) Подынтегральная функция нечетна относительно синуса, поэтому сделаем подстановку $\cos x=t$. Тогда $\sin x\,dx=-dt$ и, значит,

$$\int\frac{\sin^3 x}{4+\cos x}dx=\int\frac{\sin^2 x}{4+\cos x}\sin x\,dx=\int\frac{1-t^2}{t+4}(-dt)=$$
$$=\int\left(t-4+\frac{15}{t+4}\right)dt=\frac{t^2}{2}-4t+15\ln(t+4)+C=$$
$$=\frac{\cos^2 x}{2}-4\cos x+15\ln(4+\cos x)+C.$$

3) В данном случае подынтегральная функция является четной относительно синуса и косинуса; поэтому следует воспользоваться подстановкой $\operatorname{tg} x=t$. Разделив числитель и знаменатель дроби на $\cos^2 x$, получим

$$\int\frac{dx}{\sin^2 x-2\sin x\cos x+3\cos^2 x}=\int\frac{\frac{dx}{\cos^2 x}}{\operatorname{tg}^2 x-2\operatorname{tg} x+3}=$$
$$=\int\frac{d(\operatorname{tg} x)}{\operatorname{tg}^2 x-2\operatorname{tg} x+3}=\int\frac{dt}{(t-1)^2+2}=\frac{1}{\sqrt{2}}\operatorname{arctg}\frac{t-1}{\sqrt{2}}=$$
$$=\frac{1}{\sqrt{2}}\operatorname{arctg}\frac{\operatorname{tg} x-1}{\sqrt{2}}+C.$$

4) Здесь надо применить подстановку $\sin x=t$:

$$\int\frac{\cos^3 x}{\sin^6 x}dx=\int\frac{\cos^2 x}{\sin^6 x}\cos x\,dx=\int\frac{1-\sin^2 x}{\sin^6 x}d(\sin x)=\int\frac{1-t^2}{t^6}dt=\int\left(\frac{1}{t^6}-\frac{1}{t^4}\right)dt=$$
$$=-\frac{1}{5t^5}+\frac{1}{3t^3}+C=\frac{1}{3\sin^3 x}-\frac{1}{5\sin^5 x}+C.$$

5) Используя формулы понижения степени, получим

$$\int\sin^2 x\cos^4 x\,dx=\int(\sin x\cos x)^2\cos^2 x\,dx=$$
$$=\int\left(\frac{\sin 2x}{2}\right)^2\frac{1+\cos 2x}{2}dx=\frac{1}{8}\left[\int\sin^2 2x\,dx+\int\sin^2 2x\cos 2x\,dx\right]=$$
$$=\frac{1}{8}\left[\int\frac{1-\cos 4x}{2}dx+\frac{1}{2}\int\sin^2 2x\,d(\sin 2x)\right]=$$
$$=\frac{1}{8}\left[\frac{1}{2}\left(x-\frac{\sin 4x}{4}\right)+\frac{1}{2}\cdot\frac{\sin^3 2x}{3}\right]+C=$$
$$=\frac{x}{16}-\frac{\sin 4x}{64}+\frac{\sin^3 2x}{48}+C.$$

6) В данном случае следует применить подстановку $\operatorname{tg} x=t$ и использовать формулу $1/\cos^2 x=1+\operatorname{tg}^2 x$. Тогда

$$\int \frac{\sin^2 x}{\cos^6 x} dx=\int\frac{\sin^2 x}{\cos^2 x}\cdot\frac{1}{\cos^2 x}\cdot\frac{dx}{\cos^2 x}=\int \operatorname{tg}^2 x\,(1+\operatorname{tg}^2 x)\, d\,(\operatorname{tg} x)=$$
$$=\int (\operatorname{tg}^2 x+\operatorname{tg}^4 x)\, d\,(\operatorname{tg} x)=\frac{\operatorname{tg}^3 x}{3}+\frac{\operatorname{tg}^5 x}{5}+C.$$

7) Здесь надо воспользоваться подстановкой $\operatorname{ctg} x=t$ и формулой $1/\sin^2 x = 1+\operatorname{ctg}^2 x$:

$$\int\frac{dx}{\sin^3 x\cos x}=\int\frac{1}{\sin^2 x}\cdot\frac{\sin x}{\cos x}\cdot\frac{dx}{\sin^2 x}=\int\frac{1+t^2}{t}\,dt=$$
$$=\int\left(\frac{1}{t}+t\right)dt=\ln|t|+\frac{t^2}{2}+C=\ln|\operatorname{ctg} x|+\frac{\operatorname{ctg}^2 x}{2}+C.$$

8) Введя в числитель «тригонометрическую единицу» $\sin^2 x+\cos^2 x\equiv 1$ и разделив почленно числитель на знаменатель, получим

$$\int\frac{dx}{\sin^3 x}=\int\frac{\sin^2 x+\cos^2 x}{\sin^3 x}dx=\int\left(\frac{1}{\sin x}+\frac{\cos^2 x}{\sin^3 x}\right)dx=\ln\left|\operatorname{tg}\frac{x}{2}\right|+\int\frac{\cos^2 x}{\sin^3 x}dx. \quad (*)$$

Для нахождения последнего интеграла воспользуемся интегрированием по частям Полагая $u=\cos x$, $\dfrac{\cos x}{\sin^3 x}dx=dv$, имеем

$$du=-\sin x\,dx,\quad v=\int\frac{\cos x}{\sin^3 x}dx=\int\frac{d\,(\sin x)}{\sin^3 x}=-\frac{1}{2\sin^2 x}$$

и, следовательно,

$$\int\frac{\cos^2 x}{\sin^3 x}dx=-\frac{\cos x}{2\sin^2 x}-\int\frac{\sin x}{2\sin^2 x}dx=-\frac{\cos x}{2\sin^2 x}-\frac{1}{2}\ln\left|\operatorname{tg}\frac{x}{2}\right|+C.$$

Подставляя найденное выражение в соотношение (*), окончательно находим

$$\int\frac{dx}{\sin^3 x}=-\frac{\cos x}{2\sin^2 x}+\frac{1}{2}\ln\left|\operatorname{tg}\frac{x}{2}\right|+C.$$

9) Введем в числитель квадрат «тригонометрической единицы» $(\sin^2 x+\cos^2 x)^2\equiv \sin^4 x+2\sin^2 x\cos^2 x+\cos^4 x\equiv 1$ и разделим почленно числитель на знаменатель:

$$I=\int\frac{dx}{\sin^3 x\cos^4 x}=\int\frac{\sin^4 x+2\sin^2 x\cos^2 x+\cos^4 x}{\sin^3 x\cos^4 x}dx=$$
$$=\int\frac{\sin x}{\cos^4 x}dx+2\int\frac{dx}{\sin x\cos^2 x}+\int\frac{dx}{\sin^3 x}.$$

Первый из этих интегралов можно легко найти с помощью подстановки $\cos x=t$, для нахождения второго снова введем в числитель «тригонометрическую единицу», а третий был вычислен в предыдущем примере:

$$I=-\int\frac{d\,(\cos x)}{\cos^4 x}+2\int\frac{\sin x}{\cos^2 x}dx+2\int\frac{dx}{\sin x}-\frac{\cos x}{2\sin^2 x}+\frac{1}{2}\ln\left|\operatorname{tg}\frac{x}{2}\right|+C=$$
$$=\frac{1}{3\cos^3 x}+\frac{2}{\cos x}-\frac{\cos x}{2\sin^2 x}+\frac{5}{2}\ln\left|\operatorname{tg}\frac{x}{2}\right|+C.$$

10) Преобразуя произведение первых двух сомножителей в сумму, имеем

$$I=\int\sin 2x\sin 3x\cos 5x\,dx=\frac{1}{2}\int(\cos x-\cos 5x)\cos 5x\,dx=$$
$$=\frac{1}{2}\int(\cos x\cos 5x-\cos^2 5x)\,dx.$$

Снова преобразуем произведение в сумму и используем формулу понижения степени:

$$I=\frac{1}{2}\int\left[\frac{\cos 6x+\cos 4x}{2}-\frac{1+\cos 10x}{2}\right]dx=\frac{1}{4}\left(\frac{\sin 6x}{6}+\frac{\sin 4x}{4}-\frac{\sin 10x}{10}-x\right)+C.$$

В задачах **11.191—11.224** найти интегралы.

11.191. $\int\frac{dx}{4\sin x+3\cos x+5}$. **11.192.** $\int\frac{dx}{4-5\sin x}$.

11.193. $\int\frac{dx}{\cos x+2\sin x+3}$. **11.194.** $\int\frac{1+\sin x}{\sin x(1+\cos x)}dx$.

11.195. $\int\frac{\cos^3 x\,dx}{\sin^2 x+\sin x}$. **11.196.** $\int\frac{\sin x\,dx}{\sin^2 x+6\cos^2 x}$.

11.197. $\int\frac{dx}{\sin^2 x-9\cos^2 x}$. **11.198.** $\int\frac{dx}{1-\sin 2x+3\cos^2 x}$.

11.199. $\int\frac{\sin x+\sin^3 x}{\cos 2x}dx$. **11.200.** $\int\frac{1+\operatorname{tg} x}{1-\operatorname{tg} x}dx$.

11.201. $\int\sin^5 x\,dx$. **11.202.** $\int\cos^7 x\,dx$.

11.203. $\int\cos^5 2x\sin^3 2x\,dx$. **11.204.** $\int\frac{\sin^3 x\,dx}{\cos^8 x}$.

11.205. $\int\cos^4 3x\,dx$. **11.206.** $\int\sin^6 x\,dx$.

11.207. $\int\sin^6 x\cos^4 x\,dx$. **11.208.** $\int\sin^2 x\cos^6 x\,dx$.

11.209. $\int\operatorname{tg}^4 x\,dx$. **11.210.** $\int\operatorname{ctg}^5 x\,dx$. **11.211.** $\int\frac{dx}{\cos^6 2x}$.

11.212. $\int\frac{dx}{\sin^8 x}$. **11.213.** $\int\frac{\cos^2 x\,dx}{\sin^6 x}$. **11.214.** $\int\frac{\sin^3 x\,dx}{\cos^7 x}$.

11.215. $\int\frac{dx}{\sin^2 x\cos^4 x}$. **11.216.** $\int\frac{dx}{\sin^5 x\cos x}$. **11.217.** $\int\frac{dx}{\cos^3 x}$.

11.218. $\int\frac{dx}{\sin^4 x\cos^3 x}$. **11.219.** $\int\frac{\sin^5 x\,dx}{\sqrt[3]{\cos^2 x}}$. **11.220.** $\int\frac{\operatorname{ctg}^{3/2} x\,dx}{\sin^4 x}$.

11.221. $\int\sin 3x\cos 7x\,dx$. **11.222.** $\int\sin 2x\sin 9x\,dx$.

11.223. $\int\cos 3x\cos 5x\cos 8x\,dx$. **11.224.** $\int\sin 4x\sin 5x\sin 7x\,dx$.

§ 7. ИНТЕГРИРОВАНИЕ ПРОСТЕЙШИХ ИРРАЦИОНАЛЬНЫХ ФУНКЦИЙ

1. Интегралы вида

$$\int R(x, x^{\alpha}, x^{\beta}, \ldots, x^{\omega})dx, \tag{1}$$

где R — рациональная функция, $\alpha=m_1/n_1$, $\beta=m_2/n_2$, ..., $\omega=m_k/n_k$ — дробные рациональные числа, сводятся к интегралам от рациональной функции с помощью подстановки $x=t^N$, где N — общий знаменатель дробей α, β, ..., ω.

2. Интегралы более общего вида

$$\int R\left[x, \left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{\alpha}, \left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{\beta}, \ldots, \left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{\omega}\right]dx \tag{2}$$

рационализируются подстановкой $\frac{ax+b}{cx+d}=t^N$, где N — общий знаменатель дробей α, β, ..., ω.

3. Интегралы вида

$$\int R\left(x, \sqrt{a^2-x^2}\right) dx, \tag{3}$$

$$\int R\left(x, \sqrt{x^2+a^2}\right) dx, \tag{4}$$

$$\int R\left(x, \sqrt{x^2-a^2}\right) dx \tag{5}$$

можно свести к интегралам от рациональных функций с помощью тригонометрических подстановок. При этом для интеграла вида (3) следует сделать подстановку $x=a\sin t$ (или $x=a\cos t$), для интеграла вида (4) — подстановку $x=a\,\mathrm{tg}\,t$ (или $x=a\,\mathrm{ctg}\,t$), а для интеграла вида (5) — подстановку $x=a/\cos t$ (или $x=a/\sin t$).

11.225. Найти интеграл $\displaystyle\int \frac{\sqrt{x}-2}{x\left(\sqrt[3]{x}+1\right)}\,dx.$

Решение. Здесь x входит в подынтегральную функцию с дробными показателями 1/2 и 1/3. Поэтому применяем подстановку $x=t^6$, откуда

$$dx=6t^5\,dt,\quad \sqrt{x}=t^3,\quad \sqrt[3]{x}=t^2$$

и данный интеграл принимает вид

$$I=\int \frac{t^3-2}{t^6(t^2+1)}\,6t^5\,dt=6\int \frac{t^3-2}{t(t^2+1)}\,dt.$$

Таким образом, получился интеграл от рациональной дроби. Выделяя целую часть, имеем

$$I=6\int\left(1-\frac{t+2}{t^3+t}\right)dt=6\left[t-\int \frac{t+2}{t(t^2+1)}\,dt\right].$$

Для нахождения последнего интеграла разложим подынтегральную дробь на простейшие дроби:

$$\frac{t+2}{t(t^2+1)}=\frac{A}{t}+\frac{Bt+C}{t^2+1},$$

откуда

$$t+2=A(t^2+1)+(Bt+C)\,t.$$

Сравнивая коэффициенты при одинаковых степенях t, находим $A=2$, $B=-2$, $C=1$. Следовательно,

$$I=6\left[t-\int\left(\frac{2}{t}+\frac{1-2t}{t^2+1}\right)dt\right]=6\left[t-2\ln t+\ln(t^2+1)-\mathrm{arctg}\,t\right]+C.$$

Возвращаясь к старой переменной x, окончательно получим

$$I=6\left[\sqrt[6]{x}-2\ln\sqrt[6]{x}+\ln\left(\sqrt[3]{x}+1\right)-\mathrm{arctg}\,\sqrt[6]{x}\right]+C.$$

11.226. Найти интеграл $\displaystyle\int \sqrt{\frac{x-2}{x+2}}\,\frac{dx}{x}.$

Решение. Положим $(x-2)/(x+2)=t^2$, откуда

$$x=\frac{2(1+t^2)}{1-t^2},\quad dx=\frac{8t}{(1-t^2)^2}\,dt$$

и, следовательно,

$$I=\int\sqrt{\frac{x-2}{x+2}}\,\frac{dx}{x}=\int\frac{8t^2}{(1-t^2)^2}\cdot\frac{1-t^2}{2(1+t^2)}\,dt=4\int\frac{t^2\,dt}{(1-t^2)(1+t^2)}.$$

Интеграл от получившейся рациональной дроби можно легко найти с помощью следующего искусственного приема. Представив подынтегральную функцию в виде

$$\frac{t^2}{(1-t^2)(1+t^2)}=\frac{1}{2}\,\frac{(1+t^2)-(1-t^2)}{(1-t^2)(1+t^2)}$$

и разделив почленно числитель на знаменатель, получаем

$$I=4\cdot\frac{1}{2}\int\left(\frac{1}{1-t^2}-\frac{1}{1+t^2}\right)dt=\ln\left|\frac{1+t}{1-t}\right|-2\,\mathrm{arctg}\,t+C,$$

где $t=\sqrt{\dfrac{x-2}{x+2}}$.

В задачах **11.227—11.240** найти интегралы.

11.227. $\displaystyle\int\frac{dx}{x+\sqrt[3]{x}}$. **11.228.** $\displaystyle\int\frac{dx}{\sqrt{x}-2\sqrt[3]{x}}$. **11.229.** $\displaystyle\int\frac{\sqrt{x+9}}{x}\,dx$.

11.230. $\displaystyle\int\frac{1+\sqrt[4]{x}}{x+\sqrt{x}}\,dx$. **11.231.** $\displaystyle\int\frac{\sqrt[3]{x}-1}{\sqrt{x}+1}\,dx$.

11.232. $\displaystyle\int\frac{dx}{(1-\sqrt[3]{x^2})\sqrt{x}}$. **11.233.** $\displaystyle\int\frac{\sqrt[3]{x}+2}{(\sqrt[4]{x}+\sqrt[6]{x})\sqrt[6]{x^5}}\,dx$.

11.234. $\displaystyle\int\frac{x^2\,dx}{(4x-3)\sqrt{4x-3}}$. **11.235.** $\displaystyle\int\frac{dx}{(\sqrt{x+4}-\sqrt[3]{x+4})\sqrt[6]{(x+4)^5}}$.

11.236. $\displaystyle\int\sqrt{\frac{x}{x+5}}\,\frac{dx}{x^2}$. **11.237.** $\displaystyle\int\frac{1}{x}\sqrt{\frac{x-3}{x}}\,dx$.

11.238. $\displaystyle\int\sqrt{\frac{4x-5}{x+1}}\,dx$. **11.239.** $\displaystyle\int(x-2)\sqrt{\frac{1+x}{1-x}}\,dx$.

11.240. $\displaystyle\int\sqrt[3]{\frac{x+2}{x-2}}\,\frac{dx}{x}$.

11.241. Найти интегралы:

1) $\displaystyle\int\frac{dx}{\sqrt{(4-x^2)^3}}$; 2) $\displaystyle\int\frac{\sqrt{x^2+16}}{x}\,dx$; 3) $\displaystyle\int\frac{dx}{x^3\sqrt{x^2-9}}$.

Решение. 1) Воспользуемся подстановкой $x=2\sin t$; тогда $dx=2\cos t\,dt$ и, следовательно,

$$\int\frac{dx}{\sqrt{(4-x^2)^3}}=\int\frac{2\cos t\,dt}{\sqrt{(4-4\sin^2 t)^3}}=\int\frac{2\cos t\,dt}{(4\cos^2 t)^{3/2}}=$$
$$=\int\frac{2\cos t}{8\cos^3 t}\,dt=\frac{1}{4}\int\frac{dt}{\cos^2 t}=\frac{1}{4}\,\mathrm{tg}\,t+C.$$

Возвратимся теперь к старой переменной x. Имеем

$$\mathrm{tg}\,t=\frac{\sin t}{\cos t}=\frac{x/2}{\sqrt{1-(x/2)^2}}=\frac{x}{\sqrt{4-x^2}},$$

откуда окончательно находим

$$\int\frac{dx}{\sqrt{(4-x^2)^3}}=\frac{x}{4\sqrt{4-x^2}}+C.$$

2) Применяем подстановку $dx=4\operatorname{tg} t$. Тогда $dx=(4/\cos^2 t)\,dt$ и, следовательно,

$$I=\int \frac{\sqrt{x^2+16}}{x}\,dx=\int \frac{\sqrt{16\operatorname{tg}^2 t+16}}{4\operatorname{tg} t}\cdot\frac{4\,dt}{\cos^2 t}=$$
$$=4\int \frac{dt}{\cos t \operatorname{tg} t\cos^2 t}=4\int \frac{dt}{\sin t\cos^2 t}.$$

Чтобы найти последний интеграл, введем в числитель «тригонометрическую единицу» $\sin^2 t+\cos^2 t\equiv 1$ и разделим почленно числитель подынтегральной функции на знаменатель:

$$I=4\int \frac{dt}{\sin t\cos^2 t}=4\int \frac{\sin^2 t+\cos^2 t}{\sin t\cos^2 t}\,dt=$$
$$=4\int \left(\frac{\sin t}{\cos^2 t}+\frac{1}{\sin t}\right)dt=-4\int \frac{d(\cos t)}{\cos^2 t}+4\int \frac{dt}{\sin t}=\frac{4}{\cos t}+4\ln\left|\operatorname{tg}\frac{t}{2}\right|+C.$$

Возвращаясь к старой переменной x, имеем

$$\operatorname{tg} t=x/4,\ \cos t=1/\sqrt{1+\operatorname{tg}^2 t}=1/\sqrt{1+x^2/16}=4/\sqrt{x^2+16},\ \sin t=x/\sqrt{x^2+16},$$
$$\operatorname{tg}\frac{t}{2}=\frac{\sin t}{1+\cos t}=\frac{x}{\sqrt{x^2+16}\,(1+4/\sqrt{x^2+16})}=\frac{x}{4+\sqrt{x^2+16}}.$$

Итак,

$$I=\sqrt{x^2+16}+4\ln\left|\frac{x}{4+\sqrt{x^2+16}}\right|+C.$$

3) Здесь следует применить подстановку $x=3/\cos t$; тогда $dx=[(3\sin t)/\cos^2 t]\,dt$ и

$$I=\int \frac{dx}{x^3\sqrt{x^2-9}}=\int \frac{3\sin t}{\cos^2 t}\cdot\frac{\cos^3 t}{27}\cdot\frac{dt}{\sqrt{9/\cos^2 t-9}}=$$
$$=\frac{1}{27}\int \sin t\cos t\cdot\frac{\cos t}{\sin t}\,dt=\frac{1}{27}\int \cos^2 t\,dt=\frac{1}{27}\left(\frac{\sin 2t}{4}+\frac{t}{2}\right)+C.$$

Но

$$\cos t=3/x,\ \sin t=\sqrt{1-9/x^2}=\sqrt{x^2-9}/x,$$
$$\sin 2t=2\sin t\cos t=2\,(3/x)\,(\sqrt{x^2-9}/x)=6\sqrt{x^2-9}/x^2,\ t=\arccos(3/x)$$

и, следовательно,

$$I=\frac{1}{27}\left(\frac{\sin 2t}{4}+\frac{t}{2}\right)+C=\frac{1}{18}\,\frac{\sqrt{x^2-9}}{x^2}+\frac{1}{54}\arccos\frac{3}{x}+C.$$

В задачах **11.242—11.253** найти интегралы.

11.242. $\int \sqrt{25-x^2}\,dx$. **11.243.** $\int \frac{dx}{\sqrt{(36-x^2)^3}}$.

11.244. $\int \frac{\sqrt{x^2+4}}{x^2}\,dx$. **11.245.** $\int \frac{\sqrt{x^2-9}}{x}\,dx$.

11.246. $\int \frac{dx}{x^2\sqrt{x^2+16}}$. **11.247.** $\int \frac{x^3\,dx}{\sqrt{x^2-25}}$.

11.248. $\int \frac{\sqrt{(x^2+9)^3}}{x^6}\,dx$. **11.249.** $\int \frac{\sqrt{16-x^2}}{x^4}\,dx$.

11.250. $\int \frac{x^2\,dx}{\sqrt{(x^2-1)^3}}$. **11.251.** $\int x^3\sqrt{x^2-25}\,dx$.

11.252. $\int \frac{x^2\,dx}{\sqrt{(x^2+16)^5}}$. **11.253.** $\int x^2\sqrt{4-x^2}\,dx$.

§ 8. ПОДСТАНОВКИ ЭЙЛЕРА

Интегралы вида

$$\int R\left(x, \sqrt{ax^2+bx+c}\right)dx$$

рационализируются с помощью одной из трех подстановок Эйлера.

1. Если $a>0$, то применяется *первая подстановка Эйлера* *:

$$\sqrt{ax^2+bx+c}=t \pm x\sqrt{a}. \qquad (1)$$

2. Если $c>0$, то можно пользоваться *второй подстановкой Эйлера*:

$$\sqrt{ax^2+bx+c}=tx \pm \sqrt{c}. \qquad (2)$$

3. Если x_1 и x_2—действительные корни квадратного трехчлена ax^2+bx+c, то применяется *третья подстановка Эйлера*:

$$\sqrt{ax^2+bx+c}=(x-x_1)\,t. \qquad (3)$$

Отметим, что для нахождения любого интеграла указанного вида достаточно первой и третьей подстановок Эйлера.

11.254. Найти интеграл $I=\int\frac{dx}{x\sqrt{x^2-x+5}}$.

Решение. Здесь $a=1>0$, поэтому применим подстановку $\sqrt{x^2-x+5}=$ $=t-x$. Возведя обе части этого равенства в квадрат и приведя подобные члены, получим $-x+5=t^2-2tx$, откуда

$$x=\frac{5-t^2}{1-2t},\quad dx=\frac{-2t\,(1-2t)-(5-t^2)(-2)}{(1-2t)^2}\,dt=2\,\frac{t^2-t+5}{(1-2t)^2}\,dt,$$

$$\sqrt{x^2-x+5}=t-x=t-\frac{5-t^2}{1-2t}=\frac{t^2-t+5}{2t-1}.$$

Подставляя полученные значения в данный интеграл, имеем

$$I=2\int\frac{t^2-t+5}{(1-2t)^2}\cdot\frac{1-2t}{5-t^2}\cdot\frac{2t-1}{t^2-t+5}\,dt=2\int\frac{dt}{t^2-5}=\frac{1}{\sqrt{5}}\ln\left|\frac{t-\sqrt{5}}{t+\sqrt{5}}\right|+C=$$

$$=\frac{1}{\sqrt{5}}\ln\left|\frac{\sqrt{x^2-x+5}+x-\sqrt{5}}{\sqrt{x^2-x+5}+x+\sqrt{5}}\right|+C.$$

11.255. Найти интеграл $I=\int\frac{dx}{x+\sqrt{x^2-x+4}}$.

Решение. Так как $c=4>0$, то можно применить вторую подстановку Эйлера. Полагая $\sqrt{x^2-x+4}=tx-2$, имеем $x^2-x+4=t^2x^2-4tx+4$, откуда

$$x=\frac{4t-1}{t^2-1},\quad dx=\frac{4\,(t^2-1)-(4t-1)\,2t}{(t^2-1)^2}\,dt=-2\,\frac{2t^2-t+2}{(t^2-1)^2}\,dt,$$

$$x+\sqrt{x^2-x+4}=x+tx-2=x(1+t)-2=\frac{4t-1}{t^2-1}(1+t)-2=\frac{2t+1}{t-1}.$$

Подставляя найденные значения в данный интеграл, получим интеграл от рациональной дроби:

$$I=-2\int\frac{2t^2-t+2}{(t^2-1)^2}\cdot\frac{t-1}{2t+1}\,dt=\int\frac{-4t^2+2t-4}{(t-1)(2t+1)(t+1)^2}\,dt.$$

---

* Как для первой, так и для второй подстановки знаки плюс или минус можно выбирать произвольно.

Разложим подынтегральную функцию на простейшие дроби:

$$\frac{-4t^2+2t-4}{(t-1)(2t+1)(t+1)^2}=\frac{A}{t-1}+\frac{B}{2t+1}+\frac{C}{t+1}+\frac{D}{(t+1)^2},$$

откуда

$$-4t^2+2t-4=A(t+1)^2(2t+1)+B(t-1)(t+1)^2+$$
$$+C(t^2-1)(2t+1)+D(t-1)(2t+1).$$

Полагая $t=1$, находим $A=-1/2$; при $t=-1/2$ получим $B=16$; при $t=-1$ имеем $D=-5$; наконец, из сравнения коэффициентов при t^3 следует, что $0=$ $=2A+B+2C$, откуда $C=-15/2$. Таким образом, окончательно получаем

$$I=-\frac{1}{2}\int\frac{dt}{t-1}+16\int\frac{dt}{2t+1}-\frac{15}{2}\int\frac{dt}{t+1}-5\int\frac{dt}{(t+1)^2}=$$
$$=-\frac{1}{2}\ln|t-1|+8\ln|2t+1|-\frac{15}{2}\ln|t+1|+\frac{5}{t+1}+C,$$

где $t=\dfrac{\sqrt{x^2-x+4}+2}{x}$.

11.256. Найти интеграл $I=\displaystyle\int\frac{x\,dx}{\sqrt{(6x-8-x^2)^3}}$.

Решение. В данном случае $a=-1<0$ и $c=-8<0$, поэтому ни первая, ни вторая подстановка Эйлера неприменимы. Однако поскольку квадратный трехчлен $6x-8-x^2$ имеет действительные корни $x_1=2$ и $x_2=4$, можно воспользоваться третьей подстановкой Эйлера. Положим

$$\sqrt{6x-8-x^2}=\sqrt{(x-2)(4-x)}=(x-2)\,t,$$

откуда найдем

$$4-x=(x-2)\,t^2,\quad x=2\,\frac{t^2+2}{t^2+1},$$
$$dx=2\,\frac{2t(t^2+1)-(t^2+2)\,2t}{(t^2+1)^2}=\frac{-4t}{(t^2+1)^2}\,dt,$$
$$(x-2)\,t=\left(\frac{2t^2+4}{t^2+1}-2\right)t=\frac{2t}{t^2+1}.$$

Следовательно,

$$I=\int 2\,\frac{t^2+2}{t^2+1}\cdot\frac{-4t}{(t^2+1)^2}\cdot\frac{(t^2+1)^3}{8t^3}\,dt=$$
$$=-\int\frac{t^2+2}{t^2}\,dt=-\int\left(1+\frac{2}{t^2}\right)dt=-t+\frac{2}{t}+C,$$

где $t=\dfrac{\sqrt{6x-8-x^2}}{x-2}$.

В задачах **11.257—11.262** найти интегралы с помощью одной из подстановок Эйлера.

11.257. $\displaystyle\int\frac{dx}{1+\sqrt{x^2+2x+2}}$. **11.258.** $\displaystyle\int\frac{dx}{x\sqrt{2+x-x^2}}$.

11.259. $\displaystyle\int\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}-1}$. **11.260.** $\displaystyle\int\frac{\sqrt{2x+x^2}}{x^2}\,dx$.

11.261. $\displaystyle\int\frac{x^2\,dx}{\sqrt{1-2x-x^2}}$. **11.262.** $\displaystyle\int\frac{dx}{(x-2)\sqrt{(7x-x^2-10)^3}}$.

§ 9. ИНТЕГРИРОВАНИЕ БИНОМИАЛЬНЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛОВ

Биномиальным дифференциалом называется выражение

$$x^m (a+bx^n)^p\, dx,$$

где m, n и p — рациональные числа.

Интеграл от биномиального дифференциала

$$\int x^m (a+bx^n)^p\, dx \tag{1}$$

приводится к интегралу от рациональной функции в следующих трех случаях.

Случай 1. Показатель степени p — целое число. Тогда интеграл (1) сводится к интегралу от рациональной функции с помощью подстановки

$$x=t^q, \tag{2}$$

где q — общий знаменатель дробей m и n.

Случай 2. Число $(m+1)/n$ — целое. Тогда данный интеграл (1) сводится к интегралу от рациональной функции с помощью подстановки

$$a+bx^n=t^r, \tag{3}$$

где r — знаменатель дроби p.

Случай 3. Число $(m+1)/n+p$ — целое. Тогда интеграл (1) рационализируется с помощью подстановки

$$ax^{-n}+b=t^r, \tag{4}$$

где r — знаменатель дроби p.

11.263. Найти интеграл $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt[6]{x}\left(\sqrt[3]{x}-1\right)^2}$.

Решение. Здесь $m=-1/6$, $n=1/3$, $p=-2$ — целое число, т. е. имеет место первый случай интегрируемости. Поэтому следует применить подстановку $x=t^6$; тогда $dx=6t^5\,dt$ и данный интеграл принимает вид

$$I=\int \frac{dx}{\sqrt[6]{x}\left(\sqrt[3]{x}-1\right)^2}=\int \frac{6t^5\,dt}{t(t^2-1)^2}=6\int \frac{t^4\,dt}{(t^2-1)^2}=$$

$$=6\int\left[1+\frac{2t^2-1}{(t^2-1)^2}\right]dt=6t+6\int \frac{2t^2-1}{(t^2-1)^2}\,dt.$$

Для вычисления последнего интеграла разложим подынтегральную дробь на простейшие дроби:

$$\frac{2t^2-1}{(t^2-1)^2}=\frac{A}{t-1}+\frac{B}{t+1}+\frac{C}{(t-1)^2}+\frac{D}{(t+1)^2}.$$

Найдя значения неопределенных коэффициентов $A=3/4$, $B=-3/4$, $C=1/4$, $D=1/4$, получаем

$$I=6t+6\cdot\frac{1}{4}\int\left[\frac{3}{t-1}-\frac{3}{t+1}+\frac{1}{(t-1)^2}+\frac{1}{(t+1)^2}\right]dt=$$

$$=6t+\frac{3}{2}\left[3\ln\left|\frac{t-1}{t+1}\right|-\left(\frac{1}{t-1}+\frac{1}{t+1}\right)\right]=6t+\frac{9}{2}\ln\left|\frac{t-1}{t+1}\right|-\frac{3t}{t^2-1}+C,$$

где $t=\sqrt[6]{x}$.

11.264. Найти интеграл $\displaystyle\int \sqrt{x}\,\sqrt[3]{1+\sqrt[4]{x^3}}\,dx$.

Решение. Имеем $m=1/2$, $n=3/4$, $p=1/3$. Таким образом, $(m+1)/n=$ $=\dfrac{1/2+1}{3/4}=\dfrac{3/2}{3/4}=2$ — целое число; значит, имеет место второй случай интегрируемости. Применяем подстановку $1+x^{3/4}=t^3$, откуда

$$x=(t^3-1)^{4/3},\quad x^{1/2}=(t^3-1)^{2/3},$$

$$dx=\frac{4}{3}(t^3-1)^{1/3}3t^2\,dt=4t^2(t^3-1)^{1/3}\,dt$$

и, следовательно,

$$\int x^{1/2}(1+x^{3/4})^{1/3}dx=4\int(t^3-1)^{2/3}t\cdot t^2(t^3-1)^{1/3}dt=$$

$$=4\int(t^3-1)\,t^3\,dt=4\int(t^6-t^3)\,dt=\frac{4}{7}t^7-t^4+C,$$

где $t=\sqrt[3]{1+\sqrt[4]{x^3}}$.

11.265. Найти интеграл $\displaystyle\int\frac{\sqrt[3]{1+x^3}}{x^2}dx$.

Решение. Здесь $m=-2$, $n=3$, $p=1/3$ и $(m+1)/n+p=(-2+1)/3+1/3=-1/3+1/3=0$ — целое число. Поэтому имеет место третий случай интегрируемости. Полагаем $x^{-3}+1=t^3$, откуда $-3x^{-4}dx=3t^2\,dt$, т. е. $x^{-4}dx=-t^2\,dt$. Преобразуем данный интеграл таким образом:

$$I=\int x^{-2}(1+x^3)^{1/3}dx=\int x^{-2}[x^3(x^{-3}+1)]^{1/3}dx=$$

$$=\int x^{-1}(x^{-3}+1)^{1/3}dx=\int x^3(x^{-3}+1)^{1/3}x^{-4}dx.$$

Следовательно,

$$I=-\int(t^3-1)^{-1}\cdot t\cdot t^2\,dt=\int\frac{t^3\,dt}{1-t^3}=\int\left(\frac{1}{1-t^3}-1\right)dt.$$

После разложения подынтегральной функции на сумму простейших дробей (вычисление неопределенных коэффициентов предоставляется учащемуся) получаем

$$I=\int\left[\frac{t+2}{3(t^2+t+1)}+\frac{1}{3(1-t)}-1\right]dt=$$

$$=\frac{1}{3}\int\frac{\frac{1}{2}(2t+1)+\frac{3}{2}}{t^2+t+1}dt-\frac{1}{3}\ln|1-t|-t+C=$$

$$=\frac{1}{6}\ln(t^2+t+1)+\frac{1}{2}\cdot\frac{2}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\frac{(t+1/2)\,2}{\sqrt{3}}-\frac{1}{3}\ln|1-t|-t+C=$$

$$=\frac{1}{6}\ln(t^2+t+1)+\frac{1}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\frac{2t+1}{\sqrt{3}}-\frac{1}{3}\ln|1-t|-t+C,$$

где $t=\dfrac{\sqrt[3]{1+x^3}}{x}$.

В задачах **11.266—11.275** найти интегралы от биномиальных дифференциалов.

11.266. $\displaystyle\int\frac{dx}{\sqrt[4]{x^3}\left(\sqrt[8]{x}-1\right)^5}$. **11.267.** $\displaystyle\int\frac{dx}{x\sqrt{1+x^3}}$.

11.268. $\displaystyle\int\frac{dx}{x^{11}\sqrt{1+x^4}}$. **11.269.** $\displaystyle\int\frac{\sqrt{5+\sqrt[6]{x}}}{\sqrt[3]{x^2}}$.

11.270. $\displaystyle\int x^3\sqrt[3]{7-3x^2}\,dx$. **11.271.** $\displaystyle\int\frac{dx}{\sqrt[3]{1+x^3}}$.

11.272. $\int \frac{dx}{x\left(1+\sqrt[3]{x}\right)^2}$. 11.273. $\int \frac{dx}{x\sqrt{x}\sqrt[3]{2+\sqrt[4]{x^3}}}$.

11.274. $\int \frac{\sqrt[3]{1-2x^3}}{x^5}\,dx$. 11.275. $\int \frac{dx}{x\sqrt[4]{1+x^3}}$.

§ 10. СМЕШАННЫЕ ЗАДАЧИ

В задачах 11.276—11.335. найти неопределенные интегралы.

11.276. $\int \frac{7\sqrt[4]{x}+2}{\sqrt[4]{x^3}}\,dx$. 11.277. $\int \frac{5-3x}{2x^2-11x+12}\,dx$.

11.278. $\int \operatorname{tg}^7 x\,dx$. 11.279. $\int \frac{6x-7}{\sqrt{5x-4-x^2}}\,dx$.

11.280. $\int x^2 \sin 6x\,dx$. 11.281. $\int \frac{9-5x}{\sqrt{2x^2+x-10}}\,dx$.

11.282. $\int \frac{x^2+15x+6}{(2x+1)(2x-x^2)}\,dx$. 11.283. $\int \frac{dx}{\sqrt[4]{x-3}+\sqrt{x-3}}$.

11.284. $\int \frac{\sqrt{x^2+25}}{x^4}\,dx$. 11.285. $\int \frac{dx}{\sqrt{x}\left(\sqrt[4]{x}-1\right)^7}$.

11.286. $\int \frac{x^2-5}{(x+3)(x-1)^2}\,dx$. 11.287. $\int \frac{\sin^3 x}{\cos^5 x}\,dx$. 11.288. $\int \frac{\sin x}{1+\sin x}\,dx$.

11.289. $\int \frac{dx}{e^{2x}-e^x}$. 11.290. $\int \frac{\sqrt[5]{x}\,dx}{\sqrt{7+2\sqrt[5]{x^3}}}$.

11.291. $\int \frac{8x-15}{x(x^2-4x+5)}\,dx$. 11.292. $\int \ln(x^2+1)\,dx$.

11.293. $\int \frac{dx}{2\sin^2 x+3\cos^2 x}$. 11.294. $\int \frac{\sqrt{x^2+2x}}{x}\,dx$.

11.295. $\int \frac{dx}{x\sqrt[3]{(x-8)^2}}$. 11.296. $\int x\cos^2 x\,dx$. 11.297. $\int \frac{dx}{(x^2+1)(x^2+4)}$.

11.298. $\int \sqrt[3]{\frac{2-x}{2+x}}\frac{dx}{(2-x)^2}$. 11.299. $\int \frac{2+\cos x}{\sin x}\,dx$.

11.300. $\int \frac{dx}{(x^2+2)^2}$. 11.301. $\int \frac{dx}{7\cos x-4\sin x+8}$.

11.302. $\int \frac{\cos x\,dx}{\sin^2 x-6\sin x+12}$. 11.303. $\int \frac{e^x-2}{e^{2x}+4}\,dx$.

11.304. $\int \frac{x^3\,dx}{\sqrt{(4-x^2)^3}}$. 11.305. $\int \cos x\cos^2 3x\,dx$.

11.306. $\int \frac{dx}{\sin x\cos^5 x}$. 11.307. $\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2+4x-4}}$.

11.308. $\int \frac{x-8}{x^3-4x^2+4x}\,dx$. 11.309. $\int \frac{x\,dx}{\cos^2 3x}$.

11.310. $\int \frac{x\sqrt{x}-\sqrt[3]{x}}{\sqrt[4]{x}}\,dx.$ **11.311.** $\int \frac{dx}{\sqrt{x+5}-\sqrt{x}}.$

11.312. $\int \operatorname{arctg}\sqrt{x}\,dx.$ **11.313.** $\int \frac{x^3\,dx}{2+\sqrt{4-x^2}}.$

11.314. $\int \frac{x^4+1}{(x-1)(x^2+1)}\,dx.$ **11.315.** $\int \frac{x^4\,dx}{\sqrt{(1-x^2)^3}}.$

11.316. $\int \frac{\cos^3 2x}{\sin 4x}\,dx.$ **11.317.** $\int \frac{dx}{x^4\sqrt{1+x^2}}.$

11.318. $\int \frac{dx}{\sin 2x-\cos 2x}.$ **11.319.** $\int \frac{5x^3+9x^2-22x-8}{x^3-4x}\,dx.$

11.320. $\int x\arcsin x\,dx.$ **11.321.** $\int \frac{x^2-x}{(x-2)^3}\,dx.$

11.322. $\int \frac{dx}{\sqrt[4]{(x-1)^3(x+2)^5}}.$ **11.323.** $\int \frac{x^3+4x^2+6}{(x+1)^2(x^2+2)}\,dx.$

11.324. $\int \sqrt{x^2+4x}\,dx.$ **11.325.** $\int \sqrt{1-x^2-2x}\,dx.$

11.326. $\int (\operatorname{tg} x+\operatorname{ctg} x)^3 dx.$ **11.327.** $\int \frac{x^2+\sqrt{1+x}}{\sqrt[3]{1+x}}\,dx.$

11.328. $\int \frac{dx}{(x-1)\sqrt{1-x^2}}.$ **11.329.** $\int \frac{\ln x\,dx}{x\sqrt{1-\ln^2 x-4\ln x}}.$

Указание: подстановка $x-1=t$.

11.330. $\int \sin(\alpha x+\varphi)\sin\alpha x\,dx.$ **11.331.** $\int \cos x\cos^2 3x\,dx.$

11.332. $\int \frac{dx}{e^{2x}+e^x-2}.$ **11.333.** $\int \frac{x\operatorname{arctg} x}{\sqrt{1+x^2}}\,dx.$

11.334. $\int \frac{x^3\,dx}{2+\sqrt{4-x^2}}.$ **11.335.** $\int \sqrt{\frac{x}{2-x}}\,dx.$

ГЛАВА 12

ОПРЕДЕЛЕННЫЙ ИНТЕГРАЛ

§ 1. ОПРЕДЕЛЕННЫЙ ИНТЕГРАЛ И ЕГО НЕПОСРЕДСТВЕННОЕ ВЫЧИСЛЕНИЕ

Пусть функция $f(x)$ определена на отрезке $[a, b]$. Разобьем отрезок $[a, b]$ на n частей точками $a=x_0 < x_1 < x_2 < \ldots < x_n=b$, выберем на каждом элементарном отрезке $[x_{k-1}, x_k]$ произвольную точку ξ_k и обозначим через Δx_k длину каждого такого отрезка. *Интегральной суммой* для функции $f(x)$ на отрезке $[a, b]$ называется сумма вида

$$\sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)\,\Delta x_k = f(\xi_1)\,\Delta x_1 + f(\xi_2)\,\Delta x_2 + \ldots + f(\xi_n)\,\Delta x_n. \qquad (1)$$

Определенным интегралом от функции $f(x)$ на отрезке $[a, b]$ называется предел интегральной суммы (1) при условии, что длина наибольшего из элементарных отрезков стремится к нулю:

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{\max \Delta x_k \to 0} \sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)\,\Delta x_k. \qquad (2)$$

Если функция $f(x)$ непрерывна на $[a, b]$, то предел (2) существует и не зависит от способа разбиения отрезка $[a, b]$ на элементарные отрезки и от выбора точек ξ_k **(теорема существования определенного интеграла)**.

Основные свойства определенного интеграла

1°. *Определенный интеграл от алгебраической суммы конечного числа функций равен алгебраической сумме определенных интегралов от слагаемых функций:*

$$\int_a^b [f_1(x) \pm f_2(x)]\,dx = \int_a^b f_1(x)dx \pm \int_a^b f_2(x)\,dx.$$

2°. *Постоянный множитель можно выносить за знак определенного интеграла:*

$$\int_a^b kf(x)\,dx = k\int_a^b f(x)\,dx.$$

3°. *При перестановке пределов интегрирования определенный интеграл меняет знак на противоположный:*

$$\int_a^b f(x)\,dx = -\int_b^a f(x)\,dx.$$

4°. *Определенный интеграл с одинаковыми пределами равен нулю:*

$$\int_a^a f(x)\,dx = 0.$$

5°. *Отрезок интегрирования можно разбивать на части:*

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx.$$

Для вычисления определенного интеграла от функции $f(x)$ в том случае, когда можно найти соответствующий неопределенный интеграл $F(x)$, служит **формула Ньютона — Лейбница**:

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(x)\Big|_a^b = F(b) - F(a), \tag{3}$$

т. е. *определенный интеграл равен разности значений первообразной при верхнем и нижнем пределах интегрирования.*

12.1. Вычислить интегралы:

$$1)\ \int_1^2 5x^4\,dx; \qquad 2)\ \int_0^4 (3x - e^{x/4})\,dx;$$

$$3)\ \int_0^{\pi/6} \frac{\sin^2 x}{\cos x}\,dx; \qquad 4)\ \int_{\sqrt{e}}^{e} x\ln x\,dx.$$

Решение. 1) Найдем одну из первообразных $F(x)$ для функции Так как

$$\int 5x^4\,dx = 5\cdot\frac{x^5}{5} + C = x^5 + C,$$

то $F(x) = x^5$. Следовательно, по формуле Ньютона—Лейбница получаем

$$\int_1^2 5x^4\,dx = x^5\Big|_1^2 = 2^5 - 1^5 = 32 - 1 = 31.$$

2) На основании формулы (3) находим

$$\int_0^4 (3x - e^{x/4})\,dx = \left[\frac{3x^2}{2} - 4e^{x/4}\right]_0^4 = (24 - 4e) - (0 - 4) = 28 - 4e.$$

3) Первообразную $F(x)$ для функции $(\sin^2 x)/(\cos x)$ получим, найдя неопределенный интеграл

$$\int \frac{\sin^2 x}{\cos x}\,dx = \int \frac{1 - \cos^2 x}{\cos x}\,dx = \int \left(\frac{1}{\cos x} - \cos x\right) dx =$$

$$= \ln\left|\operatorname{tg}\left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{4}\right)\right| - \sin x + C.$$

Отсюда по формуле Ньютона—Лейбница имеем

$$\int_0^{\pi/6} \frac{\sin^2 x}{\cos x}\,dx = \left[\ln\left|\operatorname{tg}\left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{4}\right)\right| - \sin x\right]_0^{\pi/6} =$$

$$= [\ln\operatorname{tg}(\pi/3) - \sin(\pi/6)] - [\ln\operatorname{tg}(\pi/4) - \sin 0] = (\ln 3 - 1)/2.$$

4) Здесь для нахождения неопределенного интеграла $\int x\ln x\,dx$ применим формулу интегрирования по частям. Полагая $u = \ln x$, $x\,dx = dv$, получим $du = (1/x)\,dx$, $v = x^2/2$. Следовательно,

$$\int x\ln x\,dx = \frac{x^2\ln x}{2} - \frac{1}{2}\int \frac{x^2\,dx}{x} = \frac{x^2\ln x}{2} - \frac{1}{2}\int x\,dx = \frac{x^2\ln x}{2} - \frac{x^2}{4} + C$$

и на основании формулы Ньютона—Лейбница находим

$$\int\limits_{\sqrt{e}}^{e} x\ln x\,dx=\left[\frac{x^2\ln x}{2}-\frac{x^2}{4}\right]_{\sqrt{e}}^{e}=(e^2/2-e^2/4)-(e/4-e/4)=e^2/4.$$

В задачах **12.2—12.25** вычислить определенные интегралы.

12.2. $\int\limits_{2}^{3} x^3\,dx.$ **12.3.** $\int\limits_{1}^{16} \sqrt{x}\,dx.$ **12.4.** $\int\limits_{1/3}^{1} \frac{dx}{x^2}.$ **12.5.** $\int\limits_{1/e}^{1/\sqrt{e}} \frac{dx}{x}.$

12.6. $\int\limits_{-1}^{1} (6x^2-2x-5)\,dx.$ **12.7.** $\int\limits_{1}^{8} \left(4x-\frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}\right)dx.$

12.8. $\int\limits_{1}^{e^2} \frac{2\sqrt{x}+5-7x}{x}\,dx.$ **12.9.** $\int\limits_{0}^{\pi/6} \sin 3x\,dx.$ **12.10.** $\int\limits_{\pi/3}^{\pi/2} \frac{dx}{\cos^2(x/2)}.$

12.11. $\int\limits_{0}^{\pi/4} \sin^2\left(\frac{\pi}{4}-x\right)dx.$ **12.12.** $\int\limits_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos 3x\cos 5x\,dx.$

12.13. $\int\limits_{-\pi/2}^{\pi/2} \sin 2x\sin 7x\,dx.$ **12.14.** $\int\limits_{6}^{6\sqrt{3}} \frac{dx}{x^2+36}.$

12.15. $\int\limits_{4}^{4\sqrt{3}} \frac{dx}{\sqrt{64-x^2}}.$ **12.16.** $\int\limits_{3}^{4} \frac{dx}{25-x^2}.$ **12.17.** $\int\limits_{-2}^{0} \frac{dx}{\sqrt{x^2+1}}.$

12.18. $\int\limits_{1}^{4} \frac{dx}{x^2-2x+10}.$ **12.19.** $\int\limits_{0}^{2} \frac{x\,dx}{x^4-9}.$ **12.20.** $\int\limits_{\pi/12}^{\pi/6} \operatorname{ctg} 2x\,dx.$

12.21. $\int\limits_{0}^{\pi/4} (\operatorname{tg}^2 x-e^{-x})\,dx.$ **12.22.** $\int\limits_{\pi/6}^{\pi/4} \frac{dx}{\sin^2 x\sqrt{\operatorname{ctg} x}}.$

12.23. $\int\limits_{e}^{e^2} \frac{\sqrt{\ln x}}{x}\,dx.$ **12.24.** $\int\limits_{1/3}^{3} xe^{3x}\,dx.$ **12.25.** $\int\limits_{1}^{e^2} \frac{\ln x}{\sqrt{x}}\,dx.$

§ 2. ЗАМЕНА ПЕРЕМЕННОЙ И ИНТЕГРИРОВАНИЕ ПО ЧАСТЯМ В ОПРЕДЕЛЕННОМ ИНТЕГРАЛЕ

При вычислении определенного интеграла $\int\limits_a^b f(x)\,dx$ способом *замены переменной* данный интеграл с помощью подстановки $x=\varphi(t)$ [или $t=\psi(x)$] преобразуется в другой определенный интеграл с новой переменной интегрирования t, причем старые пределы интегрирования $x_1=a$ и $x_2=b$ заменяются новыми пределами $t_1=\psi_1(a)$ и $t_2=\psi_2(b)$:

$$\int\limits_a^b f(x)\,dx=\int\limits_{t_1}^{t_2} f[\varphi(t)]\,\varphi'(t)\,dt. \qquad (1)$$

Здесь предполагается, что функции $\varphi(t)$ и $\varphi'(t)$ непрерывны на отрезке $t_1 \leqslant t \leqslant t_2$, а функция $f[\varphi(t)]$ определена и непрерывна на отрезке $t_1 \leqslant t \leqslant t_2$.

Интегрирование по частям в определенном интеграле осуществляется по формуле

$$\int_a^b u(x)\underbrace{v'(x)\,dx}_{dv} = u(x)\,v(x)\Big|_a^b - \int_a^b v(x)\underbrace{u'(x)\,dx}_{du}, \tag{2}$$

где предполагается, что функции $u(x)$ и $v(x)$ непрерывно дифференцируемы на отрезке $[a, b]$.

12.26. Вычислить интегралы:

$$1)\ \int_{-2}^{5} \sqrt[3]{5x+2}\,dx; \quad 2)\ \int_{-\pi/4}^{\pi/4} \frac{\sqrt{1+\operatorname{tg} x}}{\cos^2 x}\,dx; \quad 3)\ \int_{\sqrt{3}}^{2} \frac{\sqrt{4-x^2}}{x}\,dx.$$

Решение. 1) Введем новую переменную интегрирования, полагая $t = \sqrt[3]{5x+2}$. Отсюда находим $x = (t^3-2)/5$, $dx = (3/5)\,t^2\,dt$. Вычислим новые пределы интегрирования: при $x_1 = -2$ имеем $t_1 = \sqrt[3]{5(-2)+2} = -2$; при $x_2 = 5$ получим $t_2 = \sqrt[3]{5\cdot 5+2} = 3$. Следовательно,

$$\int_{-3}^{5} \sqrt[3]{5x+2}\,dx = \int_{-2}^{3} t\cdot\frac{3}{5}\,t^2\,dt = \frac{3}{5}\int_{-2}^{3} t^3\,dt = \frac{3}{5}\cdot\frac{1}{4}\,t^4\Big|_{-2}^{3} = \frac{3}{20}(81-16) = \frac{39}{4}.$$

2) Полагая $\operatorname{tg} x = t$, имеем $(1/\cos^2 x)\,dx = ds$, $\sqrt{1+\operatorname{tg} x} = \sqrt{1+t}$. Найдем новые пределы интегрирования: при $x_1 = -\pi/4$ получим $t_1 = -1$, при $x_2 = \pi/4$ получим $t_2 = 1$. Таким образом,

$$\int_{-\pi/4}^{\pi/4} \frac{\sqrt{1+\operatorname{tg} x}}{\cos^2 x}\,dx = \int_{-1}^{1} \sqrt{1+t}\,dt = \frac{2}{3}\sqrt{(1+t)^3}\Big|_{-1}^{1} = \frac{2}{3}\cdot 2\sqrt{2} = \frac{4\sqrt{2}}{3}.$$

3) Произведем замену переменной интегрирования по формуле $x = 2\sin t$. Тогда $dx = 2\cos t\,dt$, $\sqrt{4-x^2} = \sqrt{4-4\sin^2 t} = 2\cos t$. Находим новые пределы интегрирования: при $x_1 = \sqrt{3}$ имеем $\sin t = \sqrt{3}/2$, откуда $t_1 = \pi/3$; при $x_2 = 2$ имеем $\sin t = 1$, т. е. $t_2 = \pi/2$. Поэтому

$$\int_{\sqrt{3}}^{2} \frac{\sqrt{4-x^2}}{x}\,dx = \int_{\pi/3}^{\pi/2} \frac{2\cos t\cdot 2\cos t}{2\sin t}\,dt = 2\int_{\pi/3}^{\pi/2} \frac{\cos^2 t}{\sin t}\,dt = 2\int_{\pi/3}^{\pi/2}\left(\frac{1}{\sin t} - \sin t\right)dt =$$

$$= 2\,[\ln|\operatorname{tg}(t/2)| + \cos t]_{\pi/3}^{\pi/2} = -2\,[\ln\operatorname{tg}(\pi/6) + \cos(\pi/3)] =$$

$$= -2\left[\ln(\sqrt{3}/3) + 1/2\right] = \ln 3 - 1.$$

В задачах **12.27—12.54** вычислить интегралы способом замены переменной.

12.27. $\displaystyle\int_1^4 \frac{dx}{(1+2x)^2}$. **12.28.** $\displaystyle\int_0^5 \frac{x\,dx}{\sqrt{1+3x}}$. **12.29.** $\displaystyle\int_{\sqrt{3}/5}^{3/5} \frac{dx}{9+25x^2}$.

12.30. $\displaystyle\int_{2\sqrt{3}/3}^{2} \frac{dx}{\sqrt{16-3x^2}}$. **12.31.** $\displaystyle\int_{-0{,}5}^{0{,}5} \frac{3^x\,dx}{1+9^x}$.

12.32. $\int\limits_{\ln 2}^{\ln 3} \frac{e^x\,dx}{\sqrt{e^{2x}-1}}$. 12.33. $\int\limits_{0}^{\pi/24} \operatorname{tg}(\pi/3-4x)\,dx$.

12.34. $\int\limits_{0}^{0,5} e^{\sin \pi x}\cos \pi x\,dx$. 12.35. $\int\limits_{-\ln\sqrt{3}}^{\ln\sqrt{3}} \frac{dx}{e^x+e^{-x}}$.

12.36. $\int\limits_{-\sqrt{3}/2}^{\sqrt{3}/2} \frac{\pi/4-\arcsin x}{\sqrt{1-x^2}}\,dx$. 12.37. $\int\limits_{1}^{8} \frac{dx}{\sqrt{17x+8}}$.

12.38. $\int\limits_{0}^{\pi/2} \sin^8 x\cos^4 x\,dx$. 12.39. $\int\limits_{1}^{3} \frac{\sqrt{x}}{x+1}\,dx$. 12.40. $\int\limits_{25}^{196} \frac{dx}{x-4\sqrt{x}}$.

12.41. $\int\limits_{27}^{125} \frac{dx}{\sqrt[3]{x}-2}$. 12.42. $\int\limits_{15}^{99} \frac{dx}{3-\sqrt{x+1}}$. 12.43. $\int\limits_{4}^{25} \frac{dx}{\sqrt{x}-1}$.

12.44. $\int\limits_{0}^{\sqrt{3}/2} \sqrt{1-x^2}\,dx$. 12.45. $\int\limits_{0}^{2} \sqrt{(4-x^2)^3}\,dx$.

12.46. $\int\limits_{2}^{4\sqrt{3}/3} \frac{\sqrt{x^2-4}}{x^2}\,dx$. 12.47. $\int\limits_{\sqrt{3}}^{3} \frac{dx}{x^2\sqrt{x^2+9}}$.

12.48. $\int\limits_{0}^{3} \frac{dx}{\sqrt{(16+x^2)^3}}$. 12.49. $\int\limits_{1}^{2} \frac{\sqrt{4-x^2}}{x^2}\,dx$. 12.50. $\int\limits_{4\sqrt{2}}^{8} \frac{dx}{x\sqrt{x^2-16}}$.

12.51. $\int\limits_{0}^{1} \frac{x^2\,dx}{(x+1)^4}$. 12.52. $\int\limits_{\ln 2}^{2\ln 2} \sqrt{e^x-1}\,dx$.

Указание: подстановка $x+1=t$. Указание: подстановка $e^x-1=t^2$.

12.53. $\int\limits_{0}^{\pi/2} \frac{dx}{3+5\cos x}$. 12.54. $\int\limits_{0}^{3} \sqrt{\frac{x}{6-x}}\,dx$.

Указание: подстановка $\operatorname{tg}(x/2)=t$. Указание: подстановка $x=6\sin^2 t$.

12.55. Применяя формулу интегрирования по частям, вычислить интегралы:

$$1)\ \int\limits_{1}^{e^4} \sqrt{x}\ln x\,dx;\qquad 2)\ \int\limits_{0}^{\pi/6} (2-x)\sin 3x\,dx.$$

Решение. 1) Положим $u=\ln x$, $dx=\sqrt{x}\,dx$; тогда $du=(1/x)\,dx$, $v=(2/3)x\sqrt{x}$. Отсюда по формуле (2) получим

$$\int\limits_{1}^{e^4} \sqrt{x}\ln x\,dx=\frac{2}{3}\,x\sqrt{x}\ln x\,\Big|_1^{e^4}-\frac{2}{3}\int\limits_{1}^{e^4} x\sqrt{x}\frac{dx}{x}=$$

$$=\frac{2}{3}e^6\cdot 4-\frac{2}{3}\int\limits_{1}^{e^4}\sqrt{x}\,dx=\frac{8}{3}e^6-\frac{2}{3}\cdot\frac{2}{3}x\sqrt{x}\,\Big|_1^{e^4}=\frac{8}{3}e^6-\left(\frac{4}{9}e^6-\frac{4}{9}\right)=\frac{4}{9}(5e^6+1).$$

2) Пусть $u=2-x$, $dv=\sin 3x\,dx$; отсюда $du=-dx$, $v=(-1/3)\cos 3x$. Следовательно,

$$\int_0^{\pi/6}(2-x)\sin 3x\,dx=-\frac{1}{3}(2-x)\cos 3x\Big|_0^{\pi/6}-\frac{1}{3}\int_0^{\pi/6}\cos 3x\,dx=$$

$$=\left[\frac{1}{3}(x-2)\cos 3x-\frac{1}{9}\sin 3x\right]_0^{\pi/6}=-\frac{1}{3}(-2)-\frac{1}{9}=\frac{5}{9}.$$

В задачах **12.56—12.65** вычислить интегралы, применяя формулу интегрирования по частям.

12.56. $\int_0^5 xe^x\,dx$. **12.57.** $\int_0^{\pi/2}(x-1)\cos x\,dx$. **12.58.** $\int_1^{\sqrt[3]{e}} x^2\ln x\,dx$.

12.59. $\int_0^1 \operatorname{arctg} x\,dx$. **12.60.** $\int_{\pi/6}^{\pi/2}\frac{x\,dx}{\sin^2 x}$. **12.61.** $\int_{-1}^0 \arccos x\,dx$.

12.62. $\int_0^2 \ln\left(\sqrt{1+x^2}-x\right)dx$. **12.63.** $\int_0^{\pi}(\pi-x)\sin x\,dx$.

12.64. $\int_{-1}^0 (2x+3)e^{-x}\,dx$. **12.65.** $\int_{-2}^2 (1-x)\sin \pi x\,dx$.

§ 3. ПЛОЩАДЬ ПЛОСКОЙ ФИГУРЫ

1. Площадь в прямоугольных координатах. *Площадь криволинейной трапеции*, ограниченной непрерывной кривой $y=f(x)$, двумя прямыми $x=a$ и $x=b$ и отрезком $a\leqslant x\leqslant b$ оси абсцисс, вычисляется по одной из следующих формул:

$$S=\int_a^b f(x)\,dx, \tag{1}$$

если $f(x)\geqslant 0$ на отрезке $[a, b]$;

$$S=-\int_a^b f(x)\,dx, \tag{2}$$

если $f(x)\leqslant 0$ на отрезке $[a, b]$;

$$S=\int_a^b |f(x)|\,dx, \tag{3}$$

если $f(x)$ конечное число раз меняет знак на отрезке $[a, b]$.

Площадь фигуры, ограниченной двумя непрерывными кривыми $y_1=f_1(x)$ и $y_2=f_2(x)$ и двумя прямыми $x=a$ и $x=b$, где $f_1(x)\geqslant f_2(x)$ на отрезке $[a, b]$, находится по формуле

$$S=\int_a^b [f_1(x)-f_2(x)]\,dx, \tag{4}$$

Если кривая задана параметрическими уравнениями $x=x(t)$, $y=y(t)$, то площадь криволинейной трапеции, ограниченной этой кривой, двумя ординатами $x=a$ и $x=b$ и отрезком $[a, b]$ оси Ox, выражается формулой

$$S=\int_{t_1}^{t_2} y(t)\,x'(t)\,dt, \tag{5}$$

где t_1 и t_2 соответствуют ординатам $x=a$ и $x=b$ [эти значения определяются из уравнений $a=x(t_1)$ и $b=x(t_2)$]; при этом предполагается, что $y(t)\geqslant 0$ при $t_1\leqslant t\leqslant t_2$.

2. Площадь в полярных координатах. *Площадь криволинейного сектора*, ограниченного кривой $\rho=\rho(\varphi)$ и двумя полярными радиусами $\varphi=\alpha$ и $\varphi=\beta$ (где $\alpha<\beta$), вычисляется по формуле

$$S=\frac{1}{2}\int_{\alpha}^{\beta}[\rho(\varphi)]^2\,d\varphi. \tag{6}$$

12.66. Вычислить площади фигур, ограниченных следующими линиями:

1) параболой $y=x^2+1$, прямыми $x=-1$, $x=2$ и осью абсцисс;

2) прямыми $x+2y-8=0$, $y=1$, $y=3$ и осью ординат;

3) цепной линией $y=(e^x+e^{-x})/2$, прямыми $x=-1$, $x=1$ и осью абсцисс;

4) ветвью гиперболы $y=1/x$, прямыми $x=-6$, $x=-2$ и осью абсцисс;

5) параболой $y=-x^2-2x+3$, осями координат и прямой $x=2$;

6) параболой $y=x^2+4x$ и прямой $x-y+4=0$;

7) одной аркой циклоиды $x=a(t-\sin t)$, $y=a(1-\cos t)$ и осью абсцисс;

8) лемнискатой $\rho=a\sqrt{\cos 2\varphi}$.

Решение. 1) На основании формулы (1) получим

$$S=\int_{-1}^{2}(x^2+1)\,dx=\left[\frac{x^3}{3}+x\right]_{-1}^{2}=\left(\frac{8}{3}+2\right)-\left(-\frac{1}{3}-1\right)=6 \text{ (кв. ед.)}$$

2) Для вычисления искомой площади снова воспользуемся формулой (1), учитывая, что здесь изменены роли осей координат (рис. 69):

$$S=\int_{1}^{3} f(y)\,dy=\int_{1}^{3}(8-2y)\,dy=[8y-y^2]_1^3=15-7=8 \text{ (кв. ед.)}$$

3) Данная фигура состоит из двух симметричных относительно оси Ox криволинейных трапеций; поэтому достаточно вычислить половину искомой площади и результат удвоить:

$$S=2\int_{0}^{1}\frac{e^x+e^{-x}}{2}\,dx=\int_{0}^{1}(e^x+e^{-x})\,dx=[e^x-e^{-x}]_0^1=e-\frac{1}{e}\approx 1{,}45 \text{ (кв. ед.)}$$

4) На отрезке $[-6, -2]$ функция $f(x)=1/x$ отрицательна. Поэтому для вычисления площади рассматриваемой фигуры следует воспользоваться формулой (2):

$$S=-\int_{-6}^{-2}\frac{1}{x}\,dx=[-\ln|x|]_{-6}^{-2}=-(\ln 2-\ln 6)=\ln 3\approx 1{,}1 \text{ (кв. ед.)}$$

5) В рассматриваемом случае функция $f(x) = -x^2 - 2x + 3$ на отрезке $[0, 2]$ меняет знак (рис. 70), а именно $f(x) \geqslant 0$ на отрезке $[0, 1]$ и $f(x) \leqslant 0$ на отрезке

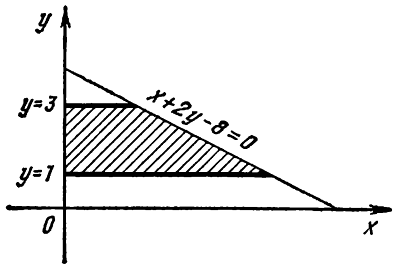


Рис. 69.

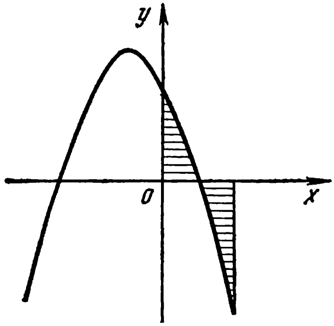


Рис. 70.

$[1, 2]$. Для нахождения искомой площади воспользуемся формулой (3):

$$S = \int_0^2 |-x^2 - 2x + 3|\, dx = \int_0^1 |-x^2 - 2x + 3|\, dx + \int_1^2 |-x^2 - 2x + 3|\, dx =$$

$$= \int_0^1 (-x^2 - 2x + 3)\, dx - \int_1^2 (-x^2 - 2x + 3)\, dx =$$

$$= \left[-\frac{x^3}{3} - x^2 + 3x\right]_0^1 - \left[-\frac{x^3}{3} - x^2 + 3x\right]_1^2 = \frac{5}{3} - \left(-\frac{7}{3}\right) = 4 \text{ (кв. ед.)}$$

6) Решая совместно уравнения, определяющие данные линии, получим $x_1 = -4$ и $x_2 = 1$ (рис. 71). Площадь фигуры, ограниченной параболой $y = x^2 + 4x$ и прямой $y = x + 4$, находим по формуле (4):

$$S = \int_{-4}^{1} [(x+4) - (x^2 + 4x)]\, dx = \int_{-4}^{1} (4 - 3x - x^2)\, dx =$$

$$= \left[4x - \frac{3x^2}{2} - \frac{x^3}{3}\right]_{-4}^{1} = \left(4 - \frac{3}{2} - \frac{1}{3}\right) -$$

$$- \left(-16 - 24 + \frac{64}{3}\right) = \frac{125}{6} \text{ (кв. ед.)}$$

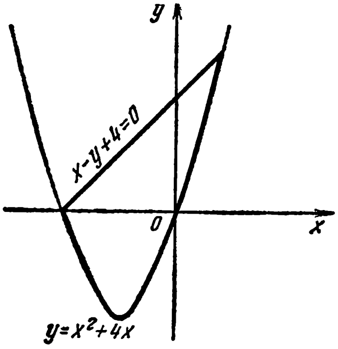


Рис. 71.

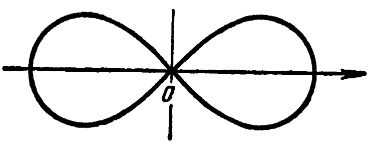


Рис. 72.

7) При изменении x от 0 до $2\pi a$ параметр t изменяется от 0 до 2π. Находим $x'(t) = a(1 - \cos t)$ и по формуле (5) получаем

$$S = \int_0^{2\pi} a(1 - \cos t)\, a(1 - \cos t)\, dt = a^2 \int_0^{2\pi} (1 - \cos t)^2\, dt =$$

$$= a^2 \int_0^{2\pi} \left(1 - 2\cos t + \frac{1 + \cos 2t}{2}\right) dt = a^2 \left[\frac{3}{2} t - 2\sin t + \frac{\sin 2t}{4}\right]_0^{2\pi} = 2\pi a^2 \text{ (кв. ед.)}$$

8) Здесь изменению полярного угла от 0 до $\pi/4$ соответствует четверть искомой площади (рис. 72). По формуле (6) находим

$$S=4\cdot\frac{1}{2}\int\limits_0^{\pi/4}a^2\cos 2\varphi\,d\varphi=2a^2\cdot\frac{\sin 2\varphi}{2}\Bigg|_0^{\pi/4}=a^2 \text{ (кв. ед.)}$$

12.67. Найти площадь фигуры, ограниченной прямыми $y=-4x$, $x=-3$, $x=-1$ и осью абсцисс.

12.68. Найти площадь фигуры, заключенной между осями координат и прямыми $2x-y+3=0$ и $x=4$.

12.69. Вычислить площадь фигуры, ограниченной параболой $y=x^2$ и прямой $y=9$.

12.70. Вычислить площадь фигуры, ограниченной кривой $y=e^{-2x}$, прямыми $x=-0{,}5$, $x=1$ и осью абсцисс.

12.71. Найти площадь фигуры, ограниченной кривой $y=\arcsin x$, прямыми $y=\pi/4$, $y=\pi/3$ и осью ординат.

12.72. Найти площадь фигуры, заключенной между окружностью $x^2+y^2=25$ и прямыми $2y-5=0$, $2y-5\sqrt{2}=0$.

12.73. Найти площадь фигуры, ограниченной эллипсом $4x^2+9y^2=36$, прямой $2x-3\sqrt{3}=0$ и осью ординат.

12.74. Найти площадь фигуры, ограниченной ветвью гиперболы $y=-2/x$ и прямыми $x=1$, $x=5$.

12.75. Вычислить площадь фигуры, ограниченной кривой $y=\sin x$ и осью абсцисс от $x=-\pi/4$ до $x=\pi/3$.

12.76. Найти площадь фигуры, ограниченной кривой $y=\ln x$, прямыми $x=1/e$, $x=e$ и осью абсцисс.

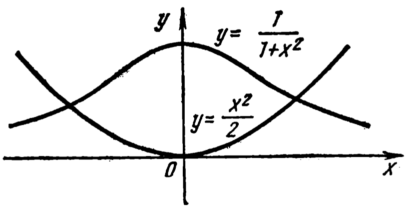


Рис. 73.

12.77. Вычислить площадь фигуры, ограниченной параболой $y=6x-x^2$, прямыми $x=-1$, $x=3$ и осью абсцисс.

12.78. Найти площадь фигуры, ограниченной параболой $y=x^2-4x+3$, осями координат и прямой $x=4$.

12.79. Найти площадь фигуры, заключенной между прямыми $y=2x$, $y=5x$, $x=2$ и $x=6$.

12.80. Найти площадь части гиперболы $y=3/x$, отсекаемой от нее прямой $x+y-4=0$.

12.81. Найти площадь фигуры, отсекаемой от параболы $y=3x-x^2$ прямой $5x-y-8=0$.

12.82. Вычислить площадь фигуры, ограниченной параболой $y^2=16x$ и прямой $y=x$.

12.83. Найти площадь фигуры, заключенной между параболами $y=8x-x^2$ и $y=x^2+18x-12$.

12.84. Вычислить площадь фигуры, заключенной между параболами $y=6x^2$ и $y=2x^3$.

12.85. Вычислить площадь фигуры (рис. 73), заключенной между кривыми $y=x^2/2$ и $y=1/(1+x^2)$.

12.86. Найти площадь сегмента, отсекаемого прямой $x+y-4=0$ от круга, ограниченного окружностью $x^2+y^2=16$. Проверить результат непосредственным вычислением.

12.87. Найти площадь фигуры, лежащей в I четверти и ограниченной окружностью $x^2+y^2=36$, прямой $y=x\sqrt{3}/3$ и осью абсцисс.

12.88. Найти площадь части плоскости, ограниченной дугами эллипса $4x^2+9y^2=36$ и двумя прямыми $2x+3y+6=0$ и $2x+3y-6=0$.

12.89. Найти площади фигур, на которые парабола $y^2=2x$ делит круг, уравнение граничной окружности которого $x^2+y^2=8$.

12.90. Вычислить площадь, ограниченную эллипсом $x=a\cos t$, $y=b\sin t$.

12.91. Найти площадь, ограниченную астроидой $x=a\cos^3 t$, $y=a\sin^3 t$.

12.92. Вычислить площадь, ограниченную кардиоидой $\rho=2a(1+\cos\varphi)$.

12.93. Найти площадь, ограниченную трехлепестковой розой $\rho=a\sin 3\varphi$.

12.94. Найти площадь, ограниченную кривой $\rho^2=a^2\sin 4\varphi$.

12.95. Вычислить площадь, ограниченную дугой гиперболической спирали $\rho=a/\varphi$ и полярными радиусами $\varphi=\pi/4$ и $\varphi=2\pi$.

§ 4. ДЛИНА ДУГИ КРИВОЙ

1. Длина дуги в прямоугольных координатах. Если кривая $y=f(x)$ на отрезке $[a, b]$ является гладкой [т. е. производная $y'=f'(x)$ — непрерывная функция], то *длина дуги* этой *кривой*, заключенной между точками с абсциссами $x=a$ и $x=b$, находится по формуле

$$L=\int_a^b \sqrt{1+y'^2}\,dx. \tag{1}$$

В том случае, когда кривая задана уравнениями в параметрической форме $x=x(t)$, $y=y(t)$ [$x(t)$ и $y(t)$ — непрерывно дифференцируемые функции], длина дуги кривой, соответствующей монотонному изменению параметра t от t_1 до t_2, вычисляется по формуле

$$L=\int_{t_1}^{t_2} \sqrt{[x'(t)]^2+[y'(t)]^2}\,dt. \tag{2}$$

2. Длина дуги в полярных координатах. Если гладкая кривая задана уравнением в полярных координатах $\rho=\rho(\varphi)$, то длина дуги кривой, соответствующей монотонному изменению полярного угла от $\varphi=\alpha$ до $\varphi=\beta$, находится по формуле

$$L=\int_{\alpha}^{\beta} \sqrt{\rho^2+\rho'^2}\,d\varphi. \tag{3}$$

12.96. Найти длину дуги:

1) цепной линии $y=e^{x/2}+e^{-x/2}$ между прямыми $x=0$ и $x=2$;
2) астроиды $x=a\cos^3 t$, $y=a\sin^3 t$;
3) кардиоиды $\rho=2a(1+\cos\varphi)$.

Решение. 1) Дифференцируя, находим $y'=\frac{1}{2}(e^{x/2}-e^{-x/2})$, откуда

$$\sqrt{1+y'^2}=\sqrt{1+\frac{1}{4}(e^x-2+e^{-x})}=\sqrt{\frac{e^x+2+e^{-x}}{4}}=\frac{e^{x/2}+e^{-x/2}}{2}$$

и, следовательно, по формуле (1) имеем

$$L=\int\limits_0^2 \sqrt{1+y'^2}\,dx=\int\limits_0^2 \frac{e^{x/2}+e^{-x/2}}{2}\,dx=[e^{x/2}-e^{-x/2}]_0^2=e-\frac{1}{e}\approx 1{,}45.$$

2) Ввиду симметрии кривой достаточно найти длину одной четверти всей дуги (параметр t при этом изменяется от 0 до $\pi/2$). Дифференцируем по t параметрические уравнения астроиды:

$$x'(t)=-3\cos^2 t\sin t,\quad y'(t)=3a\sin^2 t\cos t.$$

Отсюда находим

$$\sqrt{[x'(t)]^2+[y'(t)]^2}=3a\sqrt{\cos^4 t\sin^2 t+\sin^4 t\cos^2 t}=$$
$$=3a\sqrt{\sin^2 t\cos^2 t(\sin^2 t+\cos^2 t)}=3a\sin t\cos t.$$

Следовательно, по формуле (2) получаем

$$L/4=\int\limits_0^{\pi/2}\sqrt{[x'(t)]^2+[y'(t)]^2}\,dt=3a\int\limits_0^{\pi/2}\sin t\cos t\,dt=(3a/2)\int\limits_0^{\pi/2}\sin 2t\,dt=$$
$$=(-3a/4)\cos 2t\Big|_0^{\pi/2}=3a/2,$$

т. е. искомая длина $L=6a$.

3) Так как данная кривая симметрична относительно полярной оси, то достаточно вычислить половину длины ее дуги, причем полярный угол φ меняется от 0 до π. Дифференцируя, имеем $\rho'=-2a\sin\varphi$, откуда

$$\sqrt{\rho^2+\rho'^2}=\sqrt{4a^2(1+\cos\varphi)^2+4a^2\sin^2\varphi}=2a\sqrt{1+2\cos\varphi+\cos^2\varphi+\sin^2\varphi}=$$
$$=2a\sqrt{2+2\cos\varphi}=2a\sqrt{4\cos^2(\varphi/2)}=4a\cos(\varphi/2)$$

и, таким образом, по формуле (3) находим

$$L/2=\int\limits_0^{\pi}\sqrt{\rho^2+\rho'^2}\,d\rho=4a\int\limits_0^{\pi}\cos(\varphi/2)\,d\varphi=8a\sin(\varphi/2)\Big|_0^{\pi}=8a,$$

т. е. искомая длина $L=16a$.

В задачах **12.97—12.107** вычислить длины дуг кривых:

12.97. $y^2=x^3$ от $x=0$ до $x=5$.

12.98. $y=\ln\sin x$ от $x=\pi/3$ до $x=\pi/2$.

12.99. $2y=x^2-3$ между точками пересечения с осью Ox.

12.100. $x=t^3/3-t$, $y=t^2+2$ от $t=1$ до $t=4$.

12.101. $x=4(t-\sin t)$, $y=4(1-\cos t)$ (длину дуги одной арки циклоиды).

12.102. $\rho=5\sin\varphi$.

12.103. $\rho=\sin^3(\varphi/3)$ от $\varphi=0$ до $\varphi=\pi/4$.

12.104. $y=\ln x$ от $x=\sqrt{3}$ до $x=2\sqrt{2}$.

12.105. $x=t^6/6$, $y=2-t^4/4$ между точками пересечения с координатными осями.

12.106. $\rho=a\varphi$ (длину первого витка спирали Архимеда).

12.107. $x=e^t\cos t$, $y=e^t\sin t$ от $t=0$ до $t=\ln\pi$.

§ 5. ОБЪЕМ ТЕЛА ВРАЩЕНИЯ

Объем тела, образованного вращением вокруг оси Ох криволинейной трапеции, ограниченной непрерывной кривой $y=f(x)$, осью абсцисс и двумя прямыми $x=a$ и $x=b$ $(a<b)$, находится по формуле

$$V_x=\pi\int_a^b [f(x)]^2\,dx. \qquad (1)$$

Аналогично, *объем тела вращения вокруг оси Оу* криволинейной трапеции, ограниченной непрерывной кривой $x=\varphi(y)$, осью ординат и двумя прямыми $y=c$ и $y=d$ $(c<d)$, вычисляется по формуле

$$V_y=\pi\int_c^d [\varphi(y)]^2\,dy. \qquad (2)$$

12.108. Вычислить объем тела, которое получается при вращении вокруг оси Ox криволинейной трапеции, ограниченной гиперболой $y=4/x$, прямыми $x=3$, $x=12$ и осью абсцисс.

Решение. Пользуясь формулой (1), находим

$$V_x=\pi\int_3^{12}\left(\frac{4}{x}\right)^2 dx=16\pi\int_3^{12}\frac{dx}{x^2}=-16\pi\cdot\frac{1}{x}\Big|_3^{12}=-16\pi\left(\frac{1}{12}-\frac{1}{3}\right)=4\pi \text{ (куб. ед.)}$$

12.109. Найти объем тела, образованного вращением вокруг оси Oy фигуры, ограниченной кривой $y=x^3$ и отрезком $0\leqslant y\leqslant 8$ оси ординат.

Решение. Записав уравнение данной кривой в виде $x=\sqrt[3]{y}$ и используя формулу (2), получим

$$V_y=\pi\int_0^8 \sqrt[3]{y^2}\,dy=\frac{3}{5}\pi y^{5/3}\Big|_0^8=\frac{96\pi}{5} \text{ (куб. ед.)}$$

12.110. Найти объем тела, полученного от вращения вокруг оси Ox трапеции, образованной прямыми $y=x/2$, $x=4$, $x=6$ и осью абсцисс.

12.111. Вычислить объем тела, полученного от вращения вокруг оси Oy трапеции, образованной прямыми $y=3x$, $y=2$, $y=4$ и осью ординат.

12.112. Найти объем тела, образованного вращением вокруг оси Ox фигуры, ограниченной одной полуволной синусоиды $y=\sin x$ и отрезком $0\leqslant x\leqslant\pi$ оси абсцисс.

12.113. Определить объем тела, полученного от вращения кривой $y=x^2/4$ вокруг оси Oy в пределах от $y=1$ до $y=5$.

12.114. Вычислить объем тела, образованного вращением вокруг оси Ox фигуры, ограниченной дугой кубической параболы $y=x^3-4x$ и осью абсцисс.

12.115. Определить объем тела, полученного в результате вращения вокруг оси Ox фигуры, которая ограничена дугой окружности $x^2+y^2=16$, лежащей в I четверти, и прямыми $x=1$ и $x=3$.

12.116. Найти объем тела, образованного вращением эллипса $4x^2+9y^2=36$ вокруг его малой оси.

12.117. Фигура, ограниченная дугой эллипса $x^2/a^2+y^2/b^2=1$ $(a>b)$ и двумя прямыми, перпендикулярными к оси абсцисс и проходящими через фокусы эллипса, вращается вокруг оси Ox. Определить объем тела вращения.

12.118. Найти объем тела, образованного вращением вокруг оси Ox фигуры, ограниченной ветвью гиперболы $x^2-y^2=1$ и прямой $x=3$.

12.119. Найти объем тела, образованного вращением астроиды $x=a\cos^3 t$, $y=a\sin^3 t$ вокруг оси Ox.

Указание: воспользоваться формулой (1), предварительно выразив пределы интеграла и подынтегральное выражение через параметр t.

12.120. Вычислить объем тела, образованного вращением вокруг оси Ox фигуры, ограниченной одной аркой циклоиды $x=a(t-\sin t)$, $y=a(1-\cos t)$ и отрезком $0\leqslant x\leqslant 2\pi a$ оси абсцисс.

12.121. Найти объем тела, образованного вращением вокруг оси Ox фигуры, ограниченной параболами $y=2x^2$ и $y=x^3$.

Решение. Решая совместно уравнения $y=2x^2$ и $y=x^3$, получим $x_1=0$ и $x_2=2$. Искомый объем находим как разность объемов, полученных в результате вращения вокруг оси абсцисс криволинейных трапеций, одна из которых ограничена осью Ox, прямой $x=2$ и параболой $y=2x^2$, а другая — осью Ox, прямой $x=2$ и кубической параболой $y=x^3$. Таким образом,

$$V_x=\pi\int_0^2 (2x^2)^2\,dx-\pi\int_0^2 (x^3)^2\,dx=\pi\left(\int_0^2 4x^4\,dx-\int_0^2 x^6\,dx\right)=$$

$$=\pi\left[\frac{4x^5}{5}-\frac{x^7}{7}\right]_0^2=\pi\left(\frac{128}{5}-\frac{128}{7}\right)=\frac{256\pi}{35}\ \text{(куб. ед.)}$$

12.122. Фигура, образованная в результате пересечения параболы $y^2=4x$ и прямой $y=x$, вращается вокруг оси Ox. Найти объем тела вращения.

12.123. Найти объем тела, образованного вращением вокруг оси Oy фигуры, ограниченной параболой $y^2=2x$ и прямой $2x+2y-3=0$.

12.124. Вычислить объем тела, образованного вращением общей части парабол $y=x^2$ и $y^2=8x$: а) вокруг оси Ox; б) вокруг оси Oy.

12.125. Фигура, ограниченная кривыми $y=\operatorname{tg} x$, $y=\operatorname{ctg} x$ и прямой $x=\pi/6$, вращается вокруг оси Ox. Найти объем тела вращения.

12.126. Найти объем тела, полученного в результате вращения вокруг оси Ox сегмента, отсекаемого прямой $x+y-2=0$ от круга, граничная окружность которого $x^2+y^2=4$.

12.127. Определить объем тела, образованного вращением вокруг оси Oy фигуры, ограниченной кривыми $y=\log_2 x$, $y=\log_4 x$ и прямой $y=1$.

12.128. Фигура, лежащая в I четверти и ограниченная дугой окружности $x^2+y^2=18$, параболой $3y=x^2$ и осью ординат, вращается вокруг оси Ox. Найти объем тела вращения.

12.129. Фигура, лежащая в I четверти и ограниченная кривыми $x^2-y^2=3$, $xy=2$ и прямой $x=3$, вращается вокруг оси Ox. Найти объем тела вращения.

12.130. Найти объем тела, полученного в результате вращения вокруг оси Ox фигуры, ограниченной гиперболой $x^2-y^2=1$, прямой $y=2\sqrt{2}$ и осью абсцисс.

Указание: воспользоваться результатом задачи **12.118.**

§ 6. ПЛОЩАДЬ ПОВЕРХНОСТИ ВРАЩЕНИЯ

Площадь поверхности, образованной вращением вокруг оси Ox дуги гладкой кривой $y=f(x)$ между точками $x=a$ и $x=b$, вычисляется по формуле

$$S_x=2\pi\int_a^b y\sqrt{1+y'^2}\,dx. \tag{1}$$

Если кривая задана параметрическими уравнениями $x=x(t)$, $y=y(t)$ (где $t_1\leqslant t\leqslant t_2$), то формула для вычисления площади поверхности вращения имеет вид

$$S_x=2\pi\int_{t_1}^{t_2} y(t)\sqrt{[x'(t)]^2+[y'(t)]^2}\,dt. \tag{2}$$

12.131. Найти площадь поверхности вращения вокруг оси Ox:

1) дуги кубической параболы $y=x^3$ при $0\leqslant x\leqslant 1/2$;

2) одной арки циклоиды $x=a(t-\sin t)$, $y=a(1-\cos t)$.

Решение. 1) Дифференцируя, находим $y'=3x^2$; следовательно, по формуле (1) имеем

$$S_x=2\pi\int_0^{1/2} x^3\sqrt{1+9x^4}\,dx.$$

Для вычисления интеграла полагаем $1+9x^4=z$; тогда $36x^3\,dx=dz$; если $x=0$, то $z=1$, если $x=1/2$, то $z=25/16$. Таким образом,

$$S_x=2\pi\int_1^{25/16}\sqrt{z}\,\frac{dz}{36}=\frac{\pi}{18}\int_1^{25/16} z^{1/2}\,dz=$$

$$=\frac{\pi}{18}\cdot\frac{2}{3}z^{3/2}\Big|_1^{25/16}=\frac{\pi}{27}\left(\frac{25}{16}\cdot\frac{5}{4}-1\right)=\frac{61\pi}{1728}\ (\text{кв. ед.})$$

2) Дифференцируем по t параметрические уравнения циклоиды: $x'(t)=a(1-\cos t)$, $y'(t)=a\sin t$. Подставляя полученные выражения $x'(t)$ и $y'(t)$ в формулу (2) и учитывая, что параметр t изменяется от 0 до 2π, находим

$$S_x=2\pi a^2\int_0^{2\pi}(1-\cos t)\sqrt{(1-\cos t)^2+\sin^2 t}\,dt=$$

$$=2\pi a^2\int_0^{2\pi}(1-\cos t)\sqrt{1-2\cos t+\cos^2 t+\sin^2 t}\,dt=$$

$$=2\pi a^2\int_0^{2\pi}(1-\cos t)\sqrt{2-2\cos t}\,dt=2\pi a^2\int_0^{2\pi}(1-\cos t)\,2\sin\frac{t}{2}\,dt=$$

$$=8\pi a^2\int_0^{2\pi}\sin^3\frac{t}{2}\,dt=-16\pi a^2\int_0^{2\pi}\left(1-\cos^2\frac{t}{2}\right)d\left(\cos\frac{t}{2}\right)=$$

$$=16\pi a^2\left[\frac{1}{3}\cos^3\frac{t}{2}-\cos\frac{t}{2}\right]_0^{2\pi}=16\pi a^2\left(-\frac{1}{3}+1-\frac{1}{3}+1\right)=\frac{64\pi a^2}{3}\text{ (кв. ед.)}$$

В задачах **12.132**—**12.139** вычислить площади поверхностей, образованных вращением вокруг оси Ox дуг кривых:

12.132. Параболы $y^2=4ax$ от $x=0$ до $x=8$.

12.133. Прямой $y=3x$ от $x=1$ до $x=3$.

12.134. Одной полуволны косинусоиды $y=\cos x$.

12.135. Окружности $x=a\cos t$, $x=a\sin t$.

12.136. Астроиды $x=a\cos^3 t$, $y=a\sin^3 t$.

12.137. Цепной линии $y=e^{x/2}+e^{-x/2}$ от $x=0$ до $x=2$.

12.138. Параболы $y^2=3+x$, отсеченной прямой $x=3$.

12.139. Полукубической параболы $x=t^3/3$, $y=4-t^2/2$ между точками пересечения с осями координат.

§ 7. ПРИЛОЖЕНИЯ ОПРЕДЕЛЕННОГО ИНТЕГРАЛА К РЕШЕНИЮ ФИЗИЧЕСКИХ ЗАДАЧ

Пусть требуется найти значение какой-нибудь физической величины Q, соответствующее изменению переменной x от a до b. Эта величина предполагается аддитивной, т. е. такой, что при разбиении отрезка $[a, b]$ точкой c на части $[a, c]$ и $[c, b]$ значение величины Q, соответствующее отрезку $[a, b]$, равно сумме ее значений, соответствующих отрезкам $[a, c]$ и $[c, b]$.

Рассмотрим элементарный промежуток $[x, x+\Delta x]$ отрезка $[a, b]$. Ему отвечает элемент ΔQ величины Q. Исходя из условий задачи, находим для ΔQ приближенное выражение вида $q(x)\Delta x$, линейное относительно Δx, так, чтобы оно отличалось от ΔQ на бесконечно малую величину порядка, высшего чем Δx. Иными словами, из бесконечно малого элемента ΔQ выделяем его главную часть и получаем выражение для дифференциала величины Q:

$$dQ=q(x)\,dx.$$

Тогда

$$Q=\int_a^b q(x)\,dx.$$

12.140. Материальная точка под действием силы F перемещается вдоль оси Ox. Вычислить работу, произведенную этой силой на отрезке от $x=a$ до $x=b$.

Решение. Работа A, произведенная силой F в процессе движения, находится в функциональной зависимости от пройденного пути s: $A=A(s)$. Если точка проходит бесконечно малый интервал пути ds, то сила на протяжении этого пути остается практически постоянной. Тогда работа на участке ds выразится формулой $dA=F(s)\,ds$. Интегрируя, получим

$$A=\int_a^b F(s)\,ds.$$

12.141. Скорость точки равна $v=(3t^2-2t)$ м/с. Найти путь s, который преодолела точка за время $t=4$ с, прошедшее с начала движения.

Решение. Найдем путь ds, пройденный точкой за бесконечно малый промежуток времени dt. Так как в течение этого времени скорость можно считать постоянной, то $ds=v(t)\,dt$. Интегрируя, имеем

$$s=\int_0^4 v(t)\,dt=\int_0^4 (3t^2-2t)\,dt=\left[t^3-t^2\right]_0^4=64-16=48\ (\text{м}).$$

12.142. Найти силу давления жидкости на вертикальную треугольную пластинку с основанием a и высотой h, погруженную в жидкость так, что вершина пластинки лежит на поверхности.

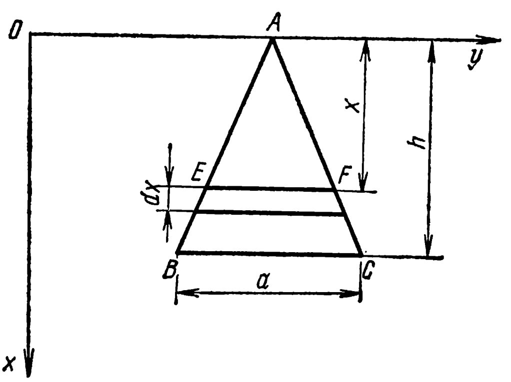


Рис. 74.

Решение. Расположим систему координат так, как показано на рис. 74. Рассмотрим горизонтальную бесконечно малую полоску толщины dx, находящуюся на произвольной глубине x. Принимая эту полоску за прямоугольник, найдем ее основание EF. Из подобия треугольников ABC и AEF получаем $a/|EF|=h/x$. Отсюда $|EF|=ax/h$. Тогда площадь полоски равна

$$dS=\frac{ax}{h}\,dx.$$

Так как сила P давления жидкости на площадку S, глубина погружения которой r, по закону Паскаля равна $P=\rho grS$ (где ρ — плотность жидкости, а g — ускорение силы тяжести), то искомая сила давления на рассматриваемую площадку dS вычисляется по формуле

$$dP=\rho gx\cdot\frac{ax}{h}\,dx=\rho g\cdot\frac{ax^2}{h}\,dx.$$

Следовательно, сила давления жидкости на площадку ABC есть

$$P=\int_0^h \rho g\cdot\frac{ax^2}{h}\,dx=\rho g\frac{a}{h}\cdot\frac{x^3}{3}\Big|_0^h=\frac{1}{3}\rho gah^2.$$

12.143. Скорость точки меняется по закону $v=\sqrt{5t+4}$ м/с. Найти путь, пройденный точкой за первые девять секунд после начала движения.

12.144. Автомобиль, двигающийся со скоростью 48 км/ч, начинает тормозить и останавливается через 3 с. Найти путь, пройденный автомобилем до полной остановки.

Указание: скорость равнозамедленного движения выражается формулой $v=v_0-at$, где v_0 — начальная скорость, a — ускорение, t — время. Ускорение движения a находится из условия $v=0$ при $t=3$ с.

12.145. Реактивный самолет в течение 20 с увеличил свою скорость от 360 до 720 км/ч. Считая его движение равноускоренным, найти, с каким ускорением летел самолет и какое расстояние пролетел он за это время.

12.146. С высоты 294 м вертикально вниз брошено тело с начальной скоростью 19,6 м/с. Через сколько секунд тело упадет на землю? (Ускорение силы тяжести принять равным 9,8 м/с^2.)

12.147. Найти работу, производимую при растяжении пружины на 5 см, если известно, что сила, которая требуется для растяжения пружины, пропорциональна ее удлинению и что для удлинения пружины на 1 см требуется сила 1 Н.

12.148. Какую работу нужно затратить, чтобы выкачать воду из цилиндрического резервуара, радиус основания которого равен 3 м, а высота равна 5 м?

12.149. Найти работу, необходимую для выкачивания воды из конической воронки, обращенной вершиной вниз, если высота ее равна H, а радиус основания r. Как изменится результат, если воронка будет обращена вершиной вверх?

12.150. Вычислить работу, которую надо затратить, чтобы выкачать воду из котла, имеющего форму полушара с радиусом, равным 1 м.

12.151. Найти работу, необходимую для выкачивания воды из котла, имеющего форму полуцилиндра с радиусом основания r и высотой H.

12.152. Найти силу давления воды на прямоугольные ворота шлюза, ширина которых 25 м, а глубина 18 м, если их верхняя грань лежит на свободной поверхности воды. Определить также силу давления на нижнюю половину ворот шлюза.

12.153. Вычислить силу давления жидкости на вертикальный треугольный щит с основанием a и высотой h, погруженный в жидкость так, что основание щита лежит на ее свободной поверхности.

12.154. Найти силу давления на плоскость полукруга с радиусом 6 см, погруженного в воду вертикально, если его диаметр лежит на свободной поверхности воды.

12.155. Вертикальная плотина имеет форму трапеции, верхнее и нижнее основания которой соответственно равны 80 и 50 м, а высота 20 м. Вычислить силу давления на всю плотину.

12.156. Определить массу стержня длины 50 см, если его линейная плотность меняется по закону $\rho = 10x + 0{,}24x^2$ (г/см), где x — расстояние от одного из концов стержня.

12.157. Цилиндр с высотой 80 см и радиусом основания 12 см наполнен газом под давлением 1 кПа. Какую работу надо затратить при изотермическом сжатии газа до объема, в два раза меньшего?

Указание: при изотермическом процессе (температура газа остается неизменной) зависимость между объемом V и давлением p газа выражается формулой $pV = c = \mathrm{const}$ (*закон Бойля — Мариотта*).

12.158. Определить работу, производимую при адиабатическом расширении воздуха, имеющего начальный объем 1 м^3 и давление 1 кПа, до объема 10 м^3.

Указание: при адиабатическом процессе (без притока и отдачи тепла) зависимость между объемом V и давлением p газа выражается формулой $pV^k = c = \mathrm{const}$ (*закон Пуассона*), где k — постоянная для данного газа величина, большая единицы. Для воздуха $k \approx 1{,}4$.

§ 8. НЕСОБСТВЕННЫЕ ИНТЕГРАЛЫ

Интегралы с бесконечными пределами и интегралы от разрывных функций называются *несобственными*.

1. Интегралы с бесконечными пределами. Пусть функция $f(x)$ определена и непрерывна при всех значениях x таких, что $a \leqslant x < +\infty$. Тогда *несобственный интеграл с бесконечным верхним пределом* определяется следующим образом:

$$\int_a^{+\infty} f(x)\,dx = \lim_{b \to +\infty} \int_a^b f(x)\,dx. \tag{1}$$

Если этот предел существует и конечен, то несобственный интеграл называется *сходящимся*, если же предел бесконечен или не существует,— *расходящимся*.

Аналогичным образом определяются *несобственный интеграл с бесконечным нижним пределом*:

$$\int_{-\infty}^{b} f(x)\,dx = \lim_{a \to -\infty} \int_a^b f(x)\,dx \tag{2}$$

и *несобственный интеграл с двумя бесконечными пределами*:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx = \lim_{a \to -\infty} \int_a^c f(x)\,dx + \lim_{b \to +\infty} \int_c^b f(x)\,dx, \tag{3}$$

где c — произвольное действительное число.

2. Интегралы от разрывных функций. Пусть функция $f(x)$ непрерывна для всех значений x на отрезке $a \leqslant x \leqslant b$, кроме точки c, в которой $f(x)$ имеет бесконечный разрыв. Тогда *несобственный интеграл от разрывной функции* определяется так:

$$\int_a^b f(x)\,dx=\lim_{\varepsilon\to+0}\int_a^{c-\varepsilon} f(x)\,dx+\lim_{\eta\to+0}\int_{c+\eta}^{b} f(x)\,dx, \tag{4}$$

где ε и η изменяются независимо друг от друга.

Если оба предела в правой части равенства (4) существуют, то несобственный интеграл называется *сходящимся*; в противном случае (т. е. если не существует хотя бы один из указанных пределов) — *расходящимся*.

3. Сходимость несобственных интегралов. Для установления сходимости или расходимости несобственных интегралов с бесконечным верхним пределом часто используется следующий **признак сравнения**.

Пусть при $x\geqslant a$ справедливо неравенство $f(x)\leqslant\varphi(x)$, где $f(x)$ и $\varphi(x)$ — непрерывные знакоположительные функции. Тогда:

1) *если сходится* $\int\limits_a^{+\infty}\varphi(x)\,dx$, *то сходится и* $\int\limits_a^{+\infty}f(x)\,dx$;

2) *если расходится* $\int\limits_a^{+\infty}f(x)\,dx$, *то расходится и* $\int\limits_a^{+\infty}\varphi(x)\,dx$.

Аналогичный признак сравнения имеет место и для несобственных интегралов от разрывных функций.

Пусть на $[a, b[$ даны непрерывные функции $f(x)$ и $\varphi(x)$, претерпевающие бесконечный разрыв в точке $x=b$, причем при $a\leqslant x<b$ выполняется неравенство $\varphi(x)\geqslant f(x)\geqslant 0$. Тогда:

1) *если сходится* $\int\limits_a^{b}\varphi(x)\,dx$, *то сходится и* $\int\limits_a^{b}f(x)\,dx$;

2) *если расходится* $\int\limits_a^{b}f(x)\,dx$, *то расходится и* $\int\limits_a^{b}\varphi(x)\,dx$.

12.159. Найти следующие несобственные интегралы:

$$1)\ \int_1^{+\infty}\frac{dx}{x^3};\quad 2)\ \int_{-\infty}^{0}e^x\,dx;\quad 3)\ \int_{-\infty}^{+\infty}\frac{dx}{x^2+1};$$

$$4)\ \int_0^4\frac{dx}{x\sqrt{x}};\quad 5)\ \int_0^9\frac{dx}{\sqrt[3]{(x-1)^2}}.$$

Решение. 1) Пользуясь определением (1), имеем

$$\int_1^{+\infty}\frac{dx}{x^3}=\lim_{b\to+\infty}\int_1^b\frac{dx}{x^3}=\lim_{b\to+\infty}\left[-\frac{1}{2x^2}\right]_1^b=\lim_{b\to+\infty}\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{2b^2}\right)=\frac{1}{2}.$$

Следовательно, данный несобственный интеграл сходится.

2) По формуле (2) находим

$$\int_{-\infty}^{0}e^x\,dx=\lim_{a\to-\infty}\int_a^0 e^x\,dx=\lim_{a\to-\infty}\left[e^x\right]_a^0=\lim_{a\to-\infty}(1-e^a)=1,$$

т. е. данный интеграл сходится.

3) На основании равенства (3) получаем

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{x^2+1} = \lim_{a\to-\infty} \int_a^0 \frac{dx}{x^2+1} + \lim_{b\to+\infty} \int_0^b \frac{dx}{x^2+1} =$$

$$= \lim_{a\to-\infty} [\operatorname{arctg} x]_a^0 + \lim_{b\to+\infty} [\operatorname{arctg} x]_0^b =$$

$$= -\operatorname{arctg}(-\infty) + \operatorname{arctg}(+\infty) = -(-\pi/2) + \pi/2 = \pi.$$

4) Здесь подынтегральная функция $f(x) = 1/(x\sqrt{x})$ имеет бесконечный разрыв в точке $x=0$, принадлежащей левому концу отрезка интегрирования. По формуле (4) имеем

$$\int_0^4 \frac{dx}{x\sqrt{x}} = \lim_{\varepsilon\to+0} \int_\varepsilon^4 \frac{dx}{x\sqrt{x}} = \lim_{\varepsilon\to+0} \left[-\frac{2}{\sqrt{x}}\right]_\varepsilon^4 = \lim_{\varepsilon\to+0} \left(-1+\frac{2}{\sqrt{\varepsilon}}\right) = +\infty,$$

т. е. этот несобственный интеграл является расходящимся.

5) В данном случае подынтегральная функция $f(x) = 1/\sqrt[3]{(x-1)^2}$ претерпевает разрыв в точке $x=1$, лежащей внутри отрезка интегрирования. Используя определение (4), находим

$$\int_0^9 \frac{dx}{\sqrt[3]{(x-1)^2}} = \lim_{\varepsilon\to+0} \int_0^{1-\varepsilon} \frac{dx}{\sqrt[3]{(x-1)^2}} + \lim_{\eta\to+0} \int_{1+\eta}^9 \frac{dx}{\sqrt[3]{(x-1)^2}} =$$

$$= \lim_{\varepsilon\to+0} \left[3\sqrt[3]{(x-1)}\right]_0^{1-\varepsilon} + \lim_{\eta\to+0} \left[3\sqrt[3]{(x-1)}\right]_{1+\eta}^9 =$$

$$= 3\lim_{\varepsilon\to+0} \left(\sqrt[3]{-\varepsilon} - \sqrt[3]{-1}\right) + 3\lim_{\eta\to+0} \left(\sqrt[3]{8} - \sqrt[3]{\eta}\right) = 9,$$

т. е. несобственный интеграл сходится *.

В задачах **12.160—12.175** вычислить несобственные интегралы (или установить их расходимость):

12.160. $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^5}$. **12.161.** $\int_0^{+\infty} xe^{-x^2}\,dx$. **12.162.** $\int_{-\infty}^0 \frac{dx}{x^2+9}$.

12.163. $\int_{-\infty}^{+\infty} \sin x\,dx$. **12.164.** $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{x^2+2x+2}$. **12.165.** $\int_{-\infty}^0 xe^x\,dx$.

12.166. $\int_0^{16} \frac{dx}{\sqrt[4]{x^3}}$. **12.167.** $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{\sqrt[4]{x^3}}$. **12.168.** $\int_0^3 \frac{dx}{(x-2)^4}$.

12.169. $\int_0^1 \ln x\,dx$. **12.170.** $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^3+x}$. **12.171.** $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^3+x^2}$.

---

* Если первообразная подынтегральной функции непрерывна на отрезке интегрирования, то несобственный интеграл можно вычислять непосредственно по формуле Ньютона — Лейбница. В данном случае имеем

$$\int_0^9 \frac{dx}{\sqrt[3]{(x-1)^2}} = \left[3\sqrt[3]{x-1}\right]_0^9 = 3(2+1) = 9.$$

12.172. $\int\limits_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x-x^2}}$. **12.173.** $\int\limits_{-3}^{-1} \frac{dx}{\sqrt[3]{(x+2)^2}}$.

12.174. $\int\limits_2^{+\infty} \frac{dx}{x\ln x}$. **12.175.** $\int\limits_0^{1/3} \frac{dx}{x\ln^2 x}$.

12.176. Исследовать сходимость интегралов:

$$1)\ \int\limits_a^{+\infty} \frac{dx}{x^m};\quad 2)\ \int\limits_a^b \frac{dx}{(b-x)^m}\ (a<b).$$

Решение. По определению (1) при $m \neq 1$ имеем

$$\int\limits_a^{+\infty} \frac{dx}{x^m} = \lim_{b\to+\infty} \int\limits_a^b x^{-m}\,dx = \lim_{b\to+\infty} \left[\frac{1}{1-m}x^{1-m}\right]_a^b = \frac{1}{1-m}\lim_{b\to+\infty} b^{1-m} - \frac{1}{1-m}a^{1-m}.$$

Пусть $m>1$; тогда $\lim\limits_{b\to+\infty} b^{1-m}=0$, т. е. при $m>1$ интеграл сходится. В том случае, когда $m<1$, имеем $\lim\limits_{b\to+\infty} b^{1-m}=\infty$, т. е. при $m<1$ интеграл расходится. Наконец, при $m=1$ получим

$$\int\limits_a^{+\infty} \frac{dx}{x} = \lim_{b\to+\infty} \int\limits_a^b \frac{dx}{x} = \lim_{b\to+\infty} [\ln|x|]_a^b = \lim_{b\to+\infty} (\ln b - \ln a) = \infty,$$

т. е. и в этом случае интеграл расходится.

Итак, *интеграл* $\int\limits_a^{+\infty} \frac{dx}{x^m}$ *сходится при* $m>1$ *и расходится при* $m \leqslant 1$.

2) Используя определение (4), при $m \neq 1$ получим

$$\int\limits_a^b \frac{dx}{(b-x)^m} = \lim_{\varepsilon\to+0} \int\limits_a^{b-\varepsilon} \frac{dx}{(b-x)^m} = -\frac{1}{1-m}\lim_{\varepsilon\to+0} (b-x)^{1-m}\Big|_a^{b-\varepsilon} =$$

$$= \frac{1}{m-1}\lim_{\varepsilon\to+0} \varepsilon^{1-m} + \frac{1}{1-m}(b-a)^{1-m}.$$

Пусть $m<1$; тогда $\lim\limits_{\varepsilon\to+0} \varepsilon^{1-m}=0$, т. е. при $m<1$ интеграл сходится. В том случае, когда $m>1$, получим $\lim\limits_{\varepsilon\to+0} \varepsilon^{1-m}=\infty$ и, значит, интеграл расходится. Наконец, при $m=1$ имеем

$$\lim_{\varepsilon\to+0} \int\limits_a^{b-\varepsilon} \frac{dx}{b-x} = -\lim_{\varepsilon\to+0} [\ln|b-x|]_0^{b-\varepsilon} = \infty,$$

т. е. и в этом случае интеграл является расходящимся.

Таким образом, *интеграл* $\int\limits_a^b \frac{dx}{(b-x)^m}$ *сходится при* $m<1$ *и расходится при* $m \geqslant 1$.

12.177. Пользуясь признаком сравнения, исследовать на сходимость интегралы:

$$1) \int_0^{+\infty} \frac{dx}{x^3+4}; \quad 2) \int_0^1 \frac{e^x\,dx}{(1-x)^2}.$$

Решение. 1) Здесь при $x \geqslant 0$ выполняется неравенство $\frac{1}{x^3+4} \leqslant \frac{1}{x^3}$, а интеграл $\int_0^{+\infty} \frac{dx}{x^3}$ является сходящимся (см. задачу **12.176**). Следовательно, данный интеграл также сходится.

2) В этом случае подынтегральная функция имеет бесконечный разрыв в точке $x=1$. Так как при $0 \leqslant x < 1$ выполняется неравенство $\frac{e^x}{(1-x)^2} > \frac{1}{(1-x)^2}$, а $\int_0^1 \frac{dx}{(1-x)^2}$ расходится (см. задачу **12.176**), то расходится и данный интеграл.

В задачах **12.178—12.185**, пользуясь признаком сравнения, исследовать на сходимость следующие несобственные интегралы.

12.178. $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^2+\sqrt[4]{x}}$. **12.179.** $\int_1^{+\infty} \frac{x+1}{\sqrt{x^3}}\,dx$. **12.180.** $\int_0^5 \frac{dx}{\sqrt{x}+6x^4}$.

12.181. $\int_1^3 \frac{2^x\,dx}{(x-3)^4}$. **12.182.** $\int_3^{+\infty} \frac{dx}{\sqrt{x-2}}$. **12.183.** $\int_e^{+\infty} \frac{\ln x}{\sqrt[3]{x^2}}\,dx$.

12.184. $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^2e^x}$. **12.185.** $\int_0^2 \frac{dx}{\sqrt[3]{x}\,(2\sqrt{x}+5)}$. **12.186.** $\int_2^4 \frac{3+\cos x}{(x-2)^2}\,dx$.

12.187. $\int_{\pi/2}^{+\infty} \frac{4+\sin x}{x^2}\,dx$.

12.188. Определить площадь, заключенную между кривой $y=e^{-x/4}$ и осями координат (при $x \geqslant 0$).

12.189. Найти объем тела, образованного вращением кривой $y=xe^{-x/2}$ (при $x \geqslant 0$) вокруг ее асимптоты.

12.190. Найти длину дуги логарифмической спирали $\rho=e^{\varphi}$ от ее полюса до точки с координатами $\rho=1$, $\varphi=0$.

ГЛАВА 13

ЧИСЛОВЫЕ И ФУНКЦИОНАЛЬНЫЕ РЯДЫ

§ 1. ЧИСЛОВЫЕ РЯДЫ. ОСНОВНЫЕ ПОНЯТИЯ

Числовым рядом называется выражение вида

$$a_1+a_2+a_3+\ldots+a_n+\ldots=\sum_{n=1}^{\infty} a_n,$$

где числа $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n$, называемые *членами ряда*, образуют бесконечную последовательность.

Ряд называется *сходящимся*, если последовательность его частичных сумм

$$\begin{aligned}
&S_1=a_1,\\
&S_2=a_1+a_2,\\
&S_3=a_1+a_2+a_3,\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
&S_n=a_1+a_2+a_3+\ldots+a_n
\end{aligned}$$

при $n\longrightarrow\infty$ имеет конечный предел: $\lim\limits_{n\to\infty} S_n=S$. Этот предел называется *суммой* сходящегося ряда. Если $\lim\limits_{n\to\infty} S_n$ не существует или бесконечен, то ряд называется *расходящимся*.

13.1. Написать пять первых членов ряда, n-й член a_n которого имеет вид:

1) $\frac{1}{n!}$; 2) $\frac{(-1)^{n+1}}{2n-1}$; 3) $\frac{n}{(3n-1)(3n+1)}$;

4) $\frac{(-1)^{n-1}}{\sqrt[3]{n}}$; 5) $\frac{n!}{n^n}$; 6) $\frac{1+(-1)^{n+1}}{n^2}$.

13.2. Написать n-й член ряда по данным первым его членам:

1) $1+\frac{1}{4}+\frac{1}{9}+\frac{1}{16}+\ldots$; 2) $\frac{1}{2}-\frac{2}{3}+\frac{3}{4}-\frac{4}{5}+\ldots$;

3) $1+\frac{2}{2}+\frac{3}{4}+\frac{4}{8}+\ldots$; 4) $1-1+1-1+\ldots$;

5) $1-\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^3}-\frac{1}{4^4}+\ldots$; 6) $\frac{\sqrt{2}}{1\cdot2}-\frac{\sqrt{3}}{1\cdot2\cdot3}+\frac{\sqrt{4}}{1\cdot2\cdot3\cdot4}-\ldots$.

13.3. Найти сумму ряда

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(n+1)}=\frac{1}{1\cdot2}+\frac{1}{2\cdot3}+\frac{1}{3\cdot4}+\ldots+\frac{1}{n(n+1)}+\ldots.$$

Решение. По определению частичной суммы ряда имеем

$$\begin{aligned}
&S_1=a_1=\frac{1}{2},\\
&S_2=a_1+a_2=\frac{1}{2}+\frac{1}{6}=\frac{2}{3},\\
&S_3=a_1+a_2+a_3=\frac{2}{3}+\frac{1}{12}=\frac{3}{4},\\
&S_4=a_1+a_2+a_3+a_4=\frac{3}{4}+\frac{1}{10}=\frac{4}{5},\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots
\end{aligned}$$

Таким образом, получаем следующую последовательность частичных сумм:

$$\frac{1}{2},\ \frac{2}{3},\ \frac{3}{4},\ \frac{4}{5},\ \ldots,$$

общий член которой равен* $\frac{n}{n+1}$. Ясно, что эта последовательность сходится и ее предел равен единице:

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty} \frac{n}{n+1} = 1.$$

Это означает, что данный ряд сходится и сумма его равна единице.

В задачах **13.4—13.7** для каждого ряда записать последовательность его частичных сумм; затем, пользуясь непосредственно определением, доказать сходимость ряда и найти его сумму.

13.4. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{4n^2-1} = \frac{1}{3} + \frac{1}{15} + \frac{1}{35} + \ldots + \frac{1}{4n^2-1} + \ldots.$

13.5. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+3)} = \frac{1}{1\cdot 4} + \frac{1}{2\cdot 5} + \frac{1}{3\cdot 6} + \ldots + \frac{1}{n(n+3)} + \ldots.$

13.6. $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^n} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \ldots + \frac{1}{2^n} + \ldots.$

Указание: здесь n-я частичная сумма ряда есть сумма n первых членов бесконечно убывающей геометрической прогрессии, первый член которой $u_1 = 1$, а знаменатель $q = 1/2$.

13.7. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{2^n+3^n}{6^n} = \frac{5}{6} + \frac{13}{36} + \frac{35}{216} + \ldots + \frac{2^n+3^n}{6^n} + \ldots.$

§ 2. НЕОБХОДИМЫЙ ПРИЗНАК СХОДИМОСТИ РЯДА. ДОСТАТОЧНЫЕ ПРИЗНАКИ СХОДИМОСТИ РЯДОВ С ПОЛОЖИТЕЛЬНЫМИ ЧЛЕНАМИ

Ряд может сходиться только при условии, что его общий член a_n при неограниченном увеличении номера n стремится к нулю: $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$ — это необходимый признак сходимости ряда.

Если же $\lim\limits_{n\to\infty} a_n \neq 0$, то ряд расходится — это достаточный признак расходимости ряда.

Для знакоположительных числовых рядов имеют место следующие достаточные признаки, по которым можно установить их сходимость или расходимость.

---

* Действительно, представив общий член в виде $a_n = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}$, получим

$$S_n = \left(1 - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4}\right) + \ldots$$
$$\ldots + \left(\frac{1}{n-1} - \frac{1}{n}\right) + \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right) = 1 - \frac{1}{n+1} = \frac{n}{n+1}.$$

1. **Признак сравнения.** *Если члены знакоположительного ряда*

$$a_1+a_2+\ldots+a_n+\ldots, \tag{1}$$

начиная с некоторого номера, не превосходят соответствующих членов ряда

$$b_1+b_2+\ldots+b_n \ldots, \tag{2}$$

то из сходимости ряда (2) *следует сходимость ряда* (1), *а из расходимости ряда* (1) *следует расходимость ряда* (2).

При исследовании рядов на сходимость и расходимость по этому признаку часто используются *геометрическая прогрессия*

$$a+aq+aq^2+\ldots+aq^n+\ldots \quad (a>0),$$

которая сходится при $|q|<1$ и расходится при $|q|\geqslant 1$, и *гармонический ряд*

$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\ldots+\frac{1}{n}+\ldots,$$

являющийся расходящимся рядом.

2. **Признак Даламбера.** *Если для ряда* (1) *существует предел*

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=l,$$

то при $l<1$ *ряд сходится, при* $l>1$*—расходится* (при $l=1$ вопрос о сходимости ряда остается нерешенным).

3. **Радикальный признак Коши.** *Если для ряда* (1) *существует предел*

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n}=q,$$

то при $q<1$ *ряд сходится, при* $q>1$*—расходится* (при $q=1$ вопрос о сходимости ряда остается открытым).

4. **Интегральный признак Коши.** *Пусть* $f(x)$*—непрерывная, положительная и монотонно убывающая функция, определенная при* $x\geqslant 1$. *Тогда ряд* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f(n)$ *сходится или расходится в зависимости от того, сходится или расходится несобственный интеграл* $\int\limits_1^{\infty} f(x)\,dx$.

Пользуясь интегральным признаком Коши, легко показать, что *общегармонический ряд*

$$1+\frac{1}{2^p}+\frac{1}{3^p}+\ldots+\frac{1}{n^p}+\ldots=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^p}$$

сходится при $p>1$ *и расходится при* $p\leqslant 1$.

13.8. Пользуясь необходимым признаком сходимости, показать, что ряд

$$1+\frac{1}{2}+\frac{2}{3}+\ldots+\frac{n}{n+1}+\ldots$$

расходится.

Решение. Находим

$$\lim_{n\to\infty} a_n=\lim_{n\to\infty}\frac{n}{n+1}=1.$$

Таким образом, предел общего члена ряда при $n\longrightarrow\infty$ отличен от нуля, т. е. необходимый признак сходимости не выполняется. Это означает, что данный ряд расходится.

В задачах **13.9—13.14**, пользуясь необходимым признаком сходимости, доказать расходимость следующих рядов.

13.9. $\frac{1}{9}+\frac{4}{13}+\frac{9}{17}+\ldots+\frac{n^2}{4n+5}+\ldots$.

13.10. $\frac{1}{9}+\frac{2}{19}+\frac{3}{29}+\ldots+\frac{n}{10n-1}+\ldots$.

13.11. $\frac{4}{7}+\frac{7}{12}+\frac{10}{17}+\ldots+\frac{3n+1}{5n+2}+\ldots$.

13.12. $1-1+1-1+\ldots+(-1)^{n-1}+\ldots$.

13.13. $2+\frac{2^2}{2}+\frac{2^3}{3}+\ldots+\frac{2^n}{n}+\ldots$.

13.14. $\frac{1}{2}+\frac{2!}{2^2}+\frac{3!}{2^3}+\ldots+\frac{n!}{2^n}+\ldots$.

13.15. С помощью признака сравнения исследовать на сходимость ряды:

$$1)\ \frac{1}{5\cdot 2}+\frac{1}{5\cdot 2^2}+\frac{1}{5\cdot 2^3}+\ldots+\frac{1}{5\cdot 2^n}+\ldots;$$

$$2)\ 1+\frac{1}{\sqrt[3]{2}}+\frac{1}{\sqrt[3]{3}}+\ldots+\frac{1}{\sqrt[3]{n}}+\ldots .$$

Решение. 1) Сравним данный ряд с рядом

$$\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{2^3}+\ldots+\frac{1}{2^n}+\ldots . \qquad (*)$$

Ряд (*) сходится, так как его члены образуют бесконечно убывающую геометрическую прогрессию со знаменателем $q=1/2$. При этом каждый член $a_n = 1/(5\cdot 2^n)$ исследуемого ряда меньше соответствующего члена $b_n=1/2^n$ ряда (*). Поэтому, согласно признаку сравнения, данный ряд сходится.

2) Сравним данный ряд с гармоническим рядом

$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\ldots+\frac{1}{n}+\ldots . \qquad (**)$$

Каждый член $a_n=1/\sqrt[3]{n}$ исследуемого ряда, начиная со второго, больше соответствующего члена $b_n=1/n$ ряда (**). Так как гармонический ряд расходится, то, согласно признаку сравнения, расходится и данный ряд.

В задачах **13.16—13.24**, пользуясь признаком сравнения, исследовать на сходимость следующие ряды.

13.16. $\frac{1}{4}+\frac{1}{2\cdot 4^2}+\frac{1}{3\cdot 4^3}+\ldots+\frac{1}{n4^n}+\ldots$.

13.17. $\frac{1}{\ln 2}+\frac{1}{\ln 3}+\frac{1}{\ln 4}+\ldots+\frac{1}{\ln n}+\ldots$.

13.18. $\frac{1}{8}+\frac{1}{7^2+1}+\frac{1}{7^3+1}+\ldots+\frac{1}{7^n+1}+\ldots$.

13.19. $\frac{1}{2}+\frac{1}{5}+\frac{1}{8}+\ldots+\frac{1}{3n-1}+\ldots$.

13.20. $\frac{1}{\sqrt[4]{3}}+\frac{1}{\sqrt[4]{4}}+\frac{1}{\sqrt[4]{5}}+\ldots+\frac{1}{\sqrt[4]{n+2}}+\ldots$.

13.21. $1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\ldots+\frac{1}{n^2}+\ldots$.

Указание: сравнить с рядом $\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 4}+\ldots+\frac{1}{n(n+1)}+\ldots$ (см. задачу 13.3).

13.22. $\frac{1}{2^2}+\frac{1}{5^2}+\frac{1}{8^2}+\ldots+\frac{1}{(3n-1)^2}+\ldots$.

13.23. $\frac{1}{\sqrt{2}-1}+\frac{1}{\sqrt{3}-1}+1+\ldots+\frac{1}{\sqrt{n}-1}+\ldots$.

13.24. С помощью признака Даламбера исследовать на сходимость ряды:

$$1)\ \frac{1}{3}+\frac{2}{3^2}+\frac{3}{3^3}+\ldots+\frac{n}{3^n}+\ldots;$$

$$2)\ \frac{1}{10}+\frac{1\cdot 2}{10^2}+\frac{1\cdot 2\cdot 3}{10^3}+\ldots+\frac{n!}{10^n}+\ldots.$$

Решение. 1) Для того чтобы воспользоваться признаком Даламбера, надо знать $(n+1)$-й член ряда. Он получается путем подстановки в выражение общего члена ряда $a_n=n/3^n$ вместо n числа $n+1$: $a_{n+1}=(n+1)/3^{n+1}$. Теперь найдем предел отношения $(n+1)$-го члена к n-му члену при $n\to\infty$:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n+1}{3^{n+1}}:\frac{n}{3^n}\right)=\lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)3^n}{n3^{n+1}}=\lim_{n\to\infty}\frac{n+1}{3n}=\frac{1}{3}.$$

Так как $l=1/3<1$, то данный ряд сходится.

2) Зная $a_n=n!/10^n$, найдем $(n+1)$-й член ряда: $a_{n+1}=(n+1)!/10^{n+1}$. Вычислим

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=\lim_{n\to\infty}\left[\frac{(n+1)!}{10^{n+1}}:\frac{n!}{10^n}\right]=\lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)!\,10^n}{n!\,10^{n+1}}=\lim_{n\to\infty}\frac{n+1}{10}=\infty.$$

Так как $l=\infty>1$, то ряд расходится.

В задачах **13.25—13.33**, пользуясь признаком Даламбера, исследовать на сходимость следующие ряды.

13.25. $1+\frac{3}{1}+\frac{3^2}{1\cdot 2}+\ldots+\frac{3^n}{n!}+\ldots$.

13.26. $\frac{1}{3!}+\frac{1}{5!}+\frac{1}{7!}+\ldots+\frac{1}{(2n+1)!}+\ldots$.

13.27. $\frac{1}{\sqrt{3}}+\frac{3}{(\sqrt{3})^2}+\frac{5}{(\sqrt{3})^3}+\ldots+\frac{2n-1}{(\sqrt{3})^n}+\ldots$.

13.28. $\frac{1}{e}+\frac{8}{e^2}+\frac{27}{e^3}+\ldots+\frac{n^3}{e^n}+\ldots$.

13.29. $\frac{2}{5}+\frac{2^2\cdot 2^2}{5^2}+\frac{2^3\cdot 3^2}{5^3}+\ldots+\frac{2^n n^2}{5^n}+\ldots$.

13.30. $\frac{1}{2}+\frac{1\cdot 3}{2\cdot 5}+\frac{1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 5\cdot 8}+\ldots+\frac{1\cdot 3\cdot 5\ldots(2n+1)}{2\cdot 5\cdot 8\ldots(3n+2)}+\ldots$.

Указание: здесь $a_{n+1}=\frac{1\cdot 3\cdot 5\ldots(2n+1)(2n+3)}{2\cdot 5\cdot 8\ldots(3n+2)(3n+5)}$.

13.31. $\frac{2}{2}+\frac{2^2\cdot 1\cdot 2}{2\cdot 3}+\frac{2^3\cdot 1\cdot 2\cdot 3}{2\cdot 3\cdot 4}+\ldots+\frac{2^n n!}{(n+1)!}+\ldots$.

13.32. $1+\frac{1\cdot 2}{2^2}+\frac{1\cdot 2\cdot 3}{3^3}+\ldots+\frac{n!}{n^n}+\ldots$.

13.33. $\frac{2}{1}+\frac{2^2\cdot 1\cdot 2}{2^2}+\frac{2^3\cdot 1\cdot 2\cdot 3}{3^3}+\ldots+\frac{2^n n!}{n^n}+\ldots$.

13.34. С помощью радикального признака Коши исследовать сходимость рядов:

1) $\frac{1}{5}+\left(\frac{2}{9}\right)^2+\left(\frac{3}{13}\right)^3+\ldots+\left(\frac{n}{4n+1}\right)^n+\ldots;$

2) $\frac{1}{2}\cdot 2+\frac{1}{2^2}\left(\frac{3}{2}\right)^4+\frac{1}{2^3}\left(\frac{4}{3}\right)^9+\ldots+\frac{1}{2^n}\left(\frac{n+1}{n}\right)^{n^2}+\ldots.$

Решение. 1) Находим

$$q=\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\left(\frac{n}{4n+1}\right)^n}=\lim_{n\to\infty}\frac{n}{4n+1}=\frac{1}{4}<1.$$

Следовательно, данный ряд является сходящимся.

2) В этом случае имеем

$$q=\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\frac{1}{2^n}\left(\frac{n+1}{n}\right)^{n^2}}=\lim_{n\to\infty}\left[\frac{1}{2}\left(\frac{n+1}{n}\right)^n\right]=$$
$$=\frac{1}{2}\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n=\frac{e}{2}>1.$$

Таким образом, ряд расходится.

В задачах 13.35—13.40, пользуясь радикальным признаком Коши, исследовать на сходимость следующие ряды.

13.35. $\frac{1}{3}+\left(\frac{2}{5}\right)^2+\left(\frac{3}{7}\right)^3+\ldots+\left(\frac{n}{2n+1}\right)^n+\ldots.$

13.36. $\frac{1}{2}+\left(\frac{3}{3}\right)^2+\left(\frac{5}{4}\right)^3+\ldots+\left(\frac{2n-1}{n+1}\right)^n+\ldots.$

13.37. $\frac{1}{2}+\left(\frac{2}{3}\right)^4+\left(\frac{3}{4}\right)^9+\ldots+\left(\frac{n}{n+1}\right)^{n^2}+\ldots.$

13.38. $\frac{3}{8}+\frac{27}{64}+\frac{243}{712}+\ldots+\frac{3^{2n-1}}{8^n}+\ldots.$

13.39. $1+\frac{2}{2^2}+\frac{4}{3^3}+\ldots+\frac{2^{n-1}}{n^n}+\ldots.$

13.40. $\left(\frac{3}{4}\right)^{1/3}+\left(\frac{5}{7}\right)^{2/3}+\frac{7}{10}+\ldots+\left(\frac{2n+1}{3n+1}\right)^{n/3}+\ldots.$

13.41. С помощью интегрального признака Коши исследовать сходимость рядов:

1) $\frac{1}{6}+\frac{2}{9}+\frac{3}{14}+\ldots+\frac{n}{n^2+5}+\ldots;$

2) $\frac{1}{2\ln^2 2}+\frac{1}{3\ln^3 3}+\frac{1}{4\ln^2 4}+\ldots+\frac{1}{(n+1)\ln^2(n+1)}+\ldots.$

Решение. 1) Здесь общий член ряда $a_n=n/(n^2+5)$. Полагая $f(x)=x/(x^2+5)$, применим интегральный признак сходимости:

$$\int_1^{+\infty}\frac{x\,dx}{x^2+5}=\lim_{b\to+\infty}\int_1^b\frac{x\,dx}{x^2+5}=\lim_{b\to+\infty}\left[\frac{1}{2}(x^2+5)\right]_1^b=$$
$$=\frac{1}{2}\lim_{b\to+\infty}[\ln(b^2+5)-\ln 6]=+\infty.$$

Таким образом, данный ряд расходится.

2) В этом случае имеем

$$\int_1^{+\infty} \frac{dx}{(x+1)\ln^2(x+1)} = \lim_{b\to+\infty} \int_1^b \frac{dx}{(x+1)\ln^2(x+1)} =$$

$$= \lim_{b\to+\infty}\left[-\frac{1}{\ln(x+1)}\right]_1^b = -\lim_{b\to+\infty}\left[\frac{1}{\ln(b+1)} - \frac{1}{\ln 2}\right] = \frac{1}{\ln 2}.$$

Следовательно, данный ряд сходится.

В задачах **13.42—13.47**, пользуясь интегральным признаком Коши, исследовать на сходимость следующие ряды.

13.42. $\frac{1}{\sqrt{5}} + \frac{1}{3} + \frac{1}{\sqrt{13}} + \ldots + \frac{1}{\sqrt{4n+1}} + \ldots$.

13.43. $\frac{1}{8} + \frac{1}{24} + \frac{1}{48} + \ldots + \frac{1}{(2n+1)^2-1} + \ldots$.

13.44. $\frac{1}{3} + \frac{1}{9} + \frac{1}{19} + \ldots + \frac{1}{2n^2+1} + \ldots$.

13.45. $\frac{1}{2\ln 2} + \frac{1}{3\ln 3} + \frac{1}{4\ln 4} + \ldots + \frac{1}{n\ln n} + \ldots$.

13.46. $\frac{1}{2} + \frac{1}{9} + \frac{1}{28} + \ldots + \frac{1}{n^3+1} + \ldots$.

13.47. $\frac{\operatorname{arctg} 1}{2} + \frac{\operatorname{arctg} 2}{5} + \frac{\operatorname{arctg} 3}{10} + \ldots + \frac{\operatorname{arctg} n}{1+n^2} + \ldots$.

В задачах **13.48—13.65**, пользуясь известными признаками сходимости, исследовать на сходимость следующие ряды.

13.48. $\frac{9}{10} + \left(\frac{9}{10}\right)^2 2^6 + \left(\frac{9}{10}\right)^3 3^6 + \ldots + \left(\frac{9}{10}\right)^n n^6 + \ldots$.

13.49. $1 + \frac{\sqrt{2}}{3} + \frac{\sqrt{3}}{5} + \ldots + \frac{\sqrt{n}}{2n-1} + \ldots$.

13.50. $\sin 1 + \sin\frac{1}{2^2} + \sin\frac{1}{3^2} + \ldots + \sin\frac{1}{n^2} + \ldots$.

13.51. $\left(\frac{4}{5}\right)^{1/2} + \frac{7}{9} + \left(\frac{10}{13}\right)^{3/2} + \ldots + \left(\frac{3n+1}{4n+1}\right)^{n/2} + \ldots$.

13.52. $\frac{1}{\sqrt{1\cdot 2}} + \frac{1}{\sqrt{2\cdot 3}} + \frac{1}{\sqrt{3\cdot 4}} + \ldots + \frac{1}{\sqrt{n(n+1)}} + \ldots$.

13.53. $\frac{1}{2\sqrt{\ln 2}} + \frac{1}{3\sqrt{\ln 3}} + \frac{1}{4\sqrt{\ln 4}} + \ldots + \frac{1}{n\sqrt{\ln n}} + \ldots$.

13.54. $\frac{1}{2} + \frac{1\cdot 5}{2\cdot 5} + \frac{1\cdot 5\cdot 9}{2\cdot 5\cdot 8} + \ldots + \frac{1\cdot 5\cdot 9\ldots(4n-3)}{2\cdot 5\cdot 8\ldots(3n-1)} + \ldots$.

13.55. $2^2\left(\frac{1}{2}\right)^4 + 2^3\left(\frac{2}{3}\right)^9 + 2^4\left(\frac{3}{4}\right)^{16} + \ldots + 2^n\left(\frac{n-1}{n}\right)^{n^2} + \ldots$.

13.56. $2 + \frac{2\cdot 2^2}{(2!)^2} + \frac{2\cdot 3^2}{(3!)^2} + \ldots + \frac{2n^2}{(n!)^2} + \ldots$.

13.57. $\frac{1}{2} + \frac{2}{9} + \frac{3}{28} + \ldots + \frac{n}{n^3+1} + \ldots$.

13.58. $e + \frac{\sqrt{e}}{4} + \frac{\sqrt[3]{e}}{9} + \ldots + \frac{e^{1/n}}{n^2} + \ldots$.

13.59. $\frac{2}{3}+\left(\frac{4}{5}\right)^2+\left(\frac{6}{7}\right)^3+\ldots+\left(\frac{2n}{2n+1}\right)^n+\ldots$.

13.60. $\frac{1}{3}+\frac{1\cdot 3}{3^2\cdot 2!}+\frac{1\cdot 3\cdot 5}{3^3\cdot 3!}+\ldots+\frac{1\cdot 3\cdot 5\ldots(2n-1)}{3^n n!}+\ldots$.

13.61. $\frac{\ln 2}{4}+\frac{\ln 3}{9}+\frac{\ln 4}{16}+\ldots+\frac{\ln n}{n^2}+\ldots$.

13.62. $\arcsin 1+\arcsin\frac{1}{2}+\arcsin\frac{1}{3}+\ldots+\arcsin\frac{1}{n}+\ldots$.

13.63. $\frac{3}{1}+\frac{3^2\cdot 1\cdot 2}{2^2}+\frac{3^3\cdot 1\cdot 2\cdot 3}{3^3}+\ldots+\frac{3^n n!}{n^n}+\ldots$.

13.64. $\frac{1}{2}+\frac{1}{6}+\frac{1}{12}+\ldots+\frac{1}{n^2-n}+\ldots$.

13.65. $\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{(1\cdot 2)^2}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4}+\frac{(1\cdot 2\cdot 3)^2}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5\cdot 6}+\ldots+\frac{(n!)^2}{(2n!)}+\ldots$.

§ 3. ЗНАКОЧЕРЕДУЮЩИЕСЯ РЯДЫ. ПРИЗНАК СХОДИМОСТИ ЛЕЙБНИЦА

Знакочередующимся рядом называется ряд вида

$$a_1-a_2+a_3-\ldots+(-1)^{n-1}a_n+\ldots, \qquad (1)$$

где $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n$ — положительные числа.

Для знакочередующихся рядов имеет место следующий признак сходимости.

Признак Лейбница. *Ряд* (1) *сходится, если его члены монотонно убывают по абсолютной величине и общий член стремится к нулю при* $n\to\infty$.

Применение сходящихся рядов к приближенным вычислениям основано на замене суммы ряда суммой нескольких первых его членов. Допускаемая при этом погрешность очень просто оценивается для знакочередующегося ряда, удовлетворяющего признаку Лейбница,— эта *погрешность меньше абсолютного значения первого из отброшенных членов ряда.*

13.66. Пользуясь признаком Лейбница, исследовать на сходимость знакочередующийся ряд

$$1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\ldots+(-1)^{n-1}\frac{1}{n}+\ldots.$$

Решение. Так как члены данного ряда по абсолютной величине монотонно убывают:

$$1>\frac{1}{2}>\frac{1}{3}>\frac{1}{4}>\ldots$$

и общий член при $n\to\infty$ стремится к нулю:

$$\lim_{n\to\infty} a_n=0,$$

то в силу признака Лейбница ряд сходится.

В задачах **13.67—13.73**, пользуясь признаком Лейбница, исследовать на сходимость следующие знакочередующиеся ряды.

13.67. $1-\frac{1}{2}+\frac{1}{5}-\ldots+(-1)^n\frac{1}{n^2+1}+\ldots$.

13.68. $1-\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{3}}-\ldots+(-1)^{n-1}\frac{1}{\sqrt{n}}+\ldots$.

13.69. $\frac{1}{3}-\frac{2}{5}+\frac{3}{7}-\ldots+(-1)^{n-1}\frac{n}{2n+1}+\ldots.$

13.70. $\frac{\ln 2}{2}-\frac{\ln 3}{3}+\frac{\ln 4}{4}-\ldots+(-1)^{n}\frac{\ln n}{n}+\ldots.$

13.71. $1-\frac{2!}{2^2}+\frac{3!}{3^3}-\ldots+(-1)^{n-1}\frac{n!}{n^n}+\ldots.$

13.72. $\sqrt{\frac{1}{101}}-\sqrt{\frac{2}{201}}+\sqrt{\frac{3}{301}}-\ldots$

$$\ldots+(-1)^{n-1}\sqrt{\frac{n}{100n+1}}+\ldots.$$

13.73. $\frac{3}{4}-\left(\frac{5}{7}\right)^2+\left(\frac{7}{10}\right)^3-\ldots+(-1)^{n-1}\left(\frac{2n+1}{3n+1}\right)^n+\ldots.$

13.74. Оценить ошибку, допускаемую при замене суммы ряда

$$1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\ldots+(-1)^{n-1}\frac{1}{n}+\ldots.$$

суммой четырех первых его членов.

Решение. Данный знакочередующийся ряд сходится (см. задачу **13.66**). Ошибка ΔS_4, получающаяся при замене суммы этого ряда суммой четырех первых его членов, меньше абсолютного значения пятого члена: $\Delta S_4 < 0{,}2$.

13.75. Оценить ошибку, допускаемую при замене суммы ряда

$$0{,}1-\frac{0{,}1^2}{2}+\frac{0{,}1^3}{3}-\frac{0{,}1^4}{4}+\ldots$$

суммой трех первых его членов.

13.76. Найти приближенное значение суммы ряда

$$1-\frac{1}{2^4}+\frac{1}{3^4}-\ldots+(-1)^{n-1}\frac{1}{n^4}+\ldots$$

с точностью до 0,01.

13.77. Сколько членов ряда

$$1-\frac{1}{3^2}+\frac{1}{5^2}-\frac{1}{7^2}+\ldots+(-1)^{n-1}\frac{1}{(2n-1)^2}+\ldots$$

нужно взять, чтобы вычислить его сумму с точностью до 0,01?

§ 4. АБСОЛЮТНАЯ И УСЛОВНАЯ СХОДИМОСТЬ ЗНАКОПЕРЕМЕННОГО РЯДА

Ряд

$$a_1+a_2+\ldots+a_n+\ldots \qquad (1)$$

называется *знакопеременным*, если среди его членов имеются как положительные, так и отрицательные числа.

Признак сходимости знакопеременного ряда. *Если ряд*

$$|a_1|+|a_2|+\ldots+|a_n|+\ldots, \qquad (2)$$

составленный из абсолютных величин членов ряда (1), *сходится, то ряд* (1) *также сходится.*

Знакопеременный ряд (1) называется *абсолютно сходящимся*, если сходится ряд (2), составленный из абсолютных величин членов данного ряда (1).

Сходящийся знакопеременный ряд называется *условно сходящимся*, если ряд, составленный из абсолютных величин его членов, расходится.

13.78. Исследовать на абсолютную и условную сходимость следующие ряды:

$$1)\ 1-\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}-\ldots+(-1)^{n-1}\frac{1}{n!}+\ldots;$$

$$2)\ \frac{\sin 1}{1^2}+\frac{\sin 2}{2^2}+\frac{\sin 3}{3^2}+\ldots+\frac{\sin n}{n^2}+\ldots;$$

$$3)\ 1-\frac{1}{\sqrt[3]{2}}+\frac{1}{\sqrt[3]{3}}-\ldots(-1)^{n-1}\frac{1}{\sqrt[3]{n}}+\ldots;$$

$$4)\ \sin\frac{\pi}{3}+\sin\frac{2\pi}{3}+\sin\frac{3\pi}{3}+\ldots+\sin\frac{n\pi}{3}+\ldots.$$

Решение. 1) Рассмотрим ряд, составленный из абсолютных величин членов данного ряда:

$$1+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+\ldots+\frac{1}{n!}+\ldots.$$

По признаку Даламбера этот ряд сходится, так как

$$l=\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{n!}{(n+1)!}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n+1}=0<1.$$

Таким образом, исследуемый ряд является абсолютно сходящимся.

2) Рассматриваемый ряд знакопеременный, поскольку он содержит как положительные члены $\left(\frac{\sin 1}{1^2},\ \frac{\sin 2}{2^2},\ \frac{\sin 3}{3^2},\ \frac{\sin 7}{7^2},\ \ldots\right)$, так и отрицательные $\left(\frac{\sin 4}{4^2},\ \frac{\sin 5}{5^2},\ \frac{\sin 6}{6^2},\ \ldots\right)$.

Ряд

$$\frac{|\sin 1|}{1^2}+\frac{|\sin 2|}{2^2}+\frac{|\sin 3|}{3^2}+\ldots+\frac{|\sin n|}{n^2}+\ldots$$

сходится, так как его члены не превосходят соответствующих членов сходящегося ряда

$$\frac{1}{1^2}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\ldots+\frac{1}{n^2}+\ldots.$$

Следовательно, исходный ряд сходится абсолютно.

3) Ряд

$$1+\frac{1}{\sqrt[3]{2}}+\frac{1}{\sqrt[3]{3}}+\ldots+\frac{1}{\sqrt[3]{n}}+\ldots,$$

составленный из абсолютных величин членов данного ряда, расходится (см. задачу **13.15**). Следовательно, исходный ряд не является абсолютно сходящимся. Остается выяснить, сходится ли он (условно) или расходится. Рассматриваемый ряд—знакочередующийся. Поэтому для решения вопроса о его сходимости можно воспользоваться признаком Лейбница; так как члены ряда по абсолютной величине монотонно убывают и общий член стремится к нулю, то он сходится. Итак, данный ряд сходится условно.

4) Данный знакопеременный ряд расходится, так как для него не выполняется необходимый признак сходимости: $\lim\limits_{n\to\infty} a_n=\lim\limits_{n\to\infty}\sin(\pi n/3)$ не существует.

В задачах **13.79—13.89** выяснить, какие ряды сходятся абсолютно, какие условно, какие расходятся.

13.79. $1-\frac{3}{2}+\frac{5}{2^2}-\ldots+(-1)^n\frac{2n+1}{2^n}+\ldots$.

13.80. $-\frac{1}{4^2}+\frac{1}{7^2}-\frac{1}{10^2}+\ldots+(-1)^n\frac{1}{(3n+1)^2}+\ldots$.

13.81. $\frac{1}{\ln 2}-\frac{1}{\ln 3}+\frac{1}{\ln 4}-\ldots+(-1)^n\frac{1}{\ln n}+\ldots$.

13.82. $\frac{1}{2\ln^2 2}-\frac{1}{3\ln^2 3}+\frac{1}{4\ln^2 4}-\ldots+(-1)^n\frac{1}{n\ln^2 n}+\ldots$.

13.83. $\frac{3}{1}-\frac{3\cdot 5}{1\cdot 4}+\frac{3\cdot 5\cdot 7}{1\cdot 4\cdot 7}-\ldots+(-1)^{n-1}\frac{3\cdot 5\cdot 7\ldots(2n+1)}{1\cdot 4\cdot 7\ldots(3n-2)}+\ldots$.

13.84. $-\frac{2}{5}+\frac{2\cdot 7}{5\cdot 9}-\frac{2\cdot 7\cdot 12}{5\cdot 9\cdot 13}+\ldots+(-1)^n\frac{2\cdot 7\cdot 12\ldots(5n-3)}{5\cdot 9\cdot 13\ldots(4n+1)}+\ldots$.

13.85. $-1+\frac{2^2}{2!}-\frac{3^3}{3!}+\frac{4^4}{4!}-\ldots+(-1)^n\frac{n^n}{n!}+\ldots$.

13.86. $-\frac{2}{3}\cdot 2+\left(\frac{2}{3}\right)^2\left(\frac{3}{2}\right)^4-\left(\frac{2}{3}\right)^3\left(\frac{4}{3}\right)^9+\ldots$

$$\ldots+\left(-\frac{2}{3}\right)^n\left(\frac{n+1}{n}\right)^{n^2}+\ldots.$$

13.87. $-\frac{1}{3}-\frac{2}{9}+\frac{3}{27}+\frac{4}{81}-\ldots+(-1)^{(n^2+n)/2}\frac{n}{3^n}+\ldots$.

13.88. $\frac{\sin 1}{2}+\frac{\sin 2}{2^2}+\frac{\sin 3}{2^3}+\ldots+\frac{\sin n}{2^n}+\ldots$.

13.89. $\frac{\cos 1}{1^3}+\frac{\cos 2}{2^3}+\frac{\cos 3}{3^3}+\ldots+\frac{\cos n}{n^3}+\ldots$.

§ 5. СТЕПЕННЫЕ РЯДЫ

Ряд

$$u_1(x)+u_2(x)+\ldots+u_n(x)+\ldots=\sum_{n=1}^{\infty}u_n(x), \tag{1}$$

членами которого являются функции от x, называется *функциональным*. При одних значениях x ряд может сходиться, а при других—расходиться.

Функциональный ряд (1) называется *сходящимся* в точке x_0, если при $x=x_0$ он обращается в сходящийся числовой ряд; если же при $x=x_0$ получается расходящийся числовой ряд, то ряд (1) называется *расходящимся* в точке $x=x_0$. Совокупность значений x, при которых ряд (1) сходится, называется *областью сходимости* функционального ряда.

Из всех функциональных рядов наиболее распространенными на практике являются *степенные ряды* вида

$$a_0+a_1x+a_2x^2+\ldots+a_nx^n+\ldots \tag{2}$$

или более общего вида

$$a_0+a_1(x-x_0)+a_2(x-x_0)^2+\ldots+a_n(x-x_0)^n+\ldots, \tag{3}$$

где постоянные a_0, a_1, a_2, ..., a_n называются *коэффициентами* ряда.

Областью сходимости любого степенного ряда вида (2) служит промежуток $]-R, R[$ числовой оси, симметричный относительно точки $x=0$, дополненный, быть может, его концами. Этот промежуток, называемый *промежутком сходимости*, обладает тем свойством, что при всех $|x|<R$ ряд сходится и при-

том абсолютно, а при всех $|x| > R$ — расходится. На концах промежутка сходимости, т. е. в точках $x=-R$ и $x=R$, возможна как сходимость, так и расходимость степенного ряда *.

Для нахождения области сходимости степенного ряда (2) сначала применяется признак Даламбера или радикальный признак Коши к ряду

$$|a_0|+|a_1||x|+|a_2||x|^2+\ldots+|a_n||x|^n+\ldots,$$

членами которого служат абсолютные величины членов рассматриваемого степенного ряда, а затем исследуется сходимость ряда на концах промежутка сходимости.

13.90. Найти области сходимости степенных рядов:

1) $-\frac{x+1}{2}+\frac{(x+1)^2}{2\cdot 2^2}-\frac{(x+1)^3}{3\cdot 2^3}+\ldots+(-1)^n\frac{(x+1)^n}{n2^n}+\ldots;$

2) $x-2!\,x^2+3!\,x^3-\ldots+(-1)^{n-1}n!\,x^n+\ldots;$

3) $1+\frac{5}{1!}(x-2)+\frac{5^2}{2!}(x-2)^2+\ldots+\frac{5^n}{n!}(x-2)^n+\ldots;$

4) $3x+3^4x^4+3^9x^9+\ldots+3^{n^2}x^{n^2}+\ldots.$

Решение. 1) Составим ряд из абсолютных величин членов данного ряда:

$$\frac{|x+1|}{2}+\frac{|x+1|^2}{2\cdot 2^2}+\frac{|x+1|^3}{3\cdot 2^3}+\ldots+\frac{|x+1|^n}{n2^n}+\ldots.$$

Согласно признаку Даламбера полученный знакоположительный ряд сходится (абсолютно) при тех значениях x, для которых $l=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n}<1$. Здесь $u_n=\frac{|x+1|^n}{n2^n}$, $u_{n+1}=\frac{|x+1|^{n+1}}{(n+1)\,2^{n+1}}$. Отсюда

$$l=\lim_{n\to\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n}=\lim_{n\to\infty}\left[\frac{|x+1|^{n+1}}{(n+1)\,2^{n+1}}:\frac{|x+1|^n}{n2^n}\right]=\frac{|x+1|}{2}\cdot\lim_{n\to\infty}\frac{n}{n+1}=\frac{|x+1|}{2}.$$

Определим, при каких значениях x этот предел l будет меньше единицы. Для этого решим неравенство $|x+1|/2<1$, или $|x+1|<2$, откуда $-3<x<1$. Таким образом, первоначальный ряд сходится (абсолютно) в промежутке $]-3,\ 1[$ — это и есть промежуток сходимости данного ряда.

Исследуем сходимость ряда на концах промежутка сходимости. При $x=-3$ получаем числовой ряд

$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\ldots+\frac{1}{n}+\ldots.$$

Это — гармонический ряд, который, как известно, расходится.

При $x=1$ получаем числовой знакочередующийся ряд

$$-1+\frac{1}{2}-\frac{1}{3}+\ldots+(-1)^n\frac{1}{n}+\ldots,$$

который по признаку Лейбница сходится (условно).

Итак, область сходимости данного ряда — полуоткрытый промежуток $-3<x\leqslant 1$.

2) Здесь $u_n=n!\,|x|^n$, $u_{n+1}=(n+1)!\,|x|^{n+1}$. Отсюда

$$l=\lim_{n\to\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)!\,|x|^{n+1}}{n!\,|x|^n}=|x|\lim_{n\to\infty}(n+1),$$

* Для степенного ряда вида (3) промежутком сходимости служит промежуток $]\,x_0-R,\ x_0+R\,[$, симметричный относительно точки x_0.

т. е.

$$l=\begin{cases}\infty & \text{при } x\neq 0,\\ 0 & \text{при } x=0.\end{cases}$$

Таким образом, согласно признаку Даламбера ряд сходится только в точке $x=0$.

3) Имеем $u_n=\frac{5^n}{n!}|x-2|^n$, $u_{n+1}=\frac{5^{n+1}}{(n+1)!}|x-2|^{n+1}$. Отсюда

$$l=\lim_{n\to\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n}=\lim\frac{5^{n+1}n!\,|x-2|^{n+1}}{(n+1)!\,5^n\,|x-2|^n}=|x-2|\cdot\lim_{n\to\infty}\frac{5}{n+1}=0<1.$$

Следовательно, при любом x по признаку Даламбера данный ряд абсолютно сходится. Область сходимости рассматриваемого ряда есть вся числовая ось.

4) В данном случае для определения промежутка сходимости степенного ряда удобнее применить радикальный признак Коши. Находим

$$q=\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{u_n}=\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{3^{n^2}|x|^{n^2}}=\lim_{n\to\infty}3^n|x|^n.$$

Этот предел q будет меньше единицы при тех значениях x, для которых выполняется неравенство $3^n|x|^n<1$, т. е. при $-1/3<x<1/3$.

На концах промежутка сходимости, т. е. в точках $x=-1/3$ и $x=1/3$, исследуемый ряд расходится, так как в этих точках не выполняется необходимый признак сходимости ряда.

Итак, областью сходимости данного ряда служит открытый промежуток $-1/3<x<1/3$.

В задачах 13.91—13.102 найти области сходимости заданных степенных рядов.

13.91. $1-4x+4^2x^2-\ldots+(-4)^n x^n+\ldots$.

13.92. $x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\ldots+(-1)^{n-1}\frac{x^n}{n}+\ldots$.

13.93. $(x-2)+\frac{(x-2)^2}{\sqrt{2}}+\frac{(x-2)^3}{\sqrt{3}}+\ldots+\frac{(x-2)^n}{\sqrt{n}}+\ldots$.

13.94. $\frac{x}{2!}-\frac{x^2}{4!}+\frac{x^3}{6!}-\ldots+(-1)^{n-1}\frac{x^n}{(2n)!}+\ldots$.

13.95. $\frac{1}{2\cdot 3}(x+4)+\frac{2}{3\cdot 3^2}(x+4)^2+\frac{3}{4\cdot 3^3}(x+4)^3+\ldots$

$$\ldots+\frac{n}{(n+1)\,3^n}(x+4)^n+\ldots.$$

13.96. $(x-1)+\frac{(x-1)^2}{2^2}+\frac{(x-1)^3}{3^2}+\ldots+\frac{(x-1)^n}{n^2}+\ldots$.

13.97. $x+x^4+x^9+\ldots+x^{n^2}+\ldots$.

13.98. $\frac{(x-3)}{2}-\frac{(x-3)^2}{2^2\sqrt{2}}+\frac{(x-3)^3}{2^3\sqrt{3}}-\ldots+(-1)^{n-1}\frac{(x-3)^n}{2^n\sqrt{n}}+\ldots$.

13.99. $10^2x+10^4x^3+10^6x^5+\ldots+10^{2n}x^{2n-1}+\ldots$.

13.100. $\frac{x}{2^2}-\frac{x^2}{3^2e}+\frac{x^3}{4^2e^2}-\ldots+(-1)^{n-1}\frac{x^n}{(n+1)^2e^{n-1}}+\ldots$.

13.101. $\frac{x}{2\cdot 4^2\ln 2}+\frac{x^2}{3\cdot 4^3\ln 3}+\ldots+\frac{x^{n-1}}{n4^n\ln n}+\ldots$.

13.102. $\frac{2}{3}x+\left(\frac{3}{5}\right)^2x^2+\left(\frac{4}{7}\right)^3x^3+\ldots+\left(\frac{n+1}{2n+1}\right)^n x^n+\ldots$.

§ 6. РАЗЛОЖЕНИЕ ЭЛЕМЕНТАРНЫХ ФУНКЦИЙ В СТЕПЕННЫЕ РЯДЫ

Рядом Тейлора для функции $f(x)$ называется степенной ряд вида

$$f(x)=f(a)+f'(a)(x-a)+\frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2+\ldots+\frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n+\ldots. \quad (1)$$

Если $a=0$, то получается ряд

$$f(x)=f(0)+f'(0)x+\frac{f''(0)}{2!}x^2+\ldots+\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n+\ldots, \quad (2)$$

который называется *рядом Маклорена.*

При представлении элементарной функции в виде суммы ряда Тейлора обычно поступают следующим образом: вычисляют последовательные производные данной функции в точке $x=a$, а затем, пользуясь формулой (1), составляют для нее ряд Тейлора и определяют промежуток сходимости полученного ряда. В этом промежутке ряд Тейлора сходится к порождающей его функции $f(x)$, если только все значения $f(a)$, $f'(a)$, ..., $f^{(n)}(a)$, ... получаются непосредственной подстановкой значения $x=a$ в выражения $f(x)$, $f'(x)$, ..., $f^{(n)}(x)$, ...

Применяя указанный способ, можно найти разложение в ряд Маклорена для следующих функций:

$$e^x=1+x+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\ldots+\frac{x^n}{n!}+\ldots\ (-\infty<x<+\infty), \quad (3)$$

$$\sin x=x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}-\ldots+(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}+\ldots\ (-\infty<x<+\infty), \quad (4)$$

$$\cos x=1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}-\ldots+(-1)^n\frac{x^{2n}}{(2n)!}+\ldots\ (-\infty<x<+\infty), \quad (5)$$

$$(1+x)^m=1+mx+\frac{m(m-1)}{2!}x^2+\ldots+\frac{m(m-1)\ldots(m-n+1)}{n!}x^n+\ldots \quad (6)$$
$$(-1<x<1),$$

$$\frac{1}{1-x}=1+x+x^2+\ldots+x^n+\ldots\ (-1<x<1), \quad (7)$$

$$\ln(1+x)=x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\ldots+(-1)^{n-1}\frac{x^n}{n}+\ldots\ (-1<x\leqslant 1). \quad (8)$$

Помимо приведенного выше способа, можно получить разложения функций в ряд Тейлора, исходя из известных разложений, например, разложений (3)—(8). При этом возможно использование следующих действий над степенными рядами внутри их промежутков сходимости:

1) *два степенных ряда можно почленно складывать и умножать* (по правилу умножения многочленов);

2) *степенной ряд можно почленно умножать на общий множитель*;

3) *степенной ряд можно почленно интегрировать и дифференцировать любое число раз.*

Так как степенной ряд для своей суммы есть ряд Тейлора, то полученное в результате указанных действий разложение будет искомым.

13.103. Разложить в ряд Тейлора по степеням $x-2$ функцию $f(x)=e^{5x}$.

Решение. Вычислим значения данной функции и ее последовательных производных при $x=2$:

$$\begin{aligned} f(x)&=e^{5x}, & f(2)&=e^{10},\\ f'(x)&=5e^{5x}, & f'(2)&=5e^{10},\\ f''(x)&=5^2e^{5x}, & f''(2)&=5^2e^{10},\\ f'''(x)&=5^3e^{5x}, & f'''(2)&=5^3e^{10},\\ &\ldots & &\ldots\\ f^{(n)}(x)&=5^ne^{5x}, & f^{(n)}(2)&=5^ne^{10},\\ &\ldots & &\ldots \end{aligned}$$

Подставляя найденные значения в общее выражение ряда Тейлора для произвольной функции, получим

$$e^{5x}=e^{10}\left[1+\frac{5}{1!}(x-2)+\frac{5^2}{2!}(x-2)^2+\ldots+\frac{5^n}{n!}(x-2)^n+\ldots\right].$$

Это и есть разложение в ряд Тейлора по степеням $x-2$ для функции $f(x)=e^{5x}$. Полученный ряд сходится к порождающей его функции $f(x)=e^{5x}$ при любом значении x (см. задачу 13.90).

Заметим, что искомое разложение можно получить также следующим образом. В разложении (3) заменим x на $5x$; тем самым получим ряд Маклорена для функции e^{5x}:

$$e^{5x}=1+\frac{5}{1!}x+\frac{5^2}{2!}x^2+\ldots+\frac{5^n}{n!}x^n+\ldots. \qquad (*)$$

Представив теперь функцию e^{5x} в виде $e^{5(x-2)}\cdot e^{10}$ и подставляя в соотношение (*) $x-2$ вместо x, приходим к разложению

$$e^{5x}=e^{5(x-2)}\cdot e^{10}=e^{10}\left[1+\frac{5}{1!}(x-2)+\frac{5^2}{2!}(x-2)^2+\ldots+\frac{5^n}{n!}(x-2)^n+\ldots\right].$$

13.104. Разложить в ряд Маклорена функцию $f(x)=\ln(1-2x)$.

Решение. Заменяя в разложении (8) x на $-2x$, получим

$$\ln(1-2x)=(-2x)-\frac{(-2x)^2}{2}+\frac{(-2x)^3}{3}-\ldots+(-1)^{n-1}\frac{(-2x)^n}{n}+\ldots,$$

или

$$\ln(1-2x)=-2x-\frac{2^2}{2}x^2-\frac{2^3}{3}x^3-\ldots-\frac{2^n}{n}x^n-\ldots.$$

Разложение (8) справедливо в промежутке $-1<x\leqslant 1$, а искомое разложение получается в результате замены x на $-2x$. Следовательно, для нахождения промежутка сходимости полученного ряда нужно решить неравенство $-1<-2x\leqslant 1$, откуда $-1/2\leqslant x<1/2$.

13.105. Разложить в ряд Маклорена функцию $f(x)=\cos^2 x$.

Решение. По известной тригонометрической формуле имеем

$$\cos^2 x=(1+\cos 2x)/2.$$

Разложим в ряд Маклорена функцию $\cos 2x$, заменяя в разложении (5) x на $2x$:

$$\cos 2x=1-\frac{(2x)^2}{2!}+\frac{(2x)^4}{4!}-\ldots+(-1)^n\frac{(2x)^{2n}}{(2n)!}+\ldots,$$

или

$$\cos 2x=1-\frac{2^2}{2!}x^2+\frac{2^4}{4!}x^4-\ldots+(-1)^n\frac{2^{2n}}{(2n)!}x^{2n}+\ldots. \qquad (*)$$

Разложение (5) справедливо при любом x, поэтому ряд Маклорена для $\cos 2x$ сходится к порождающей его функции также на всей числовой оси.

Для того чтобы получить разложение в ряд Маклорена функции $(1/2)\cos 2x$, умножим все члены ряда (*) на $1/2$:

$$\frac{1}{2}\cos 2x=1-\frac{2}{2!}x^2+\frac{2^3}{4!}x^4-\ldots+(-1)^n\frac{2^{2n-1}}{(2n)!}x^{2n}+\ldots.$$

Тогда

$$\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\cos 2x=\frac{3}{2}-\frac{2}{2!}x^2+\frac{2^3}{4!}x^4-\ldots+(-1)^n\frac{2^{2n-1}}{(2n)!}x^{2n}+\ldots.$$

Это и есть разложение в ряд Маклорена функции $f(x)=\cos^2 x$. Очевидно, что оно справедливо при любом x.

13.106. Разложить в ряд Тейлора по степеням $x+3$ функцию

$$f(x)=\frac{1}{x+1}.$$

Решение. Преобразуем данную функцию так, чтобы можно было воспользоваться разложением (7):

$$\frac{1}{x+1}=\frac{1}{(x+3)-2}=-\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{1-\frac{x+3}{2}}=$$

$$=-\frac{1}{2}\left[1+\frac{x+3}{2}+\frac{(x+3)^2}{2^2}+\ldots+\frac{(x+3)^n}{2^n}+\ldots\right].$$

Полученное разложение справедливо, когда $-1<(x+3)/2<1$. Отсюда получаем $-2<x+3<2$, т. е. $-5<x<-1$.

В задачах 13.107—13.116 данные функции разложить в ряд Маклорена. Указать промежутки сходимости полученных рядов.

13.107. $f(x)=e^{6x}$. **13.108.** $f(x)=e^{-x}$. **13.109.** $f(x)=\sin 3x$.

13.110. $f(x)=\cos\frac{x}{2}$. **13.111.** $f(x)=\ln\left(1-\frac{x}{3}\right)$.

13.112. $f(x)=\ln(1+4x)$. **13.113.** $f(x)=\frac{1}{(1+x)^2}$.

13.114. $f(x)=\frac{1}{1-x^3}$. **13.115.** $f(x)=\sqrt{1+x^3}$.

13.116. $f(x)=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$.

В задачах 13.117—13.122 данные функции разложить в ряд Тейлора.

13.117. $f(x)=\ln x$ по степеням $x-1$.

13.118. $f(x)=1/x$ по степеням $x+2$.

13.119. $f(x)=1/x^2$ по степеням $x+1$.

13.120. $f(x)=1/(x-2)$ по степеням $x-5$.

13.121. $f(x)=e^{-3x}$ по степеням $x+4$.

13.122. $f(x)=\cos x$ по степеням $x-\pi/4$.

13.123. Найти разложение в ряд Маклорена функции

$$f(x)=\operatorname{arctg} x.$$

Решение. Запишем выражение данной функции в виде интеграла:

$$\operatorname{arctg} x=\int_0^x\frac{dt}{1+t^2}.$$

Разложим подынтегральную функцию $f(x)=1/(1+t^2)$ в ряд Маклорена. Для этого в разложении (7) заменим x на $-t^2$:

$$f(t)=\frac{1}{1-(-t^2)}=1-t^2+t^4-t^6+\ldots+(-1)^n t^{2n}+\ldots.$$

Очевидно, что этот ряд сходится в промежутке $]-1, 1[$. Интегрируя почленно полученный ряд в пределах от 0 до x (где $|x| < 1$), получаем разложение функции $f(x) = \operatorname{arctg} x$ в ряд Маклорена:

$$\operatorname{arctg} x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \ldots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1} + \ldots .$$

Этот ряд сходится в том же промежутке $]-1, 1[$, что и исходный ряд.

В задачах **13.124—13.127**, применяя дифференцирование и интегрирование, найти разложения в ряд Маклорена данных функций и указать промежутки, в которых эти разложения имеют место.

13.124. $f(x) = \arcsin x$. **13.125.** $f(x) = (1+x)\ln(1+x)$.

13.126. $f(x) = (1+x^2)\operatorname{arctg} x$. **13.127.** $f(x) = \ln(x + \sqrt{1+x^2})$.

В задачах **13.128—13.133** разложить в степенной ряд функцию $f(x)$ и найти $\int\limits_0^x f(x)\,dx$ в виде степенного ряда.

13.128. $f(x) = \frac{\sin x}{x}$. **13.129.** $f(x) = \sqrt[3]{x}\cos x$.

13.130. $f(x) = e^{-x^2}$. **13.131.** $f(x) = \sqrt{x}\,e^x$. **13.132.** $f(x) = \cos x^2$.

13.133. $f(x) = \sqrt{1-x^3}$.

§ 7. ПРИЛОЖЕНИЕ РЯДОВ К ПРИБЛИЖЕННЫМ ВЫЧИСЛЕНИЯМ

13.134. Вычислить $\sin 18°$, ограничиваясь первыми двумя членами ряда Маклорена для $\sin x$, и оценить получающуюся при этом погрешность.

Решение. Так как разложение (4) § 6 справедливо при любом x, то, в частности, при $x = \pi/10$ имеем

$$\sin\frac{\pi}{10} = \frac{\pi}{10} - \frac{(\pi/10)^3}{3!} + \frac{(\pi/10)^5}{5!} - \ldots .$$

Полученный ряд—знакочередующийся. Ограничиваясь двумя членами этого ряда, т. е. считая $\sin(\pi/10)$ равным их сумме, мы тем самым допускаем ошибку, не превосходящую первого отбрасываемого члена $(\pi/10)^5/5!$ (см. § 3). Так как $(\pi/10)^5/5! < 0{,}0001$, то с точностью до 0,0001 получаем

$$\sin\frac{\pi}{10} \approx \frac{\pi}{10} - \frac{(\pi/10)^3}{3!} \approx 0{,}3091.$$

13.135. Вычислить e^2 с точностью до 0,01.

Решение. Пользуясь разложением (3) § 6, при $x = 2$ получим

$$e^2 = 1 + 2 + \frac{2^2}{2!} + \frac{2^3}{3!} + \ldots + \frac{2^n}{n!} + \ldots .$$

Остается решить вопрос о том, сколько членов данного ряда надо взять, чтобы получить значение e^2 с требуемой точностью *. Пусть искомое число чле-

* Так как данный числовой ряд не является знакопеременным, то о погрешности нельзя судить по величине первого отбрасываемого члена.

нов равно k. Это означает, что ошибка ΔS_k, которую мы допускаем, заменяя сумму ряда его k-й частичной суммой, равна сумме членов ряда, начиная с $(k+1)$-го:

$$\Delta S_k=\frac{2^{k+1}}{(k+1)!}+\frac{2^{k+2}}{(k+2)!}+\frac{2^{k+3}}{(k+3)!}+\ldots=$$
$$=\frac{2^{k+1}}{(k+1)!}+\frac{2^{k+2}}{(k+1)!\,(k+2)}+\frac{2^{k+3}}{(k+1)!\,(k+2)(k+3)}+\ldots=$$
$$=\frac{2^{k+1}}{(k+1)!}\left[1+\frac{2}{k+2}+\frac{2^2}{(k+2)(k+3)}+\ldots\right].$$

Если заменить каждое из чисел $k+2$, $k+3$, ... числом $k+1$, то знаменатели дробей уменьшатся, а сами дроби, следовательно, увеличатся. Поэтому

$$\Delta S_k<\frac{2^{k+1}}{(k+1)!}\left[1+\frac{2}{k+1}+\frac{2^2}{(k+1)^2}+\ldots\right].$$

Выражение, стоящее в квадратной скобке, есть сумма членов бесконечно убывающей геометрической прогрессии со знаменателем $q=2/(k+1)$, и следовательно, равно

$$\frac{1}{1-q}=\frac{1}{1-2/(k+1)}=\frac{k+1}{k-1}.$$

Таким образом,

$$\Delta S_k<\frac{2^{k+1}}{(k+1)!}\cdot\frac{k+1}{k-1}=\frac{2^{k+1}}{k!\,(k-1)}.$$

Но, с другой стороны, ошибка ΔS_k не должна превосходить 0,01: $\Delta S_k<0{,}01$. Решая методом подбора неравенство

$$\frac{2^{k+1}}{k!\,(k-1)}<0{,}01,\quad\text{или}\quad\frac{k!\,(k-1)}{2^{k+1}}>100,$$

получим $k>7$.

Итак, для достижения требуемой точности надо взять 8 членов ряда:

$$e^2\approx 1+2+\frac{2^2}{2!}+\frac{2^3}{3!}+\frac{2^4}{4!}+\frac{2^5}{5!}+\frac{2^6}{6!}+\frac{2^7}{7!}\approx 7{,}38.$$

13.136. Вычислить $\cos 20°$, ограничиваясь первыми двумя членами ряда (5) § 6, и оценить получающуюся при этом погрешность.

13.137. Вычислить $\ln 1{,}2$, ограничиваясь первыми тремя членами ряда (8) § 6, и оценить погрешность.

13.138. Вычислить $\sqrt[3]{30}$, ограничиваясь первыми тремя членами ряда (6) § 6, и оценить погрешность.

Указание: представить $\sqrt[3]{30}$ в следующем виде:

$$\sqrt[3]{30}=\sqrt[3]{27+3}=3\sqrt[3]{1+\frac{1}{9}}=3\left(1+\frac{1}{9}\right)^{1/3}.$$

13.139. Вычислить $\sqrt[3]{e}$ с точностью до 0,01.

13.140. Вычислить $\sin 12°$ с точностью до 0,001.

13.141. Вычислить $\cos 1°$ с точностью до 0,001.

13.142. Вычислить $\sqrt[4]{80}$ с точностью до 0,001.

13.143. Вычислить $\int\limits_0^1 \frac{\sin x}{x} dx$ с точностью до 0,01.

Решение. Данный определенный интеграл можно вычислить только приближенно. Для этого разложим подынтегральную функцию в ряд Тейлора (см. задачу 13.128):

$$\frac{\sin x}{x} = 1 - \frac{x^2}{3!} + \frac{x^4}{5!} - \frac{x^6}{7!} + \dots .$$

Отсюда

$$\int\limits_0^1 \frac{\sin x}{x} dx = \int\limits_0^1 \left(1 - \frac{x^2}{3!} + \frac{x^4}{5!} - \frac{x^6}{7!} + \dots\right) dx = \left[x - \frac{x^3}{3!3} + \frac{x^5}{5!5} - \frac{x^7}{7!7} + \dots\right]_0^1 =$$

$$= 1 - \frac{1}{3!3} + \frac{1}{5!5} - \frac{1}{7!7} + \dots \approx 1 - \frac{1}{3!3} \approx 0,94$$

[здесь мы ограничились двумя первыми членами этого знакопеременного ряда, так как третий член $1/(5!5)$ меньше 0,01].

13.144. Вычислить $\int\limits_0^1 e^{-x^2} dx$ с точностью до 0,001.

13.145. Вычислить $\int\limits_0^{1/2} \cos\sqrt{x}\, dx$ с точностью до 0,001.

13.146. Вычислить $\int\limits_0^{1/5} \sqrt{1+x^3}\, dx$ с точностью до 0,0001.

13.147. Найти $\lim\limits_{x \to 0} \frac{x - \operatorname{arctg} x}{x^3}$.

Решение. Здесь имеет место неопределенность вида 0/0. Для того чтобы раскрыть ее, разложим числитель в ряд Тейлора. Тогда получим

$$\lim_{x \to 0} \frac{x - \left(x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \dots\right)}{x^3} = \lim_{x \to 0} \left(\frac{1}{3} - \frac{x^2}{5} + \frac{x^4}{7} - \dots\right) = \frac{1}{3}.$$

13.148. Найти $\lim\limits_{x \to 0} \frac{1 - \cos x}{x^2}$.

13.149. Найти $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\sin x - \operatorname{arctg} x}{x^3}$.

13.150. Найти $\lim\limits_{x \to 0} \frac{1 - e^{3x}}{x}$.

§ 8. РЯДЫ ФУРЬЕ

1. Разложение функций в ряд Фурье на отрезке длины 2π. *Тригонометрическим рядом Фурье* для функции $f(x)$ на отрезке $[-\pi, \pi]$ называется ряд вида

$$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + (a_1 \cos x + b_1 \sin x) + (a_2 \cos 2x + b_2 \sin 2x) + \dots$$
$$\dots + (a_n \cos nx + b_n \sin nx) + \dots, \qquad (1)$$

коэффициенты которого, называемые *коэффициентами Фурье* для $f(x)$, вычисляются по следующим формулам:

$$a_0=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\,dx, \tag{2}$$

$$a_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nx\,dx \quad (n\in N), \tag{3}$$

$$b_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin nx\,dx \quad (n\in N). \tag{4}$$

Условия, которые достаточно наложить на функцию $f(x)$ для того, чтобы ее ряд Фурье сходился во всем промежутке разложения, определяются **теоремой Дирихле**.

Если функция $f(x)$, заданная на отрезке $[-\pi,\ \pi]$, удовлетворяет в этом промежутке условиям Дирихле, т. е.

1) *непрерывна за исключением только конечного числа точек разрыва I рода**;

2) *имеет конечное число экстремумов,*

то ряд Фурье этой функции сходится на всем отрезке $[-\pi,\ \pi]$ и сумма этого ряда:

равна $f(x)$ во всех точках непрерывности данной функции, лежащих внутри промежутка $]-\pi,\ \pi[$;

равна $\dfrac{f(x-0)+f(x+0)}{2}$ во всех точках разрыва;

равна $\dfrac{f(-\pi+0)+f(\pi-0)}{2}$ на концах промежутка.

Так как члены ряда — функции периодические с периодом 2π, то из сходимости ряда на отрезке $[-\pi,\ \pi]$ вытекает его сходимость на всей числовой оси, причем сумма этого ряда является периодической функцией с тем же периодом 2π. Тогда для того чтобы ряд Фурье функции $f(x)$ сходился именно к этой функции на всей числовой оси, надо и ее считать периодической с периодом 2π.

2. **Ряды Фурье для четных и нечетных функций периода 2π.** Если функция $f(x)$ — четная, т. е. $f(-x)=f(x)$, то ее коэффициенты Фурье вычисляются по следующим формулам:

$$a_0=\frac{2}{\pi}\int_{0}^{\pi} f(x)\,dx, \tag{5}$$

$$a_n=\frac{2}{\pi}\int_{0}^{\pi} f(x)\cos nx\,dx, \tag{6}$$

$$b_n=0.$$

Таким образом, *четная функция разлагается в ряд Фурье по косинусам:*

$$f(x)\sim\frac{a_0}{2}+a_1\cos x+a_2\cos 2x+\ldots+a_n\cos nx+\ldots.$$

Если функция $f(x)$ — нечетная, т. е. $f(-x)=-f(x)$, то

$$a_0=0,\quad a_n=0,$$

$$b_n=\frac{2}{\pi}\int_{0}^{\pi} f(x)\sin nx\,dx. \tag{7}$$

---

* Это означает, что в точке разрыва x_0 функция имеет конечный левый предел $f(x_0-0)$ и конечный правый предел $f(x_0+0)$.

Следовательно, *нечетная функция разлагается в ряд Фурье по синусам:*

$$f(x) \sim b_1 \sin x + b_2 \sin 2x + \ldots + b_n \sin nx + \ldots .$$

3. Разложение в ряд Фурье функций, заданных на полупериоде. В том случае, когда функция $f(x)$ задана на отрезке $[0, \pi]$, ее можно разложить в ряд косинусов или в ряд синусов. Для этого достаточно продолжить данную функцию на отрезок $[-\pi, 0]$ соответственно четным или нечетным образом. Коэффициенты разложения такой функции определяются по приведенным выше формулам (5) и (6) для четной функции и по формуле (7) — для нечетной.

4. Разложение функций в ряд Фурье на отрезке длины $2l$. Если функция $f(x)$ задана на отрезке $[-l, l]$, то при выполнении на этом отрезке условий Дирихле она разлагается в ряд Фурье вида

$$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \left(a_1 \cos \frac{\pi x}{l} + b_1 \sin \frac{\pi x}{l}\right) +$$
$$+ \left(a_2 \cos \frac{2\pi x}{l} + b_2 \sin \frac{2\pi x}{l}\right) + \ldots + \left(a_n \cos \frac{n\pi x}{l} + b_n \sin \frac{n\pi x}{l}\right) + \ldots, \quad (1')$$

где коэффициенты Фурье находятся по формулам

$$a_0 = \frac{1}{l} \int_{-l}^{l} f(x)\, dx, \quad (2')$$

$$a_n = \frac{1}{l} \int_{-l}^{l} f(x) \cos \frac{n\pi x}{l}\, dx \quad (n \in N), \quad (3')$$

$$b_n = \frac{1}{l} \int_{-l}^{l} f(x) \sin \frac{n\pi x}{l}\, dx \ (n \in N). \quad (4')$$

В том случае, когда $f(x)$ — четная функция, ее ряд Фурье содержит только свободный член и косинусы, т. е.

$$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + a_1 \cos \frac{\pi x}{l} + a_2 \cos \frac{2\pi x}{l} + \ldots + a_n \cos \frac{n\pi x}{l} + \ldots,$$

причем

$$a_0 = \frac{2}{l} \int_{0}^{l} f(x)\, dx, \quad (5')$$

$$a_n = \frac{2}{l} \int_{0}^{l} f(x) \cos \frac{n\pi x}{l}\, dx, \quad (6')$$

$$b_n = 0.$$

В том же случае, когда функция $f(x)$ — нечетная, ее ряд Фурье содержит только синусы, т. е.

$$f(x) \sim b_1 \sin \frac{\pi x}{l} + b_2 \sin \frac{2\pi x}{l} + \ldots + b_n \sin \frac{n\pi x}{l} + \ldots,$$

где

$$a_0 = 0, \quad a_n = 0,$$

$$b_n = \frac{2}{l} \int_{0}^{l} f(x) \sin \frac{n\pi x}{l}\, dx. \quad (7')$$

13.151. Разложить в ряд Фурье периодическую функцию $f(x)$ с периодом 2π, заданную в промежутке $[-\pi, \pi[$ следующим образом:

$$f(x)=\begin{cases} x & \text{при } -\pi\leqslant x<0, \\ 0 & \text{при } \quad 0\leqslant x<\pi. \end{cases}$$

Решение. График данной функции изображен на рис. 75. Эта функция удовлетворяет условиям Дирихле, следовательно, ее можно разложить в ряд

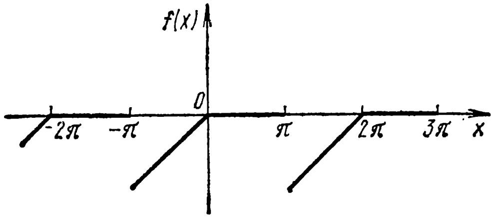


Рис. 75.

Фурье. Найдем коэффициенты Фурье для $f(x)$ в промежутке $[-\pi, \pi[$ по формулам (2), (3), (4). Имеем

$$a_0=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\,dx=\frac{1}{\pi}\left(\int_{-\pi}^{0} x\,dx+\int_{0}^{\pi} 0\cdot dx\right)=\frac{1}{\pi}\left[\frac{x^2}{2}\right]_{-\pi}^{0}=-\frac{\pi}{2};$$

$$a_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nx\,dx=\frac{1}{\pi}\left(\int_{-\pi}^{0} x\cos nx\,dx+\int_{0}^{\pi} 0\cdot\cos nx\,dx\right).$$

Второй из интегралов, стоящих в скобке, равен нулю; для вычисления первого интеграла воспользуемся методом интегрирования по частям. Пусть $u=x$, $dv=\cos nx\,dx$; тогда $du=dx$, $v=(1/n)\sin nx$; следовательно,

$$\int_{-\pi}^{0} x\cos nx\,dx=\left[x\cdot\frac{1}{n}\sin nx\right]_{-\pi}^{0}-\frac{1}{n}\int_{-\pi}^{0}\sin nx\,dx=$$

$$=\left[\frac{1}{n^2}\cos nx\right]_{-\pi}^{0}=\frac{1}{n^2}(\cos 0-\cos n\pi)=\frac{1-(-1)^n}{n^2}.$$

Итак,

$$a_n=\frac{1-(-1)^n}{n^2\pi}=\begin{cases} 0, & \text{если } n \text{ — четное;} \\ 2/(n^2\pi), & \text{если } n \text{ — нечетное.} \end{cases}$$

Отсюда $a_1=2/\pi$, $a_2=0$, $a_3=2/(3^2\pi)$, $a_4=0$, ...

Остается вычислить коэффициенты b_n:

$$b_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin nx\,dx=\frac{1}{\pi}\left(\int_{-\pi}^{0} x\sin nx\,dx+\int_{0}^{\pi} 0\cdot\sin nx\,dx\right)=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{0} x\sin nx\,dx.$$

Аналогично предыдущему имеем:

$$u=x,\quad \sin nx\,dx=dv;\quad du=dx,\quad v=(-1/n)\cos nx;$$

$$\int_{-\pi}^{0} x\sin nx\,dx=\left[-x\cdot\frac{1}{n}\cos nx\right]_{-\pi}^{0}+\frac{1}{n}\int_{-\pi}^{0}\cos nx\,dx=$$

$$=\left[-\frac{1}{n}x\cos nx+\frac{1}{n^2}\sin nx\right]_{-\pi}^{0}=-\frac{\pi}{n}\cos\pi n=\frac{\pi}{n}(-1)^{n+1}.$$

Отсюда $b_n=(-1)^{n+1}/n$, т. е. $b_1=1$, $b_2=-1/2$, $b_3=1/3$, $b_4=-1/4$, ...

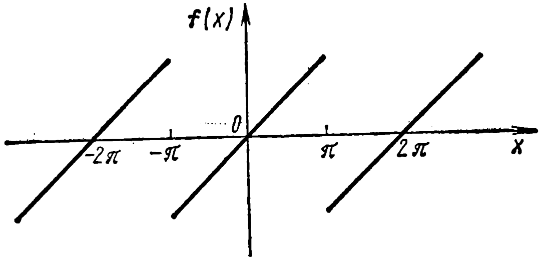


Рис. 76.

Подставляя найденные значения a_0, a_1, a_2, ..., b_1, b_2, ... в формулу (1), получим

$$f(x)\sim-\frac{\pi}{4}+\left(\frac{2}{\pi}\cos x+\sin x\right)-\frac{1}{2}\sin 2x+\left(\frac{2}{3^2\pi}\cos 3x+\frac{1}{3}\sin 3x\right)+\ldots,$$

или

$$f(x)\sim-\frac{\pi}{4}+\frac{2}{\pi}\left(\cos x+\frac{1}{3^2}\cos 3x+\frac{1}{5^2}\cos 5x+\ldots\right)+$$
$$+\left(\sin x-\frac{1}{2}\sin 2x+\frac{1}{3}\sin 3x+\ldots\right).$$

Полученный ряд сходится к $f(x)$ при любом x из промежутка $]-\pi,\ \pi[$. В точках $x=\pm\pi$ ряд сходится к

$$\frac{f(\pi-0)+f(\pi+0)}{2}=\frac{0-\pi}{2}=-\frac{\pi}{2}.$$

13.152. Разложить в ряд Фурье периодическую функцию с периодом 2π, заданную в промежутке $[-\pi,\ \pi[$ уравнением $f(x)=x$.

Решение. График данной функции изображен на рис. 76. Эта функция нечетная, следовательно, она разлагается в ряд Фурье по синусам. По формуле (7) имеем

$$b_n=\frac{2}{\pi}\int_{0}^{\pi} x\sin nx\,dx=\frac{2}{\pi}\left[-\frac{1}{n}x\cos nx+\frac{1}{n^2}\sin nx\right]_{0}^{\pi}=$$

$$=\frac{2}{\pi}\left(-\frac{\pi}{n}\cos\pi n\right)=-\frac{2}{n}(-1)^n=\frac{2}{n}(-1)^{n+1}.$$

Таким образом,

$$b_1=2,\ b_2=-1,\ b_3=2/3,\ b_4=-1/2,\ b_5=2/5,\ \ldots.$$

Следовательно, ряд Фурье данной функции записывается в виде

$$f(x)\sim 2\left(\sin x-\frac{\sin 2x}{2}+\frac{\sin 3x}{3}-\frac{\sin 4x}{4}+\ldots\right).$$

Этот ряд сходится к $f(x)=x$ в каждой точке, принадлежащей промежутку $]-\pi, \pi[$. В точках $x=\pm\pi$ ряд сходится к

$$\frac{f(\pi-0)+f(\pi+0)}{2}=\frac{\pi+(-\pi)}{2}=0.$$

13.153. Разложить в ряд Фурье периодическую функцию с периодом 2π, заданную на отрезке $[-\pi, \pi]$ уравнением $f(x)=x^2$ (рис. 77).

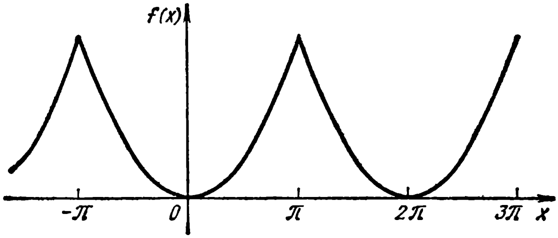


Рис. 77.

Решение. Рассматриваемая функция является четной; следовательно, она разлагается в ряд Фурье по косинусам. По формуле (5) находим

$$a_0=\frac{2}{\pi}\int_0^\pi \frac{x^2}{2}\,dx=\frac{1}{\pi}\left[\frac{x^3}{3}\right]_0^\pi=\frac{\pi^2}{3}.$$

Теперь, используя формулу (6) и дважды интегрируя по частям, имеем

$$a_n=\frac{2}{\pi}\int_0^\pi \frac{x^2}{2}\cos nx\,dx=\frac{1}{\pi}\left[\frac{x^2\sin nx}{n}\Big|_0^\pi-\frac{2}{n}\int_0^\pi x\sin nx\,dx\right]=$$

$$=-\frac{2}{\pi n}\int_0^\pi x\sin nx\,dx=-\frac{2}{\pi n}\left[-\frac{x\cos nx}{n}\Big|_0^\pi+\frac{1}{\pi}\int_0^\pi \cos nx\,dx\right]=$$

$$=-\frac{2}{\pi n}\left[\frac{-\pi\cos\pi n}{n}+\frac{\sin nx}{\pi n}\Big|_0^\pi\right]=(-1)^n\frac{2}{n^2}.$$

Таким образом, ряд Фурье данной функции имеет вид*

$$f(x)=\frac{\pi^2}{6}-2\left(\cos x-\frac{\cos 2x}{2^2}+\frac{\cos 3x}{3^2}-\ldots\right).$$

Так как данная функция непрерывна на всей числовой оси, то ее ряд Фурье сходится к этой функции при любом x.

13.154. Разложить в ряд Фурье по синусам функцию $f(x)=\pi-2x$, заданную в промежутке $[0, \pi[$.

---

* В данном случае знак $\sim$ заменен на знак равенства, так как ряд Фурье, порожденный данной функцией, сходится к этой функции во всем промежутке разложения.

Решение. Продолжим данную функцию нечетным образом на отрезок $[-\pi, 0]$, т. е. рассмотрим функцию

$$F(x)=\begin{cases}-\pi-2x & \text{при} \quad -\pi\leqslant x\leqslant 0,\\ \pi-2x & \text{при} \quad 0\leqslant x<\pi.\end{cases}$$

График функции $f(x)$ с ее периодическим продолжением изображен на рис. 78. Коэффициенты b_n находим по формуле (7):

$$b_n=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}(\pi-2x)\sin nx\,dx=$$

$$=\frac{2}{\pi}\left[-\frac{1}{n}(\pi-2x)\cos nx+\frac{2}{n^2}\sin nx\right]_0^{\pi}=\frac{2}{n}(1+\cos\pi n)=$$

$$=\begin{cases}0, & \text{если } n\text{ — нечетное,}\\ 4/n, & \text{если } n\text{ — четное.}\end{cases}$$

Таким образом, искомое разложение имеет вид

$$f(x)\sim 4\left(\frac{\sin 2x}{2}+\frac{\sin 4x}{4}+\frac{\sin 6x}{6}+\ldots\right).$$

Полученный ряд сходится к функции $f(x)$ при всех x из промежутка $]0, \pi[$. В точке $x=0$ ряд сходится к $[f(+0)+f(-0)]/2=0$, в точке $x=\pi$ — к $[f(-\pi+0)+f(\pi-0)]/2=0$.

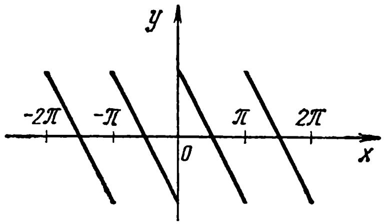


Рис. 78.

13.155. Разложить в ряд Фурье периодическую функцию $f(x)$ с периодом $2l=2$, которая на отрезке $[-1, 1]$ задается уравнением

$$f(x)=|x|=\begin{cases}-x & \text{при} \quad -1\leqslant x<0,\\ x & \text{при} \quad 0\leqslant x\leqslant 1.\end{cases}$$

Решение. Данная функция является четной (рис. 79). Таким образом, она разлагается в ряд Фурье по косинусам. По формуле (5′) имеем

$$a_0=2\int_0^1 x\,dx=2\left[\frac{x^2}{2}\right]_0^1=1.$$

Теперь по формуле (6′) найдем

$$a_n=\int_0^1 x\cos n\pi x\,dx=2\left[\frac{x\sin n\pi x}{n\pi}+\frac{\cos n\pi x}{n^2\pi^2}\right]_0^1=$$

$$=\frac{2}{n^2\pi^2}(\cos\pi n-1)=2\cdot\frac{(-1)^n-1}{n^2\pi^2}.$$

Итак,

$$a_n=\begin{cases}0, & \text{если } n\text{ — четное;}\\ -4/(n^2\pi^2), & \text{если } n\text{ — нечетное.}\end{cases}$$

Отсюда

$$a_1=-4/\pi^2,\quad a_2=0,\quad a_3=-4/(3^2\pi^2),\quad a_4=0,\quad a_5=-4/(5^2\pi^2),\ \ldots$$

Следовательно, ряд Фурье для данной функции имеет вид

$$f(x)=\frac{1}{2}-\frac{4}{\pi^2}\left(\cos\pi x+\frac{\cos 3\pi x}{3^2}+\frac{\cos 5\pi x}{5^2}+\ldots\right).$$

Рассматриваемая функция непрерывна на всей числовой оси, поэтому ее ряд Фурье сходится к этой функции при любом x.

В задачах **13.156—13.163** заданные функции разложить в ряд Фурье в промежутке $]-\pi, \pi[$ и определить сумму ряда в точках разрыва и на концах этого промежутка.

13.156. $f(x)=-x/2$. **13.157.** $f(x)=(\pi+x)/2$.

13.158. $f(x)=\begin{cases}-1 \text{ при } -\pi\leqslant x<0,\\ 1 \text{ при } \phantom{-\pi\leqslant{}} 0\leqslant x<\pi.\end{cases}$

13.159. $f(x)=\begin{cases}x+\pi \text{ при } -\pi\leqslant x<0,\\ \pi-x \text{ при } \phantom{-\pi\leqslant{}} 0\leqslant x<\pi.\end{cases}$

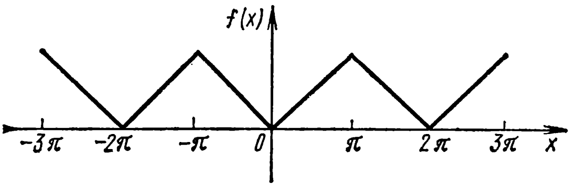


Рис. 79.

13.160. $f(x)=\begin{cases}1 \text{ при } -\pi\leqslant x<0,\\ x \text{ при } \phantom{-\pi\leqslant{}} 0\leqslant x<\pi.\end{cases}$

13.161. $f(x)=\begin{cases}\pi/2 \text{ при } -\pi\leqslant x<0,\\ \pi-x \text{ при } \phantom{-\pi\leqslant{}} 0\leqslant x<\pi.\end{cases}$

13.162. $f(x)=\begin{cases}-2x \text{ при } -\pi\leqslant x<0,\\ 3x \text{ при } \phantom{-\pi\leqslant{}} 0\leqslant x<\pi.\end{cases}$

13.163. $f(x)=\begin{cases}-\pi/4 \text{ при } -\pi\leqslant x<-\pi/4,\\ 0 \text{ при } -\pi/4\leqslant x\leqslant\pi/4,\\ -\pi/4 \text{ при } \pi/4\leqslant x<\pi.\end{cases}$

В задачах **13.164—13.168** заданные функции разложить в неполный ряд Фурье в промежутке $]0, \pi[$.

13.164. $f(x)=x$ в ряд по косинусам.

13.165. $f(x)=1$ в ряд по синусам.

13.166. $f(x)=\cos 2x$ в ряд по синусам.

13.167. $f(x)=\begin{cases}x \text{ при } 0\leqslant x<\pi/2,\\ \pi-x \text{ при } \pi/2\leqslant x<\pi\end{cases}$ в ряд по синусам.

13.168. $f(x)=\begin{cases}1 \text{ при } 0\leqslant x<\pi/2,\\ 1/2 \text{ при } \pi/2\leqslant x<\pi\end{cases}$ в ряд по косинусам.

В задачах **13.169—13.176** заданные функции разложить в ряд Фурье в указанных промежутках.

13.169. $f(x)=3x$ при $-2<x<2$.

13.170. $f(x)=|x|$ при $-4\leqslant x\leqslant 4$.

13.171. $f(x)=x^2/9$ при $-3\leqslant x\leqslant 3$.

13.172. $f(x)=3-x$ при $-2<x<2$.

13.173. $f(x)=\begin{cases} 0 & \text{при } -4\leqslant x<0, \\ x & \text{при } \quad 0\leqslant x<4. \end{cases}$

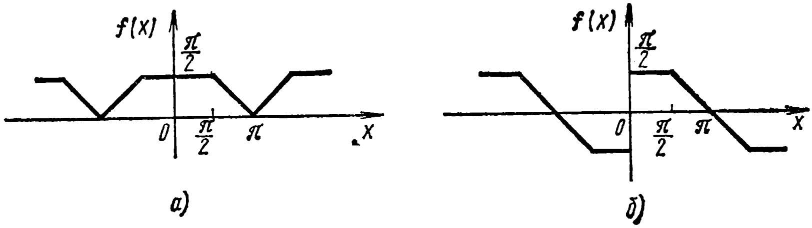


Рис. 80.

13.174. $f(x)=1-x$ при $0\leqslant x<1$ в ряд по косинусам.

13.175. $f(x)=1$ при $0<x<2$ в ряд по синусам.

13.176. $f(x)=\begin{cases} -x & \text{при } 0\leqslant x<1, \\ x-2 & \text{при } 1\leqslant x<2 \end{cases}$

а) в ряд по синусам; б) в ряд по косинусам.

13.177. Разложить в ряд Фурье функции, графики которых изображены на рис. 80.

ГЛАВА 14

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЕ И ИНТЕГРАЛЬНОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ ФУНКЦИЙ НЕСКОЛЬКИХ ПЕРЕМЕННЫХ

§ 1. ОСНОВНЫЕ ПОНЯТИЯ

Пусть D—некоторое множество точек плоскости xOy. Отображение f, сопоставляющее каждой паре чисел $(x;\ y)\in D$ число z, называется *функцией двух переменных*. Множество D называется *областью определения* функции.

Функция двух переменных обозначается так: $z=f(x,\ y)$ [или $z=z(x,\ y)$, $z=F(x,\ y)$ и т. д.].

Частным значением $f(a,\ b)$ функции $z=f(x,\ y)$ называется такое ее значение, которое соответствует системе значений $x=a$, $y=b$.

Аналогично определяются функции трех, четырех и т. д. аргументов.

Функцию $z=f(x,\ y)$ можно рассматривать как функцию $z=f(M)$ переменной точки $M(x;\ y)$, принадлежащей плоскости xOy и пробегающей область определения функции $z=f(x,\ y)$. Мы будем рассматривать только такие функции, области определения которых представляют собой конечную или бесконечную часть плоскости, ограниченную одной или несколькими непрерывными линиями, называемыми *границами* области.

Область называется *замкнутой*, если к ней относятся не только внутренние точки, но и точки границы; в противном случае она называется *открытой*.

Функция $z=f(x,\ y)$ изображается поверхностью в пространстве, если аргументы x и y принять соответственно за абсциссу и ординату переменной точки этой поверхности, а z—за ее аппликату.

14.1. Найти частное значение функции

$$z(x,\ y)=\frac{x^2-y}{x^3+5y^2}$$

в точке $M(1;\ -1)$.

Решение. Подставляя в выражение функции значения $x=1$, $y=-1$, получим

$$z(1,-1)=\frac{1^2-(-1)}{1^3+5(-1)^2}=\frac{2}{6}=\frac{1}{3}.$$

14.2. Дана функция $z(x,\ y)=x+y+y/x$. Найти: 1) $z(y,\ x)$; 2) $z(-x,\ -y)$; 3) $z(1,\ y/x)$.

Решение. 1) Подставляя в выражение функции y вместо x и x вместо y, имеем

$$z(y,\ x)=y+x+x/y.$$

2) Заменяя в выражении функции x на $-x$ и y на $-y$, получим

$$z(-x,\ -y)=-x-y+(-y)/(-x)=-x-y+y/x.$$

3) Подставим в выражение функции 1 вместо x и y/x вместо y:

$$z(1,\ y/x)=1+y/x+(y/x)/1=1+2y/x.$$

14.3. Найти области определения функций:

$$1)\ z=\sqrt{1-x^2-y^2};\ 2)\ z=\ln(9-x^2-y^2).$$

Решение. 1) Область определения функции состоит из всех тех точек $(x;\ y)$ плоскости, для которых $1-x^2-y^2\geqslant 0$, т. е. $x^2+y^2\leqslant 1$. Таким образом, искомая область есть круг с центром в начале координат и радиусом 1. Она является замкнутой, так как включает в себя свою границу—окружность $x^2+y^2=1$.

2) Так как логарифм определен только при положительных значениях аргумента, то $9-x^2-y^2>0$, откуда $x^2+y^2<9$. Следовательно, областью определения данной функции служит внутренняя часть круга с центром в начале координат и радиусом 3. Эта область открытая, поскольку она не включает в себя свою границу — окружность $x^2+y^2=3$.

14.4. Вычислить частные значения функций:

1) $f(x, y)=\frac{3xy}{x^2+y^2}$ при $x=-2$, $y=8$;

2) $f(x, y)=\sqrt{y^2-4x^2}$ в точке $M(-4; 10)$;

3) $f(x, y)=xy+x/y$ при $x=1/2$, $y=3$.

14.5. Дана функция $F(x, y)=\frac{2x-y}{x-2y}$. Вычислить $F(3, 1)$, $F(1, 3)$, $F(-2, -4)$, $F(-4, -2)$, $F(a, a)$, $F(a, -a)$, $F(1, 1/a)$.

14.6. Дана функция $f(x, y)=\frac{y^2-x^2}{2xy}$. Найти $f(y, x)$, $f(-x, -y)$, $f(1/x, 1/y)$, $1/f(x, y)$.

14.7. Доказать, что для функции $F(x, y)=2x^3-x^2y-3xy^2+y^3$ выполняется равенство $F(tx, ty)=t^3F(x, y)$.

14.8. Построить области изменения переменных x и y, заданные неравенствами:

1) $-1<x<1$, $-2\leqslant y\leqslant 2$; 2) $x^2+y^2\leqslant 4$, $x\geqslant 0$;

3) $3x^2+y^2<9$, $x<0$, $y>0$; 4) $2<x+y\leqslant 5$.

14.9. Найти области определения функций:

1) $z=3-x^2-4y^2$; 2) $z=\frac{1}{x^2+y^2}$; 3) $z=\frac{1}{y-3x}$; 4) $z=\frac{1}{x^2-y^2}$;

5) $z=\sqrt{4-x^2-y^2}$; 6) $z=\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2-16}}$; 7) $z=\ln(x+y)$;

8) $z=\ln(1-x^2-2y^2)$; 9) $z=\arcsin(x+y)$;

10) $z=\arccos(2-x^2-y^2)$.

14.10. Периметр треугольника равен 18. Выразить площадь S треугольника как функцию двух его сторон x и y. Определить и построить область возможных значений x и y.

§ 2. ПОНЯТИЯ ПРЕДЕЛА И НЕПРЕРЫВНОСТИ ДЛЯ ФУНКЦИИ ДВУХ ПЕРЕМЕННЫХ

Число A называется *пределом* функции $z=z(x, y)=z(P)$ в точке $P_0(x_0; y_0)$, если для любого числа $\varepsilon>0$ существует такое число $\delta>0$, что для всех точек $P(x; y)$, лежащих внутри круга с центром в точке P_0 и радиусом δ (кроме, быть может, самой точки P_0), выполняется неравенство $|f(P)-A|<\varepsilon$. Коротко это записывается так:

$$\lim_{\substack{x\to x_0,\\ y\to y_0}} z(x, y)=A \quad \text{или} \quad \lim_{P\to P_0} z(P)=A.$$

Для функции двух переменных имеют место теоремы о пределе суммы, разности, произведения и частного, аналогичные соответствующим теоремам для функции одного аргумента.

Функция $z=z(x, y)=z(P)$ называется *непрерывной* в точке $P_0(x_0; y_0)$, если

$$\lim_{P\to P_0} z(P)=z(P_0).$$

Функция, непрерывная в каждой точке какой-либо области, называется непрерывной в этой области.

Точка P_0 называется *точкой разрыва* функции $z=z(P)$, если эта функция определена в некоторой окрестности точки P_0, а в самой точке P_0 непрерывность функции нарушается.

Сумма, разность, произведение и частное* непрерывных функций двух аргументов в некоторой точке также являются непрерывными функциями в этой точке.

Аналогично определяются понятия предела и непрерывности для функций трех и большего числа переменных.

14.11. Найти пределы:

$$1)\ \lim_{\substack{x\to 0,\\ y\to 3}} \frac{\sin(xy)}{x};\qquad 2)\ \lim_{\substack{x\to 0,\\ y\to 0}} \frac{x^2+y^2}{\sqrt{x^2+y^2+4}-2}.$$

Решение. 1) Так как $\dfrac{\sin(xy)}{x}=y\cdot\dfrac{\sin(xy)}{xy}$, то

$$\lim_{\substack{x\to 0,\\ y\to 3}} \frac{\sin(xy)}{x}=\lim_{y\to 3} y\cdot\lim_{xy\to 0}\frac{\sin(xy)}{xy}=3\cdot 1=3.$$

2) Здесь требуется вычислить предел при условии $P(x,y)\longrightarrow O(0;0)$, т. е. при условии $\rho=|OP|=\sqrt{x^2+y^2}\longrightarrow 0$. Находим

$$\lim_{\substack{x\to 0,\\ y\to 0}} \frac{x^2+y^2}{\sqrt{x^2+y^2+4}-2}=\lim_{\rho\to 0}\frac{\rho^2}{\sqrt{\rho^2+4}-2}=\lim_{\rho\to 0}\frac{\rho^2\left(\sqrt{\rho^2+4}+2\right)}{\rho^2}=4.$$

14.12. Исследовать на непрерывность функцию $z=\dfrac{x+1}{x^2+y^2}$.

Решение. Функция z как отношение двух многочленов (которые представляют собой функции, непрерывные на всей плоскости) является непрерывной на всей плоскости, за исключением точки $(0;0)$. В этой точке знаменатель обращается в нуль и, следовательно, функция z не определена.

В задачах **14.13—14.16** найти пределы.

14.13. $\lim\limits_{\substack{x\to 0,\\ y\to 2}} \dfrac{\operatorname{tg}(xy)}{x}$. **14.14.** $\lim\limits_{\substack{x\to 4,\\ y\to 0}} \dfrac{y}{\sin(xy)}$.

14.15. $\lim\limits_{\substack{x\to 0,\\ y\to 0}} \dfrac{3-\sqrt{xy+9}}{xy}$. **14.16.** $\lim\limits_{\substack{x\to 0,\\ y\to 0}} \dfrac{x^3+y^3}{x^2+y^2}$.

В задачах **14.17—14.24** найти точки разрыва функций.

14.17. $z=\ln(x^2+y^2)$. **14.18.** $z=\dfrac{y-1}{(x+1)^2+y^2}$.

14.19. $z=\dfrac{x+3y}{2y-x}$. **14.20.** $z=\dfrac{x^2+5y}{y^2-x^2}$. **14.21.** $z=\dfrac{4x-y}{x+y^2}$.

14.22. $z=\dfrac{5x+2y^2}{\sqrt{xy}}$. **14.23.** $z=\dfrac{1}{4-x^2-y^2}$.

14.24. $z=\dfrac{8}{x^2-y^2-3}$.

---

* В случае частного предполагается, что знаменатель отличен от нуля в рассматриваемой точке.

§ 3. ЧАСТНЫЕ ПРОИЗВОДНЫЕ И ПОЛНЫЙ ДИФФЕРЕНЦИАЛ

Частной производной функции $z=z(x, y)$ *по аргументу* x называется производная этой функции по x при постоянном y. Аналогично, *частной производной* функции $z=z(x, y)$ *по аргументу* y называется производная этой функции по y при постоянном x. Частные производные обозначаются следующим образом: z'_x, $\frac{\partial z}{\partial x}$; z'_y, $\frac{\partial z}{\partial y}$.

Частная производная функции нескольких переменных по одному из аргументов определяется как производная этой функции по соответствующему аргументу при условии, что остальные переменные считаются постоянными.

Полный дифференциал дифференцируемой функции $z=z(x, y)$ в некоторой точке $P(x; y)$ есть выражение вида

$$dz=\frac{\partial z}{\partial x}dx+\frac{\partial z}{\partial y}dy, \tag{1}$$

где $\frac{\partial z}{\partial x}$ и $\frac{\partial z}{\partial y}$ вычисляются в точке $P(x; y)$, а $dx=\Delta x$, $dy=\Delta y$.

Формула (1) для дифференциала остается в силе, если x и y являются функциями каких-либо других аргументов — в этом заключается свойство *инвариантности* полного дифференциала.

Аналогично определяется и вычисляется полный дифференциал функции любого числа переменных.

Теоремы и формулы для дифференциалов функций двух, трех и т. д. аргументов аналогичны соответствующим теоремам и формулам для функции одного аргумента.

Исходя из того, что дифференциал функции отличается от ее приращения на бесконечно малую величину более высокого порядка малости по сравнению с $\rho=\sqrt{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2}$, при достаточно малых Δx и Δy получаем формулу для приближенного вычисления значения функции $z(x, y)$ в точке $(x+\Delta x; y+\Delta y)$ по известным значениям функции $z(x, y)$ и ее частных производных $\frac{\partial z}{\partial x}$ и $\frac{\partial z}{\partial y}$ в данной точке $(x; y)$:

$$z(x+\Delta x, y+\Delta y)\approx z(x, y)+\frac{\partial z}{\partial x}\Delta x+\frac{\partial z}{\partial y}\Delta y. \tag{2}$$

14.25. Найти частные производные следующих функций:

$$1)\ z=x^3-3x^2y+2y^3;\quad 2)\ z=\arcsin\frac{y}{x};\quad 3)\ u=z^{xy^2}.$$

Решение. 1) При нахождении частной производной по x будем рассматривать y как величину постоянную. Тогда получим

$$\frac{\partial z}{\partial x}=3x^2-6xy.$$

Аналогично, рассматривая x как величину постоянную, найдем частную производную по y:

$$\frac{\partial z}{\partial y}=-3x^2+6y^2.$$

2) Имеем

$$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{1}{\sqrt{1-(y/x)^2}}\left(-\frac{y}{x^2}\right)=-\frac{y}{x\sqrt{x^2-y^2}},$$

$$\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{1}{\sqrt{1-(y/x)^2}}\cdot\frac{1}{x}=\frac{1}{\sqrt{x^2-y^2}}.$$

3) Здесь u есть функция трех независимых переменных x, y и z. При определении частной производной по каждой из этих переменных две другие следует считать постоянными величинами. Следовательно,

$$\frac{\partial u}{\partial x}=y^2z^{xy^2}\ln z;\quad \frac{\partial u}{\partial y}=2xyz^{xy^2}\ln z;\quad \frac{\partial u}{\partial z}=xy^2z^{xy^2-1}$$

(так как при дифференцировании по x и по y берется производная от показательной функции, а при дифференцировании по z — от степенной функции).

14.26. Вычислить полный дифференциал функции $z=1/\sqrt{x^2+y^2}$ в точке (1; —1).

Решение. Находим частные производные:

$$\frac{\partial z}{\partial x}=-\frac{1}{2(x^2+y^2)^{3/2}}\cdot 2x=-\frac{x}{(x^2+y^2)^{3/2}};\quad \frac{\partial z(1,\ -1)}{\partial x}=-\frac{1}{2\sqrt{2}}=-\frac{\sqrt{2}}{4};$$

$$\frac{\partial z}{\partial y}=-\frac{1}{2(x^2+y^2)^{3/2}}\cdot 2y=-\frac{y}{(x^2+y^2)^{3/2}};\quad \frac{\partial z(1,\ -1)}{\partial y}=\frac{1}{2\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{2}}{4}.$$

Таким образом, по формуле (1) получим

$$dz=-\frac{\sqrt{2}}{4}dx+\frac{\sqrt{2}}{4}dy.$$

14.27. Вычислить приближенно $(0{,}98)^{2{,}01}$.

Решение. Рассмотрим функцию $z=x^y$. Значение этой функции в точке (1; 2) равно $z(1,\ 2)=1$. Нам надо вычислить значение функции в точке (0,98; 2,01), т. е. $\Delta x=-0{,}02$, $\Delta y=0{,}01$.

Найдем значения частных производных $\frac{\partial z}{\partial x}$ и $\frac{\partial z}{\partial y}$ в точке (1; 2):

$$\frac{\partial z}{\partial x}=yx^{y-1};\quad \frac{\partial z(1,\ 2)}{\partial x}=2;\quad \frac{\partial z}{\partial y}=x^y\ln x;\quad \frac{\partial z(1,\ 2)}{\partial y}=0.$$

Следовательно, по формуле (2) получаем

$$(0{,}98)^{2{,}01}=z\,(0{,}98,\ 2{,}01)\approx z\,(1,\ 2)+\frac{\partial z(1,\ 2)}{\partial x}\Delta x+\frac{\partial z(1,\ 2)}{\partial y}\Delta y=$$
$$=1+2(-0{,}02)+0\cdot 0{,}01=0{,}96.$$

14.28. В усеченном конусе радиусы оснований $R=40$ см и $r=15$ см, а высота $H=50$ см. Как изменится объем конуса, если R увеличить на 2 мм, r — на 3 мм и H — на 1 мм?

Решение. Объем усеченного конуса

$$V=\frac{\pi H}{3}(R^2+r^2+Rr)$$

является функцией трех переменных R, r и H. Изменение объема конуса равно приращению ΔV, которое получает функция V при замене значений ее аргументов $R=40$, $r=15$ и $H=50$ на значения $R+\Delta R=40+0{,}2=40{,}2$, $r+\Delta r=15+0{,}3=15{,}3$ и $H+\Delta H=50+0{,}1=50{,}1$:

$$\Delta V=\pi\frac{H+\Delta H}{3}[(R+\Delta R)^2+(r+\Delta r)^2+(R+\Delta R)(r+\Delta r)]-\frac{\pi H}{3}(R^2+r^2+Rr).$$

Заменив входящие в выражение ΔV величины соответствующими числовыми значениями, можно получить числовое значение приращения ΔV. Поскольку это сопряжено с громоздкими арифметическими вычислениями, приближенное значение изменения объема конуса найдем, исходя из приближенного равенства $\Delta V \approx dV$. Так как

$$dV = \frac{\partial V}{\partial R}\Delta R + \frac{\partial V}{\partial r}\Delta r + \frac{\partial V}{\partial H}\Delta H,$$

где

$$\frac{\partial V}{\partial R} = \frac{\pi H}{3}(2R+r),\ \frac{\partial V}{\partial r} = \frac{\pi H}{3}(2r+R),\ \frac{\partial V}{\partial H} = \frac{\pi}{3}(R^2+r^2+Rr),$$

то отсюда получим

$$dV = \frac{\pi H}{3}(2R+r)\Delta R + \frac{\pi H}{3}(2r+R)\Delta r + \frac{\pi}{3}(R^2+r^2+Rr)\Delta H.$$

Подставляя в выражение для dV числовые значения $R=40$, $r=15$, $H=50$, $\Delta R=0{,}2$, $\Delta r=0{,}3$, $\Delta H=0{,}1$, находим

$$dV = \frac{50\pi}{3}(80+15)\,0{,}2 + \frac{50\pi}{3}(30+40)\,0{,}3 + \frac{\pi}{3}(40^2+15^2+40\cdot 15)\,0{,}1,$$

т. е. $dV=747{,}5\pi$. Таким образом, приближенное значение изменения объема равно $747{,}5\ \pi$ см^3.

В задачах **14.29—14.50** найти частные производные следующих функций.

14.29. $z=x^2-3y^2+5xy$. **14.30.** $z=x^3+6xy^2-4y^3-2xy$.

14.31. $z=\frac{x}{y}$. **14.32.** $z=\frac{y-2x}{x+2y}$. **14.33.** $z=\sqrt{x^2-y^2}$.

14.34. $z=y^x$. **14.35.** $z=x^{y^2}$. **14.36.** $z=e^{-y/x}$.

14.37. $z=\operatorname{arc\,tg}\frac{x}{y}$. **14.38.** $z=\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}$. **14.39.** $z=ye^{-xy}$.

14.40. $z=\ln(x+\sqrt{x^2+y^2})$. **14.41.** $\rho=u^4\cos^2\varphi$.

14.42. $s=\ln\sin(x-2t)$. **14.43.** $z=\ln\operatorname{tg}\frac{\sqrt{x}}{y}$.

14.44. $z=e^{\arcsin\sqrt{y/x}}$. **14.45.** $u=xy^2z^3$.

14.46. $u=\sqrt{x^2+y^2-z^2+2zx}$. **14.47.** $u=\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$.

14.48. $u=\frac{y}{x}-\frac{z}{y}+\frac{x}{z}$. **14.49.** $u=e^{x/y}+e^{-z/y}$. **14.50.** $u=y^{z^x}$.

14.51. Дано $f(x, y)=x^2\sin^2 y$; вычислить f'_x и f'_y в точке $(-1;\ \pi/4)$.

14.52. Дано $f(x, y)=\operatorname{arc\,tg}\frac{x+y}{x-y}$; вычислить $f'_x(3, -4)$ и $f'_y(-12, 5)$.

14.53. Дано $f(x, y, z)=x^{y/z}$; вычислить f'_x, f'_y и f'_z в точке $(e;\ 1;\ -1)$.

14.54. Показать, что функция $z=\ln(x^2+y^2)$ удовлетворяет уравнению $y\frac{\partial z}{\partial x}-x\frac{\partial z}{\partial y}=0$.

14.55. Проверить, что функция $z=\operatorname{arc\,tg}\frac{y}{x}$ удовлетворяет уравнению $x\frac{\partial z}{\partial x}+y\frac{\partial z}{\partial y}=0$.

14.56. Доказать, что функция $z=x^y$ удовлетворяет уравнению $\frac{x}{y}\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{1}{\ln x}\frac{\partial u}{\partial y}=2u$.

14.57. Проверить, что функция $u=(x-y)(y-z)(z-x)$ удовлетворяет уравнению $\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial u}{\partial z}=0$.

14.58. Показать, что $\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial u}{\partial z}=1$, если $u=x+\frac{x-y}{y-z}$.

В задачах **14.59—14.68** найти полные дифференциалы заданных функций.

14.59. $z=x^2y^3$. **14.60.** $z=\sqrt{x^2-y^2}$. **14.61.** $z=\frac{xy}{y-x}$.

14.62. $z=e^{y^2-xy}$. **14.63.** $z=\cos(xy)$. **14.64.** $z=\operatorname{arctg}\frac{x+y}{1-xy}$.

14.65. $u=x^2yz^4$. **14.66.** $u=\ln(x^3-y^3+2z^3)$. **14.67.** $u=\frac{y}{xz}$.

14.68. $u=xy^z$.

В задачах **14.69—14.72** вычислить значения полных дифференциалов функций.

14.69. $z=x/y$ при $x=1$, $y=2$, $dx=0{,}2$, $dy=0{,}1$.

14.70. $z=y/(y-x)$ при $x=1$, $y=2$, $dx=1/2$, $dy=-1/3$.

14.71. $z=e^{xy}$ при $x=-2$, $y=-1$, $dx=-0{,}3$, $dy=0{,}2$.

14.72. $u=z/\sqrt{x^2+y^2}$ при $x=3$, $y=4$, $z=5$, $dx=-0{,}1$, $dy=0{,}3$, $dz=0{,}2$.

В задачах **14.73—14.78** вычислить приближенные значения.

14.73. $(1{,}02)^{4{,}05}$. **14.74.** $\sqrt{8{,}04^2+6{,}03^2}$. **14.75.** $(1{,}02)^3(0{,}97)^2$.

14.76. $\ln(0{,}9^3+0{,}99^3)$. **14.77.** $\sin 32°\cos 59°$.

14.78. $\sqrt{2{,}03^2+5e^{0{,}02}}$.

14.79. Дан прямоугольник со сторонами $x=8$ м и $y=6$ м. Как изменятся длина диагонали l и площадь S прямоугольника, если бо́льшую сторону уменьшить на 1,2 см, а меньшую увеличить на 1,4 см?

14.80. Радиус основания R цилиндра равен 3 дм, а его высота H равна 10 дм. Как изменится объем V цилиндра, если R увеличить на 0,05 дм, а H уменьшить на 0,4 дм?

14.81. При деформации конуса его радиус основания r увеличился с 15 до 15,4 см, а высота H уменьшилась с 45 до 44,8 см. Найти приближенно изменение объема V конуса.

§ 4. ДИФФЕРЕНЦИРОВАНИЕ СЛОЖНЫХ ФУНКЦИЙ

Если $z=z(x, y)$ — дифференцируемая функция аргументов x и y, а x и y — дифференцируемые функции аргумента t: $x=x(t)$, $y=y(t)$, то производная *сложной функции* $z=z(x(t), y(t))=f(t)$ находится по формуле

$$\frac{dz}{dt}=\frac{\partial z}{\partial x}\frac{dx}{dt}+\frac{\partial z}{\partial y}\frac{dy}{dt}. \tag{1}$$

Если $z=z(x, y)$ — дифференцируемая функция аргументов x и y, а x и y, в свою очередь, являются функциями аргументов u и v: $x=x(u, v)$, $y=y(u, v)$ и имеют конечные частные производные по этим аргументам, то частные производные сложной функции $z=z(x(u, v), y(u, v))=\varphi(u,v)$ находятся по формулам

$$\frac{\partial z}{\partial u}=\frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial u}+\frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial u}, \quad \frac{\partial z}{\partial v}=\frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial v}+\frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial v}. \tag{2}$$

По аналогичным правилам вычисляются производные сложных функций, зависящих от большего числа аргументов.

14.82. Дано $z=x^3-xy$, где $x=1-t^2$, $y=t^4$. Найти $\frac{dz}{dt}$.

Решение. По формуле (1) имеем

$$\frac{dz}{dt}=(3x^2-y)(-2t)+(-x)\,4t^3=[3(1-t^2)^2-t^4](-2t)-(1-t^2)\,4t^3=$$
$$=2t\,(t^4-3+6t^2-3t^4+2t^4-2t^2)=2t\,(4t^2-3).$$

14.83. Дано $z=\operatorname{arc\,tg}\frac{y}{x}$, где $y=\sqrt{1-x}$. Найти $\frac{dz}{dx}$.

Решение. Здесь требуется вычислить производную $\frac{dz}{dx}$ сложной функции $z=\operatorname{arc\,tg}\frac{y}{x}$, где $x=x$, $y=\sqrt{1-x}$. Используя формулу (1) (где роль аргумента t в данном случае играет x), находим

$$\frac{dz}{dx}=\frac{\partial z}{\partial x}\frac{dx}{dx}+\frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial x}=\frac{\partial z}{\partial x}+\frac{\partial z}{\partial y}\frac{dy}{dx}=$$
$$=\frac{1}{1+y^2/x^2}\cdot\frac{-y}{x^2}+\frac{1}{1+y^2/x^2}\cdot\frac{1}{x}\cdot\frac{-1}{2\sqrt{1-x}}=$$
$$=-\left[\frac{y}{x^2+y^2}+\frac{x}{(x^2+y^2)\,2\sqrt{1-x}}\right]=-\left[\frac{\sqrt{1-x}}{x^2+1-x}+\frac{x}{2(x^2+1-x)\sqrt{1-x}}\right]=$$
$$=-\left[\frac{2-2x+x}{2(x^2-x+1)\sqrt{1-x}}\right]=\frac{x-2}{2(x^2-x+1)\sqrt{1-x}}.$$

14.84. Найти частные производные сложной функции $z=x^3e^y$, где $x=uv$, $y=u^2-v^2$.

Решение. По формулам (2) получаем

$$\frac{\partial z}{\partial u}=3x^2e^y\cdot v+x^3e^y\cdot 2u=3u^2v^2e^{u^2-v^2}\cdot v+u^3v^3e^{u^2-v^2}\cdot 2u=e^{u^2-v^2}u^2v^2(3v+2u^2v);$$

$$\frac{\partial z}{\partial v}=3x^2e^y\cdot u+x^3e^y(-2v)=3u^2v^2e^{u^2-v^2}\cdot u+u^3v^3e^{u^2-v^2}(-2v)=e^{u^2-v^2}u^3v^2(3-v^2).$$

В задачах **14.85—14.102** для заданных сложных функций найти указанные производные.

14.85. $z=e^{x-3y}$, $x=\sin t$, $y=t^2$. Найти $\frac{dz}{dt}$.

14.86. $z=\frac{y}{x}$, $x=e^t$, $y=1-e^{2t}$. Найти $\frac{dz}{dt}$.

14.87. $z=\arcsin(x-y)$, $x=4t^2$, $y=t^3$. Найти $\frac{dz}{dt}$.

14.88. $z=e^{x^2+y^2}$, $x=a\cos t$, $y=a\sin t$. Найти $\frac{dz}{dt}$.

14.89. $z=\ln\frac{x}{y}$, $x=\operatorname{tg}^2 t$, $y=\operatorname{ctg}^2 t$. Найти $\frac{dz}{dt}$.

14.90. $z=\ln(e^x+e^y)$, $y=x^2$. Найти $\frac{\partial z}{\partial x}$ и $\frac{dz}{dx}$.

14.91. $z=x^y$, $y=\ln x$. Найти $\frac{\partial z}{\partial x}$ и $\frac{dz}{dx}$.

14.92. $z=\frac{x^2-y}{x^2+y}$, $y=3x+1$. Найти $\frac{dz}{dx}$.

14.93. $z=\arcsin\frac{x}{y}$, $y=\sqrt{x^2+1}$. Найти $\frac{dz}{dx}$.

14.94. $z=\operatorname{arctg}\frac{x+y}{1-xy}$, $y=\cos x$. Найти $\frac{dz}{dx}$.

14.95. $u=\sin(x-3y-2z)$, $x=2t^3$, $y=t^2$, $z=-t^4$. Найти $\frac{du}{dt}$.

14.96. $u=\operatorname{tg}(x^2+4y-z)$, $y=\sqrt{x}$, $z=-1/x$. Найти $\frac{du}{dx}$.

14.97. $u=f(x, y, z)$, $y=1/x$, $z=\ln x$. Найти $\frac{du}{dx}$.

14.98. $z=x^2+y^2$, $x=u+v$, $y=u-v$. Найти $\frac{\partial z}{\partial u}$, $\frac{\partial z}{\partial v}$.

14.99. $z=\ln(x^2+y^2)$, $x=uv$, $y=u/v$. Найти $\frac{\partial z}{\partial u}$, $\frac{\partial z}{\partial v}$.

14.100. $z=x^2y-y^2x$, $x=u\cos v$, $y=u\sin v$. Найти $\frac{\partial z}{\partial u}$, $\frac{\partial z}{\partial v}$.

14.101. $z=\operatorname{arctg}\frac{x}{y}$, $x=u\sin v$, $y=u\cos v$. Найти $\frac{\partial z}{\partial u}$, $\frac{\partial z}{\partial v}$.

14.102. $z=f(x, y)$, $x=u^2-v^2$, $y=e^{uv}$. Найти $\frac{\partial z}{\partial u}$, $\frac{\partial z}{\partial v}$.

14.103. Проверить, что функция $z=(x^2+y^2)/2+\varphi(x-y)$ удовлетворяет уравнению $\frac{\partial z}{\partial x}+\frac{\partial z}{\partial y}=x+y$.

14.104. Проверить, что функция $z=xy+x\varphi(y/x)$ удовлетворяет уравнению $x\frac{\partial z}{\partial x}+y\frac{\partial z}{\partial y}=xy+z$.

14.105. Показать, что функция $x\varphi(y/x)-x^2-y^2$ удовлетворяет уравнению $x\frac{\partial z}{\partial x}+y\frac{\partial z}{\partial y}=z-x^2-y^2$.

14.106. Проверить, что функция $z=f(x, y)$, где $x=u+at$, $y=v+bt$, удовлетворяет уравнению

$$\frac{\partial z}{\partial t}=a\frac{\partial z}{\partial u}+b\frac{\partial z}{\partial v}.$$

14.107. Движение точки задано уравнениями $x=t^3$, $y=t$, $z=t^2$. С какой скоростью возрастает расстояние этой точки от начала координат?

Указание: расстояние r точки от начала координат определяется по формуле $r=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$, где x, y и z — координаты точки. Для нахождения искомой величины следует найти $\frac{dr}{dt}$.

§ 5. ДИФФЕРЕНЦИРОВАНИЕ НЕЯВНОЙ ФУНКЦИИ

Пусть переменная z есть неявная функция переменных x и y, заданная уравнением $F(x, y, z)=0$. Тогда если $F(x, y, z)$ — дифференцируемая функция трех переменных x, y, z и $F'_z(x, y, z)\neq 0$, то определяемая уравнением $F(x, y, z)=0$ неявная функция $z=z(x, y)$ также является дифференцируемой и ее частные производные находятся по формулам

$$\frac{\partial z}{\partial x}=-\frac{F'_x(x, y, z)}{F'_z(x, y, z)}, \quad \frac{\partial z}{\partial y}=-\frac{F'_y(x, y, z)}{F'_z(x, y, z)}. \tag{1}$$

В частности, если переменная y есть неявная функция одной переменной x, заданная уравнением $F(x, y)=0$, то

$$\frac{dy}{dx}=-\frac{F'_x(x, y)}{F'_y(x, y)}. \tag{2}$$

14.108. Найти производную неявной функции y, заданной уравнением $x^5+y^5-2xy=3$.

Решение. Здесь $F(x, y)=x^5+y^5-2xy-3$. Так как $F'_x=5x^4-2y$, $F'_y=5y^4-2x$, то по формуле (2) имеем

$$\frac{dy}{dx}=-\frac{5x^4-2y}{5y^4-2x}=\frac{2y-5x^4}{5y^4-2x}.$$

14.109. Найти частные производные функции $z=z(x, y)$, заданной уравнением $x^2+y^2+z^2+2xy-4y=1$.

Решение. Здесь $F(x, y, z)=x^2+y^2+z^2+2xy-4y-1$, поэтому $F'_x=2x+2y$, $F'_y=2y+2x-4$, $F'_z=2z$. Таким образом, по формулам (1) получим

$$\frac{\partial z}{\partial x}=-\frac{2x+2y}{2z}=-\frac{x+y}{z}, \quad \frac{\partial z}{\partial y}=-\frac{2y+2x-4}{2z}=\frac{2-x-y}{z}.$$

В задачах **14.110—14.125** найти указанные производные от неявных функций.

14.110. $x^3y-y^3x=16$. Найти $\frac{dy}{dx}$.

14.111. $x^2+y^2+\ln(x^2+y^2)=1$. Найти $\frac{dy}{dx}$.

14.112. $x+y=e^{y/x}$. Найти $\frac{dy}{dx}$. **14.113.** $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$. Найти $\frac{dy}{dx}$.

14.114. $x^y=y^x$. Найти $\frac{dy}{dx}$. **14.115.** $e^x\sin y=e^y\cos x$. Найти $\frac{dy}{dx}$.

14.116. x^3+y^3+6xy. Найти $\left.\frac{dy}{dx}\right|_{x=3}$.

14.117. $xy-\ln y=1$. Найти $\left.\dfrac{dy}{dx}\right|_{x=0}$.

14.118. $x\sin y+\cos 2y=\cos y$. Найти $\left.\dfrac{dy}{dx}\right|_{y=\pi/2}$.

14.119. $x+y+z=e^z$. Найти $\dfrac{\partial z}{\partial x}$ и $\dfrac{\partial z}{\partial y}$.

14.120. $x^2+y^2+z^2-8x=0$. Найти $\dfrac{\partial z}{\partial x}$ и $\dfrac{\partial z}{\partial y}$.

14.121. $x^3+y^3+z^3-3xyz=0$. Найти $\dfrac{\partial z}{\partial x}$ и $\dfrac{\partial z}{\partial y}$.

14.122. $x\sin y+y\sin x+z\sin x=1$. Найти $\dfrac{\partial z}{\partial y}$.

14.123. $e^z=\cos x\cos y$. Найти $\dfrac{\partial z}{\partial x}$ и $\dfrac{\partial z}{\partial y}$.

14.124. $z^2=xy$. Найти $\left.\dfrac{\partial z}{\partial x}\right|_{x=1,\ z=2}$, $\left.\dfrac{\partial z}{\partial y}\right|_{x=1,\ z=2}$.

14.125. $x^2-2y^2+z^2-4x+2z-1=0$. Найти $\left.\dfrac{\partial z}{\partial x}\right|_{x=0,\ y=1,\ z=1}$.

14.126. Найти угловой коэффициент касательной к кривой $x^2+y^2-10y=0$ в точке (4; 8).

14.127. Найти точки, в которых касательная к кривой $x^2-2y^2-4x+6y=0$ параллельна оси абсцисс.

14.128. Показать, что функция $y=y(x)$, заданная уравнением $e^y=xy$, удовлетворяет соотношению $xy'=y/(y-1)$.

14.129. Проверить, что функция $z=z(x,\ y)$, заданная уравнением $4\cos(5x+3y+2z)=5x+3y+2z$, удовлетворяет соотношению $\dfrac{\partial z}{\partial x}+\dfrac{\partial z}{\partial y}+4=0$.

§ 6. ЧАСТНЫЕ ПРОИЗВОДНЫЕ ВЫСШИХ ПОРЯДКОВ

Частными производными второго порядка функции $z=z(x,\ y)$ называются частные производные от частных производных первого порядка:

$$z''_{xx}=\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right),\quad z''_{xy}=\frac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y}=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right),$$

$$z''_{yx}=\frac{\partial^2 x}{\partial y\,\partial x}=\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right),\quad z''_{yy}=\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right).$$

Аналогично определяются и обозначаются частные производные третьего, четвертого и более высоких порядков.

Смешанные производные, отличающиеся только порядком дифференцирования $\left(\text{например, } \dfrac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y} \text{ и } \dfrac{\partial^2 z}{\partial y\,\partial x}\right)$, в случае их непрерывности равны между собой.

Частные производные высших порядков функций большего числа переменных определяются аналогично.

14.130. Найти частные производные второго порядка функции $z=x^2-2xy^2$. Проверить, что $\frac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y}=\frac{\partial^2 x}{\partial y\,\partial x}$.

Решение. Найдем частные производные первого порядка:

$$\frac{\partial z}{\partial x}=2x-2y^2,\quad \frac{\partial z}{\partial y}=-4xy.$$

Дифференцируя каждую из полученных производных по x и по y, получим вторые частные производные:

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=\frac{\partial}{\partial x}(2x-2y^2)=2,\quad \frac{\partial^2 z}{\partial y\,\partial x}=\frac{\partial}{\partial y}(2x-2y^2)=-4y,$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y}=\frac{\partial}{\partial x}(-4xy)=-4y,\quad \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=\frac{\partial}{\partial y}(-4xy)=-4x.$$

Сопоставляя выражения для смешанных производных, заключаем, что $\frac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y}=\frac{\partial^2 z}{\partial y\,\partial x}$.

14.131. Найти $\frac{\partial^3 z}{\partial x\,\partial y^2}$, если $z=\cos(xy)$.

Решение. Дифференцируя данную функцию дважды по y, а затем результат — по x, получим

$$\frac{\partial z}{\partial y}=-x\sin(xy),\quad \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=-x^2\cos(xy),$$

$$\frac{\partial^3 z}{\partial x\,\partial y^2}=\frac{\partial}{\partial x}(-x^2\cos(xy))=-2x\cos(xy)-x^2(-\sin(xy))\,y=$$
$$=-2x\cos(xy)+x^2y\sin(xy).$$

В задачах **14.132—14.147** для заданных функций найти указанные частные производные.

14.132. $z=x^3+3x^2y-2y^3$. Найти $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}$, $\frac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y}$, $\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}$.

14.133. $z=y\ln x$. Найти $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}$, $\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}$.

14.134. $z=\sqrt{2xy+y^2}$. Найти $\frac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y}$.

14.135. $z=x\sin(xy)+y\cos(xy)$. Найти $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}$.

14.136. $z=\frac{x-y}{x+y}$. Найти $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}$, $\frac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y}$, $\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}$.

14.137. $z=\ln\left(y+\sqrt{x^2+y^2}\right)$. Найти $\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}$.

14.138. $z=\operatorname{arctg}\frac{y}{x}$. Найти $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}$, $\frac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y}$, $\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}$.

14.139. $z=\sin y\ln x+e^x\ln y$. Найти $\frac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y}$, $\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}$.

14.140. $u=xz^2+\sin\frac{x}{y}$. Найти $\frac{\partial^2 u}{\partial x\,\partial y}$, $\frac{\partial^2 u}{\partial x\,\partial z}$, $\frac{\partial^2 u}{\partial y\,\partial z}$.

14.141. $u=e^{x\sqrt{y}/z}$. Найти $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$, $\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$, $\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}$.

14.142. $z=\ln(x+y)$. Найти $\frac{\partial^3 z}{\partial x^2 \partial y}$.

14.143. $z=\frac{x}{\sqrt[3]{y}}$. Найти $\frac{\partial^3 z}{\partial x^3}, \frac{\partial^3 z}{\partial x^2 \partial y}, \frac{\partial^3 z}{\partial x \partial y^2}, \frac{\partial^3 z}{\partial y^3}$.

14.144. $z=\sin(xy)$. Найти $\frac{\partial^3 z}{\partial x \partial y^2}$.

14.145. $z=e^{xy^2}$. Найти $\frac{\partial^3 z}{\partial x^2 \partial y}, \frac{\partial^3 z}{\partial x \partial y^2}$.

14.146. $u=\frac{x^4}{y^2 z^3}$. Найти $\frac{\partial^3 u}{\partial x \partial y \partial z}$.

14.147. $u=3^{xyz}$. Найти $\frac{\partial^3 u}{\partial x \partial y \partial z}$.

14.148. Проверить выполнение равенства $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}=\frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x}$ для функций:

1) $z=x^2\ln(x+y)$; 2) $z=\sin(ax+by)$; 3) $z=\operatorname{arctg}\frac{x}{y}$.

14.149. Проверить выполнение равенства $\frac{\partial^3 z}{\partial x^2 \partial y}=\frac{\partial^3 z}{\partial y \partial x^2}$ для функций:

1) $z=x^3y-4x^2y^2-3y^4$; 2) $z=\cos(x+e^y)$; 3) $z=\ln(x^2-y^2)$.

14.150. Показать, что функция $z=\ln(x^2+y^2)$ удовлетворяет уравнению $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=0$.

14.151. Показать, что функция $z=e^{x/y}$ удовлетворяет уравнению $y\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}=\frac{\partial z}{\partial y}-\frac{\partial z}{\partial x}$.

14.152. Проверить, что функция $z=x^2y^2/(x^2+y^2)$ удовлетворяет уравнению $x\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}+y\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}=z\frac{\partial z}{\partial x}$.

14.153. Проверить, что если $u=1/\sqrt{x^2+y^2+z^2}$, то выполняется соотношение $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}=0$.

§ 7. ЭКСТРЕМУМ ФУНКЦИИ МНОГИХ ПЕРЕМЕННЫХ

Точка P_0 называется *точкой максимума (минимума)* функции $f(P)$, если существует такая окрестность точки P_0, что для всех точек P из этой окрестности, отличных от P_0, выполняется неравенство

$$f(P)<f(P_0) \qquad [f(P)>f(P_0)].$$

Точки максимума и минимума функции называются *точками* ее *экстремума*, а значение функции в точке максимума (минимума) — *максимумом (минимумом)* или *экстремумом* функции.

Точками экстремума могут служить только *критические* точки, т. е. точки, принадлежащие области определения функции, в которых все ее частные производные обращаются в нуль или не существует хотя бы одна из них.

Точками экстремума являются лишь те из критических точек, в окрестности которых приращение функции $\Delta f=f(P)-f(P_0)$ не меняет знака. При этом *если $\Delta f>0$ ($\Delta f<0$), то критическая точка есть точка минимума (максимума).*

Для функции двух переменных $z=z(x, y)$, дважды дифференцируемой в критической точке P_0, исследование знака приращения Δz можно заменить рассмотрением знака дискриминанта

$$\Delta = AC - B^2,$$

где $A=z''_{xx}(P_0)$, $B=z''_{xy}(P_0)$, $C=z''_{yy}(P_0)$. При этом:

1) *если* $\Delta > 0$, *то* P_0 — *точка экстремума (точка максимума при* $A < 0$ *и точка минимума при* $A > 0$);

2) *если* $\Delta < 0$, *то в точке* P_0 *нет экстремума*;

3) если $\Delta = 0$, то требуется дополнительное исследование.

14.154. Найти экстремумы функций:

$$1)\ z=x^3+y^3-9xy;\quad 2)\ z=x^6+y^6.$$

Решение. 1) Найдем частные производные:

$$\frac{\partial z}{\partial x}=3x^2-9y,\quad \frac{\partial z}{\partial y}=3y^2-9x.$$

В данном случае критическими служат те точки, в которых частные производные обращаются в нуль. Таким образом, получаем систему уравнений

$$\left.\begin{array}{l}3x^2-9y=0,\\ 3y^2-9x=0,\end{array}\right\}\quad \text{или}\quad \left.\begin{array}{l}x^2=3y,\\ y^2=3x.\end{array}\right\}$$

Подставляя найденное из первого уравнения выражение $y=x^2/3$ во второе уравнение, имеем $x^4-27x=0$, откуда $x_1=0$, $x_2=3$. Итак, мы получили две критические точки (0; 0) и (3; 3).

Так как

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=6x,\quad \frac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y}=-9,\quad \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=6y,$$

то в точке (0; 0) имеем $A=0$, $B=-9$, $C=0$, откуда $\Delta=AC-B^2=-81<0$. Следовательно, в точке (0; 0) экстремума нет.

В точке (3; 3) имеем $A=18$, $B=-9$; $C=18$, откуда $\Delta=324-81>0$; значит, в рассматриваемой точке экстремум есть. Поскольку $A>0$, точка (3; 3) является точкой минимума. Значение функции в этой точке $z(3, 3)=3^3+3^3-9\cdot3\cdot3=-27$.

2) Здесь $z'_x=6x^5$, $z'_y=6y^5$. Решая систему уравнений

$$\left.\begin{array}{l}6x^5=0,\\ 6y^5=0,\end{array}\right\}$$

получим единственную критическую точку (0; 0). Так как $z''_{xx}=30x^4$, $z''_{xy}=0$, $z''_{yy}=30y^4$, то в рассматриваемой точке $A=B=C=0$ и, следовательно, $\Delta=0$, т. е. исследование знака дискриминанта ответа не дает. Учитывая, однако, что $z(0, 0)=0$, а во всех остальных точках $z(x, y)>0$, приходим к выводу, что в точке (0; 0) функция $z=x^6+y^6$ имеет минимум.

В задачах **14.155—14.166** исследовать на экстремум следующие функции.

14.155. $z=x^2+y^2-8x-2$.

14.156. $z=3x^2-y^2+4y+5$.

14.157. $z=x^2+xy+2y^2-x+y$.

14.158. $z=-x^2-xy-y^2+3x+6y$.

14.159. $z=-x^2-4y^2+5x-8y+3$.

14.160. $z=2xy-2x-6y+5$.

14.161. $z=x^3+xy^2+6xy$.

14.162. $z=x^3+8y^3+6xy-1$.

14.163. $z=(x^2+y^2)^{2/3}+4$.

14.164. $z=e^{x/2}(x+y^2)$.

14.165. $z=x^4+2y^4+3$.

14.166. $z=1-x^4-(y-2)^6$.

§ 8. НАИМЕНЬШЕЕ И НАИБОЛЬШЕЕ ЗНАЧЕНИЯ ФУНКЦИИ

Для отыскания *наименьшего* и *наибольшего* значений функции, непрерывной в ограниченной замкнутой области, надо:

1) найти критические точки, лежащие внутри области, и вычислить значения функции в этих точках;

2) найти критические точки на границе области и вычислить значения функции в этих точках;

3) выбрать среди полученных в п. 1 и 2 значений наименьшее и наибольшее.

14.167. Найти наименьшее и наибольшее значения функции $z=x^2-4x-y^2$ в круге $x^2+y^2\leqslant 9$.

Решение. 1. Найдем критические точки внутри данного круга D и вычислим значения функции в этих точках. Для этого находим частные производные $z'_x=2x-4$, $z'_y=-2y$ и решаем систему уравнений

$$\left.\begin{aligned} 2x-4&=0,\\ -2y&=0, \end{aligned}\right\}$$

откуда получаем единственную критическую точку (2; 0), лежащую внутри круга. Значение функции в этой точке $z(2,\ 0)=-4$.

2. Найдем критические точки на границе области — на окружности $x^2+y^2=9$. На этой окружности функция $z=x^2-4x-y^2$ превращается в функцию одной переменной (например, x). Из уравнения окружности выразим y через x; получим $y^2=9-x^2$. Подставляя в выражение для функции z вместо y^2 значение $9-x^2$, имеем

$$z=x^2-4x-y^2=x^2-4x-(9-x^2)=2x^2-4x-9.$$

Тем самым мы пришли к задаче на отыскание наименьшего и наибольшего значений функции одной переменной $z(x)=2x^2-4x-9$ на отрезке $[-3,\ 3]$ (так как x на окружности $x^2+y^2=9$ изменяется в пределах от -3 до 3). Для этого найдем критические точки функции, лежащие внутри отрезка $[-3,\ 3]$, и вычислим значения функции в этих точках. Имеем $z'=4x-4$, откуда $z'=0$ при $x=1$. Значение $z(x)$ в точке $x=1$ есть $z(1)=-11$, значения функции на концах отрезка $z(-3)=21$, $z(3)=-3$.

3. Итак, наименьшее и наибольшее значения функции z надо искать среди следующих ее значений: $z=-4$ — в точке (2; 0), $z=-11$ — в точках $(1;\ -2\sqrt{2})$ и $(1;\ 2\sqrt{2})$, $z=21$ — в точке $(-3;\ 0)$ и $z=-3$ — в точке (3; 0). Следовательно, наименьшее значение функции равно -11, а наибольшее ее значение равно 21:

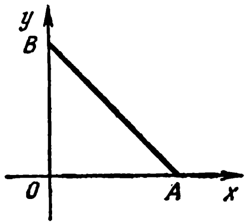


Рис. 81.

$$\min_D z=z(1,\ -2\sqrt{2})=z(1,\ 2\sqrt{2})=-11,\quad \max_D z=z(-3,\ 0)=21.$$

14.168. Найти наименьшее и наибольшее значения функции $z=xy(4-x-y)$ в треугольнике D, ограниченном прямыми $x=0$, $y=0$, $x+y=8$ (рис. 81).

Решение. 1. Найдем критические точки, лежащие внутри данного треугольника. Имеем

$$z'_x=4y-2xy-y^2=y(4-2x-y),\quad z'_y=4x-x^2-2xy=x(4-2y-x).$$

Приравнивая частные производные нулю, получим систему уравнений

$$\left.\begin{aligned} y(4-2x-y)&=0,\\ x(4-2y-x)&=0. \end{aligned}\right\}$$

Учитывая, что внутри треугольника $x > 0$, $y > 0$, приходим к системе

$$\left.\begin{aligned} 2x+y=4, \\ x+2y=4, \end{aligned}\right\}$$

откуда $x=4/3$, $y=4/3$. Полученная критическая точка (4/3; 4/3) лежит внутри треугольника. Значение функции z в этой точке

$$z(4/3,\ 4/3)=(4/3)(4/3)(4-4/3-4/3)=64/27.$$

2. Граница области состоит из трех участков OA, AB и BO, имеющих различные уравнения. На участках OA и BO, уравнения которых соответственно $y=0$ и $x=0$, значения функции равны нулю. На участке AB (его уравнение $y=8-x$, где $0 \leqslant x \leqslant 8$), функция $z=xy(4-x-y)$ превращается в функцию одной переменной $z=x(8-x)(4-x-8+x)=4x(x-8)$. Найдем критические точки функции $z(x)=4x(x-8)$ на отрезке [0, 8]: $z'_x=4(2x-8)=0$, откуда $x=4$. Вычислим значения $z(x)$ на концах отрезка [0, 8] и в точке $x=4$: $z(0)=0$, $z(4)=4\cdot 4(-4)=-64$, $z(8)=0$.

3. Ищем наименьшее и наибольшее значения функции z среди следующих ее значений: $z=64/27$ в точке (4/3; 4/3), $z=0$ — на прямых $x=0$, $y=0$; $z=-64$ в точке (4; 4). Таким образом, наименьшее значение функции z, равное -64, достигается ею на границе области в точке (4; 4), а наибольшее значение, равное 64/27, — внутри области в точке (4/3; 4/3):

$$\min_D z=z(4,\ 4)=-64, \quad \max_D z=z(4/3,\ 4/3)=64/27.$$

14.169. Разложить положительное число a на три неотрицательных слагаемых так, чтобы их произведение было наибольшим.

Решение. Обозначим первое слагаемое через x, второе — через y, тогда третье слагаемое равно $a-(x+y)$. По условию

$$x \geqslant 0, \quad y \geqslant 0, \quad a-(x+y) \geqslant 0. \tag{*}$$

Следовательно, задача сводится к отысканию в области D, определяемой неравенствами (*) (см. рис. 81), такой точки $(x; y)$, в которой функция $z=xy(a-x-y)$ принимает наибольшее значение.

Очевидно, что на границах области — прямых OA, AB и BO — функция z обращается в нуль, поэтому она достигает наибольшего значения внутри области D. Для отыскания критических точек внутри области надо решить систему уравнений

$$\left.\begin{aligned} z'_x=0, \\ z'_y=0, \end{aligned}\right\} \quad \text{или} \quad \left.\begin{aligned} y(a-2x-y)=0, \\ x(a-2y-x)=0. \end{aligned}\right\}$$

Так как внутри области $x > 0$, $y > 0$, то полученная система равносильна следующей:

$$\left.\begin{aligned} 2x+y=a, \\ x+2y=a. \end{aligned}\right\}$$

Решая эту систему, получим единственную критическую точку $x=a/3$, $y=a/3$, в которой функция $z=xy(a-x-y)$ достигает наибольшего значения.

Таким образом, искомые величины равны $x=a/3$, $y=a/3$ и $a-(x+y)=a/3$, т. е. для того чтобы произведение трех неотрицательных слагаемых, на которые разложено данное положительное число a, было наибольшим, необходимо разбить это число на три равные части.

В задачах **14.170—14.175** найти наименьшее и наибольшее значения для каждой из заданных функций в указанной замкнутой области D.

14.170. $z=x+y$; D—круг $x^2+y^2\leqslant 4$.

14.171. $z=x^2y$; D—круг $x^2+y^2\leqslant 1$.

14.172. $z=x^2+3y^2+x-y$; D—треугольник $x\leqslant 0$, $y\geqslant 0$, $y-x\leqslant 1$.

14.173. $z=x^3+y^3-9xy-25$; D—квадрат $0\leqslant x\leqslant 5$, $0\leqslant y\leqslant 5$.

14.174. $z=x^2y(4-x-y)$; D—треугольник $x\geqslant 0$, $y\geqslant 0$, $x+y\leqslant 6$.

14.175. $z=x^2+y^2-6x+4y+2$; D—прямоугольник $1\leqslant x\leqslant 4$, $-3\leqslant y\leqslant 2$.

14.176. Показать, что из всех треугольников, имеющих данный периметр $2p$, наибольшую площадь имеет равносторонний треугольник.

14.177. Из всех прямоугольных параллелепипедов, имеющих заданный объем V, найти тот, полная поверхность которого наименьшая.

14.178. Из всех прямоугольных параллелепипедов, имеющих заданную полную поверхность S, найти тот, объем которого наибольший.

14.179. Определить размеры открытого прямоугольного ящика с заданным объемом V, имеющего наименьшую поверхность.

14.180. Каковы должны быть размеры цилиндра наибольшего объема при условии, что его полная поверхность S равна 6π м²?

14.181. Определить размеры конуса наибольшего объема при условии, что его боковая поверхность S равна 4π м².

§ 9. ОПРЕДЕЛЕНИЕ И ВЫЧИСЛЕНИЕ ДВОЙНОГО ИНТЕГРАЛА

Пусть в некоторой ограниченной замкнутой области D плоскости xOy задана непрерывная функция $z=f(P)$. Разобьем эту область произвольным образом на n частичных плоских ячеек с площадями ΔS_1, ΔS_2, ..., ΔS_n. В каждой такой ячейке выберем по одной произвольной точке P_1, P_2, ..., P_n и вычислим значения функции $f(P)$ во взятых точках. Составим так называемую *интегральную сумму* функции $f(P)$ по области D:

$$\sum_{i=1}^{n} f(P_i)\,\Delta S_i=f(P_1)\,\Delta S_1+f(P_2)\,\Delta S_2+\ldots+f(P_n)\,\Delta S_n. \qquad (1)$$

Двойным интегралом от функции $f(P)$ по области D называется предел интегральных сумм (1) при стремлении к нулю наибольшего из диаметров* всех ячеек данного разбиения:

$$\iint_D f(P)\,dS=\lim_{\max d(S_i)\to 0}\sum_{i=1}^{n} f(P_i)\,\Delta S_i. \qquad (2)$$

Основные свойства двойного интеграла

1°. *Двойной интеграл от алгебраической суммы функций равен алгебраической сумме двойных интегралов от слагаемых функций:*

$$\iint_D [f_1(P)\pm f_2(P)]\,dS=\iint_D f_1(P)\,dS\pm\iint_D f_2(P)\,dS.$$

---

* Диаметром фигуры называется наибольшее из расстояний между ее точками.

2°. *Постоянный множитель можно выносить за знак двойного интеграла:*

$$\iint_D kf(P)\,dS = k\iint_D f(P)\,dS.$$

3°. *Область интегрирования двойного интеграла можно разбивать на части*, т. е. если область D состоит из двух областей D_1 и D_2, то

$$\iint_D f(P)\,dS = \iint_{D_1} f(P)\,dS + \iint_{D_2} f(P)\,dS.$$

При вычислении двойного интеграла в декартовых координатах (тогда двойной интеграл, как правило, записывается в виде $\iint_D f(x, y)\,dx\,dy$) различают следующие случаи.

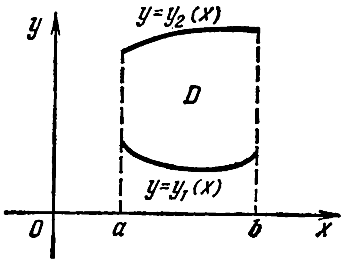


Рис. 82.

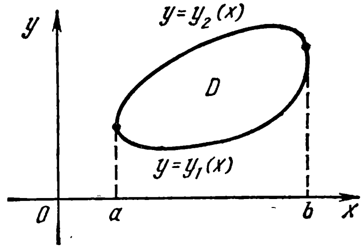


Рис. 83.

1. Область D на плоскости xOy является *простой относительно оси Ox*, т. е. проектируется в некоторый отрезок $[a, b]$ оси Ox так, что любая прямая, параллельная оси Oy и проходящая внутри отрезка $[a, b]$, пересекает границу области [линии $y=y_1(x)$ и $y=y_2(x)$ на рис. 82 и 83] в двух точках.

В этом случае вычисление двойного интеграла сводится к вычислению двукратного интеграла по следующей формуле:

$$\iint_D f(x, y)\,dx\,dy = \int_a^b dx \int_{y_1(x)}^{y_2(x)} f(x, y)\,dy. \qquad (3)$$

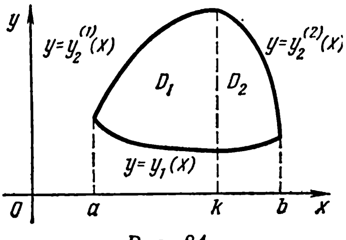


Рис. 84.

Здесь внутренний интеграл $\int_{y_1(x)}^{y_2(x)} f(x, y)\,dy$ берется по y при фиксированном, но произвольном на отрезке $[a, b]$ значении x. В результате получается некоторая функция от x, которая затем интегрируется в пределах от a до b.

Замечание. Если нижняя или верхняя граница области D состоит из нескольких участков, имеющих различные уравнения, то область D следует разбить на части прямыми, параллельными оси Oy и проходящими через точки, в которых «стыкуются» различные участки границы. Например, для области D, изображенной на рис. 84, вычисление двойного ннтеграла осуществляется по формуле

$$\iint_D f(x, y)\,dx\,dy = \iint_{D_1} f(x, y)\,dx\,dy + \iint_{D_2} f(x, y)\,dx\,dy =$$

$$= \int_a^k dx \int_{y_1(x)}^{y_2^{(1)}(x)} f(x, y)\,dy + \int_k^b dx \int_{y_1(x)}^{y_2^{(2)}(x)} f(x, y)\,dy.$$

2. Область D на плоскости xOy — *простая относительно оси* Oy, т. е. проектируется в некоторый отрезок $[c,\ d]$ оси Oy так, что любая прямая, параллельная оси Ox и проходящая внутри отрезка $[c,\ d]$, пересекает границу области [линии $x=x_1(y)$ и $x=x_2(y)$ на рис. 85 и 86] в двух точках.

В этом случае вычисление двойного интеграла сводится к вычислению двукратного интеграла по следующей формуле:

$$\iint\limits_D f(x,\ y)\,dx\,dy=\int\limits_c^d dy\int\limits_{x_1(y)}^{x_2(y)} f(x,\ y)\,dx. \tag{4}$$

Замечание. Если левая или правая граница области D состоит из нескольких участков, имеющих различные уравнения, то область D следует разбить на части прямыми, параллельными оси Ox и проходящими через точки, в

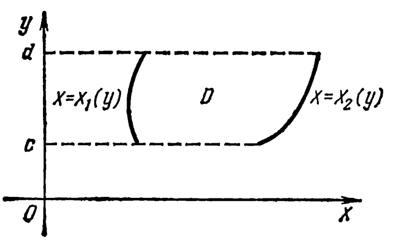


Рис. 85.

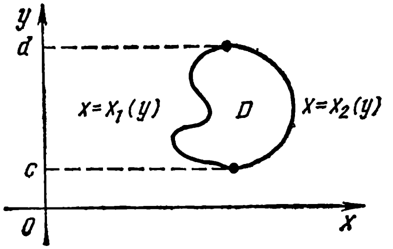


Рис. 86.

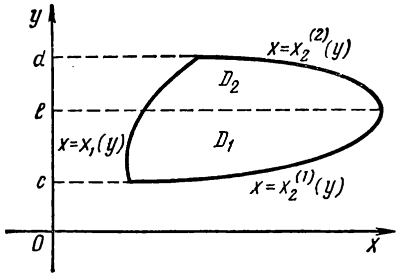


Рис. 87.

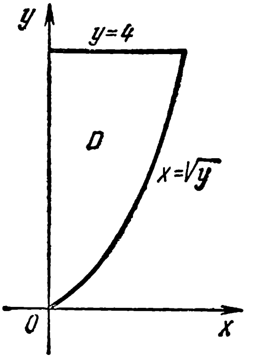


Рис. 88.

которых «стыкуются» различные участки границы. Например, для области D, изображенной на рис. 87, вычисление двойного интеграла осуществляется по формуле

$$\iint\limits_D f(x,\ y)\,dx\,dy=\iint\limits_{D_1} f(x,\ y)\,dx\,dy+\iint\limits_{D_2} f(x,\ y)\,dx\,dy=$$

$$=\int\limits_c^l dy\int\limits_{x_1(y)}^{x_2^{(1)}(y)} f(x,\ y)\,dx+\int\limits_l^d dy\int\limits_{x_1(y)}^{x_2^{(2)}(y)} f(x,\ y)\,dx.$$

Если область D одновременно удовлетворяет условиям, сформулированным как в п.1, так и в п. 2, то при вычислении двойного интеграла применимы обе формулы (3) и (4), т. е.

$$\iint_D f(x, y)\,dx\,dy=\int_a^b dx\int_{y_1(x)}^{y_2(x)} f(x, y)\,dy=\int_c^d dy\int_{x_1(y)}^{x_2(y)} f(x, y)\,dx.$$

При этом надо выбирать ту из двух указанных формул (такой порядок интегрирования), которая приводит к более простым выкладкам.

3. Область D не удовлетворяет условиям, сформулированным в п. 1 и 2. В этом случае ее надо разбить на конечное число областей D_1, D_2, ..., D_n, каждая из которых удовлетворяет этим условиям. Тогда

$$\iint_D f(x, y)\,dx\,dy=\iint_{D_1} f(x, y)\,dx\,dy+\iint_{D_2} f(x, y)\,dx\,dy+\ldots+\iint_{D_n} f(x, y)\,dx\,dy.$$

14.182. Вычислить двойной интеграл $\iint_D (x^2-y)\,dx\,dy$ по области D, ограниченной параболой $x=\sqrt{y}$ и прямыми $x=0$, $y=4$ (рис. 88).

Решение. Поскольку область D является простой как относительно оси Ox, так и относительно оси Oy, вычисление двойного интеграла можно произвести либо по формуле (3), либо по формуле (4). Вычислим данный интеграл двумя способами.

Сначала воспользуемся формулой (3). Пределами внутреннего интеграла являются соответственно функции $y=x^2$ и $y=4$, составляющие уравнения нижней и верхней границ области D, а пределами внешнего интеграла служат абсциссы $x=0$ и $x=2$ крайних точек области по оси абсцисс. Таким образом, имеем

$$\iint_D (x^2-y)\,dx\,dy=\int_0^2 dx\int_{x^2}^4 (x^2-y)\,dy=$$

$$=\int_0^2 \left[x^2y-\frac{y^2}{2}\right]_{x^2}^4 dx=\int_0^2 \left[(4x^2-8)-\left(x^4-\frac{x^4}{2}\right)\right]dx=$$

$$=\int_0^2 \left(4x^2-\frac{x^4}{2}-8\right)dx=\left[\frac{4x^3}{3}-\frac{x^5}{10}-8x\right]_0^2=-\frac{128}{15}.$$

Используем теперь для вычислений формулу (4). При этом в качестве пределов внутреннего интеграла берем соответственно функции $x=0$ и $x=\sqrt{y}$, составляющие уравнения левой и правой границ данной области, а пределы внешнего интеграла—это ординаты $y=0$ и $y=2$ крайних точек области по оси ординат. Следовательно,

$$\iint_D (x^2-y)\,dx\,dy=\int_0^4 dy\int_0^{\sqrt{y}} (x^2-y)\,dx=$$

$$=\int_0^4 \left[\frac{x^3}{3}-xy\right]_0^{\sqrt{y}} dy=\int_0^4 \left(\frac{y\sqrt{y}}{3}-y\sqrt{y}\right)dy=$$

$$=-\frac{2}{3}\int_0^4 y\sqrt{y}\,dy=-\frac{2}{3}\cdot\frac{2}{5}\left[y^{5/2}\right]_0^4=-\frac{128}{15}.$$

14.183. Вычислить двойной интеграл $\iint\limits_D (x+2y)\,dx\,dy$ по области D, ограниченной параболой $y=x^2/2$ и прямыми $y=3x$, $x=1$ и $x=2$ (рис. 89).

Решение. Здесь область D является простой как относительно оси Ox, так и относительно оси Oy. В то же время нижняя и верхняя границы области представлены одним уравнением (соответственно $y=x^2/2$ и $y=3x$) в отличие от левой и правой границ, каждая из которых составлена из двух участков. Поэтому вычислим данный интеграл по формуле (3):

$$\iint\limits_D (x+2y)\,dx\,dy=\int\limits_1^2 dx\int\limits_{x^2/2}^{3x}(x+2y)\,dy=$$

$$=\int\limits_1^2 [xy+y^2]_{x^2/2}^{3x}\,dx=\int\limits_1^2\left(3x^2+9x^2-\frac{x^3}{2}-\frac{x^4}{4}\right)dx=$$

$$=\left[4x^3-\frac{x^4}{8}-\frac{x^5}{20}\right]_1^2=\frac{983}{40}.$$

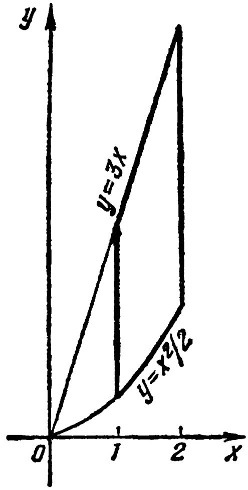


Рис. 89.

14.184. Вычислить двойной интеграл $\iint\limits_D x\,dx\,dy$ по области D, ограниченной гиперболой $y=1/x$ и прямыми $y=2$, $y=4$ и $x+y=6$ (рис. 90).

Решение. Область D является простой относительно оси Ox и относительно оси Oy. Так как левая и правая границы области представлены каждая одним уравнением (соответственно $x=1/y$ и $x=6-y$) в отличие от нижней и верхней границ, каждая из которых составлена из двух участков, то для вычисления интеграла воспользуемся формулой (4):

$$\iint\limits_D x\,dx\,dy=\int\limits_2^4 dy\int\limits_{1/y}^{6-y}x\,dx=\int\limits_2^4\left[\frac{x^2}{2}\right]_{1/y}^{6-y}dy=$$

$$=\frac{1}{2}\int\limits_2^4\left[(6-y)^2-\frac{1}{y^2}\right]dy=\frac{1}{2}\left[\frac{(y-6)^3}{3}+\frac{1}{y}\right]_2^4=\frac{221}{24}.$$

14.185. Изменить порядок интегрирования в интеграле

$$\int\limits_0^{\sqrt{2}/2}dx\int\limits_x^{\sqrt{1-x^2}}f(x,\,y)\,dy.$$

Решение. Прежде всего найдем область интегрирования, исходя из заданных пределов интеграла. Запишем уравнения линий, ограничивающих область D: $y=x$, $y=\sqrt{1-x^2}$, $x=0$, $x=\sqrt{2}/2$. Построив эти линии, получим область D (рис. 91). При изменении порядка интегрирования воспользуемся формулой (4). Область D является простой относительно оси Oy, но ее правая граница состоит из двух участков, уравнения которых $x=y$ и $x=\sqrt{1-y^2}$. Поэтому разобьем область D на две части D_1 и D_2, проведя прямую, параллельную оси Ox и проходящую через точку $(\sqrt{2}/2;\ \sqrt{2}/2)$, в которой «стыкуются»

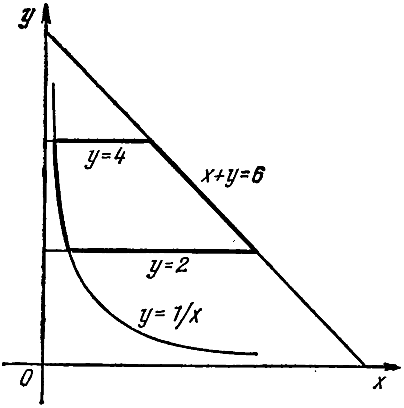


Рис. 90.

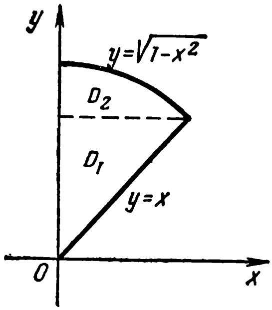


Рис. 91.

указанные участки правой границы. Тем самым интеграл по области D разобьется на сумму двух интегралов и, следовательно,

$$\int\limits_0^{\sqrt{2}/2} dx \int\limits_x^{\sqrt{1-x^2}} f(x, y)\,dy = \int\limits_0^{\sqrt{2}/2} dy \int\limits_0^{y} f(x, y)\,dx + \int\limits_{\sqrt{2}/2}^{1} dy \int\limits_0^{\sqrt{1-y^2}} f(x, y)\,dx.$$

В задачах **14.186—14.193** вычислить следующие двукратные интегралы:

14.186. $\int\limits_0^1 dy \int\limits_0^2 (x^2+y^2)\,dx.$ **14.187.** $\int\limits_0^2 dx \int\limits_0^3 (x^2+2xy)\,dy.$

14.188. $\int\limits_1^2 dx \int\limits_x^{x^2} (2x-y)\,dy.$ **14.189.** $\int\limits_1^2 dx \int\limits_x^{x\sqrt{3}} xy\,dy.$

14.190. $\int\limits_{-1}^1 dy \int\limits_0^{y^2} (x+2y)\,dx.$ **14.191.** $\int\limits_4^6 dx \int\limits_x^{2x} \frac{y}{x}\,dy.$

14.192. $\int\limits_1^3 dx \int\limits_{1/x}^{x} \frac{x^2}{y^2}\,dy.$ **14.193.** $\int\limits_3^4 dy \int\limits_0^{\ln y} e^x\,dx.$

В задачах **14.194—14.206** вычислить двойные интегралы по областям, ограниченным указанными линиями.

14.194. $\iint\limits_D \frac{dx\,dy}{(x+y)^2}$; $x=3,\ x=4,\ y=1,\ y=2.$

14.195. $\iint\limits_D xy\,dx\,dy$; $y=0,\ y=1-x^2.$

14.196. $\iint\limits_D (x+y)\,dx\,dy;\ x=0,\ y=0,\ x+y=3.$

14.197. $\iint\limits_D x\sqrt{y}\,dx\,dy;\ y=1,\ y=x,\ y=3x.$

14.198. $\iint\limits_D (x^2+2xy)\,dx\,dy;\ y=0,\ y=1,\ y=x,\ y=x-1.$

14.199. $\iint\limits_D x\,dx\,dy;\ x=-1,\ x=2,\ y=x+2,\ y=x^2.$

14.200. $\iint\limits_D x^3\,dx\,dy;\ x=0,\ y=x,\ y=2-x^2.$

14.201. $\iint\limits_D \frac{x^2}{y^2}\,dx\,dy;\ x=2,\ y=x,\ y=1/x.$

14.202. $\iint\limits_D \frac{x^3}{y}\,dx\,dy;\ y=4,\ y=x^2,\ y=x^2/4.$

14.203. $\iint\limits_D y\,dx\,dy;\ x=0,\ y=0,\ y=\sqrt{9-x^2}.$

14.204. $\iint\limits_D dx\,dy;\ y=x,\ y=x/4,\ x+2y=6.$

14.205. $\iint\limits_D y\,dx\,dy;\ y=\sqrt{x},\ y=-x,\ x-y=2.$

14.206. $\iint\limits_D \frac{x}{y^2}\,dx\,dy;\ y=x,\ y=9x,\ y=1/x.$

В задачах **14.207—14.218** изменить порядок интегрирования в следующих интегралах:

14.207. $\int\limits_2^4 dx\int\limits_2^x f(x,\ y)\,dy.$ 14.208. $\int\limits_0^1 dy\int\limits_y^{\sqrt{y}} f(x,\ y)\,dx.$

14.209. $\int\limits_0^3 dx\int\limits_0^{9-x^2} f(x,\ y)\,dy.$ 14.210. $\int\limits_1^e dx\int\limits_0^{\ln x} f(x,\ y)\,dy.$

14.211. $\int\limits_0^4 dy\int\limits_y^{8-y} f(x,\ y)\,dx.$ 14.212. $\int\limits_0^1 dx\int\limits_{x^2}^{2-x} f(x,\ y)\,dy.$

14.213. $\int\limits_1^3 dx\int\limits_x^{3x} f(x,\ y)\,dy.$ 14.214. $\int\limits_1^2 dy\int\limits_{1/y}^{y} f(x,\ y)\,dx.$

14.215. $\int\limits_0^2 dx\int\limits_{x^2}^{8-x^2} f(x,\ y)\,dy.$ 14.216. $\int\limits_{-1}^1 dx\int\limits_0^{\sqrt{1-x^2}} f(x,\ y)\,dy.$

14.217. $\int\limits_0^1 dx\int\limits_{x\sqrt{3}}^{\sqrt{4-x^2}} f(x,\ y)\,dy.$ 14.218. $\int\limits_0^2 dy\int\limits_{y^2/2}^{\sqrt{8-y^2}} f(x,\ y)\,dx.$

§ 10. ДВОЙНОЙ ИНТЕГРАЛ В ПОЛЯРНЫХ КООРДИНАТАХ

Формула преобразования двойного интеграла от декартовых координат x и y *к полярным координатам* ρ и φ, связанным с декартовыми соотношениями

$$x=\rho\cos\varphi,\quad y=\rho\sin\varphi,$$

имеет вид

$$\iint\limits_D f(x,\ y)\,dx\,dy=\iint\limits_D f(\rho\cos\varphi,\ \rho\sin\varphi)\,\rho\,d\rho\,d\varphi, \tag{1}$$

где ρ и φ — полярные координаты точек области D.

Вычисление двойного интеграла в полярных координатах сводится к вычислению повторных интегралов по ρ и по φ в зависимости от характера области D.

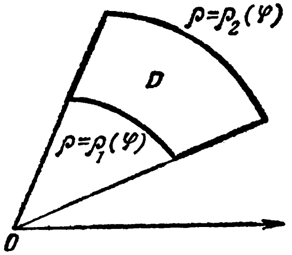


Рис. 92.

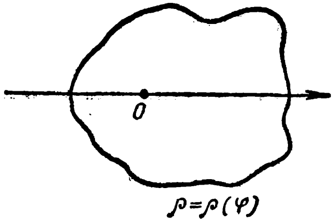


Рис. 93.

1. Если область D ограничена лучами, образующими с полярной осью углы φ_1 и φ_2, и кривыми $\rho=\rho_1(\varphi)$ и $\rho=\rho_2(\varphi)$ (где $\varphi_1<\varphi_2$, $\rho_1<\rho_2$; рис. 92), то

$$\iint\limits_D f(x,\ y)\,dx\,dy=\int\limits_{\varphi_1}^{\varphi_2} d\varphi\int\limits_{\rho_1(\varphi)}^{\rho_2(\varphi)} f(\rho\cos\varphi,\ \rho\sin\varphi)\,\rho\,d\rho. \tag{2}$$

2. Если область D ограничена линией $\rho=\rho(\varphi)$ и начало координат лежит внутри области (рис. 93), то

$$\iint\limits_D f(x,\ y)\,dx\,dy=\int\limits_0^{2\pi} d\varphi\int\limits_0^{\rho(\varphi)} f(\rho\cos\varphi,\ \rho\sin\varphi)\,\rho\,d\rho. \tag{3}$$

Если же область интегрирования не удовлетворяет указанным условиям, то для вычисления двойного интеграла с помощью однократных интегрирований по ρ и по φ надо предварительно разбить область на части, обладающие отмеченными выше свойствами.

14.219. Вычислить двойной интеграл

$$\iint\limits_D \sqrt{4-x^2-y^2}\,dx\,dy,$$

где область D—кольцо, ограниченное окружностями $x^2+y^2=1$, $x^2+y^2=4$.

Решение. Уравнения окружностей $x^2+y^2=1$ и $x^2+y^2=4$ в полярных координатах соответственно имеют вид $\rho=1$ и $\rho=2$, причем полярный угол φ изменяется в пределах от 0 до 2π; подынтегральная функция $\sqrt{4-x^2-y^2}$ в полярных координатах запишется в виде $\sqrt{4-\rho^2}$. Следовательно, по формуле (1) имеем

$$\iint\limits_D \sqrt{4-x^2-y^2}\,dx\,dy = \int\limits_0^{2\pi} d\varphi \int\limits_1^2 \sqrt{4-\rho^2}\,\rho\,d\rho =$$
$$= [\varphi]_0^{2\pi}\left[-\frac{1}{3}(4-\rho^2)^{3/2}\right]_1^2 = 2\pi\cdot\frac{1}{3}\cdot 3^{3/2} = 2\pi\sqrt{3}$$

(так как интегралы, составляющие двукратный интеграл, не зависят друг от друга, то последний равен произведению этих интегралов).

В задачах 14.220—14.225 перейти в двойном интеграле $\iint\limits_D f(x, y)\,dx\,dy$ к полярным координатам и расставить пределы интегрирования.

14.220. Область D — круг $x^2+y^2\leqslant 9$.

14.221. Область D — полукруг $x^2+y^2\leqslant 1$, $y\geqslant 0$.

14.222. Область D — круговой сектор $x^2+y^2\leqslant 4$, $y\geqslant x$, $y\leqslant x\sqrt{3}$, $x\geqslant 0$.

14.223. Область D — круговое кольцо $x^2+y^2\geqslant 4$, $x^2+y^2\leqslant 25$.

14.224. Область D — круг $(x-1)^2+y^2\leqslant 1$.

14.225. Область D — круг $x^2+(y-2)^2\leqslant 4$.

В задачах 14.226—14.232 вычислить с помощью перехода к полярным координатам двойные интегралы по указанным областям.

14.226. $\iint\limits_D \sqrt{x^2+y^2}\,dx\,dy$; D — I четверть круга $x^2+y^2\leqslant 9$.

14.227. $\iint\limits_D y\,dx\,dy$; D — круговой сектор $x^2+y^2\leqslant 1$, $-1\leqslant x\leqslant 0$, $0\leqslant y\leqslant 1$.

14.228. $\iint\limits_D \frac{dx\,dy}{\sqrt{x^2+y^2}}$; D — круговое кольцо $x^2+y^2\geqslant 1$, $x^2+y^2\leqslant 4$.

14.229. $\iint\limits_D \frac{dx\,dy}{x^2+y^2+1}$; D — полукруг $x^2+y^2\leqslant 1$, $y\geqslant 0$.

14.230. $\iint\limits_D (x^2+y^2)\,dx\,dy$; D — круг $x^2+y^2\leqslant 4x$.

14.231. $\iint\limits_D \sqrt{1-x^2-y^2}\,dx\,dy$; D — круговой сектор $x^2+y^2\leqslant 1$, $y\geqslant x\sqrt{3}/3$, $y\leqslant x\sqrt{3}$, $x\geqslant 0$.

14.232. $\iint\limits_D e^{-(x^2+y^2)}\,dx\,dy$; D — круг $x^2+y^2\leqslant 4$.

14.233. Вычислить $\iint\limits_D \rho^2 d\rho\, d\varphi$, если область D ограничена первым витком спирали $\rho = a\varphi$ и полярной осью.

14.234. Вычислить $\iint\limits_D \rho^2 \sin\varphi\, d\rho\, d\varphi$ по области D, ограниченной кардиоидой $\rho = a(1+\cos\varphi)$ и полярной осью, если $0 \leqslant \varphi \leqslant \pi$.

§ 11. ВЫЧИСЛЕНИЕ ПЛОЩАДИ ПЛОСКОЙ ОБЛАСТИ

Площадь S плоской области D вычисляется по следующим формулам:

$$S = \iint\limits_D dx\, dy \tag{1}$$

(в декартовых координатах);

$$S = \iint\limits_D \rho\, d\rho\, d\varphi \tag{2}$$

(в полярных координатах).

14.235. Вычислить площадь плоской области D, ограниченной прямой $x+y=2$ и параболой $y = x^2/4 - 1$.

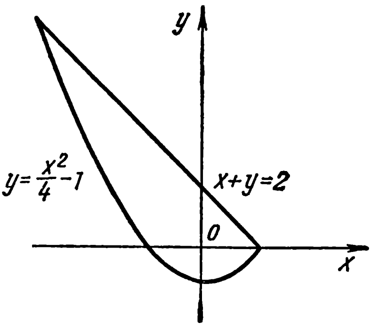


Рис. 94.

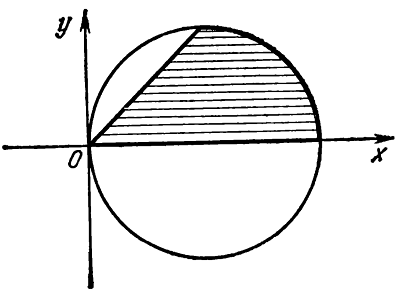


Рис. 95.

Решение. Решив совместно уравнения прямой и параболы, найдем точки пересечения заданных линий: (—6; 8) и (2; 0); искомая область D изображена на рис. 94. Используя теперь формулу (1), получим

$$S = \iint\limits_D dx\, dy = \int\limits_{-6}^{2} dx \int\limits_{x^2/4-1}^{2-x} dy = \int\limits_{-6}^{2} \left[(2-x) - \left(\frac{x^2}{4} - 1\right)\right] dx =$$

$$= \left[3x - \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{12}\right]_{-6}^{2} = \left(6 - 2 - \frac{2}{3}\right) - \left(-18 - 18 + 18\right) = \frac{64}{3} \text{ (кв. ед.)}$$

14.236. Вычислить площадь плоской области D, ограниченной окружностью $x^2+y^2=2x$ и прямыми $y=0$, $y = x\sqrt{3}$ (рис. 95).

Решение. Искомую площадь будем вычислять в полярных координатах. Используя соотношения $x=\rho\cos\varphi$, $y=\rho\sin\varphi$, запишем уравнение окружности $x^2+y^2=2x$ в полярных координатах; получим $\rho^2=2\rho\cos\varphi$, т. е. $\rho=2\cos\varphi$. Угол φ в области D изменяется от 0 до $\pi/3$. Таким образом, по формуле (2) находим

$$S=\iint\limits_D \rho\,d\rho\,d\varphi=\int\limits_0^{\pi/3} d\varphi \int\limits_0^{2\cos\varphi} \rho\,d\rho=\int\limits_0^{\pi/3}\left[\frac{\rho^2}{2}\right]_0^{2\cos\varphi} d\rho=2\int\limits_0^{\pi/3}\cos^2\varphi\,d\varphi=$$

$$=\int\limits_0^{\pi/3}(1+\cos 2\varphi)\,d\varphi=\left[\varphi+\frac{\sin 2\varphi}{2}\right]_0^{\pi/3}=\frac{\pi}{3}+\frac{\sqrt{3}}{4}\approx 1{,}48 \text{ (кв. ед.)}$$

В задачах **14.237—14.253** найти площади плоских областей, ограниченных заданными линиями.

14.237. $y=0$, $y=4$, $y=-x$, $y=(x-1)/2$.

14.238. $y=9/x$, $y=x$, $x=6$. **14.239.** $y^2=-x$, $x=-4$.

14.240. $y=x^2$, $x+y=6$. **14.241.** $y^2=2x$, $y=-x$.

14.242. $y=4x-x^2$, $y=3x^2$. **14.243.** $y^2=-x+4$, $y^2=2x-5$.

14.244. $y=\ln x$, $y=x-1$, $y=-1$.

14.245. $y=\sin x$, $y=\cos x$, $x=0$.

14.246. $y=x/4$, $y=2x$, $x+3y-7=0$.

14.247. $y=x^2/2$, $y=x+3$, $2x+y-6=0$.

14.248. $\rho=2$, $\varphi=\pi/4$, $\varphi=\pi/3$. **14.249.** $\rho=3\cos\varphi$.

14.250. $\rho=a(1+\cos\varphi)$.

14.251. $x^2+y^2=1$, $x^2+y^2=25$, $y=x\sqrt{3}$, $x\geqslant 0$.

14.252. $x^2+y^2=2y$, $y=x$, $x\geqslant 0$. **14.253.** $x^2+y^2=2x$, $x^2+y^2=4x$.

§ 12. ВЫЧИСЛЕНИЕ ОБЪЕМА ТЕЛА С ПОМОЩЬЮ ДВОЙНОГО ИНТЕГРАЛА

Объем V вертикального цилиндрического тела, ограниченного сверху поверхностью $z=z(x, y)$, а снизу—областью D плоскости xOy (рис. 96), находится по формуле

$$V=\iint\limits_D z(x, y)\,dx\,dy. \tag{1}$$

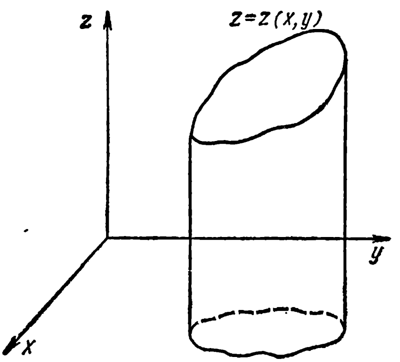


Рис. 96.

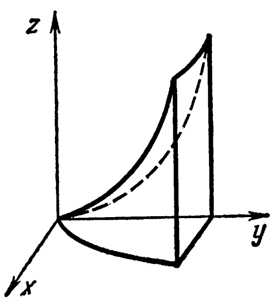


Рис. 97.

Вычисление объемов тел, не являющихся цилиндрическими, сводится к вычислению алгебраической суммы объемов нескольких цилиндрических тел.

14.254. Вычислить объем тела, ограниченного поверхностями $y=x^2$, $y=1$, $x=0$, $z=0$, $z=x^2+y^2$.

Решение. Данное тело (рис. 97) представляет собой вертикальный цилиндр, ограниченный сверху частью поверхности эллиптического параболоида $z=x^2+y^2$, а снизу — областью D плоскости xOy, заключенной между параболой $y=x^2$, осью Oy и прямой $y=1$. Таким образом, по формуле (1) находим

$$V=\iint\limits_D (x^2+y^2)\,dx\,dy=\int\limits_0^1 dx\int\limits_{x^2}^1 (x^2+y^2)\,dy=$$

$$=\int\limits_0^1\left[x^2y+\frac{y^3}{3}\right]_{x^2}^1 dx=\int\limits_0^1\left(x^2+\frac{1}{3}-x^4-\frac{x^6}{3}\right)dx=$$

$$=\left[\frac{x^3}{3}+\frac{x}{3}-\frac{x^5}{5}-\frac{x^7}{21}\right]_0^1=\frac{1}{3}+\frac{1}{3}-\frac{1}{5}-\frac{1}{21}=\frac{44}{105}\ \text{(куб. ед.)}$$

14.255. Вычислить объем тела, ограниченного поверхностями $z=0$, $x^2+y^2=2y$, $z=4-x^2-y^2$.

Решение. Данное тело (рис. 98) представляет собой вертикальный цилиндр, ограниченный сверху параболоидом $z=4-x^2-y^2$, а снизу — кругом D, уравнение граничной окружности которого $x^2+y^2=2y$. Следовательно,

$$V=\iint\limits_D (4-x^2-y^2)\,dx\,dy.$$

Так как область интегрирования есть круг, а подынтегральная функция зависит от x^2+y^2, то целесообразно перейти к полярным координатам. Уравнение окружности $x^2+y^2=2y$ в полярных координатах примет вид $\rho^2=2\rho\sin\varphi$, т. е. $\rho=2\sin\varphi$; полярный угол φ в области D изменяется от 0 до π; подынтегральная функция равна $4-\rho^2$. Поэтому

$$V=\iint\limits_D (4-\rho^2)\,\rho\,d\rho\,d\varphi=\int\limits_0^\pi d\varphi\int\limits_0^{2\sin\varphi}(4\rho-\rho^3)\,d\rho=$$

$$=\int\limits_0^\pi\left[2\rho^2-\frac{\rho^4}{4}\right]_0^{2\sin\varphi}d\varphi=\int\limits_0^\pi(8\sin^2\varphi-4\sin^4\varphi)\,d\varphi=$$

$$=\int\limits_0^\pi[4(1-\cos 2\varphi)-(1-\cos 2\varphi)^2]\,d\varphi=$$

$$=\int\limits_0^\pi\left(4-4\cos 2\varphi-1+2\cos 2\varphi-\frac{1+\cos 4\varphi}{2}\right)d\varphi=\frac{5\pi}{2}\ \text{(куб. ед.)}$$

14.256. Вычислить объем тела, ограниченного поверхностями $z=\sqrt{x^2+y^2}$ и $z=6-x^2-y^2$.

Решение. Данное тело снизу ограничено конусом $z=\sqrt{x^2+y^2}$, а сверху — параболоидом $z=6-x^2-y^2$ (рис. 99). Его объем можно найти как разность объемов двух вертикальных цилиндров, имеющих общее нижнее основание D на плоскости xOy, а сверху ограниченных заданными поверхностями:

$$V=V_1-V_2=\iint\limits_D (6-x^2-y^2)\,dx\,dy-\iint\limits_D \sqrt{x^2+y^2}\,dx\,dy=$$
$$=\iint\limits_D \left(6-x^2-y^2-\sqrt{x^2+y^2}\right)dx\,dy.$$

Область D есть основание цилиндра, проектирующего линию L пересечения данных поверхностей на плоскость xOy.

Чтобы найти уравнение этого цилиндра, надо исключить z из уравнений конуса и параболоида; для этого решим систему уравнений $z=\sqrt{x^2+y^2}$, $z=6-x^2-y^2$. Из первого уравнения следует, что $x^2+y^2=z^2$; подставляя

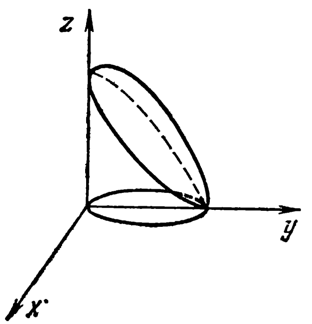


Рис. 98.

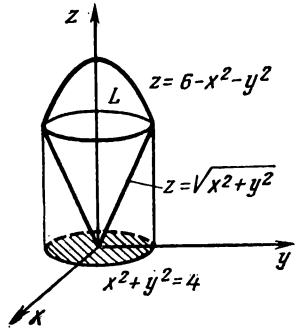


Рис. 99.

во второе уравнение z^2 вместо x^2+y^2, имеем $z=6-z^2$, откуда $z=2$ (значение $z=-3$ не годится, так как по условию $z\geqslant 0$). Теперь подставим $z=2$ в какое-нибудь из уравнений системы и получим $x^2+y^2=4$ — уравнение вертикальной цилиндрической поверхности, проходящей через линию L и проектирующей ее на плоскость xOy. Это уравнение является также и уравнением окружности в плоскости xOy, т. е. область D есть круг $x^2+y^2\leqslant 4$.

Для вычисления интеграла воспользуемся полярными координатами. Уравнение окружности $x^2+y^2=4$ примет вид $\rho=2$, где $0\leqslant\varphi<2\pi$, а подынтегральная функция равна $6-\rho^2-\rho$. Следовательно,

$$V=\iint\limits_D (6-\rho^2-\rho)\,\rho\,d\rho\,d\varphi=\int\limits_0^{2\pi} d\varphi\int\limits_0^{2} (6\rho-\rho^3-\rho^2)\,d\rho=$$
$$=\int\limits_0^{2\pi}\left[3\rho^2-\frac{\rho^4}{4}-\frac{\rho^3}{3}\right]_0^2 d\varphi=\int\limits_0^{2\pi}\left(12-4-\frac{8}{3}\right)d\varphi=\frac{32\pi}{3}\ \text{(куб. ед.)}$$

В задачах 14.257—14.271 вычислить объемы тел, ограниченных указанными поверхностями. (При решении задач 14.264—14.271 использовать полярные координаты.)

14.257. $3x+2y+z-6=0,\ x=0,\ y=0,\ z=0.$

14.258. $y=\sqrt{x},\ y=2\sqrt{x},\ x+z=4,\ z=0.$

14.259. $z=x^2+y^2,\ x+y=3,\ x=0,\ y=0,\ z=0.$

14.260. $x^2+y^2=1,\ x+y+z=3,\ z=0.$
14.261. $z=1-x^2-4y^2,\ z=0.$
14.262. $z=x^2-y^2,\ x=1,\ y=0,\ z=0.$
14.263. $x^2+y^2=9,\ x^2+z^2=9.$ **14.264.** $z=2-\sqrt{x^2+y^2},\ z=0.$
14.265. $x^2+y^2=9,\ z=5x,\ z=0.$
14.266. $z=1-x^2-y^2,\ y=x,\ y=x\sqrt{3},\ z=0$ (в I октанте).
14.267. $z=x^2+y^2,\ x^2+y^2=2x,\ z=0.$
14.268. $x^2+y^2+z^2=4,\ x^2+y^2=1$ (вне цилиндра).
14.269. $x^2+y^2=z^2,\ x^2+y^2=2x,\ z=0.$
14.270. $2z=2+x^2+y^2,\ z=4-x^2-y^2.$
14.271. $x^2+y^2+z^2=4,\ x^2+y^2=3z$ (внутри параболоида).

§ 13. ВЫЧИСЛЕНИЕ ПЛОЩАДИ ПОВЕРХНОСТИ

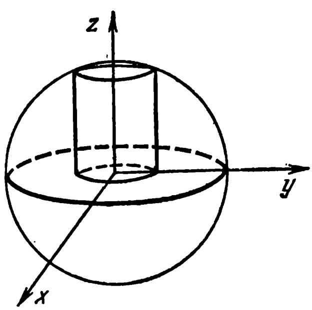


Рис. 100.

Если поверхность σ задана уравнением $z=z(x,\,y)$ и проектируется в область D плоскости xOy, то *площадь S поверхности* находится по формуле

$$S=\iint\limits_D \sqrt{1+z_x'^2+z_y'^2}\,dx\,dy. \qquad (1)$$

14.272. Вычислить площадь части поверхности полусферы $x^2+y^2+z^2=4$ $(z\geqslant 0)$, вырезанной цилиндром $x^2+y^2=1$ (рис. 100).

Решение. Уравнение поверхности σ имеет вид $z=\sqrt{4-x^2-y^2}$, область D есть круг, ограниченный окружностью $x^2+y^2=1$. Находим

$$z_x'=-\frac{x}{\sqrt{4-x^2-y^2}},\quad z_y'=-\frac{y}{\sqrt{4-x^2-y^2}}.$$

Используя теперь формулу (1), имеем

$$S=\iint\limits_D \sqrt{1+\frac{x^2+y^2}{4-x^2-y^2}}\,dx\,dy=2\iint\limits_D \frac{dx\,dy}{\sqrt{4-x^2-y^2}}.$$

Вычислим двойной интеграл в полярных координатах. Уравнение окружности $x^2+y^2=1$ примет вид $\rho=1$, причем $0\leqslant\varphi<2\pi$. Следовательно,

$$S=2\iint\limits_{D'}\frac{\rho\,d\rho\,d\varphi}{\sqrt{4-\rho^2}}=2\int_0^{2\pi}d\varphi\int_0^1\frac{\rho\,d\rho}{\sqrt{4-\rho^2}}=$$

$$=2\int_0^{2\pi}\left[-\sqrt{4-\rho^2}\right]_0^1 d\varphi=2\cdot 2\pi\,(-\sqrt{3}+2)=4\pi\,(2-\sqrt{3})\approx 0{,}88 \text{ (кв. ед.)}$$

В задачах **14.273—14.282** вычислить площади указанных частей данных поверхностей.

14.273. $6x+3y+2z=12$, лежащей в I октанте.

14.274. $z=x^2/2$, отсеченной плоскостями $y=x/2$, $y=x$, $x=2\sqrt{2}$.

14.275. $z=2\sqrt{x}$, вырезанной цилиндром $y^2=4x$ и плоскостью $x=1$.

14.276. $x^2+z^2=9$, вырезанной цилиндром $x^2+y^2=9$.

14.277. $x^2+y^2=2z$, заключенной внутри цилиндра $x^2+y^2=3$.

14.278. $z=\sqrt{x^2+y^2}$, заключенной внутри цилиндра $x^2+y^2=2x$.

14.279. $x^2+y^2+z^2=4$, заключенной внутри цилиндра $x^2+y^2=2y$.

14.280. $z=xy$, вырезанной цилиндром $x^2+y^2=8$.

14.281. $x^2+y^2+z^2=4$, заключенной внутри конуса $x^2+y^2=z^2$.

14.282. $x^2+y^2+z^2=3$, заключенной внутри параболоида $x^2+y^2=2z$.

§ 14. МЕХАНИЧЕСКИЕ ПРИЛОЖЕНИЯ ДВОЙНОГО ИНТЕГРАЛА

Если D — некоторая часть плоскости xOy, занимаемая материальной фигурой с плотностью $\gamma(x, y)$, то:

1) *масса* фигуры D вычисляется по формуле

$$m=\iint\limits_D \gamma(x, y)\,dx\,dy; \qquad (1)$$

2) *статические моменты* M_x и M_y фигуры D относительно координатных осей Ox и Oy — по формулам

$$M_x=\iint\limits_D y\gamma(x, y)\,dx\,dy, \quad M_y=\iint\limits_D x\gamma(x, y)\,dx\,dy; \qquad (2)$$

3) *координаты центра тяжести* — по формулам

$$\bar{x}=\frac{M_y}{m}, \quad \bar{y}=\frac{M_x}{m}; \qquad (3)$$

4) *моменты инерции* I_x, I_y *относительно координатных осей* Ox, Oy *и момент инерции* I_O *относительно начала координат* — соответственно по формулам

$$I_x=\iint\limits_D y^2\gamma(x, y)\,dx\,dy, \quad I_y=\iint\limits_D x^2\gamma(x, y)\,dx\,dy, \qquad (4)$$

$$I_O=\iint\limits_D (x^2+y^2)\,\gamma(x, y)\,dx\,dy. \qquad (5)$$

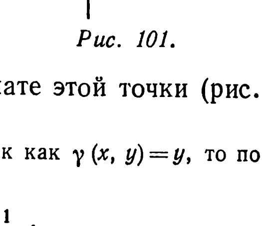


Рис. 101.

14.283. Найти координаты центра тяжести пластинки, ограниченной параболой $y=x^2$ и прямой $y=1$, если плотность распределения массы в каждой точке равна ординате этой точки (рис. 101).

Решение. Найдем сначала массу пластинки. Так как $\gamma(x, y)=y$, то по формуле (1) получим

$$m=\iint\limits_D y\,dx\,dy=\int\limits_{-1}^{1}dx\int\limits_{x^2}^{1}y\,dy=\int\limits_{-1}^{1}\left[\frac{y^2}{2}\right]_{x^2}^{1}dx=$$

$$=\frac{1}{2}\int\limits_{-1}^{1}(1-x^4)\,dx=\frac{1}{2}\left[x-\frac{x^5}{5}\right]_{-1}^{1}=\frac{4}{5}.$$

Используя формулы (2), вычислим статические моменты пластинки относительно координатных осей:

$$M_x=\iint_D y\cdot y\,dx\,dy=\iint_D y^2\,dx\,dy=\int_{-1}^{1}dx\int_{x^2}^{1}y^2\,dy=$$

$$=\int_{-1}^{1}\left[\frac{y^3}{3}\right]_{x^2}^{1}dx=\frac{1}{3}\int_{-1}^{1}(1-x^6)\,dx=\frac{1}{3}\left[x-\frac{x^7}{7}\right]_{-1}^{1}=\frac{4}{7};$$

$$M_y=\iint_D xy\,dx\,dy=\int_{-1}^{1}x\,dx\int_{x^2}^{1}y\,dy=\int_{-1}^{1}\left[\frac{xy^2}{2}\right]_{x^2}^{1}dx=$$

$$=\frac{1}{2}\int_{-1}^{1}(x-x^5)\,dx=\frac{1}{2}\left[\frac{x^2}{2}-\frac{x^6}{6}\right]_{-1}^{1}=0.$$

Теперь по формулам (3) находим координаты центра тяжести: $\bar{x}=0$, $\bar{y}=5/7$.

14.284. Вычислить момент инерции однородного квадрата со стороной, равной 2, относительно одной из его вершин.

Решение. Совместим начало координат с одной из вершин квадрата, а координатные оси Ox и Oy направим по двум его сторонам, исходящим из этой вершины. Тогда искомый момент инерции можно найти по формуле (5):

$$I_O=\iint_D (x^2+y^2)\,\gamma(x,y)\,dx\,dy.$$

Так как $\gamma(x, y)=\gamma=\text{const}$, то

$$I_O=\gamma\iint_D (x^2+y^2)\,dx\,dy=\gamma\int_0^2 dy\int_0^2 (x^2+y^2)\,dx=$$

$$=\gamma\int_0^2\left[\frac{x^3}{3}+xy^2\right]_0^2 dy=\gamma\int_0^2\left(\frac{8}{3}+2y^2\right)dy=\gamma\left[\frac{8}{3}y+\frac{2}{3}y^3\right]_0^2=\frac{32}{3}\gamma.$$

14.285. Найти массу квадратной пластинки со стороной a, плотность которой в любой точке пропорциональна квадрату расстояния этой точки от одной из вершин квадрата (коэффициент пропорциональности равен k).

14.286. Материальная пластинка имеет форму равнобедренного прямоугольного треугольника, длина гипотенузы которого равна a. Найти массу пластинки, если плотность в каждой точке пропорциональна ее расстоянию до гипотенузы.

14.287. Найти массу круглой пластинки радиуса r, если поверхностная плотность в каждой точке пропорциональна квадрату ее расстояния от центра пластинки.

14.288. Найти статический момент однородного полукруга ($\gamma=1$) радиуса r относительно его диаметра.

14.289. Пластинка имеет форму прямоугольного треугольника с катетами $|OA|=a$ и $|OB|=b$, причем ее плотность в любой точке равна расстоянию этой точки от катета OA. Определить статические моменты пластинки относительно катетов OA и OB.

14.290. Найти координаты центра тяжести однородной плоской фигуры, ограниченной параболами $y^2=x$, $y=x^2$.

14.291. Найти центр тяжести однородной плоской фигуры, ограниченной линиями $y=\sqrt{2x-x^2}$, $y=0$.

14.292. Найти центр тяжести пластинки, имеющей вид равнобедренного прямоугольного треугольника с катетами, длина которых равна a, если плотность в каждой точке пропорциональна квадрату ее расстояния от вершины прямого угла.

14.293. Найти центр тяжести однородной плоской фигуры, ограниченной окружностями $x=2\cos\varphi$, $y=4\cos\varphi$.

14.294. Найти центр тяжести и момент инерции относительно гипотенузы треугольника, данного в условии задачи **14.286**.

14.295. Вычислить момент инерции относительно начала координат однородной прямоугольной пластинки, ограниченной прямыми $x=0$, $x=3$, $y=0$, $y=7$.

14.296. Вычислить момент инерции однородной фигуры, ограниченной линиями $y=2\sqrt{x}$, $x+y=3$, $y=0$ относительно оси Ox.

14.297. Вычислить моменты инерции однородного прямоугольного треугольника с катетами $|OA|=a$ и $|OB|=b$: а) относительно вершины прямого угла; б) относительно катета OA.

14.298. Найти момент инерции однородного круга радиуса r относительно касательной.

14.299. Найти момент инерции относительно оси Ox однородной фигуры, ограниченной кардиоидой $\rho=a(1+\cos\varphi)$.

§ 15. ТРОЙНОЙ ИНТЕГРАЛ. ВЫЧИСЛЕНИЕ ТРОЙНОГО ИНТЕГРАЛА В ДЕКАРТОВЫХ КООРДИНАТАХ

Пусть в ограниченной замкнутой пространственной области G задана непрерывная функция $f(P)$. Разобьем эту область произвольным образом на n частичных пространственных ячеек с объемами ΔV_1, ΔV_2, ..., ΔV_n. В каждой такой ячейке выберем по одной произвольной точке P_1, P_2, ..., P_n и вычислим значения функции $f(P)$ в этих точках. Составим так называемую *интегральную сумму* функции $f(P)$ по области G:

$$\sum_{i=1}^{n} f(P_i)\,\Delta V_i = f(P_1)\,\Delta V_1 + f(P_2)\,\Delta V_2 + \ldots + f(P_n)\,\Delta V_n. \qquad (1)$$

Тройным интегралом от функции $f(P)$ по области G называется предел интегральных сумм (1) при стремлении к нулю наибольшего из диаметров всех ячеек данного разбиения:

$$\iiint_G f(P)\,dV = \lim_{\max d(V_i)\to 0} \sum_{i=1}^{n} f(P_i)\,\Delta V_i. \qquad (2)$$

Основные свойства тройного интеграла

1°. *Тройной интеграл от алгебраической суммы функций равен алгебраической сумме тройных интегралов от слагаемых функций:*

$$\iiint_G [f_1(P) \pm f_2(P)]\,dV = \iiint_G f_1(P)\,dV \pm \iiint_G f_2(P)\,dV.$$

2^0. *Постоянный множитель можно выносить за знак тройного интеграла:*

$$\iiint_G kf(P)\,dV = k\iiint_G f(P)\,dV.$$

3^0. *Область интегрирования тройного интеграла можно разбивать на части*, т. е. если область G состоит из двух областей G_1 и G_2, то

$$\iiint_G f(P)\,dV = \iiint_{G_1} f(P)\,dV + \iiint_{G_2} f(P)\,dV.$$

При вычислении тройного интеграла в декартовых координатах (в этом случае тройной интеграл, как правило, записывается в виде $\iiint_G f(x, y, z)\,dx\,dy\,dz$) поступают следующим образом.

Допустим, что область G проектируется в область D на плоскости xOy так, что любая прямая, параллельная оси Oz и проходящая внутри области D, пересекает границу области G только в двух точках. Это означает, что область G ограничена снизу поверхностью $z = z_1(x, y)$, сверху поверхностью $z = z_2(x, y)$ и с боков — цилиндрической поверхностью с образующими, параллельными оси Oz. Тогда тройной интеграл по области G вычисляется по формуле

$$\iiint_G f(x, y, z)\,dx\,dy\,dz = \iint_D dx\,dy \int_{z_1(x,\,y)}^{z_2(x,\,y)} f(x, y, z)\,dz. \qquad (3)$$

В формуле (3) внутренний интеграл $\int_{z_1(x,\,y)}^{z_2(x,\,y)} f(x, y, z)\,dz$ берется по z при фиксированных, но произвольных в области D значениях x и y. В результате получается некоторая функция, которая интегрируется затем по области D. Пусть область D ограничена линиями $x = a$, $x = b$, $y = y_1(x)$, $y = y_2(x)$; тогда вычисление рассматриваемого тройного интеграла сводится к вычислению трехкратного интеграла по формуле

$$\iiint_G f(x, y, z)\,dx\,dy\,dz = \int_a^b dx \int_{y_1(x)}^{y_2(x)} dy \int_{z_1(x,\,y)}^{z_2(x,\,y)} f(x, y, z)\,dz.$$

Порядок, в котором производится интегрирование, может быть и другим — это зависит от вида области G и от подынтегральной функции.

Если же область G имеет более сложный вид, то ее надо разбить на части $G_1, G_2, \ldots, G_n$, каждая из которых удовлетворяет сформулированным выше условиям, после чего вычислить данный интеграл как сумму интегралов по частичным областям.

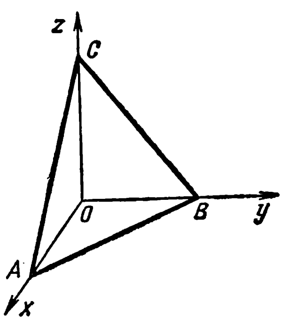


Рис. 102.

14.300. Вычислить тройной интеграл $\iiint_G (1+x)\,dx\,dy\,dz$, где область G ограничена плоскостями $x+y+z=1$, $x=0$, $y=0$, $z=0$.

Решение. Область G, ограниченная заданными плоскостями, представляет собой тетраэдр $OABC$ (рис. 102). Проекция этого тетраэдра на плоскость xOy есть область D — треугольник, ограниченный осями Ox, Oy и прямой $x+y=1$. Следовательно,

$$\iiint\limits_G (1+x)\,dx\,dy\,dz=\iint\limits_D dx\,dy\int\limits_0^{1-x-y}(1+x)\,dz=$$

$$=\iint\limits_D [(1+x)\,z]_0^{1-x-y}\,dx\,dy=\iint\limits_D (1+x)(1-x-y)\,dx\,dy=$$

$$=\int\limits_0^1 dy\int\limits_0^{1-y}(1-y-x^2-xy)\,dx=\int\limits_0^1\left[x-xy-\frac{x^3}{3}-\frac{x^2y}{2}\right]_0^{1-y}dy=$$

$$=\int\limits_0^1\left[1-y-y+y^2-\frac{(1-y)^3}{3}-\frac{(1-y)^2\,y}{2}\right]dy=$$

$$=\left[y-y^2+\frac{y^3}{3}+\frac{(y-1)^4}{12}-\frac{y^2}{4}+\frac{y^3}{3}-\frac{y^4}{8}\right]_0^1=$$

$$=1-1+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\frac{1}{3}-\frac{1}{8}-\frac{1}{12}=\frac{5}{24}.$$

В задачах **14.301—14.304** вычислить следующие трехкратные интегралы.

14.301. $\int\limits_0^2 dx\int\limits_0^3 dy\int\limits_0^4 (x+y+z)\,dz.$ **14.302.** $\int\limits_{-1}^1 dx\int\limits_{x^2}^1 dy\int\limits_0^2 (z+4)\,dz.$

14.303. $\int\limits_0^2 dx\int\limits_0^x dy\int\limits_0^y xyz\,dz.$ **14.304.** $\int\limits_0^{1/2} dx\int\limits_x^{2x} dy\int\limits_0^{\sqrt{1-x^2-y^2}} z\,dz.$

В задачах **14.305—14.311** вычислить тройные интегралы по областям, ограниченным указанными поверхностями.

14.305. $\iiint\limits_G (x^2+y^2+z^2)\,dx\,dy\,dz$; $x=0$, $x=a$, $y=0$, $y=b$, $z=0$, $z=c$.

14.306. $\iiint\limits_G y\,dx\,dy\,dz$; $x=0$, $x=2$, $y=0$, $y=1$, $z=0$, $z=1-y$.

14.307. $\iiint\limits_G xz^2\,dx\,dy\,dz$; $x=\sqrt{2y-y^2}$, $x=2$, $y=0$, $y=2$, $z=0$, $z=3$.

14.308. $\iiint\limits_G (2x+3y-z)\,dx\,dy\,dz$; $x=0$, $y=0$, $x+y=3$, $z=0$, $z=4$.

14.309. $\iiint\limits_G xyz\,dx\,dy\,dz$; $x=0$, $y=0$, $z=0$, $x+y+z=1$.

14.310. $\iiint\limits_G xy^2z^3\,dx\,dy\,dz$; $x=1$, $y=x$, $z=0$, $z=xy$.

14.311. $\iiint\limits_G \frac{dx\,dy\,dz}{(x+y+z+1)^3}$; $x=0$, $y=0$, $z=0$, $x+z=3$, $y=2$.

14.312. Вычислить тройной интеграл $\iiint\limits_G \frac{1}{z}\,dx\,dy\,dz$, где G — область, ограниченная конусом $z^2 = x^2 + y^2$ и плоскостями $z = 1$, $z = 4$ (рис. 103).

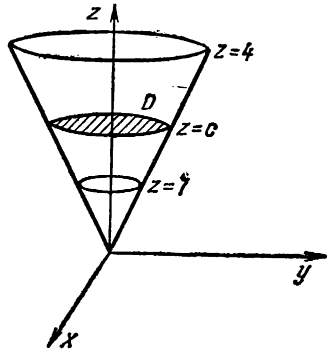


Рис. 103.

Решение. Представим данный интеграл следующим образом:

$$\iiint\limits_G \frac{1}{z}\,dx\,dy\,dz = \int\limits_1^4 \frac{1}{z}\,dz \iint\limits_D dx\,dy.$$

Здесь двукратный интеграл, стоящий под знаком внешнего интеграла, записан в виде двойного интеграла, взятого по области D, представляющей собой сечение области G плоскостью $z = c$ (где $1 \leqslant c \leqslant 4$). Таким образом, область D есть круг, ограниченный окружностью $\left.\begin{matrix} x^2 + y^2 = z^2, \\ z = c \end{matrix}\right\}$ и имеющий радиус, равный z. Следовательно, двойной интеграл $\iint\limits_D dxdy$ равен площади этого круга, т. е. $\iint\limits_D dx\,dy = \pi z^2$. Отсюда находим

$$\iiint\limits_G \frac{1}{z}\,dx\,dy\,dz = \int\limits_1^4 \frac{1}{z}\,dz \underbrace{\iint\limits_D dx\,dy}_{\pi z^2} = \int\limits_1^4 \pi z\,dz = \left[\frac{\pi z^2}{2}\right]_1^4 = \frac{15\pi}{2}.$$

В задачах **14.313—14.316** вычислить тройные интегралы по заданным областям.

14.313. $\iiint\limits_G z^2\,dx\,dy\,dz$; $\quad z = x^2 + y^2,\ z = 2,\ z = 6.$

14.314. $\iiint\limits_G z^3\,dx\,dy\,dz$; $\quad z = 4 - x^2 - y^2,\ z = 0,\ z = 3.$

14.315. $\iiint\limits_G \frac{1}{z}\,dx\,dy\,dz$; $\quad (x-1)^2 + y^2 = 1,\ z = 3,\ z = 6.$

14.316. $\iiint\limits_G \frac{1}{z^2}\,dx\,dy\,dz$; $\quad x^2 + y^2 + z^2 = 9,\ z = 1,\ z = 2.$

§ 16. ВЫЧИСЛЕНИЕ ТРОЙНОГО ИНТЕГРАЛА В ЦИЛИНДРИЧЕСКИХ И СФЕРИЧЕСКИХ КООРДИНАТАХ

Формула преобразования тройного интеграла от декартовых координат x, y и z *к цилиндрическим координатам* ρ, φ и z (рис. 104), связанным с декартовыми соотношениями

$$x = \rho\cos\varphi, \quad y = \rho\sin\varphi, \quad z = z \ (0 \leqslant \rho < +\infty,\ 0 \leqslant \varphi < 2\pi,\ -\infty < z < +\infty),$$

имеет вид

$$\iiint\limits_G f(x,\ y,\ z)\ dx\,dy\,dz = \iiint\limits_G f(\rho\cos\varphi,\ \rho\sin\varphi,\ z)\,\rho\,d\rho\,d\varphi\,dz, \qquad (1)$$

где ρ, φ и z — цилиндрические координаты точек области G.

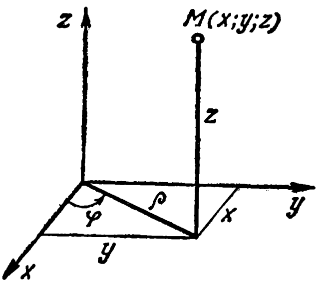


Рис. 104.

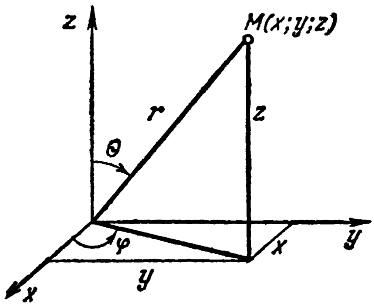


Рис. 105.

Формула преобразования тройного интеграла от декартовых координат x, y и z *к сферическим координатам* r, φ и θ (рис. 105), связанным с декартовыми соотношениями

$x = r\cos\varphi\sin\theta$, $y = r\sin\varphi\sin\theta$, $r = r\cos\theta$ $(0 \leqslant r < +\infty,\ 0 \leqslant \varphi < 2\pi,\ 0 \leqslant \theta < \pi)$,

имеет вид

$$\iiint\limits_G f(x,\ y,\ z)\,dx\,dy\,dz =$$

$$= \iiint\limits_G f(r\cos\varphi\sin\theta,\ r\sin\varphi\sin\theta,\ r\cos\theta)\,r^2\sin\theta\,dr\,d\varphi\,d\theta, \qquad (2)$$

где r, φ и θ — сферические координаты точек области G.

14.317. Вычислить тройной интеграл $\iiint\limits_G \sqrt{x^2+y^2}\,dx\,dy\,dz$, где область G ограничена параболоидом $z = x^2 + y^2$ и плоскостью $z = 4$ (рис. 106).

Решение. Данная пространственная область G проектируется в область D плоскости xOy, ограниченную окружностью $x^2 + y^2 = 4$ (ее уравнение получается в результате исключения z из уравнений параболоида $z = x^2 + y^2$ и плоскости $z = 4$).

Вычислим тройной интеграл в цилиндрических координатах. Уравнение параболоида при этом запишется следующим образом: $z = \rho^2\cos^2\varphi + \rho^2\sin^2\varphi$, т. е. $z = \rho^2$. В области G координаты ρ, φ и z изменяются так: $0 \leqslant \rho \leqslant 2$, $0 \leqslant \varphi < 2\pi$, $\rho^2 \leqslant z \leqslant 4$; подынтегральная функция $\sqrt{x^2+y^2} = \rho$. Таким образом, по формуле (1) находим

$$\iiint\limits_G \sqrt{x^2+y^2}\,dx\,dy\,dz = \iiint\limits_{G'} \rho\cdot\rho\,d\rho\,d\varphi\,dz = \int\limits_0^{2\pi} d\varphi \int\limits_0^2 \rho^2\,d\rho \int\limits_{\rho^2}^4 dz =$$

$$= 2\pi\int\limits_0^2 (4\rho^2 - \rho^4)\,d\rho = 2\pi\left[\frac{4}{3}\rho^3 - \frac{\rho^5}{5}\right]_0^2 = 2\pi\left(\frac{32}{3} - \frac{32}{5}\right) = \frac{128\pi}{15}.$$

14.318. Вычислить тройной интеграл $\iiint\limits_G z\,dx\,dy\,dz$, где область G ограничена сферой $x^2+y^2+z^2=4$ и конусом $z=\sqrt{x^2+y^2}$ и является внутренней по отношению к конусу (рис. 107).

Решение. Перейдем в данном интеграле к сферическим координатам. При этом уравнение сферы запишется в виде $r=2$, так как

$$r^2\cos^2\varphi\sin^2\theta+r^2\sin^2\varphi\sin^2\theta+r^2\cos^2\theta=r^2\sin^2\theta+r^2\cos^2\theta=r^2,$$

а уравнение конуса — в виде $r^2\cos^2\theta=r^2\sin^2\theta$, т. е. $\theta=\pi/4$. В области G координаты r, φ и θ изменяются следующим образом: $0\leqslant r\leqslant 2$, $0\leqslant\varphi<2\pi$, $0\leqslant\theta<\pi/4$.

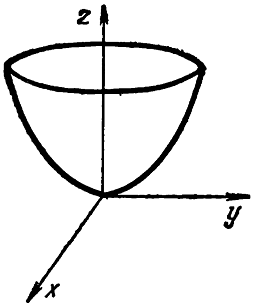


Рис. 106.

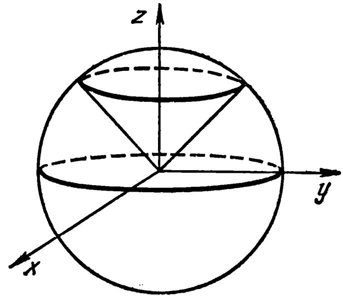


Рис. 107.

Теперь по формуле (2) получаем

$$\iiint\limits_G z\,dx\,dy\,dz=\iiint\limits_G r\cos\theta\, r^2\sin\theta\,dr\,d\varphi\,d\theta=$$

$$=\int\limits_0^{2\pi}d\varphi\int\limits_0^{\pi/4}\sin\theta\cos\theta\,d\theta\int\limits_0^2 r^3\,dr=[\varphi]_0^{2\pi}\cdot\left[\frac{\sin^2\theta}{2}\right]_0^{\pi/4}\cdot\left[\frac{r^4}{4}\right]_0^2=2\pi\cdot\frac{1}{4}\cdot 4=2\pi.$$

В задачах **14.319—14.328** перейти в тройном интеграле $\iiint\limits_G f(x,\ y,\ z)\,dx\,dy\,dz$ к цилиндрическим или к сферическим координатам и расставить пределы интегрирования.

14.319. Область G ограничена цилиндром $x^2+y^2=4$ и плоскостями $z=0$, $z=3$.

14.320. Область G ограничена параболоидом $z=9-x^2-y^2$ и плоскостью $z=1$.

14.321. Область G ограничена конусом $x^2+y^2=z^2$ и плоскостью $z=3$.

14.322. Область G ограничена цилиндром $x^2+y^2=2x$, параболоидом $z=x^2+y^2$ и плоскостью $z=0$.

14.323. Область G — часть шара $x^2+y^2+z^2\leqslant 25$, лежащая в I октанте.

14.324. Область G — часть пространства, заключенная между сферами $x^2+y^2+z^2=9$ и $x^2+y^2+z^2=16$.

14.325. Область G ограничена сферой $x^2+y^2+z^2=9$ и конусом $z=\sqrt{(x^2+y^2)/3}$ (внутри конуса).

14.326. Область G ограничена конусом $z=\sqrt{x^2+y^2}$ и параболоидом $2z=8-x^2-y^2$.

14.327. Область G ограничена сферой $x^2+y^2+z^2=16$ и параболоидом $x^2+y^2=6z$ (внутри параболоида).

14.328. Область G ограничена сферой $x^2+y^2+z^2=2z$ и конусом $x^2+y^2=z^2$.

В задачах **14.329—14.334** вычислить с помощью перехода к цилиндрическим или сферическим координатам тройные интегралы по указанным областям.

14.329. $\iiint\limits_G (x^2+y^2)\,dx\,dy\,dz$; G — полусфера $z=\sqrt{9-x^2-y^2}$.

14.330. $\iiint\limits_G z\sqrt{x^2+y^2}\,dx\,dy\,dz$; G — область, ограниченная цилиндром $x^2+y^2=2x$ и плоскостями $z=0$, $z=3$.

14.331. $\iiint\limits_G z\,dx\,dy\,dz$; G — область, ограниченная конусом $z^2=$ $=x^2+y^2$ и плоскостью $z=2$.

14.332. $\iiint\limits_G (x^2+y^2)\,dx\,dy\,dz$; G — область, ограниченная параболоидом $2z=x^2+y^2$ и плоскостью $z=2$.

14.333. $\iiint\limits_G \frac{dx\,dy\,dz}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$; G — область, заключенная между сферами $x^2+y^2+z^2=4$ и $x^2+y^2+z^2=16$.

14.334. $\iiint\limits_G (x^2+y^2+z^2)\,dx\,dy\,dz$; G — область, ограниченная сферой $x^2+y^2+z^2=9$ и конусом $z=\sqrt{x^2+y^2}$.

§ 17. ВЫЧИСЛЕНИЕ ОБЪЕМА ТЕЛА С ПОМОЩЬЮ ТРОЙНОГО ИНТЕГРАЛА

Объем V пространственного тела G вычисляется по следующим формулам:

$$V=\iiint\limits_G dx\,dy\,dz \tag{1}$$

(в декартовых координатах);

$$V=\iiint\limits_G \rho\,d\rho\,d\varphi\,dz \tag{2}$$

(в цилиндрических координатах);

$$V=\iiint\limits_G r^2\sin\theta\,dr\,d\varphi\,d\theta \tag{3}$$

(в сферических координатах).

14.335. Вычислить объем тела, ограниченного поверхностями $y=x^2$, $y=1$, $x+y+z=3$, $z=0$ (рис. 108).

Решение. Данное тело представляет собой вертикальный цилиндр, который ограничен сверху частью плоскости $z=3-x-y$, а снизу — областью D плоскости

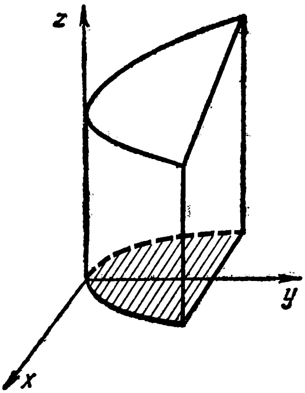


Рис. 108.

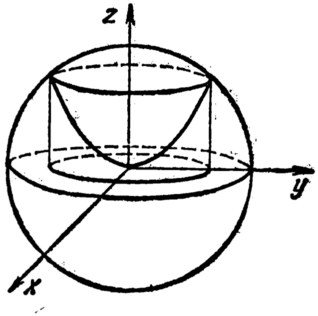


Рис. 109.

xOy, заключенной между параболой $y=x^2$ и прямой $y=1$. Объем этого тела находим по формуле (1):

$$V=\iiint\limits_G dx\,dy\,dz=\int_{-1}^{1}dx\int_{x^2}^{1}dy\int_0^{3-x-y}dz=$$

$$=\int_{-1}^{1}dx\int_{x^2}^{1}(3-x-y)\,dy=\int_{-1}^{1}\left[3y-xy-\frac{y^2}{2}\right]_{x^2}^{1}dx=$$

$$=\int_{-1}^{1}\left(3-x-\frac{1}{2}-3x^2+x^3+\frac{x^4}{2}\right)dx=$$

$$=\left[\frac{5}{2}x-\frac{x^2}{2}-x^3+\frac{x^4}{4}+\frac{x^5}{10}\right]_{-1}^{1}=\frac{16}{5}\text{ (куб. ед.)}$$

14.336. Вычислить объем тела, ограниченного параболоидом $2z=x^2+y^2$ и сферой $x^2+y^2+z^2=3$, внутренний по отношению к параболоиду (рис. 109).

Решение. Найдем проекцию данного пространственного тела G на плоскость xOy. Для этого исключим z из уравнений параболоида и сферы; тогда получим $z^2+2z-3=0$, откуда $z=1$. Это уравнение плоскости, в которой лежит линия пересечения параболоида и сферы. Подставляя найденное значение $z=1$ в уравнение параболоида, приходим к уравнению $x^2+y^2=2$, т. е. проекцией данного тела на плоскость xOy является область D, ограниченная окружностью $x^2+y^2=2$.

Вычислим искомый объем в цилиндрических координатах. Уравнение параболоида запишется при этом в виде $z=\rho^2/2$, а уравнение сферы — в виде $z=\sqrt{3-\rho^2}$.

В области G координаты ρ, φ и z изменяются так: $0 \leqslant \rho \leqslant \sqrt{2}$, $0 \leqslant \varphi < 2\pi$, $\rho^2/2 \leqslant z \leqslant \sqrt{3-\rho^2}$. Следовательно,

$$V = \iiint_G \rho\, d\rho\, d\varphi\, dz = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\sqrt{2}} \rho\, d\rho \int_{\rho^2/2}^{\sqrt{3-\rho^2}} dz = 2\pi \int_0^{\sqrt{2}} \left(\rho \sqrt{3-\rho^2} - \frac{\rho^3}{2}\right) d\rho =$$

$$= 2\pi \left[-\frac{1}{3}\sqrt{(3-\rho^2)^3} - \frac{\rho^4}{8}\right]_0^{\sqrt{2}} = 2\pi\left(-\frac{1}{3} - \frac{1}{2} + \sqrt{3}\right) = \frac{\pi}{3}(6\sqrt{3} - 5) \approx$$

$$\approx 5{,}66 \text{ (куб. ед.)}$$

В задачах **14.337—14.352** вычислить с помощью тройных интегралов объемы тел, ограниченных указанными поверхностями.

14.337. $x=0,\ y=1,\ y=3,\ z=0,\ x+2z=3.$
14.338. $y=4-x^2,\ y=x^2+2,\ z=-1,\ z=2.$
14.339. $y^2=x/2,\ x+2y+z=4,\ y=0,\ z=0.$
14.340. $x+y+z=6,\ 3x+2y=12,\ 3x+y=6,\ y=0,\ z=0.$
14.341. $x^2/4+y^2/9=1,\ y=0,\ z=x/2,\ z=x.$
14.342. $x^2+y^2=z+1,\ z=3.$
14.343. $x^2+y^2=1,\ y+z=2.$
14.344. $z=x^2+y^2,\ z=\sqrt{x^2+y^2}.$
14.345. $x^2+y^2=9-2z,\ x^2+y^2=1,\ z=0$ (вне цилиндра).
14.346. $3z=10-x^2-y^2,\ z=\sqrt{x^2+y^2}.$
14.347. $x^2+y^2=2z,\ x^2+y^2=4x,\ z=0.$
14.348. $x^2+y^2=z^2,\ x^2+y^2=2y,\ z=0.$
14.349. $x^2+y^2+z^2=4,\ x^2+y^2=2x$ (внутри цилиндра).
14.350. $x^2+y^2+z^2=4,\ x^2+y^2=3z$ (внутри параболоида).
14.351. $x^2+y^2+z^2=9,\ z^2=x^2+y^2$ (вне конуса).
14.352. $x^2+y^2+z^2=2z,\ z^2=x^2+y^2.$

§ 18. МЕХАНИЧЕСКИЕ ПРИЛОЖЕНИЯ ТРОЙНОГО ИНТЕГРАЛА

Если G — некоторая область пространства, занимаемая материальным телом с плотностью $\gamma(x, y, z)$, то:

1) *масса* тела V находится по формуле

$$m = \iiint_G \gamma(x, y, z)\, dx\, dy\, dz; \tag{1}$$

2) *статические моменты* M_{xy}, M_{yz}, M_{xz} тела G *относительно координатных плоскостей* xOy, yOz, xOz — по формулам

$$M_{xy} = \iiint_G z\gamma(x, y, z)\, dx\, dy\, dz,$$

$$M_{yz} = \iiint_G x\gamma(x, y, z)\, dx\, dy\, dz, \tag{2}$$

$$M_{xz} = \iiint_G y\gamma(x, y, z)\, dx\, dy\, dz;$$

3) *координаты центра тяжести* — по формулам

$$\bar{x} = \frac{M_{yz}}{m}, \quad \bar{y} = \frac{M_{xz}}{m}, \quad \bar{z} = \frac{M_{xy}}{m}; \tag{3}$$

4) *моменты инерции* I_x, I_y, I_z *относительно координатных осей* Ox, Oy, Oz, *моменты инерции* I_{xy}, I_{xz}, I_{yz} *относительно координатных плоскостей* xOy, xOz, yOz и *момент инерции* I_0 *относительно начала координат* — соответственно по формулам

$$I_x=\iiint\limits_G (z^2+y^2)\,\gamma\,dx\,dy\,dz,$$

$$I_y=\iiint\limits_G (x^2+z^2)\,\gamma\,dx\,dy\,dz, \qquad (4)$$

$$I_z=\iiint\limits_G (x^2+y^2)\,\gamma\,dx\,dy\,dz;$$

$$I_{xy}=\iiint\limits_G z^2\gamma\,dx\,dy\,dz,$$

$$I_{xz}=\iiint\limits_G y^2\,\gamma\,dx\,dy\,dz, \qquad (5)$$

$$I_{yz}=\iiint\limits_G x^2\gamma\,dx\,dy\,dz;$$

$$I_O=\iiint\limits_G (x^2+y^2+z^2)\,dx\,dy\,dz. \qquad (6)$$

14.353. Найти координаты центра тяжести однородного тела, ограниченного параболоидом $z=9-x^2-y^2$ и плоскостью $z=0$.

Решение. Так как тело G обладает круговой симметрией относительно оси Oz, то $\bar{x}=\bar{y}=0$. Остается найти аппликату $\bar{z}$ центра тяжести. Для этого, используя формулу (1), найдем массу тела G:

$$m=\iiint\limits_G \gamma\,dx\,dy\,dz=\gamma\iiint\limits_G dx\,dy\,dz.$$

Вычислим тройной интеграл в цилиндрических координатах. Уравнение параболоида при этом примет вид $z=9-\rho^2$; тело G проектируется в область D, ограниченную окружностью $x^2+y^2=9$, т. е. $0\leqslant\rho\leqslant 3$, $0\leqslant\varphi<2\pi$. Следовательно,

$$m=\gamma\int\limits_0^{2\pi}d\varphi\int\limits_0^3\rho\,d\rho\int\limits_0^{9-\rho^2}dz=2\pi\gamma\int\limits_0^3\rho\,(9-\rho^2)\,d\rho=$$

$$=2\pi\gamma\left[\frac{9\rho^2}{2}-\frac{\rho^4}{4}\right]_0^3=2\pi\gamma\left(\frac{81}{2}-\frac{81}{4}\right)=\frac{81\pi\gamma}{2}.$$

Далее, по первой из формул (2) находим

$$M_{xy}=\iiint\limits_G \gamma z\,dx\,dy\,dz=\gamma\int\limits_0^{2\pi}d\varphi\int\limits_0^3\rho\,d\rho\int\limits_0^{9-\rho^2}z\,dz=$$

$$=2\pi\gamma\int\limits_0^3\frac{\rho\,(9-\rho^2)^2}{2}\,d\rho=\pi\gamma\left[-\frac{(9-\rho^2)^3}{2\cdot 3}\right]_0^3=\frac{\pi\gamma\cdot 9^3}{6}=\frac{243\pi\gamma}{2}.$$

Таким образом,

$$\bar{z}=\frac{M_{xy}}{m}=\frac{243\pi\gamma/2}{81\pi\gamma/2}=3.$$

14.354. Найти момент инерции однородного шара ($\gamma=1$) радиуса 2 относительно его центра.

Решение. Совместим начало координат с центром шара. Тогда по формуле (6) имеем

$$I_O=\iiint\limits_G (x^2+y^2+z^2)\,dx\,dy\,dz.$$

Вычисляя этот интеграл в сферических координатах, находим

$$I_O=\int\limits_0^{2\pi} d\varphi\int\limits_0^{\pi}\sin\theta\,d\theta\int\limits_0^2 r^4\,dr=2\pi\,[-\cos\theta]_0^{\pi}\cdot\left[\frac{r^5}{5}\right]_0^2=2\pi\cdot 2\cdot\frac{32}{5}=\frac{128\pi}{5}.$$

14.355. Найти массу куба $0\leqslant x\leqslant a$, $0\leqslant y\leqslant a$, $0\leqslant z\leqslant a$, если плотность его в каждой точке $(x;\ y;\ z)$ равна $x+y+z$.

14.356. Найти массу тела, ограниченного цилиндрической поверхностью $x^2=2y$ и плоскостями $y+z=1$, $2y+z=2$, если в каждой его точке плотность численно равна ординате этой точки.

14.357. Найти массу цилиндра $x^2+y^2=4$, $0\leqslant z\leqslant 3$, если плотность в любой его точке пропорциональна квадрату расстояния этой точки от оси цилиндра.

14.358. Определить статический момент однородного конуса с радиусом основания r и высотой H относительно плоскости, проходящей через вершину параллельно основанию.

14.359. Найти статические моменты относительно координатных плоскостей пирамиды, образованной плоскостями $x+y+z=2$, $x=0$, $y=0$, $z=0$, если плотность в каждой точке численно равна абсциссе этой точки.

14.360. Найти координаты центра тяжести однородного тела, ограниченного поверхностями $z^2=xy$, $x=5$, $y=5$, $z=0$.

14.361. Найти центр тяжести однородного тела, ограниченного сферой $x^2+y^2+z^2=3$ и параболоидом $x^2+y^2=2z$.

14.362. Найти центр тяжести полусферы $z=\sqrt{4-x^2-y^2}$, если плотность в каждой точке численно равна расстоянию этой точки до центра основания.

14.363. Найти центр тяжести однородного шарового сектора, ограниченного сферой $x^2+y^2+z^2=16$ и конусом $z=\sqrt{x^2+y^2}$.

14.364. Однородное тело имеет форму прямого кругового цилиндра с радиусом основания r и высотой H. Найти момент инерции относительно оси, служащей диаметром основания цилиндра.

14.365. Найти момент инерции относительно оси Oz тела, ограниченного плоскостями $y=4$, $z=0$, $z=1$ и цилиндром $y=x^2$, если плотность в каждой точке численно равна аппликате этой точки.

14.366. Найти моменты инерции относительно координатных осей и начала координат однородной пирамиды, ограниченной плоскостями $x=0$, $y=0$, $z=0$, $x+y+z=1$.

14.367. Найти момент инерции относительно начала координат однородного тела, ограниченного сферой $x^2+y^2+z^2=1$ и конусом $z^2=x^2+y^2$.

ГЛАВА 15

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ

§ 1. ОСНОВНЫЕ ПОНЯТИЯ

Уравнение, связывающее независимую переменную, неизвестную функцию и ее производные или дифференциалы различных порядков, называется *обыкновенным дифференциальным уравнением.*

Порядком дифференциального уравнения называется порядок старшей производной, входящей в данное уравнение. Например, уравнение $y'\sin x+y\cos x=1$ — первого порядка; $\frac{d^2y}{dx^2}=\sin x$ — второго порядка; $y'''=xy$ — третьего порядка и т. д.

Решением дифференциального уравнения называется функция $y=y(x)$, удовлетворяющая этому уравнению. График решения на плоскости xOy называется *интегральной кривой* уравнения.

Процесс нахождения решения называется *интегрированием* дифференциального уравнения.

Если решение уравнения получено в неявном виде $\varphi(x, y)=0$, то оно обычно называется *интегралом* уравнения.

Задача Коши для уравнения

$$y^{(n)}=f(x, y, y', \ldots, y^{(n-1)}) \tag{1}$$

ставится следующим образом. Среди всех решений уравнения (1) требуется найти решение $y=y(x)$, для которого функция $y(x)$ вместе со своими производными до $(n-1)$-го порядка включительно принимает заданные значения y_0, y'_0, ..., $y_0^{(n-1)}$ при заданном значении x_0 аргумента x, т. е.

$$\left.\begin{array}{c} y(x_0)=y_0, \\ y'(x_0)=y'_0, \\ \cdots\cdots\cdots \\ y^{(n-1)}(x_0)=y_0^{(n-1)}, \end{array}\right\} \tag{2}$$

где x_0, y_0, y'_0, ..., $y_0^{(n-1)}$ — заданные числа.

Условия (2) называются *начальными условиями* решения $y=y(x)$, а само это решение — *частным решением* уравнения (1), удовлетворяющим начальным условиям (2).

Общее решение уравнения (1) — это решение вида $y=\varphi(x, C_1, C_2, \ldots, C_n)$, зависящее от n произвольных постоянных C_1, C_2, ..., C_n, которые можно подобрать таким образом, чтобы удовлетворить любой системе начальных условий.

Частное решение уравнения (1) может быть получено из общего решения при некоторых числовых значениях произвольных постоянных C_1, C_2, ..., C_n.

15.1. Показать, что функция $y=\sin 2x$ служит решением уравнения $y''+4y=0$.

Решение. Находим $y'=2\cos 2x$, $y''=-4\sin 2x$. Подставив выражения для y'' и y в данное уравнение, получим

$$y''+4y=-4\sin 2x+4\sin 2x\equiv 0,$$

т. е. функция $y=\sin 2x$ действительно является решением данного дифференциального уравнения.

15.2. Проверить, что функция y, определяемая уравнением $y^3+3y-x^3=4$, является интегралом дифференциального уравнения $y'=x^2/(y^2+1)$.

Решение. Продифференцируем обе части равенства $y^3+3y-x^3=4$ по переменной x; тогда получим

$$3y^2y'+3y'-3x^2=0, \text{ или } y'(y^2+1)=x^2,$$

откуда $y'=x^2/(y^2+1)$.

15.3. Доказать, что функция $y=e^{-5x}$ служит решением дифференциального уравнения $y''+5y'=0$.

15.4. Показать, что функция y, определяемая уравнением $x^2+4xy-y^2=1$, является интегралом дифференциального уравнения $(x+2y)\,dx+(2x-y)\,dy=0$.

15.5. Проверить, являются ли решениями дифференциального уравнения $y''-2y'-3y=0$ следующие функции: 1) $y=-e^{-x}$; 2) $y=xe^{-x}$; 3) $y=5e^{3x}$; 4) $y=\cos 2x$.

15.6. Выяснить, являются ли интегралами дифференциального уравнения $(y-x)\,dx+x\,dy=0$ следующие соотношения: 1) $x^2-2xy=1$; 2) $y^2-2xy=1$.

15.7. Проверить подстановкой, что дифференциальные уравнения $y''-4y=0$ и $y'''+y'=0$ имеют соответственно общие решения $y=C_1e^{-2x}+C_2e^{2x}$ и $y=C_1+C_2\cos x+C_3\sin x$.

15.8. Общий интеграл дифференциального уравнения $x+yy'=0$ имеет вид $x^2+y^2=C$. Найти его частный интеграл, удовлетворяющий начальным условиям $y(-3)=4$.

Решение. Значение произвольной постоянной C, соответствующее искомому частному интегралу, получается в результате подстановки в выражение общего интеграла заданных начальных условий: $(-3)^2+4^2=C$, т. е. $C=25$. Подставляя это значение C в общий интеграл, найдем частный интеграл $x^2+y^2=25$, удовлетворяющий указанным начальным условиям.

15.9. Общее решение дифференциального уравнения $v\,du-\operatorname{tg} u\,dv=0$ имеет вид $v=C\sin u$. Найти частное решение, удовлетворяющее начальным условиям $v(\pi/6)=-1/2$.

15.10. Зная общее решение $y=-x^3+C$ дифференциального уравнения $y'=-3x^2$, найти и построить его интегральные кривые, проходящие через точки $A(0;\,0)$, $B(-1;\,2)$, $C(2;\,-5)$.

15.11. Функция $y=C+1/\sqrt{x}$ служит общим решением уравнения $2\sqrt{x}\,dx=dy$. Из семейства интегральных кривых этого уравнения выделить кривые, проходящие через точки $A(1;\,1)$, $B(4;\,-0{,}5)$ и $C(9;\,0)$.

§ 2. УРАВНЕНИЯ С РАЗДЕЛЯЮЩИМИСЯ ПЕРЕМЕННЫМИ

Дифференциальное уравнение с разделяющимися переменными имеет вид

$$M_1(x)\,N_1(y)\,dx+M_2(x)\,N_2(y)\,dy=0. \qquad (1)$$

Поделив обе части уравнения (1) на $N_1(y)\,M_2(x)$, получим уравнение

$$\frac{M_1(x)}{M_2(x)}\,dx+\frac{N_2(y)}{N_1(y)}\,dy=0,$$

в котором переменные разделены. Общий интеграл уравнения находится почленным интегрированием:

$$\int \frac{M_1(x)}{M_2(x)}\,dx+\int \frac{N_2(y)}{N_1(y)}\,dy=C.$$

15.12. Найти общий интеграл уравнения

$$6e^x\cos^2 y\,dx+(1-2e^x)\operatorname{ctg} y\,dy=0.$$

Решение. Разделим переменные в данном уравнении, поделив обе его части на выражение $\cos^2 y\,(1-2e^x)$:

$$\frac{6e^x}{1-2e^x}\,dx+\frac{1}{\cos^2 y\operatorname{tg} y}\,dy=0.$$

Интегрируя обе части уравнения, имеем

$$-3\ln|1-2e^x|+\ln|\operatorname{tg} y|=\ln C$$

(мы воспользовались тем, что C—произвольная постоянная и для удобства дальнейших преобразований заменили C на $\ln C$). Отсюда получаем

$$\frac{\operatorname{tg} y}{(1-2e^x)^3}=C,\quad\text{или}\quad \operatorname{tg} y=C\,(1-2e^x)^3.$$

Это и есть общий интеграл данного уравнения.

В задачах 15.13—15.24 найти общие интегралы (общие решения) уравнений.

15.13. $(y-1)^2\,dx+(1-x)^3\,dy=0.$

15.14. $x\sqrt{9-y^2}\,dx-y\,(4+x^2)\,dy=0.$

15.15. $\cos x\cos y\,dx-\sin x\sin y\,dy=0.$

15.16. $\ln x\sin^3 y\,dx+x\cos y\,dy=0.$

15.17. $(xy^2-y^2)\,dx-(x^2y+x^2)\,dy=0.$

15.18. $(e^{x-y}-e^{-y})\,dx+(e^{x+y}+e^x)\,dy=0.$

15.19. $\sin\varphi\,dr-\sqrt{r^2-4}\cos\varphi\,d\varphi=0.$

15.20. $\sin^2 y\operatorname{ctg} x\,dx+\cos^2 x\operatorname{tg} y\,dy=0.$

15.21. $(\sqrt{xy}-2\sqrt{x})\,y'-y=0.$

15.22. $(1+x^2)\,y'=xy-y\sqrt{1+x^2}.$

15.23. $y'=\dfrac{y\ln y}{\sqrt{1-x^2}\arcsin x}.$

15.24. $(x+2)(y^2+1)\,dx+(y^2-x^2y^2)\,dy=0.$

15.25. Найти частное решение уравнения

$$r'\sin\varphi-r\ln r\cos\varphi=0,$$

удовлетворяющее начальным условиям $r(\pi/6)=e$.

Решение. Разделяя переменные в данном уравнении, получим

$$\frac{dr}{d\varphi}\sin\varphi=r\ln r\cos\varphi,\quad\text{или}\quad \frac{dr}{r\ln r}=\frac{\cos\varphi\,d\varphi}{\sin\varphi}.$$

Интегрируя, находим

$$\ln|\ln r|=\ln|\sin\varphi|+\ln C,\quad\text{или}\quad \ln r=C\sin\varphi.$$

Это общий интеграл данного уравнения. Используя начальные условия $r(\pi/6)=e$, подставляем в выражение общего интеграла заданные значения $\varphi=\pi/6$, $r=e$; имеем $\ln e=C\cdot(1/2)$, т. е. $C=2$. Отсюда находим

$$\ln r=2\sin\varphi, \quad \text{или} \quad r=e^{2\sin\varphi}.$$

Это и есть частное решение уравнения, удовлетворяющее заданным начальным условиям.

В задачах **15.26—15.31** найти частные интегралы (частные решения) уравнений, удовлетворяющие указанным начальным условиям.

15.26. $3x\sqrt[3]{y}\,dx+(1-x^2)\,dy=0$; $y(0)=0$.
15.27. $y\,dx-(4+x^2)\ln y\,dy=0$; $y(2)=1$.
15.28. $\sin^2 x\cos^2 y\,dx-\cos^2 x\,dy=0$; $y(0)=\pi/4$.
15.29. $y'e^{-x}=x-1$; $y(1)=-e$.
15.30. $y'(x+\sqrt{x})=\sqrt{1-y}$; $y(0)=1$.
15.31. $y'\cdot 3^{x^2}+x\cdot 9^{-y}=0$; $y(0)=1$.

§ 3. ЗАДАЧИ НА СОСТАВЛЕНИЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

При решении геометрических задач на составление дифференциальных уравнений прежде всего строят чертеж, затем обозначают искомую кривую через $y=y(x)$ и выражают все входящие в задачу величины через x, y и y'. При этом обычно используется геометрический смысл производной [y' есть угловой коэффициент касательной к кривой $y=y(x)$]. Затем, используя указанную в условии зависимость между этими величинами, получают дифференциальное уравнение $f(x, y, y')=0$, из которого находят искомую функцию $y(x)$.

При решении физических задач, исходя из их условия, составляют соотношение между дифференциалами переменных величин. При этом делают ряд допущений, упрощающих задачу, но не отражающихся на результатах. Например, бесконечно малые приращения величин заменяют их дифференциалами; предполагают, что всякий физический процесс, рассматриваемый в течение бесконечно малого промежутка времени dt, протекает с постоянной скоростью, и т. д.

В некоторых случаях можно составить дифференциальное уравнение более простым путем, используя физический смысл производной (скорость протекания неравномерного процесса.)

15.32. Найти уравнение семейства кривых, зная, что угловой коэффициент касательной в каждой точке любой кривой семейства равен отношению ординаты этой точки к ее абсциссе, взятому с противоположным знаком.

Решение. Обозначим кривую искомого семейства через $y=y(x)$. Угловой коэффициент касательной к этой кривой в каждой ее точке равен $y'(x)$. С другой стороны, согласно условию задачи, он равен $-y/x$. Отсюда получаем дифференциальное уравнение искомого семейства: $y'=-y/x$. Это уравнение с разделяющимися переменными. Разделив переменные, получим

$$\frac{dx}{x}=-\frac{dy}{y}, \quad \text{откуда} \quad \ln|x|+\ln|y|=\ln|C|,$$

или $xy=C$. Таким образом, указанным свойством обладает семейство гипербол, имеющих своими асимптотами оси координат.

15.33. Найти кривую, проходящую через точку (0; —2), для которой угловой коэффициент касательной в любой ее точке равен ординате этой точки, увеличенной на 3 единицы.

15.34. Найти кривую, проходящую через точку (1; 4), для которой отрезок касательной между точкой касания и осью абсцисс делится пополам в точке пересечения с осью Oy.

15.35. Найти кривые, у которых тангенс угла между касательной и положительным направлением оси Ox обратно пропорционален абсциссе точки касания.

Указание: положить $y' = k/x$.

15.36. Кривая проходит через точку (2; 1/2). В произвольной точке этой кривой проведена касательная, точка пересечения которой с осью Ox имеет абсциссу, вдвое большую, чем абсцисса точки касания. Найти кривую.

15.37. Материальная точка с массой $m = 0{,}75$ г погружается в жидкость без начальной скорости. Сила сопротивления жидкости пропорциональна скорости погружения v. Коэффициент пропорциональности $k = 3$. Найти зависимость скорости от времени; вычислить скорость через две секунды после начала погружения.

Решение. В момент времени t точка находится под действием силы тяжести $P = mg$ и силы сопротивления жидкости $Q = kv$. Сила Q направлена в сторону, противоположную движению, а сила P — в сторону движения; поэтому их равнодействующая $F = mg - kv$. Под действием этой равнодействующей точка опускается вниз. Но по второму закону Ньютона $F = ma$, где $a = \frac{dv}{dt}$ (ускорение), т. е. $F = m\frac{dv}{dt}$. Приравняем теперь оба выражения для F:

$$m\frac{dv}{dt} = mg - kv,$$

откуда используя условия задачи, имеем

$$0{,}75\frac{dv}{dt} = 0{,}75g - 3v, \quad \text{или} \quad \frac{dv}{dt} = g - 4v.$$

Интегрируем полученное уравнение:

$$\frac{dv}{g-4v} = dt; \quad -\frac{1}{4}\ln|g-4v| = t - \frac{1}{4}\ln C,$$

т. е.

$$v = \frac{1}{4}(g + Ce^{-4t}).$$

Для нахождения C воспользуемся начальными условиями: $v = 0$ в начальный момент времени $t = 0$; отсюда $C = -g$. Итак, искомая зависимость между скоростью и временем выражается в виде

$$v = \frac{g}{4}(1 - e^{-4t}).$$

Полагая теперь $t = 2$, находим скорость точки через две секунды после начала погружения:

$$v = \frac{g}{4}(1 - e^{-8}) \approx 2{,}45 \ (\text{м/с}).$$

15.38. Катер движется в стоячей воде со скоростью 12 км/ч. На полном ходу его двигатель был выключен. Определить скорость катера через 3 мин. после отключения двигателя, считая сопротивление воды пропорциональным скорости. Коэффициент пропорциональности k принять численно равным $20\ m$, где m — масса катера в кг.

15.39. Найти уравнение движения тела, если его скорость пропорциональна пройденному пути и тело проходит 75 м за 5 с, а 225 м за 10 с.

15.40. В комнате, где температура воздуха равна 20°, некоторое тело охлаждается от 100° до 60°. Считая скорость остывания тела пропорциональной разности температур тела и окружающего его воздуха, определить, за какое время тело остынет до 30°.

Указание: пусть T — температура тела в момент времени t; тогда закон охлаждения тела записывается в виде

$$\frac{dT}{dt}=k\,(t-20),$$

где k — коэффициент пропорциональности.

15.41. В резервуар, содержащий 10 л воды, непрерывно поступает со скоростью 2 л/мин раствор, в каждом литре которого содержится 0,3 кг соли. Этот раствор перемешивается с водой, и смесь вытекает из резервуара с той же скоростью. Сколько соли будет содержать резервуар через 5 мин?

15.42. Известно, что скорость распада радия пропорциональна его имеющемуся количеству и что половина первоначального количества распадается в течение 1600 лет. Какой процент радия окажется распавшимся через 100 лет?

15.43. Поглощение светового потока тонким слоем воды пропорционально толщине слоя и потоку, падающему на его поверхность. При прохождении через слой толщиной 2 м поглощается 1/3 первоначального светового потока. Определить, какой процент первоначального светового потока дойдет до глубины 4 м.

Указание: пусть Q — световой поток, падающий на поверхность на глубине h; тогда $dQ=-kQdh$.

15.44. Скорость v истечения воды из отверстия, находящегося на расстоянии h от поверхности, определяется формулой $v=0{,}6\sqrt{2gh}$, где g — ускорение силы тяжести. Определить время опорожнения цилиндрического бака, диаметр основания которого $D=1$ м, а высота $H=1{,}5$ м, через круглое отверстие диаметром $a=5$ см в дне бака.

Указание: пусть высота воды в сосуде в некоторый момент времени t равна h. Тогда количество воды dV, вытекшее из бака за промежуток времени dt, равно объему цилиндра с площадью основания $\pi a^2/4$ и высотой $v\,(h)$, т. е. $dV=(1/4)\,\pi a^2 v\,(h)\,dt$. С другой стороны, вследствие утечки воды это количество равно $dV=(-1/4)\,\pi D^2\,dh$. Если приравнять друг другу оба выражения для dV, то получается дифференциальное уравнение задачи.

§ 4. ОДНОРОДНЫЕ УРАВНЕНИЯ

Уравнение вида

$$y' = f(y/x) \tag{1}$$

называется *однородным уравнением*.

Однородное уравнение приводится к уравнению с разделяющимися переменными подстановкой $y = ux$, где u — новая искомая функция. Дифференцируя равенство $y = ux$, получим

$$\frac{dy}{dx} = x\frac{du}{dx} + u.$$

Подставив y и $\frac{dy}{dx}$ в уравнение (1), получим

$$x\frac{du}{dx} + u = f(u),$$

откуда

$$\frac{du}{f(u) - u} = \frac{dx}{x}. \tag{2}$$

Это уравнение с разделяющимися переменными u и x. Найдя общее решение (интеграл) уравнения (2) и заменив u на y/x, получим общее решение (интеграл) данного однородного уравнения.

15.45. Найти общий интеграл уравнения

$$(xy + y^2)\,dx - (2x^2 + xy)\,dy = 0.$$

Решение. Разрешим данное уравнение относительно производной:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{xy + y^2}{2x^2 + xy}.$$

Поделив числитель и знаменатель правой части уравнения на x^2, получим

$$y' = \frac{y/x + (y/x)^2}{2 + y/x}. \tag{*}$$

Таким образом, y' есть функция отношения y/x, т. е. данное уравнение — однородное.

Введем теперь новую функцию $u = y/x$. Тогда $y = ux$ и $y' = \frac{du}{dx}x + u$. Уравнение (*) преобразуется в уравнение с разделяющимися переменными:

$$x\frac{du}{dx} + u = \frac{u + u^2}{2 + u}, \quad \text{или} \quad x\frac{du}{dx} = -\frac{u}{2 + u},$$

откуда

$$\frac{dx}{x} = -\frac{u + 2}{u}\,du.$$

Интегрируя это уравнение, получим

$$\ln|x| = -u - 2\ln|u| - \ln C, \quad \text{или} \quad u = -\ln|Cxu^2|,$$

откуда

$$Cxu^2 = e^{-u}.$$

Заменяя в последнем равенстве u отношением y/x, окончательно находим общий интеграл данного уравнения:

$$y^2 = Cxe^{-y/x}.$$

В задачах 15.46—15.59 найти общие интегралы (общие решения) уравнений.

15.46. $y'=2+y/x$.

15.47. $xy'=5y+x$.

15.48. $(x+y)\,dx+2x\,dy=0$.

15.49. $y^2\,dx+(x^2-xy)\,dy=0$.

15.50. $(x^2+3xy+y^2)\,dx-x^2\,dy=0$.

15.51. $(4x^2-3xy-y^2)\,dx-x^2\,dy=0$.

15.52. $(3x^2+xy-y^2)\,dx+x^2\,dy=0$.

15.53. $y'+(y/x)^3=0$.

15.54. $\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{9x^2+y^2+xy}{x^2}$.

15.55. $xy'-y=\sqrt{y^2+2x^2}$.

15.56. $xy'+y=2y(\ln y-\ln x)$.

15.57. $x^2y'e^{x/y}=xye^{x/y}+y^2$.

15.58. $(xy'-y)\sin(y/x)=x$.

15.59. $xy'=y+x\operatorname{tg}(y/x)$.

В задачах **15.60—15.64** найти частные интегралы (частные решения) уравнений, удовлетворяющие указанным начальным условиям.

15.60. $(2x-3y)\,dx+x\,dy=0$; $y(1)=-1$.

15.61. $(5\sqrt{xy}-y)\,dx+x\,dy=0$; $y(1)=25$.

15.62. $xy'-y=x\cos^2(y/x)$; $y(3)=0$.

15.63. $xy'=y(3+\ln y-\ln x)$; $y(1)=1/e$.

15.64. $xy'=y+x\sqrt[x]{e^y}$; $y(1/e)=0$.

15.65. Составить уравнение кривой, проходящей через точку (1; 1), если известно, что произведение абсциссы любой точки кривой на угловой коэффициент касательной к кривой в этой точке равно удвоенной сумме координат точки.

15.66. Найти кривые, для которых отрезок, отсекаемый на оси ординат нормалью, проведенной в любой точке кривой, равен расстоянию этой точки от начала координат.

15.67. Найти уравнение кривой, проходящей через точку (2;—2), если угловой коэффициент касательной в каждой точке равен квадрату углового коэффициента радиуса-вектора точки касания.

15.68. Составить уравнение кривой, проходящей через точку (0; 1) и обладающей следующим свойством: треугольник, образованный осью Oy, касательной к кривой в произвольной ее точке и радиусом-вектором точки касания, — равнобедренный (причем его основанием служит отрезок касательной от точки касания до оси Oy).

§ 5. ЛИНЕЙНЫЕ УРАВНЕНИЯ

Дифференциальное уравнение называется *линейным*, если оно линейно (т. е. первой степени) относительно искомой функции y и ее производной $\dfrac{dy}{dx}$. Общий вид линейного уравнения

$$y'+P(x)\,y=Q(x). \tag{1}$$

Линейное уравнение сводится к двум уравнениям с разделяющимися переменными, если искомую функцию y заменить произведением двух вспомогательных функций u и v, т. е. положить $y=uv$. Тогда

$$\frac{dy}{dx}=v\frac{du}{dx}+u\frac{dv}{dx},$$

и данное уравнение (1) примет вид

$$v\frac{du}{dx}+u\left[\frac{dv}{dx}+P(x)v\right]=Q(x). \qquad (2)$$

Пользуясь тем, что одну из вспомогательных функций, например v, можно выбрать произвольно, подберем ее так, чтобы выражение в квадратных скобках обратилось в нуль, т. е. в качестве v возьмем одно из частных решений $v=v(x)$ уравнения с разделяющимися переменными

$$\frac{dv}{dx}+P(x)v=0.$$

Подставляя выражение $v=v(x)$ в уравнение (2), получаем уравнение относительно функции u:

$$v\frac{du}{dx}=Q(x), \qquad (3)$$

которое также является уравнением с разделяющимися переменными. Найдя общее решение уравнения (3) в виде $u=u(x, C)$, получим общее решение линейного уравнения (1):

$$y=u(x, C)v(x).$$

15.69. Найти общее решение уравнения

$$y'-y\operatorname{ctg} x=\frac{1}{\sin x}.$$

Решение. Полагаем $y=uv$; тогда $y'=u'v+uv'$ и данное уравнение примет вид

$$u'v+uv'-uv\operatorname{ctg} x=\frac{1}{\sin x},$$

или

$$u'v+u(v'-v\operatorname{ctg} x)=\frac{1}{\sin x}. \qquad (*)$$

Решая уравнение $v'-v\operatorname{ctg} x=0$, найдем его простейшее частное решение:

$$\frac{dv}{dx}=v\operatorname{ctg} x; \quad \frac{dv}{v}=\operatorname{ctg} x\,dx; \quad \ln|v|=\ln|\sin x|,$$

откуда $v=\sin x$. Подставляя v в уравнение (*), получим уравнение

$$u'\sin x=\frac{1}{\sin x},$$

из которого находим u:

$$\frac{du}{dx}\cdot\sin x=\frac{1}{\sin x}; \quad du=\frac{dx}{\sin^2 x},$$

откуда

$$u=-\operatorname{ctg} x+C.$$

Итак, искомое общее решение

$$y=uv=(-\operatorname{ctg} x+C)\sin x=-\cos x+C\sin x.$$

В задачах **15.70—15.81** найти общие решения уравнений.

15.70. $y'-\frac{y}{x}=3x$. **15.71.** $y'+4\frac{y}{x}+x=0$.

15.72. $x^2y'+2xy-1=0$. **15.73.** $y'-7y=8e^{3x}$.

15.74. $(x^2+1)y'-xy=x^3+x$. **15.75.** $\frac{dy}{dx}-\frac{y}{\sqrt{x}}-e^{2\sqrt{x}}=0$.

15.76. $y'\cos x-y\sin x=\cos^2 x$. **15.77.** $xy'\ln x=5x-y$.

15.78. $\frac{dy}{dx}\cdot\cos^2 x+y=\operatorname{tg} x$. **15.79.** $y'(x^2+4)-xy=\sqrt{x^2+4}$.

15.80. $y^2dx+(5xy-4)dy=0$. **15.81.** $\frac{dy}{dx}=\frac{y^2}{x+ye^{-1/y}}$.

Указание: представить данное уравнение как линейное относительно $\frac{dx}{dy}$ и y.

В задачах 15.82—15.87 найти частные решения уравнений, удовлетворяющие указанным начальным условиям.

15.82. $y'+3y=xe^{-3x}$; $y(0)=0$.

15.83. $y'(1-x^2)=xy+1$; $y(\sqrt{3}/2)=2\pi/3$.

15.84. $\frac{dy}{dx}+e^x y=e^{2x}$; $y(0)=1/e$.

15.85. $(1+x^2)y'-2xy=(1+x^2)^2$; $y(3)=40$.

15.86. $x\frac{dy}{dx}-y=x^2\sin x$; $y(\pi/2)=\pi$.

15.87. $xy'\ln x=y+\ln x$; $y(e^2)=2\ln 2$.

15.88. Найти кривую, проходящую через точку (4; 2), у которой отрезок, отсекаемый касательной на оси ординат, равен полусумме координат точки касания.

15.89. Найти кривые, для которых площадь треугольника, образованного осью Ox, касательной и радиусом-вектором точки касания, постоянна и равна 1.

15.90. Составить уравнение кривой, проходящей через точку (1; —1), для которой отрезок, отсекаемый касательной на оси ординат, равен квадрату абсциссы точки касания.

15.91. Напряжение в цепи с индуктивностью равномерно изменяется в течение одной минуты от 0 до 60 В. Индуктивность $L=20$ Г, сопротивление $R=4$ Ом. Найти величину тока в цепи в конце 10-й секунды, если в начале опыта она была 8,75 А.

Указание: сила тока I в цепи с сопротивлением R, самоиндукцией L и напряжением U удовлетворяет дифференциальному уравнению

$$L\frac{dI}{dt}+RI=U.$$

§ 6. УРАВНЕНИЯ В ПОЛНЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛАХ. ИНТЕГРИРУЮЩИЙ МНОЖИТЕЛЬ

Если левая часть уравнения

$$P(x, y)\,dx+Q(x, y)\,dy=0 \tag{1}$$

представляет собой полный дифференциал некоторой функции $U(x, y)$, то уравнение (1) называется *уравнением в полных дифференциалах*. В этом случае его можно переписать в виде $dU(x, y)=0$, так что общий интеграл

$$U(x, y)=C. \tag{2}$$

Для того чтобы уравнение (1) было уравнением в полных дифференциалах, *необходимо и достаточно, чтобы во всех точках области* D, *в которой функции* $P(x, y)$ *и* $Q(x, y)$ *определены, непрерывны и имеют непрерывные частные производные* $\frac{\partial P(x, y)}{\partial y}$ *и* $\frac{\partial Q(x, y)}{\partial x}$, *было выполнено условие*

$$\frac{\partial P}{\partial y}=\frac{\partial Q}{\partial x}. \tag{3}$$

В том случае, когда условие (3) выполнено, общий интеграл уравнения (1) можно записать в виде

$$\int_{x_0}^{x} P(x, y)\,dx+\int_{y_0}^{y} Q(x_0, y)\,dy=C \tag{4}$$

или

$$\int_{x_0}^{x} P(x, y_0)\,dx+\int_{y_0}^{y} Q(x, y)\,dy=C, \tag{5}$$

где $(x_0; y_0)$ — произвольная фиксированная точка области D.

Если же условие (3) не выполнено, то уравнение (1) не является уравнением в полных дифференциалах. Однако в некоторых случаях его можно привести к уравнению в полных дифференциалах умножением на функцию $\mu(x, y)$, которая называется *интегрирующим множителем.*

Интегрирующий множитель легко находится в следующих двух случаях: 1) когда он зависит только от x, т. е. $\mu=\mu(x)$; 2) когда он зависит только от y, т. е. $\mu=\mu(y)$.

Первый из этих случаев имеет место, если отношение

$$\frac{\frac{\partial P}{\partial y}-\frac{\partial Q}{\partial x}}{Q}=\varphi(x)$$

является функцией только от x; тогда интегрирующий множитель находится по формуле

$$\mu=e^{\int \varphi(x)\,dx}. \tag{6}$$

Второй случай имеет место, если отношение

$$\frac{\frac{\partial P}{\partial y}-\frac{\partial Q}{\partial x}}{P}=\psi(y)$$

является функцией только от y; тогда интегрирующий множитель определяется по формуле

$$\mu=e^{-\int \psi(y)\,dy}. \tag{7}$$

15.92. Найти общий интеграл уравнения

$$2x\cos^2 y\,dx+\left(8\sqrt[3]{y}-x^2\sin 2y\right)dy=0.$$

Решение. Здесь $P(x, y)=2x\cos^2 y$, $Q(x, y)=8\sqrt[3]{y}-x^2\sin 2y$; находим

$$\frac{\partial P(x, y)}{\partial y}=2x(-2\sin y\cos y)=-2x\sin 2y, \qquad \frac{\partial Q(x, y)}{\partial x}=-2x\sin 2y.$$

Следовательно, это уравнение является уравнением в полных дифференциалах. Его общий интеграл находим по формуле (4), взяв в качестве точки $(x_0;\ y_0)$ начало координат:

$$\int_0^x 2x\cos^2 y\,dx+\int_0^y 8\sqrt[3]{y}\,dy=C, \text{ или } x^2\cos^2 y+6y\sqrt[3]{y}=C.$$

В задачах 15.93—15.102 найти общие интегралы уравнений.

15.93. $(2xy-3)\,dx+(x^2+1)\,dy=0.$

15.94. $(2xy^3+4y)\,dx+(3x^2y^2+4x)\,dy=0.$

15.95. $(x-\cos y)\,dx+(x\sin y+\cos y)\,dy=0.$

15.96. $(y^2-e^x\cos y)\,dx+(2xy+e^x\sin y)\,dy=0.$

15.97. $(x^2+y-ye^x)\,dx+(x+2y-e^x)\,dy=0.$

15.98. $\left(2x\ln y-\frac{1}{\cos^2 x}\right)dx+\left(\frac{x^2}{y}-\sin y\right)dy=0.$

15.99. $\left(y^3-\frac{y}{x^2}\right)dx+\left(\frac{1}{x}+3xy^2+\frac{y}{\sqrt{1-y^2}}\right)dy=0.$

15.100. $\left(y-\frac{y}{x^2+y^2}\right)dx+\left(\frac{x}{x^2+y^2}+x-\frac{1}{y}\right)dy=0.$

15.101. $(3x^2e^y+ye^{-x})\,dx+(x^3e^y-e^{-x}+\operatorname{ctg} y)\,dy=0.$

15.102. $\frac{e^{y^2}}{2\sqrt{x}}dx+\left(2\sqrt{x}\,ye^{y^2}+\frac{1}{\sqrt{9-y^2}}\right)dy=0.$

15.103. Из семейства интегральных кривых уравнения

$$(3x^2y^2-ye^{xy})\,dx+(2x^3y-xe^{xy}-\sin y)\,dy=0$$

выбрать такую кривую, которая проходит через начало координат.

15.104. Найти общий интеграл уравнения

$$y\,dx+x(\ln x-y^3)\,dy=0.$$

Решение. Здесь $P(x, y)=y$, $Q(x, y)=x(\ln x-y^3)$, так что

$$\frac{\partial P}{\partial y}=1,\quad \frac{\partial Q}{\partial x}=1+\ln x-y^3,$$

т. е. условие полного дифференциала не выполняется. Проверим, не допускает ли это уравнение интегрирующего множителя. Поскольку

$$\frac{\frac{\partial P}{\partial y}-\frac{\partial Q}{\partial x}}{Q}=\frac{1-1-\ln x+y^3}{x(\ln x-y^3)}=-\frac{1}{x}=\varphi(x),$$

приходим к выводу, что данное уравнение имеет интегрирующий множитель, зависящий только от x. Найдем его:

$$\mu=e^{\int\varphi(x)\,dx}=e^{-\int\frac{dx}{x}}=e^{-\ln x}=\frac{1}{x}.$$

Умножая обе части исходного уравнения на найденный интегрирующий множитель $\mu=1/x$, получаем уравнение

$$\frac{y}{x}dx+(\ln x-y^3)\,dy=0,$$

которое, как нетрудно проверить, уже будет уравнением в полных дифференциалах.

Решим это уравнение. По формуле (4), взяв в качестве точки $(x_0; y_0)$ точку (1; 0), имеем

$$\int_1^x \frac{y}{x}\,dx + \int_0^y (-y^3)\,dy = C,$$

т. е.

$$[y \ln|x|]_1^x - \frac{y^4}{4} = C, \quad \text{или} \quad y\ln|x| - \frac{y^4}{4} = C.$$

Это и есть общий интеграл данного уравнения.

В задачах **15.105—15.113** проинтегрировать дифференциальные уравнения, допускающие интегрирующий множитель вида $\mu = \mu(x)$ или $\mu = \mu(y)$.

15.105. $(3x + y^2)\,dx - 2xy\,dy = 0$.

15.106. $4xy\,dx + (y^3 + 4x^2)\,dy = 0$.

15.107. $(xy - 4)\,dx + x^2\,dy = 0$.

15.108. $\frac{6x + y^3}{x}\,dx - 3y^2\,dy = 0$.

15.109. $2y\,dx + (x + 7y^3)\,dy = 0$.

15.110. $(y^2\sqrt{1-x^2} + x)\,dx + 2xy\sqrt{1-x^2}\,dy = 0$.

15.111. $2x \sin y\,dx - (x^2 \cos y - \sin y) = 0$.

15.112. $\cos y\,dx + (\sin y + e^x)\,dy = 0$.

15.113. $(x\sin y + y\cos y)\,dx + (x\cos y - y\sin y)\,dy = 0$.

§ 7. УРАВНЕНИЯ ЛАГРАНЖА И КЛЕРО

1. Уравнение Лагранжа. *Уравнением Лагранжа* называется уравнение вида

$$y = \varphi(y')\,x + \psi(y') \quad [\varphi(y') \neq y'], \tag{1}$$

т. е. линейное относительно x и y с коэффициентами, зависящими от y', причем коэффициент при x не равен y'.

Для интегрирования уравнения Лагранжа воспользуемся параметрическим методом. Полагая $y' = p$, перепишем уравнение (1) в виде

$$y = \varphi(p)\,x + \psi(p). \tag{2}$$

Дифференцируя по x, имеем

$$y' = \varphi(p) + x\varphi'(p)\frac{dp}{dx} + \psi'(p)\frac{dp}{dx},$$

откуда после замены y' на p, умножения на $\frac{dx}{dp}$ и соответствующих алгебраических преобразований [в частности, деления обеих частей уравнения на $p - \varphi(p)$] получим

$$\frac{dx}{dp} - \frac{\varphi'(p)}{p - \varphi(p)}\,x = \frac{\psi'(p)}{p - \varphi(p)}. \tag{3}$$

Это уравнение является линейным относительно функции x и производной $\frac{dx}{dp}$. Его общее решение имеет вид

$$x = F(p, C). \tag{4}$$

Подставляя найденное для x выражение в соотношение (2), получим

$$y=F(p, C)\varphi(p)+\psi(p). \tag{5}$$

Соотношения (4) и (5) дают *общее решение уравнения Лагранжа* в параметрической форме:

$$\left.\begin{aligned} x&=F(p, C), \\ y&=F(p, C)\varphi(p)+\psi(p). \end{aligned}\right\}$$

Заметим, что если уравнение $p-\varphi(p)=0$ имеет действительные корни, то подставляя эти корни в уравнение (2), мы также получим решения уравнения Лагранжа, которые могут оказаться как частными, так и особыми*.

2. Уравнение Клеро. *Уравнением Клеро* называется уравнение вида

$$y=xy'+\psi(y'), \tag{6}$$

т. е. частный случай уравнения Лагранжа, когда $\varphi(y')\equiv y'$.

Положим $y'=p$, тогда

$$y=xp+\psi(p). \tag{7}$$

Дифференцируя по x, имеем

$$y'=p+x\frac{dp}{dx}+\psi'(p)\frac{dp}{dx}, \text{ или } \frac{dp}{dx}[x+\psi'(p)]=0.$$

Последнее уравнение распадается на два:

$$\frac{dp}{dx}=0, \quad x+\psi'(p)=0. \tag{8}$$

Из уравнения $\frac{dp}{dx}=0$ следует, что $p=C$. Подставляя это выражение в равенство (6), получим *общее решение уравнения Клеро:*

$$y=Cx+\psi(C). \tag{9}$$

Формально общее решение получается из уравнения (6) заменой y' на C.

Уравнение Клеро имеет особое решение, получающееся в результате исключения параметра C из системы уравнений **

$$\left.\begin{aligned} x&=-\psi'(C), \\ y&=-C\psi'(C)+\psi(C). \end{aligned}\right\} \tag{10}$$

15.114. Проинтегрировать дифференциальное уравнение $y=xy'^2+y'^2$.

Решение. Это — уравнение Лагранжа. Полагая $y'=p$, получим

$$y=xp^2+p^2. \tag{*}$$

Дифференцируя по x, имеем

$$y'=p^2+(2px+2p)\frac{dp}{dx},$$

или, учитывая, что $dy=y'\,dx=p\,dx$,

$$(p^2-p)\,dx+2p(x+1)\,dp=0.$$

---

* Решение, в каждой точке которого нарушается единственность решения задачи Коши, называется особым решением.

** Первое уравнение системы получается путем дифференцирования общего решения уравнения Клеро по параметру C.

Разделив обе части уравнения на p^2-p, приведем его к линейному относительно x:

$$\frac{dx}{dp}+\frac{2}{p-1}x=\frac{2}{1-p}.$$

Интегрируя последнее уравнение, получим общее решение:

$$x=\frac{C}{(p-1)^2}-1.$$

Подставляя найденное для x выражение в равенство (*), получим

$$y=\frac{Cp^2}{(p-1)^2}.$$

Таким образом, общее решение данного уравнения запишется в виде

$$\left.\begin{aligned} x&=\frac{C}{(p-1)^2}-1, \\ y&=\frac{Cp^2}{(p-1)^2}, \end{aligned}\right\}$$

или, исключая параметр p из этой системы, имеем

$$y=(C+\sqrt{x+1})^2.$$

Уравнение $p^2-p=0$ имеет два корня: $p=0$ и $p=1$. Подставляя их в равенство (*), получим два решения данного уравнения: $y=0$ и $y=x+1$. Первое из этих решений является особым, так как оно не получается из общего ни при каком значении C; второе же является частным, поскольку получается из общего при $C=0$.

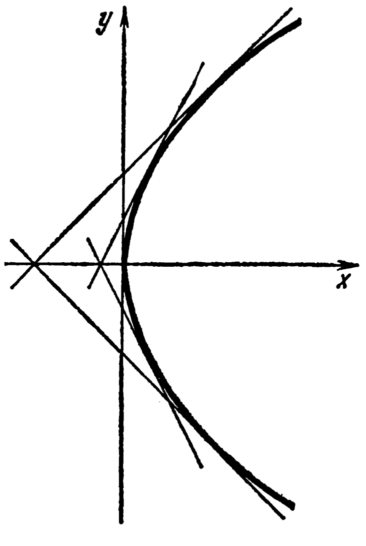


Рис. 110.

15.115. Проинтегрировать дифференциальное уравнение $y=xy'+1/y'$.

Решение. Это — уравнение Клеро. Заменив в данном уравнении y' на C, получим общее решение

$$y=xC+1/C. \qquad (*)$$

Для нахождения огибающей этого семейства прямых (особого решения уравнения) продифференцируем последнее равенство по C:

$$0=x-1/C^2. \qquad (**)$$

Уравнения (*) и (**) служат параметрическими уравнениями огибающей. Выразив параметр C из соотношения (**) и подставив его в равенство (*), найдем уравнение огибающей в явном виде:

$$C^2=1/x;\quad C=\sqrt{1/x},$$

откуда

$$y=x\sqrt{1/x}+\sqrt{x}=2\sqrt{x}, \quad \text{или } y^2=4x.$$

На рис. 110 изображены несколько прямых семейства и огибающая — парабола $y^2=4x$

В задачах **15.116—15.121** проинтегрировать заданные уравнения Лагранжа.

15.116. $y=2xy'-y'^2$. 15.117. $y=-xy'+y'^2$.
15.118. $y'^2=x(1+y')-y$. 15.119. $y=xy'^2-2y'^3$.
15.120. $y+\ln y'=2xy'$. 15.121. $y=xy'(y'+2)$.

В задачах **15.122—15.129** проинтегрировать заданные уравнения Клеро.

15.122. $y=xy'-y'^2$. 15.123. $y=xy'+3y'$.

15.124. $y=xy'+\dfrac{9}{y'}$. 15.125. $y-xy'=\sqrt{1-y'^2}$.

15.126. $y-y'^2=x\left(\dfrac{1}{x}+y'\right)$. 15.127. $y=xy'-\ln y'$.

15.128. $y=y'(x+1-y')$. 15.129. $y-xy'=\dfrac{1}{2y'^2}$.

15.130. Найти кривую, касательные к которой отсекают на осях координат отрезки, длины которых составляют в сумме $2a$.

15.131. Найти кривую, касательные к которой образуют с осями координат треугольник с площадью $2a^2$.

§ 8. СМЕШАННЫЕ ЗАДАЧИ НА ИНТЕГРИРОВАНИЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ ПЕРВОГО ПОРЯДКА

В задачах **15.132—15.165** найти общие интегралы (общие решения) уравнений.

15.132. $2xy\,dx+(4-x^2)\,dy=0$. 15.133. $(y-\sqrt{xy})\,dx=x\,dy$.

15.134. $3x^2y\,dx+(x^3-2y)\,dy=0$. 15.135. $(4xy+5)\,dx-x^2\,dy=0$.

15.136. $(1-x^2y)\,dx+(x^2y-x^3)\,dy=0$. 15.137. $y+xy'=8\sqrt{y'}$.

15.138. $y-xy'=8\sqrt{y'}$. 15.139. $xy'=y(\ln y-\ln x+5)$.

15.140. $y'\sin x-y=\sin x\cdot \operatorname{tg}\dfrac{x}{2}$.

15.141. $(y^2+xy^2)\,dx+(x^2-x^2y)\,dy=0$.

15.142. $(2y\cos^2 x-\cos y)\,dy-y^2\sin 2x\,dx=0$.

15.143. $y'(x+\sin y)=1$. 15.144. $y^2\,dx-(xy+y^3)\,dy=0$.

15.145. $(x^2\operatorname{tg} x-y)\,dx+x\,dy=0$. 15.146. $y-xy'=\sqrt{1+y'^2}$.

15.147. $y+y'^2=x+y'$. 15.148. $xy'-y=\sqrt{x^2-y^2}$.

15.149. $(1+x^2)y'+xy=1$. 15.150. $(e^y-2xy)\,dx+(e^y-x)\,x\,dy=0$.

15.151. $y=-xy'+\ln y'$. 15.152. $y'\sqrt{x}=\sqrt{y+x}-\sqrt{x}$.

15.153. $y\,dx+(xy^2-e^{-y^2/2})\,dy=0$.

15.154. $y'+\cos(x+y)=\cos(x-y)$.

15.155. $(xy'-y)\sqrt[x]{e^y}=x$. 15.156. $y=xy'+\sqrt{9+4y'^2}$.

15.157. $2yy'=x(y'^2+4)$. 15.158. $xyy'=y^2-x^2$.

15.159. $(1+x^2)y'+y\sqrt{1+x^2}=xy$.

15.160. $(x^2-\sin^2 y)\,dx+x\sin 2y\,dy=0$.

15.161. $\frac{y}{x^2+y^2}\,dx-\left(e^{-y}+\frac{x}{x^2+y^2}\right)dy=0$.

15.162. $(y^2\cos x+y\ln y)\,dx+(y\sin x+x)\,dy=0$.

15.163. $y=xy'-1/y'^2$. 15.164. $xy'\ln x+y=9x^3\ln x$.

15.165. $(x\,dy-y\,dx)\operatorname{arctg}(y/x)=x$.

В задачах 15.166—15.176 найти частные интегралы (частные решения) уравнений, удовлетворяющие указанным начальным условиям.

15.166. $x\sqrt{1+y^2}\,dx-y(1-x^2)\,dy=0$; $y(0)=2\sqrt{2}$.

15.167. $x(y'+e^{y/x})=y$; $y(1)=0$.

15.168. $\left(3+\frac{y^2}{x^2}\right)dx-\frac{2y}{x}\,dy=0$; $y(1)=1$.

15.169. $(3x^2-y)\,dx+(4y-x)\,dy=0$; $y(-1)=1$.

15.170. $dy=(y\operatorname{tg}x-1)\,dx$; $y(0)=3$.

15.171. $xy'-y=x\cos^2(y/x)$; $y(4)=\pi$.

15.172. $y\sqrt{1-y^2}\,dx+(x\sqrt{1-y^2}+y)\,dy=0$; $y(1)=1$.

15.173. $(x^2y^2+9x^2)\,dx-(x^3+2)\,dy=0$; $y(-1)=0$.

15.174. $e^{-y}\,dx-(xe^{-y}+2y)\,dy=0$; $y(5)=0$.

15.175. $\frac{dy}{dx}-6y=2xe^{6x}$; $y(1)=e^6$.

15.176. $(x^2-xy+y^2)\,dx=x^2\,dy$; $y(e)=0$.

§ 9. ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ ВЫСШИХ ПОРЯДКОВ, ДОПУСКАЮЩИЕ ПОНИЖЕНИЕ ПОРЯДКА

1. *Уравнение вида*

$$y^{(n)}=f(x) \tag{1}$$

решается последовательным n-кратным интегрированием. При каждом интегрировании получается одна произвольная постоянная, а в окончательном результате — n произвольных постоянных.

2. *Уравнение второго порядка, не содержащее искомой функции*, т. е. уравнение вида

$$F(x,\ y',\ y'')=0, \tag{2}$$

при помощи подстановки $y'=p(x)$ (откуда $y''=\frac{dp}{dx}$) преобразуется в уравнение первого порядка

$$F\left(x,\ p,\ \frac{dp}{dx}\right)=0.$$

3. *Уравнение второго порядка, не содержащее независимой переменной*, т. е. уравнение вида

$$F(y,\ y',\ y'')=0, \tag{3}$$

при помощи подстановки $y'=p(y)$ (откуда $y''=\frac{dp}{dx}=p\frac{dp}{dy}$) сводится к уравнению первого порядка

$$F\left(y,\ p,\ p\frac{dp}{dy}\right)=0.$$

15.177. Решить уравнения:

$$1)\ y'''=\frac{1}{x^3};\ 2)\ xy''=y'\ln\frac{y'}{x};\ 3)\ y''\operatorname{tg} y=2y'^2.$$

Решение. 1) Последовательно интегрируя данное уравнение, имеем

$$y''=\int\frac{dx}{x^3}=-\frac{1}{2x^2}+C_1,$$

$$y'=\int\left(-\frac{1}{2x^2}+C_1\right)dx=\frac{1}{2x}+C_1x+C_2,$$

$$y=\int\left(\frac{1}{2x}+C_1x+C_2\right)dx=\frac{1}{2}\ln|x|+\frac{C_1}{2}x^2+C_2x+C_3=\frac{1}{2}\ln|x|+\overline{C}_1x^2+C_2x+C_3.$$

2) Данное уравнение не содержит искомой функции. Положим $y'=p(x)$, тогда $y''=\frac{dp}{dx}$ и уравнение примет вид

$$x\frac{dp}{dx}=p\ln\frac{p}{x},\ \text{или}\ \frac{dp}{dx}=\frac{p}{x}\ln\frac{p}{x}.$$

Таким образом, мы получили однородное уравнение первого порядка. Для его решения воспользуемся подстановкой $p=ux$, откуда $\frac{dp}{dx}=x\frac{du}{dx}+u$ и, следовательно, приходим к уравнению

$$x\frac{du}{dx}+u=u\ln u,\ \text{или}\ \frac{dx}{x}=\frac{du}{u(\ln u-1)}.$$

Интегрируя, получаем

$$\ln|C_1x|=\ln|\ln u-1|,$$

откуда $C_1x=\ln u-1$, т. е. $u=e^{C_1x+1}$. Возвращаясь к переменной y, имеем

$$\frac{p}{x}=e^{C_1x+1},\ \text{или}\ y'=xe^{C_1x+1}.$$

Остается проинтегрировать полученное уравнение первого порядка:

$$y=\int xe^{C_1x+1}dx=\frac{1}{C_1}xe^{C_1x+1}-\frac{1}{C_1^2}e^{C_1x+1}+C_2.$$

3) Это—уравнение, не содержащее независимой переменной x. Положим $y'=p(y)$, тогда $y''=p\frac{dp}{dy}$ и данное уравнение преобразуется к виду

$$p\frac{dp}{dy}\operatorname{tg} y=2p^2,\ \text{или}\ \frac{dp}{p}=2\frac{dy}{\operatorname{tg} y}.$$

Интегрируя полученное уравнение с разделяющимися переменными, находим

$$\ln|p|=2\ln|\sin y|+\ln C_1,\ \text{или}\ p=C_1\sin^2 y.$$

Заменяя p на $\frac{dy}{dx}$, получим

$$\frac{dy}{dx}=C_1\sin^2 y,\ \text{или}\ \frac{dy}{\sin^2 y}=C_1dx,$$

откуда находим общий интеграл данного уравнения

$$-\operatorname{ctg} y=C_1x+C_2.$$

В задачах 15.178—15.195 найти общие интегралы (общие решения) уравнений.

15.178. $y''=\sin 2x$. **15.179.** $y'''=e^{-x/4}$.

15.180. $\dfrac{d^2r}{d\varphi^2}=5\varphi^4-2\varphi^3+\varphi^2$. **15.181.** $\dfrac{d^3s}{dt^3}=0$.

15.182. $y''=\ln x$. **15.183.** $x^2y''=2$. **15.184.** $xy''-y'=0$.

15.185. $y''(e^x+1)+y'=0$. **15.186.** $x^2y''+xy'=1$.

15.187. $y''+y'\operatorname{tg} 2x=\sin 2x$. **15.188.** $2xy'y''=y'^2+1$.

15.189. $xy''=y'+x\sin(y'/x)$. **15.190.** $2yy''=y'^2$.

15.191. $y''(3y+4)-3y'^2=0$. **15.192.** $yy''=y^2y'+y'^2$.

15.193. $y''=8/y^3$. **15.194.** $yy''+y'^2=1$. **15.195.** $y^2+y'^2=2yy''$.

15.196. Найти частное решение уравнения $2yy'^3+y''=0$, удовлетворяющее начальным условиям $y(0)=0$, $y'(0)=-3$.

Решение. Полагая $y'=p(y)$, откуда $y''=p\dfrac{dp}{dy}$, преобразуем данное уравнение к виду

$$2yp^3+p\frac{dp}{dy}=0, \quad \text{или} \quad \frac{dp}{p^2}=-2y\,dy.$$

Интегрируя, имеем

$$\frac{1}{p}=y^2+C_1;\quad p=\frac{1}{y^2+C_1};\qquad \frac{dy}{dx}=\frac{1}{y^2+C_1}.$$

Используя начальные условия $y'(0)=-3$, получим $-3=1/C_1$, т. е. $C_1=-1/3$. Следовательно,

$$\frac{dy}{dx}=\frac{1}{y^2-1/3}, \quad \text{или} \quad (y^2-1/3)\,dy=dx,$$

откуда интегрированием находим

$$(y^3-y)/3=x+C_2.$$

Используя теперь начальные условия $y(0)=0$, получим $C_2=0$. Таким образом, искомое частное решение имеет вид $y^3-y=3x$.

В задачах 15.197—15.204 найти частные интегралы (частные решения) уравнений, удовлетворяющие указанным начальным условиям.

15.197. $y''=\sin 3x$; $y(\pi/2)=0$, $y'(\pi/2)=4/9$.

15.198. $\dfrac{d^3y}{dx^3}=e^{-2x}$; $y(0)=7/8$, $y'(0)=1/4$; $y''(0)=1/2$.

15.199. $xy''=1$; $y(1)=0$, $y'(1)=2$.

15.200. $\dfrac{d^2y}{dx^2}=\cos^2 x$; $y(0)=7/8$, $y'(0)=1$.

15.201. $y''-\dfrac{y'}{x-1}=x(x-1)$; $y(0)=0$, $y'(0)=-1$.

15.202. $yy''+y'^3-y'^2=0$; $y(0)=1$, $y'(0)=1/2$.

15.203. $y''(x^2+1)=2xy'$; $y(1)=1/3$, $y'(1)=2$.

15.204. $2yy''=y'^2-y^2$; $y(0)=1$, $y'(0)=1$.

15.205. Из семейства кривых уравнения $y''=3x^2-4x^3$ выделить кривую, проходящую через точку (0; 1) и касающуюся в ней прямой $x+y-7=0$.

15.206. Ускорение прямолинейно движущейся материальной точки в зависимости от времени выражается формулой $a(t)=5t^2-3t$. Найти закон движения точки, если в начальный момент времени $t=0$ скорость $v=0{,}5$ м/с, а путь $s=0$.

15.207. Тело движется прямолинейно с ускорением $a(t)=12t^2-4$ (м/с²). Найти путь, пройденный телом за первые три секунды, если $s=0$ и $v=0$ при $t=0$.

15.208. В некоторый момент времени движения поезда по горизонтальному участку пути со скоростью 25 м/с был включен тормоз. Найти время и расстояние, пройденное поездом после включения тормоза, если сопротивление движению после начала торможения равно 0,3 веса поезда.

Указание: по второму закону Ньютона дифференциальное уравнение движения поезда после включения тормоза имеет вид

$$m\frac{d^2s}{dt^2}=-0{,}3\,mg,$$

где s — путь, пройденный за время t; m — масса поезда, g — ускорение силы тяжести. Задача сводится к нахождению частного решения этого уравнения, удовлетворяющего начальным условиям: $s=0$, $\frac{ds}{dt}=25$ при $t=0$.

§ 10. ЛИНЕЙНЫЕ ОДНОРОДНЫЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ ВЫСШИХ ПОРЯДКОВ С ПОСТОЯННЫМИ КОЭФФИЦИЕНТАМИ

Линейным однородным дифференциальным уравнением n-го порядка с постоянными коэффициентами называется уравнение

$$y^{(n)}+p_1y^{(n-1)}+p_2y^{(n-2)}+\ldots+p_{n-1}y'+p_ny=0, \qquad (1)$$

в котором все члены имеют первую степень относительно функции и ее производных, а коэффициенты $p_1, p_2, \ldots, p_n$ — постоянные.

Общее решение линейного однородного уравнения (1) имеет вид

$$y=C_1y_1+C_2y_2+\ldots+C_ny_n, \qquad (2)$$

где $y_1, y_2, \ldots, y_n$ — линейно независимые частные решения (фундаментальная система решений) этого уравнения, а $C_1, C_2, \ldots, C_n$ — произвольные постоянные.

Для отыскания общего решения уравнения (1) составляется *характеристическое уравнение*

$$r^n+p_1r^{n-1}+p_2r^{n-2}+\ldots+p_{n-1}r+p_n=0, \qquad (3)$$

которое получается из уравнения (1) заменой в нем производных искомой функции соответствующими степенями r, причем сама функция заменяется единицей.

Тогда общее решение уравнения (1) строится в зависимости от характера корней уравнения (3):

1) каждому действительному однократному (т. е. простому) корню r в общем решении соответствует слагаемое вида Ce^{rx};

2) каждому действительному корню r кратности k в общем решении соответствует слагаемое вида $(C_1+C_2x+ \ldots +C_{k-1}x^{k-1})e^{rx}$;

3) каждой паре комплексных сопряженных однократных корней $r^{(1)}=\alpha+\beta i$ и $r^{(2)}=\alpha-\beta i$ в общем решении соответствует слагаемое вида $e^{\alpha x}(C_1\cos\beta x+ +C_2\sin\beta x)$;

4) каждой паре комплексных сопряженных корней $r^{(1)}=\alpha+\beta i$ и $r^{(2)}=\alpha-\beta i$ кратности l в общем решении соответствует слагаемое вида

$$e^{\alpha x}[(C_1+C_2x+\ldots+C_{l-1}x^{l-1})\cos\beta x+(C_1'+C_2'x+\ldots+C_{l-1}'x^{l-1})\sin\beta x].$$

15.209. Найти общее решение уравнения

$$y'''-y''-4y'+4y=0.$$

Решение. Запишем характеристическое уравнение; для этого заменим функцию y и ее производые y', y'' и y''' соответствующими степенями $r: r^0=1$, r, r^2 и r^3. Тогда получим

$$r^3-r^2-4r+4=0,$$

откуда, раскладывая левую часть уравнения на множители, имеем

$$r^2(r-1)-4(r-1)=0, \text{ или } (r-1)(r+2)(r-2)=0.$$

Следовательно, $r_1=1$, $r_2=-2$, $r_3=2$. Так как корни характеристического уравнения действительные и различные, то общее решение данного дифференциального уравнения имеет вид

$$y=C_1e^x+C_2e^{-2x}+C_3e^{2x}.$$

15.210. Найти общее решение уравнения

$$y'''-5y''+3y'+9y=0.$$

Решение. Составим характеристическое уравнение

$$r^3-5r^2+3r+9=0,$$

т. е.

$$r^3+r^2-6r^2-6r+9r+9=0; \quad (r+1)(r^2-6r+9)=0,$$

откуда находим $r_1=-1$, $r_{2,3}=3$. Таким образом, характеристическое уравнение имеет один простой и один двукратный корень. Следовательно, общее решение дифференциального уравнения запишется так:

$$y=C_1e^{-x}+(C_2+C_3x)e^{3x}.$$

15.211. Найти общее решение уравнения

$$y^{IV}+y'''+4y''+4y'=0.$$

Решение. Этому уравнению соответствует характеристическое уравнение

$$r^4+r^3+4r^2+4r=0,$$

или

$$r^2(r^2+4)+r(r^2+4)=0, \text{ т. е. } r(r+1)(r^2+4)=0.$$

Отсюда $r_1=0$, $r_2=-1$, $r_{3,4}=\pm 2i$. Характеристическое уравнение имеет два действительных и два комплексных корня (все они являются простыми). Таким образом, общее решение данного дифференциального уравнения запишется в виде

$$y=C_1+C_2e^{-x}+C_1\cos 2x+C_4\sin 2x.$$

15.212. Найти общее решение уравнения

$$y^{\mathrm{IV}}+18y''+81y=0.$$

Решение. Данному уравнению соответствует характеристическое уравнение

$$r^4+18r^2+81=0, \quad \text{или} \quad (r^2+9)^2=0,$$

имеющее двукратные комплексные корни $r_{1,2,3,4}=\pm 3i$. Следовательно, общее решение дифференциального уравнения записывается таким образом:

$$y=(C_1+C_2x)\cos 3x+(C_3+C_4x)\sin 3x.$$

В задачах **15.213—15.230** найти общие решения уравнений.

15.213. $y''-y'-12y=0$. **15.214.** $y''+7y'+6y=0$.
15.215. $y''+4y'+4y=0$. **15.216.** $y''-4y'+13y=0$.
15.217. $y''+8y'=0$. **15.218.** $y''+25y=0$.
15.219. $y'''-2y''-y'+2y=0$. **15.220.** $y'''+2y''-15y'=0$.
15.221. $y'''-8y''+16y'=0$. **15.222.** $y'''-3y'-2y=0$.
15.223. $y'''-3y''+3y'-y=0$. **15.224.** $y'''+64y'=0$.
15.225. $y^{\mathrm{IV}}-36y=0$. **15.226.** $y^{\mathrm{IV}}-2y'''+3y''=0$.
15.227. $y^{\mathrm{IV}}-y'''+y''-y'=0$. **15.228.** $y^{\mathrm{IV}}+18y''+81y=0$.
15.229. $y^{\mathrm{V}}-4y'''=0$. **15.230.** $y^{\mathrm{V}}-81y'=0$.

§ 11. ЛИНЕЙНЫЕ НЕОДНОРОДНЫЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ ВТОРОГО ПОРЯДКА С ПОСТОЯННЫМИ КОЭФФИЦИЕНТАМИ

Линейное неоднородное дифференциальное уравнение второго порядка с постоянными коэффициентами имеет вид

$$y''+py'+qy=f(x). \tag{1}$$

Оно отличается от соответствующего линейного однородного уравнения

$$y''+py'+qy=0 \tag{2}$$

наличием в правой части некоторой функции $f(x)$.

Для нахождения общего решения уравнения (1) сначала нужно найти общее решение $\bar{y}$ уравнения (2) (используя правила § 10), а затем найти какое-либо частное решение y^* уравнения (1). Их сумма есть общее решение данного неоднородного уравнения (1):

$$y=\bar{y}+y^*.$$

Рассмотрим два метода нахождения частного решения.

Метод неопределенных коэффициентов. Если правая часть уравнения (1) имеет вид

$$f(x)=e^{\alpha x}[P_n(x)\cos\beta x+Q_m(x)\sin\beta x], \tag{3}$$

где α и β—действительные числа, а $P_n(x)$ и $Q_m(x)$—многочлены соответственно n-й и m-й степени с действительными коэффициентами, то частное решение y^* уравнения (1) ищется в виде

$$y^*=x^k e^{\alpha x}[M_s(x)\cos\beta x+N_s(x)\sin\beta x], \tag{4}$$

где $M_s(x)$ и $N_s(x)$—многочлены s-й степени (s—наибольшая из степеней n и m) с неопределенными буквенными коэффициентами, а k—кратность, с которой $\alpha+\beta i$ входит в число корней характеристического уравнения $r^2+pr+q=0$, соответствующего однородному дифференциальному уравнению (2).

Для того чтобы найти коэффициенты многочленов $M_s(x)$ и $N_s(x)$, искомое частное решение (4) подставляют в левую часть дифференциального уравнения (1) и производят соответствующие упрощения; затем в полученном тождестве приравнивают коэффициенты при подобных членах в левой и правой частях, что дает систему линейных уравнений относительно искомых коэффициентов, из которой определяют эти коэффициенты.

Укажем вид частного решения y^* для некоторых частных случаев функции (3):

1) если $\underbrace{\alpha=0,\ \beta=0}_{\alpha+\beta i=0}$, то $f(x)=P_n(x)$ и частное решение ищется в виде

$$y^*=x^k(A_0x^n+A_1x^{n-1}+\ldots+A_n),$$

где k — кратность, с которой нуль входит в число корней характеристического уравнения;

2) если $\underbrace{\beta=0}_{\alpha+\beta i=\alpha}$, то $f(x)=e^{\alpha x}P_n(x)$ и частное решение ищется в виде

$$y^*=x^ke^{\alpha x}(A_0x^n+A_1x^{n-1}+\ldots+A_n),$$

где k — кратность, с которой α входит в число корней характеристического уравнения;

3) если $\underbrace{\alpha=0}_{\alpha+\beta i=\beta i}$, $n=m=0$, то $f(x)=A\cos\beta x+B\sin\beta x$ и частное решение ищется в виде

$$y^*=x^k(A_0\cos\beta x+B_0\sin\beta x),$$

где k — кратность, с которой βi входит в число корней характеристического уравнения.

В том случае, если правая часть уравнения (1) есть сумма функций вида (3), т. е.

$$f(x)=f_1(x)+f_2(x)+\ldots+f_r(x),$$

нужно предварительно найти частные решения $y_1^*, y_2^*, \ldots, y_r^*$, соответствующие функциям $f_1(x), f_2(x), \ldots, f_r(x)$. Тогда частное решение уравнения (1) запишется в виде

$$y^*=y_1^*+y_2^*+\ldots+y_r^*. \tag{5}$$

Метод вариации произвольных постоянных. Более общим методом решения линейного неоднородного уравнения (1) является метод вариации произвольных постоянных.

Пусть y_1 и y_2 — линейно независимые частные решения однородного уравнения (2). Тогда общее решение неоднородного уравнения (1) следует искать в виде

$$y=C_1(x)y_1+C_2(x)y_2, \tag{6}$$

где функции $C_1(x)$ и $C_2(x)$ определяются из системы уравнений

$$\left.\begin{aligned} C_1'(x)y_1+C_2'(x)y_2&=0,\\ C_1'(x)y_1'+C_2'(x)y_2'&=f(x).\end{aligned}\right\} \tag{7}$$

Решая систему алгебраических уравнений (7), находим

$$C_1'(x)=\frac{-y_2f(x)}{W(y_1,\ y_2)},\quad C_2'(x)=\frac{y_1f(x)}{W(y_1,\ y_2)}, \tag{8}$$

где

$$W(y_1,\ y_2)=\begin{vmatrix} y_1 & y_2\\ y_1' & y_2'\end{vmatrix} \tag{9}$$

— определитель Вронского, составленный для решений y_1 и y_2.

Интегрируя равенства (8), получаем

$$C_1(x) = -\int \frac{y_2 f(x)}{W(y_1, y_2)} dx + C_1; \quad C_2(x) = \int \frac{y_1 f(x)}{W(y_1, y_2)} dx + C_2, \tag{10}$$

откуда, подставляя найденные функции $C_1(x)$ и $C_2(x)$ в соотношение (6), получим общее решение линейного неоднородного уравнения (1).

15.231. Найти общее решение уравнения

$$y'' + 2y' = e^x(3x^2 + 2x + 9).$$

Решение. 1. Найдем общее решение $\bar{y}$ соответствующего однородного уравнения $y'' + 2y' = 0$. Решая отвечающее ему характеристическое уравнение $r^2 + 2r = 0$, получаем корни $r_1 = 0$, $r_2 = -2$. Следовательно,

$$\bar{y} = C_1 + C_2 e^{-2x}.$$

2. Перейдем к отысканию частного решения y^* данного уравнения. Здесь правая часть $f(x) = e^x(3x^2 + 2x + 9)$ имеет вид (3): $n = 2$, $P_2(x) = 3x^2 + 2x + 9$, $\alpha = 1$, $\beta = 0$. Так как $\alpha + \beta i = 1$ не является корнем характеристического уравнения, то $k = 0$. Следовательно, частное решение y^* нужно искать в виде

$$y^* = (Ax^2 + Bx + C) e^x,$$

где A, B и C — некоторые коэффициенты, подлежащие определению. Для их отыскания воспользуемся тем, что y^* должно быть решением данного уравнения. Найдем $y^{*\prime}$ и $y^{*\prime\prime}$:

$$y^{*\prime} = (Ax^2 + Bx + C) e^x + (2Ax + B) e^x = (Ax^2 + 2Ax + Bx + B + C) e^x;$$

$$y^{*\prime\prime} = (Ax^2 + 2Ax + Bx + B + C) e^x + (2Ax + 2A + B) e^x =$$
$$= (Ax^2 + 4Ax + Bx + 2A + 2B + C) e^x;$$

теперь подставим выражения для $y^{*\prime}$ и $y^{*\prime\prime}$ в данное уравнение:

$$(Ax^2 + 4Ax + Bx + 2A + 2B + C) e^x + 2(Ax^2 + 2Ax + Bx + B + C) e^x =$$
$$= e^x(3x^2 + 2x + 9).$$

Сокращая обе части полученного равенства на e^x и группируя члены при одинаковых степенях x, в результате получим

$$3Ax^2 + (8A + 3B)x + 2A + 4B + 3C = 3x^2 + 2x + 9.$$

Это равенство выполняется тождественно только тогда, когда коэффициенты при одинаковых степенях x в обеих его частях равны между собой. Итак, для отыскания коэффициентов A, B и C имеем следующую систему уравнений:

$$\left.\begin{aligned} 3A \quad\quad\quad\;\; &= 3, \\ 8A + 3B \quad\;\; &= 2, \\ 2A + 4B + 3C &= 9. \end{aligned}\right\}$$

Решая эту систему, найдем $A = 1$, $B = -2$, $C = 5$. Таким образом, получаем искомое частное решение

$$y^* = (x^2 - 2x + 5) e^x.$$

Теперь можно записать общее решение данного уравнения:

$$y = \bar{y} + y^* = C_1 + C_2 e^{-2x} + (x^2 - 2x + 5) e^x.$$

15.232. Найти общее решение уравнения

$$y'' + 8y' + 16y = -10e^{-4x}.$$

Решение. 1. Находим $\bar{y}$. Характеристическое уравнение $r^2+8r+16=0$ имеет корни $r_1=r_2=-4$. Следовательно,

$$\bar{y}=(C_1+C_2x)\,e^{-4x}.$$

2. Найдем теперь y^*. Здесь правая часть имеет вид (3): $n=0$, $P_0=-10$, $\alpha=-4$, $\beta=0$. Так как $\alpha+\beta i=-4$ служит двукратным корнем характеристического уравнения, то $k=2$ и частное решение y^* надо искать в виде

$$y^*=Ax^2e^{-4x},$$

где A — коэффициент, подлежащий определению. Вычислим производные $y^{*\prime}$ и $y^{*\prime\prime}$:

$$y^{*\prime}=(-4Ax^2+2Ax)\,e^{-4x},$$
$$y^{*\prime\prime}=(16Ax^2-16Ax+2A)\,e^{-4x}.$$

Подставляя выражения для y^*, $y^{*\prime}$ и $y^{*\prime\prime}$ в данное уравнение, сокращая обе его части на e^{-4x} и приводя подобные члены, в итоге получим $2A=-10$, откуда $A=-5$. Следовательно, искомое частное решение имеет вид

$$y^*=-5x^2e^{-4x},$$

а общее решение данного уравнения

$$y=\bar{y}+y^*=(C_1+C_2x)\,e^{-4x}-5x^2\,e^{-4x}.$$

15.233. Найти общее решение уравнения $y''+4y=3x\cos x$.

Решение. 1. Находим $\bar{y}$. Характеристическое уравнение $r^2+4=0$ имеет корни $r_{1,2}=\pm 2i$. Следовательно,

$$\bar{y}=C_1\cos 2x+C_2\sin 2x.$$

2. Переходим к отысканию y^*. Здесь правая часть имеет вид (3): $\alpha=0$, $\beta=1$, $P_1(x)=x$, $Q(x)=0$. Число $\alpha+\beta i=i$ не является корнем характеристического уравнения; поэтому $k=0$ и частное решение y^* следует искать в виде

$$y^*=(Ax+B)\cos x+(Cx+D)\sin x,$$

где A, B, C и D — неопределенные коэффициенты. Дифференцируя, находим

$$y^{*\prime}=(Cx+D+A)\cos x+(-Ax+C-B)\sin x,$$
$$y^{*\prime\prime}=(-Ax+2C-B)\cos x+(-Cx-2A-D)\sin x.$$

Подставим теперь выражения для $y^{*\prime\prime}$ и y^* в данное уравнение и сгруппируем члены при $\cos x$ и $\sin x$; тогда получим

$$(3Ax+3B+2C)\cos x+(3Cx+3D-2A)\sin x=3x\cos x.$$

Сравнивая коэффициенты при $x\cos x$, $\cos x$, $x\sin x$ и $\sin x$, имеем

$$\left.\begin{aligned}3A&=3,\\ 3B+2C&=0,\\ 3C&=0,\\ 3D-2A&=0,\end{aligned}\right\}$$

откуда $A=1$, $B=0$, $C=0$, $D=2/3$. Таким образом,

$$y^*=x\cos x+\frac{2}{3}\sin x.$$

Итак, общее решение данного уравнения имеет вид

$$y=\bar{y}+y^*=C_1\cos 2x+C_2\sin 2x+x\cos x+\frac{2}{3}\sin x.$$

15.234. Найти общее решение уравнения

$$y''+9y=9\cos 3x+16\sin 3x.$$

Решение. 1. Сначала находим $\bar{y}$. Характеристическое уравнение $r^2+9=0$ имеет корни $r_{1,2}=\pm 3i$. Следовательно,

$$\bar{y}=C_1\cos 3x+C_2\sin 3x.$$

2. Найдем теперь y^*. В данном случае правая часть имеет вид (3): $\alpha=0$, $\beta=3$, $P_0(x)=9$, $Q_0(x)=16$. Так как число $\alpha+\beta i=3i$ служит однократным корнем характеристического уравнения, то $k=1$ и частное решение надо искать в виде

$$y^*=x(A\cos 3x+B\sin 3x),$$

где A и B — неопределенные коэффициенты. Находим

$$y^{*\prime}=(3Bx+A)\cos 3x+(-3Ax+B)\sin 3x,$$
$$y^{*\prime\prime}=(-9Ax+6B)\cos 3x+(-9Bx-6A)\sin 3x.$$

Подставляя $y^{*\prime\prime}$ и y^* в данное уравнение и приводя подобные члены, получим

$$6B\cos 3x-6A\sin 3x=9\cos 3x+16\sin 3x,$$

откуда $6B=9$, $-6A=16$, т. е. $B=3/2$, $A=-8/3$. Следовательно,

$$y^*=x\left(-\frac{8}{3}\cos 3x+\frac{3}{2}\sin 3x\right).$$

Итак, общее решение данного уравнения имеет вид

$$y=\bar{y}+y^*=C_1\cos 3x+C_2\sin 3x-\frac{8}{3}x\cos 3x+\frac{3}{2}x\sin 3x.$$

15.235. Найти общее решение уравнения

$$y''-4y'=4x-5+10e^x\cos x.$$

Решение. 1. Находим сначала $\bar{y}$. Характеристическое уравнение $r^2-4r=0$ имеет корни $r_1=0$ и $r_2=4$. Следовательно,

$$\bar{y}=C_1+C_2e^{4x}.$$

2. Переходим к нахождению y^*. Здесь правая часть $f(x)$ данного уравнения представляет собой сумму функций $f_1(x)=4x-5$ и $f_2(x)=10e^x\cos x$. Будем искать частные решения y_1^* и y_2^* для каждой из этих функций в отдельности.

Функция $f_1(x)=4x-5$ имеет вид (3): $n=1$, $P_1(x)=4x-5$, $\alpha=0$, $\beta=0$, причем $\alpha+\beta i=0$ является однократным корнем характеристического уравнения (т. е. $k=1$). Следовательно,

$$y_1^*=x(Ax+B)=Ax^2+Bx.$$

Дифференцируя, находим

$$y_1^{*\prime}=2Ax+B,\quad y_1^{*\prime\prime}=2A,$$

откуда, подставляя $y_1^{*\prime}$ и $y_1^{*\prime\prime}$ в левую часть данного уравнения и приравнивая полученное выражение $f_1(x)=4x-5$, имеем

$$2A-4(2Ax+B)=4x-5,$$

т. е. $-8A=4$, $2A-4B=-5$, или $A=-1/2$, $B=1$. Таким образом,

$$y_1^*=-\frac{x^2}{2}+x.$$

Функция $f_2(x)=10e^x\cos x$ также имеет вид (3): $\alpha=1$, $\beta=1$, $P_0(x)=1$, $Q_0(x)=0$. Так как число $\alpha+\beta i=1+i$ не является корнем характеристического уравнения, то $k=0$ и частное решение y_2^* ищем в форме

$$y_2^*=e^x(C\cos x+D\sin x).$$

Дифференцируя, находим

$$y_2^{*\prime}=e^x[(C+D)\cos x+(D-C)\sin x],$$
$$y_2^{*\prime\prime}=e^x(2D\cos x-2C\sin x).$$

Подставляя $y_2^{*\prime}$ и $y_2^{*\prime\prime}$ в левую часть данного уравнения и приравнивая полученное выражение $f_2(x)=10e^x\cos x$, имеем

$$e^x[(-4C-2D)\cos x+(2C-4D)\sin x]=10e^x\cos x,$$

откуда

$$\left.\begin{aligned}-4C-2D&=10,\\ 2C-4D&=0,\end{aligned}\right\}$$

т. е. $C=-2$, $D=-1$. Следовательно,

$$y_2^*=-2e^x\cos x-e^x\sin x.$$

Итак, общее решение данного уравнения запишется следующим образом:

$$y=\bar{y}+y_1^*+y_2^*=C_1+C_2e^{4x}-\frac{x^2}{2}+x-2e^x\cos x-e^x\sin x.$$

В задачах **15.236—15.245** для заданных уравнений написать их общие решения, а также частные решения с неопределенными коэффициентами (числовых значений коэффициентов не находить).

15.236. $y''+2y'+5y=e^{-2x}(x^2-7x+2)$.
15.237. $y''+4y'+3y=xe^{-3x}$. **15.238.** $y''-8y'=x^3-2x$.
15.239. $y''-10y'+25y=e^{5x}(1-x^2)$.
15.240. $y''-2y'+10y=xe^x\cos 2x$.
15.241. $y''+16y=(x^2-7)\sin 4x$.
15.242. $y''-6y'+13y=e^{3x}\sin 2x$.
15.243. $y''+10y'=x^2+xe^{-10x}\sin x$.
15.244. $y''-36y=xe^{-6x}-e^{6x}+\sin 6x$.
15.245. $y''+9y'+25y=e^{-3x}\cos 4x+x\sin 4x$.

В задачах **15.246—15.258** найти общие решения уравнений методом неопределенных коэффициентов.

15.246. $y''+3y'-10y=10x^2+4x-5$.
15.247. $y''-4y'-5y=(27x-39)e^{-4x}$.
15.248. $y''-4y'+3y=10e^{3x}$. **15.249.** $y''+4y'=-2xe^{-4x}$.
15.250. $y''+16y=(34x+13)e^{-x}$. **15.251.** $y''+4y'+4y=3xe^{-2x}$.
15.252. $y''+5y'=50\cos 5x$.
15.253. $y''-4y'+5y=2\cos x+6\sin x$.
15.254. $y''+4y=10\cos 2x-6\sin 2x$. **15.255.** $y''-4y=e^{2x}\sin 2x$.
15.256. $y''-2y'+2y=e^x\sin x$. **15.257.** $y''-3y'=e^{3x}+12x-7$.
15.258. $y''+y=\cos x+\cos 2x$.

В задачах **15.259—15.263** найти частные решения уравнений, удовлетворяющие указанным начальным условиям.

15.259. $y''+4y=(6x+5)e^{-2x}$; $y(0)=0$, $y'(0)=3/4$.

15.260. $y''+2y'-8y=(12x+20)e^{2x}$; $y(0)=0$, $y'(0)=1$.

15.261. $y''-2y'+10y=74\sin 3x$; $y(0)=6$, $y'(0)=3$.

15.262. $y''+y=-8\sin x-6\cos x$; $y(\pi/2)=-\pi/2$; $y'(\pi/2)=-2\pi$.

15.263. $y''-4y'+13y=e^{2x}\cos 3x$; $y(0)=1$, $y'(0)=-1$.

15.264. Найти общее решение уравнения $y''+4y=\operatorname{tg} 2x$.

Решение. В данном случае частное решение уравнения методом неопределенных коэффициентов найти нельзя, так как в отличие от предыдущего правая часть уравнения представляет собой функцию другой структуры. Поэтому для нахождения общего решения уравнения воспользуемся методом вариации произвольных постоянных.

Соответствующее однородное уравнение $y''+4y=0$; характеристическое уравнение $r^2+4=0$ имеет корни $r_{1,2}=\pm 2i$. Следовательно, $y_1=\cos 2x$ и $y_2=\sin 2x$—два линейно независимых частных решения однородного уравнения, и общее решение неоднородного уравнения будем искать в виде

$$y=C_1(x)\cos 2x+C_2(x)\sin 2x, \tag{*}$$

где функции $C_1(x)$ и $C_2(x)$ определяются из системы уравнений вида (7):

$$\left.\begin{aligned} C_1'(x)\cos 2x+C_2'(x)\sin 2x&=0,\\ -2C_1'(x)\sin 2x+2C_2'(x)\cos 2x&=\operatorname{tg} 2x. \end{aligned}\right\}$$

Решая эту систему по формулам (8), находим

$$C_1'(x)=-\frac{\sin 2x\cdot\operatorname{tg} 2x}{\begin{vmatrix}\cos 2x & \sin 2x\\ -2\sin 2x & 2\cos 2x\end{vmatrix}}=-\frac{1}{2}\,\frac{\sin^2 2x}{\cos 2x},$$

$$C_2'(x)=\frac{\cos 2x\cdot\operatorname{tg} 2x}{\begin{vmatrix}\cos 2x & \sin 2x\\ -2\sin 2x & 2\cos 2x\end{vmatrix}}=\frac{1}{2}\sin 2x.$$

Интегрируя полученные равенства, имеем

$$C_1(x)=-\frac{1}{2}\int\frac{\sin^2 2x}{\cos 2x}\,dx+C_1=\frac{1}{2}\int\left(\cos 2x-\frac{1}{\cos 2x}\right)dx+C_1=$$

$$=\frac{1}{4}\sin 2x-\frac{1}{4}\ln\left|\operatorname{tg}\left(x+\frac{\pi}{4}\right)\right|+C_1;$$

$$C_2(x)=\frac{1}{2}\int\sin 2x\,dx+C_2=-\frac{1}{4}\cos 2x+C_2.$$

Подставляя $C_1(x)$ и $C_2(x)$ в соотношение (*), находим общее решение данного уравнения:

$$y=\left[\frac{1}{4}\sin 2x-\frac{1}{4}\ln\left|\operatorname{tg}\left(x+\frac{\pi}{4}\right)\right|+C_1\right]\cos 2x+\left(-\frac{1}{4}\cos 2x+C_2\right)\sin 2x=$$

$$=C_1\cos 2x+C_2\sin 2x-\frac{1}{4}\cos 2x\ln\left|\operatorname{tg}\left(x+\frac{\pi}{4}\right)\right|.$$

В задачах **15.265—15.272** найти общие решения уравнений, применяя метод вариации произвольных постоянных.

15.265. $y''+y=\dfrac{1}{\cos x}$. **15.266.** $y''+y=\operatorname{ctg} x$.

15.267. $y''-y=\dfrac{e^x}{e^x+1}$. **15.268.** $y''-2y'+y=\dfrac{e^x}{x}$.

15.269. $y''+9y=\frac{1}{\sin 3x}$. **15.270.** $y''+2y'+y=\frac{1}{xe^x}$.

15.271. $y''+4y=\frac{1}{\sin^2 x}$. **15.272.** $y''+y=\frac{1}{\cos^3 x}$.

§ 12. СИСТЕМЫ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

Нормальной системой дифференциальных уравнений называется система вида

$$\left.\begin{aligned} y_1' &= f_1(x, y_1, y_2, \ldots, y_n), \\ y_2' &= f_2(x, y_1, y_2, \ldots, y_n), \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ y_n' &= f_n(x, y_1, y_2, \ldots, y_n). \end{aligned}\right\} \qquad (1)$$

Здесь число уравнений равно числу неизвестных функций.

Решением системы (1) называется совокупность n функций $y_1, y_2, \ldots, y_n$, удовлетворяющих всем уравнениям системы.

Частным решением системы (1) называется решение, удовлетворяющее начальным условиям:

$$y_1=y_{10},\ y_2=y_{20},\ \ldots,\ y_n=y_{n0} \quad \text{при} \quad x=x_0,$$

где $x_0, y_{10}, y_{20}, \ldots, y_{n0}$ — заданные числа.

Семейство решений системы (1), зависящее от n произвольных независимых постоянных $C_1, C_2, \ldots, C_n$:

$$\left.\begin{aligned} y_1 &= \varphi_1(x, C_1, C_2, \ldots, C_n), \\ y_2 &= \varphi_2(x, C_1, C_2, \ldots, C_n), \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ y_n &= \varphi_n(x, C_1, C_2, \ldots, C_n), \end{aligned}\right\}$$

называют обычно *общим решением* этой системы.

Решение нормальной системы методом исключения можно свести к решению одного дифференциального уравнения n-го порядка.

15.273. Решить систему дифференциальных уравнений

$$\left.\begin{aligned} \frac{dy_1}{dx} &= 5y_1+4y_2, \\ \frac{dy_2}{dx} &= 4y_1+5y_2. \end{aligned}\right\}$$

Решение. Дифференцируем первое уравнение по x:

$$\frac{d^2y_1}{dx^2}=5\frac{dy_1}{dx}+4\frac{dy_2}{dx}. \qquad (*)$$

Из первого уравнения определяем $y_2=\frac{1}{4}\left(\frac{dy_1}{dx}-5y_1\right)$. Тогда из второго уравнения имеем

$$\frac{dy_2}{dx}=4y_1+5\cdot\frac{1}{4}\left(\frac{dy_1}{dx}-5y_1\right), \text{ т. е. } \frac{dy_2}{dx}=\frac{5}{4}\frac{dy_1}{dx}-\frac{9}{4}y_1.$$

Подставляя полученное для $\frac{dy_2}{dx}$ выражение в соотношение (*), имеем

$$\frac{d^2y_1}{dx^2}=5\frac{dy_1}{dx}+4\left(\frac{5}{4}\frac{dy_1}{dx}-\frac{9}{4}y_1\right).$$

Таким образом, приходим к уравнению второго порядка с одной неизвестной функцией y_1:

$$\frac{d^2y_1}{dx^2}-10\frac{dy_1}{dx}+9y_1=0.$$

Решая его, находим

$$y_1=C_1e^x+C_2e^{9x}.$$

Тогда

$$y_2=\frac{1}{4}\left(\frac{dy_1}{dx}-5y_1\right)=\frac{1}{4}\left(C_1e^x+9C_2e^{9x}-5C_1e^x-5C_2e^{9x}\right)=-C_1e^x+C_2e^{9x}.$$

Итак, общее решение системы имеет вид

$$y_1=C_1e^x+C_2e^{9x},\quad y_2=-C_1e^x+C_2e^{9x}.$$

В задачах 15.274—15.283 решить системы дифференциальных уравнений.

15.274. $\left.\begin{aligned}\frac{dy_1}{dx}&=-y_2,\\ \frac{dy_2}{dx}&=-4y_1.\end{aligned}\right\}$

15.275. $\left.\begin{aligned}\frac{dy_1}{dx}&=2y_1+y_2,\\ \frac{dy_2}{dx}&=3y_1+4y_2.\end{aligned}\right\}$

15.276. $\left.\begin{aligned}\frac{dy_1}{dx}&=y_1-y_2,\\ \frac{dy_2}{dx}&=-4y_1+y_2.\end{aligned}\right\}$

15.277. $\left.\begin{aligned}\frac{dy_1}{dx}&=3y_1+2y_2,\\ \frac{dy_2}{dx}&=y_1+2y_2.\end{aligned}\right\}$

15.278. $\left.\begin{aligned}\frac{dy_1}{dx}&=3y_1-y_2,\\ \frac{dy_2}{dx}&=4y_1-y_2.\end{aligned}\right\}$

15.279. $\left.\begin{aligned}\frac{dy_1}{dx}&=-3y_1+2y_2,\\ \frac{dy_2}{dx}&=-2y_1+y_2.\end{aligned}\right\}$

15.280. $\left.\begin{aligned}\frac{dy_1}{dx}&=y_2,\\ \frac{dy_2}{dx}&=-y_1.\end{aligned}\right\}$

15.281. $\left.\begin{aligned}\frac{dy_1}{dx}&=y_1-5y_2,\\ \frac{dy_2}{dx}&=y_1-y_2.\end{aligned}\right\}$

15.282. $\left.\begin{aligned}\frac{dy_1}{dx}&=y_1-3y_2,\\ \frac{dy_2}{dx}&=3y_1+y_2.\end{aligned}\right\}$

15.283. $\left.\begin{aligned}\frac{dy_1}{dx}&=y_1+y_2,\\ \frac{dy_2}{dx}&=-2y_1+3y_2.\end{aligned}\right\}$

ОТВЕТЫ

Глава 1

1.4. 1) 1; 2) 10; 3) 4; 4) 2. **1.5.** $B(3)$. **1.7.** 1) $M(5/3)$; 2) $M(0)$; 3) $M(1/2)$; 4) $M(-3)$. **1.10.** 1) $-11/2$; 2) 7; 3) 0. **1.11.** 1) 2; 2) 6. **1.12.** $M(1)$. **1.13.** 3. **1.14.** $M(9/2)$. **1.17.** Во II; в IV; в I; в III. **1.18.** 1) В III или IV; 2) в I или IV. **1.19.** $(0;\ -3)$. **1.20.** 1) На прямой, перпендикулярной оси абсцисс; 2) на прямой, перпендикулярной оси ординат; 3) на биссектрисе I и III координатных углов. **1.22.** Для точки A: $(-3;\ 1)$, $(3;\ -1)$, $(3;\ 1)$; для точки B: $(0;\ 4)$, $(0;\ -4)$, $(0;\ 4)$. **1.23.** 1) $(0;\ 0)$, $(5;\ 0)$, $(5;\ 5)$, $(0;\ 5)$; 2) $(0;\ 0)$, $(5;\ 0)$, $(5;\ -5)$, $(0;\ -5)$, 3) $(0;\ 0)$, $(-5;\ 0)$, $(-5;\ 5)$, $(0;\ 5)$; 4) $(0;\ 0)$, $(-5;\ 0)$, $(-5;\ -5)$, $(0;\ -5)$. **1.24.** $(\sqrt{2};\ 0)$, $(0;\ \sqrt{2})$, $(-\sqrt{2};\ 0)$, $(0;\ -\sqrt{2})$. **1.25.** 1) $(0;\ 0)$; $(4;\ 0)$; $(2;\ 2\sqrt{3})$; 2) $(0;\ 0)$; $(4;\ 0)$; $(2;\ -2\sqrt{3})$; 3) $(0;\ 0)$, $(-4;\ 0)$, $(-2;\ 2\sqrt{3})$; 4) $(0;\ 0)$, $(-4;\ 0)$, $(-2;\ -2\sqrt{3})$. **1.27.** 1) 5; 2) 10; 3) 13; 4) $5\sqrt{5}$. **1.28.** 1) 5; 2) 12; 3) 26; 4) 17; 5) 12. **1.29.** 18. **1.31.** 1) Прямоугольный; 2) тупоугольный; 3) остроугольный. **1.33.** $(0;\ 0)$, $(-12;\ 0)$, $(0;\ 16)$. **1.34.** 12. **1.35.** $D(5;\ -1)$. **1.36.** $(10;\ 10)$ или $(2;\ 2)$. **1.38.** 1) $(3/2;\ -7/4)$; 2) $(2;\ 1/2)$; 3) $(13/5;\ 16/5)$; 4) $(11/5;\ 7/5)$. **1.39.** $(1;\ -2)$; 2) $(1;\ 2)$; 3) $(5/2;\ -5/2)$. **1.40.** $\sqrt{26}$, $\sqrt{26}$, $4\sqrt{2}$. **1.41.** $(-5/3;\ 0)$. **1.43.** $(0;\ 3)$. **1.44.** $14\sqrt{2}/3$. **1.45.** $(-3/4;\ 5)$, $(3/2;\ 3)$, $(15/4;\ 1)$. **1.47.** $B(-5;\ -2)$. **1.48.** $C(5;\ 7)$. **1.49.** $C(12;\ 7)$; $D(4;\ -2)$. **1.50.** $D(4;\ 1)$. **1.51.** $A(3;\ -5)$; $B(-6;\ 4)$. **1.53.** $C(11/2;\ 1)$. **1.54.** $(0;\ 11/3)$ и $(11/5;\ 0)$. **1.55.** $C(8/5;\ 8/5)$. **1.57.** $B\in l$, $D\in l$, $E\in l$; $A\notin l$, $C\notin l$. **1.62.** 1) $(1;\ 3)$; 2) $(3;\ 4)$, $(3;\ -4)$; 3) $(0;\ 1)$; 4) $(2;\ 3)$, $(3;\ 2)$, $(-2;\ -3)$, $(-3;\ -2)$. **1.64.** $4x+6y+13=0$. **1.65.** $x+3y-5=0$. **1.66.** $y^2=6x-9$. **1.67.** $(x-a)^2+(y-b)^2=r^2$. **1.68.** $x^2+y^2=5$. **1.69.** $x+2y-5=0$. **1.70.** $x^2+y^2=16$. **1.72.** $(1;\ 0)$, $(4;\ -3)$, $(4;\ 1)$, $(1/9;\ -2/3)$, $(0;\ -1)$. **1.73.** $(1;\ 0)$, $(0;\ 2)$, $(-1;\ 0)$, $(-1;\ 0)$, $(1;\ 0)$. **1.75.** 1; -1; $1/3$. **1.76.** 1) $t=0$; 2) $t=1$; 3) $t=2$; 4) $D\notin l$; 5) $t=4$; 6) $t=5$; 7) $t=3$; 8) $P\notin l$. **1.77.** $3x-2y+2=0$. **1.78.** $x^{2/3}+y^{2/3}=1$. **1.79.** $y=\sqrt{x}-2$. **1.80.** $x=a\cos t$, $y=b\sin t$. **1.81.** $x=a\sin t\sin 2t$, $y=a\cos t\sin 2t$. **1.83.** $A(1;\ -1)$, $B(-1;\ 3)$, $C(-6;\ 6)$. **1.84.** 1) $(-6;\ 0)$; 2) $(-2;\ 2)$; 3) $(-6;\ 3)$; 4) $(-1;\ 4)$. **1.85.** $(8;\ -6)$ и $(-8;\ 6)$. **1.86.** $(-3;\ -2)$. **1.87.** $A(0;\ 2)$, $B(1;\ -\sqrt{3})$. **1.88.** $A(\sqrt{2};\ \sqrt{2})$, $B(3\sqrt{2}/2;\ -3\sqrt{2}/2)$, $C(-3\sqrt{2}/2;\ -\sqrt{2}/2)$. **1.89.** 1) $((1-\sqrt{3})/2;\ (1+\sqrt{3})/2)$; 2) $(0;\ \sqrt{2})$; 3) $((\sqrt{3}-1)/2;\ (1+\sqrt{3})/2)$; 4) $(1;\ 1)$. **1.91.** $y=x^2$. **1.92.** $y=3/x$. **1.93.** $x^2-y^2=2$. **1.94.** $x^2+y^2=r^2$. **1.98.** $A(3\sqrt{2}/2;\ 3\sqrt{2}/2)$, $B(-\sqrt{3};\ 1)$, $C(\sqrt{2}/2;\ -\sqrt{2}/2)$, $D(-2;\ 2\sqrt{3})$, $E(-1;\ -\sqrt{3})$, $F(-5;\ 0)$, $G(0;\ -3)$. **1.99.** $A(8;\ \pi/3)$, $B(7;\ \pi/2)$, $C(2\sqrt{2};\ 3\pi/4)$, $D(\sqrt{10};\ 7\pi/4)$, $E(2\sqrt{2};\ 7\pi/6)$, $F(8;\ \pi)$, $G(3;\ 3\pi/2)$, $H(5;\ 0)$. **1.100.** 1) $M_1(\rho;\ -\varphi)$; 2) $M_1(\rho;\ \pi+\varphi)$; 3) $M_1(\rho;\ \pi-\varphi)$. **1.104.** $\rho=2a\cos\varphi$. **1.105.** $\rho=a\sin 2\varphi$. **1.106.** $\rho=a\sqrt{\cos 2\varphi}$.

Глава 2

2.1. Да; да; нет; да; да; да. **2.2.** 1) Да; 2) да; 3) да; 4) нет; 5) да; 6) нет. **2.5.** $x+1=0$, $y-2=0$. **2.6.** $x-3=0$. **2.7.** $x=0$, $y=0$, $x-5=0$, $y+5=0$. **2.8.** $x=0$, $y=0$, $x+2=0$, $y-2=0$. **2.9.** $x=0$, $y=0$, $x+2=0$, $y+3=0$. **2.10.** $y=(-2/3)x-7/3$. **2.11.** 1) $1/4$; 2) 0; 3) $5/2$; 4) -2. **2.12.** 1) $\operatorname{arctg}(1/5)$; 2) $\operatorname{arctg}(3/2)$; 3) $180°-\operatorname{arctg}(4/3)$; 4) $135°$; 5) 0. **2.14.** 1) $x-y+3=0$; 2) $\sqrt{3}x-y+3=0$; 3) $x+y-3=0$; 4) $\sqrt{3}x+y-9=0$. **2.15.** 1) $x-y=0$;

2) $\sqrt{3}x-y=0$; 3) $\sqrt{3}x+y=0$. **2.16.** $5x+y+3=0$. **2.17.** 1) $x-y+1=0$; 2) $y+5=0$; 3) $4x+3y=0$. **2.19.** $2x-5y-15=0$. **2.20.** $\sqrt{3}x+y-2=0$. **2.21.** $\sqrt{3}x+3y-3=0$, $\sqrt{3}x+3y+3=0$, $x=0$. **2.22.** $2x-y+3=0$, $2x+y+3=0$, $2x-y-3=0$. **2.23.** $\sqrt{2}x+\sqrt{2}y-a=0$, $\sqrt{2}x-\sqrt{2}y+a=0$, $\sqrt{2}x+\sqrt{2}y+a=0$, $\sqrt{2}x-\sqrt{2}y-a=0$. **2.24.** $\sqrt{3}x-3y+9\sqrt{3}=0$, $\sqrt{3}x+3y-9\sqrt{3}=0$, $y=0$, $y=2\sqrt{3}$. **2.26.** 1) $x/(-4)+y/3=1$; 2) $x/6+y/(-5)=1$; 3) $x/5+y/4=1$; 4) $x/(1/3)+y/(-1/2)=1$. **2.27.** $4x-3y+12=0$. **2.28.** $5x-2y-10=0$. **2.29.** $5x-7y-35=0$. **2.30.** 1) $60°$; $\sqrt{3}$; 2) $45°$; -1; 3) $\operatorname{arctg}(1/2)$; 1; 4) $180°-\operatorname{arctg} 3$; -3. **2.31.** 1) $a=-b$; 2) $a=b$; 3) $a=-b\sqrt{3}$; 4) $a=b\sqrt{3}$. **2.32.** $3x+8y-12=0$, $3x-8y+12=0$, $3x+8y+12=0$, $3x-8y-12=0$. **2.33.** 20 кв. ед. **2.35.** $6x+4y-24=0$. **2.36.** $3x+y+12=0$. **2.38.** $\sqrt{3}x+y+3-2\sqrt{3}=0$. **2.39.** $\sqrt{3}x-y+1+2\sqrt{3}=0$. **2.40.** $x+y+1=0$. **2.41.** $x-y+8=0$, $x+y+8=0$. **2.42.** $2x+3y-4=0$, $2x-3y-4=0$. **2.43.** $y-3=k(x+4)$; 1) $\sqrt{3}x-3y+9+4\sqrt{3}=0$; 2) $x-y+7=0$; 3) $\sqrt{3}x-y+3+4\sqrt{3}=0$; 4) $\sqrt{3}x+y+4\sqrt{3}-3=0$; 5) $x+y+1=0$. **2.44.** $x+y-3=0$. **2.46.** 1) $3x-y-11=0$; 2) $y+5=0$; 3) $x-2=0$; 4) $4x+y-3=0$. **2.48.** 1) $4x-3y-19=0$; 2) $x-4y+12=0$; 3) $x+3=0$; 4) $y+2=0$. **2.49.** $5x+2y-6=0$. **2.50.** $x-y-2=0\,(MN)$, $3x-4y-20=0\,(NP)$, $8x+y+5=0\,(MP)$. **2.51.** (3; 1) **2.52.** $3x-4y+18=0\,(AB)$, $4x+3y+24=0\,(BC)$, $2x-y+2=0\,(AC)$, $7x-y+17=0\,(m_{AB})$, $16x-13y+46=0\,(m_{BC})$, $2x-11y+12=0\,(m_{AC})$. **2.53.** $x+7y+26=0$. **2.54.** $21\sqrt{2}/10$. **2.55.** $60°$. **2.57.** 1) Да; 2) да; 3) нет. **2.58.** -10. **2.59.** $M\,(-3/5;\ -3/5)$. **2.60.** $x+4y-14=0$. **2.61.** 1) Параллельны; 2) параллельны; 3) совпадают; 4) $(-1/5;\ 0)$; 5) $(0;\ 2)$; 6) совпадают; 7) параллельны; 8) $(1/4;\ -1/4)$; 9) параллельны; 10) $(1;\ 5)$; 11) $(-3/5;\ 4/7)$. **2.62.** $x-y-3=0$. **2.63.** $20+2\sqrt{10}$. **2.64.** 1) Нет; 2) да; 3) да; 4) да. **2.65.** $m=2$; $(1;\ -1)$. **2.67.** 1) $2x+3y-10=0$; 2) $y-4=0$; 3) $x+1=0$; 4) $x+y-3=0$; 5) $2x-5y+22=0$. **2.68.** $4x+3y+5=0$. **2.69.** $2x+y+5=0$. **2.70.** $x-y+1=0$. **2.71.** $2x-3y-11=0$. **2.72.** $5x+6y-35=0$, $7x+3y+5=0$, $2x-3y-14=0$. **2.73.** $x-5y-14=0$. **2.75.** $x-y-6=0$, $2x+3y-17=0$. **2.76.** $3x-5y+18=0\,(AB)$, $11x-3y-26=0\,(BC)$, $3x-5y-28=0\,(CD)$, $11x-3y+20=0\,(AD)$. **2.78.** $3x+y=0\,(BC)$, $x-4y-27=0\,(CD)$. **2.80.** Прямые (1) и (5), (3) и (6) попарно параллельны; прямые (1) и (3), (1) и (6), (2) и (4) попарно перпендикулярны. **2.81.** $4x+5y+2=0$, $5x-4y+23=0$. **2.82.** $7x-2y=0$. **2.83.** Да, $\hat{A}=90°$. **2.84.** $x+4y-14=0$. **2.85.** $x-2y+5=0$. **2.86.** $x-2y+3=0$. **2.87.** $4x+5y+2=0$, $5x-4y-18=0$. **2.88.** $5x+3y+12=0$. **2.89.** $4x-7y+37=0\,(h_K)$, $2x-y+1=0\,(h_L)$, $3x+y-16=0\,(h_M)$. **2.90.** $(-9;\ -6)$. **2.91.** $(2;\ 2)$. **2.92.** $(1;\ -1)$. **2.93.** $(5;\ 5)$. **2.96.** 1) $(4/5)x-(3/5)y-3=0$; 2) $-[1/(5\sqrt{2})]x+[7/(5\sqrt{2})]y-3\sqrt{2}=0$; 3) $-(12/13)x-(5/13)y-6=0$; 4) $(8/\sqrt{65})x-(1/\sqrt{65})y-5/\sqrt{65}=0$; 5) $-(k/\sqrt{k^2+1})x+(1/\sqrt{k^2+1})y-b^2/\sqrt{k^2+1}=0$. **2.97.** Уравнения 1) и 4). **2.98.** $p=4\sqrt{2}$, $\alpha=3\pi/4$. **2.99.** 5. **2.100.** 4. **2.101.** $2\sqrt{10}$. **2.102.** Точка B. **2.103.** К прямой $3x+5y-8=0$. **2.104.** $2\sqrt{13}$. **2.106.** $3x-4y-8=0$ и $5x+12y-32=0$. **2.107.** $3x+4y-6=0$ и $3x+4y+4=0$. **2.108.** $5x-12y+2=0$ и $5x-12y-128=0$. **2.109.** $(-2;\ -2)$ и $(28/25;\ 16/5)$. **2.110.** $(0;\ -5)$ и $(20/7;\ -15/7)$. **2.111.** $3x+3y-23=0$, $21x-21y-37=0$. **2.113.** 1) $45°$; 2) $\operatorname{arctg}(3/5)$; 3) $\operatorname{arctg}(1/8)$; 4) $\operatorname{arctg}(11/3)$. **2.114.** $45°$. **2.115.** $\operatorname{arctg}(7/17)$ и $\operatorname{arctg}(7/9)$. **2.117.** $\hat{A}=180°-\operatorname{arctg}(1/3)$; $\hat{B}=\operatorname{arctg}(3/14)$, $\hat{C}=\operatorname{arctg}(1/9)$. **2.118.** $2x-y+4=0$ или $x+2y-3=0$. **2.120.** (AC): $x+2y-7=0$; (AB): $3x+y-6=0$ или $x-3y+8=0$. **2.121.** $7x-3y+20=0\,(AB)$, $3x+7y-8=0\,(BC)$, $7x-3y-9=0\,(CD)$, $3x+7y+21=0\,(AD)$. **2.122.** $(2+\sqrt{3})x+y+1=0\,(AB)$, $(2-\sqrt{3})x+y+2\sqrt{3}-5=0\,(BC)$, $(2+\sqrt{3})x+y-5-2\sqrt{3}=0\,(CD)$, $(2-\sqrt{3})x+y+1=0\,(AD)$. **2.123.** 1) $y-2=0$; 2) $x+4=0$; 3) $x+y+2=0$; 4) $\sqrt{3}x+y+4\sqrt{3}-2=0$ или $y-2=0$; 5) $5x-4y+28=0$. **2.125.** $8\sqrt{13}/13$. **2.126.** m_A: $2x+11y-10=0$; $5\sqrt{5}$; h_A: $x+2y+2=0$; $24\sqrt{5}/25$; l_A: $x+3y=0$; $24\sqrt{10}/7$. **2.127.** $x+6y-28=0$, $5x+3y-5=0$, $4x-3y-4=0$. **2.128.** $\operatorname{arctg}(5/3)$. **2.129.** $(11/5;\ -38/5)$. **2.130.** $8x-y-4=0$. **2.131.** $(-3;\ 2)$; $2\sqrt{5}$. **2.132.** $(-3/2;\ 11/2)$; $5\sqrt{10}/2$.

2.133. $(-1;\ 2)$; 1. **2.134.** $x+y+6=0\ (AB)$, $x-4y+21=0\ (BC)$, $3x-2y-7=0\ (AC)$, $x+1=0\ (AM_1)$, $x+6y-9=0\ (BM_2)$, $2x-3y+7=0\ (CM_3)$. **2.135.** $2x+5y=0$. **2.136.** $(11/8;\ 17/8)$. **2.137.** $6x-7y+30=0$, $3x+5y-2=0$, $9x-2y+28=0$; $(-8/3;\ 2)$. **2.138.** $8x+15y+4=0$ и $8x+15y-98=0$. **2.139.** $45°$, $90°$, $90°$ и $135°$; $7/(2\sqrt{5})$. **2.140.** 96 кв. ед. **2.141.** $45°$; $9\sqrt{34}/17$. **2.142.** $4x-y-24=0\ (AB)$, $x-7=0\ (BC)$, $x+8y+27=0\ (AC)$; 8,25 кв. ед. **2.143.** 2 и 4,8. **2.144.** $(1;\ 3)$, $(-1;\ 7)$, $(3;\ 5)$, $(5;\ 1)$; 12 кв. ед. **2.145.** $(0;\ \sqrt{3})$ или $(3;\ 0)$. **2.146.** $2x-y+5=0$, $x+2y+5=0$; $(-3/5;\ 19/5)$, $(9/5;\ -17/5)$. **2.147.** $(-8;\ 0)$ и $(-2;\ -4)$. **2.148.** $3x+2y-7=0$, $x-y+1=0$, $2x+3y+7=0$.

Глава 3

3.1. 1) $(x-4)^2+(y+7)^2=25$; 2) $(x+6)^2+(y-3)^2=2$; 3) $(x-3)^2+(y+2)^2=9$; 4) $x^2+(y+2)^2=1/4$; 5) $(x+1)^2+y^2=3$. **3.2.** Точки A, E и F лежат на окружности, точки B и C — вне окружности, точки D и G — внутри окружности. **3.3.** Да. **3.4.** $(x-12)^2+(y+5)^2=169$. **3.5.** $(x+1)^2+(y+2)^2=34$. **3.6.** $(x+5/2)^2+(y+6)^2=169/4$. **3.7.** $x^2+(y+5)^2=25$. **3.8.** $(x-4)^2+y^2=36$. **3.9.** $(x+9)^2+(y-4)^2=169$ и $(x-8)^2+(y+13)^2=169$. **3.11.** $(x+10)^2+(y+10)^2=100$ и $(x+2)^2+(y+2)^2=4$. **3.12.** $(x-\sqrt{5})^2+(y+\sqrt{5})^2=5$. **3.13.** $(x+1)^2+(y-1)^2=1$ и $(x+3)^2+(y+3)^2=9$. **3.14.** $(x-2)^2+(y+1)^2=25$. **3.15.** $(x-1)^2+(y-5)^2=25$. **3.16.** $(x+2)^2+(y+3)^2=100$. **3.17.** $(x+13)^2+(y-2)^2=169$. **3.19.** 1) $S(4;\ -6)$; $r=9$; 2) $S(-8;\ 10)$, $r=13$; 3) $S(0;\ -7/2)$, $r=11/2$; 4) $S(3;\ 0)$; $r=5\sqrt{2}/2$; 5) $S(-2;\ 4)$, $r=11/2$; 6) $S(4;\ -1)$, $r=19/3$. **3.20** 1) $(1;\ 0)$, $(3;\ 0)$, $(0;\ -1)$, $(0;\ -3)$; 2) $(-3;\ 0)$, $(0;\ -1)$, $(0;\ -10)$; 3) $(-1/3;\ 0)$, $(4/3;\ 0)$, $(0;\ -2/3)$; $(0;\ 2/3)$. **3.21.** $(x+3)^2+(y-2)^2=100$. **3.22.** 17. **3.23.** $(-1;\ 0)$ и $(-6;\ -5)$. **3.24.** $20x-16y+45=0$. **3.25.** $15x-8y+44=0$. **3.26.** 1) Прямая пересекает окружность; 2) прямая касается окружности; 3) $\varnothing$. **3.27.** $2x+y+1=0$. **3.28.** $4x-2y-1=0$. **3.29.** $(x-8)^2+(y-6)^2=36$. **3.30.** $2x+3y+13=0$. **3.31.** $4x-3y+5=0$. **3.32.** $2x-3y-26=0$. **3.34.** 1) $2a=10$, $2b=8$; $A_1(-5;\ 0)$, $A_2(5;\ 0)$, $B_1(0;\ -4)$, $B_2(0;\ 4)$; $F_1(-3;\ 0)$, $F_2(3;\ 0)$; $e=3/5$; 2) $2a=6$, $2b=4$; $A_1(-3;\ 0)$, $A_2(3;\ 0)$, $B_1(0;\ -2)$, $B_2(0;\ 2)$; $F_1(-\sqrt{5};\ 0)$, $F_2(\sqrt{5};\ 0)$, $e=\sqrt{5}/3$; 3) $2a=6$, $2b=8$; $A_1(-3;\ 0)$, $A_2(3;\ 0)$, $B_1(0;\ -4)$, $B_2(0;\ 4)$; $F_1(0;\ -\sqrt{7})$, $F_2(0,\ \sqrt{7})$; $e=\sqrt{7}/4$; 4) $2a=12$, $2b=20$; $A_1(-6;\ 0)$, $A_2(6;\ 0)$, $B_1(0;\ -10)$, $B_2(0,\ 10)$; $F_1(0;\ -8)$, $F_2(0;\ 8)$, $e=4/5$. **3.35.** Точки A и D лежат на эллипсе, точки B, C и F — вне эллипса, точка E — внутри эллипса. **3.36.** $x^2/16+y^2/5=1$. **3.37.** $x^2/4+y^2/3=1$; $F_1(-1;\ 0)$, $F_2(1;\ 0)$. **3.38.** $x^2/16+y^2/9=1$; $4+\sqrt{7}/2$ и $4-\sqrt{7}/2$. **3.39.** $x^2/169+y^2/144=1$. **3.40.** $x^2/289+y^2/64=1$; $e=15/17$. **3.41.** $x^2/100+y^2/676=1$. **3.42.** $x^2/9+y^2/(9/2)=1$; $F_1(-3\sqrt{2}/2;\ 0)$, $F_2(3\sqrt{2}/2;\ 0)$. **3.43.** $x^2/81+y^2/45=1$. **3.44.** $e=\sqrt{2}/2$. **3.45.** $e=\sqrt{10}/5$. **3.47.** 1) $O'(-1;\ 2)$, $2a=8$, $2b=6$, $e=\sqrt{7}/4$; $A_1(-5;\ 2)$, $A_2(3;\ 2)$, $B_1(-1;\ -1)$, $B_2(-1;\ 5)$; $F_1(-\sqrt{7}-1;\ 2)$, $F_2(\sqrt{7}-1;\ 2)$; 2) $O'(0;\ -2)$; $2a=2\sqrt{10}$, $2b=6$; $e=\sqrt{10}/10$; $A_1(-\sqrt{10};\ -2)$, $A_2(\sqrt{10};\ -2)$, $B_1(0;\ -5)$, $B_2(0;\ 1)$; $F_1(-1;\ -2)$, $F_2(1;\ -2)$. **3.48.** $(x-2)^2/100+y^2/91=1$. **3.49.** $(x+1)^2/25+(y-2)^2/16=1$. **3.50.** $(x-5)^2/41+(y+3)^2/16=1$; $F_1(0;\ -3)$, $F_2(10;\ -3)$. **3.51.** $(3;\ \sqrt{15})$, $(3;\ -\sqrt{15})$. **3.52.** $(5\sqrt{65}/9;\ 16/9)$ и $(-5\sqrt{65}/9;\ 16/9)$. **3.53.** $64\sqrt{5}/5$ кв. ед. **3.54.** $x^2/36+y^2/27$; 4 и 8. **3.55.** 5. **3.56.** $(3\sqrt{7}/4;\ 3\sqrt{7}/4)$, $(-3\sqrt{7}/4;\ 3\sqrt{7}/4)$, $(-3\sqrt{7}/4;\ -3\sqrt{7}/4)$, $(3\sqrt{7}/4;\ -3\sqrt{7}/4)$. **3.57.** $(2;\ 2\sqrt{6}/3)$, $(-2;\ 2\sqrt{6}/3)$, $(-2;\ -2\sqrt{6}/3)$, $(2;\ -2\sqrt{6}/3)$. **3.58.** $3y-4=0$. **3.59.** $(2\sqrt{2};\ 3)$, $(-2\sqrt{2};\ 3)$, $(-2\sqrt{2};\ -3)$, $(2\sqrt{2};\ -3)$. **3.60.** 26/3. **3.62.** 1) $2a=10$, $2b=4\sqrt{5}$; $A_1(-5;\ 0)$, $A_2(5;\ 0)$, $F_1(-3\sqrt{5};\ 0)$, $F_2(3\sqrt{5};\ 0)$; $e=3\sqrt{5}/5$; $y=\pm 2\sqrt{5}x/5$; 2) $2a=8$, $2b=12$; $A_1(-4;\ 0)$, $A_2(4;\ 0)$, $F_1(-2\sqrt{13};\ 0)$, $F_2(2\sqrt{13};\ 0)$; $e=\sqrt{13}/2$; $y=\pm 3x/2$; 3) $2a=6$, $2b=8$, $A_1(0;\ -4)$, $A_2(0;\ 4)$, $F_1(0;\ -5)$, $F_2(0;\ 5)$; $e=5/4$; $y=\pm 4x/3$; 4) $2a=4\sqrt{7}$, $2b=12$, $A_1(0;\ -6)$, $A_2(0;\ 6)$, $F_1(0;\ -8)$, $F_2(0;\ 8)$, $e=4/3$, $y=\pm 3\sqrt{7}x/7$. **3.63.** $x^2/6-y^2/8=1$; $e=5/3$; $F_1(-5;\ 0)$, $F_2(5;\ 0)$. **3.64.** $x^2/9-y^2/7=1$, $-x^2/9+y^2/7=1$. **3.65.** $x^2/144-y^2/25=1$; $F_1(-13;\ 0)$,

$F_2(13;\ 0)$ или $-x^2/144+y^2/25=1$; $F_1(0;\ -13)$, $F_2(0;\ 13)$. **3.66.** $\sqrt{3}x-y+6=0$, $\sqrt{3}x-y-6=0$. **3.67.** $3x-2y+19=0$, $3x+2y+11=0$. **3.68.** $x^2/64-y^2/36=1$; $e=5/4$. **3.69.** $x^2/12-y^2/24=1$; $y=\pm\sqrt{2}x$. **3.70.** 60°; $e=2\sqrt{3}/3$. **3.71.** $x^2/18-y^2/8=1$. **3.72.** $x^2/25-y^2/11=1$. **3.73.** $x^2/64-y^2/225=1$. **3.74.** $-x^2/8+y^2/18=1$. **3.75.** $-x^2/20+y^2/16=1$; $y=\pm2\sqrt{5}x/5$. **3.76.** $-x^2/18+y^2/32=1$. **3.77.** $x^2-y^2=9$. **3.78.** $x^2-y^2=16$. **3.79.** $-x^2+y^2=49$. **3.81.** 1) $O'(2;\ -3)$; $2a=6$, $2b=8$; $A_1(-1;\ -3)$, $A_2(5;\ -3)$, $F_1(-3;\ -3)$, $F_2(7;\ -3)$; $e=5/3$; $y+3=\pm4(x-2)/3$; 2) $O'(-2;\ -5)$; $2a=4$; $2b=4$; $A_1(-4;\ -5)$, $A_2(0;\ -5)$, $F_1(-2-2\sqrt{2};\ -5)$, $F_2(2\sqrt{2}-2;\ -5)$; $e=\sqrt{2}$; $y+5=\pm(x+2)$; 3) $O'(0;\ 1)$; $2a=4\sqrt{3}$, $2b=4$; $A_1(-2\sqrt{3};\ 1)$, $A_2(2\sqrt{3};\ 1)$, $F_1(-4;\ 1)$, $F_2(4;\ 1)$; $e=2\sqrt{3}/3$; $y-1=\pm\sqrt{3}x/3$. **3.82.** $(x-3)^2/36-y^2/28=1$. **3.83.** $(x+4)^2/25-(y-2)^2/144=1$; $F_1(-17;\ 2)$, $F_2(9;\ 2)$; $y-2=\pm12(x+4)/5$. **3.84.** $(x-1)^2-(y+5)^2=8$; $y+5=\pm(x-1)$. **3.85.** 1) $(4\sqrt{3};\ -2\sqrt{3}/3)$ и $(-4\sqrt{3};\ 2\sqrt{3}/3)$; 2) $\varnothing$; 3) $(10;\ -8/3)$ и $(-15/2;\ 3/2)$. **3.86.** 1,35. **3.87.** (7; 4), (−7; 4); (−7; −4), (7; −4). **3.88.** $2\sqrt{17}$. **3.90.** 1) $F(2;\ 0)$; $x+2=0$; 2) $F(-3;\ 0)$; $x-3=0$; 3) $F(0;\ 5/2)$; $2y+5=0$; 4) $F(0;\ -4)$; $y-4=0$. **3.92.** 1) $x^2=16y$; 2) $x^2=-12y$; 3) $y^2=24x$; 4) $y^2=-10x$. **3.93.** $y^2=48x$ или $y^2=-48x$. **3.94** $x^2=-18y$; $F(0;\ -9/2)$. **3.95.** $y^2=48x$; $F(12;\ 0)$; $x+12=0$; $r=37/3$. **3.96.** $y^2=-6x$; $F(-3/2;\ 0)$. **3.97.** (25; 30) и (25; −30). **3.98.** $x+y+2=0$; (−4; 2). **3.99.** $4\sqrt{10}$. **3.100.** 64. **3.101.** 1) (1; 3) и (4; −6); 2) $\varnothing$; 3) (4; 6). **3.102.** $(5/2;\ 2\sqrt{15})$ и $(5/2;\ -2\sqrt{15})$. **3.103.** $x-4=0$; 24. **3.104.** $24\sqrt{2}$. **3.106.** 1) $O'(3;\ -1)$, $F(2;\ -1)$; $y+1=0$, $x-4=0$; 2) $O'(-1/2;\ -5/2)$, $F(-1/2;\ -2)$; $2x+1=0$, $y+3=0$; 3) $O'(3;\ 7)$, $F(3;\ 5)$; $x-3=0$, $y-9=0$; 4) $O'(0;\ -4)$, $F(1/4;\ -4)$; $y+4=0$, $4x+1=0$; 5) $O'(-5;\ 0)$, $F(-5;\ -3/2)$; $x+5=0$, $2y-3=0$. **3.107.** $\sqrt{53}$. **3.108.** $(y-4)^2=6(x+2)$. **3.109.** $(x-7)^2=12(y-2)$. **3.110.** $y^2=-48(x-3)$; $F(-9;\ 0)$; $x-15=0$. **3.111.** $x^2=6(y+5)$; $F(0;\ -7/2)$; $2y+13=0$. **3.112.** $(y+1)^2=6(x-3)$. **3.113.** $(x+3)^2=-2(y-4)$. **3.114.** $(y+4)^2=2(x+8)$; $y+4=0$; $2x+17=0$; $F(-15/2;\ -4)$. **3.115.** 48 м. **3.116.** 60 см. **3.117.** 16 м. **3.118.** $p=32/3$. **3.119.** 1) Эллипс; 2) окружность; 3) парабола; 4) гипербола; 5) гипербола; 6) парабола; 7) гипербола. **3.120.** $256\sqrt{3}/9$ кв. ед. **3.121.** $x^2/100+y^2/64=1$. **3.122.** 9,6. **3.123.** 1 и 2,6. **3.124.** $(x-2)^2+y^2=64$. **3.125.** $x^2=y+3$ или $x^2=-5(y-3)$. **3.126.** 90° и 2 arctg (5/4). **3.127.** $x^2/24+y^2/8=1$. **3.128.** $x-y+4=0$; $7\sqrt{2}/2$. **3.129.** $x^2=-4(y-2)$ или $x^2=4(y-4)$. **3.130.** 240 кв. ед. **3.131.** $y^2=-8(x-2)$; $(1;\ 2\sqrt{2})$ и $(1;\ -2\sqrt{2})$; $S=3(2\sqrt{2}+\sqrt{5})$ кв. ед. **3.132.** 180°−arctg (8/11). **3.133.** $y^2=-4(x+5)$. **3.134.** $(x-3)^2=-32(y-2)$ или $(x-3)^2=-8(y-8)$. **3.135.** $x^2-y^2=32$, $x^2/32+y^2/16=1$.

Глава 4

4.3. 1) −10; 2) −1; 3) 0; 4) $-2a$; 5) $4ab$; 6) 1. **4.4.** 1) $x=1$, $y=2$; 2) $x=-1/13$, $y=7/13$; 3) $x=0$, $y=3$; 4) $x=2$, $y=-5$; 5) $x=1$, $y=4/a$; 6) $x=1-a$, $y=-1-a$. **4.5.** 1) −25; 2) 9; 3) 60; 4) 0; 5) 10; 6) 0; 7) $2(1-a^2)$; 8) $(m-n)(n-p)(p-m)$. **4.6.** 1) $x=2$, $x=3$; 2) $x=-1$, $x=2$. **4.7.** 1) $x=1$, $y=2$, $z=3$; 2) $x=0$, $y=0$, $z=-2$; 3) $x=-2$, $y=3$, $z=-4$; 4) $x=-1$, $y=-2$, $z=-4$; 5) $x=y=z=2$; 6) $x=1$, $y=3$, $z=-1$. **4.14.** $\overrightarrow{BC}=\vec q$, $\overrightarrow{CB}=-\vec q$, $\overrightarrow{CD}=-\vec p$, $\overrightarrow{AC}=\vec p+\vec q$, $\overrightarrow{BD}=\vec q-\vec p$, $\overrightarrow{DB}=\vec p-\vec q$. **4.15.** $\overrightarrow{CD}=(2\vec a+\vec b)/3$, $\overrightarrow{CE}=(\vec a+2\vec b)/3$. **4.16.** $\overrightarrow{AK}=\vec c+\vec a/2$, $\overrightarrow{BL}=(\vec a-\vec c)/2$, $\overrightarrow{CM}=-\vec a-\vec c/2$. **4.17.** $\overrightarrow{AL}=(|\vec b|\vec c+|\vec c|\vec b)/(|\vec b|+|\vec c|)$. **4.20.** Да; да; да. **4.21.** Нет; да; нет. **4.22.** $\overrightarrow{AC}=\vec p+\vec q$, $\overrightarrow{AC'}=\vec p+\vec q+\vec r$, $\overrightarrow{B'D'}=\vec q-\vec p$, $\overrightarrow{B'C}=\vec q-\vec r$, $\overrightarrow{BA'}=\vec r-\vec p$, $\overrightarrow{D'A}=-\vec q-\vec r$, $\overrightarrow{D'B}=\vec p-\vec q-\vec r$, $\overrightarrow{DB'}=\vec p-\vec q+\vec r$. **4.23.** $\overrightarrow{MQ}=(\vec b+\vec c-\vec a)/2$, $\overrightarrow{NR}=(\vec a+\vec c-\vec b)/2$, $\overrightarrow{PS}=(\vec a+\vec b-\vec c)/2$. **4.24.** $\sqrt{2}-1$. **4.25.** $5(\sqrt{3}-\sqrt{2})$. **4.32.** Во II; в III; в VIII; в VI. **4.33.** На оси Ox; на оси Oz; на плоскости yOz; на плоскости xOy; на плоскости xOz. **4.34.** (0; 0; −4). **4.35.** 1) (3; −1; 4); 2) (3; 1; −4); 3) (3; 1; 4); 4) (−3; −1; 4); 5) (−3; 1; 4). **4.36.** (0; 0; 0), (2; 0; 0), (0; 2; 0), (2; 2; 0), (0; 0; —2), (2; 0; —2), (0; 2; —2), (2; 2; —2). **4.37.** $\{2; 5; -4\}$. **4.38.** $\{-7; 26; 3\}$, $\{7; -14; 18\}$. **4.39.** $\{6; -3; 0\}$. **4.40.** $|\overrightarrow{OM}|=11$; $\cos\alpha=6/11$, $\cos\beta=-6/11$, $\cos\gamma=-7/11$. **4.41.** $|\overrightarrow{M_1M_2}|=7$; $\cos\alpha=-2/7$, $\cos\beta=6/7$, $\cos\gamma=-3/7$. **4.42.** 1) Да; 2) нет. **4.43.** $\{2; -2; 2\sqrt{2}\}$. **4.44.** 45° или 135°. **4.45.** $M(-4; 4; 4\sqrt{2})$. **4.46.** 13. **4.48.** $\alpha=12$, $\beta=-6$. **4.49.** $\alpha=1$, $\beta=-5$. **4.51.** $\sqrt{86}$ и $\sqrt{41}$. **4.52.** $|AB|=\sqrt{350}$, $|CD|=\sqrt{126}$. **4.53.** (0; 0; 12/5). **4.54.** $D(-5; -2; 3)$. **4.55.** (1; 0; 4), (2; 3; 0), (4; 1; —1). **4.56.** $C(-1; 3; 0)$, $D(1; 0; -1)$, $E(3; -3; -2)$, $F(5; -6; -3)$. **4.57.** $P(0; 3; 5)$, $Q(9; -3; -1)$. **4.58.** (—1; —3; —1). **4.59.** $\lambda=4/5$; (—1/9; —4/3; 0). **4.60.** (11/3; 5/3; —3). **4.64.** 1) $15\sqrt{2}$; 2) 15; 3) 0; 4) —15; 5) —30. **4.65.** 1) $\vec{a}\vec{b}=16$; $\cos\varphi=16/(9\sqrt{30})$; 2) $\vec{a}\vec{b}=-3$; $\varphi=3\pi/4$; 3) $\vec{a}\vec{b}=-10$, $\cos\varphi=-\sqrt{10}/7$. **4.66.** 47. **4.67.** 20 ед. работы. **4.68.** 15 ед. работы. **4.69.** $m=-7$. **4.70.** $2\sqrt{31}$. **4.71.** 19. **4.72.** $\vec{x}=\{-6; 2; -8\}$. **4.73.** 1) —3; 2) 26. **4.74.** $\pi/2$, $\pi/4$, $\pi/4$. **4.76.** $\arccos(1/\sqrt{5})$. **4.77.** $|\vec{a}|=|\vec{b}|$. **4.78.** $2\sqrt{6}$. **4.79.** —1/3. **4.80.** $\text{пр}_{\vec{a}}\vec{c}=78/7$, $\text{пр}_{\vec{b}}\vec{c}=-37/3$. **4.81.** 14/11. **4.84.** 1) 0; 2) $12\vec{e}$; 3) $24\vec{e}$; 4) $12\sqrt{3}\vec{e}$; 5) $12\vec{e}$, где $\vec{e}$—орт направления $\vec{a}\times\vec{b}$. **4.85.** 1) $11\vec{a}\times\vec{b}$; 2) $-26\vec{i}+13\vec{j}+22\vec{k}$. **4.86.** 1) $-6\vec{j}$; 6; 2) $-3\vec{k}$; 3; 3) $4\vec{i}-12\vec{j}+3\vec{k}$; 13. **4.87.** 1) $\{-7; 3; 1\}$; 2) $\{1; 17; 9\}$; 3) $\{-4; 4; -3\}$. **4.88.** $\pm\left(-\frac{1}{\sqrt{6}}\vec{i}+\frac{1}{\sqrt{6}}\vec{j}-\frac{2}{\sqrt{6}}\vec{k}\right)$. **4.89.** 49 кв. ед. **4.90.** 14 кв. ед. **4.91.** $2\sqrt{2}/3$. **4.92.** $\{1; -10; -17\}$. **4.93.** $\{8; 12; 4\}$; $\cos\alpha=2/\sqrt{14}$, $\cos\beta=3/\sqrt{14}$, $\cos\gamma=1/\sqrt{14}$. **4.94.** $-25\vec{i}-5\vec{j}-35\vec{k}$. **4.95.** 7,5 кв. ед. **4.96.** $26\sqrt{2}$ кв. ед. **4.97.** 10. **4.99.** 8. **4.100.** ±12. **4.101.** $S_1=2S_2$. **4.104.** 1) 10; 2) 0; 3) 33. **4.106.** 1) Да; 2) нет. **4.108.** 20 куб. ед. **4.109.** $3\sqrt{14}$ кв. ед.; $\sqrt{14}$. **4.110.** 12 куб. ед. **4.111.** Объем параллелепипеда, построенного на диагоналях граней данного параллелепипеда, равен удвоенному объему последнего. **4.115.** $(\bar{r}_1+\bar{r}_2+\bar{r}_3)/3$. **4.116.** $-2\vec{i}+5\vec{k}$ или $-2\vec{i}-5\vec{k}$. **4.118.** $\overrightarrow{BC}=(4\vec{n}-2\vec{m})/3$, $\overrightarrow{CD}=(2\vec{n}-4\vec{m})/3$. **4.119.** $\alpha=\pm4/7$. **4.121.** 45°, 135°. **4.122.** 19 ед. работы. **4.123.** $\vec{x}=\{2; -1; 1\}$. **4.124.** $\vec{a}\times\vec{b}=\{-8; -10; -6\}$, $|\vec{a}\times\vec{b}|=10\sqrt{2}$; $\sin\varphi=2\sqrt{2}/3$. **4.125.** 1) 7; 2) $34\vec{i}-7\vec{j}+26k$; 3) —8; 4) $2(\vec{k}-\vec{i})$. **4.126.** $2\sqrt{3}$ и $2\sqrt{7}$. **4.127.** 0. **4.129.** 24. **4.130.** 11. **4.131.** 1) $|\overrightarrow{OM}\times\vec{F}|=45$, $\cos\alpha=-1/3$, $\cos\beta=-2/3$, $\cos\gamma=2/3$; 2) $|\overrightarrow{AM}\times\vec{F}|=\sqrt{5}$; $\cos\alpha=2/\sqrt{5}$, $\cos\beta=0$, $\cos\gamma=-1/\sqrt{5}$. **4.132.** 1,5 кв. ед. **4.133.** Да. **4.134.** $6\sqrt{3}$ кв. ед.; $7\sqrt{3}/3$.

Глава 5

5.7. $2y-7=0$. **5.8.** $8y+3z=0$. **5.9.** $7x+3y-5=0$. **5.10.** $3x+5z-10=0$. **5.11.** $2x-y+6z-23=0$. **5.12.** $x-5y+11z+60=0$, $x-5y+11z-87=0$. **5.13.** $x/6+y/(-3/4)+z/4=1$. **5.14.** $a=-6$, $b=8$, $c=2/3$. **5.15.** $x+y+z-12=0$. **5.16.** $4x+30y-3z+12=0$. **5.17.** $x+2y+2z-10=0$. **5.18.** $x+14y-31z=0$. **5.19.** $5x-5y-4z-7=0$. **5.20.** $15x-12y-20z+120=0$. **5.21.** 1) $-(2/11)x+(9/11)y-(6/11)z-5=0$; 2) $(11/15)x-(2/3)y-(2/15)z-2=0$; 3) $-[3/(5\sqrt{2})]x-[4/(5\sqrt{2})]y+[1/(5\sqrt{2})]z-\sqrt{2}=0$. **5.22.** Уравнение 3). **5.23.** $p=3$, $\cos\alpha=-4/21$, $\cos\beta=5/21$, $\cos\gamma=20/21$. **5.29.** 1) $\pi/3$; 2) arc cos (8/21); 3) arc cos (30/121). **5.30.** $5x-y-6z-19=0$. **5.31.** $20x+23y+11z-63=0$. **5.32.** $x-4y+5z-25=0$, $3x-y-2z+15=0$, $2x+5y+z+12=0$. **5.34.** $3x-29y-54z+371=0$. **5.35.** $x-y-z-6=0$. **5.36.** $7y+5z=0$, $7x-6z=0$, $5x+6y=0$. **5.37.** $5x-y-3z+4=0$. **5.38.** $x-y+2z-16=0$. **5.39.** 9; 4,4; 5. **5.40.** 4. **5.41.** Первая. **5.42.** (0; 2; 0) и (0; —15; 0). **5.43.** $21/(4\sqrt{2})$. **5.44.** $4x-7y-4z+59=0$, $4x-7y-4z-85=0$. **5.45.** $9x-6y-2z+38=0$, $9x-6y-2z-28=0$. **5.53.** $(x+7)/2=(y+4)/(-6)=$

$=(z-5)/9$; $\cos\alpha=2/11$, $\cos\beta=-6/11$, $\cos\gamma=9/11$. **5.54.** $x=-4+5t$, $y=9-2t$, $z=-3-t$; $K\in l$, $M\in l$. **5.55.** 1) $x=8-3t$, $y=-3+4t$, $z=-1+5t$; 2) $x=8+8t$, $y=-3-7t$, $z=-1+3t$; 3) $x=8+t$, $y=-3$, $z=-1$; 4) $x=8$, $y=-3$, $z=-1+t$; 5) $x=8+6t$, $y=-3-9t$, $z=-1+4t$. **5.56.** 15. **5.57.** $(x+3)/7=(y+2)/(-6)=(z-1)/6$; $\cos\alpha=7/11$, $\cos\beta=-6/11$, $\cos\gamma=6/11$. **5.58.** $(AB):(x-7)/4=(y-2)/(-5)=(z+6)/11$; $(AC):(x-7)/(-5)=(y-2)/1=(z+6)/(-2)$; $(BC):(x+3)/2=(y-4)/(-1)=(z+2)/1$; $(BD):(x-2)/3=(y-3)/(-2)=(z+4)/3$. **5.60.** 1) $(x-2)/7=(y+3)/9=z/3$; 2) $(x+1)/1=(y-4)/3=z/(-11)$. **5.61.** $\cos\alpha=-6/7$, $\cos\beta=-3/7$, $\cos\gamma=2/7$. **5.62.** $(x-3)/2=(y+5)/(-3)=(z+8)/5$. **5.63.** $(x+4)/1=(y+7)/3=(z-1)/(-11)$. **5.64.** $(x+2)/3=(y+6)/(-2)=(z-11)/(-1)$. **5.65.** 1) $\pi/4$; 2) $\arccos(1/2\sqrt{21})$; 3) $\pi/3$. **5.66.** $\arccos(1/\sqrt{3})$. **5.68.** $(x+4)/(-14)=(y-3)/3=(z+8)/12$. **5.69.** $(x+1)/28=(y-3)/25=(z+4)/1$. **5.74.** $\arcsin(1/\sqrt{6})$. **5.75.** $\pi/6$. **5.77.** $l=12$. **5.78.** $B=-8$, $n=5$. **5.79.** $x-3y+4z+9=0$. **5.80.** $x-11y-9z+49=0$. **5.81.** $(x+2)/8=(y+4)/(-3)=(z-5)/(-1)$. **5.82.** $(-2;\ 0;\ 3)$. **5.83.** $(6;\ 4;\ 5)$. **5.84.** $x=3+t$, $y=-6+4t$, $z=7-8t$; $(4;\ -2;\ -1)$. **5.85.** $(1;\ -2;\ -10)$. **5.86.** $(-2;\ 9;\ 3)$. **5.87.** $(36/13;\ -38/13;\ 61/13)$. **5.89.** $A=1$, $C=7$. **5.97.** Эллипс $\left.\begin{array}{r}x^2/25+y^2/4=1,\\ z=0\end{array}\right\}$; $(5;\ 0;\ 0)$, $(-5;\ 0;\ 0)$, $(0;\ 2;\ 0)$, $(0;\ -2;\ 0)$, $2a=10$, $2b=4$; эллипс $\left.\begin{array}{r}y^2/4+z^2/16=1,\\ x=0\end{array}\right\}$; $(0;\ 2;\ 0)$, $(0;\ -2;\ 0)$, $(0;\ 0;\ 4)$, $(0;\ 0;\ -4)$, $2b=4$, $2c=8$; эллипс $\left.\begin{array}{r}x^2/25+z^2/16=1,\\ y=0\end{array}\right\}$; $(5;\ 0;\ 0)$, $(-5;\ 0;\ 0)$, $(0;\ 0;\ 4)$, $(0;\ 0;\ -4)$, $2a=10$, $2c=8$. **5.98.** $a=5/2$, $b=10$; $(5/2;\ 0;\ 0)$, $(-5/2;\ 0;\ 0)$, $(0;\ 0;\ 10)$, $(0;\ 0;\ -10)$. **5.99.** Эллипс $\left.\begin{array}{r}x^2/24+y^2/16=1,\\ z=0\end{array}\right\}$, гипербола $\left.\begin{array}{r}y^2/16-z^2/15=1,\\ x=0\end{array}\right\}$, гипербола $\left.\begin{array}{r}x^2/24-z^2/15=1,\\ y=0\end{array}\right\}$, гипербола $\left.\begin{array}{r}x^2/32-z^2/20=1,\\ y=-2\end{array}\right\}$, эллипс $\left.\begin{array}{r}x^2/15+y^2/10=1,\\ z=3\end{array}\right\}$. **5.100.** $(30;\ 28;\ 40)$ и $(-6;\ 4;\ -8)$. **5.101.** $p=162$; $(0;\ 8;\ -1)$. **5.102.** $x^2+y^2=16z$. **5.103.** Конус. **5.104.** Эллиптический параболоид. **5.105.** Двуполостный гиперболоид. **5.106.** Эллиптический цилиндр. **5.107.** Гиперболический параболоид. **5.108.** Эллипсоид. **5.109.** Параболический цилиндр. **5.110.** Однополостный гиперболоид. **5.111.** Эллиптический параболоид. **5.112.** Гиперболический цилиндр. **5.113.** Однополостный гиперболоид. **5.114.** Гиперболический параболоид. **5.115.** Конус. **5.116.** Параболический цилиндр. **5.117.** Двуполостный гиперболоид. **5.118.** Эллиптический параболоид.

Глава 6

6.10. 1) $]-\infty, -4[\,\cup\,]4, +\infty[$; 2) $[0, 2]$; 3) $[-6, 3[$; 4) $]-6/5, 1]$. **6.11.** 1; -2; 1; 6; 0; a^2-6a+6; a^2-4a; a^4-4a^2+1; $a^4-8a^3+18a^2-8a+1$. **6.12.** -3; -5; $(-x+3)/(2x^2-1)$; $(x+3)/(8x^2-1)$; $(3x^2+x)/(2-x^2)$; $(2x^2-1)/(x+3)$. **6.13.** $3\lg 2$; $\lg a$; 0; 3; $\lg 3$; 224. **6.16.** 1) $D(y)=\,]-\infty, -9]\cup[0, +\infty[$; 2) $D(y)=\,]-5, 3]$; 3) $D(y)=[2, 5[\,\cup\,]5, 6]$; 4) $D(y)=\,]0, 100]$; 5) $D(y)=\,]-2/3, 1/8[$; 6) $D(y)=[2-\sqrt{3}, 2+\sqrt{3}]$; 7) $D(y)=\,]-\infty, 5{,}9[\,\cup\,]5{,}9, 6[$; 8) $D(y)=\,]-\infty, 0[\,\cup\,]1, +\infty[$; 9) $D(y)=[0, 1]$; 10) $D(y)=[-6/5, 2/5]$; 11) $D(y)=[2\pi n, \pi+2\pi n]$, $n\in\mathbf{Z}$; 12) $D(y)=[-\pi/3+2\pi n, \pi/3+2\pi n]$, $n\in\mathbf{Z}$. **6.17.** 1) Нет; 2) нет; 3) да; 4) да. **6.18.** 1) $E(y)=[0, +\infty[$; 2) $E(y)=\,]-\infty, 2]$; 3) $E(y)=\,]-\infty, 0[\,\cup\,]0, +\infty[$; 4) $E(y)=\,]-\infty, 0[$; 5) $E(y)=[-3, +\infty[$; 6) $E(y)=[0, 5]$; 7) $E(y)=[-1, 7]$; 8) $E(y)=[\pi, 3\pi]$; 9) $E(y)=\,]0, 1]$; 10) $E(y)=\,]-\infty, 0]$. **6.19.** 1) Четная; 2) нечетная; 3) четная; 4) ни четная, ни нечетная; 5) ни четная, ни нечетная; 6) четная; 7) нечетная; 8) нечетная. **6.20.** 1) $\pi/2$; 2) $\pi/3$; 3) 2; 4) π; 5) π; 6) $\pi/3$. **6.21.** 2) 2π; 3) π; 6) 1. **6.22.** 1) Убывает на $]-\infty, 2[$, возрастает на $]2, +\infty[$, $y_{\min}=5$ при $x=2$; 2) возрастает на $]-\infty, -6[$, убывает на $]-6, +\infty[$, $y_{\max}=4$ при $x=-6$; 3) возрастает на $]-\infty, 0[$ и на $]0, +\infty[$; 4) убывает на $]-\infty, +\infty[$; 5) возрастает на $]-3\pi/4+2\pi n, \pi/4+2\pi n[$, убывает на $]\pi/4+2\pi n, 5\pi/4+2\pi n[$, $y_{\max}=\sqrt{2}$ при $x=\pi/4+2\pi n$, $y_{\min}=-\sqrt{2}$ при $x=5\pi/4+2\pi n$, $n\in\mathbf{Z}$; 6) возрастает на $]-\pi+2\pi n, -\pi/2+2\pi n[$ и на $]\pi/2+2\pi n, \pi+2\pi n[$, убывает на

$]-\pi/2+2\pi n,\ 2\pi n[$ и на $]2\pi n,\ \pi/2+2\pi n[$, $n\in Z$. **6.23.** 1) $y=15/x$; 2) $y=\pm\sqrt{4-x^2}$; 3) $y=\pm(2/3)\sqrt{x^2-9}$; 4) $y=\log_3 10-x$; 5) $y=10\,000/x$ $(x>0,\ y>0)$; 6) $y=\sin x$ $(\pi/2\leqslant x\leqslant 3\pi/2)$. **6.24.** $y=(4-3x)^5$; 2) $y=1/\mathrm{tg}^4 x$; 3) $y=\sqrt{\lg\sin x}$; 4) $y=2^{-\cos(5x+1)}$; 5) $y=\lg\mathrm{arctg}\sqrt{x^2-1}$; 6) $y=\arcsin\lg^2 x$; 7) $y=-1/\cos^2(2x+3)$. **6.25.** 1) $y=u^7$, $u=6x-5$; 2) $y=\sqrt{u}$, $u=x^2-4$; 3) $y=\lg u$, $u=\cos x$; 4) $y=\sin u$, $u=\sqrt[3]{v}$, $v=x-6$; 5) $y=2^u$, $u=\mathrm{arctg}\,v$, $v=x^2$; 6) $y=1/u^2$, $u=\cos v$, $v=x+\pi/4$; 7) $y=\arcsin u$, $u=3^v$, $v=\mathrm{tg}\,w$, $w=\sqrt{x}$; 8) $y=\sqrt{u}$, $u=\lg v$, $v=\mathrm{ctg}\,w$, $w=1-2x$. **6.26.** 1) $y=(x+7)/2$; 2) $y=4+1/x$; 3) $y=\log_5 x$; 4) $y=10^x-1$; 5) $y=2\arcsin x$; 6) $y=(1/3)\,\mathrm{tg}\,x$.

Глава 7

7.7. а) $n=5$; б) $n=7$; в) $n=9$. **7.8.** $n>995$. **7.9.** 17. **7.10.** $N>(1/5)\sqrt{(7+5\varepsilon)/\varepsilon}$; $N=16$ для $\varepsilon=0{,}001$. **7.13.** $\delta=0{,}0025$. **7.14.** $M=1/\sqrt{\varepsilon}$; $M=31$ для $\varepsilon=0{,}001$. **7.15.** а) $|x|<0{,}215$; б) $|x|<0{,}1$; в) $|x|<0{,}046$. **7.16.** а) $\delta=0{,}1$; б) $\delta=0{,}031$; в) $\delta=0{,}01$. **7.21.** 1) 0; 2) $+\infty$; 3) 0; 4) $-\infty$; 5) $+\infty$; 6) $-\infty$. **7.24.** 1) 0; 2) 0; 3) 0; 4) $+\infty$. **7.26.** 5. **7.27.** 1/2. **7.28.** 0. **7.29.** -3. **7.30.** $\sqrt{3}$. **7.31.** $+\infty$. **7.32.** $-\pi/6$. **7.33.** $\pi/6$. **7.34.** $\pi/2$. **7.35.** 3π. **7.36.** $+\infty$. **7.37.** $+\infty$. **7.38.** $+\infty$. **7.39.** $-\infty$. **7.40.** $+\infty$. **7.41.** $+\infty$. **7.42.** $-\infty$. **7.43.** $+\infty$. **7.44.** 0. **7.45.** 0. **7.47.** $+\infty$ и $-\infty$. **7.48.** $-\infty$. **7.49.** $+\infty$ и $-\infty$. **7.50.** $+\infty$ и $-\infty$. **7.51.** $+\infty$ и 5. **7.52.** $-\infty$. **7.53.** $-\infty$. **7.54.** π. **7.55.** $\pi/2$ и $-\pi/2$. **7.56.** $-\infty$. **7.58.** 2. **7.59.** -4. **7.60.** $-1/27$. **7.61.** 3/2. **7.62.** 5. **7.63.** $-4/3$. **7.64.** $-9/7$. **7.65.** 1. **7.66.** $-1/6$. **7.67.** 12/5. **7.68.** 4/9. **7.69.** $3a/2$. **7.70.** $-1/(2a^2)$. **7.71.** 4. **7.72.** $-1/3$. **7.73.** 1. **7.74.** 3/2. **7.75.** 8/3. **7.76.** 2/3. **7.77.** $-5/64$. **7.78.** 2/3. **7.79.** -3. **7.80.** -2. **7.81.** ∞. **7.82.** 0. **7.83.** ∞. **7.84.** 2/3. **7.85.** $-3/5$. **7.86.** a_p/b_p. **7.87.** 1/2. **7.88.** $-1/6$. **7.89.** -1. **7.90.** 1/2. **7.91.** 0. **7.92.** -3. **7.93.** 0. **7.94.** 0. **7.95.** 0. **7.96.** $+\infty$. **7.97.** 0. **7.98.** $-\infty$. **7.99.** 5 и $+\infty$. **7.100.** $-7/2$ и $-\infty$. **7.101.** 3/4 и $+\infty$. **7.102.** 1 и -1. **7.103.** 2/9 и $-3/4$. **7.104.** 2/3. **7.105.** $\sqrt{2}$. **7.106.** 0. **7.107.** $-\sqrt{2}$. **7.108.** 0. **7.109.** $\sqrt{2}/2$. **7.110.** 7/3. **7.111.** 3/4. **7.112.** 0. **7.113.** ∞. **7.114.** 2π. **7.115.** 1/8. **7.116.** 100. **7.117.** $-1/2$. **7.118.** 1/3. **7.119.** 5/2. **7.120.** 2. **7.121.** 0. **7.122.** 2. **7.123.** 1/4. **7.124.** e. **7.125.** $1/e$. **7.126.** e^2. **7.127.** e^3. **7.128.** $1/e^3$. **7.129.** $1/e$. **7.130.** e. **7.131.** $1/e$. **7.132.** $1/e$. **7.133.** m. **7.134.** -5. **7.135.** $\ln a$. **7.136.** $\ln(4/3)$. **7.137.** 2/5. **7.138.** $2\ln 2$. **7.139.** $1/\ln 5$. **7.140.** 1/3. **7.141.** 5. **7.142.** $-1/4$. **7.143.** 1. **7.144.** $1/e$. **7.146.** 1) $\gamma(x)$ и $\delta(x)$ — бесконечно малые одного порядка; 2) $\gamma(x)$ — бесконечно малая высшего порядка, чем $\delta(x)$; 3) $\gamma(x)$ — бесконечно малая низшего порядка, чем $\delta(x)$; 4) $\gamma(x)$ и $\delta(x)$ — эквивалентные бесконечно малые; 5) $\gamma(x)$ и $\delta(x)$ — бесконечно малые одного порядка. **7.147.** $1-x$. **7.151.** При $x\to 0$ бесконечно малая $\sin x-\mathrm{tg}\,x$ имеет высший порядок малости по сравнению с $x^2\sqrt{x}$. **7.160.** 3/4. **7.161.** 18/25. **7.162.** 1/6. **7.163.** 25/2. **7.164.** 32. **7.165.** $+\infty$. **7.166.** 3/5. **7.167.** α/β. **7.168.** 1/9. **7.169.** 5/2. **7.170.** 1/4. **7.171.** 1. **7.172** 16/3. **7.173.** 2/3. **7.175.** $\Delta y=7$. **7.176.** а) -3; б) $-3/4$; в) 15. **7.177.** а) $(1-\sqrt{2})/2$; б) 1; в) 0. **7.178.** а) $-0{,}25$; б) -3; в) 0,36. **7.179.** а) -2; б) $-3{,}125$; в) 108. **7.180.** а) 0,41 см^2; б) $-0{,}76$ см^2. **7.181.** $12{,}36\pi$ см^2 и $31{,}836\pi$ см^3. **7.191.** $x=2$ — точка разрыва II рода. **7.192.** $x=-5$ — точка разрыва II рода. **7.193.** $x=-1$ и $x=1$ — точки разрыва II рода. **7.194.** $x=1$ и $x=3$ — точки разрыва II рода. **7.195.** $x=0$ — точка разрыва II рода. **7.196.** $x=0$ — точка устранимого разрыва. **7.197** и **7.198.** $x=n$ $(n\in Z)$ — точки скачка. **7.199.** $x=-1$ — точка устранимого разрыва. **7.200.** $x=2$ — точка устранимого разрыва. **7.201.** $x=3$ — точка разрыва II рода. **7.202.** $x=0$ — точка устранимого разрыва. **7.203.** $x=0$ — точка разрыва II рода. **7.204.** $x=0$ — точка скачка. **7.205.** $x=\pi n$ $(n\in Z)$ — точки разрыва II рода. **7.206.** $x=-4$ — точка разрыва II рода. **7.207.** $x=1$ — точка скачка. **7.208.** $x=0$ — точка разрыва II рода. **7.209.** Функция непрерывна на $]-\infty,\ +\infty[$. **7.210.** $x=0$ — точка разрыва II рода, $x=\pi/2$ — точка скачка. **7.211.** $x=1$ — точка скачка. **7.212.** $x=-1$ — точка скачка, $x=0$ — точка разрыва II рода. **7.214.** $y>0$ на $]-\infty,\ 0[$ и на $]1,\ +\infty[$; $y<0$ на $]0,\ 1[$. **7.215.** $y>0$ на $]-\infty,\ 2[$ и на $]2,\ +\infty[$. **7.216.** $y>0$ на $]-\infty,\ -2[$ и на $]-1,\ +\infty[$; $y<0$ на $]-2,\ -1[$. **7.217.** $y>0$ на $]-1,\ 1[$, $y<0$ на $]-\infty,\ -1[$ и на $]1,\ +\infty[$. **7.218.** $y>0$ на $]-2,\ 0[$ и на $]2,\ 3[$; $y<0$ на $]-\infty,\ -2[$, на $]0,\ 2[$ и на $]3,\ +\infty[$.

7.219. $y>0$ на $]-\infty, 1[$, на $]3, 4[$ и на $]4, +\infty[$; $y<0$ на $]1, 3[$. **7.220.** $y>0$ на $]1, 2[$ и на $]3, +\infty[$; $y<0$ на $]-\infty, 1[$ и на $]2, 3[$. **7.221.** $y>0$ на $]3, +\infty[$; $y<0$ на $]0, 3[$. **7.222.** $y>0$ на $]-2, 1[$, $y<0$ на $]-\infty, -2[$. **7.223.** $y>0$ на $]-\infty, -3[$, на $]-1, 3[$ и на $]5, +\infty[$; $y<0$ на $]-3, -1[$ и на $]3, 5[$. **7.224.** $y>0$ на $]0, +\infty[$; $y<0$ на $]-\infty, 0[$. **7.225.** $y>0$ на $]0, 1/2[$; $y<0$ на $]-\infty, 0[$ и на $]1/2, +\infty[$. **7.226.** $y>0$ на $]1/10, +\infty[$; $y<0$ на $]0, 1/10[$. **7.227.** $y>0$ на $]0, +\infty[$; $y<0$ на $]-1, 0[$. **7.228.** $y>0$ на $]-\infty, 4[$; $y<0$ на $]4, 5[$. **7.229.** $y>0$ на $]0, 1/9[$; $y<0$ на $]1/9, +\infty[$. **7.230.** $y>0$ на $]-3, -2[$, $y<0$ на $]-2, +\infty[$. **7.231.** $y<0$ на $]0, 1[$ и на $]1, +\infty[$. **7.232.** $y>0$ на $]0, \pi[$; $y<0$ на $]\pi, 2\pi[$. **7.233.** $y>0$ на $]-\pi/2, \pi/2[$, $y<0$ на $]-\pi, -\pi/2[$ и на $]\pi/2, \pi[$. **7.234.** $y>0$ на $]0, \pi/2[$; $y<0$ на $]-\pi/2, 0[$. **7.235.** $y>0$ на $]-\pi/2, \pi/4[$; $y<0$ на $]\pi/4, \pi/2[$. **7.237.** $]-2, 3[$. **7.238.** $]-\infty, -3\,[\cup]\,1, +\infty[$. **7.239.** $]-\infty, -2\,[\cup]\,0, 1[$. **7.240.** $]-\infty, -1\,[\cup]\,1, +\infty[$. **7.241.** $]-1, 0[$. **7.242.** $]-\infty, -2\,[\cup]\,-2, 0\,[\cup]\,3, +\infty[$. **7.243.** $]-\infty, 1\,[\cup]\,2, 3[$. **7.244.** $]-\infty, -2\,[\cup\,]-1, 1\,]\cup]\,2, +\infty[$. **7.245.** $]0, 3[$. **7.246.** $]-\infty, 0\,[\cup]\,1, 5[$. **7.247.** $]-\infty, 0[$. **7.248.** $]-1, +\infty[$. **7.249.** $]-2, -1[$. **7.250.** $]0, 1/100[$. **7.251.** $]2, +\infty[$. **7.252.** $]10, +\infty[$. **7.253.** $](3-\sqrt{5})/2, 1\,[\cup]\,2, (3+\sqrt{5})/2[$. **7.254.** $]0, 10^{2-\sqrt{5}}[\cup\,]10^{2+\sqrt{5}}, +\infty[$.

Глава 8

8.2. $y'=3$. **8.3.** $y'=2x$. **8.4.** $y'=2x-4$. **8.5.** $y'=4-3x^2$. **8.6.** $y'=3/(2\sqrt{3x+1})$. **8.7.** $y'=-1/(x-2)^2$. **8.8.** $y'=\cos x$. **8.9.** $y'=2/\cos^2 2x$. **8.10.** $f'(1)=2$. **8.11.** $f'(\pi/4)=0$. **8.12.** $f'(\pi/3)=-2$, $f'(\pi)=-1/2$. **8.13.** $f'(1/8)=4/3$, $f'(0)$ не существует. **8.14.** $f'(0)=1/3$, $f'(1)$ не существует. **8.18.** $y'=-5$. **8.21.** $y'=4x^5-12x^2-2x+1/2$. **8.24.** $y'=-4/x^3+1/x^2$. **8.27.** $y'=-2/x^2+8/x^3-15/x^4+24/(7x^5)$. **8.30.** $y'=(1/4)\,x^{-3/4}-6x^{-1/4}$. **8.33.** $y'=-2x^{-4/3}+2x^{-5/3}$. **8.36.** $y'=(5/2)\,x^{-1/2}+4x^{1/3}-(1/4)\,x^{-3/4}$. **8.39.** $y'=3\,(7x+4)+7\,(3x-2)$. **8.42.** $y'=-2\,(2x^3-9x^2+1)+(6x^2-18x)\,(9-2x)$. **8.45.** $y'=(6x+3/x^4)\left(\sqrt[3]{x}+0{,}1x\right)+\left((1/3)\,x^{-2/3}+0{,}1\right)\times(3x^2-1/x^3)$. **8.48.** $y'=3/(5x-2)^2$. **8.51.** $y'=\dfrac{(2x+2)\,(3-4x)+4\,(x^2+2x)}{(3-4x)^2}$. **8.54.**

$$s'=\frac{\left(2/(3\sqrt[3]{t})-1\right)\left(t+\sqrt[3]{t^2}\right)-\left(\sqrt[3]{t^2}-t\right)\left(1+2/(3\sqrt[3]{t})\right)}{\left(t+\sqrt[3]{t^2}\right)^2}.$$

8.57. $$r'=\frac{\left(1/(2\sqrt{\varphi})-2\right)\left(\sqrt[4]{\varphi}+1\right)-1/\left(4\sqrt[4]{\varphi^3}\right)\left(\sqrt{\varphi}-2\varphi\right)}{\left(\sqrt[4]{\varphi}+1\right)^2}.$$

8.60. $y'=(\cos x-3\sin x)\times\sqrt[3]{x}+(\sin x+3\cos x)\,/\left(3\sqrt[3]{x^2}\right)$. **8.63.** $y'=\dfrac{(1-\cos x)\sqrt{x}-(x-\sin x)\left(1/(2\sqrt{x})\right)}{x}$.

8.66. $$r'=-\frac{(2\sin\varphi+\cos\varphi)\,(3\sin\varphi+\cos\varphi)+(2\cos\varphi-\sin\varphi)\,(3\cos\varphi-\sin\varphi)}{(3\sin\varphi+\cos\varphi)^2}.$$

8.69. $y'=\dfrac{(\sin x+2)/\cos^2 x-\sin x}{(\sin x+2)^2}$. **8.72.** $s'=\dfrac{\left(1-2\sqrt{t}\right)/\sin^2 t-(\operatorname{ctg} t)/\sqrt{t}}{\left(2\sqrt{t}-1\right)^2}$.

8.75. $y'=2\pi x+1/\sqrt{1-x^2}$. **8.78.** $y'=\cos x\cdot\arccos x-(\sin x)/\sqrt{1-x^2}$. **8.81.** $y'=(\arccos x)/(2\sqrt{x})-\sqrt{x}/\sqrt{1-x^2}+2/\left(\sqrt{1-x^2}\arcsin x\right)$. **8.84.** $y'=\dfrac{x/(1+x^2)-3\operatorname{arctg} x}{x^4}$. **8.87.** $y'=(1+1/(1+x^2))\,(\operatorname{arctg} x-2x)+(x-\operatorname{arctg} x)\times(1/(1+x^2)-2)$. **8.90.** $y'=0$. **8.93.** $y'=e^x\,(\operatorname{tg} x+1/\cos^2 x)$. **8.96.** $y'=e^x\left(x^2+\sqrt{x}-1+2x+1/(2\sqrt{x})\right)$. **8.99.** $y'=\dfrac{7^x\ln 7\sin x-(7^x-3)\cos x}{\sin^2 x}$.

8.102. $s'=-3\dfrac{(e^t-1)/\sin^2 t+e^t\operatorname{ctg} t}{(e^t-1)^2}$. **8.105.** $y'=2/x+6/x^3$. **8.108.** $y'=3\,(1-\ln x)/x^2$.

8.111. $y'=\dfrac{1/(\sqrt[3]{x^2}\ln 2)-(\log_2 x+1)/(3\sqrt[3]{x^2})}{\sqrt[3]{x^2}}$. 8.114. $y'=\dfrac{(e^x-x)/\cos^2 x-\operatorname{tg} x(e^x-1)}{(e^x-x)^2}$.

8.117. $y'=\dfrac{e^x(\cos x-\sin x)(1+\ln x)-(e^x\cos x)/x}{(1+\ln x)^2}$. 8.120. $y'=\dfrac{(3\cos x+\sin x)\,x\operatorname{tg} x-}{x^2\operatorname{tg}^2 x}$ $\dfrac{-(3\sin x-\cos x)(\operatorname{tg} x+x/\cos^2 x)}{x^2\operatorname{tg}^2 x}$. 8.123. $y'=\dfrac{(\ln x)/\cos^2 x+(\operatorname{tg} x)/x-\operatorname{tg} x\ln x\ln 5}{5^x}$.

8.126. $y'=(e^x\cos x-e^x\sin x-4)(x^2-e^x\sin x)+(e^x\cos x-4x)(2x-e^x\sin x-e^x\cos x)$. 8.131. $[3, +\infty[$. 8.132. $[-2, -1/3]$. 8.133. $f'(1)=2$, $f'(4)=36$, $f'(1/4)=-27/2$. 8.134. $4/3$. 8.135. $\{\pm 2, \pm 4\}$. 8.136. -1. 8.140. $y'=2\cos(2x-1)$. 8.143. $y'=$ $=1/\sqrt{4-x^2}$. 8.146. $y'=(3\ln^2 x)/x$. 8.149. $y'=\sin 2x$. 8.152. $y'=2/(3\sqrt[3]{\operatorname{tg} x}\cos^2 x)$.

8.155. $y'=-(2^{1/x}\ln 2)/x^2$. 8.158. $y'=\dfrac{-2x}{1+(3-x^2)^2}$. 8.161. $y'=\dfrac{4x-5}{2(2x^2-5x+1)\ln 3}$.

8.164. $y'=-\dfrac{5^{-x}\ln 5}{1+5^{-2x}}$. 8.167. $y'=-\dfrac{\cos\operatorname{arcctg} x}{1+x^2}$. 8.170. $y'=\dfrac{1}{x(1+\ln^2 x)}$. 8.173. $y'=10(\sin 5x)/\cos^2 5x$. 8.176. $y'=e^{2^x}2^x\ln 2$. 8.179. $y'=-2x/\sqrt{1-(x^2-1)^2}$. 8.182. $y'=(\cos x)/|\cos x|$. 8.185. $y'=(2x^2\cos x^2-\sin x^2)/x^2$. 8.188. $y'=-\dfrac{1}{2(x+1)\sqrt{x}}$.

8.191. $y'=2(\operatorname{tg} x)/\cos^2 x+2x/\sin x^2$. 8.194. $y'=2/(x\ln x)-1/x$. 8.197. $y'=\sqrt{x^2+1}+$ $+(x-2)x/\sqrt{x^2+1}$. 8.200. $y'=e^{\sqrt{x}}$. 8.203. $y'=\dfrac{2x\sin 3x-3(x^2-1)\cos 3x}{\sin^2 3x}$.

8.206. $y'=-4(\cos 2x)/(1+\sin 2x)^2$. 8.209. $y'=-e^{-x}\ln\operatorname{tg} x+2e^{-x}/\sin 2x$. 8.212. $y'=8/(e^{2x}+e^{-2x})^2$. 8.215. $y'=\pi\sin(1-\pi x)\sqrt{1-e^{2x}}-\cos(1-\pi x)\,e^{2x}/\sqrt{1-e^{2x}}$. 8.218. $y'=-e^{\cos x}\sin x\sqrt{\sin x}+(e^{\cos x}\cos x)/(2\sqrt{\sin x})$. 8.221. $y'=8\sqrt[3]{e^{4x}}-$ $-(7^{\operatorname{tg} x}\ln 7)/\cos^2 x$. 8.224. $y'=(2\sin^{-1}2x+2\ln\operatorname{tg} x)/e^{1-2x}$. 8.227. $y'=$ $=-2(\operatorname{ctg} 3x)/\sqrt{7-4x}-3\sqrt{7-4x}/\sin^2 3x$. 8.230. $y'=-(1/3)\sin(2x/3)\operatorname{tg}(x/2)+$ $+(1/2)[\cos^2(x/3)]/[\cos^2(x/2)]$. 8.233. $y'=2^{x^2-x}\ln 2\,(2x-1)\operatorname{tg}(\pi/6-3x)-$ $-3\cdot 2^{x^2-x}/\cos^2(\pi/6-3x)$. 8.236. $y'=3[\ln(3x-1)+7]/(2\sqrt{3x-1})$. 8.239. $y'=\arcsin(x/3)$. 8.242. $y'=7\dfrac{\sqrt{1-7x}+\sqrt{1+7x}\arcsin 7x}{(1-7x)^2\sqrt{1+7x}}$. 8.245. $y'=$ $=\sin^2 x\cos x(6\cos^2 x+7)-4\sin^4 x\cos x$. 8.248. $y'=(2x-3)/[3(x^2-3x)]-2/(2x+1)$. 8.251. $y'=(x\operatorname{arctg} x)/\sqrt{1+x^2}$. 8.254. $y'=[\cos(2x-\pi/6)]/\sqrt{\sin(2x-\pi/6)}$. 8.257. $y'=2(\ln\ln x)/x$. 8.260. $y'=[\sin(2\operatorname{tg} x)]/\cos^2 x$. 8.263. $y'=(\operatorname{ctg} x)/(\log_4\sin x\cdot\ln 4)$. 8.266. $y'=-(\cos x)/\sqrt{\sin x-\sin^2 x}$. 8.269. $y'=-1/\cos x$. 8.272. $y'=[2(x-1)\times$ $\times\sin\ln(2x-x^2)]/(2x-x)^2$. 8.275. $y'=(\sin 2x)/(1+\sin^2 x)$. 8.278. $y'=$ $=-e^{\operatorname{ctg}(-1/x)}/[x^2\sin^2(1/x)]$. 8.281. $y'=x\ln^2(-1/x)[2\ln(-1/x)-3]$. 8.284. $y'=$ $=\cos x\,e^{\sqrt{\sin x}}(1+\sqrt{\sin x})/(2\sqrt{\sin x})$. 8.287. $y'=6(\sin 3x)/\cos^2 3x$. 8.290. $y'=-7^{\sqrt{(1-x)/(1+x)}}\ln 7\sqrt{1/[(1-x)(1+x)^3]}$. 8.293. $y'=-x(\sqrt{x^2+1}\sin\sqrt{x^2+1}+$ $+\cos\sqrt{x^2+1})/\sqrt{(x^2+1)^3}$. 8.296. $y'=-\cos x\operatorname{ctg}^2 x\,e^{(1/2)\operatorname{ctg}^2 x}$. 8.299. $y'=$ $=e^{-x^2}[\cos(x/2)-8x\sin(x/2)]/[4\sqrt{\sin(x/2)}]$. 8.302. $y'=(2\sin\sqrt{\ln x}+$ $+\sqrt{\ln x}\cos\sqrt{\ln x})/(2x)$. 8.305. $y'=4e^{1/\cos 4x}(\cos 4x+\operatorname{tg}^2 4x)$. 8.308. $y'=(1-\sin 4x):$ $:\cos^2 2x$. 8.311. $y'=\dfrac{2}{(1+x)^2}\sin\dfrac{2(x-1)}{1+x}$. 8.314. $y'=\dfrac{4^{\operatorname{tg}\sqrt{x}}[(\sqrt{x}\ln 4)/\cos^2\sqrt{x}-1]}{2x\sqrt{x}}$.

8.317. $y'=1/(e^{3x}+e^{-3x})$. 8.320. $y'=(2\arcsin 2x+4x)/\sqrt{1-4x^2}$. 8.322. $y''=36x^2-$ $-30x+4$. 8.323. $y''=24(2x+5)$. 8.324. $y''=2/(x-1)^3$. 8.325. $y''=-2\cos 2x$.

8.326. $y''=2e^{-x^2}(2x^2-1)$. 8.327. $y''=5^{\sqrt{x}}\ln 5(\sqrt{x}\ln 5-1)/(4x\sqrt{x})$. 8.328. $y''=-54x/(1+9x^2)^2$. 8.329. $y''=4(\cos 2x-x\sin 2x)$. 8.330. $y''=-x/\sqrt{(x^2+1)^3}$. 8.331. $y''=-4/(\cos 2x)/\sin^2 2x$. 8.332. $y''=3(e^{3x}+e^{-3x})/2$. 8.333. $y''=-2e^x\sin x$. 8.334. $f''(-\pi/2)=-9$, $f''(0)=0$, $f''(\pi/18)=-9/2$. 8.335. $r''(-1)=7e$, $r''(0)=2$, $r''(2-\sqrt{2})=0$. 8.339. $f'''(-3)=0$, $f'''(-1)=2/e$, $f'''(0)=3$. 8.340. $r'''(-\pi/2)=0$, $r'''(-\pi/24)=-16$, $r'''(2\pi/3)=16\sqrt{3}$. 8.342. $y^{(n)}=\alpha(\alpha-1)\ldots[\alpha-(n-1)]x^{\alpha-n}$. 8.343. $y^{(n)}=2^x\ln^n 2$. 8.344. $y^{(n)}=\sin(x+\pi n/2)$. 8.346. $y'=-3/7$. 8.347. $y'=x/(y+1)$. 8.348. $y'=9x/(4y)$. 8.349. $y'=-x^2/y^2$. 8.350. $y'=-[\sin(x+y)]/[1+\sin(x+y)]$. 8.351. $y'=-(y\sin^2 y)/(x\sin^2 y+1)$. 8.352. $y'=(x+y)^2$. 8.353. $y'=(3x^2-2xy^2)/(2x^2y+3y^2)$. 8.354. $y'=y^2/(x^2+xy)$. 8.355. $y'=6^{x-y}(6^y-1)/(1-6^x)$. 8.356. $y''=-(1+y'^2)/y$. 8.357. $y''=-(1+y')^2$. 8.358. $y''=(y^2+x^2y'^2)/(x^2y)$. 8.359. $y''=-(4+y'^2)/y$. 8.360. $y''=-4y'/y^3$. 8.361. $y''=2(x+yy'^2)/(1-y^2)$. 8.363. $5(\ln 5-1)$. 8.364. $4\sqrt{2}/(\pi+2)$. 8.370. $y'=x^{x+1}(\ln x+1+1/x)$. 8.371. $y'=x^{\sin 2x}\left(2\cos 2x\ln x+\dfrac{\sin 2x}{x}\right)$. 8.372. $y'=(\sqrt{x})^{\operatorname{tg}2x}\left(\dfrac{\ln x}{\cos^2 2x}+\dfrac{\operatorname{tg}2x}{2x}\right)$. 8.373. $y'=(\cos x)^{\sqrt[3]{x}}\left(\dfrac{\ln\cos x}{3\sqrt[3]{x^2}}-\sqrt[3]{x}\operatorname{tg}x\right)$.

8.374. $y'=(\sin 3x)^{x^2-1}[2x\ln\sin 3x+3(x^2-1)\operatorname{ctg}3x$. 8.375. $y'=(\cos 2x)^{\sin x}\times(\cos x\ln\cos 2x-2\sin x\operatorname{tg}2x)$. 8.376. $y'=(\operatorname{arctg}x)^{\sqrt{x^2+1}}\left(\dfrac{x\ln\operatorname{arctg}x}{\sqrt{x^2+1}}+\dfrac{1}{\sqrt{x^2+1}\operatorname{arctg}x}\right)$. 8.377. $y'=-\left(\dfrac{1}{x}\right)^{\arcsin x}\left(\dfrac{\ln x}{\sqrt{1-x^2}}+\dfrac{\arcsin x}{x}\right)$. 8.378. $y'=(\sqrt[4]{x})^{\cos 4x}\left(-\sin 4x\ln x+\dfrac{\cos 4x}{4x}\right)$. 8.379. $y'=6(\operatorname{tg}3x)^{\sin 6x}(\cos 6x\ln\operatorname{tg}3x+1)$.

8.380. $y'=(x^2-1)^{1/x}\left[-\dfrac{\ln(x^2-1)}{x^2}+\dfrac{2}{x^2-1}\right]$. 8.381. $y'=(\sqrt{1-x^3})^{x^2}\times\left[x\ln(1-x^2)-\dfrac{3x^4}{2(1-x^3)}\right]$. 8.382. $y'(1)=1+\ln 2$. 8.383. $y'=(2x-5)^3\times(7x-1)(x-3)\left(\dfrac{6}{2x-5}+\dfrac{7}{7x-1}+\dfrac{1}{x-3}\right)$. 8.384. $y'=(3x-4)^4(2x+7)^5(x-2)^3\times\left(\dfrac{12}{3x-4}+\dfrac{10}{2x+7}+\dfrac{3}{x-2}\right)$. 8.385. $y'=\sqrt[5]{(x+2)^2}(x^2-1)^3\sqrt{x-4}\left[\dfrac{2}{5(x+2)}+\dfrac{6x}{x^2-1}+\dfrac{1}{2(x-4)}\right]$. 8.386. $y'=\dfrac{\sqrt[4]{(6x+5)^3}(4x-7)^2}{(2x+9)^3}\left[\dfrac{9}{2(6x+5)}+\dfrac{8}{4x-7}-\dfrac{6}{2x+9}\right]$.

8.387. $y'=\dfrac{e^x\arcsin x}{x^2-1}\left(1+\dfrac{1}{\arcsin x\sqrt{1-x^2}}-\dfrac{2x}{x^2-1}\right)$. 8.388. $y'=\dfrac{(4x+9)^3\sqrt[5]{(10x+1)^4}}{\sqrt[3]{(6x-1)^2}}\left(\dfrac{12}{4x+9}+\dfrac{8}{10x+1}-\dfrac{4}{6x-1}\right)$. 8.389. $y'=\dfrac{\ln^3 x}{\sqrt{x-1}\sin 2x}\times\left[\dfrac{3}{x\ln x}-\dfrac{1}{2(x-1)}-2\operatorname{ctg}2x\right]$. 8.390. $y'(0)=0$. 8.391. $\{0,5;\ -3\}$. 8.393. $\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{3t^2+1}{3}$. 8.394. $\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{3}{4\sqrt[12]{t}}$. 8.395. $\left(\dfrac{dy}{dx}\right)_{t=1}=-\dfrac{e^3}{2}$. 8.396. $\left(\dfrac{dy}{dx}\right)_{t=\pi/3}=-\sqrt{3}$. 8.397. $\left(\dfrac{dy}{dx}\right)_{t=-1/6}=3$. 8.398. $\left(\dfrac{dy}{dx}\right)_{t=\pi/4}=1$. 8.399. $\left(\dfrac{dy}{dx}\right)_{t=0}=0$, $\left(\dfrac{dy}{dx}\right)_{t=1}=-1$. 8.400. $\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{5t^3}{2}$, $\dfrac{d^2y}{dx^2}=\dfrac{15t}{4}$. 8.401. $\dfrac{dy}{dx}=-\operatorname{ctg}t$, $\dfrac{d^2y}{dx^2}=-\dfrac{1}{3\sin^3 t}$.

8.402. $\left(\frac{d^2y}{d\varphi^2}\right)_{\varphi=0}=12$, $\left(\frac{d^2y}{d\varphi^2}\right)_{\varphi=1/5}=12e$. 8.403. $\left(\frac{dy}{dx}\right)_{t=1}=2$, $\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)_{t=1}=4$. 8.405. 1) $2x+y-7=0$, $x-2y+4=0$; 2) $5x+y+3=0$, $x-5y+11=0$; 3) $2x+y-3=0$, $x-2y+1=0$ и $2x-y-5=0$, $x+2y-5=0$. 8.406. $x-1=0$. 8.407. $\pi/6$. 8.408. $2x+y-6=0$ и $2x-y+2=0$. 8.410. $x\sqrt{5}-2y-1=0$. 8.411. (0; 0) и (2; —4). 8.412. $(2\pi k;\ 0)$, $k\in Z$. 8.413. $3x-y-1=0$ и $3x-y-2=0$. 8.414. $x-y-8=0$ и $x-y+8=0$. 8.417. $2x+y-4\sqrt{2}=0$, $x-2y+3\sqrt{2}=0$. 8.418. (5; 1) и (4; 3). 8.419. $y+1=0$, $x-1=0$. 8.421. $v(0)=0$, $v(2)=-4$ м/с, $v(3)=-21$ м/с; $a(0)=2$ м/с^2, $a(2)=-10$ м/с^2, $a(3)=-25$ м/с^2. 8.422. Через 3 с. 8.423. 8 Дж. 8.425. $\omega=-18$ с$^{-1}$, $a=-10$ с$^{-2}$; через 5 с. 8.427. 10π см/с. 8.428. 24 см^2/с. 8.429. Если $0<x<1/4$, то быстрее изменяется ордината точки; если $x>1/4$, то быстрее изменяется ее абсцисса; при $x=1/4$ скорости изменения абсциссы и ординаты одинаковы. 8.431. $dy=(-2/x^3)\,\Delta x$. 8.432. $dy=-[3/(x-1)^2]\,\Delta x$. 8.433. $dy=[3/(1+9x^2)]\,\Delta x$. 8.434. $dy=[2x/(1+x^2)]\,\Delta x$. 8.435. $dy=\sin 2x\,\Delta x$. 8.436. $dy=e^x(\cos x-\sin x)\,\Delta x$. 8.437. $dy=\left[5^{x^2}2x\arccos(1/x)\ln 5+5^{x^2}/(x\sqrt{x^2-1})\right]\Delta x$. 8.438. $dy=\frac{2\sqrt{x}-\sin(2\sqrt{x})}{4x\sqrt{x}\cos^2\sqrt{x}}\,\Delta x$. 8.440. $\Delta y=0{,}0333$, $dy=0{,}0330$, $|dy-\Delta y|=0{,}0003$, $\left|\frac{dy-\Delta y}{\Delta y}\right|\approx 0{,}9\%$. 8.441. $\Delta y=-0{,}0099$, $dy=-0{,}01$, $|dy-\Delta y|=0{,}0001$, $\left|\frac{dy-\Delta y}{\Delta y}\right|\approx 1\%$. 8.443. $\approx 0{,}0225$ м. 8.448. 2,03. 8.449. 1,2. 8.450. 0,849. 8.451. 0,9954. 8.452. 0,88. 8.453. 1,0035. 8.454. 0,5005. 8.455. 0,01. 8.456. 2,999. 8.458. 1) $\Delta y=|\cos x|\,\Delta x$; 2) $\Delta y=|\operatorname{ctg} x|\,\Delta x$; 3) $\Delta y=|2/(\sin 2x)|\,\Delta x$.

Глава 9

9.5. $c=1$. 9.6. 1) $c=3/2$; 2) $c=-1/3$; 3) $c=9/2$; 4) $c=\pi$. 9.7. Нет, так как производная $f'(x)=2x+2/(3\sqrt[3]{x})$ не существует в точке $x=0$. 9.8. $2+\sqrt{3}/3$. 9.9 1) $c=1/2$; 2) $c=9/4$; 3) $c_{1,2}=(4\pm\sqrt{7})/3$; 4) $c=e-1$. 9.11. (2; —12). 9.12. 1) $c=14/9$; 2) $c=2$; 3) $c=3$; 4) $c=\pi/4$. 9.14. 3. 9.15. —1/27. 9.16. —9/7. 9.17. 1/2. 9.18. 1/18. 9.19. —7/2. 9.20. 2. 9.21. 1/6. 9.22. —1/2. 9.23. 2. 9.24. 0. 9.25. 5/3. 9.26. ∞. 9.27. 0. 9.28. 1. 9.29. 0. 9.30. $-2/\pi$. 9.31. 3. 9.32. 1/2. 9.33. 0. 9.34. —1/2. 9.35. 1/2. 9.36. 1. 9.37. $\sqrt{e}$. 9.38. $1/e$. 9.39. 1. 9.40. e^5. 9.41. 1. 9.42. e. 9.43. e. 9.44. $+\infty$. 9.45. e^{-8}. 9.46. $1/e$. 9.47. e^3.

Глава 10

10.6. Возрастает на $]-\infty,\ 5[$, убывает на $]5,\ +\infty[$. 10.7. Убывает на $]-\infty,\ -3/2[$, возрастает на $]-3/2,\ +\infty[$. 10.8. Возрастает на $]-\infty,\ 1[$ и на $]3,\ +\infty[$, убывает на $]1,\ 3[$. 10.9. Убывает на $]-\infty,\ 0[$ и на $]1/4,\ +\infty[$, возрастает на $]0,\ 1/4[$. 10.10. Убывает на $]-\infty,\ -6[$, возрастает на $]-6,\ +\infty[$. 10.11. Возрастает на $]-\infty,\ -4[$ и на $]-1,\ 1[$, убывает на $]-4,\ -1[$ и на $]1,\ +\infty[$. 10.12. Возрастает на $]-\infty,\ 5[$, убывает на $]5,\ +\infty[$. 10.13. Возрастает на $]-\infty,\ -7[$ и на $]-7,\ +\infty[$. 10.14. Убывает на $]0,\ 1[$, возрастает на $]1,\ +\infty[$. 10.15. Возрастает на $]0,\ 1/64[$, убывает на $]1/64,\ +\infty[$. 10.16. Убывает на $]-\infty,\ +\infty[$. 10.17. Возрастает на $\left]0,\ 1/\sqrt[3]{e}\right[$, убывает на $\left]1/\sqrt[3]{e},\ +\infty\right[$. 10.18. Возрастает на $]-\infty,\ 1/5[$, убывает на $]1/5,\ +\infty[$. 10.19. Возрастает на $]0,\ \pi/6[$ и на $]5\pi/6,\ \pi[$, убывает на $]\pi/6,\ 5\pi/6[$. 10.25. $y_{\min}=y(-7/4)=-89/8$. 10.26. $y_{\max}=y(-2)=35$, $y_{\min}=y(4)=-73$. 10.27. $y_{\max}=y(5)=110$, $y_{\min}=y(-1)=2$. 10.28. $y_{\min}=y(0)=0$. 10.29. $y_{\max}=y(7/2)=2187/16$. 10.30. $y_{\max}=y(-2)=0$, $y_{\min}=y(0)=-108$. 10.31. Экстремумов нет. 10.32. $y_{\max}=y(2)=1/4$, $y_{\min}=y(-4)=-1/8$. 10.33. $y_{\max}=y(-1/3)=13/4$, $y_{\min}=y(4)=0$. 10.34. $y_{\max}=y(-2)=-32$, $y_{\min}=y(2)=32$. 10.35. $y_{\max}=y(0)=0$, $y_{\min}=y(64)=-32$. 10.36. $y_{\max}=y(-2)=9\sqrt[3]{3}$. 10.37. Экстремумов нет. 10.38. $y_{\max}=y(-3)=-9\sqrt{3}$, $y_{\min}=y(3)=9\sqrt{3}$. 10.39. $y_{\max}=y(-4)=8e^{-4}$,

$y_{\min}=y(2)=-4e^2$. **10.40.** $y_{\min}=y(0)=0$, $y_{\max}=y(2/3)=(\sqrt[3]{12}/3)\,e^{-2/3}\approx 0{,}39$. **10.41.** $y_{\min}=y(1/e)=-1/e$. **10.42.** $y_{\max}=y(-1)=(\pi-2)/4$, $y_{\min}=y(1)=(2-\pi)/4$. **10.43.** $y_{\max}=y(-\pi/4+2\pi n)=\sqrt{2}$, $y_{\min}=y(3\pi/4+2\pi n)=-\sqrt{2}$, $n\in\mathbf{Z}$. **10.44.** $y_{\max}=y(-\pi+2\pi n)=3$, $y_{\min}=y(\pm\pi/3+2\pi n)=-3/2$, $y_{\max}=y(2\pi n)=-1$, $n\in\mathbf{Z}$. **10.46.** $\min\limits_{[0,\,1]} y=y(0)=-8$, $\max\limits_{[0,\,1]} y=y(2/3)=-20/3$. **10.47.** $\min\limits_{[-4,\,3]} y=y(1)=-12$, $\max\limits_{[-4,\,3]} y=y(-3)=y(3)=20$. **10.48.** $\min\limits_{[-4,\,4]} y=y(-4)=y(4)=3$, $\max\limits_{[-4,\,4]} y=y(0)=5$. **10.49.** $\min\limits_{]-\infty,\,+\infty[} y=y(-2)=-1/4$, $\max\limits_{]-\infty,\,+\infty[} y=y(2)=1/4$. **10.50.** $\min\limits_{[1/e,\,e]} y=y(1)=0$, $\max\limits_{[1/e,\,e]} y=y(e)=e$. **10.51.** $\min\limits_{[-\sqrt{2}/2,\,\sqrt{2}/2]} y=y(-\sqrt{2}/2)=y(\sqrt{2}/2)=\pi/3$, $\max\limits_{[-\sqrt{2}/2,\,\sqrt{2}/2]} y=y(0)=\pi/2$. **10.52.** $\min\limits_{]\pi/2,\,3\pi/2[} y$ не существует, $\max\limits_{]\pi/2,\,3\pi/2[} y=y(\pi)=-1$. **10.53.** $\min\limits_{[1,\,+\infty[} y=y(1)=-\pi/2$, $\max\limits_{[1,\,+\infty[} y$ не существует. **10.56.** $m/2$ и $m/2$. **10.57.** $13/2$ и $-13/2$. **10.58.** Квадрат со стороной 7,5 см. **10.59.** Стороны прямоугольника равны $R\sqrt{5}/5$ и $4R\sqrt{5}/5$. **10.61.** 18 см. **10.62.** $a\sqrt{2}$ и $b\sqrt{2}$. **10.63.** 18 см и 24 см. **10.64.** В сечении должен быть квадрат со стороной $D\sqrt{2}/2$. **10.65.** $r=\sqrt[3]{5/\pi}$ м, $h=2\sqrt[3]{5/\pi}$ м, где r — радиус основания, а h — высота цилиндра. **10.66.** Высота бака и сторона его основания равны 3 м. **10.67.** 9 см. **10.68.** Высота цилиндра равна $R\sqrt{2}$. **10.69.** Высота конуса равна $4R/3$. **10.70.** $r_1:r_2=2:3$, где r_1 и r_2 — радиусы оснований искомого цилиндра и конуса. **10.71.** $\operatorname{arctg}(\sqrt{2}/2)$. **10.72.** $x=D\sqrt{3}/3$, $y=D\sqrt{6}/3$. **10.73.** При $y=2h/3$. **10.79.** Выпукла на $]-\infty, -2[$ и на $]1, +\infty[$, вогнута на $]-2, 1[$; точки перегиба $(-2;\ 12)$ и $(1;\ 18)$. **10.80.** Выпукла на $]-\infty, -1[$ и на $]0, 3[$, вогнута на $]-1, 0[$ и на $]3, +\infty[$; точки перегиба $(-1;\ 12)$, $(0;\ 7)$ и $(3;\ -848)$. **10.81.** Выпукла на $]-\infty, -3\sqrt{3}[$ и на $]0, 3\sqrt{3}[$, вогнута на $]-3\sqrt{3}, 0[$ и на $]3\sqrt{3}, +\infty[$; точки перегиба $(-3\sqrt{3};\ -\sqrt{3}/12)$, $(0;\ 0)$ и $(3\sqrt{3};\ \sqrt{3}/12)$. **10.82.** Вогнута на $]-\infty, -2[$ и на $]0, +\infty[$, выпукла на $]-2, 0[$; точки перегиба $(-2;\ -12\sqrt[3]{4})$ и $(0;\ 8)$. **10.83.** Вогнута на $]-\infty, -7[$, выпукла на $]-7, +\infty[$; точек перегиба нет. **10.84.** Вогнута на $]-\infty, -2[$ и на $]0, +\infty[$, выпукла на $]-2, 0[$; точка перегиба $(-2;\ 0)$. **10.85.** Выпукла на $]-\infty, 4[$, вогнута на $]4, +\infty[$; точка перегиба $(4;\ 5)$. **10.86.** Выпукла на $]-\infty, -2[$ и на $]2, +\infty[$, вогнута на $]-2, 2[$; точки перегиба $(-2;\ 3\ln 2)$ и $(2;\ 3\ln 2)$. **10.87.** Выпукла на $]0, 1/e[$, вогнута на $]1/e, +\infty[$; точка перегиба $(1/e;\ 1/e)$. **10.88.** Выпукла на $]-\infty, 0[$, вогнута на $]0, +\infty[$; точка перегиба $(0;\ 0)$. **10.89.** Выпукла на $]-\infty, -0{,}5\ln 2[$, вогнута на $]-0{,}5\ln 2, 0[$ и на $]0, +\infty[$; точка перегиба $(-0{,}5\ln 2;\ 2^{-2/\ln 2})$. **10.90.** Выпукла на $]0, \pi/2[$ и на $]3\pi/2, 2\pi[$, вогнута на $]\pi/2, 3\pi/2[$; точки перегиба $(\pi/2;\ 0)$ и $(3\pi/2;\ 0)$. **10.93.** $x=-5$, $y=0$. **10.94.** $x=4$, $y=0$. **10.95.** $x=3$, $y=2$. **10.96.** $x=0$, $y=x$. **10.97.** $y=0$. **10.98.** $x=-2$, $x=2$, $y=-x$. **10.99.** $y=x$. **10.100.** $x=-2$, $y=x-7$. **10.101.** $x=6$, $y=x+3$, $y=-x-3$. **10.102.** $y=3x$, $y=x$. **10.103.** $y=-2$. **10.104.** $y=4x$. **10.105.** $x=-1$, $x=1$. **10.106.** $y=\pi x/2-1$, $y=-\pi x/2-1$. **10.107.** $y=-x$. **10.108.** $x=0$, $y=x+1$. **10.112.** $D(y)=\mathbf{R}$; $y<0$ на $]-\infty, -5[$ и на $]2, +\infty[$, $y>0$ на $]-5, 2[$. Возрастает на $]-\infty, -3/2[$, убывает на $]-3/2, +\infty[$. Точка максимума $(-3/2;\ 49/4)$. Кривая всюду выпукла. Точек перегиба и асимптот нет. **10.113.** $D(y)=\mathbf{R}$; $y<0$ на $]-\infty, (3-\sqrt{33})/2[$ и на $]1, (3+\sqrt{33})/2[$, $y>0$ на $](3-\sqrt{33})/2, 1[$ и на $](3+\sqrt{33}/2, +\infty[$. Асимптот нет. Возрастает на $]-\infty, -1/3[$ и на $]3, +\infty[$, убывает на $]-1/3, 3[$. Точка максимума $(-1/3;\ 176/27)$; точка минимума $(3;\ -12)$. Кривая выпукла на $]-\infty, 4/3[$, вогнута на $]4/3, +\infty[$. Точка перегиба $(4/3;\ -74/27)$. **10.114.** $D(y)=\mathbf{R}$; $y>0$ на $]-\infty, 0[$; $y<0$ на $]0, 3[$ и на $]3, +\infty[$. Асимптот нет. Убывает на $]-\infty, -1[$ и на $]3, +\infty[$, возрастает на $]1, 3[$. Точка минимума $(1;\ -4)$, точка максимума $(3;\ 0)$. Кривая вогнута на $]-\infty, 2[$, выпукла на $]2, +\infty[$. Точка перегиба $(2;\ -2)$. **10.115.** $D(y)=\mathbf{R}$; $y<0$ на $]-\infty, -1[$,

$y > 0$ на $]-1, +\infty[$. Асимптот нет. Возрастает на $]-\infty, -1/3[$ и на $]1/3, +\infty[$, убывает на $]-1/3, 1/3[$. Точка максимума $(-1/3; 20/9)$, точка минимума $(1/3; 16/9)$. Кривая выпукла на $]-\infty, 0[$, вогнута на $]0, +\infty[$. Точка перегиба $(0; 2)$. **10.116.** $D(y)=\boldsymbol{R}$; $y<0$ на $]-\infty, 5[$, $y>0$ на $]5, +\infty[$. Асимптот нет. Возрастает на $]-\infty, -4[$ и на $]2, +\infty[$, убывает на $]-4, 2[$. Точка максимума $(-4; 0)$, точка минимума $(2; -108)$. Кривая выпукла на $]-\infty, -1[$, вогнута на $]-1, +\infty[$. Точка перегиба $(-1; -54)$. **10.117.** $D(y)=\boldsymbol{R}$; функция четная; $y>0$ на $]-\infty, -3[$ и на $]3, +\infty[$, $y<0$ на $]-3, 3[$. Асимптот нет. Убывает на $]-\infty, -2[$ и на $]0, 2[$, возрастает на $]-2, 0[$ и на $]2, +\infty[$. Точка минимума $(-2; -25)$ и $(2; -25)$, точка максимума $(0; -9)$. Кривая вогнута на $]-\infty, -2\sqrt{3}/3[$ и на $]2\sqrt{3}/3, +\infty[$, выпукла на $]-2\sqrt{3}/3, 2\sqrt{3}/3[$. Точки перегиба $(-2\sqrt{3}/3; -161/9)$ и $(2\sqrt{3}/3; -161/9)$. **10.118.** $D(y) =]-\infty, -5[\cup]-5, +\infty[$; $y>0$ на $]-\infty, -5[$ и на $]-1/2, +\infty[$, $y<0$ на $]-5, -1/2[$. Асимптоты $x=-5$, $y=2$. Убывает на $]-\infty, -5[$ и на $]-5, +\infty[$. Экстремальных точек нет. Кривая выпукла на $]-\infty, -5[$, вогнута на $]-5, +\infty[$. Точек перегиба нет. **10.119.** $D(y)=\boldsymbol{R}$; функция четная; $y>0$ на $]-\infty, +\infty[$. Асимптота $y=0$. Возрастает на $]-\infty, 0[$, убывает на $]0, +\infty[$. Точка максимума $(0; 1/4)$. Кривая вогнута на $]-\infty, -2\sqrt{3}/3[$ и на $]2\sqrt{3}/3, +\infty[$, выпукла на $]-2\sqrt{3}/3, 2\sqrt{3}/3[$. Точки перегиба $(-2\sqrt{3}/3; 3/16)$ и $(2\sqrt{3}/3; 3/16)$. **10.120.** $D(y)=]-\infty, -4[\cup]-4, 4[\cup]4, +\infty[$. Функция четная; $y<0$ на $]-\infty, -4[$ и на $]4, +\infty[$, $y>0$ на $]-4, 4[$. Асимптоты $x=-4$, $x=4$ и $y=0$. Убывает на $]-\infty, -4[$ и на $]-4, 0[$, возрастает на $]0, 4[$ и на $]4, +\infty[$. Точка минимума $(0; 1/2)$. Кривая выпукла на $]-\infty, -4[$ и на $]4, +\infty[$, вогнута на $]-4, 4[$. Точек перегиба нет. **10.121.** $D(y)=]-\infty, -2[\cup]-2, 2[\cup]2, +\infty[$. Функция нечетная; $y<0$ на $]-\infty, -2[$ и на $]0, 2[$, $y<0$ на $]-2, 0[$ и на $]2, +\infty[$. Асимптоты $x=-2$, $x=2$. Убывает во всей области определения. Экстремальных точек нет. Кривая выпукла на $]-\infty, -2[$ и на $]0, 2[$, вогнута на $]-2, 0[$ и на $]2, +\infty[$. Точка перегиба $(0; 0)$. **10.122.** $D(y)=]-\infty, 3[\cup]3, +\infty[$; $y<0$ на $]-\infty, 3[$, $y>0$ на $]3, +\infty[$. Асимптоты $x=3$ и $y=x+3$. Возрастает на $]-\infty, 0[$ и на $]6, +\infty[$, убывает на $]0, 3[$ и на $]3, 6[$. Точка максимума $(0; 0)$, точка минимума $(6; 12)$. Кривая выпукла на $]-\infty, 3[$, вогнута на $]3, +\infty[$. Точек перегиба нет. **10.123.** $D(y)=]-\infty, 1[\cup]1, +\infty[$; $y<0$ на $]-\infty, 0[$ и на $]1, 5[$, $y>0$ на $]0, 1[$ и на $]5, +\infty[$. Асимптоты $x=1$, $y=x-4$. Возрастает во всей области определения. Экстремальных точек нет. Кривая вогнута на $]-\infty, 1[$, выпукла на $]1, +\infty[$. Точек перегиба нет. **10.124.** $D(y)=]-\infty, -1[\cup]-1, 1[\cup]1, +\infty[$. Функция четная; $y>0$ на $]-\infty, -1[$ и на $]1, +\infty[$, $y<0$ на $]-1, 1[$. Асимптоты $x=-1$, $x=1$, $y=1$. Возрастает на $]-\infty, -1[$ и на $]-1, 0[$, убывает на $]0, 1[$ и на $]1, +\infty[$. Точка минимума $(0; -6)$. Кривая вогнута на $]-\infty, -1[$ и на $]1, +\infty[$, выпукла на $]-1, 1[$. Точек перегиба нет. **10.125.** $D(y)=]-\infty, 0[\cup]0, +\infty[$; $y>0$ на $]-\infty, 0[$ и на $]2, +\infty[$, $y<0$ на $]0, 2[$. Асимптота $x=0$. Убывает на $]-\infty, -\sqrt[3]{4}[$, возрастает на $]-\sqrt[3]{4}, 0[$ и на $]0, +\infty[$. Точка минимума $(-\sqrt[3]{4}, 6\sqrt[3]{2})$. Кривая вогнута на $]-\infty, 0[$ и на $]2, +\infty[$, выпукла на $]0, 2[$. Точка перегиба $(2; 0)$. **10.126.** $D(y) =]-\infty, 0[\cup]0, +\infty[$; $y<0$ на $]-\infty, -\sqrt[3]{4}[$, $y>0$ на $]-\sqrt[3]{4}, 0[$ и на $]0, +\infty[$. Асимптоты $x=0$, $y=x$. Возрастает на $]-\infty, 0[$ и на $]2, +\infty[$, убывает на $]0, 2[$. Точка минимума $(2; 3)$. Кривая вогнута во всей области определения. Точек перегиба нет. **10.127.** $D(y)=]-\infty, -1[\cup]-1, 1[\cup]1, +\infty[$. Функция нечетная; $y>0$ на $]-\infty, -1[$ и на $]0, 1[$, $y<0$ на $]-1, 0[$ и на $]1, +\infty[$. Асимптоты $x=-1$, $x=1$, $y=-x$. Убывает на $]-\infty, -\sqrt{3}[$ и на $]\sqrt{3}, +\infty[$, возрастает на $]-\sqrt{3}, -1[$, на $]-1, 1[$ и на $]1, \sqrt{3}[$. Точка минимума $(-\sqrt{3}, 3\sqrt{3}/2)$, точка максимума $(\sqrt{3}, -3\sqrt{3}/2)$. Кривая вогнута на $]-\infty, -1[$ и на $]0, 1[$, выпукла на $]-1, 0[$ и на $]1, +\infty[$. Точка перегиба $(0; 0)$. **10.128.** $D(y)=[0, +\infty[$; $y>0$ на $]0, 1/4[$, $y<0$ на $]1/4, +\infty[$. Возрастает на $]0, 1/16[$, убывает на $]1/16, +\infty[$. Точка максимума $(1/16; 1/8)$. Кривая выпукла во всей области определения. Точек перегиба и асимптот нет. **10.129.** $D(y)=\boldsymbol{R}$; $y<0$ на $]-\infty, 216[$, $y>0$ на $]216, +\infty[$. Возрастает на $]-\infty, 0[$ и на $]64, +\infty[$, убывает на $]0, 64[$. Точка максимума (0; 0), точка минимума (64; —32). Кривая всюду вогнута. Точек перегиба и асимптот нет. **10.130.** $D(y)=\boldsymbol{R}$; $y>0$ на $]-\infty, -4[$ и на $]0, +\infty[$, $y<0$ на $]-4, 0[$. Асимптот нет. Убывает на $]-\infty, -1[$, возрастает на $]-1, +\infty[$. Точка минимума $(-1; -3)$. Кривая вогнута на $]-\infty, 0[$ и на $]2, +\infty[$, выпукла на $]0, 2[$. Точки перегиба (0; 0) и $(2; 6\sqrt[3]{2})$. **10.131.** $D(y)=[0, +\infty[$; $y<0$ на $]0, 4096/729[$, $y>0$ на $]4096/729, +\infty[$. Асимптот нет. Убывает на $]0, 1[$, возрастает на $]1, +\infty[$. Точка минимума $(1; -1)$. Кривая вогнута на $]0, 729/64[$, выпукла на $]729/64, +\infty[$. Точка перегиба (729/64; 27/16). **10.132.** $D(y)=]-\infty, -1/3]\cup[1/3, +\infty[$. Функция четная и неотрицательная во всей области определения. Асимптоты $y=-3x$ и $y=3x$. Убывает на $]-\infty, -1/3[$, возрастает на $]1/3, +\infty[$. Экстремальных точек нет. Кривая вогнута во всей области определения. Точек перегиба нет. **10.133.** $D(y)=[-4, 4]$. Функция четная и неотрицательная во всей области определения. Возрастает на $]-4, 0[$, убывает на $]0, 4[$. Точка максимума (0; 4). Кривая выпукла во всей области определения. Точек перегиба и асимптот нет. **10.134.** $D(y)=[-6, +\infty[$; $y<0$ на $]-6, 0[$, $y>0$ на $]0, +\infty[$. Убывает на $]-6, -4[$, возрастает на $]-4, +\infty[$. Точка минимума $(-4; -4\sqrt{2})$. Кривая вогнута во всей области определения. Точек перегиба и асимптот нет. **10.135.** $D(y)=]5, +\infty[$. Функция положительна во всей области определения. Асимптота $x=5$ (односторонняя). Убывает на $]5, 10[$, возрастает на $]10, +\infty[$. Точка минимума $(10; 2\sqrt{5})$. Кривая вогнута на $]5, 20[$, выпукла на $]20, +\infty[$. Точка перегиба $(20; 4\sqrt{15}/3)$. **10.136.** $D(y)=\boldsymbol{R}$; функция четная и положительная на всей числовой оси. Асимптоты $y=-2x$ и $y=2x$. Убывает на $]-\infty, 0[$, возрастает на $]0, +\infty[$. Точка минимума $(0; \sqrt{7})$. Кривая всюду выпукла. **10.137.** $D(y)=$ $=[-3, +\infty[$. Функция положительна во всей области определения. Асимптот нет. Возрастает на $]-3, +\infty[$. Экстремальных точек нет. Кривая выпукла на $]-3, 0[$, вогнута на $]0, +\infty[$. Точка перегиба (0; 3). **10.138.** $D(y)=\boldsymbol{R}$; функция четная; $y>0$ на $]-\infty, -4[$ и на $]4, +\infty[$, $y<0$ на $]-4, 4[$. Асимптот нет. Убывает на $]-\infty, 0[$, возрастает на $]0, +\infty[$. Точка минимума $(0; -2\sqrt[3]{2})$. Кривая выпукла на $]-\infty, -4[$ и на $]4, +\infty[$, вогнута на $]-4, 4[$. Точки перегиба $(-4; 0)$ и (4; 0). **10.139.** $D(y)=\boldsymbol{R}$; $y>0$ на $]-\infty, 2[$, $y<0$ на $]2, +\infty[$. Асимптота $y=-x$. Убывает на всей числовой оси. Экстремальных точек нет. Кривая вогнута на $]-\infty, 0[$ и на $]2, +\infty[$, выпукла на $]0, 2[$. Точка перегиба (0; 2). **10.140.** $D(y)=]-\infty, -2[\cup]2, +\infty[$. Функция нечетная; $y<0$ на $]-\infty, -2[$, $y>0$ на $]2, +\infty[$. Асимптоты $x=-2$, $x=2$ (односторонние), $y=-1$, $y=1$. Убывает во всей области определения. Экстремальных точек нет. Кривая выпукла на $]-\infty, -2[$, вогнута на $]2, +\infty[$. Точек перегиба нет. **10.141.** $D(y)=]-\infty, -2[\cup]-2, 2[\cup]2, +\infty[$. Функция нечетная; $y<0$ на $]-\infty, -2[$ и на $]0, 2[$; $y>0$ на $]-2, 0[$ и на $]2, +\infty[$. Асимптоты $x=-2$ и $x=2$. Возрастает на $]-\infty, -2\sqrt{3}[$ и на $]2\sqrt{3}, +\infty[$, убывает на $]-2\sqrt{3}, -2[$, на $]-2, 2[$ и на $]2, 2\sqrt{3}[$. Точка максимума $(-2\sqrt{3}; -\sqrt{3})$, точка минимума $(2\sqrt{3}; \sqrt{3})$. Кривая вогнута на $]-\infty, -6[$, на $]-2, 0[$ и на $]2, 6[$, выпукла на $]-6, -2[$, на $]0, 2[$ и на $]6, +\infty[$. Точки перегиба $(-6; -3\sqrt[3]{2}/2)$, (0; 0) и $(6; 3\sqrt[3]{2}/2)$. **10.142.** $D(y)=]-\infty, 0[\cup]0, +\infty[$. Функция положительна и убывает во всей области определения. Экстремальных точек нет. Асимптоты $x=0$ (односторонняя) и $y=1$. Кривая выпукла на $]-\infty, -0{,}5\ln 3[$, вогнута на $]-0{,}5\ln 3, 0[$ и на $]0, +\infty[$. Точка перегиба $(-0{,}5\ln 3; 3^{-2/\ln 3})$. **10.143.** $D(y)=\boldsymbol{R}$; $y<0$ на $]-\infty, 0[$, $y>0$ на $]0, +\infty[$. Асимптота $y=0$ (при $x\to+\infty$). Возрастает на $]-\infty, 1[$, убывает на $]1, +\infty[$. Точка максимума $(1; 1/e)$. Кривая выпукла на $]-\infty, 2[$, вогнута на $]2, +\infty[$. Точка перегиба $(2; 2/e^2)$. **10.144.** $D(y)=\boldsymbol{R}$; функция положительна и убывает на всей числовой оси. Экстремальных точек нет. Асимптота $y=0$ (при $x\to+\infty$). Кривая вогнута на $]-\infty, 1[$ и на $]3, +\infty[$, выпукла на $]1, 3[$. Точки перегиба $(1; 2/e)$ и $(3; 10/e^3)$. **10.145.** $D(y)=]-\infty, 0[\cup$ $]0, +\infty[$. Функция положительна во всей области определения. Асимптоты $x=0$ и $y=0$ (при $x\to-\infty$). Возрастает на $]-\infty, 0[$ и на $]2, +\infty[$, убывает на $]0, 2[$. Точка минимума $(2; e^2/4)$. Кривая вогнута во всей области определения. Точек перегиба нет. **10.146.** $D(y)=]-\infty, 0[\cup]0, +\infty[$; $y<0$ на $]-\infty, 0[$, $y>0$ на $]0, +\infty[$. Асимптоты $x=0$ и $y=0$ (при $x\to+\infty$). Возрастает на

$]-\infty, -1[$, убывает на $]-1, 0[$ и на $]0, +\infty[$. Точка максимума $(-1; -e)$. Кривая выпукла на $]-\infty, 0[$, вогнута на $]0, +\infty[$. Точек перегиба нет. **10.147.** $D(y)=]-\infty, 0[\cup]0, +\infty[$, $y<0$ на $]-\infty, 0[$, $y>0$ на $]0, +\infty[$. Асимптоты $x=0$, $y=-1$ (при $x \to -\infty$) и $y=0$ (при $x \to +\infty$). Убывает во всей области определения. Экстремальных точек нет. Кривая выпукла на $]-\infty, 0[$, вогнута на $]0, +\infty[$. Точек перегиба нет. **10.148.** $D(y)=\mathbf{R}$; так как $e^x > x$ при любом x, то функция отрицательна на всей числовой оси. Возрастает на $]-\infty, 0[$, убывает на $]0, +\infty[$. Точка максимума $(0; -1)$. Точек перегиба и асимптот нет. **10.149.** $D(y)=]0, +\infty[$; $y \to -0$ при $x \to +0$; $y<0$ на $]0, 1[$, $y>0$ на $]1, +\infty[$. Асимптот нет. Убывает на $]0, 1/\sqrt{e}[$, возрастает на $]1/\sqrt{e}, +\infty[$. Точка минимума $(1/\sqrt{e}; -1/(2e))$. Кривая выпукла на $]0, 1/(e\sqrt{e})[$, вогнута на $]1/(e\sqrt{e}), +\infty[$. Точка перегиба $(1/(e\sqrt{e}); -3/(2e^3))$. **10.150.** $D(y)=$ $=]0, 1[\cup]1, +\infty[$; $y \to -0$ при $x \to +0$; $y<0$ на $]0, 1[$, $y>0$ на $]1, +\infty[$. Асимптота $x=1$. Убывает на $]0, 1[$ и на $]1, e[$, возрастает на $]e, +\infty[$. Точка минимума $(e; e)$. Кривая выпукла на $]0, 1[$ и на $]e^2, +\infty[$, вогнута на $]1, e^2[$. Точка перегиба $(e^2; e^2/2)$. **10.151.** $D(y)=]0, +\infty[$; $y<0$ на $]0, 1[$, $y>0$ на $]1, +\infty[$. Асимптоты $x=0$ (односторонняя) и $y=0$. Возрастает на $]0, \sqrt{e}[$, убывает на $]\sqrt{e}, +\infty[$. Точка максимума $(\sqrt{e}; 1/(2e))$. Кривая вогнута на $]0, \sqrt[6]{e^5}[$, выпукла на $]\sqrt[6]{e^5}, +\infty[$. Точка перегиба $\left(\sqrt[6]{e^5}; 5/\left(6e\sqrt[3]{e^2}\right)\right)$. **10.152.** $D(y)=$ $=\mathbf{R}$; функция четная и положительная на всей числовой оси. Асимптот нет. Убывает на $]-\infty, 0[$, возрастает на $]0, +\infty[$. Точка минимума $(0; 2\ln 2)$. Кривая выпукла на $]-\infty, -2[$ и на $]2, +\infty[$, вогнута на $]-2, 2[$. Точки перегиба $(-2; 3\ln 2)$ и $(2; 3\ln 2)$. **10.153.** $D(y)=\mathbf{R}$; функция нечетная. Асимптоты $y=x+\pi$ (при $x \to -\infty$) и $y=x-\pi$ (при $x \to +\infty$). Возрастает на $]-\infty, -1[$ и на $]1, +\infty[$, убывает на $]-1, 1[$. Точка максимума $(-1; \pi/2-1)$, точка минимума $(1; -\pi/2+1)$. Кривая выпукла на $]-\infty, 0[$, вогнута на $]0, +\infty[$. Точка перегиба $(0; 0)$. **10.154.** $D(y)=]-\infty, 0[\cup]0, +\infty[$. Функция нечетная; $y<0$ на $]-\infty, 0[$, $y>0$ на $]0, +\infty[$. Асимптота $y=0$. Убывает на $]-\infty, 0[$ и на $]0, +\infty[$. Экстремальных точек нет. Кривая выпукла на $]-\infty, 0[$, вогнута на $]0, +\infty[$. Точек перегиба нет. **10.155.** $D(y)=\mathbf{R}$; функция периодическая с основным периодом 2π; $y>0$ на $]0, 3\pi/4[$ и на $]7\pi/4, 2\pi[$, $y<0$ на $]3\pi/4, 7\pi/4[$. Асимптот нет. Возрастает на $]0, \pi/4[$ и на $]5\pi/4, 2\pi[$, убывает на $]\pi/4, 5\pi/4[$. Точка максимума $(\pi/4; \sqrt{2})$, точка минимума $(5\pi/4; -\sqrt{2})$. Кривая выпукла на $]0, 3\pi/4[$ и на $]7\pi/4, 2\pi[$, вогнута на $]3\pi/4, 7\pi/4[$. Точки перегиба $(3\pi/4; 0)$ и $(7\pi/4; 0)$. **10.156.** $D(y)=\mathbf{R}$; функция периодическая с основным периодом π; $y<0$ на $]0, \pi/4[$ и на $]\pi/2, \pi[$, $y>0$ на $]\pi/4, \pi/2[$. Асимптот нет. Возрастает на $]0, 3\pi/8[$ и на $]7\pi/8, \pi[$, убывает на $]3\pi/8, 7\pi/8[$. Точка максимума $(3\pi/8; \sqrt{2}-1)$, точка минимума $(7\pi/8; -\sqrt{2}-1)$. Кривая вогнута на $]0, \pi/8[$ и на $]5\pi/8, \pi[$, выпукла на $]\pi/8, 5\pi/8[$. Точки перегиба $(\pi/8; -1)$ и $(5\pi/8; -1)$. **10.157.** $D(y)=\mathbf{R}$; функция периодическая с основным периодом 2π; $y>0$ на $]0, \pi[$, $y<0$ на $]\pi, 2\pi[$. Асимптот нет. Возрастает на $]0, \pi/2[$ и на $]3\pi/2, 2\pi[$, убывает на $]\pi/2, 3\pi/2[$. Точка максимума $(\pi/2; 1)$, точка минимума $(3\pi/2; -3)$. Кривая выпукла на $]0, 7\pi/6[$ и на $]11\pi/6, 2\pi[$, вогнута на $]7\pi/6, 11\pi/6[$. Точки перегиба $(7\pi/6; -5/4)$ и $(11\pi/6; -5/4)$. **10.158.** $D(y)=\bigcup\limits_{n \in \mathbf{Z}}]-\pi/2+\pi n, \pi/2+\pi n[$; функция четная и периодическая с основным периодом 2π; $y<0$ на $]-\pi/2, \pi/2[$, $y>0$ на $]\pi/2, 3\pi/2[$. Асимптоты $x=\pi/2+\pi n$, $n \in \mathbf{Z}$. Возрастает на $]-\pi/2, 0[$ и на $]\pi, 3\pi/2[$, убывает на $]0, \pi/2[$ и на $]\pi/2, \pi[$. Точка максимума $(0; 0)$, точка минимума $(\pi; 0)$. Кривая выпукла на $]-\pi/2, \pi/2[$, вогнута на $]\pi/2, 3\pi/2[$. Точек перегиба нет. **10.159.** $D(y)=\mathbf{R}$; функция четная и периодическая с основным периодом π; $y<0$ на $]-\pi/2, -\pi/3[$ и на $]\pi/3, \pi/2[$, $y>0$ на $]-\pi/3, \pi/3[$. Асимптот нет. Возрастает на $]-\pi/2, 0[$, убывает на $]0, \pi/2[$. Точка минимума $(-\pi/2; -1)$, точка максимума $(0; 3)$. Кривая вогнута на $]-\pi/2, -\pi/4[$ и на $]\pi/4, \pi/2[$, выпукла на $]-\pi/4, \pi/4[$. Точки перегиба $(-\pi/4; 1)$ и $(\pi/4; 1)$. **10.160.** $D(y)=\bigcup\limits_{n \in \mathbf{Z}}]\pi n, \pi/2+\pi n[$; функция периодическая с основным периодом π; $y<0$ на $]0, \pi/4[$ и на $]\pi/4, \pi/2[$. Асимптоты (односторонние) $x=\pi n$, $x=\pi/2+\pi n$, $n \in \mathbf{Z}$. Возрастает на $]0, \pi/4[$, убывает на $]\pi/4, \pi/2[$. Точка максимума $(\pi/4; 0)$.

Кривая выпукла во всей области определения. Точек перегиба нет. **10.161.** $D(y)=\bigcup\limits_{n\in Z}]2\pi n,\ 2\pi(n+1)[$; функция четная и периодическая с основным периодом 2π; $y<0$ на $]0,\ \pi/2[$ и на $]3\pi/2,\ 2\pi[$, $y>0$ на $]\pi/2,\ 3\pi/2[$. Асимптоты $x=2\pi n$, $n\in Z$. Возрастает на $]0,\ \pi[$, убывает на $]\pi,\ 2\pi[$. Точка максимума $(\pi;\ \ln 2)$. Кривая выпукла во всей области определения. Точек перегиба нет.

Глава 11

11.2. $x^8/8+C$. **11.3.** $6x^5/5+C$. **11.4.** $x/6+C$. **11.5.** $-1/(4x^4)+C$. **11.6.** $x^5/5-x^4+x^2+C$. **11.7.** $-t^4/2+2t^3+C$. **11.8.** $x^3/3+3x^2/2-4x+C$. **11.9.** $x^5+x^4/2-x^3+C$. **11.10.** $\sqrt{x}/3+C$. **11.11.** $4x^2-3x^{5/3}/5+C$. **11.12.** $3t^3-8t\sqrt[4]{t}+2t\sqrt{t}+C$. **11.13.** $(1/12)\ln|x|+C$. **11.14.** $-1/x-6\ln|x|+4x+C$. **11.15.** $2x\sqrt{x}/3-4\sqrt{x}-6/\sqrt{x}+C$. **11.16.** $-16/x+48/\sqrt{x}+9\ln|x|+C$. **11.17.** $x-6\sqrt{x}+3\ln|x|+2/\sqrt{x}+C$. **11.18.** $2x^{3/2}/3-3x+C$. **11.19.** $x^2/2+2x+C$. **11.20.** $-(3x^{5/3}/5+15x^{4/3}/4+25x)+C$. **11.21.** $3x-6x^{7/6}/7+C$. **11.22.** $7^x/\ln 7+C$. **11.23.** $3^xe^x/(1+\ln 3)+C$. **11.24.** $5^x/(25\ln 5)+C$. **11.25.** $(16^x+3)/(2^x3\ln 2)+C$. **11.26.** $6^x(6^x+8)/(2\ln 6)+C$. **11.27.** $(5^x+5^{-x})/\ln 5+C$. **11.28.** $8\sin x+C$. **11.29.** $-(1/9)\cos x+C$. **11.30.** $-(1/7)\operatorname{ctg}x+C$. **11.31.** $2\operatorname{tg}x+5\operatorname{ctg}x+C$. **11.32.** $5\operatorname{tg}x-4\sin x+C$. **11.33.** $x^2-7\operatorname{ctg}x+C$. **11.34.** $2x-\operatorname{tg}x+C$. **11.35.** $-(1/3)\cos x+C$. **11.36.** $\operatorname{tg}x+C$. **11.37.** $\operatorname{tg}x-\operatorname{ctg}x+C$. **11.38.** $\operatorname{tg}x+4\operatorname{ctg}x+C$. **11.39.** $-2\sin x+C$. **11.40.** $2\cos x+C$. **11.41.** $-2\cos x+C$. **11.42.** $\operatorname{tg}x-x+C$. **11.43.** $\operatorname{tg}x-\operatorname{ctg}x-4x+C$. **11.44.** $3(x+\sin x)/2+C$. **11.45.** $(x+\operatorname{tg}x)/2+C$. **11.46.** $(1/4)\operatorname{arctg}(x/4)+C$. **11.47.** $\arcsin(x/3)+C$. **11.48.** $(1/10)\ln|(5+x)/(5-x)|+C$. **11.49.** $\ln\left|x+\sqrt{x^2+4}\right|+C$. **11.50.** $\arcsin(x/\sqrt{2})-x+C$. **11.51.** $\ln\left|x+\sqrt{x^2+9}\right|-2\operatorname{arctg}(x/3)+C$. **11.52.** $(1/2)\ln|(1-x)/(1+x)|+C$. **11.53.** $(1/2)\operatorname{arctg}(x/2)+C$. **11.54.** $\ln\left|x+\sqrt{x^2-3}\right|+C$. **11.55.** $\ln\left|x+\sqrt{1+x^2}\right|-\arcsin x+C$. **11.56.** $x+2\operatorname{arctg}x+C$. **11.57.** $(1/2)\ln|(1-x)/(1+x)|-1/x+C$. **11.58.** $(1/\sqrt{5})\operatorname{arctg}(x/\sqrt{5})-1/x+C$. **11.59.** $(1/3)\ln|(3+x)/(3-x)|-x+C$. **11.61.** $(1/5)\sin 5x+C$. **11.62.** $(1/3)\times\cos(\pi/4-3x)+C$. **11.63.** $(1/96)(12x-5)^8+C$. **11.64.** $(1/12)\sqrt{(8x+9)^3}+C$. **11.65.** $1/[9(5-3x)^3]+C$. **11.66.** $(1/6)\sqrt[3]{(9x-7)^2}+C$. **11.67.** $(1/6)\ln|6x+5|+C$. **11.68.** $(-1/4)\ln|11-4x|+C$. **11.69.** $(-1/3)e^{4-3x}+C$. **11.70.** $6^{5x+2}/(5\ln 6)+C$. **11.71.** $(1/20)\operatorname{arctg}(5x/4)+C$. **11.72.** $(1/8)\ln|(4+x)/(4-x)|+C$. **11.73.** $(1/12)\ln|(2x-3)/(2x+3)|+C$. **11.74.** $(1/3)\arcsin(3x/5)+C$. **11.75.** $(1/3)\sqrt{(x^2-7)^3}$. **11.76.** $(-1/2)\sqrt[3]{(1-x^3)^2}+C$. **11.77.** $-(e^x-5)^{-2}/2+C$. **11.78.** $(1/2)\ln(x^2+6)+C$. **11.79.** $\ln|x^2+x-3|+C$. **11.80.** $-\ln|4+3x-x^2|+C$. **11.81.** $2\sqrt{3x^2-5x+4}+C$. **11.82.** $-\sqrt{2x-x^2}+C$. **11.83.** $-\ln|x^3-5x^2|+C$. **11.84.** $(1/2)\ln(2e^x+7)+C$. **11.85.** $-\ln|\cos x|+C$. **11.86.** $(1/5)\ln|\sin 5x|+C$. **11.87.** $-(8-\sqrt{x})^4/2+C$. **11.88.** $-1/(6+\sqrt[3]{x})^3+C$. **11.89.** $-e^{3/x}/3+C$. **11.90.** $\ln|\ln x|+C$. **11.91.** $(6/11)\sqrt[6]{\ln^{11}x}+C$. **11.92.** $-6^{1-x^3}/(3\ln 6)+C$. **11.93.** $(4/15)\sqrt[4]{(e^{3x}+8)^5}+C$. **11.94.** $(1/\ln 4)\ln(7+4^x)+C$. **11.95.** $(1/20)\ln|(e^{5x}+2)/(e^{5x}-2)|+C$. **11.96.** $(1/\ln 7)\ln(7^x+\sqrt{1+49^x})+C$. **11.97.** $-(1/3)\cos^3x+C$. **11.98.** $(3/2)\sqrt[3]{\sin^2x}+C$. **11.99.** $2/(3\cos x\sqrt{\cos x})+C$. **11.100.** $(2\sqrt{5}/3)\operatorname{tg}x\sqrt{\operatorname{tg}x}+C$. **11.101.** $(-7/3)\sqrt[7]{\operatorname{ctg}^3x}+C$. **11.102.** $\arcsin x-2\arcsin^2x+C$. **11.103.** $(4/5)\sqrt[4]{\operatorname{arctg}^5x}+C$. **11.104.** $-\ln|\operatorname{arcctg}x|+C$. **11.105.** $(-1/3)\times\sqrt{(1-2\sin x)^3}+C$. **11.106.** $(-1/4)e^{4\cos x-1}+C$. **11.107.** $(1/2)x+(1/4)\sin 2x+C$. **11.108.** $(1/2)x-(1/8)\sin 4x+C$. **11.109.** $(1/\sqrt{2})\operatorname{arctg}[(\sin x)/\sqrt{2}]+C$. **11.110** $[1/(2\sqrt{5})]\ln\left|(\cos x+\sqrt{5})/(\cos x-\sqrt{5})\right|+C$. **11.111.** $(-1/6)\sin(2/x^3)+C$. **11.112.** $\ln\left|\ln x+\sqrt{\ln^2x-9}\right|+C$. **11.113.** $(-1/4)\operatorname{ctg}x^4+C$. **11.114.** $(1/4)e^{-1/x^4}+C$. **11.115.** $\ln|\operatorname{tg}(x/2)|+C$. **11.116.** $\ln|\operatorname{tg}(x/2+\pi/4)|+C$. **11.117.** $2(\sqrt{x+5}-$

$-\ln(1+\sqrt{x+5})+C$. **11.118.** $2\sqrt{x}-4\,\mathrm{arctg}(\sqrt{x}/2)+C$. **11.119.** $(1/3)\times\ln|(\sqrt{2x+9}-3)/(\sqrt{2x+9}+3)|+C$. **11.120.** $x-2\sqrt{x}+2\ln(\sqrt{x}+1)+C$. **11.121.** $(9/2)\arcsin(x/3)+(1/3)x\sqrt{9-x^2}$. **11.122.** $\sqrt{x^2-25}-5\arccos(5/x)+C$. **11.123.** $x/(4\sqrt{4+x^2})+C$. **11.124.** $2(\sqrt{e^x-1}-\mathrm{arctg}\sqrt{e^x-1})+C$. **11.126.** $(7-x)\cos x+\sin x+C$. **11.127.** $(1/2)(1-3x)\sin 2x-(3/4)\cos 2x+C$. **11.128.** $(x^2-2)\sin x+2x\cos x+C$. **11.129.** $(1/9)x^3(3\ln x-1)+C$. **11.130.** $2\sqrt{x}\times(\ln x-2)+C$. **11.131.** $x\,\mathrm{tg}\,x+\ln|\cos x|+C$. **11.132.** $(-1/3)x\,\mathrm{ctg}\,3x+(1/9)\ln|\sin 3x|+C$. **11.133.** $(1/9)(3x-11)e^{-3x}+C$. **11.134.** $3^x[(x+2)\times\ln 3-1]/\ln^2 3+C$. **11.135.** $e^{-x}(-x^2+4x+4)+C$. **11.136.** $x\ln(1+x^2)-2x+2\,\mathrm{arctg}\,x+C$. **11.137.** $x\ln(x+\sqrt{1+x^2})-\sqrt{1+x^2}+C$. **11.138.** $x\,\mathrm{arctg}\,x-(1/2)\ln(1+x^2)+C$. **11.139.** $\ln[(1-\sqrt{1-x^2})/x]-(\arcsin x)/x+C$. **11.140.** $(1/5)\times e^{2x}(\sin x+2\cos x)+C$. **11.141.** $4^x(\sin x\ln 4-\cos x)/(1+\ln^2 4)+C$. **11.142.** $(1/2)x\sqrt{4+x^2}+2\ln|x+\sqrt{4+x^2}|+C$. **11.143.** $2(\sqrt{x}\sin\sqrt{x}+\cos\sqrt{x})+C$. **11.145.** $(1/3)\,\mathrm{arctg}(x+5)+C$. **11.146.** $1/[3(3x-1)]+C$. **11.147.** $(1/10)\times\ln|(x+3)/(x-7)|+C$. **11.148.** $(1/3)\,\mathrm{arctg}(2x+1)/3+C$. **11.149.** $(1/20)\times\ln|(2x-9)/(2x+1)|+C$. **11.150.** $(1/2)\ln|(x-2)/x|+C$. **11.151.** $\arcsin(x-2)/3+C$. **11.152.** $\ln|x+5+\sqrt{x^2+10x+28}|+C$. **11.153.** $\ln|x+3{,}5+\sqrt{x^2+7x}|+C$. **11.154.** $(1/\sqrt{2})\arcsin(4x-5)/5+C$. **11.155.** $(1/5)\arcsin(5x-5)/4+C$. **11.156.** $(1/\sqrt{3})\ln|\sqrt{3}(x-0{,}5)+\sqrt{3x^2-3x+8}|+C$. **11.158.** $(1/2)\ln|x^2+x-12|+(9/14)\times\ln|(x+4)/(x-3)|+C$. **11.159.** $\ln(x^2-4x+13)+(1/9)\,\mathrm{arctg}(x-2)/3+C$. **11.160.** $(-5/8)\ln|4x^2+16x-9|+(7/5)\ln|(2x-1)/(2x+9)|+C$. **11.161.** $(2/3)\ln(9x^2-6x+2)+5\,\mathrm{arctg}(3x-1)+C$. **11.162.** $x+3\ln(x^2-8x+25)+(1/3)\,\mathrm{arctg}(x-3)/4+C$. **11.163.** $x+2\ln|x^2-2x-15|+(5/2)\ln|(x-5)/(x+3)|+C$. **11.164.** $3\sqrt{x^2+6x+20}-14\ln|x+3+\sqrt{x^2+6x+20}|+C$. **11.165.** $\sqrt{3+2x-x^2}+6\arcsin(x-1)/2+C$. **11.166.** $3\sqrt{2x^2-12x+15}+(1/\sqrt{2})\ln|x-3+\sqrt{x^2-6x+7{,}5}|+C$. **11.167.** $-2\sqrt{27+12x-4x^2}+(15/2)\arcsin(2x-3)/6+C$. **11.172.** $2\ln|x-2|+\ln|x+5|+C$. **11.173.** $4\ln|x-1|-(5/3)\ln|3x+1|+C$. **11.174.** $-x+3\ln|x-1|-2\ln|x-3|+C$. **11.175.** $6\ln|x|-2\ln|x+4|-3\ln|x-3|+C$. **11.176.** $x^2/2+(7/8)\ln|x-4|-(3/8)\ln|x+4|-(1/2)\ln|x|+C$. **11.177.** $3\ln|x|+3\ln|x+1|-7\ln|x+2|+C$. **11.178.** $(1/4)\ln|x-5|-(1/4)\ln|x+3|-1/(x+3)+C$. **11.179.** $\ln|x-2|-9/(x-2)-11/(x-2)^2+C$. **11.180.** $\ln|x-5|-1/x-4/(x-5)+C$. **11.181.** $-3x/2+2/(x-1)+3\ln|x-1|-(13/4)\ln|1-2x|+C$. **11.182.** $\ln|x+1|+(3/4)\ln(x^2-4x+13)-(1/3)\,\mathrm{arctg}(x-2)/3+C$. **11.183.** $\ln(x^2+9)-\ln|x-3|-(1/3)\,\mathrm{arctg}(x/3)+C$. **11.184.** $5x^2/2-x+8\ln|x-2|-2\ln(x^2+2x+4)+(20/\sqrt{3})\,\mathrm{arctg}(x+1)/\sqrt{3}+C$. **11.185.** $(1/2)\ln(x^2+4)-(9/2)\,\mathrm{arctg}(x/2)-2/x+C$. **11.186.** $\ln|x+1|-7\ln|x-1|+(7/2)\ln(x^2-2x+2)-2\,\mathrm{arctg}(x-1)+C$. **11.187.** $(5/2)\ln(x^2+9)-3\,\mathrm{arctg}(x/3)-(1/2)\ln(x^2+2x+2)+3\,\mathrm{arctg}(x+1)+C$. **11.188.** $(2-x)/[4(x^2+2)]+(1/2)\ln(x^2+2)-1/(4\sqrt{2})\times\mathrm{arctg}(x/\sqrt{2})+C$. **11.189.** $(3x-17)/[2(x^2-4x+5)]+(1/2)\ln(x^2-4x+5)+(15/2)\,\mathrm{arctg}(x-2)+C$. **11.191.** $-1/[\mathrm{tg}(x/2)+2]+C$. **11.192.** $(1/3)\ln|[\mathrm{tg}(x/2)-2]/[2\,\mathrm{tg}(x/2)-1]|+C$. **11.193.** $\mathrm{arctg}[\mathrm{tg}(x/2)+1]+C$. **11.194.** $\mathrm{tg}(x/2)+(1/4)\,\mathrm{tg}^2(x/2)+(1/2)\ln|\mathrm{tg}(x/2)|+C$. **11.195.** $\ln|\sin x|-\sin x+C$. **11.196.** $(1/\sqrt{5})\,\mathrm{arctg}(\sqrt{5}\cos x)+C$. **11.197.** $(1/6)\ln|(\mathrm{tg}\,x-3)/(\mathrm{tg}\,x+3)|+C$. **11.198.** $(1/\sqrt{3})\,\mathrm{arctg}[(\mathrm{tg}\,x-1)/\sqrt{3}]+C$. **11.199.** $(1/2)\cos x-[3/(2\sqrt{2})]\times\ln|(\sqrt{2}\cos x-1)/(\sqrt{2}\cos x+1)|+C$. **11.200.** $-\ln|\cos x-\sin x|+C$. **11.201.** $-\cos x+(2/3)\cos^3 x+(1/5)\cos^5 x+C$. **11.202.** $\sin x-\sin^3 x+(3/5)\sin^5 x-(1/7)\sin^7 x+C$. **11.203.** $(-1/12)\cos^6 2x+(1/16)\cos^8 2x+C$. **11.204.** $1/(7\cos^7 x)-1/(5\cos^5 x)+C$. **11.205.** $3x/8+(1/12)\sin 6x+(1/96)\sin 12x+C$. **11.206.** $5x/16-(1/4)\sin 2x+(3/64)\sin 4x+(1/48)\sin^3 4x+C$. **11.207.** $(1/128)[3x/2-(1/2)\sin 4x+(1/16)\sin 8x]-(1/320)\sin^5 2x+C$. **11.208.** $(1/16)[5x/8+(1/3)\sin^3 2x-(1/8)\sin 4x-(1/64)\sin 8x]+C$. **11.209.** $(1/3)\,\mathrm{tg}^3 x-\mathrm{tg}\,x+x+C$. **11.210.** $(1/2)\,\mathrm{ctg}^2 x-(1/4)\,\mathrm{ctg}^4 x+\ln|\sin x|+C$. **11.211.** $(1/10)\,\mathrm{tg}^5 2x+(1/3)\,\mathrm{tg}^3 2x+(1/2)\,\mathrm{tg}\,2x+C$. **11.212.** $C-[(1/7)\,\mathrm{ctg}^7 x+(3/5)\,\mathrm{ctg}^5 x+\mathrm{ctg}^3 x+\mathrm{ctg}\,x]$. **11.213.** $C-[(1/5)\,\mathrm{ctg}^5 x+(1/3)\,\mathrm{ctg}^3 x]$. **11.214.** $(1/6)\,\mathrm{tg}^6 x+(1/4)\,\mathrm{tg}^4 x+C$. **11.215.** $(1/3)\,\mathrm{tg}^3 x+2\,\mathrm{tg}\,x-1/\mathrm{tg}\,x+$

$+C$. **11.216.** $-[(1/4)\operatorname{ctg}^4 x+\operatorname{ctg}^2 x+\ln|\operatorname{ctg} x|]+C$. **11.217.** $(\sin x)/(2\cos^2 x)+(1/2)\ln|\operatorname{tg}(x/2+\pi/4)|+C$. **11.218.** $(\sin x)/(2\cos^2 x)+(5/2)\ln|\operatorname{tg}(x/2+\pi/4)|-1/(3\sin^3 x)-2/\sin x+C$. **11.219.** $3\sqrt[3]{\cos x}\,[(2/7)\cos^2 x-(1/13)\cos^4 x-1]$. **11.220.** $-2/\sqrt{\operatorname{ctg} x}\,[(1/9)\operatorname{ctg}^4 x+(1/5)\operatorname{ctg}^2 x]+C$. **11.221.** $(1/8)\cos 4x-(1/20)\cos 10x+C$. **11.222.** $(1/14)\sin 7x-(1/22)\sin 11x+C$. **11.223.** $(1/4)\times[(1/16)\sin 16x+(1/10)\sin 10x+(1/6)\sin 6x+x+C]$. **11.224.** $(1/4)[(1/16)\cos 16x-(1/2)\cos 2x-(1/6)\cos 6x-(1/8)\cos 8x]+C$. **11.227.** $(3/2)\ln\left(\sqrt[3]{x^2}+1\right)+C$. **11.228.** $2\sqrt{x}+6\sqrt[3]{x}+24\sqrt[6]{x}+48\ln\left|\sqrt[6]{x}-2\right|+C$. **11.229.** $2\sqrt{x+9}+3\ln\left|\left(\sqrt{x+9}-3\right)/\left(\sqrt{x+9}+3\right)\right|+C$. **11.230.** $4\sqrt[4]{x}+2\ln\left(1+\sqrt{x}\right)-4\operatorname{arctg}\sqrt[4]{x}+C$. **11.231.** $6\sqrt[6]{x^5}/5-2\sqrt{x}-3\sqrt[3]{x}+3\ln\left(\sqrt[3]{x}-\sqrt[6]{x}+1\right)+2\sqrt{3}\operatorname{arctg}\left[\left(2\sqrt[6]{x}-1\right)/\sqrt{3}\right]+C$. **11.232.** $(3/2)\ln\left|\left(1+\sqrt[6]{x}\right)/\left(1-\sqrt[6]{x}\right)\right|-3\operatorname{arctg}\sqrt[6]{x}+C$. **11.233.** $4\sqrt[4]{x}-6\sqrt[6]{x}+12\sqrt[12]{x}+2\ln|x|-36\ln\left(\sqrt[12]{x}+1\right)+C$. **11.234.** $(4x-3)\sqrt{4x-3}/96+3\sqrt{4x-3}/16-9/(32\sqrt{4x-3})+C$. **11.235.** $6\ln\left|\left(\sqrt[6]{x+4}-1\right)/\sqrt[6]{x+4}\right|+6/\sqrt[6]{x+4}+C$. **11.236.** $(-2/5)\sqrt{(x+5)/x}+C$. **11.237.** $-2t+\ln|(t+1)/(t-1)|+C$, где $t=\sqrt{(x-3)/x}$. **11.238.** $(9/4)\ln|(t-2)/(t+2)|-9t/(t^2-4)+C$, где $t=\sqrt{(4x-5)/(x+1)}$. **11.239.** $(1-x/2)\sqrt{1-x^2}-(3/2)\arcsin x+C$. **11.240.** $(1/2)\times\ln|(1-t)/(1+t)|+(1/4)\ln[(t^2+t+1)(t^2-t+1)]+(\sqrt{3}/2)\operatorname{arctg}\left[(2t+1)/\sqrt{3}\right]+(\sqrt{3}/2)\operatorname{arctg}\left[(2t-1)/\sqrt{3}\right]+C$, где $t=\sqrt[3]{(x+2)/(x-2)}$. **11.242.** $(25/2)\times\arcsin(x/5)+(5/2)x\sqrt{25-x^2}+C$. **11.243.** $-x/(36\sqrt{36-x^2})+C$. **11.244.** $\ln\left|\sqrt{x^2+4}+x\right|-\sqrt{x^2+4}/x+C$. **11.245.** $\sqrt{x^2-9}-3\arccos(3/x)+C$. **11.246.** $-\sqrt{x^2+16}/(16x)+C$. **11.247.** $\sqrt{x^2-25}\,(x^2+50)/3+C$. **11.248.** $-\sqrt{(x^2+9)^5}/(45x^5)+C$. **11.249.** $-\sqrt{(16-x^2)^3}/(48x^3)+C$. **11.250.** $\ln\left|\sqrt{x^2-1}+x\right|-x/\sqrt{x^2-1}+C$. **11.251.** $(3x^2+50)\sqrt{(x^2-25)^3}/15+C$. **11.252.** $x^3/\left[48\sqrt{(x^2+16)^3}\right]+C$. **11.253.** $2\arcsin(x/2)-x(2-x^2)\sqrt{4-x^2}/4+C$. **11.257.** $\ln\left|x+1+\sqrt{x^2+2x+2}\right|+2/\left(x+2+\sqrt{x^2+2x+2}\right)+C$. **11.258.** $C-(1/\sqrt{2})\ln\left|\sqrt{2+x-x^2}+\sqrt{2})/x+1/(2\sqrt{2})\right|$. **11.259.** $(1+\sqrt{1-x^2})/x+2\operatorname{arctg}\sqrt{(1+x)/(1-x)}+C$. **11.260.** $\ln\left|x+1+\sqrt{2x+x^2}\right|-4/(x+\sqrt{2x+x^2})+C$. **11.261.** $(3-x)\sqrt{1-2x-x^2}/2+2\arcsin\left[(x+1)/\sqrt{2}\right]+C$. **11.262.** $(2/27)(1/t-2t-t^3/3)+C$, где $t=\sqrt{-x^2+7x-10}/(x-2)$. **11.266.** $-8/\left[3\left(\sqrt[8]{x}-1\right)^3\right]-2/\left(\sqrt[8]{x}-1\right)^4+C$. **11.267.** $(1/3)\ln\left|\left(\sqrt{1+x^3}-1\right)/\left(\sqrt{1+x^3}+1\right)\right|+C$. **11.268.** $-t^5/10+t^3/3-t/2+C$, где $t=\sqrt{1+x^4}/x^2$. **11.269.** $12t^5/5-20t^3+C$, где $t=\sqrt{5+\sqrt[6]{x}}$. **11.270.** $t^7/42-7t^4/24+C$, где $t=\sqrt[3]{7-3x^2}$. **11.271.** $(-1/3)\times\ln|t-1|+(1/6)\ln(t^2+t+1)-(1/\sqrt{3})\operatorname{arctg}\left[(2t+1)/\sqrt{3}\right]$, где $t=\sqrt{1+x^3}/x$. **11.272.** $3\left[\ln\left|\sqrt[3]{x}/\left(1+\sqrt[3]{x}\right)\right|+1/\left(1+\sqrt[3]{x}\right)\right]+C$. **11.273.** $\sqrt[3]{(2x^{-3/4}+1)^2}+C$. **11.274.** $-\sqrt[3]{(x^{-3}+2)^4}/4+C$. **11.275.** $(1/3)\ln|(t-1)/(t+1)|+(2/3)\operatorname{arctg} t+C$, где $t=\sqrt[4]{1+x^3}$. **11.276.** $4\left(7^{\sqrt[4]{x}}/\ln 7+2\sqrt[4]{x}\right)+C$. **11.277.** $(-7/5)\ln|x-4|-(1/10)\ln|2x-3|+C$. **11.278.** $(1/6)\operatorname{tg}^6 x-(1/4)\operatorname{tg}^4 x+(1/2)\operatorname{tg}^2 x+\ln|\cos x|+C$. **11.279.** $-6\sqrt{5x-4-x^2}+8\arcsin[(2x-5)/3]+C$. **11.280.** $(1/108)[\cos 6x(1-18x^2)+6x\sin 6x]+C$. **11.281.** $(-5/2)\sqrt{2x^2+x-10}+(41/4)\ln\left|\sqrt{2}(x+0{,}25)+\sqrt{2x^2+x-10}\right|+C$. **11.282.** $3\ln|x|+(1/2)\ln|2x+1|-4\ln|x-2|+C$. **11.283.** $2\left(\sqrt[4]{x-3}-1\right)^2+4\ln\left(1+\sqrt[4]{x-3}\right)+C$. **11.284.** $-\sqrt{(x^2+25)^3}/(75x^3)+C$. **11.285.** $-4/\left[5\left(\sqrt[4]{x}-1\right)^5\right]-2/\left[3\left(\sqrt[4]{x}-1\right)^6\right]+C$. **11.286.** $(3/4)\ln|x-1|+(1/4)\ln|x+3|+1/(x+1)+C$. **11.287.** $(1/2)\sin^2 x-2\ln|\sin x|-1/(2\sin^2 x)+C$. **11.288.** $1/\cos x-\operatorname{tg} x+x+C$. **11.289.** $\ln|e^x-1|+e^{-x}-x+C$. **11.290.** $5z^3/18-$

$-35z/6+C$, где $z=\sqrt{7+2\sqrt[5]{x^3}}$. **11.291.** $(3/2)\ln(x^2-4x+5)+8\operatorname{arctg}(x-2)-3\ln|x|+C$. **11.292.** $x\ln(x^2+1)-2x+2\operatorname{arctg}x+C$. **11.293.** $(1/\sqrt{6})\times\operatorname{arctg}(\sqrt{2/3}\operatorname{tg}x)+C$. **11.294.** $\sqrt{x^2+2x}+\ln|x+1+\sqrt{x^2+2x}|+C$. **11.295.** $(1/4)\times\ln|t+2|-(1/8)\ln(t^2-2t+4)+(\sqrt{3}/4)\operatorname{arctg}[(t-1)/\sqrt{3}]+C$, где $t=\sqrt[3]{x-8}$. **11.296.** $x^2/4+(1/4)x\sin 2x+(1/8)\cos 2x+C$. **11.297.** $(1/3)\operatorname{arctg}x-(1/6)\operatorname{arctg}(x/2)+C$. **11.298.** $(3/8)\sqrt[3]{(2+x)^2/(2-x)^2}+C$. **11.299.** $(3/2)\ln(1-\cos x)-(1/2)\ln(1+\cos x)+C$. **11.300.** $x/[4(x^2+2)]+[1/(4\sqrt{2})]\operatorname{arctg}(x/\sqrt{2})+C$. **11.301.** $\ln|[\operatorname{tg}(x/2)-5]/[\operatorname{tg}(x/2)-3]|+C$. **11.302.** $(-1/\sqrt{3})\operatorname{arctg}[(3-\sin x)/\sqrt{3}]+C$. **11.303.** $(1/2)\operatorname{arctg}(e^x/2)-x/2+(1/4)\ln(e^{2x}+4)+C$. **11.304.** $(8-x^2)/\sqrt{4-x^2}+C$. **11.305.** $(1/2)\sin x+(1/20)\sin 5x+(1/28)\sin 7x+C$. **11.306.** $(1/4)\operatorname{tg}^4x+\operatorname{tg}^2x+\ln|\operatorname{tg}x|+C$. **11.307.** $(1/2)\arcsin[(x-2)/(x\sqrt{2})]+C$. **11.308.** $3/(x-2)+2\ln|x-2|-2\ln|x|+C$. **11.309.** $(1/3)x\operatorname{tg}3x+(1/9)\ln|\cos 3x|+C$. **11.310.** $(4/9)x^2\sqrt[4]{x}-(12/13)x\sqrt[12]{x}+C$. **11.311.** $(2/15)[\sqrt{(x+5)^3}+\sqrt{x^3}]+C$. **11.312.** $(x+1)\operatorname{arctg}\sqrt{x}-\sqrt{x}+C$. **11.313.** $x^2+\sqrt{(4-x^2)^3}/3+C$. **11.314.** $x^2/2+x+\ln|x-1|-(1/2)\ln(x^2+1)-\operatorname{arctg}x+C$. **11.315.** $x(3-x^2)/(2\sqrt{1-x^2})-(3/2)\arcsin x+C$. **11.316.** $(1/4)(\ln|\operatorname{tg}x|+\cos 2x)+C$. **11.317.** $(2x^2-1)\times\sqrt{1+x^2}/(3x^3)+C$. **11.318.** $[1/(2\sqrt{2})]\ln|(\operatorname{tg}x+1-\sqrt{2})/(\operatorname{tg}x+2+\sqrt{2})|+C$. **11.319.** $5x+2\ln|x|+4\ln|x+2|+3\ln|x-2|+C$. **11.320.** $(1/2)x^2\arcsin x-(1/4)\arcsin x+(1/4)x\sqrt{1-x^2}+C$. **11.321.** $\ln|x-2|+(5-3x)/(x-2)^2+C$. **11.322.** $(4/3)\sqrt[4]{(x-1)/(x+2)}+C$. **11.323.** $(1/3)\ln|x+1|-3/(x+1)+(1/3)\ln(x^2+2)-(\sqrt{2}/3)\operatorname{arctg}(x/\sqrt{2})+C$. **11.324.** $(1/2)(x+2)\sqrt{x^2+4x}-2\ln|x+2+\sqrt{x^2+4x}|+C$. **11.325.** $(1/2)(x+1)\sqrt{1-x^2-2x}+\arcsin(x+1)/\sqrt{2}+C$. **11.326.** $(\operatorname{tg}^2x-\operatorname{ctg}^2x):2+2\ln|\operatorname{tg}x|+C$. **11.327.** $6\sqrt[3]{(x+1)^2}[(1/80)(5x^2-6x+9)+\sqrt{x+1}/7]+C$. **11.328.** $C-\sqrt{(x+1)/(1-x)}$. **11.329.** $C-[\sqrt{1-\ln^2x}-4\ln x+2\arcsin(2+\ln x)/\sqrt{5}]$. **11.330.** $(1/2)x\cos\varphi-[1/(4\alpha)]\sin(2\alpha x+\varphi)+C$. **11.331.** $(1/2)\sin x+(1/20)\sin 5x+(1/28)\sin 7x+C$. **11.332.** $(-1/2)x+(1/3)\ln|e^x-1|+(1/6)\ln(e^x+2)+C$. **11.333.** $\sqrt{1+x^2}\operatorname{arctg}x-\ln|x+\sqrt{1+x^2}|+C$. **11.334.** $x^2+\sqrt{(4-x^2)^3}/3+C$. **11.335.** $2\arcsin(\sqrt{x/2})-\sqrt{2x-x^2}+C$.

Глава 12

12.2. $65/4$. **12.3.** 42. **12.4.** 2. **12.5.** $1/2$. **12.6.** -6. **12.7.** 125. **12.8.** $-7e^2+e+16$. **12.9.** $1/3$. **12.10.** $2(\sqrt{3}-1)/\sqrt{3}$. **12.11.** $(\pi-2)/8$. **12.12.** 0. **12.13.** $4/45$. **12.14.** $\pi/72$. **12.15.** $\pi/6$. **12.16.** $(\ln 9-\ln 4)/10$. **12.17.** $\ln(\sqrt{5}+2)$. **12.18.** $\pi/12$. **12.19.** $(-1/12)\ln 7$. **12.20.** $(1/4)\ln 3$. **12.21.** $e^{-\pi/4}-\pi/4$. **12.22.** $2\sqrt[4]{3}-1$. **12.23.** $2(2\sqrt{2}-1)/3$. **12.24.** $8e^9/9$. **12.25.** 4. **12.27.** $1/9$. **12.28.** 4. **12.29.** $\pi/180$. **12.30.** $\pi/(6\sqrt{3})$. **12.31.** $\pi/(6\ln 3)$. **12.32.** $\ln(3+2\sqrt{2})-\ln(2+\sqrt{3})$. **12.33.** $(1/8)\ln 3$. **12.34.** $(e-1)/\pi$. **12.35.** $\pi/6$. **12.36.** $\pi^2/6$. **12.37.** $14/17$. **12.38.** $2/35$. **12.39.** $2\sqrt{3}-2-\pi/6$. **12.40.** $2\ln 10$. **12.41.** $12(3+\ln 3)$. **12.42.** $-6(2+\ln 7)$. **12.43.** $6+4\ln 2$. **12.44.** $\pi/6+\sqrt{3}/8$. **12.45.** 3π. **12.46.** $(\ln 3-1)/2$. **12.47.** $(2-\sqrt{2})/9$. **12.48.** $3/80$. **12.49.** $(3\sqrt{3}-\pi)/3$. **12.50.** $\pi/48$. **12.51.** $1/24$. **12.52.** $2\sqrt{3}-2-\pi/6$. **12.53.** $(1/4)\ln 3$. **12.54.** $3(\pi-2)/4$. **12.56.** $4e^5+1$. **12.57.** $\pi/2-2$. **12.58.** $1/9$. **12.59.** $(\pi-2\ln 2)/4$. **12.60.** $\pi\sqrt{3}/6+\ln 2$. **12.61.** $\pi-1$. **12.62.** $2\ln(\sqrt{5}-2)+\sqrt{5}-1$. **12.63.** π. **12.64.** $3e-5$. **12.65.** $4/\pi$. **12.67.** 16 кв. ед. **12.68.** 28 кв. ед. **12.69.** 36 кв. ед. **12.70.** $(e^3-1)/(2e^2)$ кв. ед. **12.71.** $(\sqrt{2}-1)/2$ кв. ед. **12.72.** $25(\pi+6-6\sqrt{3})/12$ кв. ед. **12.73.** $(4\pi+3\sqrt{3})/2$ кв. ед. **12.74.** $2\ln 5$ кв. ед. **12.75.** $(3-\sqrt{2})/2$ кв. ед. **12.76.** $2(e-1)/e$ кв. ед. **12.77.** $64/3$ кв. ед. **12.78.** 4 кв. ед. **12.79.** 48 кв. ед. **12.80.** $4-\ln 3$ кв. ед. **12.81.** 36 кв. ед. **12.82.** $128/3$ кв. ед. **12.83.** $343/3$ кв. ед. **12.84.** $27/2$ кв. ед. **12.85.** $(3\pi-2)/6$ кв. ед.

12.86. $4\pi-8$ кв. ед. **12.87.** 3π кв. ед. **12.88.** $3\pi+6$ кв. ед. **12.89.** $2\pi+4/3$ и $6\pi-4/3$ кв. ед. **12.90.** πab кв. ед. **12.91.** $3\pi a^2/8$ кв. ед. **12.92.** $6\pi a^2$ кв. ед. **12.93.** $\pi a^2/4$ кв. ед. **12.94.** a^2 кв. ед. **12.95.** $7a^2/(4\pi)$ кв. ед. **12.97.** 335/27. **12.98.** $(1/2)\ln 3$. **12.99.** $2\sqrt{3}+\ln(2+\sqrt{3})$. **12.100.** 24. **12.101.** 32. **12.102.** 5π. **12.103.** $(\pi-3)/8$. **12.104.** $1+0{,}5\ln 1{,}5$. **12.105.** 13/3. **12.106.** $\pi a\sqrt{1+4\pi^2}+(a/2)\ln(2\pi+\sqrt{1+4\pi^2})$. **12.107.** $\sqrt{2}/(\pi-1)$. **12.110.** $38\pi/3$ куб. ед. **12.111.** $56\pi/27$ куб. ед. **12.112.** $\pi^2/2$ куб. ед. **12.113.** 48π куб. ед. **12.114.** $2048\pi/105$ куб. ед. **12.115.** $70\pi/3$ куб. ед. **12.116.** 24π куб. ед. **12.117.** $2\pi b^2\sqrt{a^2-b^2}(2a^2+b^2)/(3a^2)$ куб. ед. **12.118.** $20\pi/3$ куб. ед. **12.119.** $32\pi a^3/105$ куб. ед. **12.120.** $5\pi^2a^3$ куб. ед. **12.122.** $32\pi/3$ куб. ед. **12.123.** $272\pi/15$ куб. ед. **12.124.** а) $48\pi/5$ куб. ед.; б) $24\pi/5$ куб. ед. **12.125.** $2\pi(2\sqrt{3}/3-1)$ куб. ед. **12.126.** $8\pi/3$ куб. ед. **12.127.** $9\pi/(4\ln 2)$ куб. ед. **12.128.** $39{,}6\pi$ куб. ед. **12.129.** $8\pi/3$ куб. ед. **12.130.** $104\pi/3$ куб. ед. **12.132.** $208\pi a^2/3$ кв. ед. **12.133.** $24\pi\sqrt{10}$ кв. ед. **12.134.** $2\pi[\sqrt{2}+\ln(1+\sqrt{2})]$ кв. ед. **12.135.** $4\pi a^2$ кв. ед. **12.136.** $12\pi a^2/5$ кв. ед. **12.137.** $\pi(e^2+4-e^{-2})$ кв. ед. **12.138.** $62\pi/3$ кв. ед. **12.139.** $29{,}6\pi$ кв. ед. **12.143.** 134/3 м. **12.144.** 20 м. **12.145.** 5 м/с^2; 3 км. **12.146.** Через 6 с. **12.147.** 0,125 Дж. **12.148.** $\approx 3{,}46$ МДж. **12.149.** $\pi\rho g r^2H^2/12$ и $\pi\rho g r^2H^2/4$. **12.150.** $\approx 7{,}7$ кДж. **12.151.** $2\rho g r^3H/3$. **12.152.** $\approx 39{,}69$ МН; $\approx 29{,}77$ МН. **12.153.** $\rho g a h^2/6$. **12.154.** $\approx 1{,}41$Н. **12.155.** 117,6 МН. **12.156.** 22,5 кг. **12.157.** $\approx 25{,}1$ Дж. **12.158.** $\approx 1{,}5$ кДж. **12.160.** 1/4. **12.161.** 1/2. **12.162.** $\pi/6$. **12.163.** Расходится. **12.164.** π. **12.165.** -1. **12.166.** 8. **12.167.** Расходится. **12.169.** -1. **12.170.** $0{,}5\ln 2$. **12.171.** $1-\ln 2$. **12.172.** π. **12.173.** 6. **12.174.** Расходится. **12.175.** $1/(\ln 3)$. **12.178.** Сходится. **12.179.** Расходится. **12.180.** Расходится. **12.181.** Расходится. **12.182.** Расходится. **12.183.** Расходится. **12.184.** Сходится. **12.185.** Сходится. **12.186.** Расходится. **12.187.** Сходится. **12.188.** 4 кв. ед. **12.189.** 2π куб. ед. **12.190.** $\sqrt{2}$.

Глава 13

13.1. 1) $1+\frac{1}{2}+\frac{1}{6}+\frac{1}{24}+\frac{1}{120}$; 2) $1-\frac{1}{3}+\frac{1}{5}-\frac{1}{7}+\frac{1}{9}$; 3) $\frac{1}{8}+\frac{2}{35}+\frac{3}{80}+\frac{4}{143}+\frac{5}{224}$; 4) $1-\frac{1}{\sqrt[3]{2}}+\frac{1}{\sqrt[3]{3}}-\frac{1}{\sqrt[3]{4}}+\frac{1}{\sqrt[3]{5}}$; 5) $1+\frac{2}{4}+\frac{6}{27}+\frac{24}{256}+\frac{120}{3125}$; 6) $2+0+\frac{2}{9}+0+\frac{2}{25}$. **13.2.** 1) $\frac{1}{n^2}$; 2) $(-1)^{n-1}\frac{n}{n+1}$; 3) $\frac{n}{2^{n-1}}$; 4) $(-1)^{n-1}$; 5) $(-1)^{n-1}\frac{1}{n^n}$; 6) $(-1)^{n+1}\frac{\sqrt{n+1}}{(n+1)!}$. **13.4.** $S=1/2$. **13.5.** $S=11/18$. **13.6.** $S=2$. **13.7.** $S=3/2$. **13.16.** Сходится. **13.17.** Расходится. **13.18.** Сходится. **13.19.** Расходится. **13.20.** Расходится. **13.21.** Сходится. **13.22.** Сходится. **13.23.** Расходится. **13.25.** Сходится. **13.26.** Сходится. **13.27.** Сходится. **13.28.** Сходится. **13.29.** Сходится. **13.30.** Сходится. **13.31.** Расходится. **13.32.** Сходится. **13.33.** Сходится. **13.35.** Сходится. **13.36.** Расходится. **13.37.** Сходится. **13.38.** Расходится. **13.39.** Сходится. **13.40.** Сходится. **13.42.** Расходится. **13.43.** Сходится. **13.44.** Сходится. **13.45.** Расходится. **13.46.** Сходится. **13.47.** Сходится. **13.48.** Сходится. **13.49.** Расходится. **13.50.** Сходится. **13.51.** Сходится. **13.52.** Сходится. **13.53.** Расходится. **13.54.** Расходится. **13.55.** Сходится. **13.56.** Сходится. **13.57.** Сходится. **13.58.** Сходится. **13.59.** Расходится. **13.60.** Сходится. **13.61.** Сходится. **13.62.** Расходится. **13.63.** Расходится. **13.64.** Сходится. **13.65.** Сходится. **13.67.** Сходится. **13.68.** Сходится. **13.69.** Расходится. **13.70.** Сходится. **13.71.** Сходится. **13.72.** Расходится. **13.73.** Сходится. **13.75.** $\Delta S_3 < 0{,}000025$. **13.76.** 0,96. **13.77.** 5 членов. **13.79.** Сходится абсолютно. **13.80.** Сходится абсолютно. **13.81.** Сходится условно. **13.82.** Сходится абсолютно. **13.83.** Сходится абсолютно. **13.84.** Расходится. **13.85.** Расходится. **13.86.** Расходится. **13.87.** Сходится абсолютно. **13.88.** Сходится абсолютно. **13.89.** Сходится абсолютно. **13.91.** $x=0$. **13.92.** $-1<x\leqslant 1$. **13.93.** $1\leqslant x<3$. **13.94.** $-\infty<x<+\infty$. **13.95.** $-7<x<1$. **13.96.** $-2\leqslant x\leqslant 0$. **13.97.** $-1<x<1$. **13.98.** $1<x\leqslant 5$. **13.99.** $-0{,}1<x<0{,}1$. **13.100.** $-e\leqslant x\leqslant e$.

13.101. $-4 \leqslant x < 4$. **13.102.** $-2 < x < 2$. **13.107.** $e^{6x} = 1 + \frac{6x}{1!} + \frac{36x^2}{2!} + \ldots$ $\ldots + \frac{(6x)^n}{n!} + \ldots$; $-\infty < x < +\infty$. **13.108.** $e^{-x} = 1 - \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} - \ldots + (-1)^n \frac{x^n}{n!} + \ldots$; $-\infty < x < +\infty$. **13.109.** $\sin 3x = \frac{3x}{1!} - \frac{27x^3}{3!} + \ldots + (-1)^n \frac{(3x)^{2n+1}}{(2n+1)!} + \ldots$; $-\infty < x < +\infty$. **13.110.** $\cos \frac{x}{2} = 1 - \frac{x^2}{2^2 \cdot 2!} + \frac{x^4}{2^4 \cdot 4!} - \ldots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{2^{2n}(2n)!} + \ldots$; $-\infty < x < +\infty$. **13.111.** $\ln\left(1 - \frac{x}{3}\right) = -\frac{x}{3} - \frac{x^2}{3^2 \cdot 2} - \frac{x^3}{3^3 \cdot 3} - \ldots - \frac{x^n}{3^n n} + \ldots$; $-3 \leqslant x < 3$.
13.112. $\ln(1+4x) = 4x - \frac{16x^2}{2} + \frac{64x^3}{3} - \ldots + (-1)^{n-1} \frac{(4x)^n}{n} + \ldots$; $-1/4 < x \leqslant 1/4$.
13.113. $\frac{1}{(1+x)^2} = 1 - 2x + 3x^2 - 4x^3 + \ldots + (-1)^n (n+1) x^n + \ldots$; $-1 < x < 1$.
13.114. $\frac{1}{1-x^3} = 1 + x^3 + x^6 + \ldots + x^{3n} + \ldots$; $-1 < x < 1$. **13.115.** $\sqrt{1+x^3} = 1 + \frac{x^3}{2} - \frac{x^6}{2^2 \cdot 2!} + \frac{3x^9}{2^3 \cdot 3!} - \ldots$; $-1 < x < 1$. **13.116.** $\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = 1 + \frac{x^2}{2} + \frac{3x^4}{2^2 \cdot 2!} + \frac{3 \cdot 5x^6}{2^3 \cdot 3!} + \ldots$; $-1 < x < 1$. **13.117.** $\ln x = (x-1) - \frac{(x-1)^2}{2} + \frac{(x-1)^3}{3} - \ldots$ $\ldots + (-1)^{n-1} \frac{(x-1)^n}{n} + \ldots$. **13.118.** $\frac{1}{x} = -\frac{1}{2}\left[1 + \frac{x+2}{2} + \frac{(x+2)^2}{2^2} + \ldots\right.$ $\left.\ldots + \frac{(x+2)^n}{2^n} + \ldots\right]$. **13.119.** $\frac{1}{x^2} = 1 + 2(x+1) + 3(x+1)^2 + \ldots + (n+1)(x+1)^n + \ldots$.
13.120. $\frac{1}{x-2} = -\frac{1}{3}\left[1 + \frac{x-2}{3} + \frac{(x-2)^2}{3^2} + \ldots + \frac{(x-2)^n}{3^n} + \ldots\right]$. **13.121.** $e^{-3x} = e^{12}\left[1 - \frac{3}{1!}(x+4) + \frac{3^2}{2!}(x+4)^2 - \ldots + \frac{(-3)^n (x+4)^n}{n!} + \ldots\right]$. **13.122.** $\cos x = \frac{1}{\sqrt{2}}\left[1 - \left(x - \frac{\pi}{4}\right) - \frac{1}{2!}\left(x - \frac{\pi}{4}\right)^2 + \frac{1}{3!}\left(x - \frac{\pi}{4}\right)^3 + \frac{1}{4!}\left(x - \frac{\pi}{4}\right)^4 - \ldots\right]$.
13.124. $\arcsin x = x + \frac{1}{2} \cdot \frac{x^3}{3} + \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4} \cdot \frac{x^5}{5} + \ldots$; $-1 \leqslant x \leqslant 1$. **13.125.** $(1+x)\ln(1+x) = x + \frac{x^2}{1 \cdot 2} - \frac{x^3}{2 \cdot 3} + \frac{x^4}{3 \cdot 4} - \ldots$; $-1 < x \leqslant 1$. **13.126.** $(1+x^2)\operatorname{arctg} x = x + 2\left(\frac{x^3}{3} - \frac{x^5}{3 \cdot 5} + \frac{x^7}{5 \cdot 7} - \ldots\right)$; $-1 < x < 1$. **13.127.** $\ln(x + \sqrt{1+x^2}) = x - \frac{1}{2}\frac{x^3}{3} + \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4}\frac{x^5}{5} - \ldots$; $-1 \leqslant x \leqslant 1$. **13.128.** $\int\limits_0^x \frac{\sin x}{x}\,dx = x - \frac{x^3}{3 \cdot 3!} + \frac{x^5}{5 \cdot 5!} - \ldots$ $\ldots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)(2n+1)!} + \ldots$. **13.129.** $\int\limits_0^x \sqrt[3]{x} \cos x\,dx = 3\left(\frac{x^{4/3}}{4} - \frac{x^{10/3}}{10 \cdot 2!} + \frac{x^{16/3}}{16 \cdot 4!} - \ldots\right)$. **13.130.** $\int\limits_0^x e^{-x^2}\,dx = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5 \cdot 2!} - \frac{x^7}{7 \cdot 3!} + \ldots$.
13.131. $\int\limits_0^x \sqrt{x}\, e^x\,dx = 2\left(\frac{x^{3/2}}{3} + \frac{x^{5/2}}{5} + \frac{x^{7/2}}{7 \cdot 2!} + \frac{x^{9/2}}{9 \cdot 3!} + \ldots\right)$. **13.132.** $\int\limits_0^x \cos x^2\,dx = x - \frac{x^4}{5 \cdot 2!} + \frac{x^9}{9 \cdot 4!} - \frac{x^{13}}{13 \cdot 6!} + \ldots$. **13.133.** $\int\limits_0^x \sqrt{1-x^3}\,dx = x - \frac{x^4}{4 \cdot 2} - \frac{x^7}{7 \cdot 2^2 \cdot 2!} -$

$-\frac{3x^{10}}{10\cdot 2^3\cdot 3!}-\dots$ **13.136.** $\cos 20° \approx 0{,}939$; $\Delta S_2 < 0{,}01$. **13.137.** $\ln 1{,}2 \approx 0{,}183$; $\Delta S_3 < 0{,}001$. **13.138.** $\sqrt[3]{30} \approx 3{,}12$; $\Delta S_3 < 0{,}01$. **13.139.** $\sqrt[3]{e} \approx 1{,}39$. **13.140.** $\sin 12° \approx \approx 0{,}208$. **13.141.** $\cos 1° \approx 1{,}000$. **13.142.** $\sqrt[4]{80} \approx 2{,}991$. **13.144.** $\approx 0{,}748$. **13.145.** $\approx 0{,}440$. **13.146.** $\approx 0{,}2002$. **13.148.** 1/2. **13.149.** 1/6. **13.150.** —3. **13.156.** $f(x) \sim -\sin x+\frac{\sin 2x}{2}-\frac{\sin 3x}{3}+\dots$; $S(\pm\pi)=0$. **13.157.** $f(x)\sim\frac{\pi}{2}+ +\left(\sin x-\frac{\sin 2x}{2}+\frac{\sin 3x}{3}-\dots\right)$; $S(\pm\pi)=\frac{\pi}{2}$. **13.158.** $f(x)\sim\frac{4}{\pi}\left(\sin x+\frac{\sin 3x}{3}+ +\frac{\sin 5x}{5}+\dots\right)$; $S(\pm\pi)=0$, $S(0)=0$. **13.159.** $f(x)\sim\frac{\pi}{2}+\frac{4}{\pi}\left(\cos x+\frac{\cos 3x}{3^2}+ +\frac{\cos 5x}{5^2}+\dots\right)$; $S(\pm\pi)=0$. **13.160.** $f(x)\sim\frac{\pi}{4}+\frac{1}{2}-\frac{2}{\pi}\left(\cos x+\frac{\cos 3x}{3^2}+ +\frac{\cos 5x}{5^2}+\dots\right)+\frac{1}{\pi}\left(\frac{\pi-2}{1}\sin x-\frac{\pi}{2}\sin 2x+\frac{\pi-2}{3}\sin 3x-\frac{\pi}{4}\sin 4x+\dots\right)$; $S(\pm\pi)=\frac{\pi+1}{2}$, $S(0)=\frac{1}{2}$. **13.161.** $f(x)\sim\frac{\pi}{2}+\frac{2}{\pi}\left(\frac{\cos x}{1^2}+\frac{\cos 3x}{3^2}+\frac{\cos 5x}{5^2}+\dots\right)+ +\left(\frac{\sin 2x}{2}+\frac{\sin 4x}{4}+\frac{\sin 6x}{6}+\dots\right)$; $S(\pm\pi)=\frac{\pi}{4}$, $S(0)=\frac{3\pi}{4}$. **13.162.** $f(x)\sim\frac{5\pi}{4}- -\frac{10}{\pi}\left(\frac{\cos x}{1^2}+\frac{\cos 3x}{3^2}+\frac{\cos 5x}{5^2}+\dots\right)+\left(\frac{\sin x}{1}-\frac{\sin 2x}{2}+\frac{\sin 3x}{3}-\dots\right)$; $S(\pm\pi)= =\frac{5\pi}{2}$. **13.163.** $f(x)\sim-\frac{3\pi}{16}+\frac{1}{2}\left(\frac{\cos x}{\sqrt{2}}+\frac{\cos 2x}{2}+\frac{\cos 3x}{3\sqrt{2}}-\frac{\cos 5x}{5\sqrt{2}}-\frac{\cos 6x}{6}- -\frac{\cos 7x}{7\sqrt{2}}+\dots\right)$; $S(\pm\pi)=-\frac{\pi}{4}$, $S\left(\pm\frac{\pi}{4}\right)=-\frac{\pi}{4}$. **13.164.** $f(x)=\frac{\pi}{2}- -\frac{4}{\pi}\left(\frac{\cos x}{1^2}+\frac{\cos 3x}{3^2}+\frac{\cos 5x}{5^2}+\dots\right)$. **13.165.** $f(x)=\frac{4}{\pi}\left(\sin x+\frac{\sin 3x}{3}+ +\frac{\sin 5x}{5}+\dots\right)$. **13.166.** $f(x)=\frac{4}{\pi}\left(\frac{\sin x}{1^2-2^2}+\frac{3\sin 3x}{3^2-2^2}+\frac{5\sin 5x}{5^2-2^2}+\dots\right)$. **13.167.** $f(x)=\frac{4}{\pi}\left(\frac{\sin x}{1^2}-\frac{\sin 3x}{3^2}+\frac{\sin 5x}{5^2}-\dots\right)$. **13.168.** $f(x)=\frac{3}{4}+\frac{1}{\pi}\left(\cos x- -\frac{\cos 3x}{3}+\frac{\cos 5x}{5}-\dots\right)$. **13.169.** $f(x)=\frac{12}{\pi}\left[\frac{\sin(\pi x/2)}{1}-\frac{\sin \pi x}{2}+\frac{\sin(3\pi x/2)}{3}-\dots\right]$. **13.170.** $f(x)=2-\frac{16}{\pi^2}\left[\frac{\cos(\pi x/4)}{1^2}+\frac{\cos(3\pi x/4)}{3^2}+\frac{\cos(5\pi x/4)}{5^2}+\dots\right]$. **13.171.** $f(x)=\frac{1}{3}-\frac{4}{\pi^2}\left[\frac{\cos(\pi x/3)}{1^2}-\frac{\cos(2\pi x/3)}{2^2}+\frac{\cos \pi x}{3^2}-\dots\right]$. **13.172.** $f(x)=3- -\frac{4}{\pi}\left[\sin(\pi x/2)-\frac{\sin \pi x}{2}+\frac{\sin(3\pi x/2)}{3}-\dots\right]$. **13.173.** $f(x)=1-\frac{8}{\pi^2}\left[\frac{\cos(\pi x/4)}{1^2}+ +\frac{\cos(3\pi x/4)}{3^2}+\dots\right]+\frac{4}{\pi}\left[\frac{\sin(\pi x/4)}{1}-\frac{\sin(\pi x/2)}{2}+\dots\right]$. **13.174.** $f(x)=\frac{1}{2}+ +\frac{4}{\pi^2}\left(\frac{\cos \pi x}{1^2}+\frac{\cos 3\pi x}{3^2}+\frac{\cos 5\pi x}{5^2}+\dots\right)$. **13.175.** $f(x)=\frac{4}{\pi}\left[\frac{\sin(\pi x/2)}{1}+ +\frac{\sin(3\pi x/2)}{3}+\frac{\sin(5\pi x/2)}{5}+\dots\right]$. **13.176.** а) $f(x)=-\frac{8}{\pi^2}\left[\frac{\sin(\pi x/2)}{1^2}-\frac{\sin(3\pi x/2)}{3^2}+ +\frac{\sin(5\pi x/2)}{5^2}-\dots\right]$; б) $f(x)=-\frac{1}{2}+\frac{4}{\pi^2}\left[\frac{\cos \pi x}{1^2}+\frac{\cos 3\pi x}{3^2}+\frac{\cos 5\pi x}{5^2}+\dots\right]$. **13.177.** а) $f(x)\sim\frac{3\pi}{8}+\frac{2}{\pi}\left(\frac{\cos x}{1^2}-\frac{2\cos 2x}{2^2}+\frac{\cos 3x}{3^2}+\frac{\cos 5x}{5^2}-\frac{2\cos 6x}{6^2}+ +\frac{\cos 7x}{7^2}+\dots\right)$; б) $f(x)\sim\left(1+\frac{2}{\pi}\right)\sin x+\frac{1}{2}\sin 2x+\left(\frac{1}{3}-\frac{2}{9\pi}\right)\sin 3x+ +\frac{1}{4}\sin 4x+\left(\frac{1}{5}+\frac{2}{25\pi}\right)\sin 5x+\dots$.

14.4. 1) $-12/17$; 2) 6; 3) 5/3. **14.5.** 5; 1/5; 0; не существует; -1; 1; $(2a-1)/(a-2)$. **14.6.** $(x^2-y^2)/(2xy)$; $(y^2-x^2)/(2xy)$; $(x^2-y^2)/(2xy)$; $2xy/(y^2-x^2)$. **14.9.** 1) Вся плоскость xOy; 2) вся плоскость xOy, исключая точку (0; 0); 3) вся плоскость xOy, исключая прямую $y=3x$; 4) вся плоскость xOy, исключая две прямые $y=x$ и $y=-x$; 5) круг $x^2+y^2=4$ (вместе со своей границей); 6) внешняя часть круга $x^2+y^2=16$ (за исключением его границы); 7) часть плоскости xOy, лежащая выше прямой $y=-x$; 8) часть плоскости xOy, ограниченная эллипсом $x^2+2y^2=1$ (за исключением его границы); 9) полоса между параллельными прямыми $x+y=-1$ и $x+y=1$ (включая эти прямые); 10) кольцо между окружностями $x^2+y^2=1$ и $x^2+y^2=3$ (включая границы). **14.10.** $S=3\sqrt{(9-x)(9-y)(x+y-9)}$; область определения функции $0<x<9$, $0<y<9$, $x+y>9$, т. е. множество точек внутри треугольника, ограниченного прямыми $x=9$, $y=9$ и $x+y=9$. **14.13.** -2. **14.14.** 1/4. **14.15.** 1/6. **14.16.** 0. **14.17.** (0; 0); **14.18.** $(-1; 0)$. **14.19.** Прямая $y=x/2$. **14.20.** Прямые $y=x$ и $y=-x$. **14.21.** Парабола $y^2=-x$. **14.22.** Все точки плоскости xOy, принадлежащие II и IV четвертям, а также координатные оси $x=0$, $y=0$. **14.23.** Окружность $x^2+y^2=4$. **14.24.** Гипербола $x^2-y^2=3$. **14.29.** $z'_x=2x+5y$, $z'_y=5x-6y$. **14.30.** $z'_x=3x^2+6y^2-2y$, $z'_y=12xy-12y^2-2x$. **14.31.** $z'_x=\frac{1}{y}$, $z'_y=-\frac{x}{y^2}$. **14.32.** $z'_x=-\frac{5y}{(x+2y)^2}$, $z'_y=\frac{5x}{(x+2y)^2}$. **14.33.** $z'_x=\frac{x}{\sqrt{x^2-y^2}}$, $z'_y=-\frac{y}{\sqrt{x^2-y^2}}$. **14.34.** $z'_x=y^x\ln y$, $z'_y=xy^{x-1}$. **14.35.** $z'_x=y^2x^{y^2-1}$, $z'_y=2yx^{y^2}\ln x$.

14.36. $z'_x=\frac{y}{x^2}e^{-y/x}$, $z'_y=-\frac{1}{x}e^{-y/x}$. **14.37.** $z'_x=\frac{y}{x^2+y^2}$, $z'_y=-\frac{x}{x^2+y^2}$. **14.38.** $z'_x=\frac{y^2}{x^2+y^2}$, $z'_y=-\frac{xy}{(x^2+y^2)^{3/2}}$. **14.39.** $z'_x=-y^2e^{-xy}$, $z'_y=(1-xy)e^{-xy}$.

14.40. $z'_x=\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}$, $z'_y=\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}\,(x+\sqrt{x^2+y^2})}$. **14.41.** $\rho'_u=4u^3\cos^2\varphi$, $\rho'_\varphi=-u^4\sin 2\varphi$. **14.42.** $s'_x=\operatorname{ctg}(x-2t)$, $s'_t=-2\operatorname{ctg}(x-2t)$. **14.43.** $z'_x=\frac{1}{y\sqrt{x}\sin(2\sqrt{x}/y)}$, $z'_y=-\frac{2\sqrt{x}}{y^2\sin(2\sqrt{x}/y)}$. **14.44.** $z'_x=-e^{\arcsin\sqrt{y/x}}\frac{\sqrt{y}}{2x\sqrt{x-y}}$, $z'_y=e^{\arcsin\sqrt{y/x}}\frac{1}{2\sqrt{x-y}\sqrt{y}}$. **14.45.** $u'_x=y^2z^3$, $u'_y=2xyz^3$, $u'_z=3xy^2z^2$. **14.46.** $u'_x=\frac{x+z}{\sqrt{x^2+y^2-z^2+2zx}}$, $u'_y=\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2-z^2+2zx}}$, $u'_z=\frac{x-z}{\sqrt{x^2+y^2-z^2+2zx}}$. **14.47.** $u'_x=\frac{y^2+z^2}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}}$, $u'_y=-\frac{y}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}}$, $u'_z=-\frac{z}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}}$. **14.48.** $u'_x=-\frac{y}{x^2}+\frac{1}{z}$, $u'_y=\frac{1}{x}+\frac{z}{y^2}$, $u'_z=-\frac{1}{y}-\frac{x}{z^2}$.

14.49. $u'_x=\frac{1}{y}e^{x/y}$, $u'_y=-\frac{x}{y^2}e^{x/y}+\frac{z}{y^2}e^{-z/y}$, $u'_z=-\frac{1}{y}e^{-z/y}$. **14.50.** $u'_x=zy^{z^x}\ln y$, $u'_y=z^xy^{z^x-1}$, $u'_z=xy^{z^x}z^{x-1}\ln y$. **14.51.** $f'_x(-1, \pi/4)=-1$, $f'_y(-1, \pi/4)=1$. **14.52.** $f'_x(3, -4)=4/5$, $f'_y(-12, 5)=-12/13$. **14.53.** $f'_x(e, 1, -1)=-e^{-2}$, $f'_y(e, 1, -1)=-e^{-1}$, $f'_z(e, 1, -1)=-e^{-1}$. **14.59.** $dz=2xy^3\,dx+3x^2y^2\,dy$.

14.60. $dz=\frac{1}{\sqrt{x^2-y^2}}(x\,dx-y\,dy)$. **14.61.** $dz=\frac{1}{(y-x)^2}(y^2\,dx-x^2\,dy)$. **14.62.** $dz=e^{y^2-xy}[-y\,dx+(2y-x)\,dy]$. **14.63.** $dz=-\sin(xy)(y\,dx+x\,dy)$. **14.64.** $dz=$

$=\frac{dx}{1+x^2}+\frac{dy}{1+y^2}$. **14.65.** $du=2xyz^4\,dx+x^2z^4\,dy+4x^2yz^3\,dz$. **14.66.** $du=$ $=\frac{3x^2\,dx-3y^2\,dy+6z^2\,dz}{x^3-y^3+2z^3}$. **14.67.** $du=-\frac{y\,dx}{x^2z}+\frac{dy}{xz}-\frac{y\,dz}{xz^2}$. **14.68.** $du=y^z\,dx+$ $+xzy^{z-1}\,dy+xy^z\ln y\,dz$. **14.69.** 0,075. **14.70.** 4/3. **14.71.** $-0{,}1e^2\approx-0{,}739$. **14.72.** 0,004. **14.73.** 1,08. **14.74.** 10,05. **14.75.** 1,00. **14.76.** —0,03. **14.77.** 0,273. **14.78.** 3,037. **14.79.** $\Delta l\approx-1{,}2$ мм, $\Delta S\approx 400$ см^2. **14.80.** $\Delta V\approx-0{,}6\pi$ дм^3. **14.81.** $\Delta V\approx 3\pi$ см^3. **14.85.** $\frac{dz}{dt}=e^{\sin t-3t^2}(\cos t-6t)$. **14.86.** $\frac{dz}{dt}=-(e^t+e^{-t})$. **14.87.** $\frac{dz}{dt}=\frac{8t-3t^2}{\sqrt{1-(4t^2-t^3)^2}}$. **14.88.** 0. **14.89.** $\frac{dz}{dt}=\frac{8}{\sin 2t}$. **14.90.** $\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{e^x}{e^x+e^y}$, $\frac{dz}{dx}=\frac{e^x+2xe^{x^2}}{e^x+e^{x^2}}$. **14.91.** $\frac{\partial z}{\partial x}=yx^{y-1}$, $\frac{dz}{dx}=2x^{\ln x-1}\ln x$. **14.92.** $\frac{dz}{dx}=$ $=\frac{2x(3x+2)}{(x^2+3x+1)^2}$. **14.93.** $\frac{dz}{dx}=\frac{1}{x^2+1}$. **14.94.** $\frac{dz}{dx}=\frac{1}{x^2+1}-\frac{\sin x}{1+\cos^2 x}$. **14.95.** $\frac{dz}{dt}=$ $=(8t^3+6t^2-6t)\cos(2t^3-3t^2+2t^4)$. **14.96.** $\frac{du}{dx}=\frac{1}{\cos^2(x^2+4\sqrt{x}+1/x)}\times$ $\times\left(2x+\frac{2}{\sqrt{x}}+\frac{1}{x^2}\right)$. **14.97.** $\frac{du}{dx}=\frac{\partial u}{\partial x}-\frac{1}{x^2}\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{1}{x}\frac{\partial u}{\partial z}$. **14.98.** $\frac{\partial z}{\partial u}=4u$, $\frac{\partial z}{\partial v}=4v$. **14.99.** $\frac{\partial z}{\partial u}=\frac{2}{u}$, $\frac{\partial z}{\partial v}=\frac{2(v^4-1)}{v(v^4+1)}$. **14.100.** $\frac{\partial z}{\partial u}=3u^2\sin v\cos v\,(\cos v-\sin v)$, $\frac{\partial z}{\partial v}=u^3(\sin v+\cos v)(1-3\sin v\cos v)$. **14.101.** $\frac{\partial z}{\partial x}=0$, $\frac{\partial z}{\partial y}=1$. **14.102.** $\frac{\partial z}{\partial x}=$ $=2uf'_x(x,\ y)+ve^{uv}f'_y(x,\ y)$. **14.107.** $\frac{1+2t^3+3t^4}{\sqrt{1+t^2+t^4}}$. **14.110.** $\frac{dy}{dx}=\frac{3x^2y-y^3}{3xy^2-x^3}$. **14.111.** $\frac{dy}{dx}=-\frac{x}{y}$. **14.112.** $\frac{dy}{dx}=\frac{x^2+xy+y^2}{xy}$. **14.113.** $\frac{dy}{dx}=-\frac{b^2x}{a^2y}$. **14.114.** $\frac{dy}{dx}=$ $=\frac{yx^{y-1}-y^x\ln y}{xy^{x-1}-x^y\ln x}$. **14.115.** $\frac{dy}{dx}=\frac{e^x\sin y+e^y\sin x}{e^y\cos x-e^x\cos y}$. **14.116.** $\left.\frac{dy}{dx}\right|_{x=3}=-1$. **14.117.** $\left.\frac{dy}{dx}\right|_{x=0}=e^{-2}$. **14.118.** $\left.\frac{dy}{dx}\right|_{y=\pi/2}=-1$. **14.119.** $\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{1}{x+y+z-1}$. **14.120.** $\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{4-x}{z}$, $\frac{\partial z}{\partial y}=-\frac{y}{z}$. **14.121.** $\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{yz-x^2}{z^2-xy}$, $\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{xz-y^2}{z^2-xy}$. **14.122.** $\frac{\partial z}{\partial y}=$ $=-\frac{x\cos y+\sin x}{\sin x}$. **14.123.** $\frac{\partial z}{\partial x}=-\operatorname{tg} x$, $\frac{\partial z}{\partial y}=-\operatorname{tg} y$. **14.124.** $\left.\frac{\partial z}{\partial x}\right|_{x=1,\ z=2}=1$, $\left.\frac{\partial z}{\partial y}\right|_{x=1,\ z=2}=\frac{1}{4}$. **14.125.** $\left.\frac{\partial z}{\partial x}\right|_{x=0,\ y=1,\ z=1}=1$. **14.126.** —4/3. **14.127.** (2; 1) и (2; 2). **14.132.** $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=3x^2+6xy$, $\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=6x$, $\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=-12y$. **14.133.** $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=-\frac{y}{x^2}$, $\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=\frac{1}{x}$. **14.134.** $\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=\frac{xy}{(2xy+y^2)^{3/2}}$. **14.135.** $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=y(2-y^2)\cos(xy)-xy^2\sin(xy)$. **14.136.** $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=-\frac{4y}{(x+y)^3}$, $\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=\frac{2(x-y)}{(x+y)^3}$, $\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=\frac{4x}{(x+y)^3}$. **14.137.** $\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=$ $=-\frac{y}{(x^2+y^2)^{3/2}}$. **14.138.** $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=\frac{2xy}{(x^2+y^2)^2}$, $\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=\frac{y^2-x^2}{(x^2+y^2)^2}$, $\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=-\frac{2xy}{(x^2+y^2)^2}$. **14.139.** $\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=\frac{\cos y}{x}+\frac{e^x}{y}$, $\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=-\sin y\ln x-\frac{e^x}{y^2}$. **14.140.** $\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}=-\frac{1}{y^2}\left(\cos\frac{x}{y}-\right.$ $\left.-\frac{x}{y}\sin\frac{x}{y}\right)$, $\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial z}=2z$, $\frac{\partial^2 u}{\partial y\partial z}=0$. **14.141.** $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=\frac{y}{z^2}e^{x\sqrt{y/z}}$, $\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=$ $=-\frac{x}{4zy\sqrt{y}}e^{x\sqrt{y/z}}$, $\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}=\frac{x^2y}{2z^3}e^{x\sqrt{y/z}}$. **14.142.** $\frac{\partial^3 z}{\partial x^2\partial y}=\frac{2}{(x+y)^3}$. **14.143.** $\frac{\partial^3 z}{\partial x^3}=0$,

$\frac{\partial^3 z}{\partial x^2 \partial y}=0$, $\frac{\partial^3 z}{\partial x \partial y^2}=\frac{4}{9y^{7/3}}$, $\frac{\partial^3 z}{\partial y^3}=-\frac{28x}{27y^{10/3}}$. **14.144.** $\frac{\partial^3 z}{\partial x \partial y^2}=-x^2 y\cos(xy)-$ $-2x\sin(xy)$. **14.145.** $\frac{\partial^3 z}{\partial x^2 \partial y}=2y^3(2+xy^2)e^{xy^2}$, $\frac{\partial^3 z}{\partial x \partial y^2}=2(1+5xy^2+2x^2y^4)e^{xy^2}$. **14.146.** $\frac{\partial^3 u}{\partial x \partial y \partial z}=\frac{24x^3}{y^3z^4}$. **14.147.** $\frac{\partial^3 u}{\partial x \partial y \partial z}=(1+x^2y^2z^2\ln^2 3+3xyz\ln 3)\,3^{xyz}\ln 3$.

14.155. $z_{\min}=z(4,\ 0)=-18$. **14.156.** Нет экстремума. **14.157.** $z_{\min}=z(1,\ -1)=0$. **14.158.** $z_{\max}=z(0,\ 3)=9$. **14.159.** $z_{\max}=z(5/2,\ -1)=81/4$. **14.160.** Нет экстремума. **14.161.** $z_{\min}=z(\sqrt{3},\ -3)=-6\sqrt{3}$; $z_{\max}=z(-\sqrt{3},\ -3)=6\sqrt{3}$. **14.162.** $z_{\max}=z(-1,\ -1/2)=0$. **14.163.** $z_{\min}=z(0,\ 0)=4$. **14.164.** $z_{\min}=z(-2,\ 0)=$ $=-2/e$. **14.165.** $z_{\min}=z(0,\ 0)=3$. **14.166.** $z_{\max}=z(0,\ 2)=1$. **14.170.** $\min\limits_D z=$ $=z(-\sqrt{2},\ -\sqrt{2})=-2\sqrt{2}$; $\max\limits_D z=z(\sqrt{2},\ \sqrt{2})=2\sqrt{2}$. **14.171.** $\min\limits_D z=$ $=z(-\sqrt{2/3},\ -\sqrt{1/3})=z(\sqrt{2/3},\ -\sqrt{1/3})=-2/(3\sqrt{3})$; $\max\limits_D z=$ $=z(-\sqrt{2/3},\ \sqrt{1/3})=z(\sqrt{2/3},\ \sqrt{1/3})=2/(3\sqrt{3})$. **14.172.** $\min\limits_D z=$ $=z(-1/2,\ 1/6)=-1/3$; $\max\limits_D z=z(0,\ 1)=2$. **14.173.** $\min\limits_D z=z(3,\ 3)=-52$; $\max\limits_D z=z(0,\ 5)=z(5,\ 0)=100$. **14.174.** $\min\limits_D z=z(4,\ 2)=-64$, $\max\limits_D z=z(2,\ 1)=4$. **14.175.** $\min\limits_D z=z(3,\ -2)=-11$; $\max\limits_D z=z(1,\ 2)=9$. **14.177.** Куб с ребром $\sqrt[3]{V}$. **14.178.** Куб с ребром $\sqrt{S/6}$. **14.179.** В основании квадрат со стороной $\sqrt[3]{V}$, а высота равна $\sqrt[3]{V}/2$. **14.180.** Радиус основания равен 1 м, высота равна 2 м. **14.181.** Радиус основания равен $2/\sqrt[4]{3}$ м, высота равна $2\sqrt{2}/\sqrt[4]{3}$ м. **14.186.** 10/3. **14.187.** 26. **14.188.** 0,9. **14.189.** 15/4. **14.190.** 0,2. **14.191.** 15. **14.192.** 16. **14.193.** 5/2. **14.194.** ln (25/24). **14.195.** 0. **14.196.** 9. **14.197.** 8/63. **14.198.** 7/3. **14.199.** 9/4. **14.200.** 8/15. **14.201.** 9/4. **14.202.** 30. **14.203.** 27. **14.204.** 3. **14.205.** 7/3.

14.206. 52/81. **14.207.** $\int\limits_2^4 dy\int\limits_y^4 f(x,\ y)\,dx$. **14.208.** $\int\limits_0^1 dx\int\limits_{x^2}^{x} f(x,\ y)\,dy$. **14.209.** $\int\limits_0^9 dy\int\limits_0^{\sqrt{9-y}} f(x,\ y)\,dx$. **14.210.** $\int\limits_0^1 dy\int\limits_{e^y}^{e} f(x,\ y)\,dx$. **14.211.** $\int\limits_0^4 dx\int\limits_0^x f(x,\ y)\,dy+$ $+\int\limits_4^8 dx\int\limits_0^{8-x} f(x,\ y)\,dy$. **14.212.** $\int\limits_0^1 dy\int\limits_0^{\sqrt{y}} f(x,\ y)\,dx+\int\limits_1^2 dy\int\limits_0^{2-y} f(x,\ y)\,dx$. **14.213.** $\int\limits_1^3 dy\int\limits_1^y f(x,\ y)\,dx+\int\limits_3^9 dy\int\limits_{y/3}^3 f(x,\ y)\,dx$. **14.214.** $\int\limits_{1/2}^1 dx\int\limits_{1/x}^2 f(x,\ y)\,dy+$ $+\int\limits_1^2 dx\int\limits_x^2 f(x,\ y)\,dy$. **14.215.** $\int\limits_0^4 dy\int\limits_0^{\sqrt{y}} f(x,\ y)\,dx+\int\limits_4^8 dy\int\limits_0^{\sqrt{8-y}} f(x,\ y)\,dx$. **14.216.** $\int\limits_0^1 dy\int\limits_{-\sqrt{1-y^2}}^{\sqrt{1-y^2}} f(x,\ y)\,dx$. **14.217.** $\int\limits_0^{\sqrt{3}} dy\int\limits_0^{y\sqrt{3}/3} f(x,\ y)\,dx+$ $+\int\limits_{\sqrt{3}}^2 dy\int\limits_0^{\sqrt{4-y^2}} f(x,\ y)\,dx$. **14.218.** $\int\limits_0^2 dx\int\limits_0^{\sqrt{2x}} f(x,\ y)\,dy+\int\limits_2^{2\sqrt{2}} dx\int\limits_0^{\sqrt{8-x^2}} f(x,\ y)\,dy$.

14.220. $\int\limits_0^{2\pi} d\varphi \int\limits_0^{3} \rho f(\rho\cos\varphi,\ \rho\sin\varphi)\, d\rho$. 14.221. $\int\limits_0^{\pi} d\varphi \int\limits_0^{1} \rho f(\rho\cos\varphi, \rho\sin\varphi)\, d\rho$.

14.222. $\int\limits_{\pi/4}^{\pi/3} d\varphi \int\limits_0^{2} \rho f(\rho\cos\varphi,\ \rho\sin\varphi)\, d\rho$. 14.223. $\int\limits_0^{2\pi} d\varphi \int\limits_2^{5} \rho f(\rho\cos\varphi,\ \rho\sin\varphi)\, d\rho$.

14.224. $\int\limits_{-\pi/2}^{\pi/2} d\varphi \int\limits_0^{2\cos\varphi} \rho f(\rho\cos\varphi, \rho\sin\varphi)\, d\rho$. 14.225. $\int\limits_0^{\pi} d\varphi \int\limits_0^{4\sin\varphi} \rho f(\rho\cos\varphi, \rho\sin\varphi)\, d\rho$.

14.226. $9\pi/2$. 14.227. $1/2$. 14.228. 2π. 14.229. $(\pi/2)\ln 2$. 14.230. 24π. 14.231. $\pi/18$. 14.232. $\pi(1-e^{-4})$. 14.233. $4\pi^4a^3/3$. 14.234. $4a^3/3$. 14.237. 28 кв. ед. 14.238. $13{,}5-9\ln 2$ кв. ед. 14.239. $32/3$ кв. ед. 14.240. $125/6$ кв. ед. 14.241. $2/3$ кв. ед. 14.242. $2/3$ кв. ед. 14.243. 2 кв. ед. 14.244. $1/2-1/e$ кв. ед. 14.245. $\sqrt{2}-1$ кв. ед. 14.246. 3,5 кв. ед. 14.247. $31/6$ кв. ед. 14.248. $\pi/6$ кв. ед. 14.249. $9\pi/4$ кв. ед. 14.250. $3\pi a^2/2$ кв. ед. 14.251. 4π кв. ед. 14.252. $\pi/4-1/2$ кв. ед. 14.253. 3π кв. ед. 14.257. 6 куб. ед. 14.258. 6,4 куб. ед. 14.259. 13,5 куб. ед. 14.260. 3π куб. ед. 14.261. $\pi/4$ куб. ед. 14.262. $1/6$ куб. ед. 14.263. 144 куб. ед. 14.264. $8\pi/3$ куб. ед. 14.265. 90 куб. ед. 14.266. $\pi/48$ куб. ед. 14.267. $3\pi/2$ куб. ед. 14.268. $4\pi\sqrt{3}$ куб. ед. 14.269. $32/9$ куб. ед. 14.270. 3π куб. ед. 14.271. $19\pi/6$ куб. ед. 14.273. 14 кв. ед. 14.274. 13 кв. ед. 14.275. $8(2\sqrt{2}-1)/3$ кв. ед. 14.276. 72 кв. ед. 14.277. $14\pi/3$ кв. ед. 14.278. $\pi\sqrt{2}$ кв. ед. 14.279. $8(\pi-2)$ кв. ед. 14.280. $52\pi/3$ кв. ед. 14.281. $4\pi(2-\sqrt{2})$ кв. ед. 14.282. $2\pi(3-\sqrt{3})$ кв. ед. 14.285. $2ka^4/3$. 14.286. $ka^3/3$. 14.287. $k\pi r^4/2$. 14.288. $2r^3/3$. 14.289. $ab^3/12$ и $a^2b^2/24$. 14.290. $\overline{x}=\overline{y}=9/20$. 14.291. $\overline{x}=1$, $\overline{y}=4/(3\pi)$. 14.292. $\overline{x}=\overline{y}=2a/5$. 14.293. $\overline{x}=7/3$, $\overline{y}=0$. 14.294. $\overline{x}=0$, $\overline{y}=a/2$; $ka^5/10$. 14.295. 406. 14.296. 2,4. 14.297. а) $ab(a^2+b^2)/12$; б) $ab^3/12$. 14.298. $5\pi r^4/4$. 14.299. $21\pi a^4/32$. 14.301. 108. 14.302. $40/3$. 14.303. $4/3$. 14.304. $7/192$. 14.305. $abc(a^2+a^2+c^2)/3$. 14.306. $1/3$. 14.307. 30. 14.308. 54. 14.309. $1/720$. 14.310. $1/364$. 14.311. $(4\ln 2-1)/8$. 14.313. 50π. 14.314. $162\pi/5$. 14.315. $\pi\ln 2$.

14.316. $7\pi/2$. 14.319. $\int\limits_0^{2\pi} d\varphi \int\limits_0^{2} \rho\, d\rho \int\limits_0^{3} f(\rho\cos\varphi,\ \rho\sin\varphi,\ z)\, dz$.

14.320. $\int\limits_0^{2\pi} d\varphi \int\limits_0^{2\sqrt{2}} \rho\, d\rho \int\limits_1^{9-\rho^2} f(\rho\cos\varphi,\ \rho\sin\varphi,\ z)\, dz$.

14.321. $\int\limits_0^{2\pi} d\varphi \int\limits_0^{3} \rho\, d\rho \int\limits_\rho^{3} f(\rho\cos\varphi,\ \rho\sin\varphi,\ z)\, dz$.

14.322. $\int\limits_{-\pi/2}^{\pi/2} d\varphi \int\limits_0^{2\cos\varphi} \rho\, d\rho \int\limits_0^{\rho^2} f(\rho\cos\varphi,\ \rho\sin\varphi,\ z)\, dz$.

14.323. $\int\limits_0^{\pi/2} d\varphi \int\limits_0^{\pi/2} \sin\theta\, d\theta \int\limits_0^{5} f(r\cos\varphi\sin\theta,\ r\sin\varphi\sin\theta,\ r\cos\theta)\, r^2\, dr$.

14.324. $\int\limits_0^{2\pi} d\varphi \int\limits_0^{\pi} \sin\theta\, d\theta \int\limits_3^{4} f(r\cos\varphi\sin\theta,\ r\sin\varphi\sin\theta,\ r\cos\theta)\, r^2\, dr$.

14.325. $\int\limits_0^{2\pi} d\varphi \int\limits_0^{\pi/3} \sin\theta\, d\theta \int\limits_0^{3} f(r\cos\varphi\sin\theta,\ r\sin\varphi\sin\theta,\ r\cos\theta)\, r^2\, dr$.

14.326. $\int\limits_0^{2\pi} d\varphi \int\limits_0^{2} \rho\, d\rho \int\limits_{\rho}^{4-\rho^2/2} f(\rho\cos\varphi, \rho\sin\varphi, z)\, dz$.

14.327. $\int\limits_0^{2\pi} d\varphi \int\limits_0^{2\sqrt{3}} \rho\, d\rho \int\limits_{\rho^2/6}^{\sqrt{16-\rho^2}} f(\rho\cos\varphi, \rho\sin\varphi, z)\, dz$.

14.328. $\int\limits_0^{2\pi} d\varphi \int\limits_0^{1} \rho\, d\rho \int\limits_{\rho}^{1+\sqrt{1-\rho^2}} f(\rho\cos\varphi, \rho\sin\varphi, z)\, dz$. 14.329. $324\pi/5$. 14.330. 16.

14.331. 4π. 14.332. $16\pi/3$. 14.333. 24π. 14.334. $243(2-\sqrt{2})\pi/5$. 14.337. 4,5 куб. ед. 14.338. 8 куб. ед. 14.339. 3,4 куб. ед. 14.340. 12 куб. ед. 14.341. 4 куб. ед. 14.342. 8π куб. ед. 14.343. 2π куб. ед. 14.344. $\pi/6$ куб. ед. 14.345. 16π куб. ед. 14.346. $16\pi/3$ куб. ед. 14.347. 12π куб. ед. 14.348. $32/9$ куб. ед. 14.349. $16(3\pi-4)/9$ куб. ед. 14.350. $19\pi/6$ куб. ед. 14.351. $18\pi\sqrt{2}$ куб. ед. 14.352. π куб. ед. 14.355. $3a^4/2$. 14.356. $8\sqrt{2}/35$. 14.357. $24k\pi$. 14.358. $\pi r^2H^2/4$. 14.359. $M_{xy}=M_{xz}=4/15$, $M_{yz}=8/15$. 14.360. $\bar{x}=\bar{y}=3$, $\bar{z}=45/32$. 14.361. $\bar{x}=\bar{y}=0$, $\bar{z}=5(6\sqrt{3}+5)/83$. 14.362. $\bar{x}=\bar{y}=0$, $\bar{z}=4/5$. 14.363. $\bar{x}=\bar{y}=0$, $\bar{z}=(6+3\sqrt{2})/4$. 14.364. $\pi r^2H(3r^2+4H^2)/12$. 14.365. $584/15$. 14.366. $I_x=I_y=I_z=1/30$; $I_O=1/20$. 14.367. $2(2-\sqrt{2})\pi/5$.

Глава 15

15.5. 1) Да; 2) нет; 3) да; 4) нет. 15.6. 1) Да; 2) нет. 15.9. $v=-\sin u$. 15.10. $y=-x^3$, $y=-x^3+1$, $y=-x^3+3$. 15.11. $y=1/\sqrt{x}$, $y=-1+1/\sqrt{x}$, $y=-1/3+1/\sqrt{x}$. 15.13. $1/(y-1)+1/[2(x-1)^2]=C$. 15.14. $\ln(4+x^2)+\sqrt{9-y^2}=C$. 15.15. $\sin x\cos y=C$. 15.16. $\ln^2 x-\operatorname{ctg}^2 y=C$. 15.17. $\ln|xy|+(y-x)/(xy)=C$. 15.18. $x+e^{-x}+e^y+(1/2)e^{2y}=C$. 15.19. $r=C\sin\varphi+1/(C\sin\varphi)$. 15.20. $\operatorname{tg}x=C\operatorname{ctg}y$. 15.21. $y-\sqrt{x}+C=\ln|y|$. 15.22. $y=C\sqrt{1+x^2}/(x+\sqrt{1+x^2})$. 15.23. $y=e^{C\arcsin x}$. 15.24. $y-\operatorname{arcctg}y+C=0{,}5\ln|(1-x)^3/(1+x)|$. 15.26. $y=\sqrt{\ln^3|1-x^2|}$. 15.27. $\operatorname{arctg}(x/2)=\ln^2 y+\pi/4$. 15.28. $\operatorname{tg}y=1-x+\operatorname{tg}x$. 15.29. $y=e^x(x-2)$. 15.30. $\ln(\sqrt{x}+1)=-\sqrt{1-y}$. 15.31. $3^{-x^2}+3^{2y}=10$. 15.33. $y=e^x-3$. 15.34. $y^2=16x$. 15.35. $y=k\ln|x|+C$. 15.36. $y=1/x$. 15.38. $\approx 4{,}4$ км/ч. 15.39. $s=25\cdot 3^{t/5}$, где t — время, а s — пройденный телом путь. 15.40. За 30 мин. 15.41. $\approx 1{,}9$ кг. 15.42. $\approx 4{,}2\%$. 15.43. $\approx 44\%$. 15.44. 5 мин. 53 с. 15.46. $y=2x(C+\ln|x|)$. 15.47. $x^5=C(4y+x)$. 15.48. $x(x+3y)^2=C$. 15.49. $y=Ce^{-y/x}$. 15.50. $y=-x(1+\ln^{-1}|Cx|)$. 15.51. $x=Ce^{x/(2x-y)}$. 15.52. $Cx^4=(y-3x)/(y+x)$. 15.53. $x^2+y^2=Cx^2y^2$. 15.54. $x^3=Ce^{\operatorname{arctg}[y/(3x)]}$. 15.55. $y=Cx^2/2-1/C$. 15.56. $y=xe^{Cx^2+1}$. 15.57. $\ln|Cx|=-e^{x/y}$. 15.58. $\ln|Cx|=-\cos(y/x)$. 15.59. $x=C\sin(y/x)$. 15.60. $y=x-2x^3$. 15.61. $2-\ln|x|=(2/5)\sqrt{y/x}$. 15.62. $x=3e^{\operatorname{tg}(y/x)}$. 15.63. $x-2=\ln(y/x)$. 15.64. $\ln|x|=-e^{-y/x}$. 15.65. $y=3x^2-2x$. 15.66. $x^2=2Cy+C^2$. 15.67. $y=x/(1-x)$. 15.68. $y=1-x^2/4$. 15.70. $y=x(C+3x)$. 15.71. $y=C/x^4-x^2/6$. 15.72. $y=(C+x)/x^2$. 15.73. $y=Ce^{7x}-2e^{3x}$. 15.74. $y=C\sqrt{x^2+1}+x^2+1$. 15.75. $y=e^{2\sqrt{x}}(C+x)$. 15.76. $y=(1/\cos x)[C+x/2+(1/4)\sin 2x]$. 15.77. $y=(C+5x)/(\ln x)$. 15.78. $y=Ce^{-\operatorname{tg}x}+\operatorname{tg}x-1$. 15.79. $y=\sqrt{x^2+4}[C+(1/2)\operatorname{arctg}(x/2)]$. 15.80. $x=(C+y^4)/y^5$. 15.81. $x=e^{-1/y}(C+y)$. 15.82. $y=(1/2)x^2e^{-3x}$. 15.83. $y=(\arcsin x)/\sqrt{1-x^2}$. 15.84. $y=e^{-e^x}+e^x-1$. 15.85. $y=x^3+x^2+x+1$. 15.86. $y=x(2-\cos x)$. 15.87. $y=\ln x\cdot\ln|\ln x|$. 15.88. $y=3\sqrt{x}-x$. 15.89. $x=Cy+1/y$. 15.90. $y=-x^2$. 15.91. $\approx 2{,}65$ А. 15.93. $x^2y-3x+y=C$. 15.94. $x^2y^3+4xy=C$. 15.95. $x^2/2-x\cos y+\sin y=C$. 15.96. $xy^2-e^x\cos y=C$. 15.97. $x^3/3-e^xy+xy+y^2=C$.

15.98. $x^2\ln y-\operatorname{tg}x+\cos y=C$. 15.99. $y/x+xy^3-\sqrt{1-y^2}=C$. 15.100. $\operatorname{arctg}(y/x)+xy-\ln|y|=C$. 15.101. $x^3e^y-ye^{-x}+\ln|\sin y|=C$. 15.102. $\sqrt{x}\,e^{y^2}+\arcsin(y/3)=C$. 15.103. $x^3y^2+\cos y=e^{xy}$. 15.105. $\mu=1/x^2$; $y^2=x(3\ln|x|+C)$. 15.106. $\mu=y$; $10x^2y^2+y^5=C$. 15.107. $\mu=1/x$; $xy-4\ln|x|=C$. 15.108. $\mu=1/x$; $6\ln|x|-y^3/x=C$. 15.109. $\mu=1/\sqrt{y}$; $x\sqrt{y}+y^3\sqrt{y}=C$. 15.110. $\mu=1/\sqrt{1-x^2}$; $xy^2-\sqrt{1-x^2}=C$. 15.111. $\mu=1/\sin^2 y$; $x^2/\sin y+\ln|\operatorname{tg}(y/2)|=C$. 15.112. $\mu=e^{-x}$; $y=C+e^{-x}\cos y$. 15.113. $\mu=e^x$; $e^x(x\sin y+y\cos y-\sin y)=C$. 15.116. $x=C/p^2+2p/3$, $y=2C/p+p^2/3$. 15.117. $x=C/\sqrt{p}+2p/3$, $y=-C\sqrt{p}+p^2/3$. 15.118. $x=Ce^{-p}+2p-2$, $y=C(p+1)e^{-p}+p^2-2$. 15.119. $x=C/(p-1)^2+2p+1$, $y=Cp^2/(p-1)^2+p^2$, $y=0$, $y=x-2$ — особые решения. 15.120. $x=C/p^2+1/p$, $y=2+2C/p-\ln p$. 15.121. $x=C/p^2$, $y=C(1+2/p)$, $y=-x$ — особое решение. 15.122. $y=Cx-C^2$, $y^2=x^2/4$ — особое решение. 15.123. $y=Cx+3C$, особых решений нет. 15.124. $y=Cx+1/C$, $y^2=36x$ — особое решение. 15.125. $y=Cx+\sqrt{1-C^2}$, $y^2-x^2=1$ — особое решение. 15.126. $y=Cx+C^2+1$, $y=1-x^2/4$ — особое решение. 15.127. $y=Cx-\ln C$, $y=1+\ln x$ — особое решение. 15.128. $y=Cx+C-C^2$, $y=(x+1)^2/4$ — особое решение. 15.129. $y=Cx+1/(2C^2)$, $y=3\sqrt[3]{x^2}/2$ — особое решение. 15.130. $(y-x-2a)^2=8ax$. 15.131. $xy=a^2$. 15.132. $y=C(4-x^2)$. 15.133. $x\ln|Cx|=-2\sqrt{xy}$. 15.134. $x^3y-y^2=C$. 15.135. $y=Cx^4-1/x$. 15.136. $y^2/2-1/x-xy=C$. 15.137. $x=(C+2\ln p)/\sqrt{p}$, $y=\sqrt{p}(8-2\ln p-C)$, $y=0$ — особое решение. 15.138. $y=Cx+8\sqrt{C}$, $y=-16/x$ $(x<0)$ — особое решение. 15.139. $Cx=\ln(y/x)+4$. 15.140. $y=(C+x)\operatorname{tg}(x/2)$. 15.141. $1/x+1/y+\ln|y/x|=C$. 15.142. $y^2\cos^2 x-\sin y=0$. 15.143. $x=Ce^y-0{,}5(\sin y+\cos y)$. 15.144. $y^2=x^2(C-2y)$. 15.145. $y=x(C+\ln|\cos x|)$. 15.146. $y=Cx+\sqrt{1+C^2}$, $x^2+y^2=1$ — особое решение. 15.147. $x=C-2p-\ln|p-1|$, $y=C-p^2-p-\ln|p-1|$. 15.148. $\arcsin(y/x)=\ln|Cx|$. 15.149. $y=(C+\ln|x+\sqrt{1+x^2}|)/\sqrt{1+x^2}$. 15.150. $x(e^y-xy)=C$. 15.151. $x=C/\sqrt{p}-1/p$, $y=1+\ln p-C\sqrt{p}$. 15.152. $\sqrt{x}-\sqrt{y+x}=C$. 15.153. $x=e^{-y^2/2}(C+y)$. 15.154. $2\cos x+\ln|\operatorname{tg}(y/2)|=C$. 15.155. $y=x(C+\ln|x|)$. 15.156. $y=Cx+\sqrt{9+4C^2}$, $x^2/4+y^2/9=1$ — особое решение. 15.157. $y=Cx^2+1/C$, $y=\pm 2x$ — особое решение. 15.158. $e^{-y^2/(2x^2)}=Cx$. 15.159. $y=C\sqrt{1+x^2}/(x+\sqrt{1+x^2})$. 15.160. $Cx-x^2=\sin^2 y$. 15.161. $\operatorname{arctg}(x/y)+e^{-y}=C$. 15.162. $y\sin x+x\ln y=C$. 15.163. $y=Cx-1/C^2$, $y^3=-27x^2/4$ — особое решение. 15.164. $y=(C+3x^3\ln x-x^3)/\ln x$. 15.165. $\sqrt{x^2+y^2}=Ce^{(y/x)\operatorname{arctg}(y/x)}$. 15.166. $\sqrt{1-x^2}=e^{3-\sqrt{1+y^2}}$. 15.167. $1+\ln|x|=e^{-y/x}$. 15.168. $3x^2-y^2=2x$. 15.169. $2y^2-xy+x^3-2=0$. 15.170. $y=3\cos x+\sin x$. 15.171. $x=4e^{\operatorname{tg}(y/x)-1}$. 15.172. $xy-\sqrt{1-y^2}=1$. 15.173. $\ln|x^3+2|=\operatorname{arctg}(y/3)$. 15.174. $xe^{-y}-y^2=5$. 15.175. $y=x^2e^{6x}$. 15.176. $x=e^{x/(x-y)}$. 15.178. $y=(-1/4)\sin 2x+C_1x+C_2$. 15.179. $y=-64e^{-x/4}+C_1x^2+C_2x+C_3$. 15.180. $r=\varphi^6/6-\varphi^5/10+\varphi^4/12+C_1\varphi+C_2$. 15.181. $s=C_1t^2+C_2t+C_3$. 15.182. $y=(1/2)x^2\ln x-(3/4)x^2+C_1x+C_2$. 15.183. $y=-2\ln|x|+C_1x+C_2$. 15.184. $y=C_1x^2+C_2$. 15.185. $y=C_1(x-e^{-x})+C_2$. 15.186. $y=(1/2)\ln^2|x|+C_1\ln|x|+C_2$. 15.187. $y=C_2+C_1\sin x-x-(1/2)\sin 2x$. 15.188. $y=[2/(3C_1)]\sqrt{(C_1x-1)^3}+C_2$. 15.189. $C_1^2y=(C_1x^2+1)\operatorname{arctg}C_1x-C_1x+C_2$. 15.190. $y=(C_1x+C_2)^2$. 15.191. $(1/3)\ln|3y+4|=C_1x+C_2$. 15.192. $x=(1/C_1)\ln|y/(y+C_1)|+C_2$. 15.193. $(C_1x+C_2)^2=C_1y^2-8$. 15.194. $x=(1/2)\sqrt{y^2+C_1}+C_2$. 15.195. $x+C_2=\pm\ln\left|y+C_1+\sqrt{y^2+2C_1y}\right|$. 15.197. $y=1/3-(1/9)\sin 3x$. 15.198. $y=(-1/8)e^{-2x}+x^2/2+1$. 15.199. $y=x\ln|x|+x-1$. 15.200. $y=x^2/4+x+1-(1/8)\cos 2x$. 15.201. $y=x^4/8-x^3/6+x^2/2-x$. 15.202. $x=y+\ln|y|-1$. 15.203. $y=x^3/3+x-1$. 15.204. $y=1+\sin x$. 15.205. $y=x^4/4-x^5/20-x+1$. 15.206. $s=5t^4/12-t^3/2+t/2$. 15.207. 63 м. 15.208. $t\approx 8$ с, $s\approx 104$ м. 15.213. $y=C_1e^{-3x}+C_2e^{4x}$. 15.214. $y=C_1e^{-x}+C_2e^{-6x}$. 15.215. $y=(C_1+C_2x)e^{-2x}$. 15.216. $y=e^{2x}(C_1\cos 3x+C_2\sin 3x)$. 15.217. $y=C_1+C_2e^{-8x}$. 15.218. $y=C_1\cos 5x+C_2\sin 5x$. 15.219. $y=C_1e^{-x}+C_2e^x+C_3e^{2x}$. 15.220. $y=C_1+C_2e^{-5x}+C_3e^{3x}$. 15.221. $y=C_1+(C_2+C_3x)e^{4x}$. 15.222. $y=(C_1+C_2x)e^{-x}+C_3e^{3x}$. 15.223. $y=(C_1+C_2x+C_3x^2)e^x$. 15.224. $y=C_1+$

$+C_2\cos 8x+C_3\sin 8x$. **15.225.** $y=C_1e^{-6x}+C_2e^{6x}+C_3\cos 6x+C_4\sin 6x$. **15.226.** $y=C_1+C_2x+(C_3\cos x+C_4\sin x)\,e^{2x}$. **15.227.** $y=C_1+C_2e^{x}+C_3\cos x+C_4\sin x$. **15.228.** $y=(C_1+C_2x)\cos 3x+(C_3+C_4x)\sin 3x$. **15.229.** $y=C_1+C_2x+C_3x^2+C_4e^{-2x}+C_5e^{2x}$. **15.230.** $y=C_1+C_2e^{-3x}+C_3e^{3x}+C_4\cos 3x+C_5\sin 3x$. **15.236.** $y=e^{-x}(C_1\cos 2x+C_2\sin 2x)+(Ax^2+Bx+C)\,e^{-2x}$. **15.237.** $y=C_1e^{-3x}+C_2e^{-x}+(Ax^2+Bx)\,e^{-3x}$. **15.238.** $y=C_1+C_2e^{8x}+Ax^4+Bx^3+Cx^2+Dx$. **15.239.** $y=(C_1+C_2x)\,e^{5x}+(Ax^3+Bx^2+Cx)\,e^{5x}$. **15.240.** $y=e^{x}(C_1\cos 3x+C_2\sin 3x)+e^{x}[(Ax+B)\cos 2x+(Cx+D)\sin 2x]$. **15.241.** $y=C_1\cos 4x+C_2\sin 4x+(Ax^3+Bx^2+Cx)\cos 4x+(Dx^3+Ex^2+Fx)\sin 4x$. **15.242.** $y=e^{3x}(C_1\cos 2x+C_2\sin 2x)+e^{3x}(Ax\cos 2x+Bx\sin 2x)$. **15.243.** $y=C_1+C_2e^{-10x}+Ax^3+Bx^2+Cx+e^{-10x}[(Dx+E)\cos x+(Fx+G)\sin x]$. **15.244.** $y=C_1e^{-6x}+C_2e^{6x}+(Ax^2+Bx)\,e^{-6x}+C\cos 6x+D\sin 6x$. **15.245.** $y=e^{-3x}(C_1\cos 4x+C_2\sin 4x)+e^{-3x}(Ax\cos 4x+Bx\sin 4x)+(Cx+D)\cos 4x+(Ex+F)\sin 4x$. **15.246.** $y=C_1e^{2x}+C_2e^{-5x}-x^2-x$. **15.247.** $y=C_1e^{-x}+C_2e^{5x}+(x-1)\,e^{-4x}$. **15.248.** $y=C_1e^{x}+C_2e^{3x}+5xe^{3x}$. **15.249.** $y=C_1+C_2e^{-4x}+(x^2/4+x/8)\,e^{-4x}$. **15.250.** $y=C_1\cos 4x+C_2\sin 4x+(2x+1)\,e^{-x}$. **15.251.** $y=e^{-2x}(C_1+C_2x)+(1/2)\,x^3e^{-2x}$. **15.252.** $y=C_1+C_2e^{-5x}+\sin 5x-\cos 5x$. **15.253.** $y=e^{2x}(C_1\cos x+C_2\sin x)+\cos x+(1/2)\sin x$. **15.254.** $y=C_1\cos 2x+C_2\sin 2x+(3/2)\,x\cos 2x+(5/2)\,x\sin 2x$. **15.255.** $y=C_1e^{-2x}+C_2e^{2x}-e^{2x}(2\cos 2x+\sin 2x)/20$. **15.256.** $y=e^{x}(C_1\cos x+C_2\sin x)-(1/2)\,xe^{x}\cos x$. **15.257.** $y=C_1+C_2e^{3x}+(1/3)\,xe^{3x}-2x^2+x$. **15.258.** $y=C_1\cos x+C_2\sin x+(1/2)\,x\sin x-(1/3)\cos 2x$. **15.259.** $y=-\cos 2x+\sin 2x+(3x/4+1)\,e^{-2x}$. **15.260.** $y=(1/3)\,e^{-4x}-(1/3)\,e^{2x}+(x^2+3x)\,e^{2x}$. **15.261.** $y=e^{x}(-6\cos 3x+\sin 3x)+12\cos 3x+2\sin 3x$. **15.262.** $y=-3\cos x+\pi\sin x+x(4\cos x-3\sin x)$. **15.263.** $y=e^{2x}(\cos 3x-\sin 3x+(1/6)\,x\sin 3x)$. **15.265.** $y=C_1\cos x+C_2\sin x+x\sin x+\cos x\ln|\cos x|$. **15.266.** $y=C_1\cos x+C_2\sin x+\sin x\ln|\operatorname{tg}(x/2)|$. **15.267.** $y=C_1e^{x}+C_2e^{-x}+(1/2)\,[(e^{x}+e^{-x})\ln(e^{x}+1)-(xe^{x}+1)]$. **15.268.** $y=C_1e^{x}+C_2xe^{x}+xe^{x}\ln|x|$. **15.269.** $y=C_1\cos 3x+C_2\sin 3x-(1/9)\,x\cos 3x+(1/9)\sin 3x\ln|\sin 3x|$. **15.270.** $y=C_1e^{-x}+C_2xe^{-x}+xe^{-x}\ln|x|$. **15.271.** $y=C_1\cos 2x+C_2\sin 2x-\cos 2x\ln|\sin x|-[x+(1/2)\operatorname{ctg}x]\sin 2x$. **15.272.** $y=C_1\cos x+C_2\sin x+1/(2\cos x)$. **15.274.** $y_1=C_1e^{-2x}+C_2e^{2x}$, $y_2=2C_1e^{-2x}-2C_2e^{2x}$. **15.275.** $y_1=C_1e^{x}+C_2e^{5x}$, $y_2=-C_1e^{x}+3C_2e^{5x}$. **15.276.** $y_1=C_1e^{-x}+C_2e^{3x}$, $y_2=2C_1e^{-x}-2C_2e^{3x}$. **15.277.** $y_1=C_1e^{x}+C_2e^{4x}$, $y_2=0{,}5C_2e^{4x}-C_1e^{x}$. **15.278.** $y_1=(C_1+C_2x)\,e^{x}$, $y_2=(2C_1-C_2+2C_2x)\,e^{x}$. **15.279.** $y_1=(C_1+C_2x)\,e^{-x}$, $y_2=(C_1+0{,}5C_2+C_2x)\,e^{-x}$. **15.280.** $y_1=C_1\cos x+C_2\sin x$, $y_2=-C_1\sin x+C_2\cos x$. **15.281.** $y_1=C_1\cos 2x+C_2\sin 2x$, $y_2=[(2C_1+C_2)/5]\sin 2x+[(C_1-2C_2)/5]\cos 2x$. **15.282.** $y_1=e^{x}(C_1\cos 3x+C_2\sin 3x)$, $y_2=e^{x}(C_1\sin 3x-C_2\cos 3x)$. **15.283.** $y_1=e^{2x}(C_1\cos x+C_2\sin x)$, $y_2=e^{2x}[(C_1+C_2)\cos x+(C_2-C_1)\sin x]$.

УКАЗАТЕЛЬ ОБОЗНАЧЕНИЙ, ВСТРЕЧАЮЩИХСЯ В КНИГЕ

$\boldsymbol{N}$ — множество всех натуральных чисел

$\boldsymbol{Z}$ — множество всех целых чисел

$\boldsymbol{R}$ — множество всех действительных чисел

$\varnothing$ — пустое множество

$\bigcup$ — знак объединения

$\in$ — принадлежит

$\notin$ — не принадлежит

$\Rightarrow$ — следует

$\exists x$ — для всякого (любого) x

$\forall x$ — существует такое x

$(a;\ b)$, $(a;\ b;\ c)$ — упорядоченная пара, тройка

$[AB]$ — отрезок прямой с концами A и B

(AB) — прямая, проходящая через точки A и B

$|AB|$ — длина отрезка $[AB]$

$[AB)$ — луч AB

(ABC) — плоскость, проходящая через точки A, B и C

R^{α} — поворот на угол α вокруг начала координат

$\vec{a} = \{a_1;\ a_2;\ a_3\}$,

$\overrightarrow{AB} = \{a_1;\ a_2;\ a_3\}$ — вектор с координатами a_1, a_2, a_3

$\vec{0}$ — нулевой вектор

$|\vec{a}|$, $|\overrightarrow{AB}|$ — длина вектора

$\text{пр}_{\vec{b}}\,\vec{a}$ — проекция вектора $\vec{a}$ на вектор $\vec{b}$

$\widehat{(\vec{a},\ \vec{b})}$ — угол между векторами $\vec{a}$ и $\vec{b}$

$\vec{a}\,\vec{b}$ — скалярное произведение

$\vec{a} \times \vec{b}$, $[\vec{a}\,\vec{b}]$ — векторное произведение $\vec{a}$ на $\vec{b}$

$\vec{a}\,\vec{b}\,\vec{c}$ — смешанное произведение векторов $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$

$[a,\ b]$ — замкнутый промежуток (отрезок)

$]a,\ b[$ — открытый промежуток (интервал)

$[a,\ b[$, $]a,\ b]$ — полуоткрытые промежутки

$[a, +\infty[$, $]a, +\infty[$,

$]-\infty,\ b]$, $]-\infty,\ b[$ — бесконечные промежутки (лучи числовой прямой)

$]-\infty,\ +\infty[$ — числовая прямая

f — отображение, функция

$f(x)$ — значение функции f в точке x

$D(f)$ — область определения функции f

$E(f)$ — множество значений функции f

$|x|$ — абсолютная величина числа x

$[x]$, $E(x)$ — целая часть числа x

$\{x\}$ — дробная часть числа x

f^{-1} — обратное отображение, обратная функция

(x_n) — последовательность

$\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$ — число a есть предел последовательности (x_n)

$\lim\limits_{x\to a} f(x) = A$ — число A есть предел функции $f(x)$ при x, стремящемся к a

$\lim\limits_{x \to a-0} f(x) = A_1$,

$\lim\limits_{x \to a+0} f(x) = A_2$ — числа A_1 и A_2 — соответственно левый и правый пределы функции $f(x)$ при x, стремящемся к a

$\alpha \sim \beta$ — бесконечно малые α и β эквивалентны

Δx, Δy — приращение аргумента, приращение функции

y', $f'(x)$, $\frac{dy}{dx}$ — производная функции $y=f(x)$

y'', y''', ..., $y^{(n)}$ — производные второго, третьего, ..., n-го порядков

dy — дифференциал

$y_{\min}$, $y_{\max}$ — минимум, максимум функции

$\min\limits_{[a, b]} y$, $\max\limits_{[a, b]} y$ — наименьшее, наибольшее значение функции $y=y(x)$ на отрезке $[a, b]$

$\int f(x)\,dx$ — неопределенный интеграл

$\int\limits_a^b f(x)\,dx$ — определенный интеграл в пределах от a до b

$a_1 + a_2 + \ldots + a_n = \sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ — числовой ряд

$f(x, y)$ — функция двух переменных

z'_x, $\frac{\partial z}{\partial x}$, z'_y, $\frac{\partial z}{\partial y}$ — частные производные функции двух переменных

z''_{xx}, $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}$, z''_{xy}, $\frac{\partial^2 z}{\partial x\, \partial y}$ — частные производные второго порядка функции двух переменных

$\min\limits_D z$, $\max\limits_D z$ — наименьшее, наибольшее значение функции $z=z(x, y)$ в области D

$\iint\limits_D f(x, y)\,dx\,dy$ — двойной интеграл по области D

$\iiint\limits_G f(x, y, z)\,dx\,dy\,dz$ — тройной интеграл по области G.

Подольский Владимир Алексеевич
Суходский Андрей Матвеевич

СБОРНИК ЗАДАЧ ПО МАТЕМАТИКЕ
ДЛЯ ТЕХНИКОВ-ПРОГРАММИСТОВ

Редактор И. М. Минеев. Художник А. В. Пушкарный. Художественный редактор В. И. Пономаренко. Технический редактор Н. А. Битюкова. Корректор М. И. Козлова

ИБ № 1129

Изд. № ФМ-536 Сдано в набор 27.09.77. Подп. в печать 13.02.78. Формат 60×90 1/16. Бум. тип. № 2. Гарнитура литературная. Печать высокая. Объем 22 усл. печ. л. 21,87 уч.-изд. л. Тираж 60.000 экз. Зак. № 2067. Цена 85 коп.
Издательство «Высшая школа», Москва, К-51, Неглинная ул., д. 29/14

Ордена Октябрьской Революции и ордена Трудового Красного Знамени Первая Образцовая типография имени А. А. Жданова Союзполиграфпрома при Государственном комитете Совета Министров СССР по делам издательств, полиграфии и книжной торговли. Москва, М-54, Валовая, 28

85 коп.

МОСКВА

1978 год