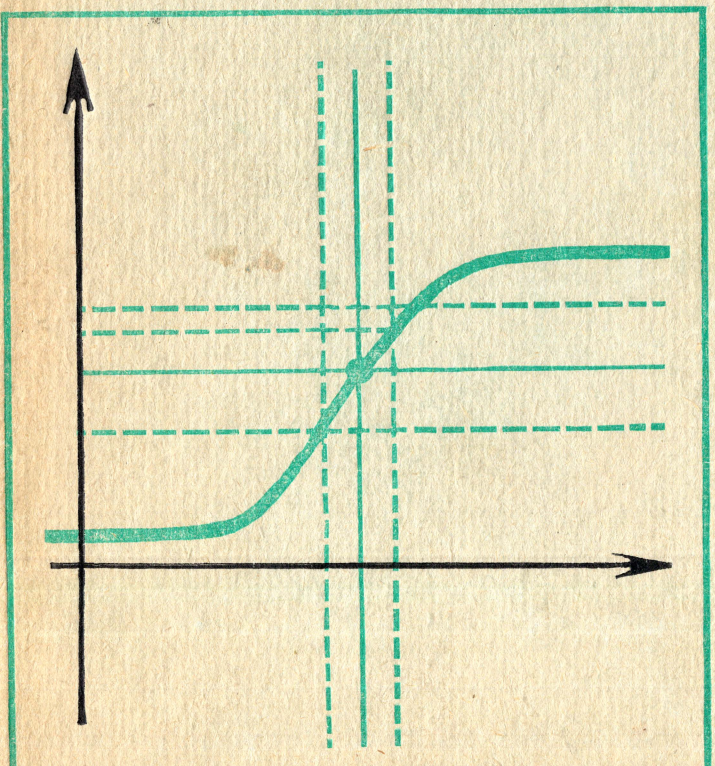
КУРС МАТЕМАТИКИ

ДЛЯ ТЕХНИКУМОВ

ЧАСТЬ

I



КУРС МАТЕМАТИКИ

ДЛЯ ТЕХНИКУМОВ

Часть I

Под редакцией Н. М. МАТВЕЕВА

Допущено Министерством высшего и среднего специального образования СССР в качестве учебного пособия для средних специальных учебных заведений

ИЗДАТЕЛЬСТВО «НАУКА»
ГЛАВНАЯ РЕДАКЦИЯ
ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ЛИТЕРАТУРЫ
Москва 1977

517.2
К93
УДК 517.11

КОЛЛЕКТИВ АВТОРОВ:
В. Н. МАТВЕЕВ, А. А. МАТЮШКИН-ГЕРКЕ,
Н. В. БОГОМОЛОВ, С. М. КОЗЛОВСКИЙ

Книга представляет собой первую часть «Курса математики для техникумов» в двух частях, написанного группой ленинградских авторов в соответствии с новой программой для техникумов, утвержденной в 1974 году.

Книга подготовлена по предложению Научно-методического кабинета по среднему специальному образованию Министерства высшего и среднего специального образования СССР как экспериментальное учебное пособие.

Отзывы и замечания по данному учебному пособию Научно-методический кабинет по среднему специальному образованию просит направлять в его адрес: 111024, Москва, Е-24, 3-я Кабельная ул., дом 1.

$К \frac{20203\text{-}114}{053(02)\text{-}77}$ 24-76

ОГЛАВЛЕНИЕ

ПРЕДИСЛОВИЕ

Дальнейшее развитие среднего специального образования в нашей стране требует значительного улучшения и совершенствования преподавания всех дисциплин. Его содержание и методы должны соответствовать современному уровню и перспективам развития науки и техники. Это в значительной степени относится к преподаванию математики.

Преподавание математики в техникумах должно быть направлено на овладение учащимися математическими знаниями как средством решения технических задач. Наряду с развитием математической культуры преподавание математики имеет в виду развитие научного и логического мышления у учащихся.

Предлагаемый «Курс математики для техникумов» представляет собой учебник, написанный в соответствии с новой программой.

При написании учебника преследовались общие цели обучения математике: овладение математическими методами исследования; овладение языком математических понятий; овладение определенным объемом математических сведений. В связи с изложенными целями одна из главных задач, стоящих перед авторами, состояла в осуществлении максимально компактного изложения программного материала. Решению этой задачи способствовало основанное на школьной программе по математике своевременное введение элементов теории множеств, математической логики и векторного исчисления. Не поступаясь логикой изложения и точностью определений и формулировок, удалось, как нам представляется, за счет рационализации распределения материала и приемов изложения существенно сократить физический объем учебника, не уменьшая, а иногда и увеличивая количество информации по сравнению с существующими учебниками и учебными пособиями.

Одним из основных требований, предъявляемых к современному специалисту, является его способность самостоятельно пополнять свои знания, по мере необходимости овладевать совершенно новыми разделами и дисциплинами. Содержание и методы обучения специалистов прежде всего должны максимально подготавливать их к такого рода деятельности.

Решение основных инженерно-технических задач сейчас, как правило, проводится на высоком научном уровне, с использованием достаточно продвинутого математического аппарата. Подавляющее большинство используемых здесь математических моделей — это многомерные модели. Этим и обусловлено широкое использование в современной технической литературе соответствующего математического языка: векторов и функций от них, векторнозначных функций, матриц, и базирующихся на них понятий.

Исследование разнообразных технологических процессов показывает, что в ряде случаев детерминированные модели оказываются слишком грубыми, что для достижения нужной степени точности математического описания требуется учет неконтролируемых флуктуаций большого числа параметров. Отсюда возросшая роль теории вероятностей, математической статистики и смежных с ними дисциплин.

Учитывая, что ход современного научно-технического прогресса требует постоянного совершенствования и усиления математической подготовки специалистов, авторы, наряду с разделами и темами, предусмотренными вводимой ныне в действие программой в качестве обязательной, сочли целесообразным рассмотреть также и некоторые вопросы, выходящие за рамки таковых, с тем, чтобы наметить связи между этими вопросами и традиционной частью курса, дать преподавателям возможность заблаговременно подготовиться к их изложению.

В соответствии с программой в учебнике излагается курс математики, рассчитанный на изучение в течение двух лет, в объеме 380—420 учебных часов. Учебник может быть также использован при прохождении курса математики на базе десятилетнего обучения.

Учебник состоит из 21 главы. В каждой главе содержатся «Вопросы для повторения и упражнения», а также «Решения, указания и ответы» к ним, что позволяет использовать учебник для организации всего учебного процесса по математике, не прибегая дополнительно к каким-либо сборникам задач.

ГЛАВА 1

ЧИСЛОВЫЕ МНОЖЕСТВА

§ 1.1. Вещественные числа

1.1.1. Множество рациональных чисел. Одним из основных понятий математики является понятие числа. Это понятие прошло длительный путь развития, обогащаясь новым содержанием. В этом параграфе будет дан краткий обзор развития понятия числа.

Исторически первыми возникли в практике и были введены в науку натуральные числа. Натуральные числа являются инструментом для счета количества отдельных, как говорят в науке, дискретных предметов, например количества людей в племени, количества пальцев на руке.

Натуральные числа образуют бесконечное множество, которое принято обозначать буквой N:

$$N = \{1, 2, 3, 4, \ldots\}.$$

Пригодные для счета предметов натуральные числа оказались недостаточными для других целей практики, например для измерения длин отрезков и физических величин. Возникла необходимость во введении долей единицы и количества этих долей. Если, например, некоторая величина разделена на n частей и взято m таких частей, то вводят новое, так называемое *дробное число* $\frac{m}{n}$. Заметим, что новое число является определенной комбинацией пары (уже известных нам) натуральных чисел m и n.

Далее те же потребности измерения привели к необходимости введения отрицательных чисел, чтобы иметь возможность измерять величины, способные изменяться в двух противоположных направлениях от выбранной точки отсчета; например, если за начало отсчета берется уровень моря, то для отметки положения горы берется положительное число — высота горы, а для отметки положения глубины моря — отрицательное число. При изменении сил, действующих на пружину, целесообразно силы, растягивающие пружину считать положительными, тогда силы, сжимающие пружину, будут отрицательными.

Таким образом, каждому числу, натуральному или дробному сопоставляется *отрицательное число.* Если число (положительное) записать буквой a (или $+a$), то соответствующее ему «противоположное» (отрицательное) число записывается: $-a$.

Ко всем указанным числам присоединяется число 0, соответствующее начальной отметке при измерении (или отсутствию предмета при счете).

Множество, состоящее из всевозможных положительных и отрицательных целых и дробных чисел и числа 0, называется множеством *рациональных чисел* и обозначается буквой Q.

Отрицательные числа, противоположные натуральным, называются *целыми отрицательными*, и вместе с натуральными числами и числом 0 они образуют множество *целых чисел*, обозначаемое буквой Z.

Целые числа могут быть также записаны в виде дроби, например:

$$5=\frac{5}{1}, \quad -3=\frac{-3}{1}.$$

Таким образом, всякое рациональное число представимо в виде $\frac{m}{n}$, где m — любое целое число ($m=0, \pm 1, \pm 2, \ldots$), а n — натуральное число.

Очевидно, что N содержится в Z, а Z в Q

$$N \subset Z \subset Q$$

(здесь $\subset$ — знак включения одного множества в другое: $A \subset B$ читается: множество A содержится в множестве B или A есть *подмножество* множества B), так что Z есть расширение множества N, а Q — расширение множества Z и тем самым расширение множества N.

Обращаем особое внимание читателя на то, что понятие числа подразумевает не только его существование, но, и это важнее всего, законы действий над числами и некоторые отношения между ними. При этом основными действиями являются «сложение» и «умножение» чисел, а основным отношением между ними является сравнение чисел, т. е. установление того, какое из двух чисел меньше (больше), если такое сравнение — упорядоченность — возможно.

Действия сложения и умножения рациональных чисел и соотношение сравнения для этих чисел удовлетворяют следующим основным законам (свойствам):

1. $a+b=b+a$,
2. $(a+b)+c=a+(b+c)$,
3. $a+0=a$,
4. $a+(-a)=0$,
5. $a\cdot b=b\cdot a$,
6. $(a\cdot b)\cdot c=a\cdot(b\cdot c)$,
7. $a\cdot 1=a$,
8. $a\cdot\frac{1}{a}=1 \quad (a\neq 0)$,
9. $a(b+c)=a\cdot b+a\cdot c$,
10. $a<b$ и $b<c \Rightarrow a<c$,
11. $a<b \Rightarrow a+c<b+c$,
12. $a<b \Rightarrow a\cdot c<b\cdot c\,(c>0)$ и $a<b \Rightarrow a\cdot c>b\cdot c\,(c<0)$.

Здесь a, b, c — любые числа, если не оговорено противное; через 0 и 1 обозначены единственные числа *нуль* и *единица*, обладающие соответственно свойствами 3 и 7 и (для любых a); единственное *противоположное число* $(-a)$ существует для любого a, а *обратное число* $\frac{1}{a}$ (тоже единственное) существует для любого $a\neq 0$.

Указанные свойства рациональных чисел дают возможность обосновать известные арифметические операции над рациональными числами.

Свойства 1—4 являются законами сложения; свойство 1 носит название *переместительного* или *коммутативного закона*; свойство 2 выражает *сочетательный* или *ассоциативный закон*; аналогичны законы умножения 5—6. Свойство 9 связывает сложение с умножением и называется *распределительным* или *дистрибутивным законом умножения относительно сложения*; свойства 10—12 являются свойствами *упорядоченности* (*сравнения*) чисел. При этом свойство 10 называется *транзитивностью*, а свойства 11 и 12 выражают правила сложения неравенств и умножения их на число, отличное от нуля.

Из свойства 12 следуют известные правила знаков для умножения рациональных чисел:

$$(+)(+)=+,\quad (+)(-)=-,\quad (-)(-)=+,$$

если принять во внимание, что

$$a\cdot 0=0.$$

На множестве рациональных чисел разрешимы уравнения вида

$$b+x=a \quad \text{и} \quad bx=a \qquad (b\neq 0).$$

Эта разрешимость обеспечена существованием противоположного числа для любого данного числа b и обратного числа для любого числа $b\neq 0$.

В алгебре всякое множество чисел, действия над которыми подчинены законам 1—9, называется *полем*.

Итак, множество рациональных чисел является полем. При этом каждое рациональное число называется *элементом* этого поля.

О множестве же, удовлетворяющем свойствам 1—12, говорят как об *упорядоченном поле*.

Таким образом, множество рациональных чисел есть упорядоченное поле чисел.

Отметим в заключение одно важное свойство множества рациональных чисел, называемое *свойством Архимеда*. Оно состоит в утверждении того, что для любого рационального числа a существует такое натуральное число n, что $n>a$. Из этого свойства следует, что для любых двух рациональных чисел a и b, где $a>0$, существует такое натуральное число n, что $na>b$ (почему? дайте геометрическое истолкование этого факта).

Из школьного курса математики известно, что любое положительное рациональное число, кроме представления в виде пары целых чисел, дроби $\frac{m}{n}$, может быть также представлено в виде десятичной дроби; причем некоторые числа могут быть записаны в виде конечной десятичной дроби, например $\frac{3}{4}=0{,}75$, а другие не могут быть записаны так, что зависит от строения знаменателя, и тогда возникает запись в виде бесконечной периодической дроби, например

$$\frac{1}{6}=0{,}1666\ldots=0{,}1(6).$$

Итак, наряду с тем, что всякое рациональное число может быть представлено в виде отношения целых чисел $\frac{m}{n}$, мы можем дать равносильное определение: всякое рациональное число может быть представлено бесконечной периодической десятичной дробью.

Замечание. Мы должны при этом писать

$$0{,}75=0{,}75(0)$$

и число 0,74(9) можно считать равным 0,75(0).

1.1.2. Необходимость расширения множества рациональных чисел. Потребности практики, а также внутренние потребности самой математики, ее логического развития, показали недостаточность множества рациональных чисел для решения различных задач.

Рассмотрим, например, задачу. Дан квадрат, сторона которого в принятой для измерения единице равна числу 1, надо найти число x, выражающее длину диагонали этого квадрата. В соответствии с теоремой Пифагора имеем

$$x^2=2, \quad \text{или} \quad x=\sqrt{2}.$$

Таким образом, задача сводится к решению квадратного уравнения, или, что одно и то же, к выражению символа $\sqrt{2}$ посредством подходящего рационального числа (других чисел у нас пока нет!).

Однако среди целых чисел мы не найдем числа, квадрат которого равен 2, так как

$$1^2<2, \quad \text{а} \quad 2^2>2,$$

следовательно, надо попытаться найти искомое число среди дробей, т. е. положить

$$x=\frac{m}{n}$$

(разумеется числа m и n взаимно простые, иначе мы произведем сокращение).

Рассмотрение этого вопроса приводит к важной в принципиальном отношении теореме.

Теорема 1.1. *Не существует рационального числа, квадрат которого равен числу* 2.

В самом деле, предположим, что имеет место равенство

$$\left(\frac{m}{n}\right)^2 = 2,$$

где m и n взаимно просты. Тогда $m^2 = 2n^2$, откуда следует, что натуральное число m^2 является четным, а в таком случае и само число m — четное (почему?), так что

$$m = 2p,$$

где p — натуральное число. Теперь имеем

$$4p^2 = 2n^2,$$

откуда следует, что $n^2 = 2p^2$, т. е. что число n^2 четно, а вместе с ним четно и число n.

Итак, мы пришли к тому, что числа m и n оба четные, т. е. не являются взаимно простыми, что противоречит первоначальному предположению об их взаимной простоте. Теорема доказана.

Из этой теоремы вытекает, что диагонали нашего квадрата нельзя сопоставить никакое число в качестве ее длины, что противоречит нашему интуитивному представлению о том, что любой отрезок имеет длину.

Известно также, что часто встречающееся отношение длины окружности к диаметру, обозначаемое π, тоже не может быть выражено рациональным числом.

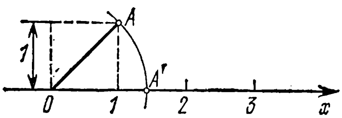


Рис. 1.1.

Если изображать рациональные числа точками на числовой оси, то каждому рациональному числу будет соответствовать одна и только одна точка.

Построим теперь на отрезке числовой оси квадрат со стороной, равной 1 (рис. 1.1).

Раствором циркуля, равным диагонали квадрата, отметим точку на числовой оси. Так как мы показали, что длина диагонали не выражается никаким рациональным числом, то отмеченной точке оси не соответствует никакое рациональное число. Следовательно, числовая ось не покрывается рациональными числами.

Мы видим теперь, что множество рациональных чисел далеко не удовлетворяет потребности практики, потребности измерения геометрических величин и потребности решений уравнения, например типа

$$x^n = a, \qquad (1.1)$$

где n и a — рациональные положительные числа.

1.1.3. Множество вещественных чисел. Задача преодоления недостаточности множества рациональных чисел заключается, как видно теперь, в том, чтобы создать новое множество чисел, расширенное, в котором для каждой точки числовой оси находилось бы числовое значение в новом множестве чисел и в котором решалось бы, например, любое уравнение вида (1.1).

Новое множество должно включать в себя как подмножество множество рациональных чисел Q, а также допускать основные операции и отношения — сложение, умножение, сравнение чисел. При этом законы действий в новом множестве, будучи применимыми к множеству Q, должны приводить к тем же результатам, которые были установлены для этого множества чисел ранее (принцип перманентности).

Определение 1.1. *Вещественным числом называется бесконечная десятичная дробь.*

Пример 1.1. $x_1 = 0{,}1212212221\ldots$

Здесь многоточие означает, что дробь бесконечна, а структура записи показывает, что отсутствует повторение, т. е. периодичность дроби.

Пример 1.2. $x_2 = 130{,}535353\ldots = 130{,}(53)$.

Эта бесконечная десятичная дробь периодична.

Пример 1.3. $x_3 = \sqrt{2} = 1{,}41412\ldots$

Справа стоит непериодическая десятичная дробь.

Пример 1.4. $x_4 = \pi = 3{,}14159\ldots$

Число π также представляется бесконечной непериодической десятичной дробью.

Для множества положительных вещественных чисел устанавливаются следующие правила действий и сравнений.

1. Числа

$$\alpha_1 = a{,}a_1a_2\ldots a_k\ldots \quad \text{и} \quad \alpha_2 = b{,}b_1b_2\ldots b_k\ldots,$$

не содержащие девяток в периоде[1]), *равны* тогда и только тогда, когда

$$a = b \quad \text{и} \quad a_k = b_k \qquad (k = 1, 2, \ldots).$$

[1]) Числа, содержащие девятку в периоде, заменяются (для сравнения) равными им числами, с нулем в периоде (см., например, Г. М. Фихтенгольц, Курс дифференциального и интегрального исчисления, М., Гостехиздат, т. I, 1948, стр. 25—26).

2. Число α_1 *меньше* числа α_2:

$$\alpha_1 < \alpha_2,$$

тогда и только тогда, когда

$a<b$ или $a=b$, $a_1=b_1, a_2=b_2, \ldots, a_k=b_k$, но $a_{k+1} < b_{k+1}$.

Если отбросить в положительном вещественном числе

$$\alpha = a, a_1 a_2 \ldots a_k \ldots$$

все цифры после a_k, то число

$$\alpha_k = a, a_1 a_2 \ldots a_k$$

с конечным числом знаков будет являться *приближенным значением числа* $\alpha > 0$ *с недостатком*, с точностью до 10^{-k}. Число

$$\bar{\alpha}_k = a, a_1 a_2 \ldots a_k + 10^{-k},$$

т. е.

$$\bar{\alpha}_k = a, a_1 a_2 \ldots (a_k + 1), \quad \text{если} \quad a_k < 9,$$

или

$$\bar{\alpha}_k = a, a_1 a_2 \ldots (a_{k-1} + 1)\, 0, \quad \text{если} \quad a_k = 9, \text{ а } a_{k-1} < 9, \text{ и т. д.}$$

будет являться *приближенным значением числа* $\alpha > 0$ *с избытком*.

Сумма $\alpha + \beta$ двух положительных вещественных чисел α и β может быть определена как число, удовлетворяющее неравенствам

$$\alpha_k + \beta_k < \alpha + \beta < \bar{\alpha}_k + \bar{\beta}_k$$

при всех k. (Мы не будем доказывать существование числа $\alpha + \beta$, если α и β существуют.)

Пример 1.5. Для чисел $\alpha = 0{,}1212212221\ldots$ и $\beta = 0{,}(53)$ имеем

$$\begin{aligned} &0{,}1 + 0{,}5 < \alpha + \beta < 0{,}2 + 0{,}6, \\ &0{,}12 + 0{,}53 < \alpha + \beta < 0{,}13 + 0{,}54, \\ &0{,}121 + 0{,}535 < \alpha + \beta < 0{,}122 + 0{,}536, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{aligned}$$

Мы получаем сужающиеся границы для числа $\alpha + \beta$.

Произведение $\alpha \cdot \beta$ двух положительных вещественных чисел α и β можно определить аналогично как число, удовлетворяющее неравенствам

$$\alpha_k \beta_k < \alpha\beta < \bar{\alpha}_k \bar{\beta}_k.$$

Пример 1.6. Для тех же α и β, что и в предыдущем примере, имеем

$$0{,}1\cdot 0{,}5 < \alpha\cdot\beta < 0{,}2\cdot 0{,}6,$$
$$0{,}12\cdot 0{,}53 < \alpha\cdot\beta < 0{,}13\cdot 0{,}54,$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

В случае произвольных вещественных чисел правила действий и сравнений несколько сложнее, и мы их не будем рассматривать.

Можно доказать[1]), что множество вещественных чисел обладает всеми указанными выше свойствами (1—12) множества рациональных чисел Q. Поэтому множество вещественных чисел является упорядоченным полем. Множество вещественных чисел обозначают буквой R. Множество неотрицательных вещественных чисел обозначают через R_+, множество отрицательных вещественных чисел обозначают через R_-.

Имеем

$$Q \subset R.$$

Множество вещественных чисел, так же как и множество рациональных чисел, обладает свойством Архимеда.

Отметим, что множество вещественных чисел обладает свойством непрерывности в смысле Кантора[2]), которым не обладает множество рациональных чисел. Это свойство непрерывности множества вещественных чисел состоит в том, что для всякой системы вложенных отрезков

$$[a_1, b_1], \quad [a_2, b_2], \quad \ldots, \quad [a_n, b_n], \ldots,$$

где

$$a_{n-1} < a_n < b_n < b_{n-1} \qquad (n \geqslant 2)$$

существует хоть одна точка, принадлежащая всем отрезкам.

1.1.4. Рациональные и иррациональные числа, их представление при помощи бесконечных десятичных дробей. Мы определили множество вещественных чисел как множество всех бесконечных десятичных дробей. Но среди них, очевидно, имеются два подмножества — периодические бесконечные и непериодические бесконечные дроби.

Мы уже рассматривали бесконечные периодические дроби,— они являются представлениями *рациональных чисел*. Множество оставшихся вещественных чисел назовем *множеством иррациональных чисел*.

---

[1]) См., например, Л. Д. Кудрявцев, Математический анализ, т. I, М., «Наука», 1970, гл. I, § 1.

[2]) Более подробно см. об этом, например, в книге: Л. Д. Кудрявцев, Математический анализ, т. I, М., «Наука», 1970, стр. 17.

Следовательно, *иррациональные числа* — это множество всех бесконечных десятичных непериодических дробей. Среди иррациональных чисел находятся такие, например, как $\sqrt{2}$ — корень уравнения $x^2=2$, как $2+\sqrt{3}$ — корень уравнения $x^2-4x+1=0$, корни многих других алгебраических уравнений, а также такие важные в математике числа, как π, e и многие другие, не являющиеся корнями алгебраических уравнений.

Теперь можно высказать следующее предложение о связи между вещественными числами и точками числовой оси:

Между множеством вещественных чисел и точками числовой оси существует взаимно однозначное соответствие.

Это означает, что не только каждому вещественному числу соответствует одна точка числовой оси, но и каждой точке числовой оси соответствует одно вещественное число.

1.1.5. Абсолютная величина вещественного числа. Согласно свойству 4, справедливому для всех вещественных чисел, каждому положительному вещественному числу α соответствует отрицательное вещественное число $-\alpha$. Поэтому понятие *абсолютная величина* $|\alpha|$ рационального числа α, известное из школьного курса математики, обобщается на вещественные числа. По определению имеем

$$|\alpha|=\begin{cases} \alpha, & \text{если } \alpha \geqslant 0, \\ -\alpha, & \text{если } \alpha < 0. \end{cases}$$

Абсолютная величина вещественного числа обладает следующими свойствами:

1. $|\alpha| \geqslant 0$, $|-a|=|a|$, $a \leqslant |a|$, $-a \leqslant |a|$.
2. $|\alpha+\beta| \leqslant |\alpha|+|\beta|$.
3. $||\alpha|-|\beta|| \leqslant |\alpha \pm \beta| \leqslant |\alpha|+|\beta|$.
4. $|\alpha \cdot \beta|=|\alpha| \cdot |\beta|$.
5. $\left|\frac{\alpha}{\beta}\right|=\frac{|\alpha|}{|\beta|}$ $(\beta \neq 0)$.

§ 1.2. Комплексные числа

1.2.1. Необходимость дальнейшего расширения понятия числа. Дальнейшее развитие науки и практики показало недостаточность только что введенного множества вещественных чисел.

Уже попытка решать такое простое по внешнему виду уравнение, как

$$x^2+1=0,$$

показывает необходимость дальнейшего расширения понятия числа. Кроме того, такие науки, как электротехника и различные разделы физики, рассматривают величины сложной природы, которые не могут быть охвачены понятием вещественных чисел.

В связи с этим возникла потребность нового расширения понятия числа.

1.2.2. Комплексные числа. Мы будем определять комплексные числа и действия над ними аксиоматически, используя известные нам вещественные числа.

Комплексным числом называется упорядоченная пара вещественных чисел (a, b), *т. е. если* $a \neq b$, *то* $(a, b) \neq (b, a)$, *и если* $(a, b)=(c, d)$, то $a=c$ *и* $b=d$.

Действия *сложения* и *умножения* для комплексных чисел вводят определениями (аксиомами)

$$(a, b)+(c, d)=(a+c, b+d),$$
$$(a, b)\cdot(c, d)=(ac-bd, ad+bc).$$

Легко проверяется, что комплексные числа удовлетворяют всем требованиям поля 1—9 (см. 1.1.1). Вместе с тем оказалось невозможным ввести отношение меньше (больше) между комплексными числами, с сохранением свойств 10—12. Поэтому множество комплексных чисел есть неупорядоченное поле. Оно обозначается буквой C.

Определим действия, обратные сложению и умножению.

1. Найти разность комплексных чисел (a, b) и (c, d). Это по определению означает, что нужно найти такое комплексное число (x, y), чтобы было

$$(c, d)+(x, y)=(a, b).$$

Имеем по аксиоме сложения

$$(c+x, d+y)=(a, b),$$

откуда по свойству упорядоченных пар имеем

$$c+x=a \quad \text{и} \quad d+y=b.$$

Следовательно,

$$x=a-c \quad \text{и} \quad y=b-d.$$

Итак,

$$(a, b)-(c, d)=(a-c, b-d).$$

2. Найти частное комплексных чисел (a, b) и $(c, d) \neq \neq (0, 0)$. Это по определению означает, что нужно найти комплексное число (x, y) такое, что

$$(a, b) = (c, d) \cdot (x, y).$$

По правилу умножения имеем

$$(a, b) = (cx - dy, cy + dx),$$

откуда

$$a = cx - dy \quad \text{и} \quad b = cy + dx.$$

Решая полученную систему, находим

$$x = \frac{ac + bd}{c^2 + d^2} \quad \text{и} \quad y = \frac{bc - ad}{c^2 + d^2}.$$

Итак,

$$\frac{(a, b)}{(c, d)} = \left(\frac{ac + bd}{c^2 + d^2}, \frac{bc - ad}{c^2 + d^2} \right).$$

Пример. 1.7. Даны два комплексных числа

$$z_1 = (2, 7) \quad \text{и} \quad z_2 = (3, -1).$$

Найти их сумму, разность, произведение, частное, вторую степень первого из них.

Решение.

1. $z_1 + z_2 = (2, 7) + (3, -1) = (5, 6)$.
2. $z_1 - z_2 = (2, 7) - (3, -1) = (-1, 8)$.
3. $z_1 \cdot z_2 = (2, 7) \cdot (3, -1) = (13, 19)$.
4. $z_1 : z_2 = (2, 7) : (3, -1) = \left(-\frac{1}{10}, \frac{23}{10} \right)$.
5. $z_1^2 = (2, 7) \cdot (2, 7) = (-45, 28)$.

В дальнейшем нам понадобится следующая форма записи комплексного числа (a, b):

$$(a, b) = (a, 0) + (b, 0) \cdot (0, 1). \tag{1.2}$$

В справедливости этой формулы легко убедиться, используя правило умножения комплексных чисел. В самом деле, мы имеем

$$(b, 0) \cdot (0, 1) = (0, b). \tag{1.3}$$

Далее, пользуясь правилом сложения комплексных чисел, найдем

$$(a, 0) + (0, b) = (a, b),$$

что и доказывает справедливость (1.2).

Выделим теперь из множества комплексных чисел те из них, в которых вторые элементы пар равны нулю.

Пусть

$$z_1=(a,\ 0)\quad \text{и}\quad z_2=(b,\ 0).$$

Произведем над ними действия сложения, вычитания, умножения и деления по правилам, установленным для этих действий:

$$(a,\ 0)+(b,\ 0)=(a+b,\ 0);$$
$$(a,\ 0)-(b,\ 0)=(a-b,\ 0);$$
$$(a,\ 0)\cdot(\ ,\ 0)=(ab,\ 0);$$
$$(a,\ 0):(b,\ 0)=\left(\frac{a}{b},\ 0\right)\qquad (b\neq 0).$$

В то же время, если взять два вещественных числа a и b, то их сумма, разность, произведение и частное будут соответственно равны

$$a+b,\qquad a-b,\qquad a\cdot b\qquad \text{и}\qquad \frac{a}{b}\qquad (b\neq 0).$$

Итак, действия над парами вида $(a,\ 0)$ совпадают с действиями над соответствующими вещественными числами a.

Поэтому условимся пару вида $(a,\ 0)$ отождествлять с соответствующим действительным числом a и будем писать

$$(a,\ 0)=a. \tag{1.4}$$

Таким образом, множество вещественных чисел оказывается включенным во множество комплексных чисел:

$$R\subset C.$$

Теперь рассмотрим другое подмножество комплексных чисел, имеющих нуль в качестве первого элемента пары, т. е. числа вида $(0,\ b)$ $(b\neq 0)$. Нас интересует квадрат такого комплексного числа

$$(0,\ b)^2=(-b^2,\ 0).$$

Отсюда видим, что квадрат комплексного числа, в котором первый элемент пары — нуль, равен комплексному числу, в котором нулю уже равен второй элемент, причем первый элемент есть отрицательное число; по соглашению (1.4) пишем

$$(0,\ b)^2=-b^2.$$

Мы получили существенно новый факт: квадрат комплексного числа определенного вида есть отрицательное вещественное число (что невозможно в множестве вещественных чисел, где квадрат любого числа, отличного от нуля, есть положительное число).

Введем для пары (0, 1) символ i,

$$(0,\ 1)=i.$$

Тогда имеем

$$i^2=-1.$$

Теперь любое комплексное число (a, b), пользуясь (1.2), (1.3) и (1.4), можно записать в виде

$$(a,\ b)=a+bi.$$

Последняя форма называется *алгебраической формой комплексного числа.*

Комплексные числа $a+bi$ и $a-bi$ называются *взаимно сопряженными* комплексными числами. Их сумма и произведение — вещественные числа:

$$(a+bi)+(a-bi)=2a,$$
$$(a+bi)\cdot(a-bi)=a^2+b^2.$$

Мы теперь можем решать любое квадратное уравнение с вещественными коэффициентами. При этом, если корни комплексные, то они обязательно взаимно сопряженные (почему?).

Например, для уравнения

$$x^2-4x+13=0$$

имеем корни

$$x_1=2+3i \quad \text{и} \quad x_2=2-3i.$$

Заметим, что уравнение

$$x^2+1=0$$

имеет (в множестве комплексных чисел) два решения

$$x_1=i, \qquad x_2=-i.$$

Алгебраическая форма комплексного числа позволяет производить алгебраические действия сложения и умножения по следующему правилу: надо рассматривать выражения вида $a+bi$ как многочлен и производить над многочленами привычные алгебраические действия с последующей заменой i^2 на -1. В частности, применяя это правило к умножению взаимно сопряженных чисел, имеем

$$(a+bi)(a-bi)=a^2-b^2\cdot i^2=a^2+b^2.$$

Пользуясь указанным правилом, деление комплексных чисел можно производить так:

$$\frac{a+bi}{c+di}=\frac{(a+bi)(c-di)}{(c+di)(c-di)}=\frac{ac+bd+(bc-ad)\cdot i}{c^2+d^2}=\frac{ac+bd}{c^2+d^2}+\frac{bc-ad}{c^2+d^2}\cdot i.$$

1.2.3. Геометрическое изображение комплексных чисел. Как известно, вещественные числа могут изображаться точками числовой оси. И вещественному числу a, как элементу множества комплексных чисел $a=(a, 0)$, снова соответствует точка числовой оси.

Для изображения любого комплексного числа (a, b) не являющегося вещественным, очевидно, требуется точка плоскости. Естественно комплексному числу (a, b) сопоставить точку плоскости (x, y) (рис. 1.2) с координатами

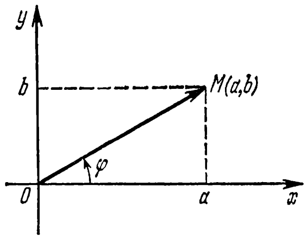


Рис. 1.2.

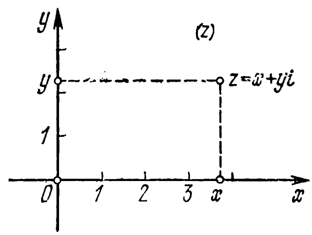


Рис. 1.3.

$x=a$ и $y=b$, т. е. точку $M(a, b)$. Итак, мы установили взаимно однозначное соответствие между множеством точек плоскости xOy и множеством комплексных чисел.

Комплексное число (x, y) принято обозначать буквой z, так что

$$z=(x, y)=x+yi.$$

Плоскость xOy, на которой изображаются комплексные числа, называют *комплексной плоскостью* z (рис. 1.3).

Точку $M(a, b)$, изображающую комплексное число $a+bi$, отождествляют с самим числом, говоря что последнее расположено в точке M. Можно также говорить о векторе $\overrightarrow{OM}$ (рис. 1.2), которому соответствует комплексное число $(a, b)=a+bi$.

Исторически сложилось так, что комплексные числа вида $(0, b) = bi$ стали называть *чисто мнимыми* числами и число i — *мнимой единицей*. Числа a и b называют соответственно *вещественной* $\operatorname{Re} z$ *и мнимой* $\operatorname{Im} z$[1]) *частями комплексного числа* $z = a + bi$.

В соответствии с этим координатные оси числовой комплексной плоскости называют *вещественной* и *мнимой осями*: на вещественной оси расположены вещественные числа, а на мнимой оси — чисто мнимые числа.

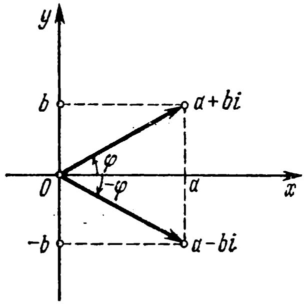


Рис. 1.4.

Взаимно сопряженные комплексные числа $a + bi$ и $a - bi$ расположены симметрично относительно вещественной оси (рис. 1.4).

Для комплексных чисел вводятся понятия модуля и аргумента, которые вполне определяют комплексное число и положение изображающей его точки на комплексной плоскости.

Модулем комплексного числа $(a, b) = a + bi = z$ (рис. 1.2) называется вещественное число $r = \sqrt{a^2 + b^2} \geqslant 0$; это число равно расстоянию от начала координат до точки $M(a, b)$, изображающей комплексное число, или длине вектора $\overrightarrow{OM}$. Если рассматривать вещественное число a как частный случай комплексного числа, то его модуль

$$\sqrt{a^2 + 0^2} = |a|$$

совпадает с абсолютной величиной числа a.

Модуль комплексного числа $z = a + bi$ и модули его вещественной и мнимой частей a и b связаны соотношениями (см. рис. 1.2)

$$|a| = |\operatorname{Re} z| < r, \quad |b| = |\operatorname{Im} z| < r, \quad |z| \leqslant |a| + |b|.$$

Аргументом комплексного числа, отличного от нуля, называется угол φ, на который надо повернуть положительную часть вещественной оси до совпадения с вектором $\overrightarrow{OM}$. Этот угол — положительный, если поворот идет

---

[1]) Re и Im — начальные буквы французских слов Réel и Imaginaire.

против часовой стрелки, и отрицательный в противном случае. Например, аргументы чисел $1+i$ и $1-i$ равны соответственно $\frac{\pi}{4}$ и $-\frac{\pi}{4}$ (почему?). Считают, что аргумент положительного вещественного числа равен нулю, а аргумент отрицательного вещественного числа равен π.

Аргумент чисто мнимого числа bi равен $\frac{\pi}{2}$ при $b>0$ и $-\frac{\pi}{2}$ при $b<0$.

Модули взаимно сопряженных комплексных чисел $a+bi$ и $a-bi$ равны, а аргументы отличаются только знаком (рис. 1.4).

Два комплексных числа равны тогда и только тогда, когда их модули равны, а аргументы разнятся на число, кратное 2π.

ВОПРОСЫ ДЛЯ ПОВТОРЕНИЯ К ГЛАВЕ 1

1. Какие числа называются рациональными?
2. Является ли множество рациональных чисел полем, упорядоченным полем?
3. Какое свойство множества рациональных чисел называется свойством Архимеда?
4. Существует ли рациональное число, выражающее длину диагонали квадрата со стороной, равной 1?
5. Может ли быть выражено рациональным числом отношение длины окружности к диаметру?
6. Как определяется множество вещественных чисел?
7. Как определяется сумма, произведение двух вещественных чисел?
8. Является ли множество вещественных чисел упорядоченным полем?
9. В чем заключается свойство непрерывности множества вещественных чисел?
10. Возможно ли представление рационального числа бесконечной непериодической десятичной дробью?
11. В чем заключается взаимно однозначное соответствие между вещественными числами и точками числовой оси?
12. Является ли множество комплексных чисел упорядоченным полем?
13. Возможно ли установить взаимно однозначное соответствие между множеством комплексных чисел и точками некоторой плоскости?
14. Как определяется алгебраическая форма комплексного числа?
15. Каково соотношение между вещественными и комплексными числами?
16. Почему комплексные корни квадратного уравнения (с вещественными коэффициентами) обязательно являются сопряженными комплексными числами?
17. Определяется ли однозначно комплексное число своим аргументом и модулем?
18. Может ли аргумент (модуль) комплексного числа быть выражен вещественным отрицательным числом?

ГЛАВА 2

МНОЖЕСТВА И ФУНКЦИИ

§ 2.1. Множества

2.1.1. Основные понятия и определения. С понятием *множества* читатель познакомился еще в начальной школе. Использование этого понятия дало возможность существенно упростить изложение целого ряда вопросов школьной математики, установить более тесные связи между различными разделами курса.

В настоящее время теория множеств представляет собой обширную область математики. В нашем курсе, для которого элементы теории множеств носят вспомогательный характер, мы ограничимся кратким изложением тех понятий, которые образуют «язык», используемый в дальнейшем изложении.

Понятие множества относится к первичным, неопределяемым понятиям. Множество считается заданным, если относительно каждого объекта можно установить, принадлежит он множеству или нет. При этом, если какой-либо объект принадлежит множеству, то он называется *элементом* этого множества.

Приведем примеры некоторых множеств:

1) Множество слов в данной книге.

2) Множество окружностей, имеющих центр в данной точке.

3) Множество N (множество натуральных чисел).

4) Множество Z (множество целых чисел).

5) Множество Q (множество рациональных чисел).

6) Множество R (множество вещественных чисел).

7) Множество C (множество комплексных чисел).

8) Множество положительных четных чисел, не превышающих 10.

В приведенных примерах само название каждого множества точно определяет, какие элементы включены в данное множество.

Если a является элементом множества A (принадлежит A), то обозначается это так:

$$a \in A,$$

если a не является элементом множества A (не принадлежит A), то пишут:

$$a \overline{\in} A \quad \text{или} \quad a \notin A.$$

Например:

$$\frac{2}{3} \in Q, \text{ но } \sqrt{2} \overline{\in} Q.$$

Множество A, состоящее из одного элемента a, будем обозначать так:

$$\{a\}.$$

Множество, не содержащее ни одного элемента, называется *пустым*. Так, пустыми являются:

1) множество точек пересечения параллельных прямых,

2) множество вещественных корней уравнения $x^2+1=0$.

Пустое множество обычно обозначается символом $\varnothing$.

Множества A и B называются равными ($A=B$), если любой ($\forall$) элемент одного из них принадлежит другому.

Используя знаки $\Leftrightarrow$ (тогда и только тогда, когда), $\Rightarrow$ (следует), $\wedge$ (и), можно записать определение равенства множеств A и B так:

$$(A=B) \Leftrightarrow ((\forall x \in A \Rightarrow x \in B) \wedge (\forall x \in B \Rightarrow x \in A))$$

(т. е. множества A и B равны между собой тогда и только тогда, когда они содержат одни и те же элементы).

Например, множества натуральных чисел от 1 до 10 равны между собой независимо от того, в каком порядке расположены эти числа.

Множество B называется *подмножеством* множества A, если любой элемент множества B принадлежит множеству A. Это мы будем записывать так:

$$B \subset A \qquad \text{(иногда } B \subseteq A\text{)}.$$

Таким образом,

$$(B \subset A) \Leftrightarrow (\forall x \in B \Rightarrow x \in A).$$

Пустое множество и само множество A называются *несобственными* подмножествами множества A:

$$\varnothing \subset A, \qquad A \subset A.$$

Все другие подмножества A называются его *собственными* подмножествами.

Пример 2.1.

1) $N \subset Z$.

2) $Q \subset R$.

3) Множество точек, лежащих внутри данного треугольника, есть подмножество множества точек, лежащих внутри окружности, описанной вокруг этого треугольника.

Очевидно, что

$$((B \subset A) \wedge (A \subset B)) \Rightarrow (A = B).$$

Часто, в зависимости от целей исследования, выделяют из данного множества A подмножества, все элементы которых обладают некоторым общим свойством, причем этим свойством обладают не все элементы множества A. Всякое такое подмножество записывают в виде

$$\{x \in A: \ \ldots\}.$$

Эта запись читается: множество всех x, принадлежащих множеству A, которые обладают свойством «...». Например, множество B натуральных чисел, меньших 3, можно записать так:

$$B = \{x \in N: \ x < 3\} = \{1, 2\}.$$

Часто встречается запись

$$M = \{x: \ \ldots\}.$$

Эта запись равносильна следующей:

$$M = \{x \in R: \ \ldots\},$$

т. е. M есть множество вещественных чисел таких, что «...». Например, множество рациональных чисел Q можно определить так:

$$Q = \left\{x: \ x = \frac{m}{n}, \ m \in Z, \ n \in N\right\}.$$

2.1.2. Интервалы. Напомним обозначения подмножеств множества R всех вещественных чисел, называемых интервалами, которые могут быть как з а м к н у т ы м и, так и открытыми с одного или с обоих концов, а также бесконечными в одну или обе стороны:

$[a, b]=\{x: a \leqslant x \leqslant b\}$ — *замкнутый интервал* (*отрезок*),

$$\left.\begin{aligned} &[a, b)=\{x: a \leqslant x < b\}, \\ &(a, b]=\{x: a < x \leqslant b\} \end{aligned}\right\} \text{— \textit{полуоткрытые интервалы},}$$

$(a, b)=\{x: a < x < b\}$ — *открытый интервал*,

$$\left.\begin{aligned} (-\infty, b]&=\{x: x \leqslant b\}, \\ (-\infty, b)&=\{x: x < b\}, \\ [a, +\infty)&=\{x: x \geqslant a\}, \\ (a, +\infty)&=\{x: x > a\}, \\ (-\infty, +\infty)&=\{x: -\infty < x < +\infty\} \end{aligned}\right\} \text{— \textit{бесконечные интервалы}.}$$

Рассмотрим основные операции над множествами.

2.1.3. Объединение множеств. *Объединением* множеств A и B или их *суммой* называется множество, состоящее из тех и только из тех элементов, которые принадлежат хотя бы одному из множеств A или B. Объединение множеств A и B обозначается

$$A \cup B.$$

Таким образом, используя символ $\vee$ (или), можно записать:

$$(x \in (A \cup B)) \Leftrightarrow ((x \in A) \vee (x \in B)).$$

Множества A и B могут при этом иметь общие элементы и не иметь таковых, например

$$A \cup A = A.$$

Пример 2.2. Рассмотрим несколько объединений множеств.

1) $N \cup Z = Z$.
2) $N \cup R = R$.
3) $R_+ \cup R_- = R$.

2.1.4. Пересечение множеств. *Пересечением* множеств A и B называется множество, состоящее из всех тех и только тех элементов, которые принадлежат каждому из множеств A и B. Пересечение множеств A и B обозначается

$$A \cap B.$$

Таким образом, можно записать

$$(x \in (A \cap B)) \Leftrightarrow ((x \in A) \wedge (x \in B))$$

или
$$A \cap B = \{x : (x \in A) \wedge (x \in B)\}.$$

Пример 2.3. Имеем
$$N \cap Z = N.$$

Если два множества A и B не имеют общих элементов, то, очевидно,
$$A \cap B = \varnothing.$$

Приведем еще несколько примеров пересечений.

Пример 2.4. Пусть A — множество прямоугольников, B — множество ромбов, M — множество квадратов. Тогда $A \cap B = M$.

Пример 2.5. Пусть A — множество четных чисел, Z — множество целых чисел. Тогда $A \cap Z = A$.

Пример 2.6. Пусть A — множество четных чисел, B — множество нечетных чисел. Тогда $A \cap B = \varnothing$.

2.1.5. Произведение множеств. Пусть даны множества A и B. Возьмем любой элемент a из A и любой элемент b из B. Составим из этих элементов пары (a, b), считая, что
$$(a_1, b_1) = (a_2, b_2) \Leftrightarrow (a_1 = a_2, b_1 = b_2),$$
т. е. будем считать пару (a, b) упорядоченной.

Множество всех упорядоченных пар (a, b), $a \in A$, $b \in B$, называется *произведением* множеств A и B. Произведение множеств A и B обозначается $A \times B$:
$$(x \in (A \times B)) \Leftrightarrow (x = (a, b);\ a \in A,\ b \in B).$$

Аналогично определяется произведение любого конечного числа множеств $A_1, A_2, \ldots, A_n$, которое обозначается
$$A_1 \times A_2 \times \ldots \times A_n.$$

Если множества равны, то их произведение называется степенью множества, так что
$$A \times A = A^2.$$

По определению полагают
$$A^n = A^{n-1} \times A.$$

Возьмем для примера два множества вещественных чисел R и R и расположим их на взаимно перпендикулярных числовых (координатных) осях. Тогда множество $R \times R = R^2$ будет представлять собой множество всех пар чисел вида (x, y) или множество всех точек координатной плоскости xOy.

Заметим, что

$$C \neq R^2$$

(C — множество комплексных чисел).

Если $X = [a, b] \subset R$, $Y = [c, d] \subset R$, то

$$\Phi = X \times Y$$

есть прямоугольник, представляющий собой произведение отрезков $[a, b]$ и $[c, d]$ (рис. 2.1).

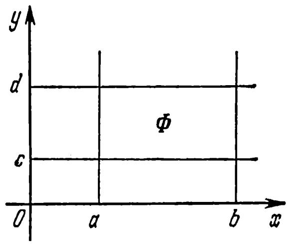


Рис. 2.1.

2.1.6. Разность множеств. *Разностью* множеств A и B называется множество, состоящее из всех тех и только тех элементов, которые принадлежат A и не принадлежат B. При этом не предполагается, что $B \subset A$. Если $B \subset A$, то разность множеств A и B называется *дополнением* множества B до множества A.

Разность множеств A и B обозначается

$$A \setminus B.$$

Таким образом, можно записать:

$$(x \in (A \setminus B)) \Leftrightarrow ((x \in A) \wedge (x \overline{\in} B))$$

или

$$(A \setminus B) = \{x \colon x \in A, \ x \overline{\in} B\}.$$

Рассмотрим примеры разностей двух множеств.

Пример 2.7. Пусть

$$Z^* = Z \setminus \{0\},$$

где Z множество всех целых чисел. Пусть далее A — множество нечетных чисел, B — множество четных чисел. Тогда

$$Z^* \setminus A = B, \qquad Z^* \setminus B = A;$$

B — дополнение A до Z^*, A — дополнение B до Z^*. Имеем

$$Z^* = A \cup B, \qquad A \cap B = \varnothing.$$

П р и м е р 2.8. Множество иррациональных чисел $R \setminus Q$ есть дополнение множества рациональных чисел до множества вещественных чисел R.

П р и м е р 2.9. Пусть A — множество всех прямоугольников, B — множество квадратов, C — множество разносторонних прямоугольников. Тогда $A \setminus B = C$ и $A \setminus C = B$.

П р и м е р 2.10. $Q \setminus R = \varnothing$.

2.1.7. Взаимно однозначное соответствие множеств. Эквивалентные множества. Мощность. Пусть A и B — два множества. Поставим вопрос: одинаково или нет количество элементов в этих множествах. Если множества к о н е ч н ы е, то мы можем сосчитать элементы каждого множества и сравнить результаты счета.

Однако можно провести указанное сравнение и другим образом. Пусть, например, необходимо сравнить число зрителей в театре и число мест в театре. Если окажется, что к началу спектакля все места заняты, то число элементов множества зрителей равно числу мест. В случае, если некоторые места окажутся пустыми, или, наоборот, некоторым зрителям не оказалось свободного места, ответ на изучаемый вопрос очевиден.

Для последнего способа сравнения множеств характерно, что для каждого элемента одного множества оказывается о д и н и т о л ь к о о д и н соответствующий ему элемент другого множества и обратно.

Этот способ дает возможность сравнить бесконечные множества. Например, если сравнить множество N натуральных чисел и множество M чисел вида $\frac{1}{N}$, то второй способ сравнения сразу убеждает нас в том, что «количество» элементов в множествах M и N одинаково. Разумеется слово «количество» для бесконечных множеств имеет условный смысл.

Проведенные рассуждения позволяют дать следующие определения.

О п р е д е л е н и е 2.1. *Пусть A и B — множества. Правило* φ, *которое соотносит каждому элементу $a \in A$ один и только один элемент $b \in B$, причем каждый элемент $b \in B$ оказывается соотнесенным одному и только одному элементу $a \in A$, называется взаимно однозначным соответствием между множествами A и B.*

О п р е д е л е н и е 2.2. *Если между множествами A и B можно установить взаимно однозначное соответствие, то говорят, что эти множества эквивалентны или что они имеют одинаковую мощность.*

Понятие мощности обобщает понятие одинаковой численности конечных множеств.

2.1.8. Счетные и несчетные множества. Пусть N — множество натуральных чисел

$$N=\{1,\ 2,\ 3,\ \ldots,\ n,\ \ldots\}.$$

Определение 2.3. *Всякое множество A, эквивалентное множеству N, называется счетным.*

Например, счетными являются множества

$$\{n^2\}=\{1,\ 4,\ 9,\ \ldots\},\qquad \{2n\}=\{2,\ 4,\ 6,\ \ldots\}.$$

Множество, не эквивалентное множеству N, называется *несчетным*.

Можно доказать, что множество всех рациональных чисел Q является счетным множеством, а множество всех вещественных чисел R несчетное[1]). При этом, так как множество рациональных чисел счетно, то множество иррациональных чисел $R\setminus Q$ несчетно, так что иррациональных чисел несравненно больше, чем рациональных. Если мы удалим из числовой прямой все рациональные числа, то останется несчетное множество точек.

2.1.9. Границы множества вещественных чисел. Читателю известно, что о множествах вещественных чисел принято говорить как о линейных точечных множествах, а об элементах множества вещественных чисел — как о точках прямой. Напомним ряд определений.

Определение 2.4. *Вещественное число M есть верхняя (нижняя) граница множества Y, $Y\subseteq R$, если для любого $y\in Y$ имеем $y\leqslant M$ $(y\geqslant M)$.*

Определение 2.5. *Точной верхней (нижней) границей множества Y, $Y\subseteq R$, называется наименьшая верхняя (наибольшая нижняя) граница.*

Имеют место обозначения:

$\sup y$ — точная верхняя граница,

$\inf y$ — точная нижняя граница.

Можно доказать, что каждое непустое множество Y $Y\subseteq R$, имеющее верхнюю (нижнюю) границу, имеет точную верхнюю (нижнюю) границу.

Множество, имеющее верхнюю и нижнюю границы, называется *ограниченным*.

---

[1]) См., например, Л. Д. Кудрявцев, Математический анализ, т. I, М., «Наука», 1970.

2.1.10. Понятие об ε-окрестности. Приведем известные читателю определения ε-окрестности.

Определение 2.6. *ε-окрестностью точки a в множестве действительных чисел называется любой открытый интервал вида* $(a-\varepsilon,\ a+\varepsilon)$, *содержащий точку* $x=a$ (рис. 2.2).

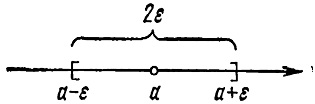


Рис. 2.2.

Это определение может быть дано в следующем виде.

Определение 2.7. *ε-окрестностью точки a в множестве действительных чисел называется множество всех точек x таких, что*

$$|x-a|<\varepsilon.$$

В дальнейшем открытый интервал, являющийся ε-окрестности точки a, будем обозначать $R_\varepsilon(a)$.

§ 2. Функция

2.2.1. Функция и отображение. Определение 2.8. *Пусть даны два непустых множества X и Y. Если каждому элементу x из X ставится в соответствие один и только один элемент y из Y*

$$(\forall x\in X)\longrightarrow y\in Y,$$

то говорят, что на множестве X задана функция f (отображение) со множеством значений в Y:

$$X\xrightarrow{f}Y,\quad \text{или}\quad f\colon\ X\longrightarrow Y.$$

Другими словами, X отображается в Y с помощью функции f (f осуществляет отображение X в Y). Тот факт, что f отображает X в Y, можно записать в виде

$$y=f(x),$$

где x — *аргумент*, $f(x)$, или y — *значение функции* f. Множества X и $f(X)$, где

$$f(X)=\{y\in Y;\ \exists x\in X,\ y=f(x)\}$$

(множество всех y из Y, для которых существует x из

X такой, что $y=f(x)$), называются соответственно *множеством задания функции* и *множеством значений функции*. Отметим, что множество значений функции $f(X)$ может как совпадать с множеством Y, так и быть его частью.

В предложенном определении общего понятия функции множества X и Y могут иметь любую природу. В дальнейшем мы будем заниматься изучением функций

$$X \xrightarrow{f} Y, \quad X \subseteq R, \quad Y \subseteq R,$$

называемых *числовыми*.

Пример 2.11. Рассмотрим функцию $y=x^2$. Здесь каждому числу x ставится в соответствие квадрат этого числа. Таким образом, для функции $y=x^2$ имеем $X=R$ и $f(X)=R_+$.

Пример 2.12. Для функции $y=\sqrt{1-x^2}$ множество задания, следуя понятию арифметического корня, определяется решением неравенства $1-x^2 \geqslant 0$, т. е. $X=[-1, 1]$. Множество значений функции, очевидно, $f(X)=[0, 1]$, являющееся частью множества $Y=[0,+\infty)$.

Способы задания функции посредством формул называются **аналитическими**. Заметим, что функция может определяться различными формулами на разных интервалах из множества R.

Пример 2.13.

$$\begin{cases} y=1, & x\in(-\infty, 0], \\ y=x^2+1, & x\in[0, \infty). \end{cases}$$

2.2.2. График функции. Пусть на множестве X задана функция f со значениями в множестве Y. Рассмотрим произведение множеств X и Y. Обозначим его через Φ:

$$X\times Y=\Phi.$$

Элемент φ множества Φ есть пара (x, y):

$$\varphi=(x, y)\in\Phi.$$

Графиком функции f

$$X \xrightarrow{f} Y$$

называется подмножество множества Φ, *определяемое соотношением*

$$f=\{\varphi\colon \varphi=(x, y),\ y=f(x)\}$$

(*график функции* f *есть множество значений* φ *таких, что* φ *есть пара* (x, y), *где* $y=f(x)$).

Возьмем на координатных осях прямоугольной системы координат два отрезка, которые будут геометрически изображать множества X и Y. Построим множество Φ — прямоугольник со сторонами X и Y. Тогда элементами множества Φ являются точки с координатами x, y.

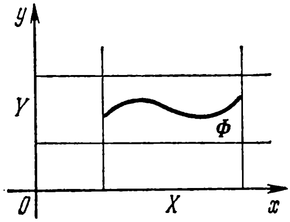


Рис. 2.3.

График функции f будет представлять собой кривую (лежащую в прямоугольнике Φ), все точки которой имеют координаты x, y, удовлетворяющие заданному соотношению $y=f(x)$ (рис. 2.3).

Заметим, что всякая прямая, параллельная оси Oy, пересекает график функции f не более чем в одной точке.

В практике решения прикладных задач, связанных с построением функций, используется графический способ задания, при котором соответствие между множествами X и Y устанавливается при помощи графика (например, снимаемого в процессе физических экспериментов с осциллографа). Функцию задают графически в тех случаях, когда аналитическое задание затруднительно и качественная картина поведения функции хорошо просматривается на графике.

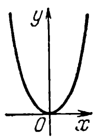


Рис. 2.4.

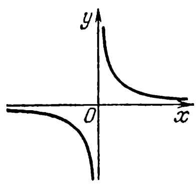


Рис. 2.5.

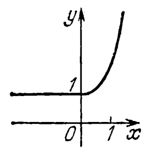


Рис. 2.6.

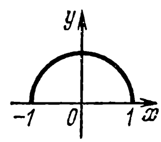


Рис. 2.7.

Заметим, что построение графика функции, заданной аналитически, обычно возможно с любой заданной степенью точности, например графики функций, рассмотренных выше, имеют вид

1) $y=x^2$ (рис. 2.4),

2) $y=\frac{1}{x}$ (рис. 2.5),

3) $\begin{cases} y=1, & x\in(-\infty,\ 0], \\ y=x^2+1, & x\in[0,\ +\infty] \end{cases}$ (рис. 2.6),

4) $y=\sqrt{1-x^2}$ (рис. 2.7).

Обратная задача — аналитическое представление функции, заданной графически, в неэлементарных случаях является очень сложной.

2.2.3. Основные характеристики числовых функций. Напомним определения основных свойств числовых функций.

Функция $y=f(x)$ называется *возрастающей* на интервале (a, b), если для любых x_1, x_2, $(x_1, x_2)\subseteq(a, b)$, имеет место соотношение

$$x_2 > x_1 \Rightarrow f(x_2) > f(x_1).$$

Функция $y=f(x)$ называется *убывающей* на интервале (a, b), если для любых x_1, x_2, $(x_1, x_2)\subseteq(a, b)$, имеет место соотношение

$$x_2 > x_1 \Rightarrow f(x_2) < f(x_1).$$

Функция $y=f(x)$ называется *неубывающей* (*невозрастающей*) на интервале (a, b), если для любых x_1, x_2, $(x_1, x_2)\subseteq(a, b)$ имеет место соотношение

$$x_2 > x_1 \Rightarrow f(x_2) \geqslant f(x_1) \qquad (f(x_2) \leqslant f(x_1)).$$

Функция $y=f(x)$ называется *ограниченной*, если ограничено соответствующее множество $f(X)$ значений функции (см. п. 2.1.9).

Функция $y=f(x)$ имеет в точке x_0 *максимум* (*минимум*) $f(x_0)$, если существует $R_\varepsilon(x_0)$-окрестность точки x_0 такая, что для

$$\forall x \in R_\varepsilon(x_0)$$

выполнено неравенство

$$f(x_0) > f(x) \qquad (f(x_0) < f(x)) \quad (x \neq x_0). \tag{2.1}$$

Если в точке x_0 функция $f(x)$ имеет максимум, то мы будем кратко писать

$$\max f(x) = f(x_0),$$

а если в точке x_0 функция $f(x)$ имеет минимум, то мы будем писать

$$\min f(x) = f(x_0).$$

Максимум и минимум функции называются *экстремумами*. В точке максимума (минимума) функция $y=f(x)$ изменяет характер поведения от возрастания на убывание (от убывания на возрастание).

Наибольшим (*наименьшим*) значением функции на множестве X_0 называется значение $f(x_0)$, $x_0 \in X_0$ такое, что $\forall x \neq x_0$, $x \in X_0$, выполнено неравенство (2.1).

Функция $y = f(x)$ называется *четной* (*нечетной*), если выполняются соотношения

$$f(-x) = f(x) \qquad (f(-x) = -f(x)).$$

Функция $y = f(x)$ называется *периодической* с периодом T, если выполняется соотношение

$$f(x+T) = f(x).$$

Изучение описанных выше свойств дает возможность проводить исследование поведения функции.

2.2.4. Арифметические операции на множестве числовых функций. Рассмотрим понятия суммы, произведения и частного двух функций.

Суммой двух функций f_1 и f_2 называется функция f, которая каждому числу x ставит в соответствие число $f_1(x) + f_2(x)$.

Пусть функция f_1 определена на множестве X_1, а функция f_2 определена на множестве X_2; тогда областью определения функции f $(f(x) = f_1(x) + f_2(x))$ является множество X, являющееся пересечением множеств X_1 и X_2.

Пример 2.14. Рассмотрим функцию

$$f(x) = \sqrt{1-x^2} + \sqrt{x^2-1},$$
$$f_1(x) = \sqrt{1-x^2}, \qquad X_1 = \{x \in R,\ |x| \leqslant 1\},$$
$$f_2(x) = \sqrt{x^2-1}, \qquad X_2 = \{x \in R,\ |x| \geqslant 1\}.$$

Область определения функции $f(x)$

$$X = X_1 \cap X_2 = \{-1,\ 1\}$$

— две точки. В этих точках $f(x) = 0$ (рис. 2.8).

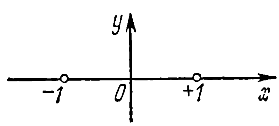


Рис. 2.8.

Аналогично для функций f_1 и f_2

$$X \xrightarrow{f_1} Y, \qquad x \in X_1 \subset X,$$
$$X \xrightarrow{f_2} Y, \qquad x \in X_2 \subset X,$$

определяются *произведение* f $(f(x)=f_1(x)f_2(x))$

$$X \xrightarrow{f_1 \cdot f_2} Y, \quad x \in X_1 \cap X_2,$$

и *частное* f $\left(f(x)=\dfrac{f_1(x)}{f_2(x)}\right)$

$$X \xrightarrow{\frac{f_1}{f_2}} Y, \qquad x \in X_1 \cap X_2, \quad f_2(x) \neq 0.$$

2.2.5. Понятие об образе и прообразе. Классификация отображений. Пусть множество X отображается в множество Y при помощи функции f:

$$X \xrightarrow{f} Y.$$

Пусть A — некоторое подмножество X:

$$A \subset X.$$

Тогда множество

$$B=f(A)=\{y \in Y\colon\ \forall x \in A,\ y=f(x)\}$$

называется *образом* множества A при отображении f, причем всегда $B \subset Y$ (рис. 2.9).

Пусть B — некоторое подмножество множества Y. Тогда множество

$$f^{-1}(B)=\{x \in X\colon\ \forall y \in B,\ y=f(x)\}, \qquad f^{-1}(B) \subset X$$

называется *прообразом* множества B. Множество $f^{-1}(B)$ есть та часть множества X, которая отображается в B при помощи функции f.

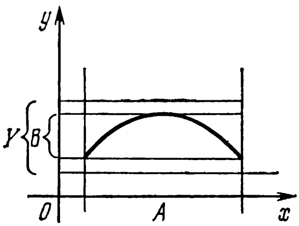


Рис. 2.9.

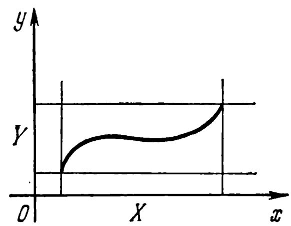


Рис. 2.10.

Отображение такое, что $Y=f(X)$, т. е. такое, что образы точек множества X заполняют все множество Y, называется *сюръективным* или отображением «на» (рис. 2.10) и обозначается

$$X \underset{\text{на}}{\xrightarrow{f}} Y.$$

Заметим, что различные точки множества X могут при сюръективном отображении иметь один и тот же образ из Y.

Отображение такое, при котором каждому значению x из X соответствует одно значение y из Y и, обратно, прообразом $y \in f(X)$ является одно значение x, называется *инъективным* или отображением «в» и обозначается

$$X \underset{\text{в}}{\overset{f}{\longrightarrow}} Y.$$

При инъективном отображении множество X может отображаться не на все множество Y, а в его часть.

Взаимно однозначное отображение «на», т. е. отображение, являющееся одновременно инъективным или сюръективным, называется *биективным.*

Отметим, что отображение

$$X \underset{\text{на}}{\overset{f}{\longrightarrow}} X\colon\ f(x)=x$$

называется *тождественным преобразованием.*

2.2.6. Понятие об обратной функции. Свойство биективной функции. Сужение функции. Отметим прежде всего, что понятие «обратная функция» вводится только для инъективных функций.

Пусть множество X отображается в Y при помощи некоторой инъективной функции f:

$$X \underset{\text{в}}{\overset{f}{\longrightarrow}} Y.$$

Пусть далее

$$Y_0 = f(X),$$

т. е. Y_0 — образ множества X:

$$Y_0 = \{y\colon\ y \in Y,\ y = f(x)\}.$$

Тогда, так как f инъективна, то для любого $y \in Y_0$ существует и притом единственный (!) элемент $x \in X$ такой, что $y = f(x)$:

$$\forall y \in Y_0 \exists!\ x \in X,\ y = f(x).$$

Тем самым на множестве Y_0 определена некоторая функция. Эта функция называется *обратной* к функции f и обозначается f^{-1}:

$$Y_0 \underset{\text{в}}{\overset{f^{-1}}{\longrightarrow}} X$$

или

$$x = f^{-1}(y).$$

Заметим, что если функция f^{-1} биективна, то функция, обратная обратной, есть сама функция f:

$$(f^{-1})^{-1} = f.$$

Пример 2.15. Построим обратную функцию для функции $y = \sqrt{x}$. В области определения $[0, +\infty)$ эта функция инъективна. Перепишем функцию в виде

$$x = y^2, \qquad y \in [0, +\infty).$$

Таким образом, обратной функцией для функции $y = \sqrt{x}$ будет функция $y = x^2$, $x \in [0, +\infty)$.

Пусть задана функция f на множестве X, так что

$$X \xrightarrow[\text{в}]{f} Y.$$

Возьмем X_0 — часть множества X

$$X_0 \subset X$$

и определим функцию

$$f_0\colon X_0 \longrightarrow Y$$

равенством

$$f_0(x) = f(x) \quad \text{при } x \in X_0.$$

В таком случае функция f_0 называется *сужением* функции f.

В рассмотренном выше примере функция $y = x^2$ при $x \in [0, +\infty)$ является сужением функции $y = x^2$, где $x \in (-\infty, +\infty)$.

2.2.7. Понятие о суперпозиции функций. Пусть

$$X \xrightarrow[\text{в}]{\varphi} Y,$$

т. е.

$$\forall x \in X \longrightarrow y \in Y, \qquad y = \varphi(x).$$

Пусть далее

$$Y \xrightarrow[\text{в}]{f} Z,$$

т. е.

$$\forall y \in Y \longrightarrow z \in Z, \qquad z = f(y).$$

Тогда, если существует ψ такая, что

$$X \xrightarrow[\text{в}]{\psi} Z,$$

т. е.

$$\forall x \in X \longrightarrow z \in Z, \qquad z = \psi(x),$$

то функция ψ называется *сложной* и является *суперпозицией* функций f и φ:

$$\psi = f(\varphi) \quad \text{или} \quad z = f(\varphi(x)).$$

При этом аргумент x будем называть *независимой переменной*, а аргумент $y = \varphi(x)$ — *промежуточным аргументом*.

Например, функция $z = \lg(x+1)$ является суперпозицией линейной функции $y = x+1$ и логарифмической функции $z = \lg y$.

2.2.8. Явные и неявные функции. Как показывалось выше, функция f может быть задана уравнением, связывающим переменные x и y

$$y = f(x),$$

разрешенным относительно y. Такое задание функции называется *явным*.

Например,

$$y = 2x+1, \quad y = x^2, \quad y = 2^x, \quad y = \lg x.$$

Если функция f задана уравнением, связывающим переменные x и y, неразрешенным относительно y, то такое задание функции называется *неявным*.

Рассмотрим, например, функцию $xy = 1$, заданную в неявном виде. В явном виде эта функция задается уравнением $y = 1/x$, и каждому ненулевому значению x ставит в соответствие обратное ему число y. Здесь, очевидно,

$$X = \{x \in R, \ x \neq 0\}, \qquad Y = \{y \in R, \ y \neq 0\}.$$

Разрешив уравнение, которым задана неявная функция, относительно y, мы переходим к явному заданию (практически такое разрешение возможно далеко не всегда).

Уравнение, задающее неявную функцию, записывают в виде

$$F(x, y) = 0.$$

2.2.9. Параметрическое задание функции. Рассмотрим две функции

$$x = \varphi(t), \qquad y = \psi(t), \tag{2.2}$$

и предположим, что в рассматриваемой области изменения t функция $x=\varphi(t)$ инъективна. Тогда (см. п. 2.2.6) существует обратная функция

$$t=g(x). \tag{2.3}$$

Подставляя (2.3) во вторую из функций (2.2), получим

$$y=\psi(g(x)). \tag{2.4}$$

Таким образом, мы показали, что задание двух функций (2.2) равносильно заданию функции (2.4). Это видно и непосредственно из (2.2), ибо для каждого значения t из (2.2) находится пара значений x и y, соответствующих друг другу.

Задание функции в виде (2.2) называется *параметрическим*, t — *параметр*.

2.2.10. Элементарные функции. Классификация элементарных функций. В этой книге мы рассматриваем, за редким исключением, так называемые элементарные функции. Сюда относятся следующие классы функций:

1. $y=c$, где $c=\text{const}$.

2. $y=x^{\mu}$ — степенная функция.

Для степенной функции: $\mu\in R$, $x=0$ допускается лишь при $\mu>0$, если μ — целое число, или $\mu=\frac{1}{2m+1}$, где m — целое число, то $x\in R$; если $\mu=\frac{1}{2m}$, где m — целое число, или если μ — иррациональное число, то $x\in R_{+}$.

3. $y=a^{x}$, $a\in(0,\ 1)\cup(1,\ +\infty)$, — показательная функция.

4. $y=\log_a x$, $x\in(0,\ +\infty)$, $a\in(0,\ 1)\cup(1,\ +\infty)$, — логарифмическая функция.

5[1]. $y=\sin x$; $y=\cos x$; $y=\operatorname{tg} x$, $x\in\left(-\frac{\pi}{2}+n\pi,\ \frac{\pi}{2}+n\pi\right)$; $y=\operatorname{ctg} x$, $x\in(n\pi,\ \pi+n\pi)$, — тригонометрические функции.

6. $y=\arcsin x$, $x\in[-1,\ 1]$; $y=\arccos x$, $x\in[-1,\ 1]$; $y=\operatorname{arctg} x$, $y=\operatorname{arcctg} x$, — обратные тригонометрические функции.

$y=\arcsin x$ — функция, обратная к сужению функции $y=\sin x$ на промежуток $\left[-\frac{\pi}{2},\ \frac{\pi}{2}\right]$;

---

[1]) Последующие функции подробно изучаются в главе 10 «Тригонометрические функции». Краткие сведения об этих функциях были даны в средней школе.

$y=\arccos x$ — функция, обратная к сужению функции $y=\cos x$ на промежуток $[0, \pi]$;

$y=\operatorname{arctg} x$ — функция, обратная к сужению функции $y=\operatorname{tg} x$ на промежуток $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$;

$y=\operatorname{arcctg} x$ — функция, обратная к сужению функции $y=\operatorname{ctg} x$ на промежуток $(0, \pi)$.

Указанные классы функций будем называть простейшими классами элементарных функций. Если функция $f(x)$ принадлежит одному из этих классов или может быть получена из таких функций при помощи четырех арифметических действий и суперпозиций функций (операций взятия функций от функции), последовательно примененных конечное число раз, то мы будем называть ее *элементарной функцией*. Например, функции

$$1)\ y=\sqrt{a^2-x^2}, \qquad 2)\ y=\frac{3^x+3^{-x}}{2},$$

$$3)\ y=\lg x^2, \qquad 4)\ y=2x^2,$$

$$5)\ y=(x+1)^2, \qquad 6)\ y=\frac{x^2+1}{x}$$

— суть элементарные функции; функция $y=|x|$ — тоже элементарная, ибо она может быть представлена в виде $y=\sqrt{x^2}$.

Функция, заданная формулой вида

$$P(x)=a_0x^n+a_1x^{n-1}+\ldots+a_{n-1}x+a_n,$$

где $a_0, a_1, \ldots, a_n$ — постоянные вещественные числа, называется *целой рациональной* функцией или *многочленом* (*полиномом*) степени n.

Функция

$$y=\frac{P(x)}{Q(x)}, \tag{2.5}$$

где $P(x)$ и $Q(x)$ — многочлены, называется *дробно-рациональной* функцией или *рациональной дробью*. Рациональная дробь (2.5) называется *правильной* (*неправильной*), если степень многочлена $P(x)$, стоящего в числителе, меньше (больше или равна) степени многочлена $Q(x)$, стоящего в знаменателе.

2.2.11. Показательная функция. Определение 2.9. *Показательной функцией называется функция*

$$y=a^x, \quad x\in R, \quad a\in(0, 1)\cup(1, \infty).$$

Напомним основные свойства показательной функции:

1) показательная функция инъективна;

2) при всех $x \in R$ имеем $a^x > 0$;

3) при $a \in (1, \infty)$ функция неограниченно возрастает, при $a \in (0, 1)$ функция убывает, принимая значения, сколь угодно близкие к нулю.

В соответствии с этими свойствами показательной функции при $a > 1$ график ее обладает следующими свойствами (рис. 2.11).

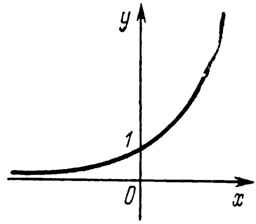


Рис. 2.11.

1. Весь график расположен в верхней полуплоскости, т. е. там, где ординаты положительны.

2. Всякая прямая, параллельная оси Oy, пересекает график и притом только в одной точке.

3. Из двух точек графика выше расположена та, которая лежит правее, т. е. по мере продвижения слева направо график поднимается вверх.

4. На графике имеются точки, лежащие выше любой прямой, параллельной оси Ox. На графике имеются точки, лежащие ниже любой прямой, проведенной в верхней полуплоскости параллельно оси Ox.

В левой своей части график, если наблюдать за ним справа налево, все ближе подходит к оси Ox, как бы стремясь коснуться ее. Однако график нигде не касается оси Ox.

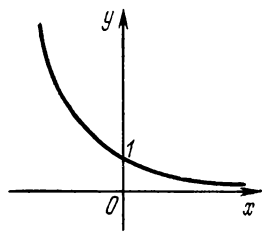


Рис. 2.12.

5. Всякая прямая, параллельная оси Ox и лежащая в верхней полуплоскости, пересекает график и притом только в одной точке.

6. При всех a график проходит через точку $(0, 1)$. Это объясняется тем, что при любом положительном a

$$a^0 = 1.$$

Если $a < 1$ график функции $y = a^x$ имеет вид, указанный на рис. 2.12.

2.2.12. Логарифмическая функция. Связь с показательной функцией. Напомним определение логарифма.

Определение 2.10. *Логарифмом числа N по основанию a называется показатель степени, в которую надо возвести a, чтобы получить N, т. е.*

$$N = a^{\log_a N}.$$

Определение 2.11. *Логарифмической функцией называется функция*

$$y=\log_a x,\ x\in(0,\ \infty),\ a\in(0,\ 1)\cup(1,\ \infty).$$

В силу инъективности функции $y=a^x$ всякое положительное число y при $a\in(0,\ 1)\cup(1,\ \infty)$ имеет единственный логарифм

$$x=\log_a y.$$

Таким образом, функции $y=a^x$ и $y=\log_a x$ — взаимосвязаны. Рассмотрим подробно связь между логарифмической и показательной функцией.

Показательная функция дает описание изменения степени числа a в зависимости от изменения показателя степени; логарифмическая функция дает описание изменения показателя степени в зависимости от изменения степени числа a.

Иными словами, показательная функция дает описание изменения числа в зависимости от изменения его логарифма по основанию a; логарифмическая функция дает описание изменения логарифма числа по основанию a в зависимости от изменения числа.

Таблица значений показательной функции при данном основании a является одновременно и таблицей значений логарифмической функции при том же основании a.

График показательной функции $y=a^x$ является одновременно и графиком логарифмической функции $x=\log_a y$ (см. рис. 2.11, 2.12), только в одном случае значения независимого переменного отложены на горизонтальной оси, а значения функции — на вертикальной; в другом случае, наоборот, значения функции отложены на горизонтальной оси, а значения независимого переменного — на вертикальной.

Показательная функция при основании a и логарифмическая функция при том же основании представляют пример двух обратных друг другу функций.

Обычно принято значения независимого переменного обозначать буквой x и откладывать на горизонтальной оси, а значения функции обозначать буквой y и откладывать на вертикальной оси.

Если придерживаться этого правила, то для функции $y=a^x$ обратной будет функция $y=\log_a x$, а графиком функции $y=\log_a x$ будет служить кривая, получаемая из графика функции $y=a^x$ (рис. 2.13) посредством преобразования симметрии относительно прямой $y=x$, т. е. посредством переноса каждой точки $M(a, b)$ в точку $M_1(b, a)$.

Если у логарифмической функции за основание принять число $e=2,718281828459045...$ (об этом числе см. подробнее в пп. 3.1.4 и 3.2.3), то для логарифмической функции вводится особое обозначение:

$$y=\log_e x=\ln x,$$

и функция эта называется *натуральным логарифмом* x.

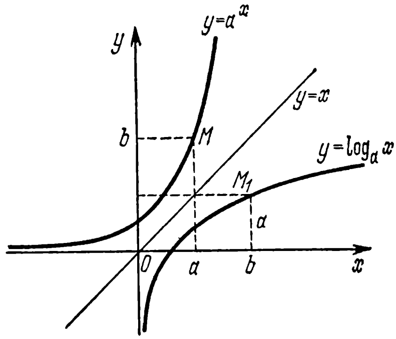


Рис. 2.13.

Очень часто от логарифмов

$$y=\log_a x \qquad (2.6)$$

при основании a надо перейти к логарифмам при другом основании. По определению логарифма (2.6) можно переписать так:

$$x=a^y.$$

Беря от правой и левой частей логарифм при основании b, получим

$$\log_b x=y\log_b a,$$

откуда

$$y=\log_a x=\frac{\log_b x}{\log_b a}.$$

ВОПРОСЫ ДЛЯ ПОВТОРЕНИЯ К ГЛАВЕ 2

1. Приведите примеры множеств.

2. Что такое подмножество множества?

3. Дайте определения основных операций над множествами.

4. Установите взаимно однозначное соответствие между двумя (закрытыми) интервалами на числовой прямой.

5. Поставим в соответствие каждому человеку его имя. Является ли это взаимно однозначным соответствием между множеством людей и множеством имен?

6. Сколькими способами можно установить взаимно однозначное соответствие между множествами $\{A, B, 1, 5\}$ и $\{1, 2, 3, 4\}$?

7. Докажите следующие равенства:

1°. $A\cap B=B\cap A$.

2°. $(A\cap B)\cap C=A\cap(B\cap C)$.

3°. $A \cup B = B \cup A$.
4°. $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$.
5°. $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$.
6°. $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$.
7°. $A \cap A = A$.
8°. $A \cup A = A$.
9°. $A \cup \varnothing = A$.

8. Дайте определение функции (отображения).

9. Дайте определения основных характеристик числовых функций.

10. Что называется образом (прообразом) множества при заданном отображении?

11. Что называется обратной функцией? Для каких функций можно построить обратные функции?

12. Что называется суперпозицией функций (сложной функцией)?

13. Какие способы задания функции вам известны?

14. Перечислите элементарные функции; укажите их области определения и области изменения; постройте графики.

15. Опишите свойства показательной и логарифмической функции.

УПРАЖНЕНИЯ К ГЛАВЕ 2

1. Пусть $f(x) = x^2 - 3x + 2$. Найти $f(0)$, $f(2)$, $f(3)$.

2. Пусть $f(x) = 2x^2 - 4x + 5$. Убедитесь в том, что $f(-1) = f(3)$. Что больше: $f(0)$ или $f(1)$.

3. Пусть $\varphi(u) = u^2$. Вычислите $\dfrac{\varphi(3) - \varphi(2)}{\varphi(3) + \varphi(2)}$.

4. Пусть $f(x) = x^2 + 1$. Напишите выражение для $f(x+2)$.

5. Пусть $f(x) = x + 1$, $\varphi(x) = x - 1$. Напишите выражения для

$$\text{а) } \frac{f(x) + \varphi(x)}{f(x) - \varphi(x)}, \quad \text{б) } \frac{f(x) + \varphi(y)}{f(x)\varphi(y)}, \quad \text{в) } \frac{f(x) + \varphi(y)}{f(x \cdot y)}.$$

6. Дайте аналитическую запись обратной функции (с указанием области определения) для следующих функций:

$$\text{а) } y = \frac{1}{2}x - 1, \quad \text{б) } y = x^5, \quad \text{в) } y = 3^x, \quad \text{г) } y = \sqrt[3]{1 - x^3}.$$

7. Даны функции $y = (4 - u)^2$, $u = 2x + 3$. Выразите формулой функцию $y = y(x)$.

8. Даны функции $f(x) = \sqrt{x^2 - 1}$, $\varphi(x) = x - 1$. Каковы области определения функций:

$$\text{а) } f(\varphi(x)), \quad \text{б) } \varphi(f(x)), \quad \text{в) } f(f(x)), \quad \text{г) } \varphi(\varphi(x))?$$

9. Даны функции $f(u) = 1 - u^2$, $\varphi(x) = 1 - 2x$. Выразите формулой функцию $f(\varphi(x))$.

10. Найдите область определения и область изменения каждой из следующих функций:

$$\text{а) } y = \sqrt{1 - x^2}, \qquad \text{б) } y = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}},$$

$$\text{в) } y = \sqrt{x - 1}, \qquad \text{г) } y = \sqrt{1 - x},$$

$$\text{д) } y = \sqrt{x^2 - 4}, \qquad \text{е) } y = \sqrt{|x|},$$

ж) $y=\frac{x}{x-2}$, з) $y=\frac{1}{x^2-1}$,

и) $y=\frac{x}{x^2-1}$, к) $y=2x\sqrt{1-x^2}$.

11. Найдите область определения и область изменения функций:

а) $y=3^{1/x}$, б) $y=\frac{3^x+3^{-x}}{2}$,

в) $y=\frac{3^x-3^{-x}}{2}$, г) $y=\frac{3^x-3^{-x}}{3^x+3^{-x}}$.

12. Найдите область определения и область изменения функций:

а) $y=\lg(x^2-3x+2)$,
б) $y=\lg(x^2+x+1)$,
в) $y=\lg(-x^2+x-1)$.

13. Укажите, какие из перечисленных функций являются четными:

а) $y=x^2+|x|$, б) $y=x^2-x$, в) $y=x^2+c$,

г) $y=kx$, д) $y=x^2-x$, е) $y=\frac{k}{x}$,

ж) $y=\frac{1}{x^2-1}$.

14. Укажите, какие из перечисленных функций являются нечетными!

а) $y=x|x|$, б) $y=||x|-x|$, в) $y=\lg|x|$,

г) $y=|\lg x|$, д) $y=\frac{1}{x^2+1}$,

е) $y=\frac{x}{x^2-1}$, ж) $y=\frac{3^x+3^{-x}}{2}$.

15. Докажите, что функция $y=\frac{f(x)+f(-x)}{2}$ является четной.

16. Докажите, что функция $y=\frac{f(x)-f(-x)}{2}$ является нечетной.

17. Представьте любую функцию $f(x)$, заданную в интервале, симметричном относительно точки $x=0$, в виде суммы четной и нечетной функций.

18. Как по графику функции $y=f(x)$ построить графики следующих функций:

а) $y=f(x)+b$, б) $y=f(x-a)$, в) $y=-f(x)$,
г) $y=kf(x)$, д) $y=f(-x)$, е) $y=f(kx)$,
ж) $y=kf(m(x-a))+b$, з) $y=f(mx+n)$,
и) $y=f(|x|)$, к) $y=|f(x)|$, л) $y=|f(|x|)|$.

ГЛАВА 3

ПРЕДЕЛ И НЕПРЕРЫВНОСТЬ ФУНКЦИИ

§ 3.1. Предел числовой последовательности

3.1.1. Числовая последовательность как функция натурального аргумента. Множество N — множество натуральных (целых положительных) чисел, как уже отмечалось, обладает замечательным свойством, сформулированным в виде закона (аксиомы) упорядоченности натуральных чисел. Именно — для любых двух произвольных натуральных чисел a и b (для $\forall a,\ b \in N$) справедливо утверждение: либо a меньше или равно b, либо b меньше или равно a. Указанное свойство множества N позволяет нам производить «пересчет» осязаемых и абстрактных объектов, связывая с последними тем или иным образом элементы множества N.

Формализуя сказанное выше, определим на множестве N некоторую функцию (отображение)

$$N \underset{\text{в}}{\overset{f}{\longrightarrow}} A. \tag{3.1}$$

Отображение множества N в множество A называется *последовательностью элементов из* A. При этом множество A, очевидно, может содержать объекты произвольной природы и задание последовательности элементов из A состоит в том, что каждому элементу a' из некоторого подмножества A' множества A сопоставляется определенный элемент n из множества N и наоборот: для $\forall n \in N$ $\exists$ элемент $a' \in A' \subset A$, ему соответствующий.

Отображение может быть не взаимно однозначным: один и тот же элемент из A может служить образом многих различных чисел из N.

Будем обозначать значения функции (3.1) (элементы последовательности) малыми буквами латинского алфавита, снабженными индексами, равными соответствующим значениям аргумента

$$a_1=f(1),\quad a_2=f(2),\ \ldots,\ a_n=f(n),\ \ldots$$

или

$$\{a_n\}=a_1,\ a_2,\ \ldots,\ a_n,\ \ldots \tag{3.2}$$

При этом a_n называется *общим членом* последовательности (3.2).

Отметим, что элементы последовательности (3.2) не обязательно различны. Число различных элементов конечно или счетно.

Таким образом, задать последовательность элементов из некоторого множества A значит указать закон, по которому любому фиксированному числу ($\forall n \in N$) сопоставляется определенный элемент из A а «пересчет» объектов множества A' состоит в том, что по заданному элементу $n \in N$ (номеру) мы можем указать объект $a \in A'$, соответствующий этому номеру.

Две последовательности

$$\{a_n\}=a_1,\ a_2,\ \ldots,\ a_n,\ \ldots \quad \text{и} \quad \{b_n\}=b_1,\ b_2,\ \ldots,\ b_n,\ \ldots$$

называются *равными*, если $a_n=b_n$ для любого n из N (для $\forall n \in N$), т. е. последнее равенство является тождеством.

3.1.2. Предел числовой последовательности, геометрическое истолкование. Интуитивное представление о пределе связано с представлением о некотором «движении». Продвигаясь по упорядоченному множеству N, мы наблюдаем за поведением членов последовательности $\{a_n\}$, т. е. мы ожидаем, что с увеличением номера члены последовательности должны все меньше и меньше отличаться от некоторого числа a, называемого пределом данной последовательности.

Несмотря на естественность данного представления, строгая математическая формулировка требует обратить процесс указанного рассуждения. Определим прежде всего конечную цель, именно нам необходимо, чтобы члены последовательности неограниченно приближались к некоторому числу a. Следовательно, ставим вопрос: за счет чего мы можем добиться требуемой близости?

Рассмотрим последовательность с общим членом $a_n = 1/n$:

$$1,\ \frac{1}{2},\ \frac{1}{3},\ \frac{1}{4},\ \ldots,\ \frac{1}{n},\ \ldots \tag{3.3}$$

При неограниченном возрастании n члены последовательности становятся все меньше и меньше, т. е. все меньше и меньше отличаются от нуля. Действительно, начиная с 10-го члена последовательности, все остальные члены меньше 0,1 после 10000-го меньше 0,0001 и т. д.

Изобразим члены последовательности (3.3) в виде точек на числовой оси (рис. 3.1). Легко видеть, что точки числовой оси, соответствующие членам последовательности,

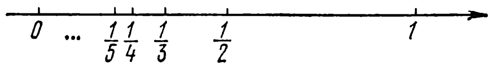


Рис. 3.1.

сгущаются около точки 0. Выберем на числовой оси симметричный интервал $R_\varepsilon(0)$, с центром в точке 0 длины 2ε (ε — произвольное положительное число). Если положить $\varepsilon = 2$, то все члены нашей последовательности будут лежать внутри интервала $R_2(0)$. Если же мы положим $\varepsilon = 0{,}2$, то несколько первых членов, именно

$$1,\ \frac{1}{2},\ \frac{1}{3},\ \frac{1}{4},\ \frac{1}{5},$$

окажутся лежащими вне интервала $R_{0,2}(0)$ однако все члены, начиная с a_6, именно

$$\frac{1}{6},\ \frac{1}{7},\ \frac{1}{8},\ \ldots,$$

будут лежать внутри интервала $R_{0,2}(0)$. Далее, выбрав ε существенно более малым, например $\varepsilon = 0{,}0001$, мы можем заметить, что только первые 10000 членов не попадут в интервал $R_{0,0001}(0)$, тогда как бесконечное количество членов, начиная с a_{10001}, окажется внутри интервала $R_{0,0001}(0)$. Очевидно, что приведенное рассуждение справедливо для любого ε, именно каким бы ни было выбрано ε, мы всегда можем указать число N настолько большое, что все члены последовательности (3.3), для которых $n \geqslant N$ будут лежать внутри интервала $R_\varepsilon(0)$ и только конечное число членов

$$a_1,\ a_2,\ \ldots,\ a_{N-1}$$

будет находиться вне этого интервала.

В приведенном рассуждении два существенных момента. Первый: длина интервала $R_\varepsilon(0)$ определяется произвольно. Второй: именно по длине интервала $R_\varepsilon(0)$, по числу ε может быть подобрано число N такое, что все члены последовательности с номерами, превосходящими N, находятся в интервале $R_\varepsilon(0)$.

Теперь мы можем сформулировать определение предела последовательности.

Число a называется пределом последовательности $\{a_n\}$, если для любого положительного числа ε найдется такое положительное число N, зависящее от ε, что для всех значений $n \geqslant N$ выполнено неравенство

$$|a_n - a| < \varepsilon.$$

Тот факт, что последовательность имеет предел a (стремится к числу a), выражается следующей символической записью:

$$\lim_{n \to \infty} a_n = a.$$

Таким образом[1]),

$$\left(\lim_{n \to \infty} a_n = a\right) \Leftrightarrow (\forall \varepsilon > 0, \exists N = N(\varepsilon): \forall n \geqslant N, a_n \in R_\varepsilon(a)).$$

Пример 3.1. Найти предел последовательности (3.3) с общим членом, равным $1/n$.

Решение. Имеем $a_n = 1/n$. Требуется найти $\lim\limits_{n \to \infty} a_n$. Исходя из приведенных выше рассуждений, мы можем предполагать, что данный предел равен нулю. Необходимо, следуя определению, показать, что наше предположение верно, т. е. по любому наперед заданному $\varepsilon > 0$ нам необходимо найти такой номер $N = N(\varepsilon)$, чтобы для всех $n \geqslant N$ было выполнено неравенство $\left|\dfrac{1}{n} - 0\right| < \varepsilon$, или $1/n < \varepsilon$, откуда $n > 1/\varepsilon$.

Тогда, положив $N = [1/\varepsilon] + 1$ [2]), получим, что, выбрав $\forall \varepsilon > 0$, мы можем с уверенностью утверждать, что для всех $n \geqslant N = [1/\varepsilon] + 1$ выполнено неравенство

$$\left|\frac{1}{n} - 0\right| < \varepsilon,$$

т. е. мы указали такой номер N, начиная с которого все члены последовательности (3.3) попадают в ε-окрестность нуля, следовательно, число 0 есть предел последовательности $\{1/n\}$

$$\lim_{n \to \infty} \frac{1}{n} = 0.$$

---

[1]) Утверждение $a_n \in R_\varepsilon(a)$ имеет смысл тогда и только тогда, когда выполнено неравенство $|a_n - a| < \varepsilon$.

[2]) $[x]$ — наименьшее целое число, не превосходящее x.

Изучая поведение членов последовательности при неограниченном возрастании их номеров, мы дали формулировку того утверждения, что последовательность $\{a_n\}$ стремится к какому-либо числу a. Но наряду с изучением указанного утверждения, очевидно, также необходимо выяснить содержание следующего: последовательность $\{a_n\}$ не стремится к числу b. Символически это утверждение будем обозначать так:

$$\lim_{n \to \infty} a_n \neq b.$$

Легко видеть, что указанные утверждения являются противоположными, поэтому, имея в руках точную формулировку первого, мы можем получить точную формулировку второго простым отрицанием. Именно: число b не является пределом последовательности $\{a_n\}$, если существует такое положительное число ε, что для любого числа N найдется такой номер $n \geqslant N$, что для этого номера n будет выполнено неравенство

$$|a_n - b| \geqslant \varepsilon$$

или

$$\left(\lim_{n \to \infty} a_n \neq b\right) \Leftrightarrow (\exists \varepsilon > 0 : \forall N \exists n \, (n \geqslant N), \ a_n \overline{\in} R_\varepsilon(b)).$$

Пример 3.2. Показать, что предел последовательности $\{1/n\}$ не равен 1 $\left(\lim\limits_{n \to \infty} (1/n) \neq 1\right)$.

Решение. Положив $\varepsilon = 1/2$, получим, что для $\forall n > 2$ выполнено неравенство

$$\left|\frac{1}{n} - 1\right| > \frac{1}{2}. \tag{3.4}$$

Следовательно, для $\forall N$ мы можем выбрать n так, что будет выполнено неравенство (3.4), в частности, если $N > 2$, то достаточно положить $n = N$.

Таким образом, необходимое число ε найдено и действительно

$$\lim_{n \to \infty} \frac{1}{n} \neq 1.$$

Если последовательность $\{a_n\}$ имеет конечный предел a, то она называется *сходящейся*. Говорят также, что в этом случае она *сходится* к числу a.

Легко убедиться, что если последовательность $\{a_n\}$ имеет конечный предел a, то она ограничена, т. е. существует такое число M, что

$$|a_n| \leqslant M \quad \forall n. \tag{3.5}$$

В самом деле, это следует из того, что для любого $\varepsilon > 0$ лишь **конечное** число $N(\varepsilon)-1$ членов последовательности $\{a_n\}$ лежит вне $R_\varepsilon(a)$, так что все эти члены не превосходят по абсолютной величине некоторого числа $M_1 > 0$. Для всех остальных членов последовательности $\{a_n\}$ мы имеем оценку

$$|a_n - a| < \varepsilon \quad \forall n \geqslant N(\varepsilon).$$

Поэтому

$$|a_n| = |a + a_n - a| \leqslant |a| + |a_n - a| \leqslant |a| + \varepsilon \quad \forall n \geqslant N(\varepsilon),$$

так что

$$|a_n| \leqslant |a| + \varepsilon \qquad \forall n \geqslant N(\varepsilon).$$

Теперь достаточно взять

$$M = \max(M_1, \ |a| + \varepsilon), \tag{3.6}$$

чтобы имела место оценка (3.5).

Не следует думать, что всякая последовательность имеет предел. Напротив, даже ограниченная последовательность может не иметь предела.

Например, последовательность с общим членом

$$a_n = (-1)^n,$$

очевидно, ограничена ($M = 1$), но предела не имеет, принимая поочередно бесконечное число раз значения -1 и $+1$.

Выше мы предполагали, что предел a есть некоторое **конечное** число. Дадим теперь понятие о *несобственных* пределах $+\infty$ и $-\infty$.

Будем говорить, что последовательность $\{a_n\}$ имеет своим пределом *несобственное число* $+\infty$ ($a_n \to +\infty$), если

$$\forall E > 0, \quad \exists N = N(E): \forall n \geqslant N, \quad a_n > E.$$

Аналогично, если

$$\forall E > 0, \quad \exists N = N(E): \forall n \geqslant N, \quad a_n < -E,$$

то будем говорить, что последовательность $\{a_n\}$ имеет своим пределом *несобственное число* $-\infty$ ($a_n \to -\infty$).

В качестве примера последовательности, имеющей своим (несобственным) пределом $+\infty$, можно взять последовательность с общим членом

$$a_n = n^2.$$

Действительно, пусть E — любое положительное число. Неравенство

$$n^2 > E$$

будет выполнено для всех $n \geqslant N = [\sqrt{E}] + 1$.

Аналогично последовательность с общим членом

$$a_n = -n^2$$

имеет своим пределом несобственное число $-\infty$.

3.1.3. Теорема об единственности предела последовательности. В этом пункте, в предположении существования предела последовательности, мы будем изучать вопрос об его единственности, т. е. вопрос о том, может ли одна и та же последовательность иметь два и более различных пределов.

Теорема 3.1. *Если последовательность $\{a_n\}$ имеет предел, то этот предел только один.*

Доказательство. Предположим обратное. Пусть

$$\lim_{n \to \infty} a_n = x_1 \quad \text{и} \quad \lim_{n \to \infty} a_n = x_2 \qquad (x_1 \neq x_2). \tag{3.7}$$

Тогда, выбрав произвольное $\varepsilon > 0$, мы можем утверждать, что

$$\exists N_1 = N_1(\varepsilon), \qquad \forall n \geqslant N_1\colon\ |a_n - x_1| < \varepsilon$$

и

$$\exists N_2 = N_2(\varepsilon), \qquad \forall n \geqslant N_2\colon\ |a_n - x_2| < \varepsilon.$$

Далее, выбрав

$$N = \max(N_1,\ N_2),$$

будем иметь, что для $\forall n \geqslant N$ справедливо

$$|a_n - x_1| < \varepsilon \quad \text{и} \quad |a_n - x_2| < \varepsilon,$$

откуда

$$|x_1 - x_2| = |(x_1 - a_n) + (a_n - x_2)| \leqslant |x_1 - a_n| + |a_n - x_2| < 2\varepsilon.$$

Полагая

$$0 < \varepsilon < \frac{|x_1 - x_2|}{2},$$

получим противоречие.

Таким образом, мы пришли к противоречию, которое и доказывает неверность предположения (3.7). Теорема доказана.

3.1.4. Монотонные последовательности. Рассматривая определение последовательности, ее предела, мы нигде не предполагали, что функция, определяющая последовательность, должна обладать какими-либо специальными свойствами. Рассмотрим, например, последовательность

$$\frac{1}{3},\ \frac{2}{4},\ \frac{3}{5},\ \ldots,\ \frac{n}{n+2},\ \ldots$$

Каждый член этой последовательности больше предыдущего. Действительно,

$$a_{n+1}=\frac{n+1}{n+1+2}=1-\frac{2}{n+3}>1-\frac{2}{n+2}=\frac{n}{n+2}=a_n,$$

т. е.

$$a_{n+1}>a_n.$$

Последовательности $\{a_n\}$, обладающие свойством

$$a_n\leqslant a_{n+1}\quad \forall n,$$

называются *монотонно возрастающими* (*неубывающими*).

Последовательности $\{a_n\}$, для которых

$$a_n<a_{n+1}\quad \forall n,$$

называются *строго монотонно возрастающими*.

Аналогично последовательности $\{a_n\}$, для которых

$$a_n\geqslant a_{n+1}\quad \forall n,$$

называются *монотонно убывающими* (*невозрастающими*).

Последовательности $\{a_n\}$, для которых

$$a_n>a_{n+1}\quad \forall n,$$

называются *строго монотонно убывающими*.

Например, последовательность

$$1,\ \frac{1}{2},\ \frac{1}{3},\ \ldots,\ \frac{1}{n},\ \ldots$$

является строго монотонно убывающей.

Монотонные последовательности могут приближаться к своему пределу лишь с одной стороны: справа или слева.

Отметим, что существуют колеблющиеся последовательности, имеющие предел. Например,

$$-1,\ \frac{1}{2},\ -\frac{1}{3},\ \frac{1}{4},\ \ldots,\ (-1)^n\frac{1}{n},\ \ldots$$

Эта последовательность сходится к нулю, приближаясь к нему с обеих сторон.

Монотонные последовательности обладают наиболее простыми свойствами.

Теорема 3.2. *Монотонно возрастающая числовая последовательность* $\{a_n\}$, *ограниченная сверху, имеет конечный предел, совпадающий с точной верхней границей множества.*

Доказательство. Рассмотрим множество $\{a_n\}$. Это множество принадлежит R (R—множество всех вещественных чисел) и ограничено сверху, т. е.

$$a_n \leqslant M, \quad \text{где } M < +\infty.$$

Следовательно, оно имеет точную верхнюю границу

$$a = \sup \{a_n\}.$$

Покажем, что число a и является пределом последовательности $\{a_n\}$.

Во-первых, a—верхняя граница, значит,

$$a_n \leqslant a \tag{3.8}$$

для всех n; во-вторых a есть точная верхняя граница. Следовательно, $\forall \varepsilon > 0 \ \exists N$ такой, что

$$a_N > a - \varepsilon.$$

Тогда в силу того, что

$$a_{n+1} \geqslant a_n,$$

имеем, что $\forall n \geqslant N$

$$a_n > a - \varepsilon$$

и из (3.8) следует, что

$$a_n < a + \varepsilon.$$

Следовательно,

$$|a_n - a| < \varepsilon \quad \forall n \geqslant N,$$

т. е. мы показали, по определению, что $\lim\limits_{n \to \infty} a_n = a$. Теорема доказана.

Замечание 3.1. Отметим, что если последовательность $\{a_n\}$ монотонно возрастает и не ограничена сверху, тогда, очевидно,

$$\lim_{n \to \infty} a_n = +\infty,$$

где $+\infty$—несобственный предел последовательности $\{a_n\}$.

Действительно,

$$\forall E > 0 \quad \exists N, \ a_N > E,$$

а в силу монотонности последовательности $\{a_n\}$ последнее неравенство будет выполнено для всех $n \geqslant N$, а это и означает, что

$$\lim_{n \to \infty} a_n = +\infty.$$

Аналогичные утверждения могут быть сформулированы и доказаны для монотонно убывающих последовательностей.

Теорема 3.3. *Если числовая последовательность $\{a_n\}$ монотонно убывает и ограничена снизу, т. е.*

$$a_n \geqslant m, \qquad m > -\infty,$$

то она всегда имеет конечный предел.

В случае, если последовательность монотонно убывает и не ограничена снизу, ее несобственным пределом служит $-\infty$.

В приведенных теоремах замечательно то, что значение предела не известно заранее. Теоремы 3.2 и 3.3 утверждают, что предел последовательности или несобственный предел в указанных случаях существует. Поэтому эти теоремы носят название *теорем существования* предела последовательности.

Рассмотрим один очень важный пример.

Пример 3.3. Пусть дана последовательность

$$a_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \qquad (n = 1, 2, \ldots). \tag{3.9}$$

Требуется определить, имеет ли данная последовательность предел.

Решение. Во-первых, убедимся в том, что эта последовательность монотонно возрастает. Действительно, разложив общий член последовательности по формуле бинома Ньютона, получим

$$\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = 1 + n \cdot \frac{1}{n} + \frac{n(n-1)}{1 \cdot 2} \frac{1}{n^2} + \frac{n(n-1)(n-2)}{1 \cdot 2 \cdot 3} \frac{1}{n^3} + \ldots$$
$$\ldots + \frac{n(n-1)\ldots(n-k+1)}{1 \cdot 2 \ldots k} \cdot \frac{1}{n^k} + \ldots + \frac{n(n-1)\ldots(n-n+1)}{1 \cdot 2 \ldots n} \frac{1}{n^n}$$

или

$$\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = 2 + \frac{1}{2!}\left(1 - \frac{1}{n}\right) +$$
$$+ \frac{1}{3!}\left(1 - \frac{1}{n}\right)\left(1 - \frac{2}{n}\right) + \ldots + \frac{1}{n!}\left(1 - \frac{1}{n}\right)\ldots\left(1 - \frac{n-1}{n}\right).$$

Так как

$$1-\frac{1}{n+1} > 1-\frac{1}{n},$$

$$\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right) > \left(1-\frac{1}{n+1}\right)\left(1-\frac{2}{n+1}\right),$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

откуда и следует, что

$$a_{n+1} > a_n.$$

Во-вторых, покажем, что последовательность (3.9) ограничена сверху. Имеем

$$a_n < 2+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+\ldots+\frac{1}{n!} < 2+\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\ldots+\frac{1}{2^{n-1}} < 3.$$

Отсюда по теореме 1 следует, что последовательность (3.9) имеет конечный предел, заключенный между 2 и 3. Этот предел обычно обозначается буквой e

$$e = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n.$$

Выпишем несколько первых знаков разложения числа e в десятичную дробь

$$e = 2{,}718\,281\,828\,459\,045\ldots$$

3.1.5. Бесконечно малые последовательности. Последовательность $\{a_n\}$ называется *бесконечно малой*, если она имеет предел, равный нулю.

Непосредственно из определения предела последовательности (см. п. 3.1.2) следует, что последовательность $\{a_n\}$ является бесконечно малой, если

$$\forall\varepsilon>0 \quad \exists N=N(\varepsilon)\colon \forall n\geqslant N, \quad |a_n|<\varepsilon.$$

Иными словами, последовательность $\{a_n\}$ является бесконечно малой, если, начиная с достаточно большого номера все ее значения находятся в сколь угодно малой ε-окрестности нуля.

Будем обозначать бесконечно малые последовательности строчными начальными буквами греческого алфавита:

$$\{\alpha_n\}, \quad \{\beta_n\}, \quad \{\gamma_n\}.$$

Установим связь между значениями последовательности $\{a_n\}$ и ее пределом a. Пусть

$$\lim_{n\to\infty} a_n = a. \tag{3.10}$$

Тогда для $\forall\varepsilon>0$, $\exists N=N(\varepsilon)$, что для $\forall n\geqslant N$ выполняется неравенство

$$|a_n-a|<\varepsilon,$$

т. е.

$$a-\varepsilon<a_n<a+\varepsilon. \tag{3.11}$$

Следуя определению бесконечно малой последовательности, мы можем теперь считать, что последовательность $\{a_n-a\}$ есть бесконечно малая

$$\{a_n-a\}=\{\alpha_n\}$$

и, следовательно,

$$a_n=a+\alpha_n, \tag{3.12}$$

т. е. *значение последовательности, имеющей конечный предел, отличается от предела на общий член бесконечно малой последовательности.* Равенство (3.12) и есть именно то равенство, которое связывает значения последовательности $\{a_n\}$ и ее предел a.

Рассмотрим далее некоторые простейшие свойства бесконечно малых последовательностей $\{\alpha_n\}$, т. е. таких, что

$$\lim_{n\to\infty}\alpha_n=0.$$

Теорема 3.4. *Сумма конечного числа бесконечно малых последовательностей есть последовательность бесконечно малая.*

Очевидно, что для доказательства теоремы достаточно показать, что сумма двух бесконечно малых последовательностей есть бесконечно малая последовательность. Пусть

$$\alpha_n \text{ и } \beta_n \qquad (n=1,\ 2,\ \ldots)$$

— бесконечно малые последовательности. Нам необходимо показать, что

$$\alpha_n+\beta_n \qquad (n=1,\ 2,\ \ldots)$$

также бесконечно малая последовательность.

Выберем произвольное $\varepsilon>0$, тогда, положив $\varepsilon_1=\varepsilon/2$, найдем N_1 и N_2 такие, что

$$|\alpha_n|<\varepsilon_1, \qquad n\geqslant N_1,$$
$$|\beta_n|<\varepsilon_1, \qquad n\geqslant N_2.$$

Далее, положив $N=\max(N_1,\ N_2)$, мы можем утверждать, что

$$|\alpha_n|<\varepsilon_1 \quad \text{и} \quad |\beta_n|<\varepsilon_1,$$

если только $n \geqslant N$, отсюда

$$|\alpha_n+\beta_n| \leqslant |\alpha_n|+|\beta_n| < \frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2}=\varepsilon \quad \forall n \geqslant N.$$

Таким образом, $\forall \varepsilon > 0$ $\exists N = N(\varepsilon)$ такое, что для $\forall n \geqslant N$ выполнено неравенство

$$|\alpha_n+\beta_n| < \varepsilon,$$

следовательно, $\{\alpha_n+\beta_n\}$ есть бесконечно малая последовательность. Теорема доказана.

Теорема 3.5. *Произведение конечного числа бесконечно малых последовательностей есть бесконечно малая последовательность.*

Доказательство. Пусть $\{\alpha_n\}$ и $\{\beta_n\}$ — бесконечно малые последовательности. Покажем, что $\{\alpha_n\beta_n\}$ также бесконечно малая.

Выберем произвольные $\varepsilon > 0$. Тогда, положив $\varepsilon_1 = \sqrt{\varepsilon}$, найдем N_1 и N_2 такие, что $|\alpha_n| < \varepsilon_1$ $\forall n \geqslant N_1$ и $|\beta_n| < \varepsilon_1$ $\forall n \geqslant N_2$. Далее, положив $N = \max(N_1, N_2)$, мы можем утверждать, что

$$|\alpha_n| < \varepsilon_1 \quad \text{и} \quad |\beta_n| < \varepsilon_1 \quad \forall n \geqslant N,$$

откуда

$$|\alpha_n \cdot \beta_n| = |\alpha_n| \cdot |\beta_n| < \sqrt{\varepsilon} \cdot \sqrt{\varepsilon} = \varepsilon \quad \forall n \geqslant N.$$

Следовательно, $\{\alpha_n \cdot \beta_n\}$ есть бесконечно малая последовательность. Теорема доказана.

Теорема 3.6. *Произведение ограниченной последовательности на бесконечно малую последовательность есть бесконечно малая последовательность.*

Доказательство. Пусть $\{a_n\}$ — ограниченная последовательность, т. е.

$$|a_n| \leqslant M, \qquad M < +\infty,$$

и $\{\alpha_n\}$ — бесконечно малая последовательность. Нужно показать, что $\{a_n\alpha_n\}$ — бесконечно малая последовательность.

Пусть $\varepsilon > 0$ — произвольно и $\varepsilon_1 = \varepsilon/M$; по $\varepsilon_1 > 0$ найдем $N = N(\varepsilon_1)$ такое, что для $\forall n \geqslant N$ имеем

$$|\alpha_n| < \varepsilon_1,$$

тогда

$$|a_n \cdot \alpha_n| = |a_n| \cdot |\alpha_n| < M \cdot \frac{\varepsilon}{M} = \varepsilon,$$

если только $n \geqslant N$. Отсюда

$$\lim_{n \to \infty} (a_n \alpha_n) = 0.$$

Теорема доказана.

3.1.6. Бесконечно большие последовательности и их связь с бесконечно малыми последовательностями. В предыдущем пункте мы рассматривали бесконечно малые последовательности, т. е. последовательности, предел которых равен нулю. Не менее важную роль в математическом анализе и его приложениях играют последовательности, члены которых по абсолютной величине неограниченно возрастают.

Последовательность $\{a_n\}$ называется *бесконечно большой*, если

$$|a_n| \to +\infty \quad \text{при} \quad n \to \infty. \tag{3.13}$$

Это означает, что

$$\forall E > 0 \quad \exists N = N(E): \quad \forall n \geqslant N, \qquad |a_n| > E.$$

Например, последовательность

$$\{(-1)^n n^2\} \tag{3.14}$$

является бесконечно большой, ибо последовательность

$$\{|(-1)^n n^2|\} = \{n^2\}$$

имеет своим пределом $+\infty$.

Очевидно, что если последовательность $\{a_n\}$ имеет своим пределом $+\infty$ или $-\infty$, то она является бесконечно большой последовательностью, ибо тогда имеет место (3.13). Таковы, например, неограниченные монотонные последовательности, которые представляют собой часто встречающиеся примеры бесконечно больших последовательностей.

Заметим, что последовательность (3.14), будучи бесконечно большой, не имеет даже несобственного предела.

Из определения бесконечно большой последовательности $\{a_n\}$ следует, что, начиная с достаточно больших n $(n \geqslant N)$, все значения такой последовательности лежат вне E-окрестности нуля.

Заметим, что неограниченная последовательность не обязательно является бесконечно большой. Действительно, для бесконечно большой последовательности неравенство

$$|a_n| > E,$$

где E — произвольное положительное число, выполнено для всех номеров n, начиная с некоторого номера

$N = N(E)$. Для неограниченной последовательности это неравенство может выполняться лишь для некоторых номеров $n \geqslant N(\varepsilon)$. Например, последовательность

$$1,\ 0,\ 3,\ 0,\ 5,\ 0,\ \ldots,\ 2n+1,\ 0,\ \ldots$$

не ограничена, но не является бесконечно большой.

Теперь, познакомив читателя с обеими исключительными последовательностями — бесконечно малой и бесконечно большой,— нам естественно установить связь между этими последовательностями.

Теорема 3.7. *Если $\{a_n\}$ является бесконечно большой последовательностью, то последовательность $\{\alpha_n\}$, определенная соотношением*

$$\alpha_n = \frac{1}{a_n} \qquad (n > n_0),$$

является бесконечно малой.

Доказательство. Пусть $\{a_n\}$ — бесконечно большая последовательность. Тогда $\forall E > 0, \exists N = N(E)$ такой, что для $\forall n \geqslant N$ выполнено неравенство

$$|a_n| > E \equiv 1/\varepsilon.$$

Следовательно,

$$|\alpha_n| = \frac{1}{|a_n|} < \varepsilon,$$

т. е. $\{\alpha_n\}$ есть бесконечно малая последовательность. Теорема доказана.

Аналогично доказывается обратное утверждение.

Теорема 3.8. *Если $\{\alpha_n\}$ является бесконечно малой последовательностью, то последовательность $\{a_n\}$, определяемая соотношением*

$$a_n = \frac{1}{\alpha_n}, \quad \alpha_n \neq 0 \qquad (n > n_0),$$

является бесконечно большой.

Таким образом, мы установили связь между бесконечно большими и бесконечно малыми последовательностями. Опираясь на эту связь, легко можно сформулировать и доказать свойства бесконечно больших последовательностей.

Рассмотрим один важный пример.

Пример. 3.4. Доказать, что последовательность $\{q^n\}$ является бесконечно малой при $|q| < 1$ и бесконечно большой при $|q| > 1$.

Решение. Пусть $|q| < 1$ и ε—любое положительное число. Покажем, что

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists N = N(\varepsilon): \forall n \geqslant N, \quad |q^n| < \varepsilon.$$

С этой целью рассмотрим неравенство

$$|q^n| < \varepsilon.$$

Разрешим его относительно n. Имеем

$$|q^n| < \varepsilon \Rightarrow |q|^n < \varepsilon \Rightarrow n \log_a |q| < \log_a \varepsilon \; (a > 1) \Rightarrow$$
$$\Rightarrow n > \frac{\log_a \varepsilon}{\log_a |q|} \qquad (|q| < 1).$$

Следовательно, в качестве $N = N(\varepsilon)$ можно взять

$$N = \left[\frac{\log_a \varepsilon}{\log_a |q|}\right] + 1.$$

Таким образом, $\{q^n\}$, $|q| < 1$,— бесконечно малая.

Если $|q| > 1$, то положим

$$q = \frac{1}{p},$$

где $|p| < 1$. Тогда $\{p^n\}$—бесконечно малая и, следовательно, $\{q^n\}$ — бесконечно большая (согласно теореме о связи между бесконечно малой и бесконечно большой последовательностями). Заметим, что при $q > 1$

$$\lim_{n \to \infty} q^n = +\infty,$$

а при $q < -1$ последовательность $\{q^n\}$ предела не имеет.

В самом деле, будучи бесконечно большой, эта последовательность могла бы иметь лишь бесконечный предел, но и этого нет, так как члены последовательности меняют знак, а $|q^n| \to +\infty$.

3.1.7. Некоторые свойства пределов последовательностей. В этом пункте мы рассмотрим простейшие свойства пределов, необходимые для их фактического вычисления.

Теорема 3.9. *Пусть последовательность $\{a_n\}$ сходится (т. е. имеет предел), причем $\lim\limits_{n \to \infty} a_n = a$.*

Тогда сходится последовательность

$$\{c \cdot a_n\} \qquad (c = \text{const});$$

и предел этой последовательности вычисляется по формуле

$$\lim_{n \to \infty} (c \cdot a_n) = c \lim_{n \to \infty} a_n = c \cdot a.$$

Доказательство. Теорема будет доказана, если будет доказана справедливость равенства

$$c\cdot a_n = c\cdot a + \alpha_n, \tag{3.15}$$

где $\{\alpha_n\}$ — бесконечно малая последовательность. Имеем

$$a_n = a + \overline{\alpha}_n, \tag{3.16}$$

где $\{\overline{\alpha}_n\}$ — бесконечно малая последовательность. Умножим обе части (3.16) на постоянную c, получим

$$c\cdot a_n = c\cdot a + c\overline{\alpha}_n,$$

при этом очевидно[1])

$$c\overline{\alpha}_n = \alpha_n,$$

откуда следует справедливость равенства (3.15). Теорема доказана.

Теорема 3.10. *Пусть последовательности $\{a_n\}$, $\{b_n\}$ сходятся, причем $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$, $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = b$.*

Тогда сходятся последовательности

$$\{a_n \pm b_n\} \tag{3.17}$$

и пределы этих последовательностей вычисляются по формулам

$$\lim_{n\to\infty}(a_n \pm b_n) = \lim_{n\to\infty} a_n \pm \lim_{n\to\infty} b_n = a \pm b.$$

Доказательство. Теорема будет доказана, если мы покажем, что

$$a_n \pm b_n = a \pm b + \gamma_n, \tag{3.18}$$

где $\{\gamma_n\}$ — бесконечно малая последовательность. По условию теоремы имеем

$$a_n = a + \alpha_n, \quad b_n = b + \beta_n, \tag{3.19}$$

где $\{\alpha_n\}$ и $\{\beta_n\}$ — бесконечно малые последовательности. Складывая равенства (3.19) и учитывая, что сумма бесконечно малых последовательностей есть бесконечно малая последовательность, получим требуемое равенство (3.18). Теорема доказана.

Теорема 3.11. *Пусть последовательности $\{a_n\}$, $\{b_n\}$ сходятся, причем $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$, $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = b$. Тогда сходится последовательность*

$$\{a_n \cdot b_n\} \tag{3.20}$$

[1]) См. п. 3.1.5, стр. 64.

и предел этой последовательности вычисляется по формуле

$$\lim_{n\to\infty}(a_n\cdot b_n)=\lim_{n\to\infty}a_n\cdot\lim_{n\to\infty}b_n=a\cdot b.$$

Доказательство. Теорема будет доказана, если покажем, что

$$ab=a_n\cdot b_n+\gamma_n. \tag{3.21}$$

Действительно, имеем (см. (3.19)) $a=a_n-\alpha_n$, $b=b_n-\beta_n$. Перемножая равенства (3.19), получим

$$a\cdot b=a_n\cdot b_n-a_n\cdot\beta_n-b_n\cdot\alpha_n+\alpha_n\cdot\beta_n. \tag{3.22}$$

Последовательности $\{a_n\}$ и $\{b_n\}$ имеют пределы, следовательно, они ограничены[1]), т. е. последовательности $a_n\cdot\beta_n$, $b_n\alpha_n$ являются бесконечно малыми. Последовательность $\alpha_n\beta_n$ также является бесконечно малой. Таким образом,

$$-a_n\beta_n-b_n\cdot\alpha_n+\alpha_n\cdot\beta_n=\gamma_n, \tag{3.23}$$

где $\{\gamma_n\}$ — бесконечно малая последовательность. Подставляя (3.23) в (3.22), получим (3.21). Теорема доказана.

Теорема 3.12. *Пусть последовательности* $\{a_n\}$, $\{b_n\}$ *сходятся, причем* $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=a$, $\lim\limits_{n\to\infty}b_n=b$, b_n, $b\neq 0$. *Тогда сходится последовательность*

$$\left\{\frac{a_n}{b_n}\right\} \tag{3.24}$$

и предел этой последовательности вычисляется по формуле

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n}=\frac{\lim\limits_{n\to\infty}a_n}{\lim\limits_{n\to\infty}b_n}=\frac{a}{b}.$$

Доказательство. Итак необходимо показать, что

$$\frac{a_n}{b_n}-\frac{a}{b}=\gamma_n, \tag{3.25}$$

где $\{\gamma_n\}$ — бесконечно малая последовательность. Подставляя (3.19) в (3.25) и проводя дальнейшие преобразования левой части равенства, будем иметь

$$\frac{a+\alpha_n}{b+\beta_n}-\frac{a}{b}=\frac{ab+\alpha_nb-ab-a\beta_n}{b(b+\beta_n)}=(\alpha_nb-a\beta_n)\frac{1}{b}\cdot\frac{1}{b_n}.$$

---

[1]) См. определение предела последовательности п. 3.1.2, особенно формулу (3.5).

Последовательность $\{\alpha_n b - a\beta_n\}$ является бесконечно малой последовательностью (почему?), последовательность $\frac{1}{b}\cdot\frac{1}{b_n}$ ограничена (почему?). Следовательно, последовательность

$$\left\{(\alpha_n b - a\beta_n)\frac{1}{b}\cdot\frac{1}{b_n}\right\}$$

также является бесконечно малой последовательностью. Теорема доказана.

Нетрудно заметить, что в теоремах этого пункта мы предполагали, что последовательности имеют пределы, а в теореме 3.12 мы требовали, чтобы предел и члены последовательности, являющейся делителем, были отличны от нуля. Очевидно, далее мы должны рассмотреть вопрос о существовании и представлении пределов последовательностей (3.17), (3.20), (3.24), не вводя указанные предположения. В этом случае мы сталкиваемся с особым обстоятельством, именно: пределы последовательностей (3.17), (3.20), (3.24) в зависимости от закона изменения обеих последовательностей могут быть различными и, более того, даже не существовать.

Рассмотрим несколько примеров.

Пример 3.5. Пусть заданы две последовательности $\{x_n\}$ и $\{y_n\}$, и пусть несобственные пределы этих последовательностей соответственно равны

$$\lim_{n\to\infty} x_n = +\infty, \qquad \lim_{n\to\infty} y_n = -\infty. \tag{3.26}$$

Выясним, чему может быть равен

$$\lim_{n\to\infty}(x_n+y_n). \tag{3.27}$$

Положим $x_n=\sqrt{n^2-1}$, $y_n=-n$, тогда

$$\lim_{n\to\infty}(x_n+y_n)=\lim_{n\to\infty}(\sqrt{n^2-1}-n)=\lim_{n\to\infty}\frac{-1}{\sqrt{n^2-1}+n}=0.$$

Далее, если мы выберем $x_n=n^2$, $y_n=-n$, то

$$\lim_{n\to\infty}(x_n+y_n)=\lim_{n\to\infty}(n^2-n)=\lim_{n\to\infty}n^2\left(1-\frac{1}{n}\right)=+\infty.$$

Наконец, пусть $x_n=(-1)^n+n^2$, $y_n=-n^2$. Имеем

$$\lim_{n\to\infty}(x_n+y_n)=\lim_{n\to\infty}[(-1)^n+n^2-n^2]=\lim_{n\to\infty}(-1)^n,$$

последний, очевидно, не существует.

Итак, мы видим, что при наличии несобственных пределов последовательностей (3.26) предел (3.27) может быть равен нулю, быть несобственным пределом или вовсе не существовать, т. е. предел суммы последовательностей может быть не равен сумме пределов.

Таким образом, в том случае, когда значение предела (3.27) не определяется значениями несобственных пределов (3.26), мы говорим, что имеет место ситуация *неопределенности*. Рассмотренную неопределенность символически мы будем обозначать так:

$$(+\infty)+(-\infty). \tag{3.28}$$

Пример 3.6. Пусть заданы две последовательности $\{x_n\}$ и $\{y_n\}$, и пусть

$$\lim_{n\to\infty} x_n = \lim_{n\to\infty} y_n = 0. \tag{3.29}$$

Поставим вопрос о существовании, а в случае существования и о значениях

$$\lim_{n\to\infty} \frac{x_n}{y_n}. \tag{3.30}$$

Пусть

$$x_n = 1/n, \qquad y_n = 1/n^2, \tag{3.31}$$

тогда, подставляя (3.31) в (3.30), получим

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1/n}{1/n^2} = \lim_{n\to\infty} n = +\infty.$$

Далее положим $x_n = 1/n^2$, $y_n = 1/n$, тогда

$$\lim_{n\to\infty} \frac{x_n}{y_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0.$$

Наконец, если $x_n = (-1)^n/n^2$, $y_n = 1/n^2$, то

$$\lim_{n\to\infty} \frac{x_n}{y_n} = \lim_{n\to\infty} (-1)^n,$$

т. е. предел (3.30) в этом случае не существует.

Таким образом, как и в предыдущем примере, предел (3.30) не определяется значениями пределов (3.29). Мы имеем неопределенность вида

$$\frac{0}{0}. \tag{3.32}$$

Пример 3.7. Пусть заданы две последовательности, несобственные пределы которых равны

$$\lim_{n\to\infty} x_n = \lim_{n\to\infty} y_n = +\infty. \tag{3.33}$$

Рассмотрим последовательность вида

$$\left\{\frac{x_n}{y_n}\right\}. \tag{3.34}$$

Нетрудно заметить, что в этом случае мы имеем неопределенность вида

$$\frac{+\infty}{+\infty}. \tag{3.35}$$

Предлагаем читателю проиллюстрировать последнее утверждение самостоятельно, взяв в качестве последовательностей $\{x_n\}$ и $\{y_n\}$ полиномы различных степеней.

Именно необходимо показать, что если $x_n = P(n)$, $y_n = Q(n)$, то в случае если степень $P(n)$ больше степени $Q(n)$, то несобственный предел последовательности (3.34) равен $+\infty$, если степень $P(n)$ меньше степени $Q(n)$, то предел равен нулю, и, если степени полиномов $P(n)$ и $Q(n)$ равны, то предел равен отношению коэффициентов при старших степенях n.

Пример 3.8. Пусть заданы последовательности $\{x_n\}$ и $\{y_n\}$, и пусть

$$\lim_{n\to\infty} x_n = 0, \qquad \lim_{n\to\infty} y_n = +\infty,$$

тогда предел последовательности

$$\{x_n \cdot y_n\} \tag{3.36}$$

представляет собой неопределенность вида

$$0\cdot\infty.$$

Проиллюстрируем последнее утверждение двумя частными случаями. Положим $x_n = \frac{1}{n}$, $y_n = n^2$, тогда

$$\lim_{n\to\infty}(x_n\cdot y_n) = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n}\cdot n^2\right) = +\infty.$$

В случае, если $x_n = \frac{(-1)^n}{n}$, $y_n = n$, предел последовательности (3.36) не существует (почему?).

Подводя итог рассмотренным примерам, мы можем отметить, что, зная значения пределов (или несобственные пределы) исходных последовательностей, мы не всегда имеем возможность определить предел (или несобственный предел) последовательности, образованной даже элементарными алгебраическими операциями над исходными последовательностями, т. е. может иметь место ситуация неопределенности.

$$(+\infty)-(+\infty),\quad \frac{+\infty}{+\infty},\quad \frac{0}{0},\quad 0\cdot(+\infty)^{1)}.$$

Для нахождения пределов этих последовательностей в каждом конкретном случае необходимо применять специальные приемы, основанные на структуре исходных последовательностей.

В заключение этого пункта рассмотрим еще одно свойство предела последовательности, применяемое как для доказательства существования предела последовательности, так и для его фактического вычисления.

Теорема 3.13. *Пусть последовательности $\{a_n\}$, $\{b_n\}$ сходятся, причем $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty} b_n = c$, и пусть при $\forall n \geqslant N$ выполнено неравенство*

$$a_n \leqslant c_n \leqslant b_n.$$

Тогда сходится последовательность $\{c_n\}$ и

$$\lim_{n\to\infty} c_n = c.$$

Доказательство. Зададим некоторое произвольное $\varepsilon_0 > 0$ и покажем, что найдется такое $N_0(\varepsilon_0)$, что при $\forall n \geqslant N_0$

$$|c_n - c| < \varepsilon_0. \tag{3.37}$$

Действительно, по определению предела последовательности, по выбранному нами ε_0 мы можем найти такие $N_1 = N_1(\varepsilon_0)$ и $N_2 = N_2(\varepsilon_0)$, что

$$|a_n - c| < \varepsilon_0 \quad \forall n \geqslant N_1 \quad \text{и} \quad |b_n - c| < \varepsilon_0 \quad \forall n \geqslant N_2$$

или

$$c-\varepsilon_0 < a_n < c+\varepsilon_0 \qquad \forall n \geqslant N_1,$$
$$c-\varepsilon_0 < b_n < c+\varepsilon_0 \qquad \forall n \geqslant N_2.$$

Возьмем $N_0 = \max\{N, N_1, N_2\}$. Тогда

$$c-\varepsilon_0 < a_n \leqslant c_n < b_n < c+\varepsilon_0 \qquad \forall n \geqslant N_0,$$

т. е.

$$c-\varepsilon_0 < c_n < c+\varepsilon_0 \qquad \forall n > N_0,$$

откуда и следует выполнение неравенства (3.37). Теорема доказана.

---

1) Обращаем внимание читателя на то, что указанные неопределенности не исчерпывают множества всех неопределенностей, а составляют лишь незначительную его часть.

Пример 3.9. Найти сумму членов бесконечно убывающей геометрической прогрессии:

$$a, \quad aq, \quad aq^2, \ \ldots, \ aq^{n-1}, \ \ldots, \qquad \text{где } |q| < 1.$$

Рассмотрим сумму первых n членов этой последовательности

$$s_n = a + aq + \ldots + aq^{n-1}.$$

Как известно,

$$s_n = \frac{a - aq^n}{1-q} = \frac{a}{1-q} - \frac{a}{1-q} \cdot q^n.$$

Следовательно,

$$s_n - \frac{a}{1-q} = -\frac{a}{1-q} \cdot q^n.$$

Правая часть этого равенства состоит из постоянного сомножителя $-\frac{a}{1-q}$ и бесконечно малой последовательности q^n (см. пример 3.4). Следовательно, $-\frac{a}{1-q} q^n$ есть бесконечно малая последовательность, а это означает, что разность

$$s_n - \frac{a}{1-q}$$

есть бесконечно малая последовательность, т. е.

$$\lim_{n \to \infty} s_n = \frac{a}{1-q}.$$

Итак, сумма s членов бесконечно убывающей геометрической прогрессии

$$s = \frac{a}{1-q}.$$

§ 3.2. Предел функции

3.2.1. Понятие предела функции. Рассмотрим теперь функцию

$$y = f(x),$$

определенную в некоторой окрестности точки a, за исключением, быть может, самой точки a.

Будем говорить, что число A есть предел функции $f(x)$ в точке a (или при $x \to a$), если для любого сколь угодно малого числа $\varepsilon > 0$ найдется такое число $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$, что

$$|f(x) - A| < \varepsilon$$

для всех значений $x \neq a$, удовлетворяющих неравенству

$$|x - a| < \delta.$$

Символически факт стремления функции $f(x)$ к пределу A при $x \to a$ будем обозначать так:

$$\lim_{x \to a} f(x) = A.$$

Иначе говоря, число A есть предел функции $f(x)$ в точке a, если $\forall \varepsilon > 0$, $\exists \delta = \delta(\varepsilon) > 0$, что $f(x) \in R_\varepsilon(A)$ для $x \in \{x \mid x \neq a,\ x \in R_\delta(a)\}$, т. е. значения функции $f(x)$ лежат в сколь угодно малой окрестности числа A, если значения аргумента x лежат в достаточно малой окрестности числа a, не будучи равными этому числу.

Пример 3.10. Пусть $f(x) = x^2$, найдем $\lim\limits_{x \to 1} f(x)$.

Решение. Исходя из таблицы значений функции, мы можем предположить, что искомый предел равен 1. Для доказательства этого утверждения нам необходимо показать, что, какое бы число $\varepsilon > 0$ ни взять, по нему найдется число $\delta > 0$ такое, что будет выполнено неравенство

$$|x^2 - 1| < \varepsilon \tag{3.38}$$

для тех $x \neq 1$, для которых

$$|x - 1| < \delta. \tag{3.39}$$

Представим неравенство (3.38) в виде

$$|x - 1| < \frac{\varepsilon}{x + 1}. \tag{3.40}$$

Рассмотрим только те x, для которых $|x - 1| < 1$, тогда

$$|x + 1| = |(x - 1) + 2| \leqslant |x - 1| + 2 < 3,$$

откуда

$$\frac{\varepsilon}{|x + 1|} > \frac{\varepsilon}{3}.$$

Выберем $\delta > 0$ так, чтобы

$$\delta < \min\left\{1,\ \frac{\varepsilon}{3}\right\},$$

тогда

$$|x - 1| < \frac{\varepsilon}{3} < \frac{\varepsilon}{|x + 1|}.$$

Следовательно, выполнено неравенство (3.40), т. е. для произвольного $\varepsilon > 0$ мы нашли такое $\delta > 0$, что для всех x, удовлетворяющих неравенству (3.39), выполнено неравенство (3.38), последнее и означает, что действительно

$$\lim_{x\to 1} x^2 = 1.$$

Отметим, что, как и прежде, сначала задается ε-окрестность точки A (ε — точность, с которой значения функции должны приближенно совпадать с A), а затем находится δ-окрестность точки a (δ — точность, с которой значение аргумента x приближенно совпадает с a).

Тот факт, что в определении предела функции δ-окрестность точки a не обязана содержать точку a, обусловлен тем, что при изучении предела функции мы прежде всего интересуемся заданием и поведением функции «около» предельной точки a, в самой точке a функция может быть не задана.

Введенное нами определение предела функции, как уже отмечалось, является точным выражением утверждения: «Функция $f(x)$ имеет предел A при стремлении аргумента x к значению a». Постараемся буквально формализовать приведенное утверждение. Именно, определим последовательность $\{x_n\}$ такую, что для $\forall n$ члены последовательности принадлежат области определения функции $f(x)$ и

$$\lim_{n\to\infty} x_n = a,$$

тогда, если последовательность $\{y_n\}$, определяемая равенством

$$y_n = f(x_n),$$

такова, что

$$\lim_{n\to\infty} y_n = A, \tag{3.41}$$

то приведенная конструкция формализует утверждение: «некоторая последовательность значений функции имеет предел A».

Если же утверждение (3.41) справедливо при произвольно выбранной последовательности $\{x_n\}$, то интуитивно ясно, что в этом случае число A и будет искомым пределом функции $f(x)$.

Таким образом, мы можем дать определение предела функции, несколько отличное от приведенного выше.

Число A называется пределом функции $f(x)$ при x, стремящемся к a, если для любой последовательности значений аргумента $\{x_n\}$, для которой $\lim_{n\to\infty} x_n = a$, после-

довательность соответствующих значений функции $\{f(x_n)\}$ имеет предел, равный A.

Естественно, что для правомерности сосуществования двух разных определений предела функции нам необходимо показать их эквивалентность, т. е. эквивалентность определения предела на языке ε, δ-окрестностей и на языке последовательностей.

Теорема 3.14. *Для того чтобы*

$$\lim_{x \to a} f(x) = A, \tag{3.42}$$

необходимо и достаточно, чтобы для любой последовательности значений аргумента из множества определения $f(x)$, сходящейся к a:

$$\lim_{n \to \infty} x_n = a, \tag{3.43}$$

последовательность соответствующих значений функции сходилась к A

$$\lim_{n \to \infty} f(x_n) = A. \tag{3.44}$$

Доказательство. Необходимость. Покажем, что если имеет место (3.42), то, следовательно, для любой последовательности $\{x_n\}$, удовлетворяющей (3.43), имеет место (3.44).

Из (3.42) следует, что $\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta = \delta(\varepsilon) > 0$ такое, что для $\forall x$, $x \neq a$, удовлетворяющих неравенству

$$|x - a| < \delta,$$

справедливо

$$|f(x) - A| < \varepsilon. \tag{3.45}$$

Тогда для любой последовательности $\{x_n\}$ такой, что имеет место (3.43), существует такой номер $N = N(\varepsilon)$, что для $\forall n \geqslant N$

$$|x_n - a| < \delta.$$

Следовательно, для $\forall n \geqslant N$

$$|f(x_n) - A| \leqslant \varepsilon. \tag{3.46}$$

Достаточность. Мы должны показать, что если имеет место (3.43) и (3.44), то имеет место и (3.42). Эту часть теоремы будем доказывать от противного.

Пусть для любой последовательности $\{x_n\}$ выполнено (3.43) и (3.44), но функция $f(x)$ не стремится к A при x, стремящемся к a, $x \neq a$. Это означает, что

$$\exists \varepsilon_0 > 0,\ \forall \delta > 0,\ \exists x_0 = x_0(\delta),\ |x_0 - a| \leqslant \delta,\ |f(x_0) - A| \geqslant \varepsilon_0.$$

Тогда выберем последовательность $\{\delta_n\}$, обладающую свойством

$$\delta_n > 0,\ \lim_{n \to \infty} \delta_n = 0, \tag{3.47}$$

и по этой последовательности мы можем построить последовательность $x_n = x_n(\delta_n)$, $x_n \neq a$, такую, что

$$|x_n - a| \leqslant \delta_n, \quad |f(x_n) - A| \geqslant \varepsilon_0. \tag{3.48}$$

По построению

$$\lim_{n \to \infty} x_n = a. \tag{3.49}$$

Вместе с тем $\{f(x_n)\}$ не стремится к A, т. е. мы пришли к противоречию с предположением (3.44). Теорема доказана.

Нетрудно заметить, что приведенная теорема, очевидно, позволяет распространить свойства предела последовательности на предел функции.

Сформулировать аналогичные определения предела функции для случая неограниченного возрастания или убывания аргумента или функции предлагаем читателю в виде упражнения.

Далее мы можем наложить некоторые дополнительные условия на стремление аргумента x к a, именно предположить, что

$$x - a > 0 \quad \text{или} \quad x - a < 0.$$

Тогда мы получим предел функции при одностороннем приближении аргумента к предельной точке.

Число A называется *правосторонним пределом функции* $f(x)$ в точке a

$$\lim_{x \to a+0} f(x) = A,$$

если для $\forall \varepsilon > 0$ $\exists \delta = \delta(\varepsilon) > 0$ такое, что для $\forall x$, $x \neq a$,

$$x - a < \delta$$

выполнено неравенство

$$|f(x) - A| < \varepsilon.$$

Правосторонний предел обычно обозначают $f(a+0)$. Аналогично определяется *левосторонний предел*.

Число A называется *левосторонним пределом функции* $f(x)$ в точке a

$$\lim_{x \to a-0} f(x) = A,$$

если для $\forall \varepsilon > 0$ $\exists \delta = \delta(\varepsilon) > 0$ такое, что для $\forall x$, $x \neq a$

$$a - x < \delta$$

выполнено неравенство

$$|f(x) - A| < \varepsilon.$$

Левосторонний предел обычно обозначают $f(a-0)$.

Очевидно, что предел функции $f(x)$ при x, стремящемся к a, существует тогда и только тогда, когда существуют и равны между собой оба односторонних предела:

$$\lim_{x \to a-0} f(x) = \lim_{x \to a+0} f(x).$$

3.2.2. Теоремы о существовании предела функции. Рассмотрев в предыдущем пункте определение предела функции, естественно поставить вопрос: при каких условиях, накладываемых на функцию, мы можем гарантировать существование указанного предела. Ответ на этот вопрос в какой-то мере дают следующие теоремы.

Теорема 3.15. *Пусть функция $f(x)$ монотонно возрастает в некоторой области X, и пусть a — точка сгущения для множества X, т. е. $\forall R_\varepsilon(a) \ni x \neq a$, $x \in X$. Тогда, если функция $f(x)$ ограничена сверху*

$$f(x) \leqslant M \tag{3.50}$$

для всех $x \in X$, то при x, стремящемся к a, функция имеет конечный предел.

Доказательство. Из неравенства (3.50) следует, что множество $\{f(x)\}$, определяемое как множество образов функции $f(x)$

$$X \xrightarrow{f} Y = \{f(x)\},$$

ограничено сверху. Тогда для этого множества существует конечная точная верхняя граница A. Покажем, что число A и будет искомым пределом.

Поскольку A есть точная верхняя граница, то $\forall \varepsilon > 0$ $\exists x_0$ такой, что $f(x_0) > A - \varepsilon$. Функция $f(x)$ монотонна, следовательно, для $\forall x > x_0$ будет выполнено неравенство

$$f(x) > A - \varepsilon.$$

Но функция $f(x)$ ограничена, следовательно,

$$f(x) \leqslant A,$$

откуда для $\forall \varepsilon > 0$ имеем

$$f(x) < A + \varepsilon.$$

Таким образом, выбрав $\delta = a - x_0$ $(a \neq +\infty)$ можем заключить, что $\forall \varepsilon$ $\exists \delta$ такое, что неравенство

$$|f(x) - A| < \varepsilon \tag{3.51}$$

выполнено для

$$|x - a| < \delta.$$

Теорема доказана для случая $a < +\infty$. Если $x \to +\infty$, то, положив $\delta = x_0$, мы можем утверждать, что $\forall \varepsilon > 0$. $\exists \delta$ такое, что неравенство (3.51) выполнено для всех $x > \delta$. Теорема доказана.

Замечание 3.2. Очевидно, аналогичное утверждение справедливо и для монотонно убывающей функции. Доказательство этого утверждения предлагаем провести читателю самостоятельно.

Необходимо также отметить, что если функция $f(x)$ монотонна и не ограничена сверху, то $\forall \varepsilon > 0$ $\exists x_0$, что $f(x_0) > \varepsilon$; тогда, для $\forall x > x_0$ имеем $f(x) > \varepsilon$, т. е. $f(x)$ в этом случае стремится к $+\infty$.

Далее рассмотрим другую важную теорему, не предполагающую явно, что функция является ограниченной, но предполагающую некоторую специальную структуру изменения самой функции.

Теорема 3.16. *Пусть для $x \in (a - \delta, a) \cup (a, a + \delta)$ определены функции $f_1(x)$, $f_2(x)$, $f_3(x)$ и выполнено*

$$f_1(x) \leqslant f_2(x) \leqslant f_3(x) \tag{3.52}$$

и

$$\lim_{x \to a} f_1(x) = \lim_{x \to a} f_3(x) = A.$$

Тогда функция $f_2(x)$ также имеет предел при $x \to a$, причем

$$\lim_{x \to a} f_2(x) = A.$$

Доказательство. Пусть $\varepsilon_0 > 0$ произвольно, тогда по определению функции $\exists \delta_1 > 0$, что при $|x - a| < \delta_1$, имеет место

$$|f_1(x) - A| < \varepsilon_0,$$

и $\exists\delta_2>0$ такое, что при $|x-a|<\delta_2$ выполнено

$$|f_3(x)-A|<\varepsilon_0.$$

Тогда, выбрав

$$\delta_0=\min\{\delta,\ \delta_1(\varepsilon_0),\ \delta_2(\varepsilon_0)\},$$

получим, что для $|x-a|<\delta_0$ имеют место неравенства

$$A-\varepsilon_0<f_1(x)<A+\varepsilon_0,$$
$$A-\varepsilon_0<f_3(x)<A+\varepsilon_0.$$

Следовательно, в силу условия (3.52) теоремы

$$A-\varepsilon_0<f_2(x)<A+\varepsilon_0$$

или

$$|f_2(x)-A|<\varepsilon_0 \quad \text{при} \quad |x-a|<\delta,$$

откуда и следует, что

$$\lim_{x\to a} f_2(x)=A.$$

Отметим, что точка a может как принадлежать, так и не принадлежать области определения $f_1(x)$, $f_2(x)$, $f_3(x)$, в которой выполнено неравенство (3.52). Мы доказали теорему, предполагая первое. Доказательство теоремы в предположении, что точка a не принадлежит области, дословно повторяет приведенные выше рассуждения.

Заметим также, что точка (точка сгущения функций f_1, f_2, f_3) в равной мере может быть конечной или удаленной в бесконечность.

3.2.3. Замечательный предел $\lim\limits_{x\to 0}(1+x)^{1/x}$ и его следствия. В этом пункте мы рассмотрим предел при x, стремящемся к 0 функции

$$y=(1+x)^{1/x}. \tag{3.53}$$

При непосредственной подстановке предельного значения аргумента в исследуемую функцию мы получим неопределенность, символически записываемую в виде 1^∞. Поставим перед собой задачу раскрыть эту неопределенность. Для этого воспользуемся определением предела функции в терминах последовательностей. Именно, выбрав произвольную бесконечно малую последовательность $\{x_n\}$, мы должны показать, что последовательность

$$\{(1+x_n)^{1/x_n}\} \tag{3.54}$$

имеет предел. Возьмем в качестве $\{x_n\}$ последовательность $\{1/n\}$; тогда, как было показано в п. 3.1.4

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n=e. \tag{3.55}$$

Последнее равенство позволяет нам надеяться, что предел (3.53) будет также равен числу e.

Выберем произвольную бесконечно малую последовательность $\{x_n\}$ такую, что $0<x_{n+1}<x_n$ и

$$\lim_{n\to\infty}x_n=0.$$

Тогда всегда найдется строго монотонно возрастающая последовательность натуральных чисел $\{k_n\}$, удовлетворяющая неравенству

$$k_n\leqslant\frac{1}{x_n}<k_n+1,$$

откуда

$$\frac{1}{k_n+1}<x_n\leqslant\frac{1}{k_n};$$

тогда

$$\left(1+\frac{1}{k_n+1}\right)^{k_n}<(1+x_n)^{1/x_n}<\left(1+\frac{1}{k_n}\right)^{k_n+1}$$

или

$$\left(1+\frac{1}{k_n+1}\right)^{k_n+1}\left(1+\frac{1}{k_n+1}\right)^{-1}<(1+x_n)^{1/x_n}<$$
$$<\left(1+\frac{1}{k_n}\right)^{k_n}\left(1+\frac{1}{k_n}\right).$$

Следовательно, в силу (3.55) и теоремы 3.13

$$\lim_{n\to\infty}(1+x_n)^{1/x_n}=e. \tag{3.56}$$

Выбрав последовательность $\{x_n\}$ $(x_n<0)$ так, что

$$\lim_{n\to\infty}x_n=0,$$

и определив новую последовательность равенством

$$y_n=-x_n,$$

получим

$$\lim_{n\to\infty}(1+x_n)^{1/x_n}=\lim_{n\to\infty}(1-y_n)^{-1/y_n}=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{1-y_n}\right)^{1/y_n}=$$
$$=\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{y_n}{1-y_n}\right)^{\frac{1-y_n}{y_n}}\left(1+\frac{y_n}{1-y_n}\right)=e\cdot 1.$$

Таким образом, мы получили, что предел последовательности (3.54) при любом выборе последовательности $\{x_n\}$ равен числу e, т. е., следуя определению функции на языке последовательностей, мы можем утверждать, что

$$\lim_{x\to 0}(1+x)^{1/x}=e. \tag{3.57}$$

Легко видеть, что, положив в (3.57) $y=1/x$, получим

$$\lim_{y\to\pm\infty}\left(1+\frac{1}{y}\right)^{y}=e.$$

Аналогично вычисляется предел

$$\lim_{x\to\pm\infty}\left(1+\frac{m}{x}\right)^{x}=e^{m}.$$

Действительно,

$$\lim_{x\to\pm\infty}\left(1+\frac{m}{x}\right)^{x}=\lim_{x\to\pm\infty}\left(1+\frac{m}{x}\right)^{\frac{x}{m}\cdot m}=$$

$$=\left\{\lim_{x\to\pm\infty}\left(1+\frac{m}{x}\right)^{\frac{x}{m}}\right\}^{m}=e^{m}.$$

Далее покажем, что

$$\lim_{x\to 0}\frac{\log_a(1+x)}{x}=\log_a e.$$

Имеем

$$\lim_{x\to 0}\frac{\log_a(1+x)}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{1}{x}\log_a(1+x)=$$

$$=\lim_{x\to 0}\log_a(1+x)^{1/x}=\log_a e\,^{1)}.$$

И, наконец, убедимся в том, что

$$\lim_{x\to 0}\frac{a^x-1}{x}=\ln a.$$

Действительно, обозначая $a^x-1=y$, будем иметь

$$\lim_{x\to 0}\frac{a^x-1}{x}=\lim_{y\to 0}\frac{y}{\log_a(1+y)}=\frac{1}{\log_a e}=\ln a.$$

3.2.4. Сравнение бесконечно малых и бесконечно больших функций. Обобщая понятие бесконечно малой последовательности на случай произвольной функции, мы будем

---

1) Обоснование последнего равенства в полной мере мы приведем в последующих пунктах этой главы.

говорить, что функция $f(x)$ называется *бесконечно малой* при x, стремящемся к a, если

$$\lim_{x \to a} f(x) = 0.$$

Соответственно функция $f(x)$ называется *бесконечно большой* при x, стремящемся к a, если

$$\lim_{x \to a} f(x) = \pm\infty.$$

Бесконечно малые (бесконечно большие) функции обладают свойствами, аналогичными свойствам бесконечно малых (бесконечно больших) последовательностей.

Рассмотрим две бесконечно малые при x, стремящемся к a, функции $f(x)$ и $g(x)$, причем будем предполагать, что $g(x) \neq 0$.

Бесконечно малую функцию $f(x)$ называют *эквивалентной* $g(x)$ при x, стремящемся к a, если

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = 1. \tag{3.58}$$

Этот факт обозначают так:

$$f \sim g.$$

Бесконечно малые функции называются *бесконечно малыми одного порядка малости*, если

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = c \qquad (c \neq 0,\ c \neq \infty). \tag{3.59}$$

Бесконечно малая $f(x)$ есть функция *бóльшего порядка малости*, чем $g(x)$, при x, стремящемся к a, если

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = 0. \tag{3.60}$$

Для этого случая используют обозначение

$$f(x) = o(g(x)).$$

Если в окрестности точки a выполнено неравенство

$$|f(x)| \leqslant A\,|g(x)|, \tag{3.61}$$

где A — постоянная, то говорят, что при x, стремящемся к a, бесконечно малые $f(x)$ и $g(x)$ связаны соотношением

$$f(x) = O(g(x)).$$

В предыдущем пункте мы показали, что для бесконечно малых x и $\ln(1+x)$ при x, стремящемся к 0, выполнено соотношение (3.58), следовательно,

$$\ln(1+x) \sim x.$$

Бесконечно малые e^x-1 и x при x, стремящемся к 0, также являются эквивалентными

$$e^x-1 \sim x.$$

Бесконечно малые $4(x-1)^2$ и $(x-1)^2$ при x, стремящемся к 1, очевидно, являются бесконечно малыми одного порядка малости, так как для них выполнено соотношение (3.59).

Бесконечно малая $5x^4$ при x, стремящемся к 0, является бесконечно малой бо́льшего порядка малости, чем $3x^2$, действительно,

$$\lim_{x \to 0} \frac{5x^4}{3x^2} = \lim_{x \to 0} \frac{5x^2}{3} = 0,$$

и, следовательно, выполнено соотношение (3.60), т. е.

$$5x^4 = o(3x^2).$$

Далее рассмотрим критерий эквивалентности двух бесконечно малых, позволяющих связать последние некоторым равенством.

Теорема 3.17. *Для того чтобы*

$$f(x) \sim g(x)$$

при x, стремящемся к a, и $g(x) \neq 0$ в некоторой окрестности точки a, необходимо и достаточно, чтобы

$$f(x) = g(x) + h(x), \tag{3.62}$$

где $h(x) = o(g(x))$.

Доказательство. Необходимость. Имеем

$$h(x) = f(x) - g(x),$$

тогда

$$\lim_{x \to a} \frac{h(x)}{g(x)} = \lim_{x \to a} \frac{f(x)-g(x)}{g(x)} = \lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} - \lim_{x \to a} \frac{g(x)}{g(x)} = 1 - 1 = 0.$$

Следовательно, выполнено соотношение (3.60) и действительно

$$h(x) = o(g(x)).$$

Достаточность. Разделим обе части (3.62) на $g(x)$

$$\frac{f(x)}{g(x)} = 1 + \frac{h(x)}{g(x)},$$

тогда

$$\lim_{x\to 0} \frac{f(x)}{g(x)} = 1 + \lim_{x\to 0} \frac{h(x)}{g(x)} = 1.$$

Следовательно, выполнено соотношение (3.58) и величины $f(x)$ и $g(x)$ эквивалентны. Теорема доказана.

В точности так же сравниваются и бесконечно большие функции. Например, если $f(x)$ и $g(x)$ — бесконечно большие функции при x, стремящемся к a, то $f(x)$ — бесконечно большая большего порядка, чем $g(x)$, если

$$\lim_{x\to a} \frac{g(x)}{f(x)} = 0.$$

При вычислении предела произведения функций можно заменять множители эквивалентными величинами, но при этом необходимо помнить, что свойством эквивалентности величины обладают в окрестности вполне определенных точек и существуют заведомо несравнимые пары бесконечно малых и бесконечно больших.

§ 3.3. Непрерывность функции

3.3.1. Определение непрерывности функции в точке; приращение аргумента и функции, типы разрывов. Рассмотрим функцию $f(x)$, заданную на некотором множестве X. Функция $f(x)$ называется *непрерывной в точке* $x_0 \in X$, если предел функции при x, стремящемся к x_0, существует и совпадает с $f(x_0)$:

$$\lim_{x\to x_0} f(x = f(x_0) = f\left(\lim_{x\to x_0} x\right),$$

т. е. для $\forall \varepsilon > 0$ $\exists \delta = \delta(\varepsilon)$ такое, что для $\forall x$, удовлетворяющих неравенству $|x - x_0| \leqslant \delta$, выполнено неравенство $|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$.

Используя определение предела функции на языке последовательностей, мы можем сказать, что функция $f(x)$ непрерывна в точке x_0 тогда и только тогда, когда для любой последовательности $\{x_n\}$, сходящейся к x_0, имеет место равенство

$$\lim_{n\to\infty} f(x_n) = f(x_0).$$

Для того чтобы проиллюстрировать геометрически приведенное выше определение, свяжем определение непрерывности функции с ее графиком $y=f(x)$. Для этого выберем некоторое $\varepsilon>0$, и проведем полосу шириной 2ε вдоль прямой $y=f(x_0)$. Тогда, если функция непрерывна, то найдется такое $\delta>0$, что вся часть графика, лежащая внутри вертикальной полосы шириной 2δ вдоль прямой $x=x_0$, содержится также и в указанной горизонтальной полосе шириной 2ε (рис. 3.2).

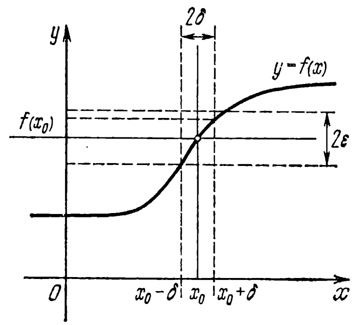


Рис. 3.2.

Если функция в точке x_0 не обладает свойством непрерывности, то, как бы ни была узка вертикальная полоса вдоль $x=x_0$, она всегда будет содержать часть графика, лежащую вне горизонтальной полосы шириной 2ε вдоль прямой $y=f(x_0)$ (рис. 3.3).

Далее рассмотрим **приращение** функции и независимой переменной в некоторой фиксированной точке x_0.

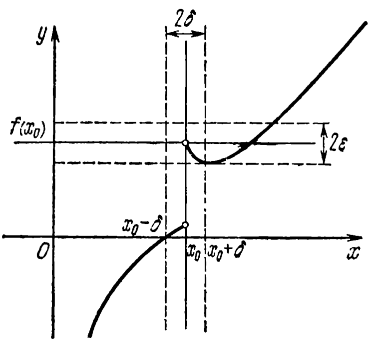


Рис. 3.3.

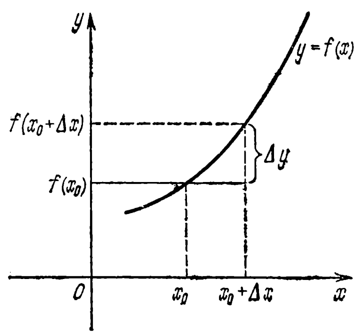


Рис. 3.4.

Пусть $\Delta x=x-x_0$ — приращение независимой переменной, а $\Delta y=f(x_0+\Delta x)-f(x_0)$ — приращение функции (рис. 3.4).

Теорема 3.18. *Если функция $f(x)$ непрерывна в точке x_0, то*

$$\lim_{\Delta x\to 0}\Delta y=0,$$

или $\Delta y = o(1)$ *при* x, *стремящемся к нулю. Иными словами: бесконечно малому приращению аргумента соответствует бесконечно малое приращение функции.*

Доказательство. Если $f(x)$ непрерывна в точке x_0, то

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0).$$

Тогда имеем

$$\lim_{\Delta x \to 0} \Delta y = \lim_{x \to x_0} (f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)) =$$
$$= \lim_{x \to x_0} (f(x_0 + x - x_0) - f(x_0)) = \lim_{x \to x_0} (f(x) - f(x_0)) = 0.$$

Теорема доказана.

Функция $f(x)$ называется *непрерывной на множестве* X, если она непрерывна в каждой точке X.

Пусть функция $f(x)$ определена на $[x_1, x_2]$. Функция $f(x)$ называется *непрерывной справа в точке* x_1 или *непрерывной слева в точке* x_2, если соответственно

$$\lim_{x \to x_1 + 0} f(x) = f(x_1) \quad \text{или} \quad \lim_{x \to x_2 - 0} f(x) = f(x_2).$$

Функция называется *непрерывной на отрезке*, если эта функция непрерывна во внутренних точках отрезка, справа на левом конце и слева на правом конце.

Можно доказать, что *все элементарные функции непрерывны при всех значениях* x, *при которых они существуют.*

Любая арифметическая комбинация непрерывных функций непрерывна в каждой точке, в которой эта комбинация имеет смысл. Например, если функции $f(x)$ и $g(x)$ непрерывны в точке x_0 и $g(x_0) \neq 0$, то функция $h(x)$, определенная как

$$h(x) = \frac{f(x)}{g(x)},$$

будет также непрерывна в точке x_0. Действительно,

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim\limits_{x \to x_0} f(x)}{\lim\limits_{x \to x_0} g(x)} = \frac{f(x_0)}{g(x_0)} = h(x_0).$$

Будем говорить, что функция $f(x)$, определенная в окрестности точки x_0, *разрывна* при $x = x_0$, если нарушено хотя бы одно из следующих требований:

1) существуют пределы: $\lim\limits_{x\to x_0-0} f(x)=f(x_0-0)$, $\lim\limits_{x\to x_0+0} f(x)=f(x_0+0)$;

2) пределы $f(x_0-0)$ и $f(x_0+0)$ конечны;

3) $f(x_0-0)=f(x_0+0)$;

4) $f(x_0-0)=f(x_0+0)=f(x_0)$.

При нарушении этих требований точка x_0 называется соответственно точкой: 1) *неопределенности*, 2) *бесконечного скачка*, 3) *скачка*, 4) *устранимого разрыва*. В последнем случае изменение значения функции $f(x)$ в единственной точке x_0 приводит к непрерывности $f(x)$ в точке $x=x_0$.

Разрывы 3), 4) относят к *первому роду*, разрывы 1), 2) — ко *второму роду*.

Предлагаем читателю показать самостоятельно, что точка $x=0$ является точкой бесконечного скачка для $y=1/x$, конечного скачка для

$$y=\operatorname{sign} x=\begin{cases} -1, & \text{если } x<0, \\ 0, & \text{если } x=0, \\ 1, & \text{если } x>0, \end{cases}$$

устранимого разрыва для функции $f(x)+f(-x)$, если $f(x)$ определяется равенством

$$f(x)=\begin{cases} 0, & x<0, \\ 1, & x\geqslant 1. \end{cases} \tag{3.63}$$

Функцию $f(x)$ называют *кусочно-непрерывной* на множестве X, если $f(x)$ имеет лишь конечное множество точек разрыва на X, причем все точки разрыва относятся к первому роду. Примером кусочно-непрерывной функции служит функция (3.63).

3.3.2 Условие непрерывности сложной функции. Как уже отмечалось ранее[1]), сложная функция определяется как суперпозиция двух функций, определенных на соответствующих множествах:

$$F(x)=g(f(x));$$

здесь

$$(E\subset X)\xrightarrow{f(x)}(E'\subset Y)\xrightarrow{g(y)}(E''\subset Z).$$

Теорема 3.19. *Пусть $f(x)$ непрерывна в точке $x_0\in E$, а $g(x)$ непрерывна в точке $y_0\in E'$, причем $y_0=f(x_0)$. Тогда $F(x)$ непрерывна в точке x_0.*

---

[1]) См. п. 2.2.7, стр. 45—46.

Доказательство. Воспользуемся определением предела функции на языке последовательностей. Тогда нам необходимо показать, что для любой последовательности

$$\lim_{n \to \infty} x_n = x_0 \tag{3.64}$$

имеет место равенство

$$\lim_{n \to \infty} F(x_n) = F(x_0).$$

Действительно, в силу непрерывности функции f для любой последовательности $\{x_n\}$, обладающей свойством (3.64), имеем

$$\lim_{n \to \infty} f(x_n) = f(x_0) = y_0,$$

тогда в силу непрерывности функции $g(x)$ для любой последовательности значений $\{y_n\}$ такой, что

$$\lim_{n \to \infty} y_n = y_0,$$

имеет место предел

$$\lim_{n \to \infty} g(y_n) = g(y_0). \tag{3.65}$$

Следовательно, равенство (3.65) будет справедливо, если положить

$$y_n = f(x_n).$$

Таким образом, для любой последовательности $\{x_n\}$

$$\lim_{n \to \infty} g(f(x_n)) = g(f(x_0)),$$

т. е.

$$\lim_{x \to x_0} F(x) = F(x_0).$$

Теорема доказана.

Теперь, возвращаясь к пределам, которые были рассмотрены в п. 3.2.3, мы можем полностью обосновать приведенные там рассуждения:

$$\lim_{x \to 0} \frac{\log_a(1+x)}{x} = \log_a \lim_{x \to 0}(1+x)^{1/x} = \frac{1}{\ln a}.$$

Аналогично имеем

$$\lim_{y \to 0} \frac{a^y - 1}{y} = \ln a.$$

Рассмотрим еще один предел:

$$\lim_{x \to 0} \frac{(1+x)^m - 1}{x} = \lim_{x \to 0} \frac{e^{m \ln (1+x)} - 1}{m \ln (1+x)} \cdot \frac{m \ln (1+x)}{x} = 1 \cdot m = m,$$

т. е. мы показали, что бесконечно малые $[(1+x)^m - 1]$ и x при $x \to 0$ являются величинами одного порядка малости.

3.3.3. Некоторые свойства непрерывных функций. Отметим без доказательства некоторые свойства непрерывных на замкнутом интервале функций.

Теорема 3.20 (Вейерштрасса). *Если функция $y = f(x)$ определена и непрерывна на замкнутом интервале $[a, b]$, то на этом множестве $[a, b]$ найдется по крайней мере одна точка $x = x_1$ такая, что значение функции $f(x_1)$ будет удовлетворять соотношению*

$$f(x_1) \geqslant f(x), \quad \forall x \in [a, b].$$

На замкнутом интервале $[a, b]$ найдется также по крайней мере одна такая точка $x = x_2$, что значение функции $f(x_2)$ будет удовлетворять соотношению

$$f(x_2) \leqslant f(x), \quad \forall x \in [a, b].$$

Значение $M = f(x_1)$ будем называть *наибольшим значением* функции $y = f(x)$ на замкнутом интервале $[a, b]$. Значение $m = f(x_2)$ будем называть *наименьшим значением* функции $y = f(x)$ на замкнутом интервале $[a, b]$.

Теорема 3.21. *Пусть функция $y = f(x)$ определена и непрерывна на множестве $[a, b]$ и в точках x_1, $x_2 \in [a, b]$ принимает некоторые значения $f(x_1) = A$, $f(x_2) = B$. Тогда, каково бы ни было число C, заключенное между A и B, найдется по крайней мере одна такая точка $c \in [a, b]$, что $f(c) = C$.*

Следствие 3.1. *Если $y = f(x)$ определена и непрерывна на множестве $[a, b]$, то на этом множестве $[a, b]$, она принимает по крайней мере один раз любое значение, заключенное между ее наибольшими и наименьшими значениями.*

Следствие 3.2. *Если функция $y = f(x)$ определена и непрерывна на замкнутом отрезке $[a, b]$ и на концах этого интервала принимает значения разных знаков $(f(a) f(b) < 0)$, то внутри интервала (a, b) найдется по крайней мере одна точка $x = c$, в которой функция* *обращается в нуль*

$$f(c)=0, \quad c \in (a, b).$$

Точку $x=c$ называют *нулем* (или *корнем*) функции $y=f(x)$.

ВОПРОСЫ ДЛЯ ПОВТОРЕНИЯ К ГЛАВЕ 3

1. Что называется последовательностью?
2. Какие две последовательности называются равными?
3. Что называется ε-окрестностью точки a?
4. Что называется пределом последовательности?
5. Что такое подпоследовательность?
6. Может ли сходящаяся последовательность иметь два предела?
7. Имеет ли предел монотонно возрастающая ограниченная сверху последовательность?
8. Имеет ли предел монотонно убывающая последовательность, ограниченная снизу?
9. Какая последовательность называется бесконечно малой (бесконечно большой)?
10. Какова связь между бесконечно малыми и бесконечно большими последовательностями?
11. В каком случае при вычислении предела имеет место ситуация неопределенности?
12. Что такое предел функции на языке ε, δ-окрестностей?
13. Что такое предел функции на языке последовательностей?
14. В каких случаях монотонная функция имеет предел?
15. Какие бесконечно малые называются эквивалентными одного порядка малости?
16. В каком случае говорят, что одна бесконечная малая есть функция большего порядка малости, чем другая?
17. Что такое непрерывность функции $f(x)$ в точке x_0?
18. Что такое точка разрыва функции $f(x)$?
19. Каково условие непрерывности сложной функции?

УПРАЖНЕНИЯ К ГЛАВЕ 3

1. Покажите, что при $n \longrightarrow \infty$ последовательность $x_n = 1 + \frac{1}{n}$ имеет число 1 своим пределом.

2. Покажите, что при $n \longrightarrow \infty$ последовательности

$$\text{а) } x_n = 2 + \frac{1}{n+1}, \quad \text{б) } x_n = 2 - \frac{1}{n+1}$$

имеют число 2 своим пределом.

Найдите пределы последовательностей:

3. $\lim\limits_{n \to \infty} \dfrac{3n+2}{n+2}$.

4. $\lim\limits_{n \to \infty} \dfrac{3n^3+1}{n^3+1}$.

5. $\lim\limits_{n \to \infty} \dfrac{2n+1}{n^2+1}$.

6. $\lim\limits_{n \to \infty} \dfrac{n^5}{n+1}$.

7. $\lim\limits_{n \to \infty} \dfrac{4n^3+3}{2n^3+1}$.

8. $\lim\limits_{n \to \infty} \dfrac{6n^2}{(3n+1)(n-1)}$.

9. $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{(n+1)(n+2)(n+3)}{n^3}$.

Докажите, что:

10. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(a+\frac{1}{2^n}\right)=a$. 11. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(a+\frac{(-1)^n}{n^2}\right)=a$.

12. $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{4^n}=0$. 13. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(-\frac{1}{4^n}\right)=0$.

14. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{(-1)^n}{4^n}\right)=0$.

Найдите пределы последовательностей:

15. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(2-\frac{1}{4^n}\right)$. 16. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(-6+\frac{1}{3^n}\right)$.

17. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(8+\frac{(-1)^n}{7^n}\right)$. 18. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{1+(-1)^n}{5}\right)$.

Найдите пределы последовательностей, используя замечательный предел (см. п. 3.1.5):

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n=\lim_{n\to-\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n=e:$$

19. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{2}{n}\right)^n$. 20. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{3n}\right)^n$.

21. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{4}{n}\right)^{n+3}$. 22. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{n}{n+1}\right)^n$.

23. $\lim\limits_{n\to\infty} n\{\ln(n+3)-\ln n\}$. 24. $\lim\limits_{n\to\infty} n\{\ln n-\ln(n+2)\}$.

25.* Докажите, что

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{(-1)^n}{2n+1}\right)=1,$$

и найдите N, соответствующее $\varepsilon=0{,}01$.

Докажите на языке ε,δ-окрестностей:

26. $\lim\limits_{x\to2}(x-3)=1$. 27. $\lim\limits_{x\to-1}(3-2x-x^2)=4$.

28. $\lim\limits_{x\to3}(2x-1)=5$. 29. $\lim\limits_{x\to2}x^2=4$.

Найдите пределы:

30. $\lim\limits_{x\to2}\frac{5x+1}{3x+2}$. 31. $\lim\limits_{x\to-1}(3-2x+x^2+4x^3)$.

32. $\lim\limits_{x\to2}(\sqrt{x+2}-\sqrt{x-2})$. 33. $\lim\limits_{x\to-6}\frac{x-6}{x+6}$.

34. $\lim\limits_{x\to1}\frac{x+1}{x^3-3x+2}$. 65. $\lim\limits_{x\to\frac{1}{2}}\frac{2x-1}{x^2+x+1}$.

Раскрытие неопределенностей вида $\frac{0}{0}$ и $\frac{\infty}{\infty}$. Найдите пределы:

36. $\lim\limits_{x\to\pm\infty}\frac{3x^2+5x-1}{2x^2-7x+3}$. 37. $\lim\limits_{x\to\pm\infty}\frac{x^3-1}{x^3+1}$.

38. $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{3x-1}{x^2+1}$.

39. $\lim\limits_{x\to\pm\infty} \dfrac{5x^4-1}{x^2+3x}$.

40. $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\sqrt{x}-6x}{3x+1}$.

41. $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{7x^3+1}{4x^2-2x-16}$.

42. $\lim\limits_{x\to 3} \dfrac{x^2-9}{x^2-3x}$.

43. $\lim\limits_{x\to 3} \dfrac{x^2-9}{x^2-2x-3}$.

44. $\lim\limits_{x\to -2} \dfrac{x^2-4}{x+2}$.

45. $\lim\limits_{x\to -1} \dfrac{x^2-x-2}{x^3+1}$.

46. $\lim\limits_{x\to 3} \dfrac{9-x^2}{\sqrt{3x}-3}$.

47. $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x^3-x^2-x+1}{x^3+x^2-x-1}$.

48. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sqrt{x+4}-2}{x}$.

49. $\lim\limits_{x\to -1} \dfrac{\sqrt{4+x+x^2}-2}{x+1}$.

50. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}{x}$.

51. $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{\sqrt{1+x+x^2}-\sqrt{7+2x-x^2}}{x^2-2x}$.

Раскрытие неопределенностей вида $\infty-\infty$. Найдите пределы:

52. $\lim\limits_{x\to+\infty} (\sqrt{x^2+8x+3}-\sqrt{x^2+4x+3})$.

53. $\lim\limits_{x\to 1} \left(\dfrac{1}{x-1}-\dfrac{2}{x^2-1}\right)$.

54. $\lim\limits_{x\to\pm\infty} (\sqrt{x^2+3x}-x)$.

55. $\lim\limits_{x\to+\infty} (\sqrt{x^2+x+1}-\sqrt{x^2-x})$.

56. $\lim\limits_{x\to\pm\infty} (x-\sqrt{x^2-a^2})$.

57. $\lim\limits_{x\to -2} \left(\dfrac{1}{x+2}+\dfrac{4}{x^2-4}\right)$.

58. $\lim\limits_{x\to 2} \left(\dfrac{1}{x-2}-\dfrac{12}{x^3-8}\right)$.

59. $\lim\limits_{x\to-\infty} (\sqrt{x^2-1}-\sqrt{x^2-4x})$.

Найдите пределы, используя замечательный предел $\lim\limits_{x\to 0} (1+x)^{1/x}=e$:

60. $\lim\limits_{x\to 0} (1-4x)^{(1-x)/x}$.

61. $\lim\limits_{x\to 0} (1+2x)^{1/x}$.

62. $\lim\limits_{x\to\pm\infty} \left(\dfrac{2x-1}{2x+1}\right)^{2x}$.

63. $\lim\limits_{x\to\pm\infty} \left(1+\dfrac{3}{x}\right)^{x}$.

64. $\lim\limits_{x\to\pm\infty} \left(\dfrac{x-3}{x}\right)^{\frac{x}{2}+1}$.

65. $\lim\limits_{x\to\pm\infty} \left(\dfrac{x^2+1}{x^2}\right)^{x^2+1}$.

Найдите левосторонний и правосторонний пределы функции:

66. $f(x)=\dfrac{1}{x+2^{1/(x-3)}}$ при $x\to 3$.

67. $f(x)=\dfrac{x^3-x^2}{2|x-1|}$ при $x\to 1$.

68. $f(x)=\dfrac{1}{1+2^{1/x}}$ при $x\to 0$.

Докажите, что функция $f(x)$ непрерывна:

69. $f(x)=x^3$. 70. $f(x)=2^x$.

71. $f(x)=\dfrac{1}{x^2+x+1}$.

Найдите точки разрыва данных функций и выясните характер разрыва:

72. $y=\dfrac{x}{x-4}$. 73. $y=\dfrac{x^2-25}{x-5}$.

74. $y=\dfrac{x^3-6x^2+11x-6}{x^2-3x+2}$. 75. $y=\dfrac{x+1}{x^3+6x^2+11x+6}$.

ОТВЕТЫ, УКАЗАНИЯ И РЕШЕНИЯ К ГЛАВЕ 3

1. Решение. Имеем (см. п. 3.1.2) $x_n=1+\dfrac{1}{n}$. Для доказательства выберем произвольное число $\varepsilon>0$. Возьмем N настолько большим, что для всех $n>N$ выполнялось неравенство $1/n<\varepsilon$. Для этого достаточно положить $N=[1/\varepsilon]$. При таком выборе N получим, что $|x_n-1|<\varepsilon$ для всех $n>N$. Следовательно, по определению предела последовательности $\lim\limits_{n\to\infty} x_n=1$.

3. Решение. Выделим целую часть дроби

$$\lim_{n\to\infty}\frac{3n+2}{n+1}=\lim_{n\to\infty}\frac{3n+3-1}{n+1}=$$
$$=\lim_{n\to\infty}\frac{3(n+1)}{n+1}-\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n+1}=3-\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n+1}.$$

Можно доказать, что $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{n+1}=0$. Следовательно $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{3n+2}{n+1}=3$.

Этот же пример можно решить следующим образом. Выберем старшую степень дискретной переменной n. В нашем примере это n^1. Разделим числитель и знаменатель дроби почленно на n, получим

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\dfrac{3n}{n}+\dfrac{1}{n}}{\dfrac{n}{n}+\dfrac{1}{n}}.$$

Используя свойства предела (см. п. 3.1.7), получим

$$\frac{\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{3n}{n}+\dfrac{1}{n}\right)}{\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{n}{n}+\dfrac{1}{n}\right)}=\frac{\lim\limits_{n\to\infty}3+\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{n}}{\lim\limits_{n\to\infty}1+\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{n}},$$

последовательность $1/n$ при $n\longrightarrow\infty$ является бесконечно малой (как величина обратная бесконечно большой n при $n\longrightarrow\infty$), поэтому

$$\lim_{n\to\infty}\frac{3n+2}{n+1}=\frac{3+0}{1+0}=3.$$

Ответ. 3.

4. Ответ. 3.

5. Решение. Здесь, в этом примере, старшая степень n равна 2; делим числитель и знаменатель дроби почленно на n^2

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{2n}{n^2}+\frac{1}{n^2}}{\frac{n^2}{n^2}+\frac{1}{n^2}}=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{2}{n}+\frac{1}{n^2}}{1+\frac{1}{n^2}}$$

Числитель полученной дроби стремится к нулю, а знаменатель есть число постоянное, следовательно, $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{2n+1}{n^2+1}=0$. Ответ. 0.

6. Ответ. ∞.

7. Ответ. 2.

8. Ответ. 2.

9. Ответ. 1.

10. Выберем произвольное число $\varepsilon>0$ и рассмотрим $|x_n-a|<\varepsilon$ или $\left|\left(a-\frac{1}{2^n}\right)-a\right|=\frac{1}{2^n}<\varepsilon$, откуда $-n\lg 2<\lg\varepsilon$; следовательно, $n>\frac{\lg\varepsilon^{-1}}{\lg 2}$. Тогда искомая зависимость $N=N(\varepsilon)$ будет иметь вид $N=\left[\frac{\lg\varepsilon^{-1}}{\lg 2}\right]$. Мы нашли $N=N(\varepsilon)$ таксе, что для $\forall n>N$ выполнено $|x_n-a|<\varepsilon$, следовательно, $\lim\limits_{n\to\infty}\left(a-\frac{1}{2^n}\right)=a$.

11. Выберем произвольное число $\varepsilon>0$. Рассмотрим разность

$$|x_n-a|=\left|a+\frac{(-1)^n}{n^2}-a\right|=\left|\frac{(-1)^n}{n^2}\right|=\frac{1}{n^2};$$

по определению $1/n^2$ должно быть меньше ε. Положив $N=[1/\sqrt{\varepsilon}]$, получим, что для $\forall n>N$ $|x_n-a|=\frac{1}{n^2}<\varepsilon$, а это и означает, что

$$\lim_{n\to\infty}\left(a+\frac{(-1)^n}{n^2}\right)=a.$$

15. Ответ. 2.

16. Ответ. -6.

17. Ответ. 8.

18. Ответ. Предел не существует.

19. Решение. Введем новую переменную $\frac{2}{n}=\frac{1}{m}$, тогда $m=\frac{n}{2}$, $n=2m$ при $n\to\infty$, $m\to\infty$. Следовательно, имеем

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{2}{n}\right)^n=\lim_{m\to\infty}\left(1+\frac{1}{m}\right)^{2m}=\left\{\lim_{m\to\infty}\left(1+\frac{1}{m}\right)^m\right\}^2.$$

Таким образом, используя замечательный предел, получим $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{2}{n}\right)^n=e^2$. Ответ. e^2.

20. Указание. Положите $-1/3n=1/m$, $m=-3n$, $n=-m/3$, $m \longrightarrow -\infty$, при $n \longrightarrow +\infty$. Ответ. $e^{-1/3}$.

21. Решение. Полагаем $4/n=1/m$, $n=4m$, тогда

$$\lim_{m\to\infty}\left(1+\frac{1}{m}\right)^{4m+3}=\lim_{m\to\infty}\left(1+\frac{1}{m}\right)^{4m}\cdot\left(1+\frac{1}{m}\right)^{3}=$$

$$=\lim_{m\to\infty}\left\{\left(1+\frac{1}{m}\right)^{m}\right\}^{4}\cdot\lim_{m\to\infty}\left(1+\frac{1}{m}\right)^{3},$$

или

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{4}{n}\right)^{n+3}=\left\{\lim_{m\to\infty}\left(1+\frac{1}{m}\right)^{m}\right\}^{4}=e^{4}.$$

Ответ. e^4.

22. Указание. Выделите целую часть. Ответ. e^{-1}.

23. Решение. Преобразуем выражение, стоящее под знаком предела:

$$n\left\{\ln(n+3)-\ln n\right\}=n\ln\frac{n+3}{n}=\ln\left(\frac{n+3}{n}\right)^{n}=\ln\left(1+\frac{3}{n}\right)^{\frac{n}{3}\cdot 3}.$$

Тогда, используя свойства предела, имеем

$$\lim_{n\to\infty}\ln\left(1+\frac{3}{n}\right)^{\frac{n}{3}\cdot 3}=\ln\left(\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{3}{n}\right)^{n/3}\right)^{3}=\ln e^{3}=3.$$

Ответ. 3.

24. Ответ. -2.

25. Указание. Найти функцию $N=N(\varepsilon)$ и, положив $\varepsilon=0{,}01$, вычислите N. Ответ. $N=50$.

26. Следуя определению предела функции $\forall\varepsilon>0$, нам необходимо найти $\delta>0$ такое, что из выполнения $|x-2|<\delta$ следует выполнение $|(x-3)-(-1)|=|x-2|<\varepsilon$. Очевидно, что, положив $\delta=\varepsilon$, получим требуемое утверждение.

29. Решение. Следуя определению предела функции $\forall\varepsilon>0$, нам необходимо найти $\delta=\delta(\varepsilon)>0$ такое, чтобы из выполнения $|x-2|<\delta$ следовало бы выполнение $|x^2-4|<\varepsilon$. Преобразовав последнее неравенство с помощью первого, имеем

$$|x^2-4|=|(x-2)(x+2)|=$$
$$=|x-2|\,|x+2|<\delta|x-2+4|<\delta(|x-2|+4)<\delta(\delta+4)<\varepsilon.$$

Таким образом, при $\delta^2+4\delta<\varepsilon$ второе неравенство справедливо при выполнении первого.

Таким образом, мы доказали, что $\lim\limits_{x\to 2}x^2=4$.

30. Решение. Так как $x\longrightarrow 2$, то числитель дроби стремится к $5\cdot 2+1=11$, а знаменатель к $3\cdot 2+2=8$. Следовательно, $\lim\limits_{x\to 2}\frac{5x+1}{3x+2}=\frac{11}{8}$. Ответ. $11/8$.

31. Ответ. 2.

32. Ответ. 2.

33. Решение. При $x \to -6$ числитель дроби стремится к (-12), знаменатель — к 0. Следовательно,

$$\lim_{x\to -6}\frac{x-6}{x+6}=-12\lim_{x\to -6}\frac{1}{x+6},$$

где $1/(x+6)$ при $x \to -6$ есть величина, обратная бесконечно малой, откуда $\lim\limits_{x\to -6}\frac{x-6}{x+6}=\mp\infty$. Ответ. $\mp\infty$.

34. Ответ. $\pm\infty$.

35. Ответ. 0.

36. Решение. Числитель и знаменатель дроби безгранично возрастают при $x \to \pm\infty$. Принято говорить, что имеется неопределенность вида $\frac{\infty}{\infty}$. Разделим числитель и знаменатель дроби на старшую степень переменной x, получим

$$\lim_{x\to\pm\infty}\frac{\frac{3x^2}{x^2}+\frac{5x}{x^2}+\frac{1}{x^2}}{\frac{2x^2}{x^2}-\frac{7x}{x^2}+\frac{3}{x^2}}=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{3+\frac{5}{x}+\frac{1}{x^2}}{2-\frac{7}{x}+\frac{3}{x^2}}.$$

Так как при $x \to \pm\infty$ каждая из дробей $\frac{5}{x}$, $\frac{7}{x}$, $\frac{1}{x^2}$, $\frac{3}{x^2}$ стремится к нулю, то имеем

$$\lim_{x\to\pm\infty}\frac{3x^2+5x+1}{2x^2-7x+3}=\frac{3+0+0}{2-0+0}=\frac{3}{2}.$$

Ответ. 3/2.

37. Ответ. 1.

38. Ответ. 0.

39. Ответ. $+\infty$.

40. Ответ. -2.

41. Ответ. $-\infty$.

42. Решение. Здесь числитель и знаменатель дроби стремятся к нулю при $x \to 3$ (принято говорить, что при непосредственной подстановке получаем неопределенность $\frac{0}{0}$). Так как

$$\frac{x^2-9}{x^2-3x}=\frac{(x-3)(x+3)}{x(x-3)}=\frac{x+3}{x},$$

если $x \neq 3$, то $\lim\limits_{x\to 3}\frac{x^2-9}{x^2-3x}=\lim\limits_{x\to 3}\frac{x+3}{x}$. Но при $x \to 3$ дробь $\frac{x+3}{x}$ стремится к числу $\frac{3+3}{3}=2$. Итак, $\lim\limits_{x\to 3}\frac{x^2-9}{x^2-3x}=2$. Ответ 2.

43. Ответ. 3/2.

44. Ответ. -4.

45. Ответ. -1.

46. Ответ. -12.

47. Ответ. 0.

48. Решение. Здесь числитель и знаменатель дроби стремятся к нулю при $x \to 0$ (принято говорить, что при непосредственной подстановке получаем неопределенность $\frac{0}{0}$).

Умножим числитель и знаменатель дроби на $\sqrt{x+4}+2$:

$$\lim_{x\to 0}\frac{(\sqrt{x+4}-2)(\sqrt{x+4}+2)}{x(\sqrt{x+4}+2)}=\lim_{x\to 0}\frac{x+4-4}{x(\sqrt{x+4}+2)}=$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{1}{\sqrt{x+4}+2}=\frac{1}{4}.$$

Таким образом, $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sqrt{x+4}-2}{x}=\frac{1}{4}$. Ответ. 1/4.

49. Ответ. $-1/4$.

50. Ответ. 1.

51. Ответ: $\sqrt{7}/4$.

52. Решение. Умножим и разделим рассматриваемое выражение на $\sqrt{x^2+8x+3}+\sqrt{x^2+4x+3}$:

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{(\sqrt{x^2+8x+3}-\sqrt{x^2+4x+3})(\sqrt{x^2+8x+3}+\sqrt{x^2+4x+3})}{\sqrt{x^2+8x+3}+\sqrt{x^2+4x+3}}=$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{4x}{\sqrt{x^2+8x+3}+\sqrt{x^2+4x+3}}.$$

Разделим числитель и знаменатель полученной дроби на x (раскрываем неопределенность вида $\frac{\infty}{\infty}$, разделив числитель и знаменатель на старшую степень независимой переменной). Получим

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{4}{\sqrt{1+\frac{8}{x}+\frac{3}{x^2}}+\sqrt{1+\frac{4}{x}+\frac{3}{x^2}}}=\frac{4}{2}=2.$$

Ответ. 2.

53. Указание. Привести к общему знаменателю выражение, стоящее под знаком предела. Вычислить предел. Ответ. 1/2.

54. Ответ. 1,5, если $x\to+\infty$; ∞, если $x\to-\infty$.

55. Ответ. 1.

56. Ответ. 0, если $x\to+\infty$; $-\infty$, если $x\to-\infty$.

57. Ответ. $-1/4$.

58. Ответ. 1/2.

59. Ответ. -2.

60. Решение. Сделаем замену: $-4x=y$, $x=\frac{y}{-4}$; $\frac{1-x}{x}=$ $=\frac{1}{x}-1=-\frac{4}{y}-1=-\left(1+\frac{4}{y}\right)$, $y\to 0$ при $x\to 0$. Тогда

$$\lim_{y\to 0}(1+y)^{-\frac{4}{y}-1}=\lim_{y\to 0}\left[(1+y)^{\frac{1}{y}}\right]^{-4}\cdot[1+y]^{-1}=\lim_{y\to 0}\left[(1+y)^{\frac{1}{y}}\right]^{-4}.$$

Следовательно, $\lim\limits_{x\to 0}(1-4x)^{\frac{1-x}{x}}=e^{-4}$. Ответ. e^{-4}.

61. Ответ. e^2.

62. Указание. Выделите целую часть дроби:

$$\frac{2x-1}{2x+1}=\frac{2x+1-1-1}{2x+1}=1-\frac{2}{2x+1}, \text{ положите } y=-\frac{2}{2x+1}.$$

Ответ. e^{-2}.

63. Указание. Сделайте замену $3/x=y$, $x=3/y$, $y\longrightarrow 0$ при $x\longrightarrow \pm\infty$. Ответ. e^3.

64. Ответ. $\frac{1}{e\sqrt{e}}$.

65. Ответ. e.

66. Решение. Если $x\longrightarrow 3-0$, то $1/(x-3)\longrightarrow -\infty$ и $2^{1/(x-3)}\longrightarrow 0$. Следовательно, $\lim\limits_{x\to 3-0}\frac{1}{x+2^{1/(x-3)}}=\frac{1}{3}$. Если $x\longrightarrow 3+0$, то $1/(x-3)\longrightarrow +\infty$, $2^{1/(x-3)}\longrightarrow +\infty$. Тогда $\lim\limits_{x\to 3+0}\frac{1}{x+2^{1/(x-3)}}=0$.

Ответ. $\lim\limits_{x\to 3-0} y=\frac{1}{3}$, $\lim\limits_{x\to 3+0} y=0$.

67. Ответ. $\lim\limits_{x\to 1-0} y=-\frac{1}{2}$, $\lim\limits_{x\to 1+0} y=\frac{1}{2}$.

68. Ответ. $\lim\limits_{x\to -0} y=1$, $\lim\limits_{x\to +0} y=0$.

69. Решение. Следуя определению непрерывности, нам необходимо показать, что бесконечно малому приращению аргумента соответствует бесконечно малое приращение функции.

Вычислим приращение функции в некоторой точке x:

$\Delta y=y(x+\Delta x)-y(x)=(x+\Delta x)^3-x^3=x^3+3x^2\Delta x+3x\Delta^2 x+\Delta^3 x-x^3$.

Тогда $\Delta y=\Delta x(3x^2+3x\Delta x+\Delta^2 x)$. Переходя к пределу в последнем равенстве, будем иметь $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\Delta y=0$. Следовательно, функция $y=x^3$ непрерывна на всем промежутке $(-\infty, +\infty)$.

72. Решение. Найдем левосторонний и правосторонний пределы функции:

$$\lim_{x\to 4-0}\frac{x}{x-4}=-\infty,\quad \lim_{x\to 4+0}\frac{x}{x-4}=+\infty.$$

Таким образом, функция при $x\longrightarrow 4$ не имеет ни левостороннего, ни правостороннего конечных пределов. Следовательно, $x=4$ является точкой разрыва второго рода.

73. Решение. В точке $x=5$ функция не определена, так как, выполняя подстановку, приходим к неопределенности $\frac{0}{0}$. При $x\neq 5$ $y=\frac{x^2-25}{x-5}=\frac{(x-5)(x+5)}{x-5}=x+5$. Легко видеть, что в таком случае $\lim\limits_{x\to 5-0} y=\lim\limits_{x\to 5+0} y=10$. Таким образом, при $x=5$ функция имеет разрыв первого рода, причем этот разрыв может быть устранен, если условиться, что $y=10$ при $x=5$.

74. Ответ. $x=1$, $x=2$ — точки устранимого разрыва непрерывности.

75. Ответ. $x=-2$, $x=-3$ — точки разрыва второго рода, $x=-1$ — точка устранимого разрыва.

ГЛАВА 4

ПРОИЗВОДНАЯ. ДИФФЕРЕНЦИАЛ ФУНКЦИИ И ЕГО ПРИЛОЖЕНИЯ

§ 4.1. Производная

4.1.1. Производная, ее геометрический и механический смысл. Рассмотрим функцию $y=f(x)$, заданную на некотором интервале (a, b). Возьмем произвольную точку $x \in (a, b)$ и зададим в этой точке приращение Δx такое, что $x+\Delta x \in (a, b)$. При этом функция получит приращение (см. стр. 84)

$$\Delta y = f(x+\Delta x) - f(x).$$

Рассмотрим отношение $\frac{\Delta y}{\Delta x}$.

Определение 4.1. *Если существует предел отношения $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ при $\Delta x \to 0$ $(\Delta x \neq 0)$, то этот предел называют производной функции $f(x)$ в точке x и обозначают y'_x*[1] *или $f'(x)$, или $\frac{dy}{dx}$*[2]. *Таким образом,*

$$y' = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} \qquad (\Delta x \neq 0) \tag{4.1}$$

или

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} \qquad (\Delta x \neq 0).$$

Рассматривая все значения x из (a, b), в которых $f'(x)$ существует, увидим, что каждой точке x соответствует определенное значение $f'(x)$. Таким образом, $f'(x)$ есть некоторая функция от x, которая определяется по исходной

---

[1]) Запись читается: «игрек штрих по икс».

[2]) Запись читается: «де игрек по де икс».

функции f применением формулы (4.1). При вычислении производной мы всегда имеем дело с раскрытием неопределенности вида $\frac{0}{0}$.

Нахождение производной называется *дифференцированием* функции.

Пример 4.1. Рассмотрим функцию $y=x^2$. Вычислим производную в точке $x=1/2$. По определению производной

$$y=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{(x+\Delta x)^2-x^2}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{x^2+2x\Delta x+\Delta x^2-x^2}{\Delta x}=$$
$$=\lim_{\Delta x\to 0}(2x+\Delta x)=2x.$$

Итак, в нашем примере $y'=2x$. Зная этот результат, легко вычислить значение производной в любой точке. Например, при $x=1/2$ получим $y'=1$.

Понятие производной позволяет, как мы увидим в дальнейшем, характеризовать поведение функции, ввести аппарат исследования функции.

Теперь обратимся к геометрическому значению производной.

Введем понятие касательной к кривой. Пусть M_0 — точка некоторой непрерывной кривой (графика непрерывной функции). Проведем через нее секущую M_0M (рис. 4.1) и будем устремлять точку M вдоль кривой по

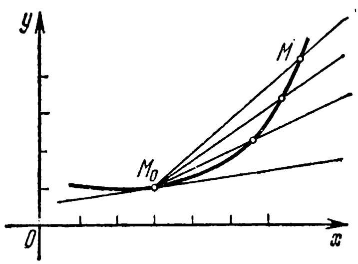


Рис. 4.1.

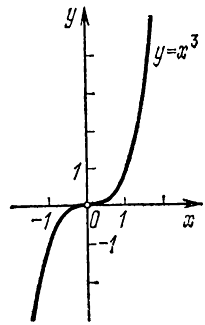


Рис. 4.2.

направлению к M_0, тогда секущая M_0M, поворачиваясь вокруг точки M_0, займет некоторое предельное положение.

Определение 4.2. *Касательной к кривой в точке M_0 называется прямая, занимающая предельное положение секущей M_0M, если при движении по любому закону вдоль кривой точка M стремится занять положение M_0.*

Заметим, что с точки зрения этого определения: а) касательная может пересекать кривую, например ось Ox является касательной к графику функции $y=x^3$ (рис. 4.2); б) касательная может иметь с кривой несколько общих точек, например прямая $y=1$ имеет бесчисленное множество общих точек с кривой, график которой изображен

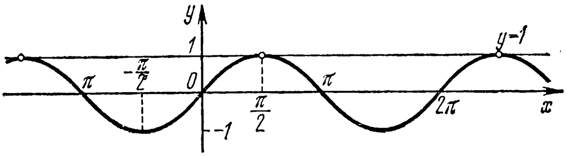


Рис. 4.3.

на рис. 4.3; в) касательная может не существовать, например на рис. 4.4 представлена кривая, не имеющая касательной в точке M_0. Действительно, при стремлении M к M_0 слева секущая стремится занять положение LM_0, а при стремлении M к M_0 справа — положение NM_0.

Перенесем приведенные выше рассуждения на построение касательной к графику функции $y=f(x)$ в точке

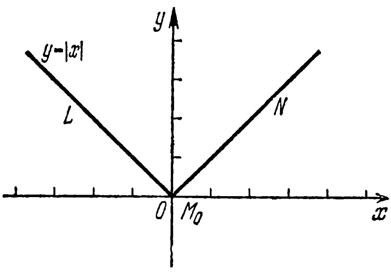


Рис. 4.4.

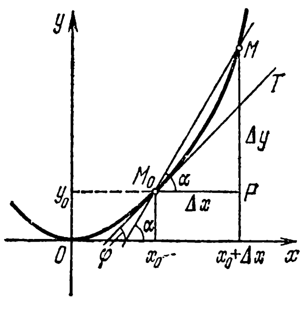


Рис. 4.5.

$M_0(x_0, y_0)$ (рис. 4.5). Возьмем на графике другую точку $M(x_0+\Delta x,\ y_0+\Delta y)$, проведем секущую M_0M. Пусть α — угол наклона M_0M к оси Ox. Тогда при $M \to M_0$, или, что то же самое при $\Delta x \to 0$, $\Delta y \to 0$, очевидно,

$$\lim_{\Delta x \to 0} \alpha = \varphi, \tag{4.2}$$

где φ — угол наклона касательной M_0T к оси Ox, или

$$\lim_{\Delta x \to 0} \operatorname{tg} \alpha = \operatorname{tg} \lim_{\Delta x \to 0} \alpha = \operatorname{tg} \varphi. \tag{4.3}$$

Из рис. 4.5 можно видеть, что $\operatorname{tg}\alpha = \frac{\Delta y}{\Delta x}$ (где Δx и Δy могут быть как положительными, так и отрицательными), тогда (4.3) переписывается в виде

$$\operatorname{tg}\varphi = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}, \tag{4.4}$$

т. е. *производная функции $y = f(x)$ в точке $M_0(x_0, y_0)$ равна тангенсу угла наклона касательной к графику в этой точке с осью Ox.*

Очевидной является связь знака тангенса угла наклона касательной к графику функции с возрастанием (убыванием) функции. На рис. 4.6 представлен график возрастающей функции. Здесь $\operatorname{tg}\varphi > 0$ и, следовательно, $y' > 0$. На рис. 4.2 приведен график возрастающей функции, у которой

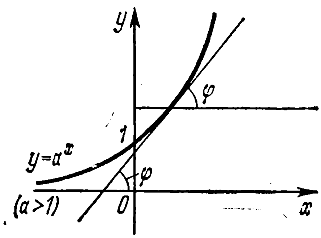


Рис. 4.6.

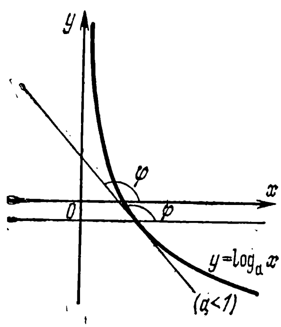


Рис. 4.7.

$f'(0) = 0$. Аналогично из рис. 4.7 видно, что для убывающей функции $y' < 0$.

Таким образом, мы получили н е о б х о д и м ы й признак возрастания (убывания) функции:

Если дифференцируемая функция возрастает (убывает) в некотором интервале, то производная этой функции не отрицательна (не положительна) в этом интервале.

Действительно, выше (см. стр. 41) мы видели, что для возрастающей функции знак Δx совпадает со знаком Δy. Но тогда

$$y' = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} \geqslant 0.$$

Аналогично для убывающей функции при $\Delta x > 0$ имеем $\Delta y < 0$, т. е.

$$y' = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} \leqslant 0.$$

Пример 4.2. Найти тангенс угла наклона касательной к графику функции $y=x^2$ в точке с абсциссой $x=1/2$.

Мы видели выше (пример 4.1), что при $x=1/2$ производная функции $y=x^2$ равна 1. Следовательно, касательная к графику в этой точке образует с осью угол в 45° (рис. 4.8).

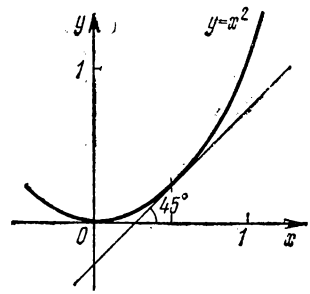


Рис. 4.8.

Рассмотрим теперь задачу о скорости точки, движущейся вдоль прямой линии. Очевидно, что пройденный точкой путь S есть некоторая функция времени t

$$S=f(t).$$

Предположим, что в момент времени t точка находится в положении S (рис. 4.9). Через некоторое время Δt точка окажется в положении $S+\Delta S$, где ΔS — путь, пройденный точкой за время Δt. Отношение $\frac{\Delta S}{\Delta t}$ называется *средней скоростью* точки за время Δt, а предел этого отношения

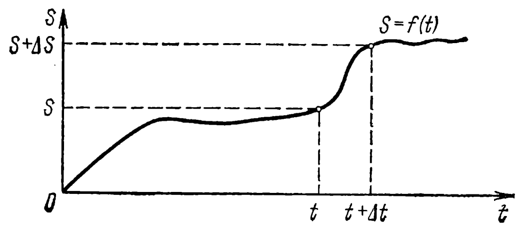


Рис. 4.9.

при $\Delta t \to 0$ есть *мгновенная скорость* точки в момент времени t. Но по определению производной

$$\lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta S}{\Delta t} = S'_t. \qquad (4.5)$$

Таким образом, с точки зрения механики *производная в точке пути по времени есть мгновенная скорость в этой точке.*

4.1.2. Связь между существованием производной и непрерывностью функции. В главе 3, п. 3.3.1 было введено понятие непрерывности числовой функции. Наличие производной (дифференцируемость) позволяет установить новые свойства функции, которыми непрерывная функция, вообще говоря, не обладает. Установим связь между дифференцируемостью и непрерывностью функции в точке.

Отметим прежде всего, что не любая непрерывная функция дифференцируема. Для того чтобы иметь право это утверждать, достаточно рассмотреть, например, функцию $y=|x|$. В точке $x=0$ производная y' не существует, ибо при $x=0$ касательная не существует (рис. 4.5).

Докажем теорему.

Теорема 4.1. *Если существует конечная производная функции $y=f(x)$ в точке x, то $f(x)$ непрерывна в этой точке.*

По условию теоремы существует

$$y'=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}.$$

По определению предела (см. стр. 65) будем иметь

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=y'+\alpha \quad \text{или} \quad \Delta y=y'\Delta x+\alpha\Delta x, \tag{4.6}$$

где $\alpha=\alpha(\Delta x)\longrightarrow 0$ при $\Delta x\longrightarrow 0$. Тогда

$$\Delta y=y'\Delta x+o(\Delta x), \tag{4.7}$$

где $o(\Delta x)$—бесконечно малая величина высшего порядка по сравнению с Δx (см. стр. 86).

Из (4.7) следует $\Delta y\longrightarrow 0$ при $\Delta x\longrightarrow 0$, следовательно, $y=f(x)$ непрерывна в точке x.

4.1.3. Производная постоянной величины. Рассмотрим постоянную функцию $y=c=\text{const}$. Имеем $\Delta y=0$, поэтому

$$y'=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{0}{\Delta x}=0.$$

Следовательно,

$$c'=0.$$

Этот же результат следует из геометрических соображений. Действительно, касательная к прямой $y=c$, параллельной оси Ox, совпадает с этой прямой (рис. 4.10).

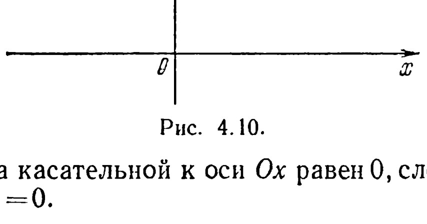


Рис. 4.10.

Угол наклона касательной к оси Ox равен 0, следовательно, $\operatorname{tg}\alpha=0$ и $y'=0$.

4.1.4. Производная степенной функции. $y = x^{\mu}$ (μ — любое вещественное число, а область изменения x зависит от μ (см. п. 2.2.10). По определению производной для функции $y = x^{\mu}$ имеем

$$y' = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{(x+\Delta x)^{\mu} - x^{\mu}}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\left[x\left(1+\frac{\Delta x}{x}\right)\right]^{\mu} - x^{\mu}}{\Delta x} =$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{x^{\mu}\left(1+\frac{\Delta x}{x}\right)^{\mu} - x^{\mu}}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{x^{\mu}\left[\left(1+\frac{\Delta x}{x}\right)^{\mu} - 1\right]}{x \cdot \frac{\Delta x}{x}} =$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} x^{\mu-1} \frac{\left(1+\frac{\Delta x}{x}\right)^{\mu} - 1}{\frac{\Delta x}{x}} = x^{\mu-1} \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\left(1+\frac{\Delta x}{x}\right)^{\mu} - 1}{\frac{\Delta x}{x}},$$

но (см. п. 3.3.2)

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\left(1+\frac{\Delta x}{x}\right)^{\mu} - 1}{\frac{\Delta x}{x}} = \mu.$$

Таким образом, для функции $y = x^{\mu}$

$$y' = \mu x^{\mu-1}. \qquad (4.8)$$

Пример 4.3. Рассмотрим функцию $y = x^3$. По формуле (4.8) $y' = 3x^2$. Заметив, что $y' > 0$ при всех значениях $x \neq 0$ и $y' = 0$ при $x = 0$, можно утверждать, что функция $y = x^3$ является возрастающей (см. рис. 4.2).

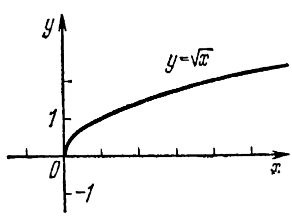


Рис. 4.11.

Пример 4.4. Рассмотрим функцию $y = \sqrt{x}$. Переписав ее в виде $y = x^{1/2}$, получим

$$y' = \frac{1}{2} x^{\frac{1}{2}-1} = \frac{1}{2\sqrt{x}}.$$

Заметим, что $(\sqrt{x})' > 0$, т. е. $y = \sqrt{x}$ — возрастающая функция. Функция $y = \sqrt{x}$ определена в интервале $[0, \infty)$, поэтому при $x = 0$ мы можем говорить лишь о производной справа. Так как

$$\lim_{x \to +0} \frac{1}{2\sqrt{x}} = +\infty,$$

то ось ординат будет касательной к графику функции $y = \sqrt{x}$ (рис. 4.11).

4.1.5. Производная суммы, разности, произведения и частного двух функций. Пусть функции $u(x)$ и $v(x)$ дифференцируемы. Найдем производную от их суммы и разности

$$y=u(x)\pm v(x).$$

Возьмем точку x, зададим приращение Δx, вызывающее приращения Δu и Δv. Заметим, что в силу непрерывности (u и v дифференцируемы!) функций u, v и y имеем $\Delta u \to 0$, $\Delta v \to 0$, $\Delta y \to 0$ при $\Delta x \to 0$. Приращенные значения функций u и v будут соответственно $u+\Delta u$ и $v+\Delta v$, тогда

$$\Delta y=[(u+\Delta u)\pm(v+\Delta v)]-(u\pm v)=\Delta u\pm\Delta v.$$

Разделив обе части на Δx и переходя к пределу, получим

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta u}{\Delta x}\pm\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta v}{\Delta x}$$

или

$$(u\pm v)'=u'\pm v'. \tag{4.9}$$

Пример 4.5. Если $y=x^2+x^5$, то $y'=2x+5x^4$.

Если

$$y=u(x)\cdot v(x),$$

то, рассуждая аналогично, получим

$$\Delta y=(u+\Delta u)\cdot(v+\Delta v)-u\cdot v=v\cdot\Delta u+u\cdot\Delta v+\Delta u\cdot\Delta v,$$

тогда

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=v\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta u}{\Delta x}+u\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta v}{\Delta x}+\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta u\cdot\Delta v}{\Delta x}.$$

Учитывая, что $\Delta u\cdot\Delta v=o(\Delta x)$ — бесконечно малая высшего порядка по сравнению с Δx, имеем

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta u\cdot\Delta v}{\Delta x}=0.$$

Окончательно получим

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=v\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta u}{\Delta x}+u\lim_{\Delta \to x\, 0}\frac{\Delta v}{\Delta x}$$

или

$$(u \cdot v)' = u' \cdot v + u \cdot v'. \tag{4.10}$$

Как следствие этого правила для функции $y = cu$, $c = \text{const}$, получим

$$(cu)' = c'u + cu' = cu',$$

т. е. постоянный множитель можно выносить за знак производной.

Обратимся теперь к правилу дифференцирования дроби

$$y = \frac{u(x)}{v(x)}, \qquad v(x) \neq 0.$$

Проводя рассуждения, аналогичные предыдущим, будем иметь

$$\Delta y = \frac{u + \Delta u}{v + \Delta v} - \frac{u}{v} = \frac{v\Delta u - u\Delta v}{v(v + \Delta v)}$$

или, разделив на Δx,

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{v\frac{\Delta u}{\Delta x} - u\frac{\Delta v}{\Delta x}}{v(v + \Delta v)}.$$

Переходя к пределу и учитывая, что $\Delta v \to 0$ при $\Delta x \to 0$, получим

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{v \lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta u}{\Delta x} - u \lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta v}{\Delta x}}{v^2}$$

или

$$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2}. \tag{4.11}$$

Пример 4.6. Найти производную функции $y = \frac{2x+1}{x^3}$.

По формуле (4.11) имеем

$$y' = \frac{(2x+1)'\,x^3 - (2x+1)\,(x^3)'}{(x^3)^2} = \frac{2x^3 - (2x+1)\,3x^2}{x^6} = -\frac{4x+3}{x^4}.$$

4.1.6. Производная сложной функции. Рассмотрим сложную функцию (см. п. 2.2.7)

$$y = f(\varphi(x)). \tag{4.12}$$

Вводя обозначение $u=\varphi(x)$, можно переписать (4.12) в виде цепочки

$$y=f(u), \qquad u=\varphi(x) \tag{4.13}$$

или суперпозиции отображений

$$X \xrightarrow{\varphi} U, \qquad U \xrightarrow{f} Y. \tag{4.14}$$

В предположении, что существуют конечные производные φ'_x и f'_u, имеет место следующее правило вычисления производной сложной функции:

$$y'_x = y'_u \cdot u'_x. \tag{4.15}$$

Действительно, по формуле (4.7)

$$\Delta y = y'_u \, \Delta u + o(\Delta u).$$

Разделив обе части этого равенства на Δx, получим

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = y'_u \frac{\Delta u}{\Delta x} + \frac{o(\Delta u)}{\Delta u} \cdot \frac{\Delta u}{\Delta x}, \tag{4.16}$$

где $o(\Delta u)$ — бесконечно малая высшего порядка по сравнению с Δu. Переходя к пределу, имеем

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = y'_u \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta u}{\Delta x} + \lim_{\Delta u \to 0} \frac{o(\Delta u)}{\Delta u} \cdot \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta u}{\Delta x} \tag{4.17}$$

($\Delta u \to 0$ при $\Delta x \to 0$ вследствие непрерывности $u=\varphi(x)$ в точке x). Окончательно получим

$$y'_x = y'_u \cdot u'_x.$$

Пример 4.7. Вычислить производную функции $y=\sqrt{1+x^2}$. Введем обозначения

$$y=\sqrt{u}, \qquad u=1+x^2.$$

По формуле (4.15)

$$y'_x = (\sqrt{u})'_u \cdot (1+x^2)'_x = \frac{1}{2\sqrt{u}} \cdot 2x$$

или, с учетом введенного обозначения $u=1+x^2$,

$$y' = \frac{1}{2\sqrt{1+x^2}} \cdot 2x = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}.$$

Заметим, что в практике вычисления производных совершенно не обязательно расчленять сложную функцию на отдельные составляющие функции.

Пример 4.8. Найдем производную функции $y=(x^2+3x+4)^2$.

$$y' = 2\cdot(x^2+3x+4)(x^2+3x+4)' = 2(x^2+3x+4)(2x+3) =$$
$$= 4x^3+18x^2+34x+24.$$

4.1.7. Производная обратной функции. Пусть для инъективной, дифференцируемой функции $y = f(x)$ построена обратная (см. п. 2.2.6) функция $x = f^{-1}(y)$. В предположении, что функция $x = f^{-1}(y)$ непрерывна и $y'(x) \neq 0$, докажем, что

$$x'_y = \frac{1}{y'_x}. \tag{4.18}$$

Действительно, так как

$$\frac{\Delta x}{\Delta y} = \frac{1}{\frac{\Delta y}{\Delta x}}$$

и в силу непрерывности функций $y = f(x)$ и $x = f^{-1}(y)$ условия $\Delta x \to 0$, $\Delta y \to 0$ равносильны, будем иметь

$$\lim_{\Delta y \to 0} \frac{\Delta x}{\Delta y} = \frac{1}{\lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}},$$

что и требовалось доказать.

Пример 4.9. Найдем производную функции $y = \sqrt{x}$, $x \in (0, +\infty)$, используя полученную выше формулу (4.18). Обратной к этой функции будет функция $x = y^2$, $y \in (0, +\infty)$. Вычисляя $x'_y = 2y$ и применяя (4.18), получим

$$y'_x = \frac{1}{2y} \quad \text{или} \quad y' = \frac{1}{2\sqrt{x}}.$$

Приведенное решение, разумеется, весьма искусственно[1]). Гораздо проще найти производную функции $y = \sqrt{x}$ так, как это было сделано в примере 4.4.

4.1.8. Производная показательной и логарифмической функций. Рассмотрим функцию $y = a^x$ $(a > 0)$. По определению производной будем иметь

$$y' = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{a^{x+\Delta x} - a^x}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{a^x (a^{\Delta x} - 1)}{\Delta x} =$$

$$= a^x \lim_{\Delta x \to 0} \frac{a^{\Delta x} - 1}{\Delta x} = a^x \ln a.$$

Здесь мы воспользовались известным пределом (см. стр. 85)

$$\lim_{\alpha \to 0} \frac{a^\alpha - 1}{\alpha} = \ln a.$$

[1]) Выбор такой иллюстрации применения формулы (4.18) связан с недостаточным набором обратных функций к моменту изучения рассматриваемой темы.

Итак,

$$(a^x)' = a^x \cdot \ln a. \qquad (4.19)$$

В частности, для функции $y = e^x$ получим

$$(e^x)' = e^x.$$

Для показательной функции скорость возрастания (при $a > 1$) пропорциональна значению самой функции.

Обратимся к производной логарифмической функции $y = \log_a x$, $x \in (0, +\infty)$. Используя формулу производной обратной функции (4.18), будем иметь

$$x = a^y, \quad x'_y = a^y \ln a,$$

$$y'_x = \frac{1}{a^y \ln a} = \frac{1}{x \ln a}.$$

Итак,

$$(\log_a x)' = \frac{1}{x \ln a}. \qquad (4.20)$$

В частности,

$$(\ln x)' = \frac{1}{x}. \qquad (4.21)$$

Скорость возрастания логарифмической функции (при $a > 1$) обратно пропорциональна значению аргумента и стремится к нулю при безграничном возрастании аргумента.

4.1.9. Производная функции, заданной параметрически. Пусть функция

$$X \xrightarrow{f} Y \qquad (4.22)$$

задана параметрическими уравнениями

$$x = \varphi(t), \quad y = \psi(t). \qquad (4.23)$$

Производную от y по x можно вычислить, не представляя функцию (4.22) в явном виде.

Теорема 4.2. *Если в некотором интервале изменения t функция $x = \varphi(t)$ инъективна, функции $x = \varphi(t)$ и $y = \psi(t)$ дифференцируемы и $\varphi'(t) \neq 0$, то производная от функции y по x находится по формуле*

$$y'_x = \frac{\psi'(t)}{\varphi'(t)} = \frac{y'_t}{x'_t}. \qquad (4.24)$$

Доказательство. В силу инъективности функции $x = \varphi(t)$ и условия $\varphi'(t) \neq 0$ существует функция $t = g(x)$, обратная функции $x=\varphi(t)$, причем

$$t'_x=\frac{1}{x'_t}.$$

Перепишем (4.23) в виде

$$y=\psi(g(x)).$$

Используя правило дифференцирования сложной функции (4.15), получим

$$y'_x=\psi'(t)\cdot g'(x)=\frac{y'_t}{x'_t}.$$

Пример 4.10. Вычислить производную y'_x функции

$$x=\frac{3t}{1+t^3}, \qquad y=\frac{3t^2}{1+t^3}.$$

Тогда

$$x'_t=\frac{3(1-2t^3)}{(1+t^3)^2}, \qquad y'_t=\frac{3t(2-t^3)}{(1+t^3)^2}.$$

Далее по формуле (4.24) будем иметь

$$y'_x=\frac{y'_t}{x'_t}=\frac{t(2-t^3)}{1-2t^3}.$$

4.1.10. Производная неявной функции. Напомним, что неявным заданием функции называется задание ее уравнением

$$F(x, y)=0, \tag{4.25}$$

неразрешенным относительно y. Не всякое уравнение, связывающее x и y, задает неявную функцию. Например, уравнение

$$x^2+y^2=-1$$

не определяет никакой функции, ибо ему не удовлетворяет ни одна пара вещественных чисел x и y.

Сформулируем правило дифференцирования неявной функции.

Для того чтобы найти производную неявной функции y по x, заданной уравнением (4.25), дифференцируем по x это равенство, считая y функцией от x; из полученного равенства определяем искомую производную y'_x.

Пример 4.11. Найти производную неявной функции

$$x^2+y^2=R^2.$$

Дифференцируем обе части равенства, причем член y^2 дифференцируем как сложную функцию

$$2x+2y\cdot y'=0,$$

откуда

$$y'=-\frac{x}{y}.$$

4.1.11. Производная второго порядка, ее механический смысл. Производные высших порядков. Пусть дана функция $y=f(x)$, имеющая производную y'. Отыскав производную от функции y', мы получим вторую производную от данной функции $y=f(x)$, которая обозначается y''.

Пример 4.12. Для функции $y=x^3$ первой производной будет $y'=3x^2$, второй производной

$$y''=(3x^2)'=6x.$$

Производной функции $y=f(x)$ третьего порядка называется производная от второй производной от данной функции

$$y'''=(y'')'.$$

Вообще *производной функции* $y=f(x)$ *n-го порядка называется производная от производной* $(n-1)$*-го порядка от данной функции*

$$y^{(n)}=(y^{(n-1)})'. \tag{4.26}$$

Выясним механический смысл второй производной. Выше (4.5) было показано, что S'_t есть мгновенная скорость точки, движущейся по закону $S=f(t)$. Пусть в некоторый момент времени точка имеет скорость V. Если движение неравномерное, то через некоторое время Δt скорость точки изменится на некоторую величину ΔV. Отношение $\frac{\Delta V}{\Delta t}$ называется *средним ускорением точки за время* Δt, а предел этого отношения при $\Delta t\to 0$ есть *ускорение точки в момент* t.

Итак,

$$a=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta V}{\Delta t}=V'_t.$$

Так как $V=S'_t$, можно записать

$$a=V'_t=(S'_t)'_t=S''_t.$$

Таким образом, с точки зрения механики вторая производная от пути по времени есть ускорение в этой точке.

§ 4.2. Дифференциал

4.2.1. Дифференциал функции. С понятием производной тесно связано понятие дифференциала функции, которое играет важную роль как с теоретической, так и с прикладной точки зрения.

Пусть $y=f(x)$ — некоторая функция, дифференцируемая в данной точке. Приращение функции Δy в точке x может быть представлено (см. стр. 108) в виде

$$\Delta y = y'\Delta x + o(\Delta x). \tag{4.27}$$

Величина $y'\Delta x$ (при $y' \neq 0$) — главная часть приращения прямо пропорциональна первой степени приращения Δx, поэтому она называется *линейной частью приращения*.

Определение. *Дифференциалом функции $y=f(x)$ в точке x называется произведение производной y', вычисленной в этой точке x, на произвольное приращение Δx.*

Дифференциал функции обозначается символом dy или $df(x)$

$$dy = y'\Delta x. \tag{4.28}$$

В силу (4.27) справедливо приближенное равенство

$$\Delta y \approx dy,$$

т. е. при малых Δx приращение функции с большой точностью можно заменить ее дифференциалом.

Будем считать по определению, что

$$\Delta x \equiv dx, \tag{4.29}$$

тогда

$$dy = y'\,dx. \tag{4.30}$$

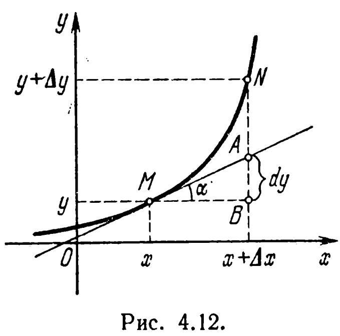


Рис. 4.12.

4.2.2. Геометрический смысл дифференциала. Рассмотрим график функции $y=f(x)$ (рис. 4.12), дифференцируемой в точке x. Проведем касательную к кривой в точке M с абсциссой x. Зададим в точке x приращение Δx, отметим на кривой точку N с абсциссой $x+\Delta x$. Проведем построение, указанное на рисунке. Из треугольника ABM получим $AB = \mathrm{tg}\,\alpha \cdot \Delta x$ или $AB = y'\,dx = dy$.

Таким образом, геометрически дифференциал представляет собой приращение ординаты точки, движущейся по касательной к кривой.

Заметим, что для кривой, изображенной на рис. 4.12, $dy < \Delta y$. Это обстоятельство связано с направлением выпуклости. Для кривой, изображенной на рис. 4.13, $dy > \Delta y$.

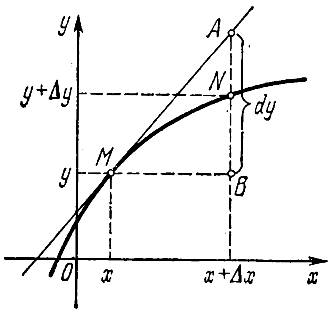


Рис. 4.13.

4.2.3. Вычисление дифференциала. Правила вычисления дифференциала следуют из его определения. Действительно, в силу (4.30) будем иметь, например:

1°. $d(c) = 0$.

2°. $d(x^n) = nx^{n-1}\,dx$.

3°. $d(\log_a x) = \dfrac{dx}{x \ln a}$, $a > 0$, $a \neq 1$.

4°. $d(\ln x) = \dfrac{dx}{x}$.

5°. $d(a^x) = a^x \ln a\,dx$, $a > 0$, $a \neq 1$.

6°. $d(e^x) = e^x\,dx$.

Имеют место правила:

1°. $d(u \pm v) = du \pm dv$.

2°. $d(uv) = u\,dv + v\,du$.

3°. $d\left(\dfrac{u}{v}\right) = \dfrac{u\,dv - v\,du}{v^2}$.

Выведем формулу для вычисления дифференциала сложной функции. Рассмотрим функцию

$$y = f(u), \qquad u = \varphi(x).$$

По теореме о производной сложной функции имеем

$$y'_x = y'_u \cdot u'_x.$$

Умножая обе части этого равенства на dx, получим

$$y'_x\,dx = y'_u\,(u'_x\,dx),$$

или, так как

$$y'_x\,dx = dy \quad \text{и} \quad u'_x\,dx = du,$$

$$dy = y'_u\,du. \tag{4.31}$$

Формула (4.31) по внешнему виду совпадает с формулой (4.30). Однако между ними имеется принципиальное различие. Если в формуле (4.30) x — независимая переменная и $dx=\Delta x$ (по определению), то в формуле (4.31) u является функцией от переменной x, поэтому $du \neq \Delta u$.

Свойство независимости вида дифференциала от выбора независимой переменной (*инвариантность* дифференциала) позволит в дальнейшем ввести операцию, обратную дифференцированию (интегрирование).

§ 4.3. Приложение дифференциала к приближенным вычислениям

4.3.1. Абсолютная и относительная погрешности. Рассмотрим функцию

$$y=f(x).$$

В дальнейшем для краткости изложения x и y будем называть просто величинами. Пусть величина x получена непосредственным измерением или в результате приближенного вычисления. При нахождении величины x может быть допущена не зависящая от нас некоторая погрешность Δx.

Пусть $x+\Delta x$ — истинное значение величины x, Δx — *абсолютная погрешность* величины x (Δx может быть как положительным, так и отрицательным числом) и $\frac{\Delta x}{x}$ — *относительная погрешность* величины x.

Если известно, что $|\Delta x| \leqslant S_x$, то S_x называется *предельной абсолютной погрешностью*, $\frac{S_x}{|x|}$ — *предельной относительной погрешностью*.

Зная предельную абсолютную погрешность S_x, найдем предельную абсолютную погрешность S_y величины $y=f(x)$.

Приближенная величина x определяет приближенное значение функции от нее $f(x)$, а $x+\Delta x$ определяет истинное ее значение $f(x+\Delta x)$, откуда следует, что абсолютная погрешность функции Δy определяется равенством

$$|\Delta y|=|\Delta f(x)|=|f(x+\Delta x)-f(x)|.$$

При малых значениях Δx (близких к нулю) можно величину Δy приближенно заменить ее дифференциалом dy:

$$\Delta y=f(x+\Delta x)-f(x) \approx f'(x)\,\Delta x=dy.$$

Погрешность приближенного равенства $\Delta y \approx dy$ очень мала по сравнению с погрешностью Δx. Поэтому при оценке погрешности Δy можно считать, что $\Delta y = dy = f'(x)\,\Delta x$. Выгода замены погрешности приращения функции Δy ее дифференциалом dy состоит в том, что dy зависит от Δx линейно, а Δy обычно представляет собой более сложную зависимость от Δx.

Относительная погрешность величины y определяется как $\left|\frac{dy}{y}\right|$ и обычно выражается в процентах.

Вычислим предельную относительную погрешность величины y. Очевидно,

$$|\Delta y| = |f'(x)| \cdot |\Delta x| \leqslant |f'(x)|\, S_x,$$

откуда следует, что за предельную абсолютную погрешность величины y можно принять $S_y = |f'(x)|\, S_x$.

Предельная относительная погрешность вычисляется по формуле

$$\frac{S_y}{y} = \frac{|f'(x)|\, S_x}{|f(x)|} = |[\ln f(x)]'|\, S_x.$$

Пример 4.13. Сравнить относительные погрешности при вычислении площади круга при $r = 125$ см, рассматривая: а) абсолютную погрешность, равную приращению площади круга; б) абсолютную погрешность, равную дифференциалу площади круга.

Решение. Вычислим приращение ΔS площади круга и относительную погрешность $\frac{\Delta S}{S}$ при вычислении площади круга $S = \pi r^2$.

Будем считать, что погрешность при измерении радиуса Δr не превышает $\pm$ 0,5 см.

$$\Delta S = \pi (r + \Delta r)^2 - \pi r^2 = \pi [2r\, \Delta r + (\Delta r)^2] =$$

$$= \pi (2 \cdot 125 \cdot 0{,}5 + 0{,}25) = 125{,}25\pi;$$

$$\frac{\Delta S}{S} = \frac{125{,}25\pi}{\pi \cdot 125^2} = 0{,}008016 \approx 0{,}8\%.$$

Найдем дифференциал dS и относительную погрешность $\frac{dS}{S}$ при вычислении площади круга

$$dS = 2\pi r\, \Delta r = 2\pi \cdot 125 \cdot 0{,}5 = 125\pi;$$

$$\frac{dS}{S} = \frac{2\pi r\, \Delta r}{\pi r^2} = 2\frac{dr}{r}.$$

Относительная погрешность при вычислении площади круга равна удвоенной относительной погрешности, полученной при измерении радиуса

$$\frac{dS}{S} = 2\frac{dr}{r} = 2 \cdot \frac{0{,}5}{125} = 0{,}8\%.$$

Итак, видим, что во втором случае вычисление было значительно проще и выполнено без ущерба для точности вычисления.

4.3.2. Вычисление приближенного значения приращения функции при помощи дифференциала. Пусть дана функция $y=f(x)$; приращение этой функции

$$\Delta y=f(x+\Delta x)-f(x),$$

ее дифференциал $dy=f'(x)\,dx$. При достаточно малых (близких к нулю) приращениях аргумента Δx примем

$$\Delta y\approx dy,$$

поэтому при вычислении приближенного значения приращения функции находим дифференциал функции и принимаем его равным приращению функции.

Пример 4.14. Найти приближенное значение приращения функции $y=2x^3+5$ при $x=2$ и $\Delta x=0{,}001$.

Решение. $dy=6x^2\,dx=6\cdot 2^2\cdot 0{,}001=0{,}024$. Истинное значение приращения

$$\Delta y=2(x+\Delta x)^3+5-2x^3-5=6x^2\,\Delta x+6x(\Delta x)^2+2(\Delta x)^3=$$
$$=6\cdot 4\cdot 0{,}001+6\cdot 2\cdot 0{,}000001+2\cdot 0{,}000000001=0{,}024012002.$$

Эти вычисления еще раз подтверждают целесообразность замены при малых Δx громоздкого приращения Δy более простым и удобным для вычислений дифференциалом dy.

Пример 4.15. Насколько увеличится при нагревании объем шара радиуса r, если его радиус удлинился при нагревании на величину Δr.

Решение. Объем шара вычисляется по формуле $v=\frac{4}{3}\pi r^3$. Полагая приращение аргумента r, равное Δr, малым, положим, что $\Delta r\approx dr$; тогда приращение объема заменим дифференциалом $\Delta v\approx dv$. Следовательно, для вычисления приращения объема шара достаточно найти дифференциал от функции $v=\frac{4}{3}\pi r^3$:

$$dv=4\pi r^2\,dr.$$

4.3.3. Вычисление приближенного числового значения функции. Пусть дана функция $y=f(x)$; приращение этой функции

$$\Delta y=f(x+\Delta x)-f(x),$$

ее дифференциал

$$dy=f'(x)\,dx.$$

При достаточно малых Δx имеем $\Delta y\approx dy$. Заменив приращение функции ее дифференциалом, получим

$$f'(x)\,dx\approx f(x+\Delta x)-f(x),$$

откуда получаем формулу для вычисления приближенного числового значения функции

$$f(x+\Delta x) \approx f(x)+f'(x)\,dx.$$

Применение этой формулы дает значительное упрощение вычисления числового значения функции; геометрически это соответствует замене участка кривой отрезком касательной.

Пример 4.16. Найти приближенное значение функции $f(x) = 5x^3-2x+3$ при $x=2{,}01$.

Решение. Примем $x=2$ и $\Delta x=0{,}01$. Для вышеприведенной формулы найдем каждое слагаемое отдельно:

$$f(x)=f(2)=5\cdot 2^3-2\cdot 2+3=39,$$

$$f'(x)\,\Delta x=(5x^3-2x+3)'\cdot\Delta x=(15x^2-2)\,\Delta x=(15\cdot 2^2-2)\cdot 0{,}01=0{,}58.$$

Тогда приближенное значение функции будет

$$f(2{,}01)=39+0{,}58=39{,}58.$$

Найдем точное значение функции:

$$f(2{,}01)=5\cdot(2{,}01)^3-2\cdot 2{,}01+3=39{,}583005.$$

4.3.4. Вычисления по способу строгого учета погрешностей. При вычислении нередко возникает необходимость знать границы допущенной погрешности промежуточных вычислений и окончательного результата. Такой способ ведения приближенных вычислений называется способом строгого учета погрешностей. Для этого необходимо знать, как вычисляются границы относительных погрешностей (предельных относительных погрешностей) алгебраической суммы, произведения, степени, корня и частного.

4.3.5. Относительная погрешность произведения. Доказать, что *относительная погрешность произведения не превышает суммы относительных погрешностей ее сомножителей.*

Доказательство. Пусть дана функция $y=uv$, где $u>0$, $v>0$, $u=f(x)$ и $v=\varphi(x)$. Прологарифмируем ее и возьмем дифференциал

$$\ln y=\ln u+\ln v, \qquad \frac{dy}{y}=\frac{du}{u}+\frac{dv}{v}.$$

Но так как абсолютная величина суммы не превышает суммы абсолютных величин слагаемых

$$\left|\frac{du}{u}+\frac{dv}{v}\right| \leqslant \left|\frac{du}{u}\right|+\left|\frac{dv}{v}\right|,$$

то

$$\left|\frac{dy}{y}\right| \leqslant \left|\frac{du}{u}\right| + \left|\frac{dv}{v}\right| \quad \text{или} \quad S_{(uv)} = \left|\frac{du}{u}\right| + \left|\frac{dv}{v}\right|.$$

Пример 4.17. При измерении прямоугольного поля нашли, что длина его $u=60$ м и ширина $v=23$ м. Погрешность при измерении длины не превышает 0,3 м, а при измерении ширины 0,2 м. В каких границах лежит погрешность, которую мы допускаем, принимая площадь прямоугольника равной $60\cdot 23=1380$ м², и какова относительная погрешность, допущенная при вычислении площади.

Решение. $|du| \leqslant 0{,}3$; $|dv| \leqslant 0{,}2$. При наихудших условиях $|du|=0{,}3$, $|dv|=0{,}2$. Найдем абсолютную погрешность произведения:

$$d(uv) = du\cdot v + dv\cdot u = 0{,}3\cdot 23 + 0{,}2\cdot 60 = 18{,}9 \approx 19 \text{ м}^2.$$

Это будет наибольшая величина абсолютной погрешности, которую мы можем допустить, принимая площадь участка равной 1380 м². Округляя погрешность в сторону увеличения и принимая ее равной 20 м², найдем границы, в которых будет лежать погрешность при вычислении площади. Она будет не более $1380+20=1400$ (м²) и не менее $1380-20=1360$ (м²).

Относительную погрешность вычислим по формуле

$$S_{uv} = \left|\frac{du}{u}\right| + \left|\frac{dv}{v}\right|,$$

$$S_{uv} = \frac{0{,}3}{60} + \frac{0{,}2}{23} = \frac{1}{200} + \frac{2}{230} \approx 0{,}014 = 1{,}4\%.$$

Относительная погрешность не превышает 1,4%.

4.3.6. Относительная погрешность степени. Доказать, что *относительная погрешность степени равна относительной погрешности основания, умноженной на показатель степени.*

Доказательство. Пусть дана функция $y=x^n$ $(x>0)$. Прологарифмируем ее и найдем дифференциал

$$\ln y = n\ln x, \qquad \frac{dy}{y} = n\frac{dx}{x}.$$

Относительная погрешность будет $S_{x^n} = n\dfrac{dx}{x}$.

Частные случаи: 1) $n=2$, $S_{x^2}=2\dfrac{dx}{x}$; 2) $n=3$; $S_{x^3} = 3\dfrac{dx}{x}$.

Пример 4.18. Найти относительную погрешность, допущенную при измерении объема куба, если его ребро равно 12,5 см. Абсолютная погрешность $\Delta x=0{,}05$ см.

Решение. Примем $dx=0{,}05$ см.

$$S_{x^3} = 3\frac{dx}{x} = 3\cdot\frac{0{,}05}{12{,}5} = \frac{15}{1250} = 0{,}012 = 1{,}2\%.$$

4.3.7. Относительная погрешность корня. Доказать, что *относительная погрешность корня равна относительной погрешности подкоренного числа, деленной на показатель степени корня.*

Доказательство. Пусть дана функция $y=\sqrt[n]{x}$, $x>0$. Прологарифмируем ее и найдем дифференциал

$$\ln y=\frac{1}{n}\ln x, \qquad \frac{dy}{y}=\frac{1}{n}\cdot\frac{dx}{x}.$$

Относительная погрешность будет

$$S_{\sqrt[n]{x}}=\frac{1}{n}\frac{dx}{x}.$$

Частные случаи: 1) $n=2$, $S_{\sqrt{x}}=\frac{1}{2}\frac{dx}{x}$; 2) $n=3$, $S_{\sqrt[3]{x}}=\frac{1}{3}\frac{dx}{x}$.

Пример 4.19. Найти относительную погрешность, допускаемую при вычислении стороны квадрата, если площадь квадрата равна 37,7 см². Абсолютная погрешность $dx=0{,}05$.

Решение. Обозначив сторону квадрата через y и площадь через x, получим $y=\sqrt{x}=\sqrt{37{,}7}$, $dx=0{,}05$;

$$S_{\sqrt{37,7}}=\frac{1}{2}\cdot\frac{0{,}05}{37{,}7}=\frac{0{,}05}{75{,}4}\approx 0{,}000663\approx 0{,}1\%.$$

4.3.8. Относительная погрешность частного. Доказать, что *относительная погрешность частного не превышает суммы относительных погрешностей делимого и делителя.*

Доказательство. Пусть дана функция $y=u/v$, где $u=f(x)>0$ и $v=\varphi(x)>0$. Прологарифмировав функцию $y=u/v$, найдем ее дифференциал

$$\ln y=\ln u-\ln v, \qquad \frac{dy}{y}=\frac{du}{u}-\frac{dv}{v}.$$

Но так как абсолютная величина разности не превышает суммы абсолютных величин уменьшаемого и вычитаемого, то

$$\left|\frac{dy}{y}\right|\leqslant\left|\frac{du}{u}\right|+\left|\frac{dv}{v}\right|.$$

Граница относительной погрешности частного

$$S_{u/v}=\left|\frac{du}{u}\right|+\left|\frac{dv}{v}\right|.$$

Пример 4.20. Для нахождения плотности тела определена его масса $m_1\doteq 484$ г и масса вытесненной им воды $m_2=62$ г. Абсолютные погрешности $\Delta m_1 = 0{,}5$ г и $\Delta m_2 = 0{,}4$ г. Найти относительную погрешность при вычислении плотности тела.

Решение. $y = m_1/m_2$,

$$\left|\frac{dy}{y}\right| = \left|\frac{dm_1}{m_1}\right| + \left|\frac{dm_2}{m_2}\right| = \frac{0{,}5}{484} + \frac{0{,}4}{62} \approx$$
$$\approx 0{,}00103 + 0{,}00645 = 0{,}00748 \approx 0{,}7\%.$$

4.3.9. Приближенное вычисление степеней. Пусть в функции $f(x) = x^n$, аргумент x получает малое приращение Δx. Вычислим приближенное значение функции $f(x+\Delta x) = (x+\Delta x)^n$, применяя формулу для вычисления приближенного значения функции

$$f(x+\Delta x) \approx f(x) + f'(x)\,\Delta x.$$

Имеем

$$f(x+\Delta x) = (x+\Delta x)^n, \quad f(x) = x^n, \quad f'(x)\,\Delta x = nx^{n-1}\,\Delta x,$$

откуда

$$(x+\Delta x)^n \approx x^n + nx^{n-1}\,\Delta x.$$

Пример 4.21. Найти приближенное значение $(4{,}012)^2$.

Решение. Положим $x = 4$; $\Delta x = 0{,}012$, тогда $(4+0{,}012)^2 \approx \approx 4^2 + 2\cdot 4\cdot 0{,}012 = 16{,}096 \approx 16{,}1$ (точный ответ 16,096144).

4.3.10. Приближенное вычисление корней. Пусть в функции $f(x) = \sqrt[n]{x}$ аргумент x получает малое приращение Δx. Вычислим приближенное значение функции $f(x+\Delta x) = \sqrt[n]{x+\Delta x}$, применяя формулу для вычисления приближенного значения функции

$$f(x+\Delta x) \approx f(x) + f'(x)\,\Delta x.$$

Имеем

$$f(x+\Delta x) = \sqrt[n]{x+\Delta x}, \qquad f(x) = \sqrt[n]{x},$$
$$f'(x) = \frac{1}{n\sqrt[n]{x^{n-1}}},$$

откуда

$$\sqrt[n]{x+\Delta x} \approx \sqrt[n]{x} + \frac{\Delta x}{n}\cdot\frac{1}{\sqrt[n]{x^{n-1}}}.$$

Пример 4.22. Найти приближенное значение $\sqrt{1{,}006}$.

Решение. Положим $x = 1$, $\Delta x = 0{,}006$, тогда

$$\sqrt{1{,}006} = \sqrt{1+0{,}006} \approx 1 + \frac{0{,}006}{2} = 1{,}003.$$

4.3.11. Приближенное вычисление обратных величин. Пусть в функции $f(x) = \frac{1}{x}$ аргумент x получает малое приращение Δx. Вычислим приближенное значение функции $f(x+\Delta x)=\frac{1}{x+\Delta x}$ применяя формулу вычисления приближенного значения функции. Имеем

$$f(x+\Delta x)=\frac{1}{x+\Delta x}, \quad f(x)=\frac{1}{x}, \quad f'(x)=-\frac{1}{x^2},$$

откуда

$$\frac{1}{x+\Delta x}=\frac{1}{x}-\frac{\Delta x}{x^2}.$$

Найдем, например, приближенное значение величины $\frac{1}{1{,}004}$.

Положим $\Delta x=0{,}004$, тогда $\frac{1}{1+0{,}004}\approx 1-0{,}004=0{,}996$.

4.3.12. Приближенное вычисление синусов и тангенсов малых углов[1]. 1°. Пусть для функции $f(x)=\sin x$ аргумент $x=0$ получает малое приращение Δx. Вычислим приближенное значение функции

$$f(x+\Delta x)=\sin(x+\Delta x)=\sin(0+\Delta x)=\sin\Delta x.$$

Применяя формулу для вычисления приближенного значения функции, имеем

$$f(x+\Delta x)=\sin\Delta x, \qquad f(x)=\sin x\,|_{x=0}=0,$$
$$f'(x)=\cos x\,|_{x=0}=1,$$

откуда

$$\sin\Delta x\approx 0+\Delta x \quad \text{или} \quad \sin\Delta x\approx\Delta x.$$

Синус малого угла приближенно равен самому углу (угол берется в радианной мере).

2°. Пусть для функции $f(x)=\operatorname{tg} x$ аргумент $x=0$ получает малое приращение Δx. Вычислим приближенное значение функции

$$f(x+\Delta x)=\operatorname{tg}(x+\Delta x)=\operatorname{tg}(0+\Delta x)=\operatorname{tg}\Delta x.$$

Применяя формулу

$$f(x+\Delta x)\approx f(x)+f'(x)\,\Delta x,$$

имеем

$$f(x+\Delta x)=\operatorname{tg}\Delta x, \quad f(x)=\operatorname{tg} x\,|_{x=0}=0,$$
$$f'(x)=\left.\frac{1}{\cos^2 x}\right|_{x=0}=1,$$

---

[1] Этот пункт следует читать после изучения материала главы 10.

откуда

$$\operatorname{tg} \Delta x \approx \Delta x.$$

Тангенс малого угла приближенно равен самому углу (угол берется в радианной мере).

Пример 4.23. Вычислить $\sin 12'$.

Решение. $12'$ соответствуют углу в 0,0035 радиана; $\sin 0{,}0035 \approx 0{,}0035$.

По таблице натуральных значений синуса имеем $\sin 12' = 0{,}0035$.

4.3.13. Вычисление табличных разностей десятичных логарифмов. Табличной разностью Δy называется приращение десятичного логарифма $\lg x$ при увеличении числа x на единицу.

Пусть для функции $y = \lg x$ аргумент x получает малое приращение Δx. Вычислим по формуле $\Delta y \approx dy$ приближенное значение Δy. Имеем

$$dy = (\lg x)' \Delta x = \frac{0{,}4343 \cdot \Delta x}{x},$$

тогда

$$\Delta y = 0{,}4343 \frac{\Delta x}{x},$$

т. е. абсолютная погрешность логарифма вычисляется по относительной погрешности числа x $\left(\frac{\Delta x}{x}\text{ — относительная погрешность}\right)$.

Положим $\Delta x = 1$, тогда $\Delta y \approx \frac{0{,}4343}{x}$. По этой формуле можно вычислять табличные разности.

Пример 4.24. Найти табличную разность при вычислении десятичного логарифма числа 544.

Решение. $\Delta y \approx \frac{0{,}4343}{x} = \frac{0{,}4343}{544} \approx 0{,}0008$.

Проверим по таблице Брадиса

$$\lg (544 + 1) = \lg 545 = 2{,}7364;$$
$$\lg 544 = 2{,}7356.$$

Табличная разность логарифмов чисел 545 и 544 оказалась равной 0,0008.

4.3.14. Нахождение относительной погрешности числа при вычислении его по его десятичному логарифму. Пусть логарифм числа x был вычислен с погрешностью Δy. Тогда при нахождении по нему числа x будет допущена погрешность Δx. Относительная погрешность числа x равна $\frac{\Delta x}{x}$. Абсолютная погрешность логарифма равна

$$\Delta y \approx 0{,}4343 \frac{\Delta x}{x},$$

откуда

$$\frac{\Delta x}{x} = \frac{\Delta y}{0{,}4343}.$$

Относительная погрешность числа x при вычислении его по его логарифму не зависит от значения числа x, а зависит только от погрешности, с какой был найден логарифм числа x.

Пример 4.25. Найти относительную погрешность точности отсчета на логарифмической линейке со шкалой 250 мм.

Решение. Допустим, что при установке визира или отсчета со шкалы наибольшая погрешность будет составлять 0,1 мм.

Найдем абсолютную погрешность логарифма числа. Вся шкала логарифмической линейки длиной в 250 мм соответствует числу, логарифм которого равен единице ($\lg 10 = 1$). Отсюда на 0,1 мм шкалы абсолютная погрешность логарифма числа будет в 250 раз меньше, т. е.

$$\Delta y = \frac{0{,}1}{250} = 0{,}004, \quad \text{но} \quad \Delta y = 0{,}4343 \frac{\Delta x}{x},$$

тогда

$$\frac{\Delta x}{x} \approx \frac{\Delta y}{0{,}4343} = \frac{0{,}004}{0{,}4343} \approx 0{,}00092 \approx 0{,}001 = 0{,}1\%.$$

Относительная погрешность точности отсчета составляет 0,1% (в любой части шкалы).

ВОПРОСЫ ДЛЯ ПОВТОРЕНИЯ К ГЛАВЕ 4

1. Что называется производной функции в данной точке?
2. Какова геометрическая интерпретация производной?
3. Что можно сказать о поведении функции, зная, что ее производная положительна? неотрицательна? неположительна? отрицательна? Сделайте рисунки для этих случаев, приведите примеры таких функций.
4. Сформулируйте теорему о связи между существованием производной и непрерывностью функции.
5. Чему равны производные суммы, разности и произведения двух функций?
6. Выпишите вид производной частного двух функций.
7. Чему равна производная сложной функции? Выпишите формулу и приведите примеры.
8. Получите формулу производной логарифмической функции, используя формулу производной обратной функции.

9. Сформулируйте теорему о производной функции, заданной параметрически.

10. Чему равна производная неявной функции?

11. Что называется производной функцией второго порядка от данной функции?

12. Что называется дифференциалом функции в точке?

13. Какова геометрическая интерпретация дифференциала функции?

УПРАЖНЕНИЯ К ГЛАВЕ 4

Пользуясь только определением, найдите производные следующих функций:

1. $y=(2x+1)^2$.
2. $y=\dfrac{1}{x-3}$.
3. $y=3x$.
4. $y=\dfrac{x^3}{3}$.
5. $y=\sqrt{1+2x}$.
6. $y=\sqrt{1+x^2}$.
7. $y=x^2\sqrt{x+1}$.
8. $y=\dfrac{x}{1-4x}$.

Найдите производные следующих функций:

9. $y=\dfrac{1+\sqrt{x}}{1-\sqrt{x}}$.
10. $y=\dfrac{x+1}{\sqrt{1-x-x^2}}$.
11. $y=\dfrac{1}{x-\sqrt{a^2+x^2}}$.
12. $y=\dfrac{3-x^2}{6\sqrt{x}}$.
13. $y=x^2\sqrt{16-x^2}$.
14. $y=\dfrac{\sqrt{x^2+4}}{x^2}$.
15. $y=\ln\sqrt{\dfrac{e^{2x}+1}{e^{2x}-1}}$.
16. $y=\ln\sqrt[5]{1+e^{-x}}$.
17. $y=e^{2x}-e^{-3x^2}$.
18. $y=\ln(e^{-x}+xe^{-x})$.

Найдите производные $\dfrac{dy}{dx}$ следующих функций:

19. $x^2y^2+2\ln xy=4$.
20. $x+y=e^{x-y}$.
21. $\ln 2x+xe^y=0$.
22. $xy=e^{2x}-e^{-3y}$.
23. $\begin{cases} x=\dfrac{t+1}{t}, \\ y=\dfrac{t-1}{t}. \end{cases}$
24. $\begin{cases} x=\dfrac{1}{2+t}, \\ y=\ln(2t+t^2). \end{cases}$
25. $\begin{cases} x=1-e^{-t}, \\ y=\dfrac{1}{1+e^t}. \end{cases}$
26. $\begin{cases} x=\dfrac{e^{2t}+e^{-2t}}{2}, \\ y=1+e^{-2t}. \end{cases}$

ОТВЕТЫ, УКАЗАНИЯ И РЕШЕНИЯ К ГЛАВЕ 4

1. Решение. Из формулы (4.1) § 4.1 для функции $y=(2x+1)^2$ следует, что

$$y'=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{(2x+2\Delta x+1)^2-(2x+1)^2}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{2\cdot 2\Delta x\,(2x+1)+4\,(\Delta x)^2}{\Delta x},$$

откуда

$$y'=\lim_{\Delta x\to 0}[4\,(2x+1)+4\Delta x]=4\,(2x+1)+4\lim_{\Delta x\to 0}\Delta x$$

или

$$y'=4\,(2x+1).$$

2. Решение. Найдем, чему равно Δy для функции $y=\frac{1}{x-3}$. Имеем

$$\Delta y=y\,(x+\Delta x)-y\,(x)=\frac{1}{x+\Delta x-3}-\frac{1}{x-3}=$$

$$=\frac{x-3-(x+\Delta x-3)}{(x+\Delta x-3)\,(x-3)}=\frac{-\Delta x}{(x+\Delta x-3)\,(x-3)}.$$

Таким образом,

$$y'=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{-1}{(x+\Delta x-3)\,(x-3)}$$

или, переходя от предела произведения к произведению пределов,

$$y'=\frac{-1}{x-3}\cdot\lim_{\Delta x\to 0}\frac{1}{x+\Delta x-3}.$$

Пользуясь непрерывностью функции $\frac{1}{x-3}$ $(x\neq 3)$, получим $y'=$ $=\frac{-1}{(x-3)^2}$.

3. Ответ. $y'=3$.

4. Ответ. $y'=x^2$.

5. Ответ. $y'=\frac{1}{\sqrt{1+2x}}$.

6. Ответ. $y'=\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$.

7. Ответ. $y'=2x\sqrt{x+1}+x^2\frac{1}{2\sqrt{x+1}}=\frac{5x^2+4x}{2\sqrt{x+1}}$.

8. Ответ. $y=\frac{1}{(1-4x)^2}$.

ГЛАВА 5

ПРИЛОЖЕНИЯ ПРОИЗВОДНОЙ К ИССЛЕДОВАНИЮ ФУНКЦИЙ И ПОСТРОЕНИЮ ГРАФИКОВ

§ 5.1. Теоремы о среднем

5.1.1. О наименьшем и наибольшем значениях функции. Многие практические задачи сводятся к нахождению наибольшего и наименьшего значений той или иной функции. Так, все развитие современной техники направлено на то, чтобы при наименьшей затрате труда получить наибольшее количество продукции.

С точки зрения математики проблема отыскания наибольшего и наименьшего значений функции имеет большое теоретическое значение. Однако, прежде чем приступить к ее решению, в каждом конкретном случае следует выяснить предварительно, существует ли наименьшее или наибольшее значение. Ответ на этот вопрос дает одна из важнейших теорем 3.20, которую мы привели без доказательства в п. 3.3.3. Здесь дадим более краткую формулировку этой теоремы.

Теорема 5.1 (Вейерштрасса). *Если функция $f(x)$ непрерывна на замкнутом интервале $[a, b]$, то она принимает на этом интервале наименьшее и наибольшее значения m и M, т. е. существуют такие x_1, $x_2 \in [a, b]$, что $f(x_1)=m$, $f(x_2)=M$.*

Опираясь на эту теорему, мы в следующих пунктах докажем ряд теорем, знание которых дает возможность находить наибольшее и наименьшее значения функции и, кроме того, позволит полностью описать качественную картину поведения функции (в частности, строить график функции).

5.1.2. Экстремумы функции. Выше (п. 2.2.3) было введено понятие экстремума. Следующие теоремы дают практический метод нахождения экстремумов. При этом мы будем рассматривать как случаи, когда производная является непрерывной функцией, так что касательная к графику функции изменяет свое положение непрерывно (рис. 5.1), так и случаи, в которых это не имеет места (рис. 5.2).

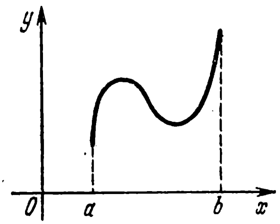


Рис. 5.1.

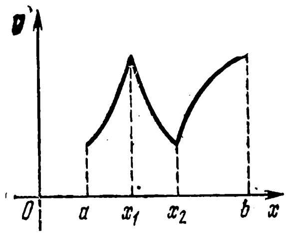


Рис. 5.2.

5.1.3. Теорема Ферма. Теорема 5.2. *Если функция $f(x)$ имеет экстремум в точке x_0 и дифференцируема в этой точке, то $f'(x_0)=0$.*

Действительно, пусть для определенности функция $f(x)$ имеет в точке x_0 максимум (рис. 5.3). Тогда по определению максимума (см. п. 2.2.3)

$$f(x_0+\Delta x)<f(x_0), (x_0+\Delta x)\subset R_\varepsilon(x_0).$$

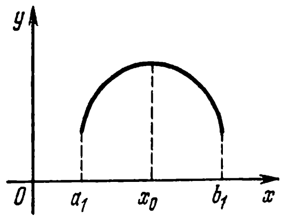


Рис. 5.3.

Если $\Delta x<0$, то

$$\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}>0, \quad (5.1)$$

а если $\Delta x>0$, то

$$\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}<0. \quad (5.2)$$

Так как по условию теоремы существует производная $f'(x_0)$, то в пределе при $\Delta x\to 0$ $(\Delta x<0)$ из неравенства (5.1) получим $f'(x_0)\geqslant 0$, а из неравенства (5.2) при $\Delta x\to 0$ $(\Delta x>0)$ получим $f'(x_0)\leqslant 0$, что возможно лишь в том случае, когда $f'(x_0)=0$.

Заметим, что из того, что в какой-то точке x_0 производная равна нулю, не следует, что x_0 — точка экстремума.

Например, для функции $y=x^3$ имеем $y'=3x^2=0$ в точке $x=0$. Но $x=0$ не точка экстремума этой функции (рис. 5.4).

Будем называть *стационарной* точкой функции $f(x)$ точку x_0, в которой $f'(x_0)=0$.

Теорема Ферма формулирует необходимый признак существования так называемого *гладкого* экстремума в точке x_0, т. е. предполагает существование производной в точке x_0. Однако функция может иметь экстремум (например, $y=|x|$) и в тех точках, где производная не существует.

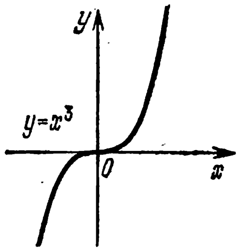


Рис. 5.4.

Рассмотрим вопрос о существовании стационарных точек.

5.1.4. Теорема Ролля. Теорема 5.3. *Пусть функция $f(x)$ удовлетворяет следующим условиям:*

1. *$f(x)$ непрерывна на $[a, b]$.*
2. *$\exists f'(x)$, $x \in (a, b)$.*
3. *$f(a)=f(b)$.*

Тогда существует точка c, $c \in (a, b)$, такая, что $f'(c)=0$.

Действительно, пусть m и M — наименьшее и наибольшее значение $f(x)$ на $[a, b]$ (существование m и M следует из теоремы Вейерштрасса). Может оказаться, что $m=M$. Это означает, что $f(x)=\text{const}$, но тогда $f'(x)=0$ при всех $x \in (a, b)$ и искомая точка c — любая, лежащая между a и b.

Пусть $m \neq M$. Тогда хотя бы одно из чисел m и M не равно $f(a)=f(b)$. Пусть для определенности $M \neq f(a)$ и x_0 — значение x такое, что

$$f(x_0)=M.$$

Так как $f(a)=f(b)$, а $f(x_0) \neq f(a)$, то x_0 расположена между точками a и b: $a<x_0<b$.

Таким образом, x_0 — внутренняя точка интервала $[a, b]$, в котором функция $f(x)$ имеет максимум, тогда по теореме Ферма

$$f'(x_0)=0,$$

т. е. x_0 и есть искомая точка c.

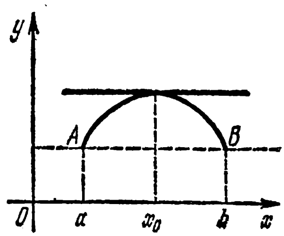


Рис. 5.5.

Теорема Ролля имеет простой геометрический смысл: на графике непрерывной на интервале и дифференцируемой внутри интервала функции $f(x)$ (рис. 5.5) с одинаковыми ординатами на концах интервала найдется хоть одна точка c с абсциссой $x_0 \in (a, b)$, в которой касательная к кривой параллельна оси Ox.

Требование дифференцируемости в условии теоремы Ролля существенно. Действительно, функция, представленная графиком на рис. 5.6, не имеет производной в точке c. Ни в одной точке кривой AB касательная не параллельна оси Ox.

Обратимся далее к центральной теореме дифференциального исчисления, применение которой в курсе математического анализа чрезвычайно широко.

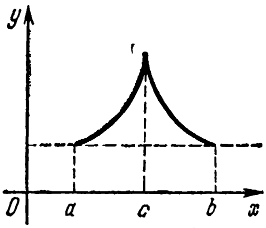


Рис. 5.6.

5.1.5. Теорема Лагранжа. Теорема 5.4. *Если функция $f(x)$ непрерывна на интервале $[a, b]$ и дифференцируема на (a, b), то существует точка c, $c \in (a, b)$, такая, что верна формула*

$$f'(c)=\frac{f(b)-f(a)}{b-a}, \tag{5.3}$$

которая называется формулой Лагранжа.

Доказательство. Возьмем вспомогательную функцию

$$\varphi(x)=f(x)-\lambda x \tag{5.4}$$

и выберем число λ так, чтобы функция $\varphi(x)$ удовлетворяла условию $\varphi(a)=\varphi(b)$, т. е.

$$f(a)-\lambda a=f(b)-\lambda b;$$

отсюда

$$\lambda=\frac{f(b)-f(a)}{b-a}. \tag{5.5}$$

Так как функция $\varphi(x)$ удовлетворяет всем условиям теоремы Ролля, то найдется точка $c \in (a, b)$ такая, что $\varphi'(c)=0$. Из (5.4) получим

$$\varphi'(c)=f'(c)-\lambda=0,$$

т. е.

$$f'(c)=\lambda.$$

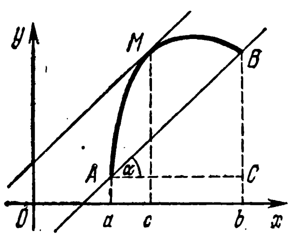


Рис. 5.7.

Подставляя $\lambda=f'(c)$ в (5.5), получим доказываемую формулу.

Обратимся к геометрической интерпретации теоремы Лагранжа. Построим график некоторой функции $y=f(x)$ (рис. 5.7), удовлетворяющей условиям теоремы. Очевидно,

$$BC=f(b)-f(a), \qquad AC=b-a,$$

и из треугольника ABC получим

$$BC = \operatorname{tg}\alpha \cdot AC$$

или

$$f(b) - f(a) = \operatorname{tg}\alpha \cdot (b - a). \tag{5.6}$$

Проведем касательную к кривой $y = f(x)$, параллельную хорде AB. Точка касания M имеет абсциссу c, причем $c \in (a, b)$. В силу параллельности касательной и хорды угол наклона касательной к оси Ox равен α.

По геометрическому смыслу производной

$$f'(c) = \operatorname{tg}\alpha;$$

подставляя это значение $\operatorname{tg}\alpha$ в (5.6), получим (5.3).

Таким образом, с геометрической точки зрения теорема Лагранжа утверждает, что для функции $y = f(x)$, удовлетворяющей условиям теоремы, существует точка c, касательная в которой к кривой $y = f(x)$ параллельна хорде.

§ 5.2. Применение производной для нахождения экстремумов функции

5.2.1. Признаки постоянства, возрастания и убывания функции. Теорема Лагранжа дает возможность доказать признаки постоянства, возрастания и убывания функций, которые уже известны читателю (см. п. 2.2.3).

Теорема 5.5. *Для того чтобы функция $f(x)$, $x \in (a, b)$, была постоянна на множестве задания, необходимо* (см. п. 4.1.3) *и достаточно, чтобы*

$$f'(x) = 0, \qquad x \in (a, b).$$

Доказывая достаточность этого признака, заметим, что для постоянной функции при любых x_1 и x_2 имеем $f(x_2) = f(x_1) = \text{const}$. По формуле Лагранжа получим

$$f'(x) = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1},$$

$$f'(x) = 0 \Longleftrightarrow f(x_2) = f(x_1)$$

при любых x_1 и x_2.

Следствие 5.1. *Если две функции имеют равные производные на некотором интервале, то они отличаются друг от друга на постоянное слагаемое.*

Действительно, если при $x \in (a, b)$

$$f_1'(x) = f_2'(x),$$

то

$$(f_1(x)-f_2(x))'=f_1'(x)-f_2'(x)=0,$$

и, следовательно,

$$f_1(x)-f_2(x)=C=\text{const}$$

для всех $x\in(a, b)$.

Теорема 5.6. *Для того чтобы дифференцируемая функция* $f(x)$, $x\in(a, b)$, *была неубывающей на множестве задания, необходимо* (см. п. 4.1.1) *и достаточно, чтобы*

$$f'(x)\geqslant 0, \quad x\in(a, b).$$

Докажем достаточность этого признака. В самом деле, пусть

$$f'(x)\geqslant 0,\ x_1 < x_2,\ [x_1, x_2]\subset(a, b).$$

Применяя формулу Лагранжа к функции $f(x)$ на интервале $[x_1, x_2]$, получим для $c\in(x_1, x_2)$

$$f'(c)=\frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}.$$

Из условия $f'(c)\geqslant 0$ следует одинаковая значность разностей x_2-x_1 и $f(x_2)-f(x_1)$, т. е. функция $f(x)$ не убывает на всем интервале (a, b) в силу произвольности выбора интервала $[x_1, x_2]\subset(a, b)$.

Теорема 5.7. *Для того чтобы дифференцируемая функция* $f(x)$, $x\in(a, b)$, *была невозрастающей на множестве задания, необходимо и достаточно, чтобы*

$$f'(x)\leqslant 0, \quad x\in(a, b).$$

Доказательство аналогично доказательству предыдущей теоремы.

Пример 5.1. Найти интервалы возрастания и убывания функции $y=x^2-3x+2$.

Возьмем производную: $y'=2x-3$. Решая $2x-3<0$, получим $x<3/2$. Таким образом, на интервале $(-\infty, 3/2)$ функция убывает. Аналогично получим интервал возрастания функции $(3/2, \infty)$.

5.2.2. Достаточные условия существования экстремума. Напомним (п. 2.2.3), что точкой экстремума для функции $f(x)$ является точка, в которой поведение этой функции изменяется от возрастания к убыванию (max) или от убывания к возрастанию (min). Необходимый признак существования гладкого экстремума дифференцируемой функции дает приведенная выше теорема Ферма. Естественно предположить, что **достаточный** признак существования экстремума должен описывать определение экстремума с использованием производной и связан с изменением ее знака.

Теорема 5.8. *Если при переходе через точку x_0 производная дифференцируемой функции $f(x)$, непрерывной в точке x_0, меняет знак, то в точке x_0 функция имеет экстремум. Если в точке x_0 знак производной меняется с плюса на минус, то функция имеет максимум* (max), *с минуса на плюс — минимум* (min).

Действительно, предположим, для простоты доказательства[1]), что в точке x_0 производная функции $f(x)$ существует и при переходе через точку x_0 меняет знак с плюса на минус. Запишем формулу Лагранжа

$$f(x)-f(x_0)=f'(c)(x-x_0). \qquad (5.7)$$

Если $x<x_0$, то $x-x_0<0$ и по условию $f'(c)>0$, $c\in(x, x_0)$, следовательно, правая часть формулы (5.7) отрицательна. Если $x>x_0$, то $x-x_0>0$ и по условию $f'(c)<0$, $c\in(x_0, x)$, следовательно, правая часть формулы (5.7) отрицательна. Таким образом, при $x\in R_\varepsilon(x_0)$ значение $f(x_0)>f(x)$, т. е. x_0 — точка максимума функции $f(x)$. Вторая часть теоремы доказывается аналогично.

Например, функция $y=x^2-3x+2$ в точке $x=3/2$ имеет минимум.

Итак, для того чтобы определить экстремумы функции, достаточно исследовать знак производной этой функции в окрестности стационарных точек и точек, в которых производная не существует.

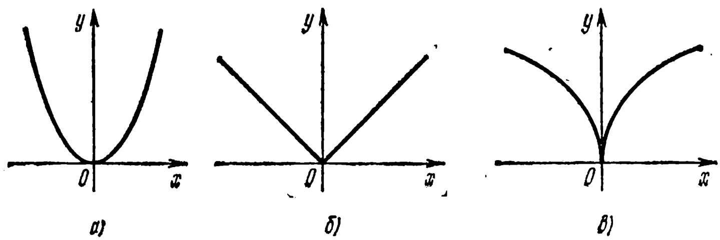


Рис. 5.8.

Так, функция $y=x^2$ (рис. 5.8, *а*) имеет минимум в точке $x=0$, и $f'(0)=0$; функция $y=|x|$ (рис. 5.8, *б*) имеет

[1]) Теорема может быть доказана и без этого предположения.

минимум в точке $x=0$, а $f'(0)$ не существует; функция $y=x^{2/3}$ (рис. 5.8, *в*) также имеет минимум в точке $x=0$, а $f'(0)=\infty$.

Рассмотрим достаточный признак существования гладкого экстремума, использующий вторую производную.

Теорема 5.9. *Если в стационарной точке x_0 дифференцируемой функции $f(x)$ существует отличная от нуля вторая производная, то в точке x_0 функция имеет экстремум. А именно, если в точке x_0 вторая производная меньше нуля, то функция имеет максимум* (max), *если больше нуля, то — минимум* (min).

Доказательство. Пусть x_0 — стационарная точка и для определенности $f''(x_0)>0$. По определению второй производной имеем

$$f''(x_0)=\lim_{x\to x_0}\frac{f'(x)-f'(x_0)}{x-x_0}$$

или, так как x_0 — стационарная точка ($f'(x_0)=0$), то

$$f''(x_0)=\lim_{x\to x_0}\frac{f'(x)}{x-x_0}.$$

Так как по предположению $f''(x_0)>0$, то знак производной $f'(x)$ совпадает со знаком разности $x-x_0$, т. е. $f'(x)<0$ при $x<x_0$ и $f'(x)>0$ при $x>x_0$, т. е. при переходе через стационарную точку $f'(x)$ изменяет знак с минуса на плюс. По предыдущему признаку это означает, что в точке x_0 функция $f(x)$ имеет минимум. В случае максимума доказательство аналогично.

Пример 5.2. Найдем экстремумы функции $y=x^3-3x^2+1$. Определяем стационарные точки: $y'=3x^2-6x=3x(x-2)$. Стационарные точки: $x_1=0$ и $x_2=2$. Далее, используя первый способ определения экстремума, исследуем знак y' в окрестностях стационарных точек. В точке $x=0$ производная y' меняет знак с «+» на «—», а в точке $x=2$ — с «—» на «+». Таким образом, при $x=0$ функция $y=x^3-3x^2+1$ имеет максимум ($y=1$), а при $x=2$ — минимум ($y=-3$).

Используя второй способ определения экстремума, получим $y''=6x-6$, и подставляя значения $x_1=0$, $x_2=2$, будем иметь

$$y''(0)=-6 \quad \text{и} \quad y''(2)=6.$$

Таким образом, в точке $x=0$ производная $y''<0$, и следовательно, имеем максимум; в точке $x=2$ производная $y''>0$ и, следовательно, имеем минимум.

Следует обратить внимание на то, что в тех случаях, когда в стационарных точках вторая производная равна нулю, второй способ нахождения экстремума, использующий вторую производную, неприменим.

5.2.3. Нахождение наименьшего и наибольшего значений функции на замкнутом интервале. Вернемся вновь (см. п. 5.1.1) к вопросу об определении наименьшего и наибольшего значений непрерывной функции на замкнутом интервале. Существование этих значений обеспечено теоремой Вейерштрасса.

Будем называть *критическими* точками стационарные точки и точки, в которых функция недифференцируема.

При разыскании наибольшего или наименьшего значения функции на замкнутом интервале может оказаться, что внутри этого интервала критических точек нет. Это означает, что в рассматриваемом интервале функция монотонна и, следовательно, достигает как наибольшего, так и наименьшего значения на концах интервала.

Таким образом, для нахождения наименьшего и наибольшего значений непрерывной функции на замкнутом интервале достаточно найти значения функции в критических точках, а также значения функции на концах интервала задания. Из найденных значений выбирается наименьшее и наибольшее.

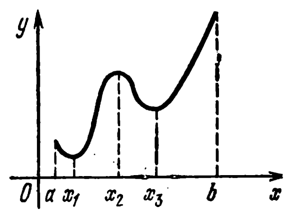


Рис. 5.9.

З а м е ч а н и е. Следует отметить, что этими указаниями не исчерпываются методы определения наибольших и наименьших значений. Может случиться, например, что в сколь угодно малых односторонних окрестностях критических точек производная функции меняет знак. В этом и других случаях применяются другие методы исследования.

На рис. 5.9 представлен график функции $y=f(x)$, $x \in [a, b]$. Наименьшее значение функция имеет в экстремальной точке $x=x_1$, а наибольшее на конце $x=b$.

§ 5.3. Дальнейшее исследование поведения функций и построение графиков

5.3.1. Поведение функции в точках разрыва и на концах бесконечного интервала. Асимптоты. Выше (см. п. 3.3.1), была дана классификация типов разрывов. Если кривая $y=f(x)$ при $x \to a$ (a—точка разрыва) неограниченно приближается к прямой $x=a$, то эта прямая называется *вертикальной асимптотой* кривой $y=f(x)$ (рис. 5.10).

Таким образом, прямая $x=a$ является вертикальной асимптотой, если выполнено одно из условий:

1. $\lim\limits_{x\to a} f(x)=\pm\infty$,
2. $\lim\limits_{x\to a-0} f(x)=\pm\infty$,
3. $\lim\limits_{x\to a+0} f(x)=\pm\infty$;

при этом во втором и третьем случаях функция $y=f(x)$ может быть вообще не определена при $x\geqslant a$ и при $x\leqslant a$ соответственно. Например, функция $y=\ln x$, $x\in(0, +\infty)$, имеет вертикальную асимптоту $x=0$.

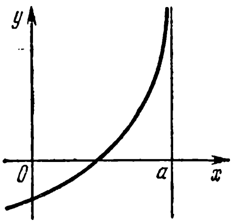


Рис. 5.10.

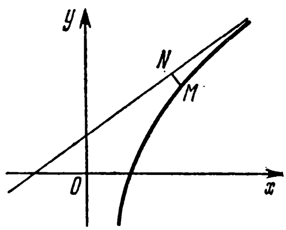


Рис. 5.11.

Рассмотрим теперь функцию $y=f(x)$, $x\in(-\infty, +\infty)$, график которой неограниченно приближается к некоторой прямой $y=kx+b$ при $x\longrightarrow-\infty$ или при $x\longrightarrow+\infty$ (рис. 5.11). Этот процесс может характеризоваться стремлением к нулю длины отрезка MN.

Определение. *Прямая $y=kx+b$ называется асимптотой кривой $y=f(x)$ при $x\longrightarrow+\infty$, если*

$$\lim_{x\to+\infty}(f(x)-kx-b)=0. \tag{5.8}$$

Для выяснения вопроса о существовании асимптот необходимо иметь возможность вычислить конкретные значения k и b. Предположим, что кривая $y=f(x)$ имеет асимптоту $y=kx+b$ при $x\longrightarrow+\infty$.

Тогда, разделив (5.8) на x, получим

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{f(x)}{x}-k-\frac{b}{x}\right)=0,$$

или

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=k. \tag{5.9}$$

Подставляя найденное значение k в (5.8), получим[1])

$$b = \lim_{x \to +\infty} (f(x) - kx). \tag{5.10}$$

Определение асимптоты при $x \to -\infty$ аналогично предыдущему. Заметим, что возможны случаи существования различных асимптот при $x \to +\infty$ и $x \to -\infty$, а также их совпадения. В тех случаях, когда один из пределов (5.9), (5.10) не существует, асимптот нет.

Заметим также, что график функции может и пересекать асимптоту (рис. 5.12).

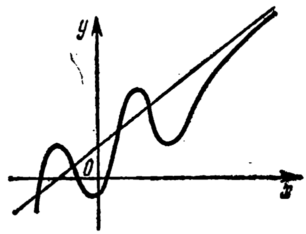


Рис. 5.12.

Выявление асимптот графика функции имеет большое прикладное значение, ибо позволяет (в случае их наличия) существенно облегчить исследование функции на бесконечности, заменяя движение по кривой движением по прямой линии.

Пример 5.3. Выясним наличие асимптот графика функции $y = \frac{x^2}{x-1}$.

Вычисляя по формулам (5.9) и (5.10), получим

$$k = \lim_{x \to \pm\infty} \frac{x}{x-1} = 1, \qquad b = \lim_{x \to \pm\infty} \left(\frac{x^2}{x-1} - x\right) = 1.$$

Таким образом, график функции $y = \frac{x^2}{x-1}$ имеет асимптоту $y = x + 1$.

Так как

$$\lim_{x \to 1} f(x) = \lim_{x \to 1} \frac{x^2}{x-1} = \pm\infty,$$

то прямая $x = 1$ является вертикальной асимптотой графика функции $y = \frac{x^2}{x-1}$.

5.3.2. Направление выпуклости графика функции; точки перегиба графика функции. Для уточнения поведения функции и формы графика функции рассмотрим некоторые

[1]) Можно доказать и обратное утверждение, а именно: если параметры k и b определяются формулами (5.9) и (5.10), то прямая $y = kx + b$ есть асимптота графика функции $f(x)$.

вопросы, связанные с понятием кривизны кривой, а именно понятие направления выпуклости.

Кривая называется *выпуклой вниз* на некотором интервале, если все ее точки лежат выше касательной, проведенной к этой кривой в любой точке этого интервала (рис. 5.13).

Если же, наоборот (рис. 5.14), все точки кривой на некотором интервале лежат ниже касательной, проведенной к этой кривой в любой точке этого интервала, то кривая называется *выпуклой вверх* на интервале.

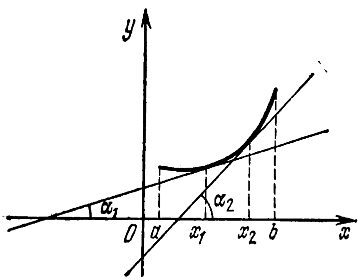


Рис. 5.13.

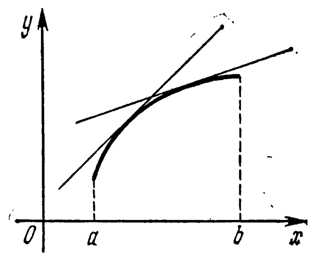


Рис. 5.14.

Докажем достаточный признак, по которому можно определить направление выпуклости кривой (графика функции) на интервале.

Теорема 5.10. *Если на некотором интервале (a, b) из области определения дважды дифференцируемой функции $y = f(x)$ вторая производная $f''(x)$ положительна (отрицательна), то график функции на этом интервале выпукл вниз (вверх).*

Действительно, если, например, $f''(x) > 0$, $x \in (a, b)$, то это означает, что первая производная функции $f'(x)$ является возрастающей функцией. Это значит (рис. 5.13), что вместе с абсциссой x будет увеличиваться и угол α, образованный касательной к кривой с осью Ox:

$$x_1 < x_2 \Leftrightarrow f'(x_1) < f'(x_2) \Leftrightarrow \alpha_1 < \alpha_2.$$

Но тогда кривая выпукла вниз. Доказательство второй части теоремы аналогично. Теорема обратима.

Если график меняет направление выпуклости в области определения функции, то точка M, разделяющая участки, на которых кривая имеет различные направления выпуклости, называется *точкой перегиба* при условии, что в этой точке существует касательная к кривой (рис. 5.15).

Теорема 5.11. *Если функция $y=f(x)$ дважды дифференцируема на интервале (a, b) и $x_0 \in (a, b)$ является точкой перегиба, то $f''(x_0)=0$.*

Действительно, так как функция дважды дифференцируема, а справа и слева от точки перегиба вторая производная должна иметь разные знаки, то в точке $(x_0; f(x_0))$ она должна быть равна нулю.

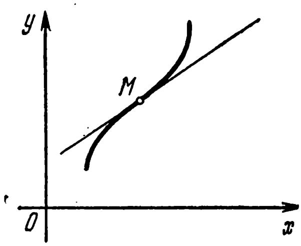


Рис. 5.15.

Эта теорема необратима: из того, что $f''(x_0)=0$, не следует, что x_0 — точка перегиба. Например, для функции $y=x^4$ имеем

$$y''=12x^2 \quad \text{и} \quad y''=0 \text{ при } x=0,$$

но $x=0$ — не точка перегиба, ибо в ней функция не меняет направления выпуклости ($y''\geqslant 0$ при всех x, график выпукл вниз).

Отметим также и другой факт: *точки перегиба существуют и там, где $f''(x)$ не существует.*

Например, для графика функции $y=\sqrt[3]{x}$, для которой $y''=-\dfrac{2}{9\sqrt[3]{x^5}}$, точка $x_0=0$ является точкой перегиба, хотя в ней вторая производная не существует (рис. 5.16).

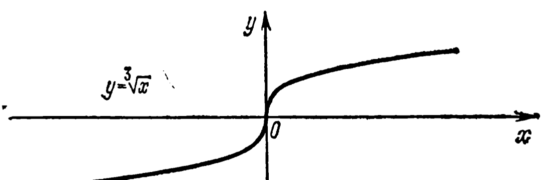


Рис. 5.16.

Однако и это утверждение необратимо. Например, для функции $y=\sqrt[3]{x^2}$ имеем $y''=-\dfrac{2}{9\sqrt[3]{x^4}}$ и y'' не существует при $x=0$, однако во всех других точках $y''<0$ и график выпукл вверх, следовательно, $x=0$ не точка перегиба (см. рис. 5.8, *в*).

Итак, для того чтобы изучить характер выпуклости графика функции $y=f(x)$, необходимо исследовать знак второй производной в окрестности точки x_0 такой, что $f''(x_0)=0$ или $f''(x_0)$ не существует.

Пример 5.4. Исследуем на выпуклость график функции $y=x^3$. Имеем $y''=6x$, $y''(0)=0$. При $x<0$ имеем $y''<0$ и при $x>0$ имеем $y''>0$. В точке $x=0$ вторая производная меняет знак с «—» на «+». Таким образом, в точке перегиба $x=0$ график функции переходит от выпуклости вверх к выпуклости вниз (см. рис. 5.4).

5.3.3. Общая схема исследования функции. Как уже говорилось выше (см. п. 2.2.2), график функции, заданной аналитически, строится для того, чтобы сделать наглядной качественную картину характерных особенностей функции. Приведем обзор некоторых возможных особенностей и методов их определения.

1. Область определения функции. В случаях, когда строится график сложной функции и нет указании относительно области определения, необходимо построить естественную область определения, решая соответствующие неравенства и устанавливая интервалы непрерывности, выясняя поведение (или значение) функции на концах интервала задания.

2. Асимптоты. Выясняем наличие вертикальных асимптот в точках разрыва, поведение функции в этих точках; анализируем поведение функции на бесконечности.

3. Симметрия. Периодичность. Наличие свойств четности и нечетности, периодичности существенно облегчает исследование функции, позволяя ограничиться исследованием лишь на части области определения.

4. Экстремумы. Находим первую и вторую производные, отмечаем точки нарушения дифференцируемости. Определяем критические точки, располагаем их в порядке возрастания. Находим экстремумы.

5. Точки перегиба. Находим точки, в которых вторая производная равна нулю или не существует, выясняем направление выпуклости графика в окрестности этих точек. Заметим, что точка перегиба всегда имеет место между двумя соседними точками экстремума, если на интервале между ними функция дважды дифференцируема.

6. Дополнительные характерные точки. Для большей точности построения графика иногда бывает полезно вычислить дополнительно точки пересечения графика с осями координат, с осями симметрии и асимптотами.

7. Построение графика. На этом этапе, заключительном, для обозримости результата исследования функции строится график функции в системе координат.

Пример 5.5. Проведем исследование функции $y=\frac{x^4}{x^3-1}$.

Область определения функции, очевидно,

$$X=(-\infty,\ 1)\cup(1,\ \infty).$$

Выясним, как ведет себя функция на концах интервалов задания. Для этого вычислим четыре предела:

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{x^4}{x^3-1}=-\infty,\qquad \lim_{x\to+\infty}\frac{x^4}{x^3-1}=+\infty,$$

$$\lim_{x\to1-0}\frac{x^4}{x^3-1}=-\infty,\qquad \lim_{x\to1+0}\frac{x^4}{x^3-1}=+\infty.$$

Таким образом, мы установили, что $x=1$ — вертикальная асимптота.

Переходя к определению наклонных асимптот, будем иметь

$$k=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{x^3}{x^3-1}=1,\quad b=\lim_{x\to\pm\infty}\left(\frac{x^4}{x^3-1}-x\right)=0,$$

откуда следует, что прямая $y=x$ является наклонной асимптотой графика функции при $x\to-\infty$ и при $x\to+\infty$.

Далее для определения экстремумов находим

$$y'=\frac{x^3(x^3-4)}{(x^3-1)^2};\qquad y''=\frac{6x^2(2+x^3)}{(x^3-1)^3}.$$

Производная y' существует и конечна в области определения функции, поэтому все критические точки определяем из условия $y'=0$, которое дает две критические точки: $x_1=0$ и $x_2=\sqrt[3]{4}$.

Исследуя знак y' в ε-окрестности точки $x_1=0$, получим: $y'>0$ при $x\in(-\varepsilon,\ 0)$ и $y'<0$ при $x\in(0,\ \varepsilon)$; таким образом, $x_1=0$ есть точка максимума, $y(0)=0$ — максимум функции. Одновременно мы установили, что при $x\in(-\infty,0)$ функция возрастает, а при $x\in(0,\ 1)$ — убывает. Заметим, что исследовать функцию на экстремум в точке $x_1=0$ можно было лишь указанным способом, ибо точка $x_1=0$ является нулем второй производной.

В точке $x_2=\sqrt[3]{4}$ можно провести исследование на экстремум с помощью второй производной, а именно $y''(\sqrt[3]{4})>0$, т. е. $x_2=\sqrt[3]{4}$ — точка минимума функции, $y(\sqrt[3]{4})=\frac{4\sqrt[3]{4}}{3}$ — минимум функции.

Остается исследовать форму выпуклости графика функции. Из условия $y''=0$ находим $x_3=-\sqrt[3]{2}$ и, исследуя знак y'' в ε-окрестности этой точки, получаем: $y''>0$ при $x\in\left(-\varepsilon-\sqrt[3]{2},\ -\sqrt[3]{2}\right)$,

$y''<0$ при $x\in\left(-\sqrt[3]{2},\ -\sqrt[3]{2}+\varepsilon\right)$, т. е. $x_3=-\sqrt[3]{2}$ — абсцисса точки (единственной) перегиба графика функции в направлении от выпуклости вниз и выпуклости вверх; ордината точки перегиба

$$y\left(-\sqrt[3]{2}\right)=-\frac{2}{3}\sqrt[3]{2}.$$

Исследование закончено, график функции $y=\dfrac{x^4}{x^3-1}$ представлен на рис. 5.17.

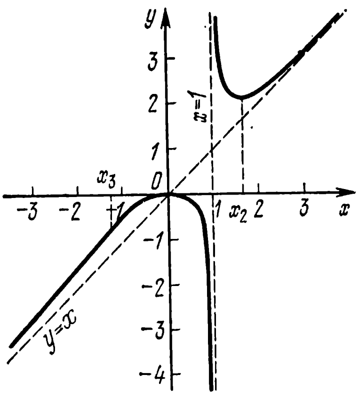


Рис. 5.17.

5.3.4. Задачи прикладного характера на нахождение наибольших и наименьших значений функции. Покажем применение изложенной теории для решения задач конкретного характера.

З а д а ч а 5.1. Заготовлен материал для изгороди длиной l м. Необходимо этой изгородью огородить прямоугольную площадку, имеющую наибольшую площадь. Какими должны быть размеры этой площадки?

Р е ш е н и е. Пусть ширина прямоугольника x м. Тогда длина его должна быть равна $\left(\dfrac{l}{2}-x\right)$ м, и, значит, площадь $S=\left(\dfrac{l}{2}-x\right)x$. Для решения задачи остается найти, при каком значении x функция $S(x)$ принимает наибольшее значение.

По смыслу задачи x изменяется на отрезке $[0,\ l/2]$ [1]). Применяя вышеизложенную теорию, находим

$$\left(\frac{l}{2}x-x^2\right)'=\frac{l}{2}-2x,\qquad \left(\frac{l}{2}x-x^2\right)''=-2.$$

Полагая $\dfrac{l}{2}-2x=0$, находим критическую точку $x=l/4$. Так как $S''(x)<0$, то имеем максимум. Этот максимум — единственный экстремум, лежащий внутри $[0,\ l/2]$. Подсчитаем значения функции $S(x)$ в точках $x=0$, $x=l/4$ и $x=l/2$ и выберем наибольшее

$$S(0)=0,\qquad S(l/4)=l^2/16,\qquad S(l/2)=0.$$

Итак, прямоугольником, имеющим наибольшую площадь, будет прямоугольник со сторонами, равными $l/4$, т. е. квадрат.

З а д а ч а 5.2. Из квадратного листа железа со стороной a нужно сделать открытый сверху ящик. Для этого по углам листа вырезают равные квадраты и из получившейся крестовины сгибают ящик. Какие квадраты нужно вырезать по углам листа, чтобы получился ящик

---

[1]) Случаи $x=0$ и $x=l/2$ являются случаями вырождения. Для полноты исследования мы их не исключаем.

наибольшей вместимости (объем равен произведению площади основания ящика на высоту).

Решение. Длину стороны квадратов, вырезаемых по углам, обозначим через x. Дном ящика служит квадрат со стороной $a-2x$. Отсюда объем ящика выражается функцией $V=(a-2x)^2x$, где x принимает значения из промежутка $(0, a/2)$. Рассматривать случаи $x=0$ и $x=a/2$ мы не будем, так как это случаи вырождения функции (следует из условия задачи). Выясним, при каких значениях x из $x\in(0, a/2)$ функция V принимает наибольшее значение. Очевидно, что это должен быть наибольший из максимумов в промежутке $(0, a/2)$. Найдем V' и V''.

$$V'=(a^2x-4ax^2+4x^3)'=12x^2-8ax+a^2,$$
$$V''=24x-8a.$$

Из условия $V'=0$ найдем критические точки

$$12x^2-8ax+a^2=0,$$

откуда

$$x_1=(4a+2a)/12=a/2, \qquad a/2\notin(0, a/2),$$
$$x_2=(4a-2a)/12=a/6, \qquad a/6\in(0, a/2).$$

В точке $x_1=a/2$ функция вырождается, поэтому исследуем знак второй производной только в точке $x_2=a/6$, учитывая, что $a>0$ и $a=\text{const}$

$$V''(a/6)=24\cdot\frac{a}{6}-8a=-4a<0.$$

Это значит, что функция V имеет в точке $x=a/6$ максимум, единственный в промежутке $(0, a/2)$. Значение $V(a/6)=2a^3/27$ и будет наибольшим.

Задача 5.3. Быстрота сигнализации по подводному кабелю пропорциональна выражению $x^2\ln(1/x)$, где x есть отношение радиуса металлической сердцевины кабеля к толщине его изолирующей оболочки. Каким должно быть это отношение, чтобы быстрота сигнализации была наибольшей?

Решение. В данном случае нам не требуется составлять функцию, которую надлежит исследовать на экстремум. Она уже задана в условии задачи. Поэтому, если мы найдем в интервале $(0, +\infty)$ значение x, при котором функция $f(x)=x^2\ln(1/x)=-x^2\ln x$ имеет наибольшее значение, задача будет решена. Функция $f(x)$ — гладкая. Находим

$$f'(x)=-2x\ln x-x=-x(2\ln x+1).$$

Корнем производной, принадлежащим интервалу $(0, +\infty)$, является только значение $x=\dfrac{1}{\sqrt{e}}=e^{-1/2}$. Если мы проследим поведение производной при переходе через точку $x=e^{-1/2}$, то увидим, что она меняет знак с плюса на минус. Значит, в точке $x=e^{-1/2}$ функция $f(x)$ имеет максимум, причем это единственный экстремум $f(x)$ в интервале $(0, +\infty)$. Стало быть, искомое отношение должно быть равно $e^{-1/2}$.

Задача 5.4. n гальванических элементов, из которых каждый имеет внутреннее сопротивление r и электродвижущую силу E, соединены в x последовательных групп, причем каждая группа состоит из y параллельно соединенных элементов ($xy=n$); R — сопротивление внешней цепи. Каковы должны быть числа x и y, чтобы сила тока I была наибольшей?

Решение. Если m элементов соединены последовательно, то по закону Ома сила тока в цепи будет

$$\frac{mE}{mr+R}=\frac{E}{r+\frac{R}{m}},$$

если же k элементов соединены параллельно, то сила тока будет

$$\frac{E}{\frac{r}{k}+R}.$$

Следовательно, сила тока всей батареи равна

$$I=\frac{E}{\frac{r}{y}+\frac{R}{x}}=\frac{Ex}{ax^2+R} \qquad \left(a=\frac{r}{n}\right);$$

из условия задачи видно, что $x\leqslant n$, поэтому будем рассматривать функцию на интервале $(0, n)$

$$I'=E\frac{R-ax^2}{(ax^2+R)^2}, \qquad I''=2aE\frac{(ax^2-3R)}{(ax^2+R)^3}x.$$

Производная $I'(x)$ обращается в нуль только в одной точке интервала $(0, n)$: $x=\sqrt{\frac{R}{a}}=\sqrt{\frac{Rn}{r}}$, которая может принадлежать этому интервалу. Если $R/r<n$, то точка $x=\sqrt{Rn/r}$ принадлежит интервалу $(0, n)$. $I''(x)$ в этой точке меньше нуля, значит, мы имеем максимальное значение функции, если $x=\sqrt{\frac{Rn}{r}}$, $y=\frac{n}{x}=\sqrt{\frac{rn}{R}}$.

ВОПРОСЫ ДЛЯ ПОВТОРЕНИЯ К ГЛАВЕ 5

1. Дайте формулировки теорем Ферма, Ролля, Лагранжа.
2. В чем состоит геометрический смысл этих теорем?
3. Что называется стационарной точкой?
4. Сформулируйте необходимый и достаточный признаки возрастания (убывания) функции.
5. Сформулируйте необходимый и достаточные признаки существования экстремума.
6. В чем состоит метод нахождения наибольших и наименьших значений функции на замкнутом интервале?
7. Дайте определение и способ нахождения асимптот кривой.
8. Как определяется направление выпуклости кривой?
9. Сформулируйте необходимый и достаточный признаки существования точки перегиба.
10. Опишите общую схему исследования поведения функции.

УПРАЖНЕНИЯ К ГЛАВЕ 5

Найдите наибольшее и наименьшее значения функции $y=f(x)$ на интервале $[a, b]$.

1. $y=2x^2-\ln x$, $[0{,}25;\ 1]$.
2. $y=x^3-3x^2-9x+14$, $[-2,\ 3]$.
3. $y=x-e^x$, $[-1,\ 2]$.
4. $y=x^4-2x^2-5$, $[-2,\ 0]$.
5. $y=\frac{x^2}{x+1}$, $[-0{,}5;\ 4]$.
6. $y=x^2e^{-x}$, $[-1,\ 4]$.

Исследуйте методами дифференциального исчисления функцию и постройте ее график:

7. $y=1+2x^2-\frac{x^4}{4}$.
8. $y=x^3+6x^2+9x$.
9. $y=3x+\frac{3x}{9x^2-1}$.
10. $y=\frac{x^3}{3x^2-1}$.
11. $y=(2x-3)\sqrt[3]{(x+1)^2}$.
12. $y=x^2\sqrt{x+1}$.
13. $y=\frac{e^x}{x}$.
14. $y=\frac{x}{\ln x}$.
15. $y=\frac{x^2+8}{x+1}$.
16. $y=\frac{(x-4)^3}{x^2}$.
17. $y=\frac{x\sqrt{1-x}}{1+x}$.
18. $y=\frac{(x^2-4)^{2/3}}{x^2}$.
19. $y=\frac{1}{x^2}-\frac{1}{(x-1)^2}$.
20. $y=e^{-1/x^2}$.

Решите задачи:

21. Окно имеет форму прямоугольника, завершенного полукругом. Каковы должны быть размеры этого окна, чтобы при данном его периметре $2p$ оно пропускало наибольшее количество света?

22. Судно B, находящееся в данный момент на расстоянии 75 км к востоку от судна A, идет на запад со скоростью 12 км в час; судно же A идет на юг со скоростью 4 км в час. Через сколько часов суда будут наиболее близки друг к другу?

23. Два источника света расположены в 30 м друг от друга. На прямой, соединяющей их, найти наименее освещенную точку, если силы источников относятся, как 27:8.

24. Из всех прямоугольников, вписанных в эллипс $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$, найти тот, площадь которого наибольшая (предполагается, что стороны прямоугольника параллельны координатным осям).

25. От канала шириной 4 м под прямым углом к нему отходит другой канал шириной 2 м. Какой может быть длина бревна l, чтобы его можно было сплавить по этим каналам из одного в другой (толщину бревна можно не учитывать)?

26. Имеется гальванический элемент, внутреннее сопротивление которого равно r. При каком внешнем сопротивлении R мощность тока, получаемого от этого элемента во внешней цепи, будет наибольшей?

ОТВЕТЫ, УКАЗАНИЯ И РЕШЕНИЯ К ГЛАВЕ 5

21. Радиус полукруга должен быть равен высоте прямоугольника.

22. $5\frac{5}{8}$ часа.

23. В 18 м от более сильного источника света.

24. Стороны прямоугольника равны $\frac{a\sqrt{2}}{2}$ и $\frac{b\sqrt{2}}{2}$.

25. $l \leqslant 2\sqrt{9+6\sqrt{2}} \approx 8{,}36$ м.

26. $R = r$.

ГЛАВА 6

ОПРЕДЕЛИТЕЛИ И СИСТЕМЫ ЛИНЕЙНЫХ УРАВНЕНИЙ

§ 6.1. Системы двух линейных уравнений с двумя неизвестными

6.1.1. Линейные уравнения с двумя неизвестными. Определение 6.1. *Линейным уравнением относительно x и y мы будем называть всякое соотношение вида*

$$ax+by=c, \tag{6.1}$$

где хотя бы одно из чисел a и b отлично от нуля.

Всякая пара чисел x, y, при которых (6.1) *представляет собой верное равенство, называется решением этого уравнения.* (Говорят еще, что эта пара чисел *удовлетворяет* уравнению (6.1).)

Так, например, решениями уравнения $2x-y=3$ являются следующие пары чисел: 1) $x=1$, $y=-1$, 2) $x=2$, $y=1$, 3) $x=\sqrt{3}/2$, $y=\sqrt{3}-3$ и т. д. Примером пары чисел, не удовлетворяющей этому уравнению, может служить: $x=10$, $y=5$.

Покажем, что множество всех решений линейного уравнения геометрически изображается прямой линией на декартовой координатной плоскости. Действительно, если $b\neq 0$, то, разделив обе части (6.1) на b и перенося член $\frac{a}{b}x$ в правую часть, мы получим эквивалентное (6.1) соотношение

$$y=-\frac{a}{b}\cdot x+\frac{c}{b}. \tag{6.2}$$

Как известно, такое соотношение определяет y как линейную функцию от x, а графиком этой линейной функции служит прямая линия, пересекающая ось Oy в точке с ординатой $y_0 = c/b$, и составляющая с осью Ox угол, тангенс которого равен $-a/b$.

Если же $b = 0$, то обязательно $a \neq 0$ (мы потребовали в определении, чтобы хоть одно из этих чисел было отлично от нуля). Тогда (6.1) можно переписать так:

$$x = \frac{c}{a}. \tag{6.3}$$

Отсюда видно, что, для того чтобы числа x и y удовлетворяли этому соотношению, необходимо и достаточно, чтобы x был равен c/a, а y может быть любым вещественным числом. Множество всех таких пар геометрически изображается прямой, проходящей параллельно оси Oy, и пересекающей ось Ox в точке с абсциссой $x = c/a$.

6.1.2. Системы двух линейных уравнений с двумя неизвестными, геометрическая интерпретация. Мы будем сейчас рассматривать системы, составленные из двух линейных уравнений:

$$\begin{cases} a_1x + b_1y = c_1, \\ a_2x + b_2y = c_2. \end{cases} \tag{6.4}$$

Определение 6.2. *Решением системы* (6.4) *называются всякие два числа x и y, которые удовлетворяют каждому из составляющих эту систему уравнений.*

Так как множество всех решений (6.4), очевидно, представляет собой общую часть (теоретико-множественное пересечение) множеств, составленных соответственно из решений первого и второго из уравнений этой системы, то, исходя из геометрических соображений, мы заключаем, что может иметь место один и только один из следующих случаев:

1°. Прямые l_1 и l_2, представляющие собой соответственно множества решений первого и второго из уравнений (6.4), имеют только одну общую точку M_0. Ее координаты $(x_0;\ y_0)$ в этом случае будут представлять собой единственное решение системы. (Действительно, любая другая пара чисел x и y определяет на плоскости xOy точку M, отличную от точки M_0, и поэтому — не лежащую хотя бы на одной из прямых l_1 и l_2. А это значит, что такая пара чисел не удовлетворяет хотя бы одному из уравнений (6.4).) Такой случай будет иметь место тогда и только тогда, когда прямые l_1 и l_2 составляют с осью Ox разные углы.

2°. Прямые l_1 и l_2 параллельны друг другу. В этом случае они, естественно, не имеют общих точек. Значит, и система (6.4) не имеет ни одного решения.

3°. Прямые l_1 и l_2 совпадают друг с другом. Тогда любая их точка представляет собой решение нашей системы. В этом случае, следовательно, система имеет бесконечное множество решений.

6.1.3. Исследование системы двух линейных уравнений с двумя неизвестными. Займемся теперь аналитическим исследованием системы (6.4). Умножив первое из ее уравнений на b_2, а второе — на $-b_1$, сложим их почленно. После этого мы умножим первое из уравнений (6.4) на $-a_2$, второе — на a_1, и вновь произведем почленное сложение. В результате этих операций мы получим

$$\begin{cases} (a_1b_2-a_2b_1)\cdot x=c_1b_2-c_2b_1, \\ (a_1b_2-a_2b_1)\cdot y=a_1c_2-a_2c_1. \end{cases} \tag{6.5}$$

Если $a_1b_2-a_2b_1\neq 0$, то (6.5) представляет собой новую систему уравнений относительно x и y. Видно, что единственным решением этой системы будет

$$x=\frac{c_1b_2-c_2b_1}{a_1b_2-a_2b_1}, \quad y=\frac{a_1c_2-a_2c_1}{a_1b_2-a_2b_1}. \tag{6.6}$$

Если же $a_1b_2-a_2b_1=0$, то (6.5) принимает вид

$$\begin{cases} 0=c_1b_2-c_2b_1, \\ 0=a_1c_2-a_2c_1. \end{cases} \tag{6.7}$$

Для правильного понимания дальнейших рассуждений очень важным является следующее: в любом случае соотношения (6.5) представляют собой следствие соотношений (6.4), т. е. если какие-либо числа x и y удовлетворяют системе (6.4), то при этих же x и y оказывается справедливым и каждое из соотношений (6.5).

Рассмотрим сначала случай, когда $a_1b_2-a_2b_1\neq 0$. Тогда на основании только что сделанного замечания можно сказать, что всякое решение системы (6.4) является решением и для системы (6.5). Но (6.5) при $a_1b_2-a_2b_1\neq 0$ имеет, как мы видели, только одно решение, которое дается формулами (6.6). Значит, система (6.4) не может иметь никаких иных решений, кроме (6.6). Но удовлетворяет ли и (6.6) этой системе? Из проделанных нами до сих пор выкладок это отнюдь не следует. Получить ответ на этот вопрос мы можем, непосредственно подставив (6.6) в каждое из уравнений (6.4).

Левая часть первого из этих уравнений после такой подстановки примет вид

$$a_1\cdot\frac{c_1b_2-c_2b_1}{a_1b_2-a_2b_1}+b_1\cdot\frac{a_1c_2-a_2c_1}{a_1b_2-a_2b_1}=\frac{a_1c_1b_2-a_1c_2b_1+a_1c_2b_1-a_2c_1b_1}{a_1b_2-a_2b_1}=$$

$$=\frac{a_1c_1b_2-a_2c_1b_1}{a_1b_2-a_2b_1}=\frac{c_1\cdot(a_1b_2-a_2b_1)}{a_1b_2-a_2b_1}=c_1,$$

откуда видно, что (6.6) удовлетворяет этому уравнению. Точно так же можно убедиться и в том, что два числа (6.6) удовлетворяют и второму из уравнений исходной системы (6.4). Следовательно, мы вправе сделать заключение о том, что если $a_1b_2-a_2b_1\neq 0$, то система (6.4) имеет единственное решение, и это решение дается формулами (6.6).

Пусть теперь $a_1b_2-a_2b_1=0$. Если мы допустим, что (6.4) имеет хотя бы одно решение, то отсюда будет следовать и справедливость (6.7). Значит, если при $a_1b_2-a_2b_1=0$ хотя бы одно из соотношений (6.7) не выполнено, то система (6.4) не имеет ни одного решения.

Покажем, наконец, что если $a_1b_2-a_2b_1=0$ и если выполнены оба соотношения (6.7), то система (6.4) имеет бесконечное множество решений.

Предположим сначала, что $b_1\neq 0$. В этом случае и $b_2\neq 0$. Действительно, допустив противное, мы, исходя из равенства $a_1b_2-a_2b_1=0$, получаем, что $a_2b_1=0$, а отсюда $a_2=0$. Но, согласно определению 6.1, одновременное обращение в нуль коэффициентов a_2 и b_2 невозможно. Множество решений первого из уравнений (6.4), как мы знаем, состоит из всевозможных чисел x и y, где x — произвольное вещественное число, а соответствующее значение y дается формулой (6.2). Подставляя такие числа x и $-\frac{a_1}{b_1}x+\frac{c_1}{b_1}$ в левую часть второго уравнения (6.4), мы получим

$$a_2x+b_2\cdot\left(-\frac{a_1}{b_1}x+\frac{c_1}{b_1}\right)=\frac{a_2b_1-a_1b_2}{b_1}\cdot x+\frac{b_2c_1}{b_1}=\frac{b_2c_1}{b_1}.$$

Но из (6.7) следует, что $\frac{b_2c_1}{b_1}=c_2$. Стало быть, каждое из решений первого из наших уравнений удовлетворяет и второму уравнению, а тем самым и всей системе (6.4).

Пусть теперь $b_1=0$. Тогда, очевидно, $a_1\neq 0$ и из $a_1b_2-a_2b_1=0$ следует, что $a_1b_2=0$, откуда $b_2=0$ и, значит, $a_2 \neq 0$. Система (6.4) в этом случае принимает вид

$$\begin{cases} a_1x = c_1, \\ a_2x = c_2. \end{cases} \tag{6.8}$$

Первому из этих уравнений удовлетворяют любые два числа x и y, где $x = c_1/a_1$, а y — произвольное вещественное число. Но, так как из (6.7) следует, что $c_2/a_2 = c_1/a_1$, то каждые такие два числа x и y будут представлять собой решение и второго уравнения, а значит, и всей системы (6.8).

§ 6.2. Определители второго порядка

6.2.1. Основные определения. Формулы Крамера. В предыдущем пункте нам часто встречались выражения типа $a_1b_2 - a_2b_1$. С такого рода выражениями нередко приходится сталкиваться в различных областях математики и ее приложений. Поэтому оказалось целесообразным ввести для них специальные названия и обозначения.

Определение 6.3. *Выражение $a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$ называется определителем второго порядка (составленным из чисел a_{11}, a_{12}, a_{21} и a_{22}) и обозначается*

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}.$$

Здесь и далее первый индекс означает номер строки, а второй индекс — номер столбца.

Пользуясь этим определением, мы можем теперь записать, что

$$\begin{gathered} a_1b_2 - a_2b_1 = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}, \\ c_1b_2 - c_2b_1 = \begin{vmatrix} c_1 & b_1 \\ c_2 & b_2 \end{vmatrix}, \quad a_1c_2 - a_2c_1 = \begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_2 & c_2 \end{vmatrix}. \end{gathered} \tag{6.9}$$

В тех случаях, когда определители (6.9) рассматривают в связи с системой (6.4), первый из них называют *определителем* этой *системы*, второй — *определителем неизвестного x*, третий — *определителем y*. Мы будем их обозначать соответственно через Δ, Δ_x и Δ_y. Отметим, что выражение для Δ_x получается из определителя системы, если в нем столбец, составленный из коэффициентов при x, заменить столбцом из свободных членов. Аналогично Δ_y получается из Δ заменой столбца коэффициентов при y на столбец свободных членов.

С использованием этих терминов полученные нами в конце п. 6.1.3 выводы можно сформулировать так.

Теорема 6.1. *Для того чтобы система* (6.4) *имела единственное решение, необходимо и достаточно, чтобы ее определитель был отличен от нуля*

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} \neq 0. \tag{6.10}$$

При этом условии таким единственным решением системы являются следующие два числа:

$$x = \frac{\Delta_x}{\Delta} = \frac{\begin{vmatrix} c_1 & b_1 \\ c_2 & b_1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}}, \quad y = \frac{\Delta_y}{\Delta} = \frac{\begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_2 & c_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}}. \tag{6.11}$$

Формулы (6.11) *носят название формул Крамера.*

Если определитель системы равен нулю, а хотя бы один из определителей неизвестных отличен от нуля, то система не имеет решений.

Если же равны нулю как определитель системы, так и каждый из определителей неизвестных, то система имеет бесконечное множество решений.

6.2.2. Свойства определителей второго порядка. Рассмотрим теперь основные свойства определителей второго порядка.

Свойство 1°. *Величина определителя не изменится, если его строки поменять местами со столбцами (не нарушая их порядка):*

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} \\ a_{12} & a_{22} \end{vmatrix}. \tag{6.12}$$

Доказательство. Вычисляя в соответствии с определением 6.3 левую и правую части (6.12), мы получаем одно и то же число

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21},$$

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} \\ a_{12} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - {}_{21}a_{12}.$$

Свойство 2°. *Если в определителе поменять местами две строки (или два столбца), то его абсолютная величина сохранится, а знак изменится на противоположный.*

Доказательство.

$$\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{11} & a_{12} \end{vmatrix} = a_{21}\;{}_{12} - a_{22}a_{11} = -(a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}) = -\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}.$$

Свойство 3°. *Если определитель содержит две одинаковые строки (или два одинаковых столбца), то его величина равна нулю.*

Доказательство. Поменяв в таком определителе местами строки, мы фактически не изменим его. Однако, согласно свойству 2°, знак его изменится на противоположный:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{11} & a_{12} \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{11} & a_{12} \end{vmatrix}.$$

Отсюда следует, что этот определитель равен нулю.

Свойство 4°. *Если все элементы какой-либо строки (или столбца) определителя содержат общий множитель, то этот множитель можно вынести за знак определителя.*

Доказательство. Для определенности рассмотрим случай, когда общий множитель имеют элементы второй строки:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ \lambda a_{21} & \lambda a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}(\lambda a_{22}) - a_{12}(\lambda a_{21}) =$$

$$= \lambda(a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}) = \lambda \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}.$$

Свойство 5°. *Если элементы одной какой-нибудь строки определителя равны соответствующим элементам другой строки, умноженным на один и тот же множитель, то такой определитель равен нулю (аналогично для столбцов).*

Доказательство. Пусть, для определенности, $a_{21} = \lambda a_{11}$, $a_{22} = \lambda a_{12}$. Тогда

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ \lambda a_{11} & \lambda a_{12} \end{vmatrix} = \lambda \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{11} & a_{12} \end{vmatrix} = \lambda \cdot 0 = 0.$$

(Мы воспользовались сначала свойством 4°, а затем свойством 3°.)

Замечание 6.1. Положив $\lambda = 0$, мы видим, что если все элементы одной из строк (столбцов) определителя равны нулю, то равен нулю и сам определитель. (Разумеется, это утверждение легко доказывается и непосредственно.)

Свойство 6°. *Если каждый из элементов какой-либо строки определителя представляет собой сумму двух слагаемых, то он равен сумме двух определителей, получаю-*

щихся из него заменой указанной строки на строки, составленные соответственно из первых и вторых слагаемых в отдельности. Например,

$$\begin{vmatrix} a'_{11}+a''_{11} & a'_{12}+a''_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a'_{11} & a'_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a''_{11} & a''_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}. \tag{6.13}$$

Аналогичное утверждение справедливо и для столбцов.

Доказательство.

$$\begin{vmatrix} a'_{11}+a''_{11} & a'_{12}+a''_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = (a'_{11}+a''_{11})\,a_{22}-(a'_{12}+a''_{12})\,a_{21} =$$
$$= (a'_{11}a_{22}-a'_{12}a_{21})+(a''_{11}a_{22}-a''_{12}a_{21}) =$$
$$= \begin{vmatrix} a'_{11} & a'_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a''_{11} & a''_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}.$$

Свойство 7°. *Величина определителя не изменится, если к элементам какой-либо его строки прибавить умноженные на одно и то же число элементы другой строки (то же — для столбцов).*

Доказательство.

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21}+\lambda a_{11} & a_{22}+\lambda a_{12} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ \lambda a_{11} & \lambda a_{12} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}.$$

(Мы применили сначала свойство 6°, а затем свойство 5°.)

§ 6.3. Определители третьего и высших порядков и их приложения к системам линейных уравнений

6.3.1. Определители третьего порядка и формулы Крамера для системы трех линейных уравнений с тремя неизвестными. Пусть нам дана система уравнений

$$\begin{cases} a_1x+b_1y+c_1z=d_1, \\ a_2x+b_2y+c_2z=d_2, \\ a_3x+b_3y+c_3z=d_3. \end{cases} \tag{6.14}$$

Уравнения такого типа тоже называются *линейными*. Понятия решения отдельного уравнения и решения системы определяются аналогично тому, как это сделано в § 6.1.

Действуя таким же образом, как и в случае двух неизвестных, можно было бы показать, что следствием этой системы являются соотношения

$$\begin{cases} \Delta\cdot x \qquad\qquad = \Delta_x, \\ \qquad \Delta\cdot y \qquad = \Delta_y, \\ \qquad\qquad \Delta\cdot z = \Delta_z \end{cases} \tag{6.15}$$

где

$$\begin{aligned} \Delta &= a_1b_2c_3 - a_1b_3c_2 - a_2b_1c_3 + a_3b_1c_2 + a_2b_3c_1 - a_3b_2c_1, \\ \Delta_x &= d_1b_2c_3 - d_1b_3c_2 - d_2b_1c_3 + d_3b_1c_2 + d_2b_3c_1 - d_3b_2c_1, \\ \Delta_y &= a_1d_2c_3 - a_1d_3c_2 - a_2d_1c_3 + a_3d_1c_2 + a_2d_3c_1 - a_3d_2c_1, \\ \Delta_z &= a_1b_2d_3 - a_1b_3d_2 - a_2b_1d_3 + a_3b_1d_2 + a_2b_3d_1 - a_3b_2d_1. \end{aligned} \tag{6.16}$$

Выражения подобного рода, как мы это увидим из следующего определения, тоже носят название определителей.

Определение 6.4. *Определителем третьего порядка*

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

называется число $a_{11}a_{22}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31}$.

Если определители (6.16) рассматриваются в связи с системой (6.14), то первый из них называется *определителем* этой *системы*, а каждый из остальных — *определителем* соответствующего *неизвестного*. Для системы (6.14) имеет место теорема, аналогичная первой части теоремы 6.1.

Теорема 6.2. *Для того чтобы система* (6.14) *имела единственное решение, необходимо и достаточно, чтобы ее определитель был отличен от нуля. В этом случае упомянутое решение дается формулами Крамера*

$$x = \frac{\Delta_x}{\Delta}, \quad y = \frac{\Delta_y}{\Delta}, \quad z = \frac{\Delta_z}{\Delta}.$$

Мы здесь не будем доказывать эту теорему.

Заметим, что, в отличие от случая двух переменных, мы здесь уже не можем утверждать, что система будет иметь бесконечное множество решений, если $\Delta = \Delta_x = \Delta_y = \Delta_z = 0$. Из (6.15) видно, разумеется, что если $\Delta = 0$, а хотя бы один из определителей неизвестных отличен от нуля, то (6.14) не имеет решений вообще. Однако система (6.14) может не иметь решений и в том случае, когда $\Delta = \Delta_x = \Delta_y = \Delta_z = 0$. Верно лишь то, что *при* $\Delta = 0$ *система либо вообще не имеет решений, либо имеет их бесконечно много.*

В главе, посвященной аналитической геометрии в пространстве, доказывается, что множество решений всякого уравнения такого типа, как составляющие систему (6.14), геометрически представляет собой множество всех точек некоторой плоскости. Поэтому решения системы (6.14) геометрически могут быть истолкованы как точки, принадлежащие одновременно каждой из трех плоскостей, определяемых уравнениями, составляющими эту систему.

Определители третьего порядка обладают свойствами, аналогичными свойствам 1°—7°, выведенным нами в § 6.2 для определителей второго порядка. Мы здесь примем это утверждение без доказательства.

6.3.2. Разложение определителя третьего порядка по элементам какой-либо его строки или столбца. Удобной как для вычисления определителей, так и для других целей, является следующая формула

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11} \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{12} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{13} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}. \quad (6.17)$$

Для ее доказательства преобразуем выражение для определителя, данное в определении 6.4:

$$a_{11}a_{22}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + \\ + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31} = a_{11}(a_{22}a_{33} - a_{23}a_{32}) - \\ - a_{12}(a_{21}a_{33} - a_{23}a_{31}) + a_{13}(a_{21}a_{32} - a_{22}a_{31}).$$

Теперь остается только заметить, что выражения в круглых скобках как раз и представляют собой соответственно определители из правой части (6.17). Эта формула называется *формулой разложения определителя третьего порядка по элементам первой строки*, и позволяет свести его вычисление к вычислению определителей второго порядка.

Понятно, что свойства 1° и 2° позволяют обобщить формулу (6.17) и разлагать определитель третьего порядка по элементам любой строки или столбца. Для записи этой обобщенной формулы оказывается удобным использовать понятие алгебраического дополнения.

Определение 6.5. *Алгебраическим дополнением элемента a_{ik} определителя третьего порядка называется число A_{ik}, представляющее собой определитель второго порядка, получающийся из исходного вычеркиванием тех строки и столбца, на пересечении которых стоит эле-*

мент a_{ik}, взятый со знаком $+$, если сумма номеров удаленных строки и столбца четная, и со знаком $-$ в противном случае.

Так, например,

$$A_{11}=\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}, \quad A_{32}=-\begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{21} & a_{23} \end{vmatrix}.$$

Теперь мы можем следующим образом сформулировать правило для составления формул типа (6.16).

Определитель третьего порядка равен сумме произведений элементов любой строки (столбца) на соответствующие им алгебраические дополнения.

Применяя это правило, например, для разложения определителя по элементам второго столбца, мы получим

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = -a_{12}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{22}\begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{32}\begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{21} & a_{23} \end{vmatrix}.$$

Формулы такого типа особенно удобно применять в том случае, когда равны нулю все, кроме одного, элементы строки (столбца), по которой производится разложение. Используя свойство 7°, мы всегда можем привести определитель к такому виду (если, разумеется, не все его элементы равны нулю).

Покажем это на конкретном примере. Пусть нам нужно вычислить определитель

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & -3 \\ -2 & 1 & 2 \\ 1 & -5 & 4 \end{vmatrix}.$$

Прибавив к элементам второй строки умноженные на 2 соответствующие им элементы первой, мы получим

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 0 & 5 & -4 \\ 1 & -5 & 4 \end{vmatrix}.$$

Теперь вычтем из элементов третьей строки соответствующие им элементы первой

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 0 & 5 & -4 \\ 0 & -7 & 7 \end{vmatrix}.$$

Согласно свойству 7° все эти определители равны между собой. Разлагая последний из них по элементам первого столбца, мы получаем

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 0 & 5 & -4 \\ 0 & -7 & 7 \end{vmatrix} = 1\begin{vmatrix} 5 & -4 \\ -7 & 7 \end{vmatrix} - 0\cdot\begin{vmatrix} 2 & -3 \\ -7 & 7 \end{vmatrix} + 0\cdot\begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 5 & -4 \end{vmatrix} =$$
$$= 5\cdot 7 - (-4)\cdot(-7) = 7.$$

6.3.3. Определители высших порядков. Определение 6.6. *Определителем n-го порядка*

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

называется сумма всевозможных произведений его элементов, взятых по одному из каждой строки и каждого столбца и снабженных знаками по следующему правилу.

Если для восстановления естественного порядка в последовательности номеров $\{k_1, k_2, \dots, k_n\}$ *требуется произвести в ней четное число попарных перестановок ее членов, то слагаемое* $a_{1k_1}a_{2k_2}\dots a_{nk_n}$ *берется со знаком* $+$, *в противном случае со знаком* —.

Можно доказать (мы здесь не будем этого делать), что для определителей n-го порядка справедливы свойства, аналогичные полученным нами в § 6.2 свойствам 1°—7° определителей второго порядка, и формула разложения по элементам любой из строк (или столбцов)

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{i1}A_{i1} + a_{i2}A_{i2} + \dots + a_{in}A_{in}. \quad (6.18)$$

Для вычисления определителей удобно комбинировать эту формулу с применением свойства 7° таким же образом, как это было показано на примере с определителем третьего порядка.

Сейчас мы перейдем к рассмотрению систем линейных уравнений с произвольным числом неизвестных. Нам будет удобно несколько отступить от ранее применявшихся обозначений и использовать для записи неизвестных одну и ту же букву x, снабженную индексом.

6.3.4. Системы n линейных уравнений с n неизвестными.

Определение 6.7. *Линейным уравнением относительно неизвестных* $x_1, x_2, \dots, x_n$ *будем называть всякое* *соотношение вида*

$$a_1x_1+a_2x_2+\ldots+a_nx_n=b, \qquad (6.19)$$

где хотя бы один из коэффициентов $a_1, a_2, \ldots, a_n$ *отличен от нуля.*

Всякая последовательность чисел $\{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$, *при которой* (6.19) *представляет собой верное равенство, называется решением этого уравнения.* (Говорят еще, что эта последовательность *удовлетворяет* уравнению.)

Такая последовательность называется *решением системы*, составленной из нескольких линейных уравнений, если она удовлетворяет каждому из них.

Определение 6.8. *Пусть дана система, состоящая из n линейных уравнений с n неизвестными*:

$$\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2+\ldots+a_{1n}x_n=b_1, \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+\ldots+a_{2n}x_n=b_2, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{n1}x_1+a_{n2}x_2+\ldots+a_{nn}x_n=b_n. \end{cases}$$

Определитель

$$\Delta=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} \end{vmatrix},$$

(*составленный из коэффициентов при неизвестных*) *называется определителем этой системы, а определитель* Δ_{x_k}, *получающийся из него заменой столбца, составленного из коэффициентов при каком-нибудь из неизвестных* x_k, *на столбец свободных членов, называется определителем этого неизвестного.*

Теорема, аналогичная теореме 6.2, справедлива и для системы n линейных уравнений с n неизвестными. И здесь справедливы формулы Крамера

$$x_k=\frac{\Delta_{x_k}}{\Delta} \qquad (k=1, 2, \ldots, n) \qquad (6.20)$$

6.3.5. Системы однородных линейных уравнений. В заключение этого параграфа коснемся еще понятия системы однородных линейных уравнений.

Определение 6.9. *Линейное уравнение, свободный член которого равен нулю*:

$$a_1x_1+a_2x_2+\ldots+a_nx_n=0,$$

называется однородным.

Ясно, что любая система, составленная из однородных уравнений, имеет по крайней мере одно решение, а именно, $x_1 = x_2 = \ldots = x_n = 0$. (Такое решение обычно называют *нулевым*.) Поэтому мы можем сказать, что если определитель системы, состоящей из n линейных однородных уравнений с n неизвестными, отличен от нуля, то такая система имеет только нулевое решение, если же $\Delta = 0$, то множество ее решений бесконечно (и, стало быть, она имеет и решения, отличные от нулевого).

§ 6.4. Методы решения систем линейных уравнений

6.4.1. Метод Гаусса. Если определитель системы n линейных уравнений с n неизвестными отличен от нуля, то для ее решения, разумеется, мы можем воспользоваться формулами Крамера (6.20). Однако этот способ далеко не всегда является самым подходящим. При сколько-нибудь больших значениях n такой способ требует громадного количества вычислений, а возможная здесь потеря точности (за счет округления промежуточных результатов) может привести к значительному расхождению между истинными и вычисленными значениями неизвестных.

Одним из наиболее употребительных методов решения таких систем является метод Гаусса. Покажем его сущность на примере системы трех уравнений с тремя неизвестными:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 = b_2, \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 = b_3. \end{cases} \tag{6.21}$$

Пусть сначала $a_{11} \neq 0$. Разделим на a_{11} все члены первого уравнения

$$x_1 + \frac{a_{12}}{a_{11}}x_2 + \frac{a_{13}}{a_{11}}x_3 = \frac{b_1}{a_{11}}, \tag{6.22}$$

и вычтем почленно из второго и третьего уравнений уравнение (6.22), предварительно умножив соответственно на a_{21} и a_{31}. Тем самым из этих уравнений мы исключим неизвестное x_1 и придем к следующей подсистеме:

$$\begin{cases} a'_{22}x_2 + a'_{23}x_3 = b'_2, \\ a'_{32}x_2 + a'_{33}x_3 = b'_3, \end{cases} \tag{6.23}$$

где

$$a'_{22} = a_{22} - a_{21}\frac{a_{12}}{a_{11}}, \quad a'_{23} = a_{23} - a_{21}\frac{a_{13}}{a_{11}} \quad \text{и т. д.}$$

Если же $a_{11}=0$, но среди коэффициентов при x_1, в других уравнениях есть отличные от нуля, мы просто поменяем местами какое-нибудь из этих уравнений с первым, а затем проделаем такие же операции. Если же все эти коэффициенты равны нулю, то это означает, что равен нулю определитель системы, а в этом случае метод Гаусса неприменим.

Действуя таким же методом, мы исключаем x_2 из последнего уравнения (6.23). (Если $a'_{22}=0$, то меняем местами уравнения, если же и $a'_{32}=0$, то это означает, что равен нулю определитель исходной системы.)

В результате этих операций мы преобразуем (6.21) к так называемому *треугольному виду*

$$\left\{\begin{aligned} x_1+\alpha_{12}x_2+\alpha_{13}x_3&=\beta_1,\\ x_2+\alpha_{23}x_3&=\beta_2,\\ x_3&=\beta_3.\end{aligned}\right. \qquad (6.24)$$

Теперь нам остается последовательно вычислить все неизвестные, начиная с последнего уравнения.

Хотя метод Гаусса (как и метод, заключающийся в использовании формул Крамера) является «теоретически точным» (т. е. при условии, что все вычисления проводятся абсолютно точно, дает абсолютно точный результат), при практическом его применении мы, как правило, из-за ошибок округления получаем значения неизвестных с той или иной погрешностью.

6.4.2. Метод простых итераций. В некоторых случаях оказывается более удобным использовать для решения системы так называемые «приближенные методы». Мы здесь кратко проиллюстрируем один из таких методов, а именно, так называемый метод простой итерации. Допустим, что наша система приведена к виду

$$\left\{\begin{aligned} x_1&=d_1-c_{11}x_1-c_{12}x_2-c_{13}x_3,\\ x_2&=d_2-c_{21}x_1-c_{22}x_2-c_{23}x_3,\\ x_3&=d_3-c_{31}x_1-c_{32}x_2-c_{33}x_3.\end{aligned}\right. \qquad (6.25)$$

(Это можно сделать, например, разрешая первое из уравнений (6.21) относительно x_1, второе — относительно x_2, третье — относительно x_3. При этом, конечно, будет $c_{11}=c_{22}=c_{33}=0$. Однако к системе (6.25) нередко приходят и другими путями.)

Выберем в качестве начального приближения какую-либо последовательность чисел $\{x_1^{(0)}, x_2^{(0)}, x_3^{(0)}\}$. Подставив ее в (6.25), мы, как правило, конечно не получим точного равенства между левыми и правыми частями этих уравнений. Значения правых частей, полученные при этой подстановке, мы возьмем в качестве следующего приближения и вообще на k-м шаге положим

$$\left\{\begin{array}{l} x_1^{(k)}=d_1-c_{11}x_1^{(k-1)}-c_{12}x_2^{(k-1)}-c_{13}x_3^{(k-1)}, \\ x_2^{(k)}=d_2-c_{21}x_1^{(k-1)}-c_{22}x_2^{(k-1)}-c_{23}x_3^{(k-1)}, \\ x_3^{(k)}=d_3-c_{31}x_1^{(k-1)}-c_{32}x_2^{(k-1)}-c_{33}x_3^{(k-1)}. \end{array}\right. \qquad (6.26)$$

Формулы (6.26) показывают, каким образом каждое последующее приближение получается из предыдущего. При определенных условиях, формулировать которые мы здесь не будем, эти последовательные приближения, как говорят, «сходятся» к точному решению системы $x_1^{(k)}\xrightarrow[k]{}x_1^*$, $x_2^{(k)}\xrightarrow[k]{}x_2^*$, $x_3^{(k)}\xrightarrow[k]{}x_3^*$, где $\{x_1^*, x_2^*, x_3^*\}$ — точное решение. Тогда, начиная с некоторого шага, последовательные значения $x_i^{(k)}$ и $x_i^{(k+1)}$ практически перестают сколько-нибудь заметно отличаться друг от друга. Это и служит обычно признаком того, что нужная степень точности достигнута.

6.4.3. Краткие указания по использованию вычислительной техники для решения систем линейных уравнений. Для всех распространенных в настоящее время ЭВМ (включая так называемые малые машины) разработаны различные программы, позволяющие решать системы линейных уравнений. Поэтому для практического решения таких систем на ЭВМ учащийся отнюдь не должен самостоятельно программировать этот процесс. Здесь следует ознакомиться с описанием имеющихся в лаборатории вычислительной техники (или — на учебном вычислительном центре) программ и затем воспользоваться инструкцией по их применению. Отдельные же системы до третьего-четвертого порядка включительно целесообразно в большинстве случаев решать вручную с использованием клавишных машин.

ВОПРОСЫ ДЛЯ ПОВТОРЕНИЯ К ГЛАВЕ 6

1. Что такое линейное уравнение относительно неизвестных x и y? Приведите примеры.

2. Какие из приведенных ниже записей представляют собой линейные уравнения относительно x и y?

а) $3x-y=1$. б) $2x=5$.
в) $by=c$, г) $2x-xy+y=3$.

3. Что называется решением линейного относительно x и y уравнения? Сколько различных решений имеет линейное уравнение? Как геометрически изображается множество таких решений?

4. Что называется решением системы, составленной из двух линейных относительно неизвестных x и y уравнений? Сколько различных решений может иметь такая система?

5. Что называется определителем системы двух линейных уравнений с двумя неизвестными? Что такое определитель неизвестного x? Определитель неизвестного y? В каких случаях, зная определитель такой системы и определитель каждого из неизвестных, мы можем найти решение системы?

6. Как по величинам определителей системы двух уравнений с двумя неизвестными и каждого из этих неизвестных можно судить о множестве решений системы?

7. Перечислите и проиллюстрируйте примерами известные Вам свойства определителей второго порядка.

8. Что такое определитель третьего порядка?

9. Каким образом при помощи определителей можно найти решение системы трех линейных уравнений с тремя неизвестными? Всегда ли это возможно?

10. Что можно сказать о множестве решений системы трех линейных уравнений с тремя неизвестными, определитель которой равен нулю?

11. Запишите в общем виде формулу разложения определителя по элементам его третьей строки и проиллюстрируйте ее на конкретном примере.

12. Что называется определителем n-го порядка?

13. В каких случаях и как именно при помощи определителей можно получить решение системы n линейных уравнений с n неизвестными?

14. Какая система n линейных уравнений с n неизвестными называется однородной? Как по величине определителя этой системы можно судить о множестве ее решений?

15. В чем состоит метод Гаусса решения системы n линейных уравнений с n неизвестными? Проиллюстрируйте его на конкретном примере.

УПРАЖНЕНИЯ К ГЛАВЕ 6

В примерах 1—10 требуется исследовать данные системы уравнений при помощи теоремы 6.1 и дать геометрическую иллюстрацию полученным результатам. В тех случаях, когда система имеет единственное решение, найдите его по формулам Крамера.

1. $\begin{cases} 3x+2y=1, \\ x-3y=4. \end{cases}$ 2. $\begin{cases} x+2y=5, \\ 2x+4y=15. \end{cases}$

3. $\begin{cases} x+2y=5, \\ 2x+4y=10. \end{cases}$ 4. $\begin{cases} 2x-4y=0, \\ -x+2y=0. \end{cases}$

5. $\begin{cases} 5x+3y=-1, \\ 3x+2y=-1. \end{cases}$ 6. $\begin{cases} 4x+7y=0, \\ 7x-4y=0. \end{cases}$

7. $\begin{cases} \dfrac{x}{2}+\dfrac{y}{3}=1, \\ 3x+2y=1. \end{cases}$ 8. $\begin{cases} \dfrac{x}{2}+\dfrac{y}{3}=1, \\ 3x+2y=6. \end{cases}$

9. $\begin{cases} 0{,}5x - y = 0, \\ -x + 2y = 0. \end{cases}$ 10. $\begin{cases} 6x + 5y = 4, \\ 3x + 10y = 5. \end{cases}$

В примерах 11—14 вычислите определители третьего порядка двумя способами:

а) непосредственным разложением по элементам первой строки;

б) разложением по элементам какой-нибудь строки (или столбца) с таким предварительным преобразованием определителя, чтобы все элементы этой строки (столбца), кроме одного, оказались равными нулю.

11. $\begin{vmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 7 & 2 & 5 \\ 9 & 3 & 7 \end{vmatrix}$. 12. $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \end{vmatrix}$.

13. $\begin{vmatrix} 5 & 4 & -2 \\ 1 & -2 & 0 \\ 3 & -5 & 7 \end{vmatrix}$. 14. $\begin{vmatrix} 3 & -2 & 1 \\ -1 & 5 & 2 \\ 5 & 1 & 4 \end{vmatrix}$.

В примерах 15 и 16 вычислите определители четвертого порядка.

15. $\begin{vmatrix} 2 & 3 & -1 & 2 \\ 1 & -1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & -2 & 2 \\ -2 & 1 & 1 & 2 \end{vmatrix}$. 16. $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 1 \\ 3 & 4 & 1 & 2 \\ 4 & 1 & 2 & 3 \end{vmatrix}$.

В примерах 17—22 даны системы линейных уравнений, которые следует решить, используя формулы Крамера.

17. $\begin{cases} x + y + z = 4, \\ x + 2y + 3z = 7, \\ x + y + 5z = 8. \end{cases}$ 18. $\begin{cases} 2x + y - 2z = 1, \\ x - y + 3z = 4, \\ 3x + y + z = 4. \end{cases}$

19. $\begin{cases} 3x - 2y - z = 0, \\ x + 3y - 2z = 0, \\ 4x + y + 2z = 0. \end{cases}$ 20. $\begin{cases} x - y + 3z = -4, \\ 2x + y - 2z = 5, \\ 3x + 3y + z = 6. \end{cases}$

21. $\begin{cases} x + y - 2z = 0, \\ 2x - 3y + z = 0, \\ 2x - 2y - z = 1. \end{cases}$ 22. $\begin{cases} x + y - 2z = 0, \\ 2x - 3y + z = 0, \\ 2x - 2y - z = 0. \end{cases}$

Системы уравнений, данные в примерах 23—26, решите методом Гаусса.

23. $\begin{cases} 2x + y + 2z = 1, \\ 3x - y + 2z = 1, \\ 4x - y + 5z = -3. \end{cases}$ 24. $\begin{cases} x + 2y - z = 2, \\ 2x + y = 3, \\ 3x + y + z = 5. \end{cases}$

25. $\begin{cases} 2x + 4y + z = 1, \\ 3x + 6y - 2z = -2, \\ 2x + 2y - z = -2. \end{cases}$ 26. $\begin{cases} 2y + 3z = 2, \\ x - y + 2z = 1, \\ x + y + 3z = 2. \end{cases}$

Системы, данные в примерах 27 и 28, требуется приближенно решить методом простых итераций, взяв в качестве начального приближения $x_0 = y_0 = 0$ (сделать по пять итераций). Сравнить полученный результат с точным решением.

27. $\begin{cases} x = 1 + 0{,}1x + 0{,}2y, \\ y = -1 + 0{,}2x - 0{,}1y. \end{cases}$ 28. $\begin{cases} x = 2 - 0{,}3x + 0{,}1y, \\ y = 1 + 0{,}1x - 0{,}3y. \end{cases}$

29. Что можно сказать о количестве решений системы трех линейных уравнений с тремя неизвестными, если:

а) $\Delta=\Delta_x=\Delta_y=0, \qquad \Delta_z \neq 0$?

б) $\Delta=\Delta_x=\Delta_y=\Delta_z=0$?

в) $\Delta=0$ и известно, что система — однородная?

30. Что можно сказать про определитель однородной системы трех линейных уравнений с тремя неизвестными, если эта система имеет решение $x=1$, $y=z=0$?

31*. При решении методом простых итераций системы

$$\begin{cases} x_1=\beta_1-\alpha_{11}\cdot x_1-\alpha_{12}\cdot x_2-\ldots-\alpha_{1n}\cdot x_n, \\ x_2=\beta_2-\alpha_{21}\cdot x_1-\alpha_{22}\cdot x_2-\ldots-\alpha_{2n}\cdot x_n, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ x_n=\beta_n-\alpha_{n1}\cdot x_1-\alpha_{n2}\cdot x_2-\ldots-\alpha_{nn}\cdot x_n \end{cases}$$

для каждого из приближенных значений $x_1^{(k)}$, $x_2^{(k)}$, ..., $x_n^{(k)}$, неизвестных, полученных на k-м шаге, справедливы неравенства

$$\begin{gathered} |x_1^*-x_1^{(k)}|\leqslant|x_1^*-x_1^{(0)}|\cdot\delta^k, \\ |x_2^*-x_2^{(k)}|\leqslant|x_2^*-x_2^{(0)}|\cdot\delta^k, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ |x_n^*-x_n^{(k)}|\leqslant|x_n^*-x_n^{(0)}|\cdot\delta^k, \end{gathered}$$

где

$(x_1^*, x_2^*, \ldots, x_n^*)$ — точное решение,

$(x_1^{(0)}, x_2^{(0)}, \ldots, x_n^{(0)})$ — начальное приближение,

а δ есть наибольшее из чисел δ_1, δ_2, ..., δ_n, где

$$\begin{gathered} \delta_1=|\alpha_{11}|+|\alpha_{12}|+\ldots+|\alpha_{1n}|, \\ \delta_2=|\alpha_{21}|+|\alpha_{22}|+\ldots+|\alpha_{2n}|, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ \delta_n=|\alpha_{n1}|+|\alpha_{n2}|+\ldots+|\alpha_{nn}|. \end{gathered}$$

Считая, что при всех i от 1 до n выполнены неравенства

$$|x_i^*-x_i^{(0)}|\leqslant 1,$$

а $\delta=0{,}5$, подсчитать количество итераций, необходимых для получения решения системы с точностью до 0,000001.

ОТВЕТЫ, УКАЗАНИЯ И РЕШЕНИЯ К ГЛАВЕ 6

1. Вычислим определитель системы

$$\Delta=\begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 1 & -3 \end{vmatrix}=3\cdot(-3)-2\cdot 1=-11.$$

Так как $\Delta\neq 0$, то система имеет единственное решение. Для его нахождения вычислим сперва определители Δ_x и Δ_y. Определитель Δ_x получается из Δ заменой в последнем столбца, составленного из коэффициентов при x, на столбец, составленный из свободных членов:

$$\Delta_x=\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 4 & -3 \end{vmatrix}=1\cdot(-3)-2\cdot 4=-11,$$

Аналогично

$$\Delta_y = \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 4 \end{vmatrix} = 3 \cdot 4 - 1 \cdot 1 = 11.$$

Теперь остается применить формулы Крамера

$$x = \frac{\Delta_x}{\Delta} = \frac{-11}{-11} = 1, \qquad y = \frac{\Delta_y}{\Delta} = \frac{11}{-11} = -1.$$

На рис. 6.1 прямая I отвечает первому из уравнений системы, прямая II — второму, а точка из пересечения $M_0(1;\ -1)$ — найденному решению.

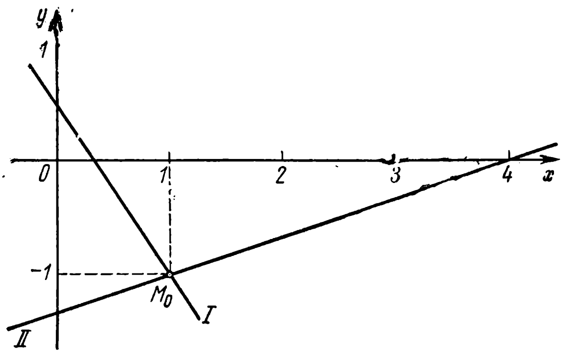


Рис. 6.1.

2. Здесь определитель системы Δ равен нулю:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} = 1 \cdot 4 - 2 \cdot 2 = 0.$$

Вычислим определитель Δ_x:

$$\Delta_x = \begin{vmatrix} 5 & 2 \\ 15 & 4 \end{vmatrix} = 20 - 30 = -10.$$

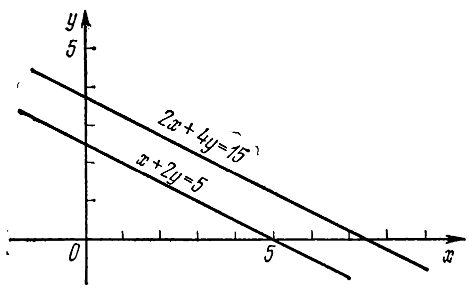


Рис. 6.2.

Так как $\Delta_x \neq 0$, а $\Delta = 0$, то (независимо от того, чему равен Δ_y) мы заключаем, что система не имеет решений. Построив прямые

$x+2y=5$ и $2x+4y=15$ (рис. 6.2), мы видим, что они параллельны между собой и, следовательно, не имеют общих точек.

3. В этом случае непосредственным вычислением определителей Δ, Δ_x и Δ_y мы убеждаемся, что

$$\Delta=\Delta_x=\Delta_y=0.$$

Значит, данная система имеет бесконечное множество решений. Прямые, изображающие первое и второе из уравнений, сливаются друг с другом (рис. 6.3).

4. Здесь мы имеем дело с однородной системой линейных уравнений (свободные члены все равны нулю). Такая система всегда имеет хотя бы одно решение ($x=0$, $y=0$). Вычисляя ее определитель, мы видим, что он равен нулю. Значит (не вычисляя Δ_x и Δ_y), мы можем сказать, что система имеет бесконечное множество решений.

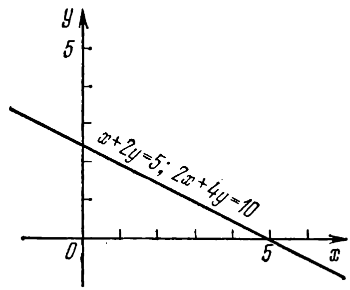


Рис. 6.3.

5. $\Delta=1$; единственное решение: $x=1$, $y=-2$.

6. $\Delta=-65$; система однородная, единственное решение: $x=0$, $y=0$.

7. $\Delta=0$, $\Delta_x=5/3$, $\Delta_y=-5/2$; система не имеет решений (несовместна).

8. $\Delta=\Delta_x=\Delta_y=0$; система имеет бесконечное множество решений.

9. $\Delta=0$; система однородная; значит, она имеет бесконечное множество решений.

10. $\Delta=45$; единственное решение $x=1/3$, $y=2/5$.

11. Первый способ:

$$\begin{vmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 7 & 2 & 5 \\ 9 & 3 & 7 \end{vmatrix} = (-1)^{1+1}\cdot 2\cdot\begin{vmatrix} 2 & 5 \\ 3 & 7 \end{vmatrix} + (-1)^{1+2}\cdot 1\cdot\begin{vmatrix} 7 & 5 \\ 9 & 7 \end{vmatrix} +$$

$$+(-1)^{1+3}\cdot 3\cdot\begin{vmatrix} 7 & 2 \\ 9 & 3 \end{vmatrix} = 2\cdot(14-15)-1\cdot(49-45)+3\cdot(21-18)=3.$$

Второй способ. Добавим к элементам второй строки определителя соответствующие элементы первой, умноженные на (-2):

$$\begin{vmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 7 & 2 & 5 \\ 9 & 3 & 7 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 7-2\cdot 2 & 2-1\cdot 2 & 5-3\cdot 2 \\ 9 & 3 & 7 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 3 & 0 & -1 \\ 9 & 3 & 7 \end{vmatrix}.$$

Теперь к элементам третьей строки получившегося определителя добавим соответствующие элементы опять-таки первой строки, но умноженные уже на (-3):

$$\begin{vmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 3 & 0 & -1 \\ 9 & 3 & 7 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 3 & 0 & -1 \\ 9-2\cdot 3 & 3-1\cdot 3 & 7-3\cdot 3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 3 & 0 & -1 \\ 3 & 0 & -2 \end{vmatrix}.$$

В получившемся определителе второй столбец содержит только один отличный от нуля элемент. Разлагая определитель по элементам этого столбца, получаем

$$\begin{vmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 3 & 0 & -1 \\ 3 & 0 & -2 \end{vmatrix} = (-1)^{1+2}\cdot 1\cdot\begin{vmatrix} 3 & -1 \\ 3 & -2 \end{vmatrix} + (-1)^{2+2}\cdot 0\cdot\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 3 & -2 \end{vmatrix} +$$

$$+ (-1)^{3+2}\cdot 0\cdot\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 3 & -1 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} 3 & -1 \\ 3 & -2 \end{vmatrix} = -(-6+3) = 3.$$

12. $\Delta = -18$.

13. $\Delta = -100$. (Удобно к элементам второго столбца прибавить соответствующие им элементы первого, умноженные на 2.)

14. $\Delta = 0$.

15. Последовательно добавляя: к элементам первой строки элементы второй, умноженные на (—2); к элементам третьей строки — элементы второй, умноженные на (—3); к элементам четвертой строки — элементы второй, умноженные на 2, получим

$$\begin{vmatrix} 2 & 3 & -1 & 2 \\ 1 & -1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & -2 & 2 \\ -2 & 1 & 1 & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 5 & -5 & -4 \\ 1 & -1 & 2 & 3 \\ 0 & 4 & -8 & -7 \\ 0 & -1 & 5 & 8 \end{vmatrix}.$$

Раскладывая полученный определитель по элементам первого столбца, получим

$$\begin{vmatrix} 0 & 5 & -5 & -4 \\ 1 & -1 & 2 & 3 \\ 0 & 4 & -8 & -7 \\ 0 & -1 & 5 & 8 \end{vmatrix} = (-1)^{2+1}\cdot 1\cdot\begin{vmatrix} 5 & -5 & -4 \\ 4 & -8 & -7 \\ -1 & 5 & 8 \end{vmatrix}$$

(остальные слагаемые разложения равны нулю). Теперь для завершения вычислений остается вычислить этот определитель третьего порядка, что мы уже умеем делать. Окончательно мы получим, что данный определитель равен —68.

16. $\Delta = 160$.

17. Вычислим определитель системы:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 5 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 4 \end{vmatrix} = 1\cdot\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 4 \end{vmatrix} = 1\cdot(1\cdot 4 - 2\cdot 0) = 4.$$

Определители Δ_x, Δ_y и Δ_z получаются из определителя системы заменой столбца, составленного из коэффициентов при каком-либо из неизвестных, столбцом, составленным из свободных членов:

$$\Delta_x = \begin{vmatrix} 4 & 1 & 1 \\ 7 & 2 & 3 \\ 8 & 1 & 5 \end{vmatrix}, \quad \Delta_y = \begin{vmatrix} 1 & 4 & 1 \\ 1 & 7 & 3 \\ 1 & 8 & 5 \end{vmatrix}, \quad \Delta_z = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 4 \\ 1 & 2 & 7 \\ 1 & 1 & 8 \end{vmatrix}.$$

Вычисляя эти определители, мы получим

$$\Delta_x = 8, \quad \Delta_y = 4, \quad \Delta_z = 4,$$

откуда

$$x=\frac{\Delta_x}{\Delta}=2, \quad y=\frac{\Delta_y}{\Delta}=1, \quad z=\frac{\Delta_z}{\Delta}=1.$$

18. $x=1{,}5, \quad y=-1, \quad z=0{,}5.$

19. Так как данная система однородная, а ее определитель $\Delta \neq 0$, то (не вычисляя Δ_x, Δ_y и Δ_z) мы можем сказать, что ее единственным решением является нулевое: $x=0$, $y=0$, $z=0$.

20. $x=2/3$, $y=5/3$, $z=-1$.

21. $x=y=z=-1$.

22. $x=y=z=0$.

23. Делим все коэффициенты и свободный член первого из уравнений на коэффициент при неизвестном x в этом уравнении:

$$\begin{cases} x+0{,}5y+z=0{,}5, \\ 3x-y+2z=1, \\ 4x-y+5z=-3. \end{cases}$$

Последовательно вычтем из второго уравнения первое, умноженное на 3, а из третьего — первое, умноженное на 4:

$$\begin{cases} x+0{,}5y+z=0{,}5, \\ -2{,}5y-z=-0{,}5, \\ -3y+z=-5. \end{cases}$$

Теперь разделим второе уравнение на $-2{,}5$:

$$\begin{cases} x+0{,}5y+z=0{,}5, \\ y+0{,}4z=0{,}2, \\ -3y+z=-5 \end{cases}$$

и вычтем из третьего уравнения это только что преобразованное второе, умноженное на -3:

$$\begin{cases} x+0{,}5y+z=0{,}5, \\ y+0{,}4z=0{,}2, \\ 2{,}2z=-4{,}4. \end{cases}$$

Мы получили так называемую «треугольную» систему. Решая ее «снизу вверх», мы получаем

$$z=\frac{-4{,}4}{2{,}2}=-2, \quad y+0{,}4\cdot(-2)=0{,}2,$$

откуда

$$y=1,$$

и, наконец,

$$x+0{,}5\cdot 1+(-2)=0{,}5,$$

откуда

$$x=2.$$

24. $x=y=z=1$.

25. $x=-1$, $y=0{,}5$, $z=1$.

26. $x=y=0{,}25$, $z=0{,}5$.

27. Подставляя в правые части $x=x_0$ и $y=y_0$, получаем

$$\begin{cases} x_1=1+0{,}1\cdot 0+0{,}2\cdot 0=1, \\ y_1=-1+0{,}2\cdot 0-0{,}1\cdot 0=-1. \end{cases}$$

Эти значения x_1 и y_1 вновь подставляем в правые части данной системы, приходя тем самым к значениям x_2 и y_2:

$$\begin{cases} x_2 = 1 + 0{,}1 \cdot 1 + 0{,}2 \cdot (-1) = 0{,}9, \\ y_2 = -1 + 0{,}2 \cdot 1 - 0{,}1 \cdot (-1) = -0{,}7. \end{cases}$$

Продолжая таким же образом, мы получим

$$\begin{cases} x_3 = 1 + 0{,}1 \cdot 0{,}9 + 0{,}2 \cdot (-0{,}7) = 0{,}95, \\ y_3 = -1 + 0{,}2 \cdot 0{,}9 - 0{,}1 \cdot (-0{,}7) = -0{,}75, \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_4 = 1 + 0{,}1 \cdot 0{,}95 + 0{,}2 \cdot (-0{,}75) = 0{,}945, \\ y_4 = -1 + 0{,}2 \cdot 0{,}95 - 0{,}1 \cdot (-0{,}75) = -0{,}735, \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_5 = 1 + 0{,}1 \cdot 0{,}945 + 0{,}2 \cdot (-0{,}735) = 0{,}9475, \\ y_5 = -1 + 0{,}2 \cdot 0{,}945 - 0{,}1 \cdot (-0{,}735) = -0{,}7375. \end{cases}$$

Точное решение этой системы:

$$x = \frac{18}{19} = 0{,}947368\ldots, \quad y = -\frac{14}{19} = -0{,}736842\ldots$$

Следовательно, пятая итерация дает нам значения x_5 и y_5, отличающиеся от точного решения системы меньше чем на 0,001.

28. $x_5 = 1{,}6112$, $y_5 = 0{,}8896$. Точное решение: $x = \frac{45}{28} = 1{,}607142\ldots$, $y = \frac{25}{28} = 0{,}892857\ldots$

29. а) Система не имеет решений. б) Либо система не имеет решений, либо имеет бесконечное множество решений. в) Система имеет бесконечное множество решений.

30. Определитель системы равен нулю (в противном случае она имела бы единственное решение: $x = y = z = 0$).

31. Требуется проделать 20 итераций ($0{,}5^{20} \approx 0{,}9537 \cdot 10^{-6}$).

ГЛАВА 7

МАТРИЦЫ И ИХ ПРИЛОЖЕНИЯ К СИСТЕМАМ ЛИНЕЙНЫХ УРАВНЕНИЙ

§ 7.1. Матрицы и операции над ними

7.1.1. Основные определения. Для описания многих математических конструкций оказывается необходимым использовать большое количество однотипных величин. Так, при записи системы линейных уравнений мы имеем набор из n^2 коэффициентов при неизвестных и набор n свободных членов:

$$\begin{array}{l} a_{11},\ a_{12},\ \ldots,\ a_{1n},\ b_1, \\ a_{21},\ a_{22},\ \ldots,\ a_{2n},\ b_2, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{n1},\ a_{n2},\ \ldots,\ a_{nn},\ b_n. \end{array}$$

Похожим образом могут быть записаны, например, и результаты n последовательных наблюдений, в каждом из которых регистрируются значения величин x, y и z:

$$\begin{array}{l} \text{1-е наблюдение: } x_1,\ y_1,\ z_1, \\ \text{2-е наблюдение: } x_2,\ y_2,\ z_2, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ n\text{-е наблюдение: } x_n,\ y_n,\ z_n. \end{array}$$

Число подобных примеров можно было бы значительно увеличить. Нередко оказывается, что при различного рода математических операциях числовые наборы такого рода преобразуются, подчиняясь некоторым определенным закономерностям, которые одинаково проявляют себя независимо от того, с каким именно разделом математики мы имеем дело. Удобно иметь для всех этих случаев единый математический аппарат. Такой аппарат и дают нам матрицы и правила действий с ними, к изучению которых мы сейчас приступаем.

Определение 7.1. *Матрицей размера $m \times n$ (($m \times n$)-матрицей) называется прямоугольная таблица вида*

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}. \quad (7.1)$$

Числа, составляющие эту таблицу, называются ее элементами.

Если $m = n$ (число строк равно числу столбцов), то матрица называется *квадратной*. Число n называется *порядком* квадратной матрицы $n \times n$.

Элементы a_{11}, a_{22}, ..., a_{nn} образуют *главную диагональ* матрицы.

Если $m = 1$ (количество строк $= 1$), то матрицу называют еще *вектор-строкой*, а если $n = 1$ (число столбцов $= 1$), то — *вектор-столбцом*.

Определение 7.2. *Произведением матрицы A на число λ называется матрица λA, получающаяся из A умножением на λ каждого ее элемента:*

$$\lambda \cdot \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda a_{11} & \lambda a_{12} & \dots & \lambda a_{1n} \\ \lambda a_{21} & \lambda a_{22} & \dots & \lambda a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \lambda a_{m1} & \lambda a_{m2} & \dots & \lambda a_{mn} \end{pmatrix}. \quad (7.2)$$

Суммой двух матриц A и B одинакового размера называется матрица $A + B$, получающаяся из A и B попарным сложением их элементов, стоящих на одинаковых местах:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \dots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \dots & b_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ b_{m1} & b_{m2} & \dots & b_{mn} \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} a_{11}+b_{11} & a_{12}+b_{12} & \dots & a_{1n}+b_{1n} \\ a_{21}+b_{21} & a_{22}+b_{22} & \dots & a_{2n}+b_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1}+b_{m1} & a_{m2}+b_{m2} & \dots & a_{mn}+b_{mn} \end{pmatrix}. \quad (7.3)$$

Разностью двух матриц одинакового размера A и B называется матрица $A - B$ такая, что

$$(A - B) + B = A.$$

Из этого определения следует, что каждый элемент матрицы $A - B$ представляет собой разность соответствующих ему (по занимаемым ими местам) элементов матриц A и B.

Произведением $(m\times n)$-матрицы A на $(n\times l)$-матрицу B (в указанном порядке!) называется $(m\times l)$-матрица $A\cdot B=C$, каждый из элементов которой определяется по формуле

$$c_{ik}=a_{i1}b_{1k}+a_{i2}b_{2k}+\ldots+a_{in}b_{nk}=\sum_{q=1}^{n}a_{iq}b_{qk}\ ^{1)},\qquad(7.4)$$

т. е. представляет собой сумму парных произведений элементов i-й строки первого сомножителя на соответствующие им по порядку следования элементы k-го столбца второго сомножителя (c_{ik} означает элемент, стоящий на пересечении i-й строки и k-го столбца матрицы C).

Замечание 7.1. Важно помнить, что введенная сейчас операция сложения определена только для матриц одинакового размера, а о произведении матриц мы можем говорить только тогда, когда число столбцов первого сомножителя равно числу строк второго.

Пример 7.1. Пусть

$$A=\begin{pmatrix}1&3&-2\\2&0&1\end{pmatrix},\quad B=\begin{pmatrix}4&-2&8\\7&6&0\end{pmatrix},\quad C=\begin{pmatrix}3&2\\-2&1\\5&4\end{pmatrix}.$$

Тогда, например,

$$7\cdot A=\begin{pmatrix}7\cdot1&7\cdot3&7\cdot(-2)\\7\cdot2&7\cdot0&7\cdot1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}7&21&-14\\14&0&7\end{pmatrix},$$

$$A+B=\begin{pmatrix}1+4&3-2&-2+8\\2+7&0+6&1+0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}5&1&6\\9&6&1\end{pmatrix};$$

$$A\cdot C=\begin{pmatrix}1\cdot3+3\cdot(-2)+(-2)\cdot5&1\cdot2+3\cdot1+(-2)\cdot4\\2\cdot3+0\cdot(-2)+1\cdot5&2\cdot2+0\cdot1+1\cdot4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-13&-3\\11&8\end{pmatrix},$$

$$C\cdot A=\begin{pmatrix}3\cdot1+2\cdot2&3\cdot3+2\cdot0&3\cdot(-2)+2\cdot1\\(-2)\cdot1+1\cdot2&(-2)\cdot3+1\cdot0&-2\cdot(-2)+1\cdot1\\5\cdot1+4\cdot2&5\cdot3+4\cdot0&5\cdot(-2)+4\cdot1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}7&9&-4\\0&-6&5\\13&15&-6\end{pmatrix}.$$

Не имеют здесь смысла такие, например, выражения, как $A\cdot B$ или $A+C$.

7.1.2. Свойства операции умножения матриц. Введенные здесь операции мы в основном будем применять к квадратным матрицам и матрицам, представляющим собой вектор-столбцы. Поэтому мы сейчас не будем подробно

---

[1]) Символ $\sum_{q=1}^{n}a_{iq}b_{qk}$ означает сумму значений выражений $a_{iq}b_{qk}$, когда индекс q пробегает все значения от 1 до n.

рассматривать все свойства введенных операций, а ограничимся лишь несколькими замечаниями, касающимися операции умножения.

Прежде всего отметим, что эта операция не обладает свойством коммутативности. Действительно, уже в примере 7.1 мы видели, что $A \cdot C \neq C \cdot A$. Более того, мы можем встретиться и с такой ситуацией, когда произведение матриц, взятых в одном порядке имеет смысл, а взятых в обратном порядке — нет. Так, если A — $(m \times n)$-матрица, а B — $(n \times l)$-матрица, причем $m \neq l$, то $A \cdot B$ имеет смысл, а $B \cdot A$ — нет. Однако свойством ассоциативности операция умножения матриц обладает.

Действительно, пусть A — $(m \times n)$-матрица, B — $(n \times l)$-матрица и C — $(l \times p)$-матрица. Тогда, очевидно, $A \cdot B$ имеет размер $m \times l$, $B \cdot C$ — размер $n \times p$, так что оба произведения $(A \cdot B) \cdot C$ и $A \cdot (B \cdot C)$ имеют смысл и представляют собой $(m \times p)$-матрицы. Условимся обозначать элементы матриц A, B и C через $a_{\mu\nu}$, $b_{\mu\nu}$, $c_{\mu\nu}$ соответственно; элементы $A \cdot B$ — через $d_{\mu\nu}$, $B \cdot C$ — через $f_{\mu\nu}$, $(A \cdot B) \cdot C$ — через $g_{\mu\nu}$ и $A \cdot (B \cdot C)$ — через $h_{\mu\nu}$, где, как обычно, μ — номер строки, а ν — номер столбца, на пересечении которых находится элемент. Тогда, согласно определению произведения матриц,

$$g_{st} = \sum_{j=1}^{p} d_{sj} c_{jt},$$

откуда, учитывая, что

$$d_{sj} = \sum_{i=1}^{n} a_{si} b_{ij},$$

мы получаем

$$g_{st} = \sum_{j=1}^{p} \sum_{i=1}^{n} a_{si} b_{ij} c_{jt}. \tag{7.5}$$

С другой стороны, подставляя в формулу

$$h_{st} = \sum_{i=1}^{n} a_{si} f_{it}$$

выражение для f_{it}

$$f_{it} = \sum_{j=1}^{p} b_{ij} c_{jt},$$

мы приходим к следующему выражению для h_{st}:

$$h_{st}=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{p} a_{si}b_{ij}c_{jt}. \qquad (7.6)$$

Выражения в правых частях формул (7.5) и (7.6) состоят из одних и тех же слагаемых и отличаются друг от друга только порядком суммирования. Следовательно, $g_{st}=h_{st}$, что и означает равенство матриц $A\cdot(B\cdot C)$ и $(A\cdot B)\cdot C$.

7.1.3. Единичная матрица. Сделаем еще одно важное замечание, которое мы в дальнейшем часто будем использовать. Квадратная матрица порядка n, у которой каждый элемент e_{ii}, стоящий на ее главной диагонали, равен 1, а все остальные равны нулю, обладает тем свойством, что для любой $(n\times p)$-матрицы A выполняется равенство

$$E\cdot A=A, \qquad (7.7)$$

а для любой $(m\times n)$-матрицы B — равенство

$$B\cdot E=B. \qquad (7.8)$$

Действительно, согласно определению 7.2, для элемента c_{ik} матрицы $E\cdot A$ мы имеем

$$c_{ik}=\sum_{j=1}^{n} e_{ij}\,a_{jk}. \qquad (7.9)$$

Но, так как $e_{ij}=0$, если $i\neq j$, то в сумме, стоящей в правой части (7.9), все слагаемые, кроме $e_{ii}a_{ik}$, равны нулю. Значит,

$$c_{ik}=e_{ii}\,a_{ik}=a_{ik}.$$

Равенство (7.8) доказывается аналогично. (Проделайте это доказательство в качестве упражнения.)

Такие матрицы

$$E=\begin{pmatrix}1 & 0 & \dots & 0 & 0\\ 0 & 1 & \dots & 0 & 0\\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot\\ 0 & 0 & \dots & 1 & 0\\ 0 & 0 & \dots & 0 & 1\end{pmatrix} \qquad (7.10)$$

называют *единичными* матрицами.

§ 7.2. Квадратные матрицы

7.2.1. Вводные замечания. Пусть n — некоторое натуральное число. Рассмотрим множество M_n всех квадратных матриц порядка n. Очевидно, что для входящих в это множество матриц операции сложения и умножения, введенные определением 7.2, всегда выполнимы. Непосредственно из этого определения следует, что операция сложения обладает свойствами ассоциативности и коммутативности:

$$(A+B)+C=A+(B+C), \tag{7.11}$$

$$A+B=B+A. \tag{7.12}$$

Ассоциативность операции умножения матриц мы доказали в п. 7.1.2:

$$(A\cdot B)\cdot C=A\cdot(B\cdot C). \tag{7.13}$$

Отметим, что даже если мы ограничиваемся в выборе сомножителей множеством квадратных матриц M_n, эта операция умножения не будет коммутативной. Действительно, например,

$$\begin{pmatrix}1 & 0\\ 1 & 1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1 & 1\\ 0 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 1\\ 1 & 2\end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix}1 & 1\\ 0 & 1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1 & 0\\ 1 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2 & 1\\ 1 & 1\end{pmatrix}.$$

Операция сложения обладает свойством дистрибутивности по отношению к операции умножения:

$$\begin{aligned}(A+B)\cdot C&=A\cdot C+B\cdot C,\\ C\cdot(A+B)&=C\cdot A+C\cdot B.\end{aligned} \tag{7.14}$$

(Заметим, что порядок сомножителей здесь существен!) Действительно, обозначая через g_{ik} и h_{ik} соответственно элементы левой и правой частей первого из равенств (7.14) (как обычно, здесь i — номер строки, а k — номер столбца, на пересечении которых находятся эти элементы в своих матрицах), мы, в соответствии с определением 7.2, имеем

$$g_{ik}=\sum_{j=1}^{n}(a_{ij}+b_{ij})\,c_{jk},$$

$$h_{ik}=\sum_{j=1}^{n}a_{ij}c_{jk}+\sum_{j=1}^{n}b_{ij}c_{jk},$$

откуда и видно, что $g_{ik}=h_{ik}$. Аналогично проверяется справедливость второго из равенств (7.14).

7.2.2. Определитель квадратной матрицы. Определение 7.3. *Определителем квадратной матрицы*

$$A=\begin{pmatrix}a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n}\\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n}\\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot\\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn}\end{pmatrix} \tag{7.15}$$

называется определитель $\det A$, *составленный из элементов этой матрицы* (*с сохранением их расположения*):

$$\det A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}. \qquad (7.16)$$

Теорема 7.1. *Определитель произведения двух квадратных матриц равен произведению определителей сомножителей*

$$\det(A \cdot B) = \det A \cdot \det B. \qquad (7.17)$$

Мы проведем здесь доказательство этой теоремы лишь для случая $n = 2$. Пусть

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix}.$$

Тогда

$$A \cdot B = \begin{pmatrix} a_{11}b_{11} + a_{12}b_{21} & a_{11}b_{12} + a_{12}b_{22} \\ a_{21}b_{11} + a_{22}b_{21} & a_{21}b_{12} + a_{22}b_{22} \end{pmatrix}$$

и

$$\begin{aligned} \det(A \cdot B) = {} & (a_{11}b_{11} + a_{12}b_{21})(a_{21}b_{12} + a_{22}b_{22}) - \\ & - (a_{11}b_{12} + a_{12}b_{22})(a_{21}b_{11} + a_{22}b_{21}) = \\ = {} & a_{11}a_{21}b_{11}b_{12} + a_{11}a_{22}b_{11}b_{22} + a_{12}a_{21}b_{12}b_{21} + a_{12}a_{22}b_{21}b_{22} - \\ & - a_{11}a_{21}b_{11}b_{12} - a_{12}a_{21}b_{11}b_{22} - a_{11}a_{22}b_{12}b_{21} - a_{12}a_{22}b_{21}b_{22} = \\ = {} & a_{11}a_{22}b_{11}b_{22} + a_{12}a_{21}b_{12}b_{21} - a_{12}a_{21}b_{11}b_{22} - a_{11}a_{22}b_{12}b_{21}. \end{aligned}$$

К этому же выражению мы приходим, перемножая $\det A$ и $\det B$:

$$\begin{aligned} \det A \cdot \det B = {} & (a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21})(b_{11}b_{22} - b_{12}b_{21}) = \\ = {} & a_{11}a_{22}b_{11}b_{22} + a_{12}a_{21}b_{12}b_{21} - a_{12}a_{21}b_{11}b_{22} - a_{11}a_{22}b_{12}b_{21}. \end{aligned}$$

Справедливость этой теоремы в общем случае мы принимаем без доказательства.

7.2.3. Обратная матрица. Лемма 7.1. *Сумма произведений элементов какой-либо строки определителя на алгебраические дополнения соответствующих элементов другой строки равна нулю* (*аналогично для столбцов*).

Доказательство. Пусть нам дана матрица A (см. (7.15)). Через A_{ik} будем обозначать алгебраическое дополнение элементов a_{ik} (в том смысле, как этот термин был определен в главе 6 (см. определение 6.5)). Пусть также $1 \leqslant i, j \leqslant n$ и $i \neq j$.

Составим новую матрицу A', заменяя в A элементы j-й строки соответствующими им элементами i-й строки (тем самым в A' будут одинаковыми i-я и j-я строки):

$$A' = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{i1} & a_{i2} & \dots & a_{in} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{i1} & a_{i2} & \dots & a_{in} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} \begin{array}{l} \\ \\ \leftarrow i\text{-я строка,} \\ \\ \leftarrow j\text{-я строка.} \\ \\ \\ \end{array}$$

Учитывая, что алгебраические дополнения к элементам j-й строки для матриц A и A' одинаковы, мы можем записать (см. (6.18)), что

$$\det A' = \sum_{p=1}^{n} a_{ip} A_{jp}. \tag{7.18}$$

(Мы разложили $\det A'$ по элементам его j-й строки.) С другой стороны, $\det A' = 0$ ибо этот определитель имеет две одинаковые строки. Отсюда и из (7.18) мы и получаем

$$\sum_{p=1}^{n} a_{ip} A_{jp} = 0, \quad \text{если} \quad i \neq j. \tag{7.19}$$

Лемма 7.1 доказана.

Определение 7.4. *Квадратная матрица B называется обратной для квадратной матрицы A, если*

$$A \cdot B = E \quad и \quad B \cdot A = E, \tag{7.20}$$

где E — единичная матрица.

Замечание. Из этого определения следует, что, если B является обратной для A, то и A будет обратной для B. Однако мы пока еще не знаем, всякая ли матрица имеет себе обратные (и сколько таких обратных матриц может быть).

Теорема 7.2. *Если определитель матрицы A* (см. (7.15)) *отличен от нуля, то матрица*

$$\begin{pmatrix} \frac{A_{11}}{d} & \frac{A_{21}}{d} & \dots & \frac{A_{n1}}{d} \\ \frac{A_{12}}{d} & \frac{A_{22}}{d} & \dots & \frac{A_{n2}}{d} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \frac{A_{1n}}{d} & \frac{A_{2n}}{d} & \dots & \frac{A_{nn}}{d} \end{pmatrix}, \tag{7.21}$$

где A_{ik} — алгебраическое дополнение элемента a_{ik} матрицы A, а $d=\det A$ является обратной для A.

Доказательство. Умножая A на матрицу (7.21), мы получим, согласно определению 7.2, такую матрицу, элементы которой могут быть найдены по формуле

$$c_{ik}=\sum_{p=1}^{n} a_{ip}\frac{A_{kp}}{d}.$$

Если $i \neq k$, то по лемме 7.1 $c_{ik}=0$. Если же $i=k$, то (с учетом формулы (6.18))

$$c_{ik}=\frac{1}{d}\sum_{p=1}^{n} a_{ip}A_{ip}=\frac{1}{d}d=1.$$

Следовательно,

$$c_{ik}=\begin{cases} 0, & \text{если} \quad i \neq k, \\ 1, & \text{если} \quad i=k, \end{cases}$$

но такие элементы как раз и образуют единичную матрицу (7.10). Аналогично проводится доказательство и для того случая, когда матрица (7.21) является первым сомножителем, а A — вторым.

Теорема 7.3. *Если* $\det A \neq 0$, *то существует единственная обратная для A матрица. Если* $\det A=0$, *то матрица A не имеет обратной.*

Доказательство. Пусть сначала $\det A \neq 0$. Во всяком случае одна обратная для A матрица существует. Это следует из теоремы 7.2. Допустим, что мы имеем две матрицы B' и B'', удовлетворяющие условиям (7.20):

$$A\cdot B'=E, \quad B'\cdot A=E, \tag{7.20$'$}$$

$$A\cdot B''=E, \quad B''\cdot A=E. \tag{7.20$''$}$$

Умножим первое из равенств (7.20′) слева на B'':

$$B''\cdot(A\cdot B')=B''\cdot E.$$

Правая часть этого равенства представляет собой матрицу B'' (см. (7.8)), в левой же части мы по другому сгруппируем сомножители:

$$(B''\cdot A)\cdot B'=B''. \tag{7.22}$$

Но $B''\cdot A=E$, а $E\cdot B'=B'$ (см. (7.7)). Поэтому (7.22) дает нам

$$B'=B''.$$

Значит, если $\det A \neq 0$, то A имеет единственную обратную себе матрицу.

Пусть теперь $\det A = 0$. Допустив существование для A обратной матрицы B, мы получили бы по теореме 7.1 что

$$\det A \cdot \det B = \det E.$$

Однако такое равенство невозможно, ибо $\det A \cdot \det B = 0$, а $\det E = 1$. Теорема доказана.

Отметим, что обычно матрицу, обратную к A, обозначают через A^{-1}. Если $\det A = 0$, то матрицу A называют *особенной*, в противном случае — *неособенной*. Используя эти термины, мы можем так переформулировать теорему 7.3. *Всякая неособенная матрица имеет единственную обратную себе матрицу.* Для особенной матрицы обратная не существует.

При практическом нахождении обратной матрицы (при $n > 3$) непосредственное использование выражения (7.21) оказывается обычно неудобным, ибо требует большого количества вычислений. Поэтому чаще всего здесь прибегают к другим методам. Мы здесь ограничимся лишь упоминанием этого обстоятельства.

7.2.4. Решение системы n линейных уравнений с n неизвестными методом обратной матрицы. Покажем теперь, каким образом мы можем использовать матричный аппарат для решения систем линейных уравнений.

Пусть нам дана система

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \ldots + a_{nn}x_n = b_n, \end{cases} \tag{7.23}$$

определитель которой не равен нулю.

Обозначим матрицу, составленную из коэффициентов этой системы, через A, вектор-столбец, составленный из неизвестных, через X, а вектор-столбец свободных членов, через B:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} \end{pmatrix}, \quad X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ x_n \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ b_n \end{pmatrix}.$$

Очевидно, что (см. определение 7.2) произведение $A \cdot X$ представляет собой вектор-столбец

$$\begin{pmatrix} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n \\ \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \ldots + a_{nn}x_n \end{pmatrix}.$$

Поэтому систему (7.23) мы можем заменить равносильным ей матричным уравнением

$$A \cdot X = B. \tag{7.24}$$

(Здесь уже в роли неизвестного выступает матрица X.) Допустим, что мы нашли обратную для A матрицу A^{-1}. Тогда, умножая обе части (7.24) слева на A^{-1}, мы получим

$$A^{-1} \cdot (A \cdot X) = A^{-1} \cdot B. \tag{7.25}$$

Но

$$A^{-1} \cdot (A \cdot X) = (A^{-1} \cdot A) \cdot X = E \cdot X = X,$$

поэтому (7.25) можно переписать так:

$$X = A^{-1} \cdot B. \tag{7.26}$$

Эта формула и дает нам решение (7.24), а тем самым и (7.23).

Пример 7.2. Решим только что рассмотренным методом следующую систему уравнений:

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 = 5, \\ 3x_1 + 2x_2 = 8. \end{cases} \tag{7.27}$$

Матрица коэффициентов здесь будет

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}, \qquad \det A = 2 \cdot 2 - 3 \cdot 1 = 1.$$

Алгебраические дополнения в данном случае представляют собой «определители первого порядка», т. е. просто (взятые с учетом правила выбора знаков) «накрест лежащие» к своим элементам числа матрицы A:

$$A_{11} = 2, \quad A_{12} = -3, \quad A_{21} = -1, \quad A_{22} = 2.$$

Согласно (7.21) составляем матрицу A^{-1}

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -3 & 2 \end{pmatrix}.$$

Переписываем (7.27) в виде

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 8 \end{pmatrix},$$

и умножаем это равенство слева на A^{-1}:

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -3 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 5 \\ 8 \end{pmatrix}. \tag{7.28}$$

Вычисляя произведение матриц, стоящих в правой части (7.28),

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -3 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 5 \\ 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2\cdot 5 + (-1)\cdot 8 \\ -3\cdot 5 + 2\cdot 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix},$$

мы получаем

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix},$$

т. е. $x_1 = 2$, $x_2 = 1$.

Разумеется, для системы (7.23) этот способ кажется слишком громоздким, однако даже для систем с тремя — четырьмя неизвестными такой способ решения оказывается более удобным (при условии, конечно, что в нашем распоряжении имеется A^{-1}).

§ 7.3. Системы m линейных уравнений с n неизвестными

7.3.1. Предварительные примеры. Иногда приходится встречаться с такими системами уравнений, в которых число неизвестных не совпадает с числом уравнений. Рассмотрим сначала несколько примеров таких систем.

Пример 7.3.

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 = 5, \\ 5x_1 + 2x_2 = 12, \\ 3x_1 + x_2 = 7. \end{cases} \tag{7.29}$$

Здесь число неизвестных меньше числа уравнений. Однако нетрудно заметить, что третье из этих уравнений является следствием первых двух (оно представляет собой разность между вторым и первым уравнениями). Поэтому наша система (7.29) оказывается равносильной системе

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 = 5, \\ 5x_1 + 2x_2 = 12. \end{cases} \tag{7.30}$$

Решив эту последнюю систему, мы тем самым получим и решение исходной системы (7.29). Опуская очевидные выкладки, запишем сразу окончательный результат:

$$x_1 = 2, \qquad x_2 = 1. \tag{7.31}$$

Пример 7.4.

$$\begin{cases} 2x_1+x_2=5, \\ 5x_1+2x_2=12, \\ 3x_1+x_2=10. \end{cases} \tag{7.32}$$

Эта система отличается от системы (7.29) лишь правой частью третьего уравнения. Легко понять, что эта система вообще не имеет решений. Действительно, если $x_1=2$, $x_2=1$, то не выполняется третье уравнение, любая же другая пара значений x_1, x_2 не удовлетворяет хотя бы одному из первых двух уравнений.

Пример 7.5.

$$\begin{cases} 3x_1+4x_2+x_3-2x_4=7, \\ 2x_1+3x_2-x_3+\ x_4=5. \end{cases} \tag{7.33}$$

Теперь уже число неизвестных оказалось больше, чем число уравнений. Перенесем члены с x_3 и x_4 в правые части:

$$\begin{cases} 3x_1+4x_2=7-x_3+2x_4, \\ 2x_1+3x_2=5+x_3-x_4. \end{cases} \tag{7.34}$$

Решая (7.34) относительно x_1 и x_2, мы получим

$$\begin{cases} x_1=1-7x_3+10x_4, \\ x_2=1+5x_3-7x_4. \end{cases} \tag{7.35}$$

Придавая неизвестным x_3 и x_4 произвольные значения и вычисляя по формулам (7.35) соответствующие значения x_1 и x_2, мы каждый раз будем получать одно из решений исходной системы (7.33).

Можно было бы разрешить систему (7.33) и относительно другой пары неизвестных, например

$$\begin{cases} x_3=-17+7x_1+10x_2, \\ x_4=-12+5x_1+7x_2, \end{cases} \tag{7.36}$$

или

$$\begin{cases} x_1=\dfrac{12}{5}-\dfrac{7}{5}x_2+\dfrac{1}{5}x_4, \\ x_3=-\dfrac{1}{5}+\dfrac{1}{5}x_2+\dfrac{7}{5}x_4. \end{cases} \tag{7.37}$$

Как формулы (7.35), так и формулы (7.36) и (7.37) определяют множество всевозможных решений исходной системы (7.33). Такое, например, решение, как $x_1=4$, $x_2=-1$, $x_3=1$, $x_4=1$, получается из (7.35), если там положить $x_3=x_4=1$, из (7.36) — при $x_1=4$, $x_2=-1$, из (7.37) — при $x_2=-1$, $x_4=1$.

Пример 7.6.

$$\begin{cases} 3x_1+x_2+x_3+2x_4=7, \\ x_1+2x_2-2x_3+x_4=2, \\ 2x_1-x_2+3x_3+x_4=10. \end{cases} \tag{7.38}$$

Вычитая второе уравнение из первого, мы получим

$$2x_1-x_2+3x_3+x_4=5. \tag{7.39}$$

Сравнивая третье уравнение системы с (7.39), мы видим, что их левые части совпадают, а правые — нет. Следовательно, система (7.38) вообще не имеет решений.

Действительно, любой набор значений x_1, x_2, x_3 и x_4, удовлетворяющий первым двум уравнениям этой системы будет решением и (7.39), а стало быть, не будет удовлетворять третьему из уравнений (7.38).

7.3.2. Ранг матрицы. Условия разрешимости системы линейных уравнений с n неизвестными. Перейдем теперь к рассмотрению вопроса в общем виде.

Определение 7.5. *Пусть A' — квадратная матрица порядка l, получающаяся из $(m\times n)$-матрицы A* (см. (7.1)) *вычеркиванием $q=m-l$ ее строк и $p=n-l$ столбцов $(0\leqslant q<m,\ 0\leqslant p<n)$. Определитель $\det A'$ матрицы A' называется минором порядка l матрицы A.*

Наивысший из порядков отличных от нуля миноров матрицы A называется *рангом* этой матрицы.

Следующая теорема (ее называют обычно *теоремой Кронекера — Капелли*) дает необходимые и достаточные условия разрешимости произвольной системы линейных уравнений.

Теорема 7.4. *Для того чтобы система*

$$\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2+\ldots+a_{1n}x_n=b_1,\\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+\ldots+a_{2n}x_n=b_2,\\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\\ a_{m1}x_1+a_{m2}x_2+\ldots+a_{mn}x_n=b_m \end{cases} \tag{7.40}$$

имела решения, необходимо и достаточно, чтобы ранг r матрицы коэффициентов

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n}\\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n}\\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot\\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn}\end{pmatrix}$$

был равен рангу $\tilde r$ так называемой расширенной матрицы коэффициентов

$$\tilde A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} & b_1\\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} & b_2\\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot\\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} & b_m\end{pmatrix}.$$

Мы не будем здесь доказывать эту теорему, а лишь несколько поясним и дополним ее утверждение.

Пусть $r=\tilde r$, и пусть A' — одна из тех квадратных $(r\times r)$-матриц, получающихся из A вычеркиванием некоторых строк и столбцов, определитель которой $\det A'\neq 0$. Оказывается, что те уравнения системы (7.40), которые соответствуют вычеркнутым строкам, представляют собой следствия остальных, и поэтому их удаление приведет нас к системе, равносильной исходной. Тем неизвестным, которые соответствуют вычеркнутым столбцам, можно придавать произвольные значения, после чего все остальные неизвестные определяются однозначно.

Пример 7.7. Рассмотрим систему

$$\begin{cases} 2x_1+\ x_2+\ x_3-2x_4=3, \\ x_1+\ x_2-2x_3+3x_4=4, \\ 4x_1+3x_2-3x_3+4x_4=11. \end{cases} \tag{7.41}$$

Можно убедиться (например, путем непосредственного вычисления), что все миноры третьего порядка как для матрицы коэффициентов этой системы

$$A=\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & -2 \\ 1 & 1 & -2 & 3 \\ 4 & 3 & -3 & 4 \end{pmatrix},$$

так и для расширенной матрицы коэффициентов

$$\tilde{A}=\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & -2 & 3 \\ 1 & 1 & -2 & 3 & 4 \\ 4 & 3 & -3 & 4 & 11 \end{pmatrix}$$

равны нулю. В то же время определитель матрицы A', образованной первыми двумя строками и первыми двумя столбцами матриц A и $\tilde{A}$, отличен от нуля

$$\det A'=\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}=2\cdot 1-1\cdot 1=1\neq 0.$$

Отсюда мы заключаем, что третье уравнение является следствием первых двух, и поэтому может быть исключено из системы. После такого исключения мы получим систему, равносильную исходной:

$$\begin{cases} 2x_1+x_2+\ x_3-2x_4=3, \\ x_1+x_2-2x_3+3x_4=4. \end{cases} \tag{7.42}$$

Столбцы, отвечающие неизвестным x_3 и x_4, не участвуют в образовании матрицы A'. Перенесем члены, содержащие эти неизвестные, в правые части уравнений:

$$\begin{cases} 2x_1+x_2=3-x_3+2x_4, \\ x_1+x_2=4+2x_3-3x_4. \end{cases} \tag{7.43}$$

Какие бы значения мы ни придали теперь неизвестным x_3 и x_4, получающаяся при этом из (7.43) система двух уравнений с двумя неизвестными x_1 и x_2 обязательно будет иметь и притом единственное (свое для каждой пары значений x_3 и x_4) решение, так как ее определитель $\det A'\neq 0$. Ее можно решить и в общем виде. Воспользуемся для этого формулами Крамера, вычислив определитель системы Δ и определители Δ_{x_1} и Δ_{x_2} неизвестных x_1 и x_2

$$\Delta = \det A' = 1,$$

$$\Delta_{x_1} = \begin{vmatrix} 3 - x_3 + 2x_4 & 1 \\ 4 + 2x_3 - 3x_4 & 1 \end{vmatrix} = -1 - 3x_3 + 5x_4,$$

$$\Delta_{x_2} = \begin{vmatrix} 2 & 3 - x_3 + 2x_4 \\ 1 & 4 + 2x_3 - 3x_4 \end{vmatrix} = 5 + 5x_3 - 8x_4,$$

откуда

$$\begin{aligned} x_1 &= \frac{\Delta_{x_1}}{\Delta} = -1 - 3x_3 + 5x_4, \\ x_2 &= \frac{\Delta_{x_2}}{\Delta} = 5 + 5x_3 - 8x_4. \end{aligned} \tag{7.44}$$

Формулы (7.44) представляют собой один из возможных вариантов записи множества решений исходной системы (7.41). Другие варианты можно получить иными способами, выбирая отличный от нуля минор матрицы A.

Очевидно, что, заменив свободный член третьего уравнения системы (7.41) другим числом (например, приняв его равным 1), мы получим систему, не имеющую решений вообще (как говорят, несовместную систему). Так как от такой замены матрица A, тем самым и ее ранг, не изменяется, то остается заключить, что при этом должен измениться ранг матрицы $\tilde{A}$. И действительно, вычеркивая из «исправленной» $\tilde{A}$ третий и четвертый столбцы, мы получим отличный от нуля минор третьего порядка

$$\begin{vmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & 4 \\ 4 & 3 & 1 \end{vmatrix} = -10.$$

При сколько-нибудь большом числе уравнений и неизвестных такой способ исследования и решения системы, как использованный в примере 7.7, оказывается слишком громоздким. Здесь мы ограничимся лишь указанием на существование других способов, более «экономных» с точки зрения объема вычислений. Применяемые здесь преобразования сходны с теми, которые производятся при решении методом Гаусса систем, в которых число неизвестных равно числу уравнений (см. главу 6).

ВОПРОСЫ ДЛЯ ПОВТОРЕНИЯ К ГЛАВЕ 7

1. Что такое $m \times n$-матрица? Что называется вектор-строкой? вектор-столбцом?

2. Как определяется произведение матрицы на число? Сумма двух матриц? Всякие ли две матрицы можно сложить?

3. Как определяется произведение двух матриц? Каким условиям должны удовлетворять числа m, n, p и q, чтобы произведение $A \cdot B$ $m \times n$-матрицы A на $p \times q$-матрицу B имело смысл? Какой размер будет иметь в этом случае матрица $A \cdot B$?

4. Обладает ли операция умножения матриц свойством коммутативности? Свойством ассоциативности?

5. Что такое единичная матрица? Какими свойствами она обладает?

6. Какие матрицы называются квадратными? Всегда ли выполнимы операции сложения и умножения для квадратных матриц одного и того же порядка? Перечислите основные свойства этих операций.

7. Что называется определителем квадратной матрицы? Как можно вычислить определитель произведения двух матриц, зная величины определителей каждого из сомножителей?

8. Что такое обратная матрица? Всякая ли матрица имеет обратную? Сколько различных обратных матриц может существовать у одной и той же матрицы?

9. Как записывается в матричной форме система n линейных уравнений с n неизвестными? Как ее можно решить, используя матрицу, обратную к матрице коэффициентов? Всегда ли такое решение возможно?

10. Что такое ранг матрицы? Поясните свой ответ примерами.

11. Сформулируйте условия разрешимости системы m линейных уравнений с n неизвестными.

УПРАЖНЕНИЯ К ГЛАВЕ 7

В примерах 1—4 даются матрицы A, B и C. Требуется определить, какие из выражений $A \cdot B$, $B \cdot A$, $A \cdot C$, $C \cdot A$, $B \cdot C$ и $C \cdot B$ имеют смысл, и вычислить их.

1. $A=\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 2 & -4 \\ -1 & 5 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 4 & 2 \end{pmatrix}$, $C=\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ -2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$.

2. $A=\begin{pmatrix} 3 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 2 \\ 2 & -1 & 1 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$, $C=(5 \quad 1 \quad -1)$.

3. $A=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}$, $C=\begin{pmatrix} 1 \\ 10 \\ 100 \end{pmatrix}$.

4. $A=\begin{pmatrix} 2 & 4 & 1 & -2 \\ 1 & -2 & 3 & 1 \end{pmatrix}$, $B=(3 \quad 5)$, $C=\begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix}$.

Для матриц, данных в примерах 5 и 6, найдите им обратные.

5. $A=\begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 7 & 2 & 5 \\ 9 & 3 & 7 \end{pmatrix}$. 6. $A=\begin{pmatrix} 5 & 4 & -2 \\ 1 & -2 & 0 \\ 3 & -5 & 7 \end{pmatrix}$.

Системы, данные в упражнениях 7 и 8, нужно решить, используя обратную матрицу.

7. $\begin{cases} x_1+x_2+x_3=4, \\ x_1+2x_2+3x_3=7, \\ x_1+x_2+5x_3=8. \end{cases}$ 8. $\begin{cases} 2x_1-x_2+x_3=3, \\ x_1+2x_2-x_3=2, \\ -x_1+x_2+x_3=4. \end{cases}$

Для каждой из систем уравнений, данных в упражнениях 9—16, требуется найти ранг матрицы коэффициентов и ранг расширенной матрицы. Указать, какие из этих систем имеют решения, и найти эти решения.

9. $\begin{cases} x_1 - 3x_2 + 2x_3 = 1, \\ 2x_1 \qquad + 3x_3 = 11. \end{cases}$

10. $\begin{cases} x_1 + x_2 - 2x_3 = 1, \\ 5x_1 + 5x_2 - 10x_3 = 5. \end{cases}$

11. $\begin{cases} x_1 + x_2 - 2x_3 = 1, \\ 5x_1 + 5x_2 - 10x_3 = 10. \end{cases}$

12. $\begin{cases} 2x_1 - x_2 + 5x_3 = 1, \\ 4x_1 - 2x_2 + 10x_3 = 2. \end{cases}$

13. $\begin{cases} 3x_1 - x_2 = 12, \\ x_1 - 4x_2 = -7, \\ 2x_1 + 3x_2 = 19. \end{cases}$

14. $\begin{cases} x_1 + 2x_2 = 3, \\ 2x_1 - x_2 = 1, \\ x_1 - 8x_2 = 5. \end{cases}$

15. $\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 4, \\ x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 7, \\ x_1 + 3x_2 + 5x_3 = 8. \end{cases}$

16. $\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 4, \\ x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 7, \\ x_1 + 3x_2 + 5x_3 = 10. \end{cases}$

ОТВЕТЫ, УКАЗАНИЯ И РЕШЕНИЯ К ГЛАВЕ 7

1. Для того чтобы выражение типа $A \cdot B$ имело смысл, нужно, чтобы число столбцов первого сомножителя совпадало с числом строк второго. Поэтому выражения $B \cdot A$ и $C \cdot B$ лишены смысла. $A \cdot B$ представляет собой (3×2)-матрицу:

$$\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 2 & -4 \\ -1 & 5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 4 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3\cdot(-2)+1\cdot 4 & 3\cdot 1+1\cdot 2 \\ 2\cdot(-2)+(-4)\cdot 4 & 2\cdot 1+(-4)\cdot 2 \\ -1\cdot(-2)+5\cdot 4 & (-1)\cdot 1+5\cdot 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 5 \\ -20 & -6 \\ 22 & 9 \end{pmatrix}.$$

Аналогично вычисляем $A \cdot C$, $C \cdot A$ и $B \cdot C$:

$$A \cdot C = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 9 \\ 10 & -6 & -8 \\ -11 & 6 & 13 \end{pmatrix}, \quad C \cdot A = \begin{pmatrix} -1 & 15 \\ -7 & 9 \end{pmatrix},$$

$$B \cdot C = \begin{pmatrix} -4 & 3 & -1 \\ 0 & -2 & 14 \end{pmatrix}.$$

2. $$A \cdot B = \begin{pmatrix} -3 \\ 9 \\ -2 \end{pmatrix}, \quad C \cdot A = (12 \quad 2 \quad 6),$$

$$B \cdot C = \begin{pmatrix} -10 & -2 & 2 \\ 5 & 1 & -1 \\ 15 & 3 & -3 \end{pmatrix}, \quad C \cdot B = (-12).$$

$B \cdot A$ и $A \cdot C$ не имеют смысла.

3. $$A \cdot B = \begin{pmatrix} 7 & 8 & 9 \\ 4 & 5 & 6 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}, \quad B \cdot A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 6 & 5 & 4 \\ 9 & 8 & 7 \end{pmatrix},$$

$$A \cdot C = \begin{pmatrix} 100 \\ 10 \\ 1 \end{pmatrix}, \qquad B \cdot C = \begin{pmatrix} 321 \\ 654 \\ 987 \end{pmatrix}.$$

4. $B \cdot A = (11 \quad 2 \quad 18 \quad -1)$, $A \cdot C = \begin{pmatrix} -12 \\ 14 \end{pmatrix}$

$$C \cdot B = \begin{pmatrix} -9 & -15 \\ 0 & 0 \\ 12 & 20 \\ 15 & 25 \end{pmatrix}.$$

5. Вычислим сначала (выкладки опущены)

$$\det A = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 7 & 2 & 5 \\ 9 & 3 & 7 \end{vmatrix} = 3.$$

Далее для каждого из элементов матрицы A вычисляем его алгебраическое дополнение:

$$A_{11} = (-1)^{1+1} \cdot \begin{vmatrix} 2 & 5 \\ 3 & 7 \end{vmatrix} = -1, \quad A_{12} = (-1)^{1+2} \cdot \begin{vmatrix} 7 & 5 \\ 9 & 7 \end{vmatrix} = -4,$$

$$A_{13} = (-1)^{1+3} \cdot \begin{vmatrix} 7 & 2 \\ 9 & 3 \end{vmatrix} = 3, \quad A_{21} = (-1)^{2+1} \cdot \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 7 \end{vmatrix} = 2, \text{ и т. д.},$$

после чего составляем обратную к A матрицу A^{-1} по формуле (7.21)

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{A_{11}}{d} & \frac{A_{21}}{d} & \frac{A_{31}}{d} \\ \frac{A_{12}}{d} & \frac{A_{22}}{d} & \frac{A_{32}}{d} \\ \frac{A_{13}}{d} & \frac{A_{23}}{d} & \frac{A_{33}}{d} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} \\ -\frac{4}{3} & -\frac{13}{3} & \frac{11}{3} \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

(В справедливости результата можно убедиться, умножая A на A^{-1}. При этом должна получиться единичная матрица размера 3×3.)

6. $A^{-1} = \begin{pmatrix} 0,14 & 0,18 & 0,04 \\ 0,07 & -0,41 & 0,02 \\ -0,01 & -0,37 & 0,14 \end{pmatrix}.$

7. Запишем данную систему в матричной форме

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 7 \\ 8 \end{pmatrix}. \qquad (7.45)$$

Найдем матрицу A^{-1}, обратную матрице коэффициентов A (выкладки опущены):

$$A^{-1} = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 7 & -4 & 1 \\ -2 & 4 & -2 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

и умножим обе части (7.45) на A^{-1} слева:

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 7 & -4 & 1 \\ -2 & 4 & -2 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ 7 \\ 8 \end{pmatrix}.$$

Теперь для получения решения нам остается только выполнить умножение в правой части последнего равенства:

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Этот же результат, конечно, можно записать и в «скалярной форме»: $x_1=2$, $x_2=x_3=1$.

8. $A^{-1}=\frac{1}{9}\begin{pmatrix} 3 & 2 & -1 \\ 0 & 3 & 3 \\ 3 & -1 & 5 \end{pmatrix}$, $X=\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$.

9. Ранг r матрицы коэффициентов A

$$\begin{pmatrix} 1 & -3 & 2 \\ 2 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

равен, как легко видеть, числу 2; достаточно взять ее минор, получающийся из A вычеркиванием третьего его столбца

$$\begin{vmatrix} 1 & -3 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} = 6 \neq 0.$$

Здесь мы сразу можем заключить, что и ранг $\tilde{r}$ расширенной матрицы $\tilde{A}$

$$\begin{pmatrix} 1 & -3 & 2 & 1 \\ 2 & 0 & 3 & 11 \end{pmatrix}$$

тоже равен двум. Это видно и непосредственно, но можно было бы прийти к такому заключению, заметив, что всегда

$$r \leqslant \tilde{r} \leqslant \min(m, n),$$

где m и n — число соответственно строк и столбцов матрицы $\tilde{A}$. У нас $r=2$ и $\min(m; n)=2$, откуда и следует, что $\tilde{r}=2$.

Для получения решения нашей системы оставим в левых частях ее уравнений члены с теми неизвестными, которым отвечали столбцы выбранного нами определителя, т. е. с неизвестными x_1 и x_2

$$\begin{cases} x_1-3x_2 = 1-2x_3, \\ 2x_1 \qquad\quad = 11-3x_3. \end{cases}$$

Решая эту систему относительно x_1 и x_2, мы и получим

$$\begin{cases} x_1=\dfrac{11}{2}-\dfrac{3}{2}x_3, \\ x_2=\dfrac{3}{2}+\dfrac{1}{6}x_3. \end{cases}$$

Если бы мы остановили свой выбор на другом, отличном от нуля миноре второго порядка

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{vmatrix},$$

то, преобразовав предварительно исходную систему к виду

$$\begin{cases} x_1+2x_3=1+3x_2, \\ 2x_1+3x_3=11, \end{cases}$$

мы получили бы иную запись для множества ее решений

$$\begin{cases} x_1= \quad 19-9x_2 \\ x_3=-9+6x_2. \end{cases}$$

10. Здесь $r=\tilde{r}=1$ (ибо все миноры второго порядка равны нулю). Остановим свой выбор на отличном от нуля миноре первого порядка, отвечающем первой строке и первому столбцу матриц A и $\tilde{A}$; мы отбрасываем второе из уравнений системы, так как его коэффициенты не участвуют в образовании этого минора. Исходная система будет эквивалентна оставшемуся уравнению

$$x_1+x_2-2x_3=1.$$

Перенося члены с x_2 и x_3 в правую часть, мы получаем следующую формулу для множества решений данной системы:

$$x_1=1-x_2+2x_3.$$

11. $r=1$, $\tilde{r}=2$. Система не имеет решений.

12. $r=\tilde{r}=1$. Бесконечное множество решений может быть задано любой из формул:

а) $x_1=0{,}5+0{,}5x_2-2{,}5x_3$,

б) $x_2=-1+2x_1+5x_3$,

в) $x_3=0{,}2-0{,}4x_1+0{,}2x_2$.

13. $r=\tilde{r}=2$. Единственное решение $x_1=5$, $x_2=3$.

14. $r=2$, $\tilde{r}=3$. Система не имеет решений.

15. $r=2$, $\tilde{r}=3$. Система не имеет решений.

16. $r=\tilde{r}=2$. Один из возможных способов записи бесконечного множества решений:

$$\begin{cases} x_1=1+x_3, \\ x_2=3-2x_3. \end{cases}$$

ГЛАВА 8

ПРЯМЫЕ И ПЛОСКОСТИ В ПРОСТРАНСТВЕ

§ 8.1. Понятие о логической структуре евклидовой геометрии

8.1.1. Аксиоматический метод построения геометрии; основные аксиомы стереометрии. В этой главе мы будем рассматривать некоторые объекты, которые мы будем называть *точкой*, *прямой* и *плоскостью*, и соотношения между ними.

Термины «точка», «прямая» и «плоскость» указывают на то, что источниками образования этих понятий были пространственные формы реальных тел. Так понятие точки возникло в результате абстракции от размеров тела. Именно, если при изучении того или иного вопроса размеры тела не играют роли, т. е. ими можно пренебречь, и если условие задачи позволяет нам абстрагироваться от физических свойств данного тела (массы, температуры и т. д.), то мы и придем к рассматриваемому в геометрии понятию точки. Понятие прямой возникает в результате абстракции от физических свойств предметов определенной пространственной формы типа туго натянутой нити, светового луча и т. д. Аналогично источником понятия плоскости служат пространственные формы предметов типа поверхности стола, туго натянутого листа бумаги. При этом отмечается, что плоскость безгранична. Условно плоскость изображают на чертеже в виде параллелограмма и обозначают одной буквой, например плоскость Z (рис. 8.1).

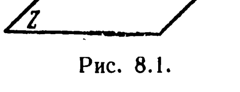


Рис. 8.1.

В природе тела, пространственные формы которых привели к образованию геометрических объектов, находятся в определенных отношениях. Отвлекаясь от физической природы этих отношений, рассмотрим только отношения между пространственными формами тел, при этом нам необходимо выделить основные свойства введенных объектов таким образом, чтобы все другие соотношения являлись бы следствием этих свойств.

Точка, прямая и плоскость как геометрические понятия характеризуются следующими свойствами.

I.1. *Какова бы ни была прямая, существуют точки, принадлежащие этой прямой, и точки, не принадлежащие ей.*

I.2. *Каковы бы ни были две точки, существует и притом единственная прямая, проходящая через эти точки.*

II.1. *Из трех точек на прямой одна и только одна лежит между двумя другими.*

II.2. *Точка, принадлежащая прямой, разбивает прямую на две полупрямые. Точки одной полупрямой не разделяются точкой, производящей деление. Точки разных полупрямых разделяются этой точкой.*

II.3. *Прямая, принадлежащая плоскости, разбивает плоскость на полуплоскости. Если концы какого-нибудь отрезка принадлежат одной полуплоскости, то отрезок не пересекается с прямой. Если концы отрезка принадлежат разным полуплоскостям, то отрезок пересекается с прямой.*

III.1. *Какова бы ни была плоскость, существуют точки, принадлежащие этой плоскости, и точки, не принадлежащие ей.*

III.2. *Если две различные плоскости имеют общую точку, то они пересекаются по прямой.*

III.3. *Через три точки, не лежащие на прямой, можно провести плоскость и притом только одну.*

Перечисленные свойства являются отправными свойствами в доказательстве других свойств. Эти свойства не доказываются и называются *аксиомами*. Любое утверждение, которое в конечном итоге может быть получено логическим выводом из аксиом, называется *теоремой*. Выбор предложений-аксиом в широкой степени произволен, однако вся система аксиом должна быть, во-первых, *совместной* (*непротиворечивой*), т. е. никакие две теоремы, которые из них могут быть выведены, не должны содержать взаимных противоречий, во-вторых, *полной* в том смысле, что всякая теорема, имеющая место в рассматриваемой области, может быть выведена из этих аксиом, и, в-третьих, желательно, чтобы система аксиом была *неза-*

висимой, т. е. ни одна из них не была логическим следствием остальных. Совокупность понятий и теорем, базирующихся на данной системе аксиом, принято называть *теорией*, построенной на данной системе аксиом. Метод построения таких теорий называется *аксиоматическим*.

Множество всех точек, прямых и плоскостей, удовлетворяющих системе аксиом I, II и III, будем называть *евклидовым пространством*.

Впервые аксиоматическое построение геометрии было предложено Евклидом (365—ок. 300 гг. до н. э.) в его знаменитом труде «Начала». В течение двух тысяч лет с момента появления «Начал» оно было единственным руководством для изучающих геометрию. Общая тенденция к строгости в математике, которой отмечены работы второй половины девятнадцатого века и ставшая очевидной, независимость системы аксиом Евклида, т. е. возможность доказать одни аксиомы, используя другие, и ее неполнота поставили перед геометрами задачу полного исследования системы аксиом. Исследование аксиоматики евклидовой геометрии было завершено Д. Гильбертом (1899 г.). Им была построена система аксиом геометрии и дан исчерпывающий анализ их взаимной независимости, их непротиворечивости и полноты. Однако свойства основных понятий, введенные аксиоматически Евклидом, сохраняются. Поэтому сама геометрия, т. е. теория, построенная на новой системе аксиом, носит название *евклидовой геометрии*.

Отметим, что возможны и другие аксиоматические методы изучения объектов указанного вида. Так при изучении планиметрии, читатель, вероятно, ознакомился с доказательством теоремы Пифагора, основанным на аксиомах плоскости. С другой стороны, можно показать, что если на плоскости выполнена теорема Пифагора, то, как следствие из нее могут быть получены утверждения, принимаемые нами за аксиомы. Теорема Пифагора, как мы увидим в дальнейшем, дает нам возможность вычислить расстояние между любыми двумя точками плоскости. Таким образом, мы получим множество (точек и прямых) со введенной на нем метрикой

$$|AB| = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2},$$

где x, y—координаты точек A и B. Как уже говорилось ранее, множество с заданной на нем метрикой определяет пространство, поэтому, рассматривая множество всех точек, прямых и плоскостей, мы можем ввести такую метрику, чтобы все аксиомы евклидовой геометрии в данном пространстве имели место. Можно показать, что такой метрикой является

$$|AB| = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2 + (z_B - z_A)^2},$$

где x, y и z — координаты точек A и B. Такое пространство также является евклидовым (см. определение), однако метод его построения отличен от вышеуказанного.

В настоящей главе мы, используя систему аксиом I, II, III, рассмотрим несколько наиболее существенных положений евклидовой геометрии в пространстве — стереометрии. Другими словами: *стереометрия* — раздел геометрии, изучающий пространственные тела и фигуры, а также взаимное положение линий, плоскостей, поверхностей и тел в пространстве.

Все положения, доказанные в разделе планиметрии на основе системы аксиом I, II, справедливы и в пространстве, поэтому мы не будем их рассматривать снова, считая эти положения и соответственно их доказательства известными.

Геометрическую фигуру будем называть *пространственной*, если не все ее точки лежат в одной плоскости. Примером пространственной фигуры может служить геометрическое тело — часть пространства, занимаемая предметом. Геометрическое тело отделяется от окружающего его пространства поверхностью.

В заключение приведем несколько непосредственных следствий аксиом стереометрии, доказательство которых не представляет большого труда.

8.1.2. Некоторые следствия основных аксиом. Теорема 8.1. *Через прямую и не лежащую на ней точку можно провести плоскость и притом только одну.*

Теорема 8.2. *Если две точки прямой принадлежат плоскости, то вся прямая принадлежит этой плоскости.*

Следствие 8.1. *Плоскость и не лежащая на ней прямая либо не пересекаются, либо пересекаются в одной точке.*

Теорема 8.3. *Если две различные прямые имеют общую точку, то через них можно провести плоскость и притом только одну.*

Следствие 8.2. *Через две параллельные прямые можно провести плоскость и притом только одну.*

§ 8.2. Параллельность прямых и плоскостей

8.2.1. Взаимное положение прямых и плоскостей. Две прямые в пространстве могут иметь следующее расположение: две прямые лежат в одной плоскости, при этом они могут иметь общую точку, т. е. *пересекаться*, или не иметь общих точек, тогда их называют *параллельными*. Две прямые не лежат в одной плоскости и, следовательно, не имеют общих точек, тогда их называют *скрещивающимися*.

Углом между двумя прямыми в случае, если эти прямые не являются скрещивающимися, мы будем называть угол между этими же прямыми в плоскости, проведенной через данные прямые. *Углом между двумя скрещивающимися прямыми* принято называть наименьший угол, образованный двумя лучами, выходящими из одной точки и параллельными этим скрещивающимся прямым (на рис. 8.2 угол φ есть угол между скрещивающимися прямыми a и b).

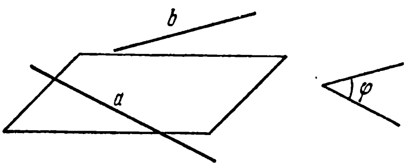


Рис. 8.2.

Расстояние от точки до прямой измеряется длиной перпендикуляра, опущенного из точки на прямую.

Расстояние между двумя точками в пространстве мы, как и в планиметрии, будем измерять длиной отрезка прямой, соединяющей эти точки.

Прямая линия и плоскость в пространстве могут быть расположены следующим образом: прямая и плоскость имеют не менее двух общих точек, тогда (см. теорему 8.2) прямая принадлежит плоскости; прямая и плоскость имеют только одну общую точку, тогда прямая пересекает плоскость (точка пересечения прямой с плоскостью называется *следом* этой прямой на плоскости); прямая не имеет общих точек с плоскостью, т. е. прямая параллельна плоскости.

Две плоскости в пространстве могут быть расположены следующими способами: две плоскости имеют одну общую точку или две общие точки, или любое количество точек, лежащих на одной прямой; тогда они *пересекаются* по прямой (см. аксиому III.2); две плоскости не имеют ни одной общей точки, в таком случае говорят, что они *па-*

раллельны; две плоскости имеют не менее трех общих точек, не лежащих на одной прямой; тогда (см. аксиому III.3) эти плоскости *совпадают*.

Из приведенных рассуждений мы можем выделить три утверждения, которые будем принимать за определение параллельности рассматриваемых объектов.

1. *Две прямые a и b в пространстве называются параллельными, если они лежат в одной плоскости и не пересекаются* ($a \parallel b$).

2. *Прямая a и плоскость Z называются параллельными, если они не пересекаются* ($a \parallel Z$).

3. *Две плоскости Z и Q называются параллельными, если они не пересекаются* ($Z \parallel Q$).

8.2.2. Признаки параллельности прямых и плоскостей. Докажем несколько теорем.

Теорема 8.4. *Плоскость и не лежащая в ней прямая параллельны, если в данной плоскости найдется прямая, параллельная этой прямой.*

Доказательство. Пусть Z — плоскость, a_1 — прямая, лежащая в Z и параллельная a, лежащей вне плоскости Z (рис. 8.3). Проведем плоскость Z_1 через прямые a и a_1. Плоскости Z_1 и Z пересекаются по прямой a_1. Если бы прямая a пересекала плоскость Z, то точка пересечения принадлежала бы прямой a_1. Но это невозможно, так как прямые параллельны. Итак, прямая a не пересекает плоскость Z, а значит, параллельна плоскости Z. Теорема доказана.

Теорема 8.5. *Если плоскость проходит через прямую, параллельную другой плоскости, и пересекает эту плоскость, то линия пересечения плоскостей параллельна данной прямой.*

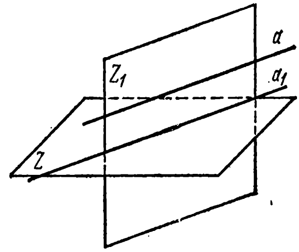


Рис. 8.3.

Доказательство. Пусть плоскость Z_1 проходит через прямую a, причем $a \parallel Z$. Надо показать, что прямая a_1 (см. рис. 8.3.) пересечения плоскостей Z и Z_1 параллельна прямой a. Действительно, если бы прямая a пересекалась бы с прямой a_1, то она пересекала бы плоскость Z, что невозможно, так как $a \parallel Z$. Следовательно, прямая a_1 находится в одной плоскости с прямой a, не пересекаясь с ней, а поэтому $a_1 \parallel a$. Теорема доказана.

Следствие 8.3. *Если прямая параллельна каждой из двух пересекающихся плоскостей, то она параллельна прямой их пересечения.*

Рассмотрим далее несколько теорем, посвященных вопросам параллельности плоскостей.

Теорема 8.6. *Если две пересекающиеся прямые, лежащие на одной плоскости, соответственно параллельны двум прямым, лежащим на другой плоскости, то эти плоскости параллельны.*

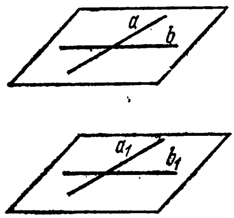


Рис. 8.4.

Доказательство. Пусть $a, b \subset Z$ (прямые a и b принадлежат плоскости Z) и $a_1, b_1 \in Z_1$, причем $a \parallel a_1$, $b \parallel b_1$ (рис. 8.4); надо показать, что $Z \parallel Z_1$. Действительно, так как прямые a и b соответственно параллельны прямым a_1 и b_1, лежащим в плоскости Z_1, то по теореме 1 этого пункта $a \parallel Z_1$ и $b \parallel Z_1$. Если бы плоскости Z и Z_1 имели общую точку, то они пересекались бы (см. аксиому III.2) по прямой MN, проходящей через эту точку. В силу теоремы 8.4 оказалось бы, что $a \parallel MN$ и $b \parallel MN$, т. е. через некоторую точку на плоскости Z проходили бы две прямые, параллельные MN, что невозможно. Следовательно, плоскости Z и Z_1 не имеют общих точек, т. е. $Z \parallel Z_1$. Теорема доказана.

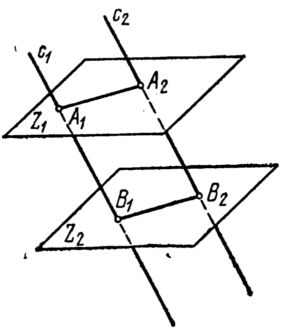


Рис. 8.5.

Легко показать справедливость следующей теоремы.

Теорема 8.7. *Через точку вне плоскости можно провести и притом только одну параллельную ей плоскость.*

Рассмотрим еще одну теорему параллельности прямых и плоскостей.

Теорема 8.8. *Отрезки параллельных прямых между параллельными плоскостями равны.*

Доказательство. Пусть $Z_1 \parallel Z_2$, $c_1 \parallel c_2$ (рис. 8.5). Точки A_1, A_2, B_1, B_2—следы прямых c_1 и c_2 на плоскостях Z_1 и Z_2. Надо показать, что $A_1B_1 = A_2B_2$.

Рассмотрим четырехугольник $A_1A_2B_2B_1$. Стороны его A_1A_2 и B_1B_2 лежат в параллельных плоскостях, следовательно, не имеют общих точек. Но они не скрещиваются, так как лежат в одной плоскости, проведенной через параллельные (по условию) прямые A_1B_1 и A_2B_2. Значит, $A_1A_2 \parallel B_1B_2$. Таким образом, стороны четырехугольника попарно параллельны, следовательно, четырехугольник — параллелограмм. Отрезки A_1B_1 и A_2B_2, как противоположные стороны параллелограмма, равны. Теорема доказана.

§ 8.3. Перпендикулярность прямых и плоскостей

8.3.1. Признаки перпендикулярности прямой и плоскости. Обращаясь снова к п. 8.2.1, отметим, что при пересечении прямых, прямых и плоскостей, плоскостей имеет смысл выделить важнейший частный случай: случай перпендикулярности объектов, а также необходимо установить, что мы будем понимать под углом между прямой и плоскостью, двумя плоскостями. К изучению этих вопросов мы сейчас приступим.

Прямая называется *перпендикулярной* к плоскости, если она перпендикулярна к любой прямой, лежащей в этой плоскости.

Теорема 8.9 (признак перпендикулярности прямой и плоскости). *Если прямая перпендикулярна к двум пересекающимся прямым, лежащим в некоторой плоскости, то она перпендикулярна к любой прямой, лежащей в этой плоскости, т. е. эта прямая перпендикулярна к данной плоскости.*

Доказательство. Пусть прямые m, n, l принадлежат плоскости Z ($m, n, l \in Z$) и $p \perp m$, $p \perp n$. Надо доказать, что $p \perp l$, где l — произвольная прямая, принадлежащая плоскости Z (рис. 8.6).

Обозначим след[1]) прямой p на плоскости Z буквой B. Проведем из точки B полупрямые $m_1 \parallel m$, $n_1 \parallel n$ и $l_1 \parallel l$; при этом, очевидно, $m_1 \perp p$ и $n_1 \perp p$.

На прямой p по обе стороны от следа B отложим произвольной длины равные отрезки AB и A_1B и на прямых m_1 и n_1 — произвольные отрезки BD и BC так, чтобы прямая CD пересекла прямую l_1. Обозначим точку пересечения CD и l_1 буквой M. Соединим прямыми точки C, M и D с точками A и A_1.

---

[1]) То есть точку пересечения прямой p с плоскостью Z.

$\triangle ACD = \triangle A_1CD$, так как $AC = A_1C$ и $AD = A_1D$ как наклонные из точек C и D к прямой AA_1, основания которых A и A_1 одинаково удалены от оснований перпендикуляров CB и DB, и CD — общая сторона. Из равенства этих треугольников следует, что $\angle ADC = \angle A_1DC$. $\triangle ADM = \triangle A_1DM$, так как $AD = A_1D$, $\angle ADM = \angle A_1DM$

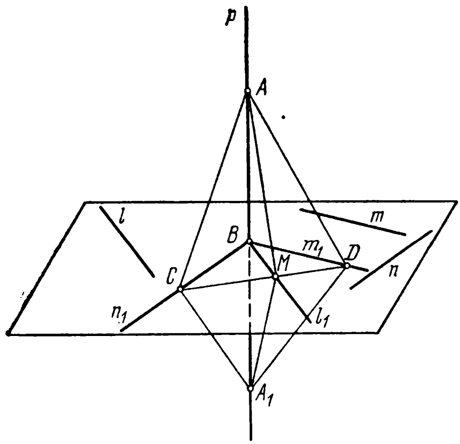


Рис. 8.6.

и MD общая. Из равенства этих треугольников следует, что $AM = A_1M$. $\triangle ABM = \triangle A_1BM$, так как $AB = A_1B$, $AM = A_1M$ и BM — общая. Из равенства этих треугольников следует, что $\angle ABM = \angle A_1BM$, а так как эти углы смежные, то они прямые, т. е. прямая p перпендикулярна к прямой l_1, а следовательно, и к прямой l согласно определению угла между скрещивающимися прямыми p и l.

Следствие 8.4 (признак перпендикулярности прямой и плоскости). *Прямая перпендикулярна к плоскости, если она перпендикулярна к двум пересекающимся прямым, лежащим в этой плоскости.*

Используя доказанную выше теорему и ее следствие, не представляет трудности доказать следующие теоремы.

Теорема 8.10. *Через данную точку к данной прямой можно провести и притом только одну перпендикулярную ей плоскость.*

Теорема 8.11. *Через данную точку к данной плоскости можно провести и притом только одну перпендикулярную ей прямую.*

8.3.2. Перпендикуляр и наклонная к плоскости. Пусть Z — плоскость, A — точка, не лежащая в плоскости Z, B — точка плоскости Z. Отрезок AB называется *перпендикуляром*, проведенным из точки A к плоскости Z, если прямая $AB \perp Z$. Пусть точка $C \in Z$ и отлична от точки B. Тогда отрезок AC мы будем называть *наклонной*, проведенной из точки A к плоскости Z. След перпендикуляра на плоскости называется *основанием перпендикуляра*, а след наклонной — *основанием наклонной*. Отрезок BC, принадлежащий плоскости Z (почему?), соединяющий основания перпендикуляра и наклонной называется *проекцией наклонной* AC на плоскости Z (рис. 8.7).

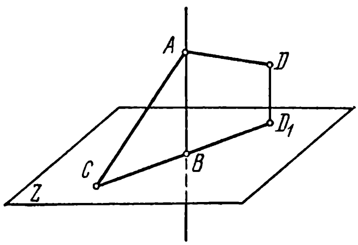


Рис. 8.7.

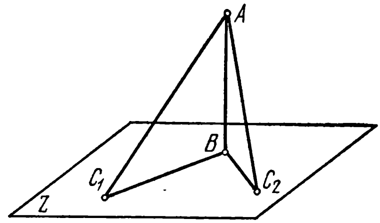


Рис. 8.8.

Теорема 8.12. *Если из некоторой точки A, лежащей вне плоскости, провести к ней перпендикуляр и наклонные; тогда:*

1) *перпендикуляр короче всякой наклонной;*

2) *наклонные, имеющие равные проекции, равны;*

3) *бо́льшая наклонная имеет бо́льшую проекцию.*

Доказательство. Пусть $AB \perp Z$, AC_1 и AC_2 — наклонные, проведенные из точки A к плоскости Z (рис. 8.8).

1) $\triangle ABC_1$ — прямоугольный (почему?), следовательно,

$$AC_1^2 = AB^2 + BC_1^2,$$

откуда $AC_1^2 > AB^2$, и так как $AC_1 > 0$, $AB > 0$, то наклонная AC_1 больше перпендикуляра AB.

2) Пусть $BC_1 = BC_2$. Надо доказать, что $AC_1 = AC_2$. $\triangle AC_1B$ и $\triangle AC_2B$ — прямоугольные, следовательно,

$$AC_1^2 = AB^2 + BC_1^2,$$
$$AC_2^2 = AB^2 + BC_2^2.$$

Вычтем из первого равенства второе, получим $AC_1^2 - AC_2^2 = 0$ или $AC_1^2 = AC_2^2$, $AC_1 = AC_2$ (в силу положительности AC_1, AC_2).

3) Пусть теперь $AC_1 > AC_2$. Аналогичные рассуждения приводят нас к неравенству $BC_1 > BC_2$.

Теорема доказана.

Рассмотрим задачу на применение только что доказанной теоремы.

Задача 8.1. Из некоторой точки пространства проведены к данной плоскости две наклонные, каждая из которых равна a; угол между ними равен 60°, а угол между их проекциями на данную плоскость — прямой. Найти:

а) расстояние между основаниями наклонных;

б) расстояние от данной точки до плоскости;

в) угол между наклонными и плоскостью.

Решение. Пусть (рис. 8.9) $AC_1 = AC_2 = a$ — две наклонные, проведенные из точки A к плоскости Z, причем C_1 и C_2 — основания наклонных. Отрезок C_1C_2 есть искомое расстояние. Для его нахождения строим плоскость, проходящую через пересекающиеся прямые C_1A и AC_2. Тогда по условию $\angle C_1AC_2 = 60°$, итак, $\triangle AC_1C_2$ — равнобедренный с углом при вершине, равным 60°, следовательно, $\triangle AC_1C_2$ — равносторонний и $C_1C_2 = a$.

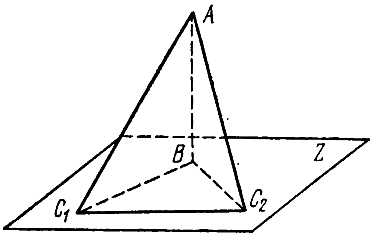


Рис. 8.9.

Далее расстояние от точки до плоскости есть длина перпендикуляра, опущенного из этой точки на плоскость. Опустим из точки A перпендикуляр AB и соединим основание B перпендикуляра с основанием наклонных. Рассмотрим $\triangle C_1BC_2$. Здесь по условию $\angle C_1BC_2 = 90°$ и $C_1B = C_2B$ (так как равным наклонным соответствуют равные проекции). Так как $C_1C_2 = a$, то, обозначив $C_1B = C_2B$ через x, мы можем составить уравнение для нахождения неизвестной:

$$2x^2 = a^2 \quad \text{или} \quad x = C_1B = C_2B = \frac{\sqrt{2}}{2}a.$$

Снова используя теорему Пифагора, но уже для $\triangle C_1BA$, находим BA:

$$BA = \sqrt{(AC_1)^2 - (C_1B)^2} = \sqrt{a^2 - \frac{1}{2}a^2} = \frac{\sqrt{2}}{2}a.$$

Наконец, $\angle AC_1B = \angle AC_2B = 45°$, так как $\triangle AC_1B = \triangle BC_2A$ и оба являются прямоугольными равнобедренными треугольниками, и

$$C_1B = BA = BC_2 = \frac{\sqrt{2}}{2}a.$$

8.3.3. Проекция прямой на плоскость; угол между прямыми, между прямой и плоскостью. Точку B (след прямой AB) будем называть *проекцией прямой AB на плоскости Z*, если прямая $AB \perp Z$. В общем случае (когда AB не перпендикулярна плоскости Z) *проекцией прямой AB на плоскость* Z мы будем называть прямую, построенную следующим образом (рис. 8.10): из любой точки M прямой AB опускаем перпендикуляр на плоскость Z и проводим плоскость Q через пересекающиеся прямые AB и MM_1. Линию пересечения плоскостей Q и Z мы будем называть *проекцией прямой AB на плоскость Z*. То, что такая проекция — единственна, несмотря на произвольность выбора точки M, легко доказать. Действительно, возьмем на прямой AB произвольную точку N, отличную от точки M, опустим перпендикуляр из этой точки на плоскость Z и проведем плоскость P через пересекающиеся прямые AB и NN_1. Если мы теперь покажем,

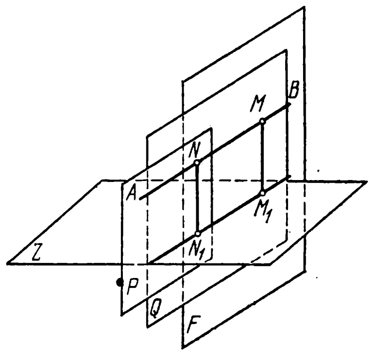


Рис. 8.10.

что плоскости P и Q совпадают, то, следовательно, проекция прямой на плоскость определяется единственным образом. Для доказательства построим плоскость F, проходящую через две параллельные прямые NN_1 и MM_1. Прямая AB принадлежит плоскости F, так как две ее точки N и M принадлежат этой плоскости. Следовательно, с одной стороны, плоскость F совпадает с плоскостью P, как плоскости, проходящие через пересекающиеся прямые AB и NN_1, а, с другой стороны, плоскость F совпадает с плоскостью Q, как плоскости, проходящие через две пересекающиеся прямые MM_1 и AB. Следовательно, плоскости P и Q совпадают, а значит, предложенное построение проекций данной прямой допускает единственное решение.

Проекцией отрезка AD на плоскость Z называется отрезок BD_1, соединяющий основание перпендикуляра, опущенного из одного конца этого отрезка (из точки A) на плоскость Z,. с основанием перпендикуляра, опущенного из другого конца этого отрезка (из точки D) на плоскость Z.

Теперь, используя материал, изложенный выше, мы можем определить некоторые расстояния между точками, прямыми и плоскостями в пространстве, которые мы не смогли сформулировать в § 8.2, и дать определение понятия угла между прямой и плоскостью.

Расстояние между двумя прямыми есть кратчайшее расстояние между любыми двумя точками, принадлежащими этим прямым. Очевидно, в таком случае имеет смысл говорить о непересекающихся прямых, т. е. о параллельных и скрещивающихся прямых. *Расстояние между двумя параллельными прямыми* есть длина перпендикуляра, опущенного из любой точки одной прямой на другую. *Расстоянием между двумя скрещивающимися* прямыми называется длина перпендикуляра, опущенного из точки, лежащей на одной из прямых, на плоскость, проходящую через другую прямую и параллельную первой.

Расстояние от точки A до плоскости Z есть наименьшее из расстояний точки A до точек плоскости Z. Таким образом, из приведенного определения и первого пункта теоремы 8.12 мы можем сделать простой вывод: *расстояние от точки A до плоскости Z* есть длина перпендикуляра, проведенного из точки A к плоскости Z.

Углом между прямой и плоскостью называется острый угол между этой прямой и ее проекцией на данную плоскость. Легко показать, используя доказанную теорему 8.12, что этот угол наименьший из всех углов, которые наклонная составляет с любой другой прямой плоскости.

Расстояние между прямой и плоскостью есть кратчайшее расстояние между любой точкой прямой и любой точкой плоскости. Очевидно, о расстоянии имеет смысл говорить, когда плоскость и прямая не имеют общих точек. Итак, *расстоянием от прямой, параллельной плоскости, до данной плоскости*, называется длина перпендикуляра, опущенного из любой точки прямой на плоскость.

Аналогично о *расстоянии между двумя плоскостями* мы будем говорить в случае их параллельности. Оно определяется длиной перпендикуляра, опущенного из любой точки одной плоскости на другую.

8.3.4. Теорема «о трех перпендикулярах». Рассмотрим очень важную, на наш взгляд, теорему, применение которой можно найти во многих стереометрических задачах.

Теорема 8.13. *Прямая, проведенная на плоскости перпендикулярно к наклонной, перпендикулярна к проекции этой наклонной.*

Доказательство. Пусть CA — наклонная к плоскости Z, CB — ее проекция на эту плоскость и $a \perp CA$. Требуется доказать, что $CB \perp a$ (рис. 8.11).

Действительно, проведем через наклонную AC и ее проекцию CB плоскость Q. Прямая $a \perp Q$, так как она перпендикулярна двум пересекающимся прямым этой плоскости[1]): $a \perp AC$ по условию теоремы, $a \perp AB$, так как AB есть перпендикуляр к плоскости Z, и следовательно, AB перпендикулярна любой прямой, принадлежащей плоскости. Тогда по теореме 8.9 прямая a перпендикулярна любой прямой, лежащей в плоскости Q. В частности, $a \perp CB$, что и требовалось доказать.

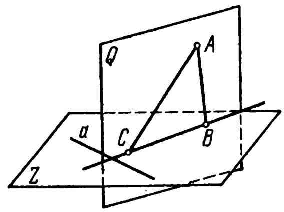


Рис. 8.11.

Теорема 8.14 (обратная). *Прямая, проведенная на плоскости, перпендикулярно к проекции наклонной, перпендикулярна к самой наклонной.*

Доказательство этой теоремы аналогично предыдущему.

Рассмотрим задачу на применение доказанной теоремы.

Задача 8.2. Доказать, что если из вершины угла, лежащего на плоскости, провести наклонную к плоскости так, чтобы она составляла со сторонами угла равные углы, то проекция этой наклонной на плоскость будет биссектрисой данного угла.

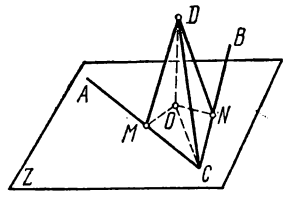


Рис. 8.12.

Решение. Пусть $\angle ACB$ лежит в плоскости Z, наклонная DC образует с его сторонами равные углы: $\angle ACD = \angle DCB$ (рис. 8.12). Из точки D опустим перпендикуляр DO на плоскость Z и проведем $OM \perp AC$ и $ON \perp CB$. Тогда по теореме о трех перпендикулярах $DM \perp AC$ и $DN \perp CB$, откуда $\triangle DCM = \triangle DCN$ по общей гипотенузе и острому углу ($\angle MCD = \angle DCN$ по условию задачи). Следовательно, $DM = DN$, а тогда равны и их проекции $MO = ON$. Следовательно, $\triangle MOC = \triangle OCN$ (по катету и общей гипотенузе). Следовательно, $\angle MCO = \angle OCN$, т. е. OC — проекция наклонной CD — биссектриса $\angle ACB$.

§ 8.4. Взаимное положение плоскостей

8.4.1. Угол между двумя плоскостями. Введем понятие угла между двумя плоскостями. Если плоскости параллельны или совпадают, мы полагаем, что угол между ними

[1]) См. следствие 8.4.

равен нулю. Пусть плоскости Z_1 и Z_2 не совпадают и не параллельны. Тогда они пересекаются по некоторой прямой c. Проведем плоскость Q, перпендикулярную прямой c (рис. 8.13). Она пересечет плоскости Z_1 и Z_2 по прямым a и b. За *угол между плоскостями* Z_1 и Z_2 мы принимаем угол, равный наименьшему углу между прямыми a и b. Определяемый таким образом *угол между плоскостями не зависит от выбора секущей плоскости* Q.

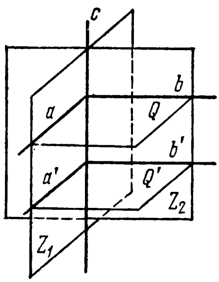


Рис. 8.13.

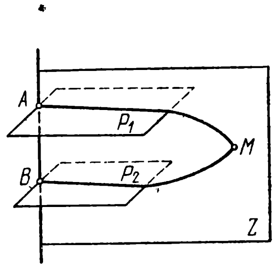


Рис. 8.14.

Чтобы показать справедливость этого утверждения, докажем теорему.

Теорема 8.15. *Если две плоскости перпендикулярны к одной и той же прямой, то они параллельны.*

Пусть $P_1 \perp AB$ и $P_2 \perp AB$ (рис. 8.14). Надо показать, что $P_1 \parallel P_2$, т. е. плоскости P_1 и P_2 не имеют ни одной общей точки.

Проведем доказательство методом «от противного». Пусть точка M — общая для плоскостей P_1 и P_2. Проведем плоскость Z через прямую AB и точку M. Тогда AM и BM — линии пересечения плоскостей P_1 и P_2 с этой плоскостью Z. Прямая AB, перпендикулярная к P_1 и P_2, должна быть перпендикулярна прямым AM и BM (см. п. 8.3.1 — определение), т. е. из точки M на прямую AB опущено два перпендикуляра. Полученное противоречие доказывает неверность предположения. Следовательно, $P_1 \parallel P_2$. Теорема доказана.

Вернемся к определению угла между плоскостями. Покажем, что угол, построенный при помощи секущей плоскости, не совпадающей с плоскостью Q, равен углу между прямыми a и b. Пусть Q' — плоскость, перпендикулярная прямой c и не совпадающая с Q (см. рис. 8.13). Тогда плоскость Q' пересекает плоскости Z_1 и Z_2 по прямым a' и b', причем $a' \parallel a$. Действительно, прямые a' и a не пересекаются, так как по теореме 8.15 лежат в параллельных плоскостях, но они не скрещиваются, так как лежат в одной плоскости Z_1. Аналогично $b \parallel b'$. Следовательно, угол между прямыми a и b равен углу, образованному прямыми a' и b', как углы с соответственно параллельными сторонами.

Легко показать, что угол между плоскостями равен углу между двумя перпендикулярами, лежащими в этих плоскостях, восставленными из некоторой точки прямой пересечения этих плоскостей.

Плоскости, угол между которыми (т. е. угол между прямыми a и b) прямой, называются *перпендикулярными*.

8.4.2. Признаки перпендикулярности плоскостей. Теорема 8.16. *Если плоскость проходит через перпендикуляр к другой плоскости, то она перпендикулярна к этой плоскости.*

Доказательство. Пусть $AB \perp Z$ и $AB \in Q$ (рис. 8.15). Надо показать, что $Q \perp Z$. Действительно, плоскость Q, имея общую точку (B) с плоскостью Z, пересечется с ней по некоторой прямой CD, проходящей через точку B. Восставим в плоскости Z из точки B перпендикуляр $BM \perp CD$. Так как $AB \perp Z$, то $AB \perp BM$ и $AB \perp CD$ (по определению). Таким образом, AB и BM есть два перпендикуляра, восставленные в плоскостях Q и Z из некоторой точки B прямой их пересечения, следовательно, угол между этими прямыми есть угол между плоскостями Z и Q. Но прямые $AB \perp BM$, откуда и $Z \perp Q$. Теорема доказана.

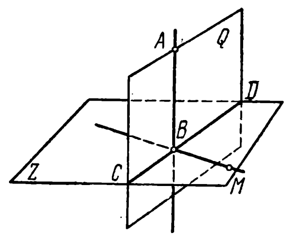


Рис. 8.15.

Следствие 8.4. *Если две плоскости взаимно перпендикулярны и из какой-нибудь точки одной из них опущен перпендикуляр на другую, то этот перпендикуляр лежит в первой плоскости.*

Теорема 8.17. *Через прямую, не перпендикулярную плоскости, можно провести и притом только одну плоскость, перпендикулярную первой плоскости.*

Доказательство этой теоремы было приведено в п. 8.3.3 при рассмотрении вопроса о проекции прямой на плоскость.

Задача 8.3. Через прямую, параллельную некоторой плоскости, провести плоскость, образующую с данной плоскостью заданный угол α.

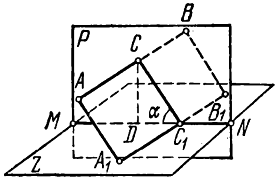


Рис. 8.16.

Решение. Пусть $AB \parallel Z$. Через произвольную точку C этой прямой проведем плоскость P, перпендикулярную этой прямой, которая пересечет плоскость Z по прямой MN (рис. 8.16). В плоскости P построим $\angle CC_1D = \alpha$. В плоскости Z проведем прямую $C_1B_1 \perp MN$, которая по теореме о трех перпендикулярах будет перпендикулярна к наклонной CC_1. Через прямые A_1B_1 и CC_1 проводим плоскость. Построенная плоскость искомая, так как она составляет с плоскостью Z угол, равный α, и прямая AB принадлежит этой плоскости, как прямая, параллельная прямой A_1B_1, лежащей в этой плоскости.

§ 8.5. Двугранные, трехгранные и многогранные углы

Двугранным углом называется геометрическая фигура, состоящая из двух полуплоскостей, исходящих из одной прямой (рис. 8.17). Прямая AB называется *ребром*, а полуплоскости P и Q — *сторонами* или *гранями* двугранного угла.

Двугранный угол обозначают или двумя буквами, поставленными у ребра например, AB, или четырьмя буквами $QABP$, из которых две средние означают ребро, а крайние — грани.

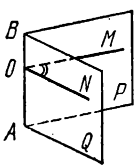


Рис. 8.17.

Линейным углом двугранного угла называется наименьший угол, образованный двумя перпендикулярами, восставленными к ребру из произвольной его точки и лежащими на гранях угла.

Два двугранных угла называются *равными*, если при вложении они совмещаются.

Если совместить по одной грани два неравных двугранных угла, то бо́льшим считается тот из них, между гранями которого заключена вторая грань второго двугранного угла.

Следующая теорема, которая легко доказывается вложением двугранных углов, облегчит нам сравнение их.

Теорема 8.18. *Если два двугранных угла равны, то их линейные углы равны. Если не равны двугранные углы, то не равны и их линейные углы, причем большему двугранному углу соответствует и больший линейный угол* (рис. 8.18).

Двугранный угол называется *развернутым*, если обе его грани образуют одну плоскость.

Смежными двугранными углами называются двугранные углы, которые имеют одну общую грань, а две другие грани составляют одну плоскость.

За единицу измерения двугранного угла принимают двугранный угол, линейный угол которого содержит единицу измерения линейных углов. Иначе говоря, *двугранный угол измеряется его линейным углом*.

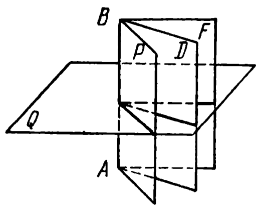


Рис. 8.18.

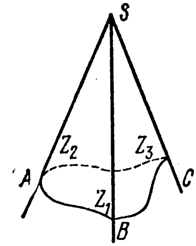


Рис. 8.19.

Проведем из точки S три луча SA, SB и SC (рис. 8.19), не лежащие в одной плоскости. Эти лучи образуют три плоских угла $\angle ASB$, $\angle BSC$, $\angle CSA$. Фигура, составленная из этих трех углов, называется *трехгранным углом*. Точка S называется *вершиной* трехгранного угла, лучи SA, SB и SC — *ребрами*, а сами плоские углы — плоскости Z_1, Z_2, Z_3 — *гранями*. Двугранный угол Z_1SAZ_2 называется *двугранным углом трехгранного угла* при ребре SA. Очевидно, в трехгранном угле можно выделить три двугранных.

Трехгранный угол обозначается четырьмя буквами $SABC$, где S — вершина, а A, B и C — произвольные точки, взятые на трех его ребрах.

Плоские углы трехгранного угла обладают следующими свойствами.

1. *В трехгранном угле любой плоский угол меньше суммы двух других его плоских углов.*

2. *Любой плоский угол трехгранного угла больше разности двух других его плоских углов.*

Из точки S проведем теперь n лучей SA_1, SA_2, ..., SA_n таких, что никакие три из них не лежат в одной плоскости. Эти лучи образуют n плоских углов: $\angle A_1SA_2$, $\angle A_2SA_3$, ..., $\angle A_{n-1}SA_n$, $\angle A_nSA_1$. Фигура (рис. 8.20), составленная из этих n углов, называется *многогранным углом*. Точка S

называется его *вершиной*, $SA_1, \ldots, SA_n$—его *ребрами*, плоские углы—плоскости $Z_1, \ldots, Z_n$—его *гранями*, двугранный угол $Z_1SA_2Z_2$—*двугранным углом многогранного угла при ребре* SA_2. Очевидно, n-гранный угол имеет n двугранных углов.

Многогранный угол будем обозначать буквами $SA_1 \ldots A_n$ или одной буквой S.

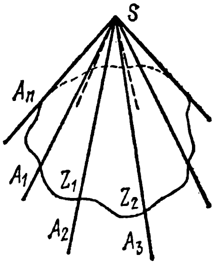


Рис. 8.20.

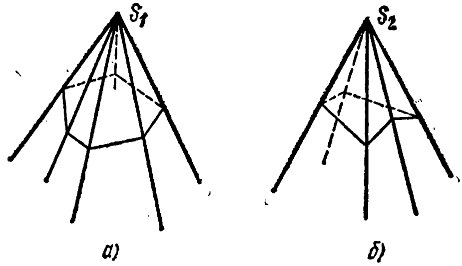


Рис. 8.21.

Многогранный угол называется *выпуклым*, если все его грани лежат по одну сторону от каждой из остальных граней, неограниченно продолженной. Так, на рис. 8.21, *а* показан выпуклый шестигранный угол S_1, а на рис. 8.21, *б* невыпуклый пятигранный угол S_2.

Плоские углы многогранного угла обладают следующим свойством.

Сумма плоских углов выпуклого многогранного угла меньше $4d$.

§ 8.6. Многогранники

8.6.1. Многогранник; элементы многогранника. В п. 8.1.1 мы определили смысл, который должны вкладывать в понятие «геометрическое тело». Тело, граница которого состоит из конечного числа многоугольников, называется *многогранником*. Многоугольники, ограничивающие многогранник, называются *гранями* многогранника. *Ребрами* многогранника называются общие стороны смежных граней. *Вершинами* многогранника называются вершины многогранных углов, образованных его гранями, сходящимися в одной точке. *Диагональю* многогранника называется отрезок прямой, соединяющий две вершины многогранника, не лежащие в одной грани. *Диагональной плоскостью* многогранника называется плоскость, проходящая через три его вершины, не лежащие в одной грани. *Сечением* многогранника плоскостью называется часть этой плоскости, ограниченная линией пересечения поверхности многогранника с этой плоскостью.

Поверхностью многогранника называется сумма площадей всех его граней. Если некоторый многоугольник можно рассматривать как основание многогранника или если многогранник имеет два одинаковых параллельных многоугольника, которые с равным успехом можно принять за основание, то говорят о *боковой поверхности* многогранника, выделяя из общей поверхности площади оснований.

Как мы увидим далее, боковая поверхность призмы есть сумма площадей параллелограммов, пирамиды — сумма площадей треугольников и т. д. Многогранник называется *выпуклым*, если он целиком лежит по одну сторону от плоскости каждой его грани. Гранями выпуклого многогранника, очевидно, могут быть только выпуклые многоугольники.

В последующих пунктах этой главы мы рассмотрим простейшие многогранники — призмы и пирамиды.

8.6.2. Призма. *Призмой* называется многогранник, две грани которого параллельны (*основания*), а остальные грани пересекаются по параллельным прямым (*боковые грани*) (рис. 8.22). Очевидно, что многоугольники основания могут быть произвольными. Однако боковые грани обязательно должны быть параллелограммами. Действительно, боковая грань — четырехугольник, две стороны которого параллельны (по условию) и равны как отрезки параллельных прямых, заключенных между двумя плоскостями (теорема 8.8).

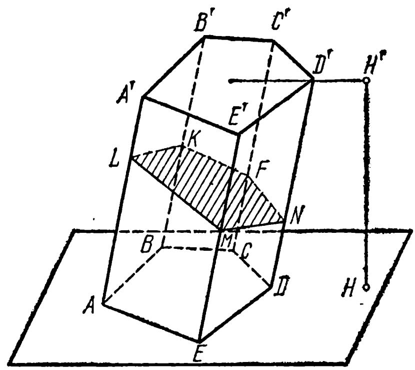


Рис. 8.22.

Высотой призмы называется длина отрезка, перпендикулярного к плоскостям ее оснований и заключенного между ними (HH' на рис. 8.22).

Призма называется *треугольной*, *четырехугольной* и т. д. в зависимости от того, какой многоугольник служит основанием призмы.

Для того чтобы определить, чему равна боковая поверхность призмы, введем еще одно определение.

Перпендикулярным сечением призмы называется многоугольник, полученный от пересечения призмы плоскостью, перпендикулярной к ее ребрам.

Теорема 8.19. *Боковая поверхность призмы равна произведению длины ее бокового ребра на периметр перпендикулярного сечения.*

Доказательство. В призме $ABCDEA'B'C'D'E'$ или, короче, AE' проведено перпендикулярное сечение $LKFNM$. Рассмотрим, чему равна площадь параллелограмма $AA'E'E$. Очевидно,

$$S_{AA'E'E} = AA' \cdot LM,$$

здесь сторону AA' параллелограмма мы приняли за ее основание, а отрезок, перпендикулярный к прямой, заключенный между основанием и параллельной ему стороной,— за высоту. Так как все боковые ребра призмы одинаковы, то имеет смысл обозначить их длину, например, через l. Тогда

$$S_{AA'E'E} = l \cdot LM.$$

Аналогично

$$S_{AA'B'B} = l \cdot LK \text{ и т. д.}$$

Боковая поверхность призмы есть сумма всех площадей параллелограммов, поэтому

$$S = l \cdot LM + l \cdot LK + l \cdot KF + l \cdot FN + l \cdot NM.$$

Вынося l за скобку и рассматривая оставшуюся в скобках сумму, мы увидим, что это есть периметр перпендикулярного сечения. Теорема доказана.

Призма называется *прямой*, если ее боковые ребра перпендикулярны к плоскостям ее оснований. В прямой призме, очевидно, все боковые грани являются прямоугольниками; высота равна боковому ребру. В противном случае призма называется *наклонной*.

Следствие 8.6. *Боковая поверхность прямоугольной призмы равна произведению периметра ее основания на высоту.*

Прямая призма, основанием которой служат правильные многоугольники, называется *правильной* призмой.

Рассмотрим некоторые важные частные случаи четырехугольной призмы.

Параллелепипедом называется призма, основанием которой служит параллелограмм. Параллелепипед может быть как прямым, так и наклонным.

Прямоугольным параллелепипедом называется прямая призма, основание которой — прямоугольник. Длины трех ребер прямоугольного параллелепипеда, сходящихся в одной вершине, называются его *измерениями.*

Кубом называется прямоугольный параллелепипед, все три измерения которого равны между собой.

В п. 8.6.4 подробно изучим параллелепипед и выясним некоторые свойства его элементов. Сейчас мы перейдем к рассмотрению двух других видов многогранника — пирамиды и усеченной пирамиды.

8.6.3. Пирамида. *Пирамидой* называется многогранник, ограниченный гранями многогранного угла и плоскостью, пересекающей все его грани.

Основанием пирамиды называется многоугольник, полученный в секущей плоскости ($ABCDE$ на рис. 8.23). В зависимости от числа сторон основания пирамиды могут быть треугольными, четырехугольными и т. д. Треугольная пирамида обладает той особенностью, что каждую грань можно принять за основание пирамиды. Боковыми гранями пирамиды, очевидно, являются треугольники с общей вершиной S. *Высотой* пирамиды называется длина перпендикуляра, опущенного из вершины на плоскость основания.

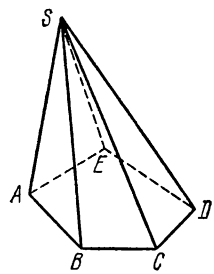


Рис. 8.23.

Правильной пирамидой называется пирамида, основанием которой служит правильный многоугольник и высота которой проходит через центр этого многоугольника. Все боковые ребра правильной пирамиды равны (как наклонные, основания которых равноудалены от основания перпендикуляра), все боковые грани — равнобедренные треугольники. *Апофемой* правильной пирамиды называется высота боковой грани, опущенная из вершины пирамиды.

Теорема 8.20. *Боковая поверхность правильной пирамиды равна произведению половины периметра ее основания на апофему.*

Доказательство. Пусть дана n-угольная правильная пирамида, сторона которой $AB=a$, апофема $SC=l$ (рис. 8.24). Рассмотрим, чему равна площадь одной боковой грани. В $\triangle ASB$ AB — сторона основания, SC — высота

$$S_{\triangle}=\frac{a\cdot l}{2}.$$

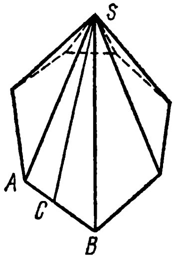


Рис. 8.24.

Вся боковая поверхность пирамиды равна сумме площадей боковых граней, т. е. равнобедренных треугольников, поэтому

$$S_{\text{бок. пов}}=\frac{a\cdot l}{2}\cdot n.$$

Но $a\cdot n$ — периметр основания. Теорема доказана.

Любая треугольная пирамида называется *тетраэдром*.

Из всего разнообразного множества пирамид можно выделить один наиболее интересный случай. Правильная треугольная пирамида, боковое ребро которой равно стороне основания, носит название *правильного тетраэдра*.

Усеченной пирамидой называется часть пирамиды, заключенная между ее основанием и секущей плоскостью, параллельной основанию (рис. 8.25).

Основаниями усеченной пирамиды называются ее параллельные грани. *Нижним основанием* называется основание исходной пирамиды, *верхним основанием* называется многоугольник, лежащий на секущей плоскости. Боковые грани усеченной пирамиды — трапеции. *Высотой* усеченной пирамиды называется перпендикуляр, опущенный из какой-нибудь точки верхнего основания на нижнее.

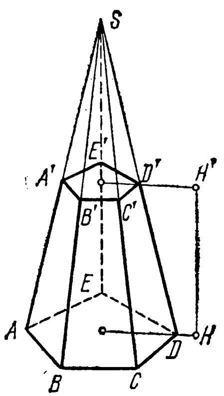


Рис. 8.25.

Правильной усеченной пирамидой называется такая усеченная пирамида, исходной для которой была правильная пирамида, т. е. основание правильной усеченной пирамиды — правильные многоугольники и прямая, соединяющая центры оснований, перпендикулярна к плоскости оснований.

Апофемой правильной усеченной пирамиды называется высота равнобочной трапеции боковой грани.

Теорема 8.21. *Боковая поверхность правильной усеченной пирамиды равна произведению полусуммы периметров ее оснований на апофему.*

Доказательство. Пусть длина стороны нижнего основания правильной n-угольной усеченной пирамиды равна a, верхнего — b, апофема — l. Тогда, рассматривая площадь боковой грани — равнобочной трапеции, получим, что она равна

$$\frac{a+b}{2}\cdot l.$$

Боковая поверхность состоит из n таких трапеций, следовательно,

$$S_{\text{бок. ус. пир}}=\frac{a+b}{2}\cdot l\cdot n=\frac{na+nb}{2}\,l.$$

Учитывая, что na — периметр нижнего основания, nb — периметр верхнего, мы получим формулу, указанную в формулировке теоремы. Теорема доказана.

В заключение этого пункта рассмотрим стереометрическую задачу часто встречающегося типа — задачу на вписанные и описанные многогранники.

Задача 8.4. В правильную четырехугольную пирамиду вписан куб так, что четыре его вершины находятся на боковых ребрах пирамиды, а остальные четыре — в плоскости ее основания. Определить ребра куба, если в пирамиде сторона основания равна a, а высота равна h.

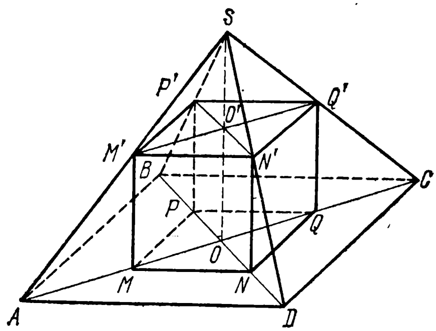


Рис. 8.26.

Решение. Обозначим искомое ребро куба через x, т. е. (рис. 8.26) положим $MN=MM'=x$. Из подобия $\triangle OSD \backsim \triangle SO'N'$ $(OD \parallel O'N')$ имеем

$$\frac{SO'}{SO}=\frac{O'N'}{OD}.$$

Учитывая, что $SO=h$, $SO'=h-x$, $O'N'=x/\sqrt{2}$, $OD=a/\sqrt{2}$, получим

$$\frac{h-x}{h}=\frac{x}{a},$$

откуда

$$x=\frac{ah}{a+h}.$$

8.6.4. Простейшие свойства параллелепипеда. Теорема 8.22. *В параллелепипеде противолежащие грани (т. е. грани параллелепипеда, не имеющие общих вершин) равны и параллельны.*

Доказательство. Пусть A_1A_4' — параллелепипед (рис. 8.27). Для доказательства теоремы достаточно показать, что любые две противоположные грани, например $A_1A_1'A_2'A_2$ и $A_4A_4'A_3'A_3$ параллельны и равны.

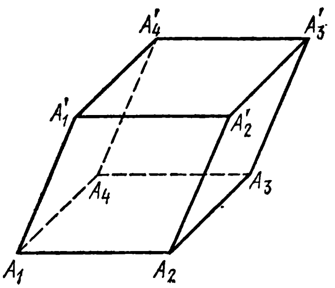


Рис. 8.27.

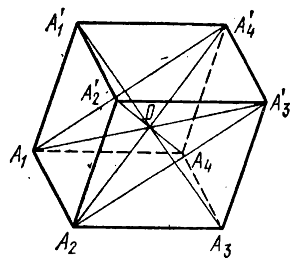


Рис. 8.28.

Действительно, так как все шесть граней параллелепипеда — параллелограммы, то $A_1A_1'=A_4A_4'$, $A_1A_2=A_4A_3$ и $A_1A_1' \parallel A_4A_4'$ и $A_1A_2 \parallel A_4A_3$. Следовательно, грани $A_1A_1'A_2'A_2$ и $A_4A_4'A_3'A_3$ параллельны в силу того, что две пересекающиеся прямые одной плоскости (A_1A_1' и A_1A_2) параллельны двум пересекающимся прямым другой плоскости (A_4A_4' и A_4A_3). Эти грани и равны как два параллелограмма, у которых, кроме указанного равенства сторон, равны углы: $\angle A_1'A_1A_2=\angle A_4'A_4A_3$ (как углы с соответственно параллельными и одинаково направленными сторонами). Теорема доказана.

Теорема 8.23. *Диагонали параллелепипеда пересекаются в одной точке и делятся в ней пополам.*

Доказательство. В параллелепипеде A_1A_4' проведем диагонали A_1A_3', A_2A_4', A_4A_2' и $A_1'A_3$ (рис. 8.28). Соединим A_2 с A_3' и A_1 с A_4'. Полученная фигура — параллелограмм, так как $A_1A_2 = A'_3A'_4$ и $A_1A_2 \parallel A'_3A'_4$ (см. теорему 8.22). Диагонали $A_2A'_4$ и $A_1A'_3$ параллелепипеда являются диагоналями полученного параллелограмма, а значит, в точке пересечения O делятся пополам. Аналогично, взяв одну из этих диагоналей (например, $A_2A'_4$) и третью диагональ параллелепипеда (например, $A_3A'_1$), легко показать, что они являются диагоналями параллелограмма $A_2A'_1A'_4A_3$, и значит, делятся в точке пересечения пополам. Следовательно, диагональ $A_3A'_1$ проходит через ту же точку O — середину диагонали $A_2A'_4$. Доказательство, что и последняя диагональ проходит через ту же точку O, делясь пополам, уже не представляется трудным. Теорема доказана.

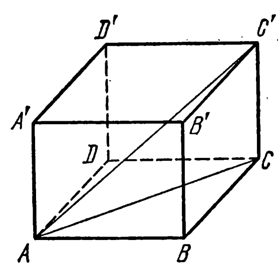


Рис. 8.29.

Теорема 8.24 (свойство диагоналей прямоугольного параллелепипеда). *Квадрат диагонали прямоугольного параллелепипеда равен сумме квадратов трех его измерений.*

Доказательство. Из прямоугольного $\triangle AC'C$ (рис. 8.29) по теореме Пифагора получаем

$$AC'^2 = AC^2 + CC'^2.$$

Из прямоугольного $\triangle ACB$

$$AC^2 = AB^2 + BC^2.$$

Отсюда

$$AC'^2 = CC'^2 + AB^2 + BC^2.$$

Но $AB = DC$, поэтому

$$AC'^2 = CC'^2 + DC^2 + BC^2,$$

где CC', DC и BC — три ребра параллелепипеда, исходящие из одной вершины. Теорема доказана.

8.6.5. Простейшие свойства пирамиды. Теорема 8.25 (свойства сечений пирамиды плоскостью, параллельной основанию). *Если пересечь пирамиду плоскостью, параллельной основанию, то*:

1) *боковые ребра и высота пирамиды разделятся на пропорциональные части*;

2) *в сечении получится многогранник, который подобен основанию*;

3) *площади сечения и основания будут относиться, как квадраты их расстояний от вершины пирамиды.*

Доказательство. Не умаляя общности, рассмотрим треугольную пирамиду (рис. 8.30). SO—ее высота, плоскость $A'B'C'$ параллельна плоскости основания.

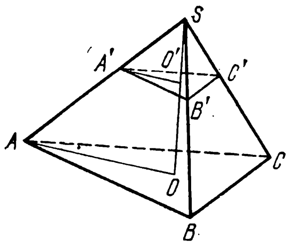


Рис. 8.30.

1) $A'B' \parallel AB$, как прямые, лежащие в параллельных плоскостях и поэтому не имеющие точек пересечения, не являются скрещивающимися, так как принадлежат одной плоскости $\triangle ASB$. Аналогично $B'C' \parallel BC$, $A'C' \parallel AC$. Следовательно, из подобия треугольников

$$\triangle ASB \sim \triangle A'SB', \quad \triangle BSC \sim \triangle B'SC', \quad \triangle ASC \sim \triangle A'SC' \tag{8.1}$$

имеем

$$\frac{SA'}{A'A}=\frac{SB'}{B'B}, \quad \frac{SB'}{B'B}=\frac{SC'}{C'C}, \quad \frac{SC'}{C'C}=\frac{SA'}{A'A}.$$

Рассмотрев $\triangle AOS \sim \triangle A'O'S$ и введя соотношения

$$\frac{SA'}{A'A}=\frac{SO'}{O'O}, \tag{8.2}$$

получим

$$\frac{SA'}{A'A}=\frac{SB'}{B'B}=\frac{SC'}{C'C}=\frac{SO'}{O'O}.$$

2) Соотношения (8.1) дают нам пропорциональность всех сторон многоугольников основания и сечения, следовательно,

$$\triangle ABC \sim \triangle A'B'C'.$$

3) Площади подобных фигур, как известно, относятся как квадраты сходственных сторон, т. е.

$$\frac{S_{\triangle A'B'C'}}{S_{\triangle ABC}}=\frac{(A'B')^2}{(AB)^2},$$

то из соотношения подобий (8.1) и из (8.2) получим

$$\frac{A'B'}{AB}=\frac{SA'}{SA}=\frac{SO'}{SO},$$

т. е.

$$\frac{S_{\triangle A'B'C'}}{S_{\triangle ABC}} = \frac{(SO')^2}{(SO)^2}.$$

Теорема доказана.

Т е о р е м а 8.26. *Если две пирамиды с равными высотами пересечь плоскостями, параллельными основаниям на одинаковом расстоянии от вершины, то площади сечений будут пропорциональны площадям оснований.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть высоты пирамид S_1O_1 и S_2O_2 равны. Обозначим эту высоту через H. Пересечем эти

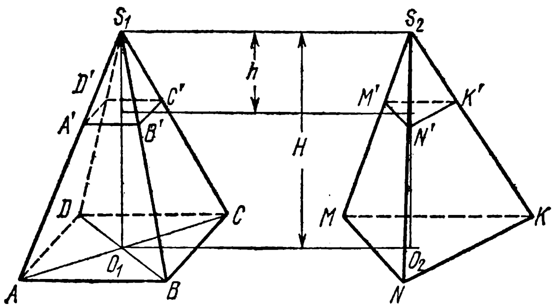


Рис. 8.31.

пирамиды плоскостями, параллельными основанию на расстоянии h от вершин (рис. 8.31). В силу предыдущей теоремы

$$\frac{S_{A'B'C'D'}}{S_{ABCD}} = \frac{h^2}{H^2} \quad \text{и} \quad \frac{S_{M'N'K'}}{S_{MNK}} = \frac{h^2}{H^2}.$$

Таким образом

$$\frac{S_{A'B'C'D'}}{S_{ABCD}} = \frac{S_{M'N'K'}}{S_{MNK}}.$$

Теорема доказана.

С л е д с т в и е 8.6. *Если у двух пирамид с равными высотами основания равновелики, то равновелики и сечения, равноотстоящие от вершин.*

§ 8.7. Объемы геометрических тел

8.7.1. Аксиомы объема. Прежде всего, используя аксиоматический подход, определим, какой смысл вкладывается в понятие объема геометрического тела. Число, характеризующее величину внутренней области геометрического тела, будем называть его *объемом*. Ограничимся рассмотрением объемов элементарных тел.

Объем как геометрическое понятие определяется тремя следующими аксиомами.

1. *Каждое геометрическое тело имеет (определенный, неотрицательный) объем.*

2. *Равные геометрические тела имеют равные объемы.*

3. *Объем геометрического тела равен сумме объемов составляющих его частей.*

Процесс нахождения объема есть процесс измерения, т. е. сравнение данного объема с эталонными. Единицей измерения объема является одна кубическая единица, равная объему куба со стороной, равной линейной единице.

В заключение отметим, что, проводя вычисления объема, мы сопоставляем данной геометрической фигуре вполне определенное число, т. е. на множестве геометрических фигур мы определяем функцию, как видно из аксиом объема, неотрицательную, однозначную, аддитивную. Так же, как и длину, объем можно рассматривать как меру множества, считая геометрическое тело множеством точек, его образующих.

8.7.2. Формулы для вычисления объемов некоторых тел. В настоящем пункте мы приведем несколько формул для вычисления объемов элементарных тел, вывод которых будет дан в последующих главах.

Объем призмы равен произведению площади основания на высоту

$$V = Q \cdot H.$$

Пусть a, b и c — измерения прямоугольного параллелепипеда. Тогда, очевидно, его объем

$$V = abc.$$

Объем пирамиды равен одной трети произведения площади основания на высоту

$$V = \frac{1}{3} Q \cdot H.$$

Объем усеченной пирамиды можно вычислить по формуле

$$V = \frac{1}{3}(Q + q + \sqrt{Qq}) \cdot H,$$

где q, Q — площади верхнего и нижнего оснований соответственно, H — высота пирамиды.

Рассмотрим задачу на вычисление объема.

Задача 8.5. В наклонной треугольной призме площадь одной из боковых граней равна m^2, а расстояние ее от противолежащего ребра равно $2a$. Найти объем призмы.

Решение. Пусть $S_{ABB'A'}=m^2$ (рис. 8.32), MZ — перпендикуляр, опущенный из произвольной точки M ребра CC' на плоскость $ABB'A'$. По определению расстояния между прямой и плоскостью (п. 8.3.3) $MZ=2a$. Проведем в плоскости $AA'B'B$ через точку Z перпендикуляр PN к параллельным прямым AA' и BB'. Тогда $(PN\cdot BB')=S_{ABB'A'}=m^2$. Рассекая призму перпендикулярным сечением, проходящим через пересекающиеся прямые MZ и PM и совмещая полученные многогранники равными гранями ABC и $A'B'C'$, можно получить прямую призму (плоскости оснований перпендикулярны ребрам), основанием которой служит перпендикулярное сечение, равновеликое исходному, следовательно, $V=BB_1\cdot S_{PMN}$ или

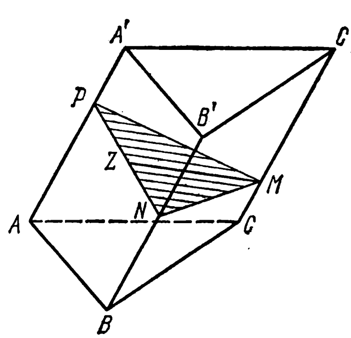


Рис. 8.32.

$$V=\frac{1}{2}PN\cdot MZ\cdot BB'=\frac{1}{2}(PN\cdot BB')\cdot MZ=\frac{1}{2}m^2\cdot 2a=ma^2.$$

Из рассуждений, приведенных в данной задаче, мы сможем сделать важный практический вывод: *объем призмы равен произведению площади перпендикулярного сечения на боковое ребро.*

ВОПРОСЫ ДЛЯ ПОВТОРЕНИЯ К ГЛАВЕ 8

1. Что такое аксиома? Что такое теорема?
2. Назовите основные геометрические понятия.
3. Сформулируйте аксиомы стереометрии.
4. Какие прямые называются скрещивающимися? Чем отличаются параллельные прямые от скрещивающихся?
5. Как в пространстве могут быть расположены прямая и плоскость, две плоскости?
6. Перечислите признаки параллельности прямой и плоскости, двух плоскостей.
7. Дайте определение прямой, перпендикулярной к плоскости.
8. Сформулируйте признак перпендикулярности прямой и плоскости.
9. Что называется перпендикуляром, наклонной, проекцией наклонной?
10. Докажите, что перпендикуляр короче всякой наклонной.
11. Что называется проекцией прямой на плоскость?
12. Что называется проекцией отрезка на плоскость?

13. Что называется расстоянием между двумя прямыми, расстоянием от точки до плоскости, между двумя плоскостями?
14. Дайте определение угла между прямой и плоскостью.
15. Сформулируйте теорему о трех перпендикулярах.
16. Что называется углом между плоскостями?
17. Сформулируйте признак перпендикулярности плоскостей.
18. Что называется двугранным углом?
19. Что называется линейным углом двугранного угла?
20. Перечислите свойства плоских углов трехгранного угла.
21. Какой многогранный угол называется выпуклым?
22. Что называется многогранником?
23. Что называется ребром, гранью, диагональю многогранника?
24. Что называется призмой?
25. Чему равна боковая поверхность призмы?
26. Какие вы знаете частные случаи призмы?
27. Какая призма называется правильной?
28. Что называется пирамидой?
29. Какая пирамида называется правильной?
30. Чему равна боковая поверхность правильной пирамиды?
31. Что такое тетраэдр? Что такое правильный тетраэдр?
32. Что называется усеченной пирамидой?
33. Чему равна боковая поверхность правильной усеченной пирамиды?
34. Докажите, что диагонали параллелограмма пересекаются в одной точке.
35. Сформулируйте свойства сечений пирамиды плоскостью, параллельной основанию.
36. Сформулируйте аксиомы объема.

УПРАЖНЕНИЯ К ГЛАВЕ 8

1. Из точки M, отстоящей от плоскости P на расстоянии $MO=4$, проведены к этой плоскости наклонные MA, MB и MC под углами в $30°$, $45°$ и $60°$ к прямой MO. Определить длину наклонных.

2. Данный отрезок имеет концы на двух взаимно перпендикулярных плоскостях и составляет с одной из них угол в $45°$, а с другой — в $30°$; длина этого отрезка равна a. Определить часть линии пересечения плоскостей, заключенной между перпендикулярами, опущенными на нее из концов данного отрезка.

3. Правильный треугольник спроектирован на плоскость P; вершины треугольника отстоят от этой плоскости на 10 см, 15 см и 17 см. Найти расстояние от центра треугольника до плоскости P.

4. Через одну из сторон ромба проведена плоскость на расстоянии 4 см от противолежащей стороны. Проекции диагоналей ромба на эту плоскость равны 8 см и 2 см. Найти проекции сторон ромба на эту плоскость.

5. Отрезки двух прямых, заключенных между двумя параллельными плоскостями, равны 51 см и 53 см, а их проекции на одну из этих плоскостей относятся как 6:7. Определить длину этих проекций и расстояние между плоскостями.

6. Между двумя параллельными плоскостями P и Q проведены отрезки AC и BD (точки A и B лежат в плоскости P); $AC=13$ см, $BD=15$ см, сумма длин проекций AC и BD на одну из данных плоскостей равна 14 см. Найти длины этих проекций и расстояние между данными плоскостями.

7. Через данную точку провести плоскость, параллельную данной плоскости.

8. Через данную точку провести прямую, параллельную данной.

9. Через данную прямую провести плоскость, перпендикулярную к данной плоскости.

10. Через данную точку провести плоскость, перпендикулярную к двум данным плоскостям.

11. В трехгранном углу два плоских угла по 45°, двугранный угол между ними прямой. Найти третий плоский угол.

12. Каждый плоский угол трехгранного угла равен 60°, на одном из ребер отложен от вершины отрезок, равный 3, и из конца его опущен перпендикуляр на противолежащую грань. Найти длину этого перпендикуляра.

13. В наклонной треугольной призме боковые ребра содержат по 8 см, стороны перпендикулярного сечения относятся как 9:10:17, а его площадь равна 144 см^2. Определить боковую поверхность этой призмы.

14*. Определить объем прямоугольного параллелепипеда по площадям его граней Q_1, Q_2 и Q_3.

15. Ребро куба равно a. Найти кратчайшее расстояние от диагонали куба до непересекающего его ребра.

16. Ребро куба равно a. Найти величину кратчайшего расстояния между непересекающимися диагоналями двух смежных граней.

17. Площадь диагональной плоскости куба равна S. Вычислить ребро куба, диагональ основания, диагональ куба, его полную поверхность и объем.

18. Доказать, что две плоскости, проходящие через концы двух троек ребер куба, сходящихся в концах одной диагонали, рассекают эту диагональ на три равные части.

19. В кубе $ABCDA'B'C'D'$ с ребром a проведено сечение через середины ребер AD и $B'C'$ и вершины A' и C. Найти его площадь.

20. Основанием прямой призмы служит прямоугольный треугольник с катетами a и b. Боковые грани призмы пересечены плоскостью так, что в сечении получился правильный треугольник. Найти его сторону.

21. Можно ли пересечь плоскостью параллелепипед таким образом, чтобы в сечении получился правильный пятиугольник?

22. Каждое ребро правильной треугольной призмы равно a. Через сторону основания и середину высоты, опущенной из центра треугольника основания, проведена плоскость. Найти площадь этого сечения.

23. Основанием пирамиды служит квадрат, ее высота проходит через одну из вершин основания. Определить боковую поверхность этой пирамиды, если сторона основания равна 20 см, а высота 21 см.

24. Найти объем правильного тетраэдра, высота которого равна H.

25. Найти высоту правильного тетраэдра, объем которого равен V.

26. Стороны основания треугольной пирамиды равны a, b и c. Все плоские углы при вершине прямые. Вычислить объем пирамиды.

27. Высота треугольной пирамиды $ABCS$, опущенная из вершины S, проходит через точку пересечения высот треугольника ABC. Кроме того, известно, что $SB=b$, $SC=c$ и $\angle BSC=90°$. Найти отношение площадей граней ASB и ASC.

28. Сторона основания правильной треугольной пирамиды равна a, а высота, опущенная из какой-либо вершины основания на противо-

положную ей боковую грань, равна b. Определить объем пирамиды.

29. Вычислить объем правильной четырехугольной пирамиды, высота которой равна a, а площадь диагонального сечения равна Q.

30. В треугольной пирамиде три грани взаимно перпендикулярны и их площади равны S_1, S_2 и S_3. Найти площадь четвертой грани.

31. Существует ли такая треугольная пирамида, у которой к каждому ребру прилегает хотя бы один тупой угол?

32. Существует ли восьмиугольная пирамида, у которой все ребра равны? Для каких n существует правильная n-угольная пирамида, у которой все ребра равны?

33. Ребро правильного тетраэдра равно a. Через середины сторон AB и BC проведена плоскость параллельно ребру BS. Определить площадь сечения.

34. Угол между боковым ребром и основанием правильной четырехугольной пирамиды равен 60°, высота равна h. Через точку на высоте, отстоящую на $h/3$ от вершины, проведена плоскость перпендикулярно к одному из боковых ребер. Найти площадь сечения.

35. Угол между боковым ребром и основанием правильной четырехугольной пирамиды равен 60°, боковое ребро равно a. Через середину одного из ребер перпендикулярно к нему проведена плоскость. Найти площадь сечения.

36. Через одно из ребер основания правильной треугольной пирамиды со стороной основания a проведена плоскость, перпендикулярная к противоположному боковому ребру и делящая это ребро в отношении $m:n$, считая от вершины. Определить полную поверхность пирамиды.

37. Сторона основания правильной четырехугольной пирамиды равна a, высота пирамиды h. Через сторону основания пирамиды и середину скрещивающегося с ней бокового ребра проведено сечение. Определить расстояние от вершины пирамиды до плоскости этого сечения.

38. Основанием пирамиды является ромб с диагоналями $AC=a$ и $BD=b$. Боковое ребро SA перпендикулярно к плоскости основания и равно q. Через точку A и середину ребра SC проведена плоскость, параллельная диагонали основания BD. Определить площадь сечения.

39. В правильной четырехугольной усеченной пирамиде стороны оснований равны 5 см и 11 см, а диагональ пирамиды — 12 см. Определить боковую поверхность.

40. Определить объем правильной треугольной усеченной пирамиды, у которой стороны основания 30 м и 20 м, а боковая поверхность равна сумме площадей оснований.

41. В правильной четырехугольной пирамиде сторона основания 3 дм, а высота 2 дм. Найти боковую поверхность усеченной пирамиды, отсекаемой от данной плоскостью, параллельной ее основанию, и отстоящей от нее на 5 см.

42. В усеченной пирамиде площади оснований равны S_1 и S_2. Найти площадь сечения, проведенного через середины боковых ребер.

43. Определить объем полной пирамиды, если площади оснований усеченной пирамиды S_1 и S_2, а объем V.

44. Площади оснований усеченной пирамиды равны a^2 и b^2. Найти площадь сечения, параллельного плоскостям оснований усеченной пирамиды и делящего ее объем пополам.

45. Сторона основания правильной четырехугольной пирамиды равна $5\sqrt{2}$, ребро ее равно 13. Вычислить сторону куба, вписанного в эту пирамиду так, что четыре его вершины находятся на ребрах пирамиды.

46. В правильную четырехугольную пирамиду вписан куб так, что четыре вершины находятся на апофемах пирамиды и четыре — в плоскости основания; все ребра пирамиды равны между собой и каждое из них равно a. Вычислить полную поверхность и объем куба.

ОТВЕТЫ, УКАЗАНИЯ И РЕШЕНИЯ К ГЛАВЕ 8

1. См. задачу п. 8.3.1. Ответ. $MA=\frac{8\sqrt{3}}{3}$, $MB=4\sqrt{2}$, $MC=8$.

2. Ответ. $a/2$.

3. Решение. Точки A_1, B_1, C_1 (рис. 8.33) являются прямоугольными проекциями вершин A, B, C данного треугольника ABC на плоскость P. По условию $AA_1=10$ см, $BB_1=15$ см, $CC_1=17$ см. На перпендикулярах к плоскости отложим от их основания отрезки $B_1M=C_1N=AA_1=10$ см. Тогда $MB=5$ см, а $NC=7$ см. Центр O данного правильного треугольника есть точка пересечения его медиан. Медиана AD треугольника точкой O делится в отношении $AO:OD=2:1$. Из точки D опустим на плоскость P перпендикуляр DD_2, который разделит пополам сторону NM треугольника ANM: $ND_2=D_2M$, т. е. AD_2 — медиана треугольника ANM.

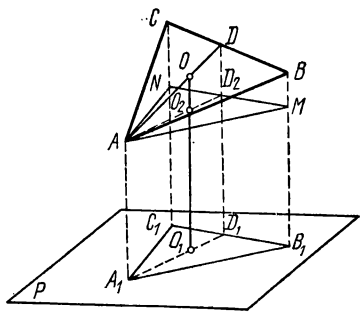


Рис. 8.33.

DD_2 как средняя линия трапеции $MBCN$ будет равна $(BM+CN)/2=6$ см. Тогда из подобия треугольников AOO_2 и ADD_2 находим $OO_2:DD_2=AO:AD$ или $OO_2:6=2:3$, $OO_2=4$ см; учитывая, что $O_2O_1=AA_1=10$ см, находим $OO_1=OO_2+O_2O_1=14$ см. Ответ. 14 см.

4. Ответ. 5 см и 3 см.

5. Ответ. 24 см, 28 см и 45 см.

6. Ответ. 5 см, 9 см и 12 см.

7. Решение. Пусть дана точка A и плоскость P. Требуется провести через точку A плоскость Q, параллельную плоскости P (рис. 8.34).

В плоскости P проводим две произвольные пересекающиеся прямые OE и OD и через эти прямые и заданную точку A проводим плоскости M и N, которые пересекаются по прямой OA. В плоскости M проводим прямую $AB \parallel OE$, а в плоскости N — прямую $AC \parallel OD$. Прямые AB и AC определяют плоскость Q, которая проходит через точку A и параллельна данной плоскости P.

11. В трехгранном угле $OMNP$ $\angle MON=\angle NOP=45°$, двугранный угол между ними прямой. Найти третий плоский угол

$MOP=\alpha$ (рис. 8.35). Из произвольной точки C ребра ON строим линейный угол ACB двугранного угла $MNOP$; тогда по условию задачи $\angle ACB=90°$; так как углы $\angle AOC=\angle BOC=45°$, то $AC=$ $=OC=CB$ и прямоугольные треугольники ACO, ACB и BCO равны между собой, тогда $AB=AO=BO$ и искомый угол $\angle AOB=60°$. Ответ. $60°$.

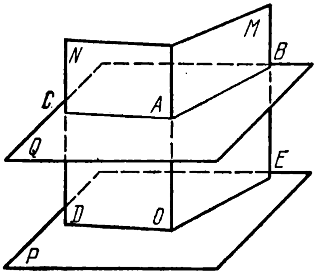


Рис. 8.34.

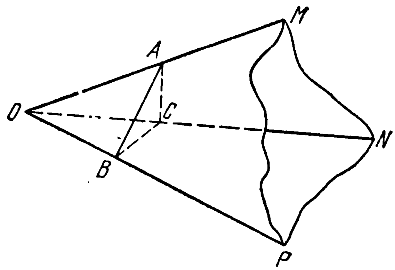


Рис. 8.35.

12. Указание. Из основания перпендикуляра опустить перпендикуляр на ребра угла. Ответ. $\sqrt{6}$.

13. Решение. Пусть дана призма AC_1; $AA_1=BB_1=CC_1=8$ см; $A_2B_2C_2$ — перпендикулярное сечение призмы, причем $A_2B_2\colon B_2C_2\colon C_2A_2=$ $=9\colon 10\colon 17$ и $S_{A_2B_2C_2}=144$ см^2 (рис. 8.36). Очевидно, $S_{\text{бок}}=$ $=(A_2B_2+B_2C_2+C_2A_2)\cdot AA_1$. Обозначим $A_2B_2=9x$, $B_2C_2=10x$ и $C_2A_2=17x$. Тогда по формуле Герона площадь перпендикулярного се-

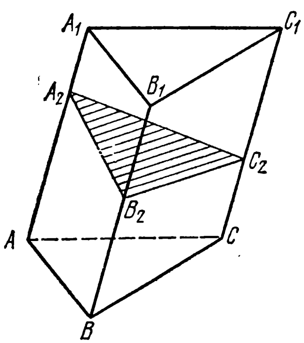


Рис. 8.36.

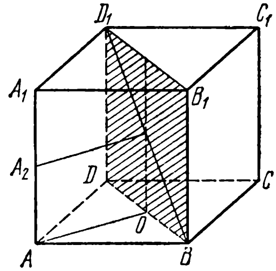


Рис. 8.37.

чения равна $\sqrt{18x\cdot x\cdot 8x\cdot 9x}=36x^2$, а по условию она равна 144 см^2, следовательно, $x=2$ см. Ответ. $S_{\text{бок.}}=576$ см^2.

14. Ответ. $V=\sqrt{Q_1Q_2Q_3}$ куб. ед.

15. Решение. Прямые AA_1 и BD_1 — скрещивающиеся прямые (рис. 8.37). Расстояние между ними равно расстоянию от одной из скрещивающихся прямых до плоскости, параллельной этой прямой и проведенной через вторую из скрещивающихся прямых (см. п. 8.3.3). В рассматриваемом случае это расстояние равно расстоянию между любой точкой ребра AA_1 до плоскости, проведенной через две прямые $DD_1 \parallel AA_1$ и $BB_1 \parallel AA_1$, содержащей вторую из скрещивающихся прямых. Следовательно, AO — перпендикуляр, опущенный из точки A ребра AA_1 на плоскость BB_1D_1D, можно рассматривать как искомое расстояние. Очевидно, $AO = a\sqrt{2}/2$. Ответ. $a\sqrt{2}/2$.

16. Ответ. $a\sqrt{3}/3$.

17. Указание. Диагональным называется любое сечение куба, проведенное через две пересекающиеся диагонали. Например, на рис. 8.37 BB_1D_1D — диагональное сечение.

Ответ. $\sqrt{\frac{S\sqrt{2}}{2}}$, $\sqrt{S\sqrt{2}}$, $\sqrt{\frac{3S\sqrt{2}}{2}}$, $3S\sqrt{2}$, $\frac{1}{2}\sqrt{S^3\sqrt{2}}$.

18. Указание. См. рис. 8.38.

19. Ответ. $a^2\sqrt{3/2}$.

20. Ответ. $\sqrt{\frac{2}{3}\left(a^2+b^2+\sqrt{a^4-a^2b^2+b^4}\right)}$.

21. Решение. Для того чтобы в сечении получился пятиугольник, секущая плоскость должна пересечь пять граней. Так как

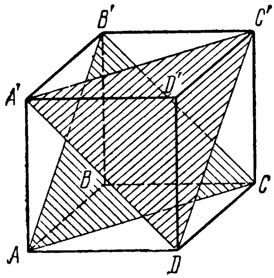


Рис. 8.38.

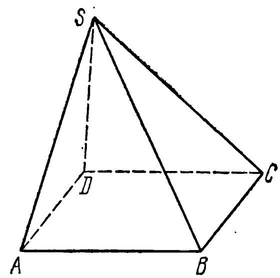


Рис. 8.39.

в параллелепипеде 6 граней, то из пяти граней две обязательно параллельны. Секущая плоскость пересечет эти две грани по параллельным прямым. Но в пятиугольнике (правильном) нет параллельных сторон. Следовательно, такое построение невозможно.

22. Ответ. $S = \frac{4a^2\sqrt{3}}{9}$.

23. Решение. Боковая поверхность пирамиды (рис. 8.39) равна сумме площадей боковых граней $S_{бок} = S_{ASD} + S_{DSC} + S_{CSB} + S_{BSA}$. Треугольники ADS и CDS — прямоугольные и равные, $S_{ASD} = S_{CDS} = \frac{1}{2} \cdot 20 \cdot 21 = 210$ см². Из этих треугольников по теореме Пифагора находим $AS = SC = \sqrt{20^2+21^2} = 29$ см. Так как по теореме о трех перпендикулярах $SC \perp CB$ и $SA \perp AB$ ($DC \perp CB$ и $DA \perp AB$), то треугольники SAB и SCB прямоугольные и равные: $S_{ASB} = S_{CSB} = \frac{1}{2} 20 \cdot 29 = 290$ см². Ответ. $S_{бок} = 1000$ см².

24. Ответ. $V=\frac{\sqrt{3}}{8}H^3$.

25. Ответ. $H=\sqrt[3]{\frac{8\sqrt{3}\,V}{3}}$.

26. Указание. Принять за основание боковую грань.

Ответ. $V=\frac{1}{12}\sqrt{\frac{1}{2}(a^2+l^2-c^2)(a^2+c^2-b^2)(b^2+c^2-a^2)}$.

27. Решение. Пусть O — точка пересечения высот AM, BN, CP треугольника ABC; по условию высота SO перпендикулярна к плоскости ABC (рис. 8.40). Так как $CP\perp AB$ по построению, а CO является проекцией ребра CS на плоскость ABC, то по теореме о трех перпендикулярах (см. п. 8.3.4.), $CS\perp AB$. Так как, кроме того, $CS\perp BS$ (по условию), то, используя признак перпендикулярности (см. п. 8.3.1), заключаем, что CS перпендикулярно к плоскости ASB, откуда следует, что $CS\perp AS$, т. е. $\angle CSA=90°$. Аналогично $\angle ASB=90°$. Поэтому

$$\frac{S_{ASB}}{S_{ASC}}=\frac{\frac{1}{2}AS\cdot SB}{\frac{1}{2}AS\cdot SC}=\frac{b}{c}.$$ Ответ. b/c.

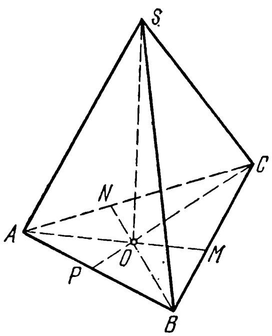


Рис. 8.40.

28. Указание. Доказать, что проведенная из вершины основания высота пересекает боковую грань в точке, принадлежащей высоте боковой грани. Ответ. $V=\frac{a^3b}{12\sqrt{3a^2-4b^2}}$.

29. Ответ. $V=\frac{2}{3}\frac{Q^2}{a}$.

30. Ответ. $\sqrt{S_1^2+S_2^2+S_3^2}$.

31. Не существует. Доказать самостоятельно.

32. Решение. Все боковые грани по условию равносторонние треугольники, следовательно, все плоские углы при вершине равны 60°. Но известно, что сумма углов выпуклого многогранного угла меньше 360°. Поэтому $n\leqslant 5$, т. е. $n=3$, 4, 5.

33. Ответ. $S_{\text{сеч}}=\frac{1}{4}a^2$.

34. Ответ. $S_{\text{сеч}}=\frac{\sqrt{3}}{18}h^2$.

35. Ответ. $S_{\text{сеч}}=\frac{\sqrt{3}}{6}a^2$.

36. Ответ. $\frac{a^2\sqrt{3}}{4}\left(1+\sqrt{\frac{3(2m+n)}{n}}\right)$.

37. Решение. Очевидно, что четырехугольник сечения $AEFD$ — равнобочная трапеция (рис. 8.41). Пусть точки G и H — середины ее оснований. Опустим из точки H перпендикуляр HK на основание

пирамиды. Так как H — середина SN, то $HK=\frac{h}{2}$, $KN=\frac{a}{4}$, $GK=\frac{3a}{4}$. Определим далее длины отрезков QO и QS. Так как $\frac{QO}{HK}=\frac{GO}{GK}$, то $QO=\frac{h}{2}\cdot\frac{a}{2}\cdot\frac{4}{3a}=\frac{h}{3}$, откуда $QS=\frac{2}{3}h$, $GQ=\sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2+\left(\frac{h}{3}\right)^2}$. Опустим из точки S перпендикуляр SM на GH. Тогда из подобия треугольников SMQ и GOQ имеем $\frac{SM}{QS}=\frac{GO}{GQ}$, и, следовательно, искомое расстояние $SM=QS\cdot\frac{GO}{GQ}=\frac{2ah}{\sqrt{9a^2+4h^2}}$.

Ответ. $\frac{2ah}{\sqrt{9a^2+4h^2}}$.

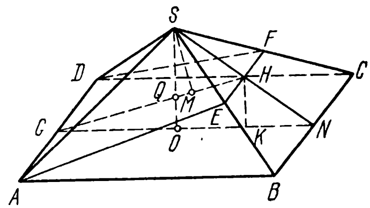


Рис. 8.41.

38. Ответ. $S_{\text{сеч}}=\frac{b}{6}\sqrt{q^2+a^2}$.

39. Ответ. $S_{\text{бок}}=160$ см^2.

40. Ответ. $V=1900$ м^3.

41. Ответ. 656,25 см^2.

42. Ответ. $\frac{1}{4}(\sqrt{S_1}+\sqrt{S_2})^2$.

43. Решение. Пусть $S_1>S_2$. Обозначим объем полной пирамиды через V_1, а объем пирамиды, дополняющей данную усеченную пирамиду до полной через V_2. Нетрудно доказать, что квадраты объемов подобных многогранников относятся как кубы сходственных граней. Тогда $\frac{V_2^2}{V_1^2}=\frac{S_2^3}{S_1^3}$ или $\frac{V_2}{V_1}=\frac{S_3^{3/2}}{S_1^{3/2}}$. Используя свойство пропорции, получим $\frac{V_1-V_2}{V_1}=\frac{S_1^{3/2}-S_2^{3/2}}{S_1^{3/2}}$. Учитывая $V_1-V_2=V$, имеем $\frac{V}{V_1}=\frac{S_1^{3/2}-S_2^{3/2}}{S_1^{3/2}}$ или $V_1=\frac{VS_1^{3/2}}{S_1^{3/2}-S_1^{3/2}}$. Ответ. $V_1=\frac{V\sqrt{S_1^3}}{\sqrt{S_1^3}-\sqrt{S_2^3}}$.

44. См. решение задачи 43. Ответ. $S_{\text{сеч}}=\sqrt[3]{\left(\frac{a^3+b^3}{2}\right)^2}$.

45. См. решение задачи п. 8.6.3. Ответ. $\frac{60(6\sqrt{2}-5)}{47}$.

46. Ответ: $S=\frac{3}{4}a^2$, $V=\frac{a^3\sqrt{2}}{32}$.

ГЛАВА 9

ЭЛЕМЕНТЫ ВЕКТОРНОЙ АЛГЕБРЫ

§ 9.1. Векторы и линейные операции над ними

9.1.1. Основные понятия. Пусть AB — некоторый отрезок прямой. Условившись считать одну из его граничных точек, например A, начальной, а другую — конечной, мы тем самым преобразуем AB в так называемый направленный отрезок $\overrightarrow{AB}$. Если только отрезок не «вырождается в точку», т. е. если точки A и B не совпадают, то направленные отрезки $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{BA}$ считаются различными, несмотря на то, что они построены на базе одного и того же отрезка прямой. При геометрическом изображении направленного отрезка его конец обычно отмечается стрелкой (рис. 9.1). Направленные отрезки обычно называют также еще и *векторами*. Этот термин требует, однако, некоторых пояснений, к которым мы сейчас и переходим.

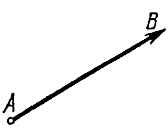


Рис. 9.1.

В зависимости от существа решаемых задач в одних случаях оказывается удобным считать равными между собой все такие векторы, которые могут быть совмещены друг с другом посредством параллельного переноса (на плоскости или в пространстве), в других случаях — только такие, которые расположены на одной и той же прямой и совпадают друг с другом по длине и направлению, в третьих — векторы считают различными, если хотя бы одна из граничных точек одного из них не совпадает с соответствующей граничной точкой второго. В этих случаях говорят соответственно о с в о б о д н ы х, с к о л ь з я щ и х и с в я з а н н ы х (или — закрепленных) векторах. Так как в нашем курсе рассматриваются только свободные векторы, то прилагательное «свободный» мы опустим и будем дальше использовать термин «вектор» в смысле «свободный вектор». В соответствии с этим соглашением основное определение настоящей главы мы сформулируем так.

Определение 9.1. *Вектором называется направленный отрезок. При этом векторы считаются равными между собой в том и только том случае, если они могут быть совмещены (с совпадением их направлений) путем параллельного переноса*[1]).

Длиной вектора называется длина порождающего его отрезка.

Кроме обозначений вида $\overrightarrow{AB}$ (где A — начало, а B — конец направленного отрезка), мы будем обозначать векторы и одной жирной строчной (маленькой) буквой, например: $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{k}$ и т. п.

Длину вектора мы будем обозначать соответственно как

$$|\overrightarrow{AB}|,\ |\boldsymbol{a}|,\ |\boldsymbol{k}|.$$

При самостоятельной работе с литературой нужно учесть, что иногда векторы обозначают строчными буквами со стрелками над ними, например $\vec{a}$, $\vec{k}$, ..., а их длину теми же буквами, напечатанными обычным шрифтом и без стрелок над ними.

Вектор, начало и конец которого совпадают друг с другом, мы будем называть *нулевым вектором* и обозначать символом $\mathbf{0}$. Ясно, что длина нулевого вектора равна 0.

Введем важные для дальнейшего понятия коллинеарности и компланарности векторов.

Определение 9.2. *Вектор $\boldsymbol{a}$ называется коллинеарным прямой l, если он либо расположен целиком на этой прямой, либо может быть помещен на эту прямую путем параллельного переноса. Векторы, коллинеарные одной и той же прямой, называют коллинеарными друг с другом.*

Определение 9.3. *Вектор $\boldsymbol{a}$ называют компланарным плоскости P, если он либо расположен целиком на этой плоскости, либо может быть помещен на нее путем параллельного переноса. Векторы, компланарные одной и*

---

[1]) Сущность этого определения можно было бы выразить и по-другому, назвав вектором (свободным вектором) множество всех таких направленных отрезков, любые два из которых могут быть совмещены друг с другом параллельным переносом (разумеется, с совпадением их направлений).

той же плоскости, называются компланарными между собой.

9.1.2. Сложение и вычитание векторов. Умножение вектора на число. Определение 9.4. *Суммой двух векторов* $\boldsymbol{a}$ *и* $\boldsymbol{b}$ *называется*[1]) *такой вектор* $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$, *начало которого совпадает с началом вектора* $\boldsymbol{a}$, *а конец — с концом вектора* $\boldsymbol{b}$, *при условии, что предварительно начало* $\boldsymbol{b}$ *путем его параллельного переноса было совмещено с концом* $\boldsymbol{a}$ (рис. 9.2).

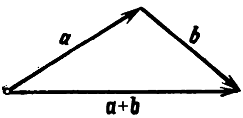


Рис. 9.2.

Определение 9.5. *Разностью двух векторов* $\boldsymbol{a}$ *и* $\boldsymbol{b}$ *называется такой вектор* $\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}$, *который, будучи сложен с вектором* $\boldsymbol{b}$, *дает сумму, равную* $\boldsymbol{a}$:

$$\boldsymbol{b}+(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b})=\boldsymbol{a}. \tag{9.1}$$

Определение 9.6. *Вектор, дающий в сумме с вектором* $\boldsymbol{a}$ *нулевой вектор, называется вектором, противоположным вектору* $\boldsymbol{a}$, *и обозначается* $-\boldsymbol{a}$:

$$\boldsymbol{a}+(-\boldsymbol{a})=\boldsymbol{0}. \tag{9.2}$$

Можно сказать, что формулы (9.1) и (9.2) служат соответственно определениями понятий разности векторов и противоположного вектора.

Ясно, что вектор $-\boldsymbol{a}$, противоположный вектору $\boldsymbol{a}$, может быть получен из этого последнего просто переменой ориентации: за начальную точку $-\boldsymbol{a}$ надо принять конец $\boldsymbol{a}$, а за конец $-\boldsymbol{a}$ — начало $\boldsymbol{a}$.

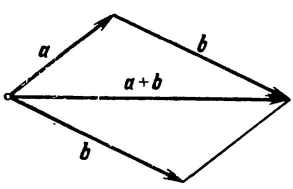


Рис. 9.3.

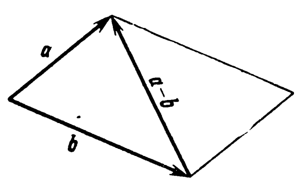


Рис. 9.4.

Нетрудно понять (рис. 9.3), что сумму двух неколлинеарных векторов можно строить, как диагональ параллелограмма, построенного на этих векторах, приведенных

[1]) Так как мы изучаем свободные векторы, то здесь, как и в аналогичных случаях в дальнейшем, имеется в виду «с точностью до параллельного переноса».

предварительно к общему началу, выходящую из этого общего начала.

Другая диагональ этого параллелограмма, рассмотренная как вектор, идущий из конца вектора $\boldsymbol{b}$ в конец вектора $\boldsymbol{a}$, представляет собой разность векторов $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$ (рис. 9.4).

Легко можно было бы доказать, что операции сложения и вычитания векторов и перехода к противоположному вектору обладают следующими свойствами:

1°. $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}=\boldsymbol{b}+\boldsymbol{a}$ (*коммутативность*).

2°. $(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})+\boldsymbol{c}=\boldsymbol{a}+(\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c})$ (*ассоциативность*).

3°. $\boldsymbol{a}+(-\boldsymbol{b})=\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}$.

Мы здесь не будем проводить такого доказательства, а ограничимся лишь рис. 9.5—9.7, иллюстрирующими эти свойства.

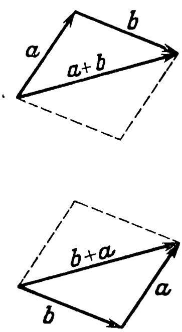


Рис. 9.5.

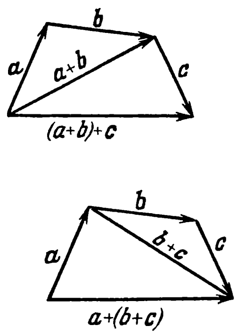


Рис. 9.6.

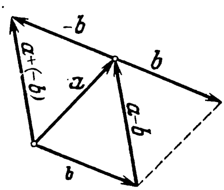


Рис. 9.7.

Определение 9.7. *Произведением вещественного числа λ на вектор $\boldsymbol{a}$ называется вектор $\lambda\boldsymbol{a}$, который:* 1) *имеет длину, равную произведению длины $\boldsymbol{a}$ на абсолютную величину λ:*

$$|\lambda\boldsymbol{a}|=|\lambda||\boldsymbol{a}|,$$

2) *коллинеарен вектору $\boldsymbol{a}$ и направлен одинаково с $\boldsymbol{a}$, если $\lambda>0$ и противоположно $\boldsymbol{a}$, если $\lambda<0$.*

Можно доказать, что для операции умножения вектора на вещественное число и для введенных ранее операций сложения и вычитания векторов и перехода к противоположному вектору, кроме уже отмеченных свойств 1°—3°, справедливы также:

4°. $\lambda_1(\lambda_2\boldsymbol{a})=(\lambda_1\lambda_2)\boldsymbol{a}$.

5°. $(\lambda_1+\lambda_2)\boldsymbol{a}=\lambda_1\boldsymbol{a}+\lambda_2\boldsymbol{a}$.

6°. $\lambda(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})=\lambda\boldsymbol{a}+\lambda\boldsymbol{b}$.

7°. $1\cdot\boldsymbol{a}=\boldsymbol{a}$.

8°. $(-1)\cdot\boldsymbol{a}=-\boldsymbol{a}$.

9°. $0\cdot\boldsymbol{a}=\boldsymbol{0}$.

Отметим в заключение этого пункта, что операции сложения и вычитания векторов и умножения вектора на число носят название *линейных операций.*

9.1.3. Проекция вектора на ось. Разложение вектора по заданным направлениям. Определение 9.8. *Проекцией вектора $\overrightarrow{AB}$ на ось $\boldsymbol{l}$*[1]) *называется вектор $\overrightarrow{AB_l}$, началом которого служит проекция A' точки A на ось $\boldsymbol{l}$, т. е. основание перпендикуляра, опущенного из точки A на ось $\boldsymbol{l}$, а концом — проекция B' точки B* (рис. 9.8).

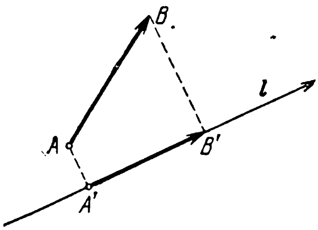


Рис. 9.8.

Величиной этой проекции мы будем называть ее длину, взятую со знаком плюс, если направление $\overrightarrow{AB_l}$ совпадает с направлением $\boldsymbol{l}$, и со знаком минус в противном случае. Обозначать величину проекции мы будем так: AB_l, a_l и т. п. В частности, если вектор $\overrightarrow{AB}$ расположен на оси $\boldsymbol{l}$ (или коллинеарен ей), то его проекция на эту ось совпадает (с точностью до параллельного переноса) с самым проектируемым вектором. Величину этой проекции в таком случае называют еще величиной вектора $\overrightarrow{AB}$ на оси $\boldsymbol{l}$. Величину вектора на оси обозначают AB (ср. с обозначением длины: $|\overrightarrow{AB}|$).

Вектор единичной длины $\boldsymbol{l}_0$, направление которого совпадает с направлением оси $\boldsymbol{l}$, называют обычно *ортом* или *единичным вектором оси* $\boldsymbol{l}$.

Если вектор $\overrightarrow{AB}$ коллинеарен оси $\boldsymbol{l}$, а $\boldsymbol{l}_0$ — орт этой оси, то $\overrightarrow{AB}$, согласно определению произведения вектора на число, можно представить в виде произведения его величины на этой оси на орт $\boldsymbol{l}_0$:

$$\overrightarrow{AB}=AB\cdot\boldsymbol{l}_0. \qquad (9.3)$$

[1]) Напомним, что *осью* называется прямая, на которой выбрано определенное направление.

В дальнейшем удобными для нас будут понятия угла между двумя векторами, между вектором и осью, между двумя осями. Дадим определения этих понятий.

Определение 9.9. *Наименьший из двух углов, на который нужно повернуть вектор* $\boldsymbol{a}$ *до его совпадения с вектором* $\boldsymbol{b}$ *после приведения этих векторов к общему началу, называется углом между векторами* $\boldsymbol{a}$ *и* $\boldsymbol{b}$ (рис. 9.9). *Углом между вектором* $\boldsymbol{a}$ *и осью* $\boldsymbol{l}$ *называется угол между вектором* $\boldsymbol{a}$ *и произвольным ненулевым вектором* $\boldsymbol{l}_1$ *таким, направление которого совпадает с направлением оси* $\boldsymbol{l}$.

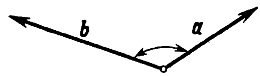


Рис. 9.9.

Аналогично определяется угол между двумя осями $\boldsymbol{l}'$ и $\boldsymbol{l}''$.

Сформулируем основные свойства проекций:

1°. *Проекции равных векторов на одну и ту же ось равны между собой.*

2°. *Проекция суммы векторов на какую-либо ось равна сумме проекций на эту же ось слагаемых векторов.*

3°. *Проекция произведения вектора на число равна произведению проекции этого вектора на то же число.*

4°. *Величина проекции вектора на ось равна произведению длины этого вектора на косинус угла* φ *между этим вектором и осью*

$$a_l = |\boldsymbol{a}| \cdot \cos\varphi. \tag{9.4}$$

Доказательства этих свойств достаточно очевидны (рис. 9.10—9.13). Мы ограничимся здесь лишь доказательством свойства 2°.

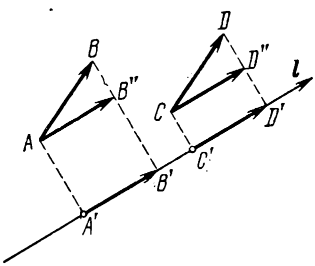


Рис. 9.10.

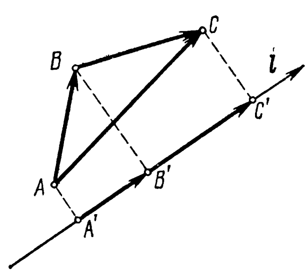


Рис. 9.11.

Располагая слагаемые векторы так, чтобы начало каждого последующего из них совпадало с концом предыдущего, мы получим так называемую векторную ломаную линию. Из определения суммы векторов следует, что их сумму можно представить в виде вектора, замыкающего эту ломаную, т. е. вектора, идущего из начала первого слагаемого в конец последнего. При указанном расположении векторов их проекции на ось l тоже будут обладать тем свойством, что начало проекции каждого последующего слагаемого совпадает с концом проекции предыдущего. Поэтому, опять-таки по определению суммы векторов, сумму этих проекций можно представить как вектор,

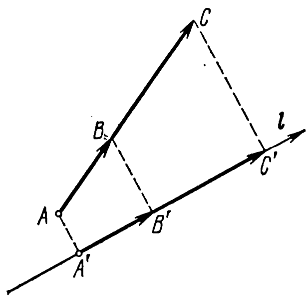


Рис. 9.12.

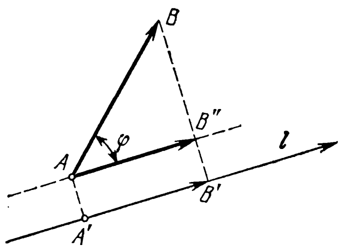


Рис. 9.13.

идущий из проекции начала первого слагаемого в проекцию конца последнего слагаемого. А этот вектор как раз и представляет собой проекцию замыкающего вектора. Применительно к рис. 9.11

$$\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AC},$$

с другой стороны,

$$\overrightarrow{AB}_l+\overrightarrow{BC}_l=\overrightarrow{A'B'}+\overrightarrow{B'C'}=\overrightarrow{A'C'},$$

откуда

$$(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC})_l=\overrightarrow{AB}_l+\overrightarrow{BC}_l.$$

В заключение этого пункта рассмотрим так называемую задачу о разложении вектора по заданным направлениям. Пусть сначала две неколлинеарные оси l_1 и l_2 и вектор $\boldsymbol{a}$ расположены в одной и той же плоскости, и требуется представить вектор $\boldsymbol{a}$ в виде суммы двух слагаемых $\boldsymbol{a}_1$ и $\boldsymbol{a}_2$ так, чтобы $\boldsymbol{a}_1$ был коллинеарен оси l_1, а $\boldsymbol{a}_2$ — оси l_2. Параллельным переносом совместим начало вектора $\boldsymbol{a}$ с точкой O пересечения осей l_1 и l_2, а через его конец проведем прямые, параллельные этим осям (рис. 9.14). Точки пересечения этих прямых с $\boldsymbol{l}_1$ и $\boldsymbol{l}_2$ обозначим через M_1 и M_2. Очевидно, что

$$\boldsymbol{a} = \overrightarrow{OM}_1 + \overrightarrow{OM}_2. \tag{9.5}$$

Покажем, что (с точностью до параллельного переноса векторов $\overrightarrow{OM}_1$ и $\overrightarrow{OM}_2$) такое разложение единственно. Действительно, пусть $\boldsymbol{a}_1 \parallel \boldsymbol{l}_1$ и $\boldsymbol{a}_2 \parallel \boldsymbol{l}_2$.

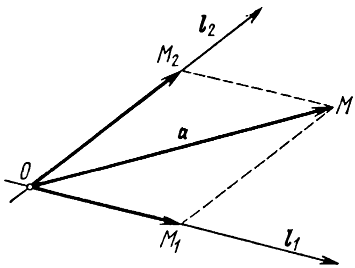


Рис. 9.14.

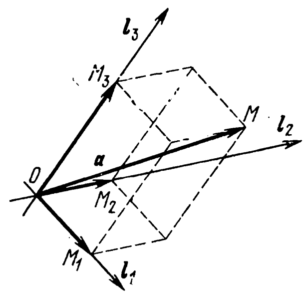


Рис. 9.15.

Поместив начало каждого из этих векторов в точку O, мы видим, что для того, чтобы их сумма равнялась вектору $\boldsymbol{a}$, необходимо и достаточно, чтобы $\boldsymbol{a}_1 = \overrightarrow{OM}_1$ и $\boldsymbol{a}_2 = \overrightarrow{OM}_2$.

Пусть теперь $\boldsymbol{l}_1$, $\boldsymbol{l}_2$ и $\boldsymbol{l}_3$ — три некомпланарные оси, а $\boldsymbol{a}$ — произвольный вектор. Посредством параллельного переноса добьемся, чтобы все эти оси проходили через некоторую точку O, и в эту же точку поместим начало вектора $\boldsymbol{a}$ (рис. 9.15). Через его конец проведем плоскости P_1, P_2 и P_3 так, чтобы

$$\begin{aligned} &P_1 \parallel \boldsymbol{l}_2, \quad P_1 \parallel \boldsymbol{l}_3, \\ &P_2 \parallel \boldsymbol{l}_1, \quad P_2 \parallel \boldsymbol{l}_3, \\ &P_3 \parallel \boldsymbol{l}_1, \quad P_3 \parallel \boldsymbol{l}_2. \end{aligned}$$

Точки пересечения P_1 и $\boldsymbol{l}_1$, P_2 и $\boldsymbol{l}_2$, P_3 и $\boldsymbol{l}_3$ обозначим соответственно через M_1, M_2 и M_3. Тогда очевидно, что

$$\boldsymbol{a} = \overrightarrow{OM}_1 + \overrightarrow{OM}_2 + \overrightarrow{OM}_3, \tag{9.6}$$

причем, как и в предыдущем случае, это разложение единственно (с точностью до параллельного переноса векторов $\overrightarrow{OM}_1$, $\overrightarrow{OM}_2$ и $\overrightarrow{OM}_3$).

§ 9.2. Векторы в декартовой системе координат

9.2.1. Декартова система координат в пространстве. Координаты вектора и их выражение через координаты его начала и конца. Декартова система координат на плоскости хорошо известна учащимся по школьному курсу, поэтому на ее описании мы здесь останавливаться не будем, а сразу перейдем к рассмотрению декартовой системы координат в пространстве.

Пусть $\overrightarrow{Ox}$, $\overrightarrow{Oy}$, $\overrightarrow{Oz}$ — три взаимно перпендикулярные оси, проходящие через общую для всех них точку O. С произвольной точкой пространства M свяжем вектор $\overrightarrow{OM}$ — так называемый *радиус-вектор* точки M, и спроектируем его на каждую из осей. Обозначим величины соответствующих проекций (рис. 9.16) OM_{Ox}, OM_{Oy} и OM_{Oz} через x, y и z. Эти числа x, y, z называются *координатами* точки M относительно выбранной системы осей, а сама эта система — *декартовой координатной системой*; x называется *абсциссой*, y — *ординатой* и z — *аппликатой* точки M. Пространство, в котором введена такая координатная система, называют обычно *декартовым координатным пространством* $Oxyz$. Из доказанной в п. 9.1.3 единственности разложения вектора по трем некомпланарным направлениям следует, что каждой точке M соответствует в точности одна упорядоченная тройка чисел, представляющих собой ее координаты (в порядке следования: абсцисса, ордината, аппликата). Очевидно, что различным точкам M' и M'' соответствуют различные тройки их координат (различные хотя бы по одной из координат).

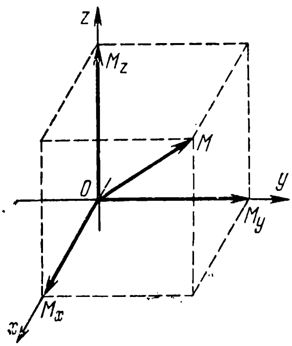


Рис. 9.16.

Действительно, выполнение всех трех равенств

$$x' = x'', \quad y' = y'' \quad \text{и} \quad z' = z''$$

означало бы, что

$$\overrightarrow{OM'}_{\overrightarrow{Ox}} = \overrightarrow{OM''}_{\overrightarrow{Ox}}, \quad \overrightarrow{OM'}_{\overrightarrow{Oy}} = \overrightarrow{OM''}_{\overrightarrow{Oy}} \quad \text{и} \quad \overrightarrow{OM'}_{\overrightarrow{Oz}} = \overrightarrow{OM''}_{\overrightarrow{Oz}},$$

а тогда и векторы $\overrightarrow{OM'}$ и $\overrightarrow{OM''}$ были бы равны между собой, что противоречит предположению о том, что точки M' и M'' различны.

С другой стороны, очевидно, что, отправляясь от заданной тройки чисел $(x;\ y;\ z)$, мы всегда можем построить такую точку M, для которой эти числа будут соответственно абсциссой, ординатой и аппликатой.

Таким образом, между множеством всех точек пространства, в котором введена декартова система координат, и множеством всевозможных упорядоченных троек вещественных чисел устанавливается взаимно однозначное соответствие. Это обстоятельство, как и в «двумерном случае», позволяет нам говорить о тех или иных геометрических объектах и их свойствах на языке этих упорядоченных троек чисел.

Пусть теперь $\overrightarrow{AB}$ — произвольный вектор в декартовом координатном пространстве $Oxyz$. Будем называть координатами этого вектора величины его проекций AB_{Ox}, AB_{Oy} и AB_{Oz} на оси $\overrightarrow{Ox}$, $\overrightarrow{Oy}$, $\overrightarrow{Oz}$.

Рассуждая таким же образом, как и в том случае, когда речь шла о координатах точек, мы приходим к заключению о том, что между множеством всех векторов в пространстве и множеством всех упорядоченных троек вещественных чисел введением системы координат устанавливается взаимно однозначное соответствие (разумеется, при том принятом нами ранее условии, что мы отождествляем друг с другом такие векторы, которые можно совместить посредством параллельного их переноса). Тем самым мы получаем возможность говорить о векторах и тех или иных соотношениях между ними на языке упорядоченных троек чисел.

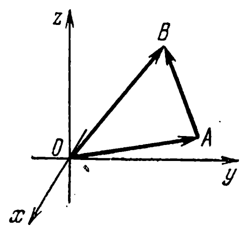


Рис. 9.17.

Обозначим координаты точки A через x_A, y_A и z_A, а координаты точки B — через x_B, y_B и z_B.

Так как $\overrightarrow{AB}$ можно представить в виде разности радиус-векторов точек B и A:

$$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA}$$

(рис. 9.17), то, согласно свойствам проекций, отсюда следует, что

$$\begin{aligned} AB_{Ox} &= OB_{Ox} - OA_{Ox} = x_B - x_A, \\ AB_{Oy} &= OB_{Oy} - OA_{Oy} = y_B - y_A, \\ AB_{Oz} &= OB_{Oz} - OA_{Oz} = z_B - z_A, \end{aligned} \qquad (9.7)$$

т. е. что координаты вектора равны разностям соответствующих координат его конца и начала.

9.2.2. Линейные операции над векторами в координатной форме записи. Обозначим через $\boldsymbol{i}$, $\boldsymbol{j}$ и $\boldsymbol{k}$ орты координатных осей, т. е. векторы единичной длины, расположенные соответственно на координатных осях $\overrightarrow{Ox}$, $\overrightarrow{Oy}$ и $\overrightarrow{Oz}$, и такие, что их направления совпадают с направлениями своих осей.

Пусть $\overrightarrow{AB}$ — произвольный вектор, а $\overrightarrow{A_xB_x}$, $\overrightarrow{A_yB_y}$ и $\overrightarrow{A_zB_z}$ — его проекции на координатные оси, величины которых мы обозначим через x, y и z. Согласно формуле (9.3) мы можем тогда записать, что

$$\overrightarrow{A_xB_x} = x\boldsymbol{i}, \quad \overrightarrow{A_yB_y} = y\boldsymbol{j}, \quad \overrightarrow{A_zB_z} = z\boldsymbol{k},$$

а тогда из формулы

$$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{A_xB_x} + \overrightarrow{A_yB_y} + \overrightarrow{A_zB_z}$$

мы получаем

$$\overrightarrow{AB} = x\boldsymbol{i} + y\boldsymbol{j} + z\boldsymbol{k}, \qquad (9.8)$$

где x, y и z — координаты вектора $\overrightarrow{AB}$.

Формула (9.8) называется *формулой разложения вектора $\overrightarrow{AB}$ по координатным осям*. Мы видим, что коэффициентами этого разложения служат как раз координаты вектора $\overrightarrow{AB}$.

Как мы уже отмечали, после выбора в пространстве определенной декартовой системы координат, вектор и тройка его координат взаимно определяют друг друга. Этим оправдывается удобное в ряде случаев соглашение записывать разложение (9.8) в виде

$$\overrightarrow{AB} = (x;\ y;\ z). \qquad (9.9)$$

Правая часть формулы (9.9) называется *записью вектора $\overrightarrow{AB}$ в координатной форме*. Если x_A, y_A и z_A — координаты точки A, а x_B, y_B и z_B — точки B, то, в соответствии с (9.7), мы можем переписать (9.9) в виде

$$\overrightarrow{AB} = (x_B - x_A;\ y_B - y_A;\ z_B - z_A). \qquad (9.9')$$

Пусть $\boldsymbol{a}_1 = (x_1;\ y_1;\ z_1)$ и $\boldsymbol{a}_2 = (x_2;\ y_2;\ z_2)$ — два вектора, а λ — некоторое вещественное число. Так как величина проекции вектора $\boldsymbol{a}_1 + \boldsymbol{a}_2$ на любую ось равна сумме величин проекций слагаемых векторов, то координатами вектора $\boldsymbol{a}_1 + \boldsymbol{a}_2$ будут числа $x_1 + x_2$, $y_1 + y_2$ и $z_1 + z_2$, откуда

$$\boldsymbol{a}_1 + \boldsymbol{a}_2 = (x_1 + x_2;\ y_1 + y_2;\ z_1 + z_2). \qquad (9.10)$$

Аналогично

$$\boldsymbol{a}_1 - \boldsymbol{a}_2 = (x_1 - x_2;\ y_1 - y_2;\ z_1 - z_2) \qquad (9.11)$$

и

$$\lambda \boldsymbol{a}_1 = (\lambda x_1;\ \lambda y_1;\ \lambda z_1). \qquad (9.12)$$

Равенства (9.10)—(9.12) можно переписать в виде

$$(x_1;\ y_1;\ z_1) + (x_2;\ y_2;\ z_2) = (x_1 + x_2;\ y_1 + y_2;\ z_1 + z_2), \qquad (9.10')$$

$$(x_1;\ y_1;\ z_1) - (x_2;\ y_2;\ z_2) = (x_1 - x_2;\ y_1 - y_2;\ z_1 - z_2), \qquad (9.11')$$

$$\lambda \cdot (x_1;\ y_1;\ z_1) = (\lambda x_1;\ \lambda y_1;\ \lambda z_1). \qquad (9.12')$$

Формулы (9.10′)—(9.12′) выражают собой правила выполнения линейных операций над векторами в координатной форме записи.

9.2.3. Выражение длины вектора через его координаты и через координаты его начала и конца. Деление отрезка в заданном отношении. Пусть $\boldsymbol{a} = (x;\ y;\ z)$ — некоторый вектор. Приведя к общему началу векторы $\boldsymbol{a}$, $x\boldsymbol{i}$, $y\boldsymbol{j}$ и $z\boldsymbol{k}$, мы видим, что вектор $\boldsymbol{a}$ представляет собой диагональ прямоугольного параллелепипеда, построенного на остальных трех векторах. Тогда по формуле, выражающей длину такой диагонали через длины ребер, получаем

$$|\boldsymbol{a}| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}. \qquad (9.13)$$

Если точки $A(x_A;\ y_A;\ z_A)$ и $B(x_B;\ y_B;\ z_B)$ представляют собой соответственно начало и конец вектора $\boldsymbol{a}$, то по формулам (9.7)

$$x = x_B - x_A, \quad y = y_B - y_A, \quad z = z_B - z_A.$$

Подставляя эти выражения в (9.13), мы приходим к формуле, выражающей длину вектора $\overrightarrow{AB}$ через координаты его начальной и конечной точек

$$|\overrightarrow{AB}|=\sqrt{(x_B-x_A)^2+(y_B-y_A)^2+(z_B-z_A)^2}. \quad (9.14)$$

Пусть A и B — пара несовпадающих друг с другом точек. Проведем через эти точки прямую и произвольным образом выберем на ней определенное направление. Получившуюся ось обозначим через l. Пусть C — некоторая точка на этой прямой, отличная от точки B. Мы будем говорить, что точка C делит направленный отрезок $\overrightarrow{AB}$ в отношении λ, если λ представляет собой отношение величины вектора $\overrightarrow{AC}$ к величине вектора $\overrightarrow{CB}$

$$\lambda=\frac{\overrightarrow{AC}}{\overrightarrow{CB}}. \quad (9.15)$$

Нетрудно понять, что $\lambda>0$ тогда и только тогда, когда лежит между A и B; $\lambda=0$, если $A=C$ и $\lambda<0$ тогда и только тогда, когда C лежит вне отрезка AB. Понятно также, что величина λ не зависит от того, какое именно из двух возможных направлений на прямой будет выбрано.

Из формулы (9.15), согласно определению произведения вектора на число, следует, что

$$\overrightarrow{AC}=\lambda\cdot\overrightarrow{CB}. \quad (9.16)$$

Переписав равенство (9.16) в координатной форме

$(x_C-x_A;\ y_C-y_A;\ z_C-z_A)=\lambda\cdot(x_B-x_C;\ y_B-y_C;\ z_B-z_C)$,

мы далее получаем

$$\begin{aligned} x_C-x_A&=\lambda\,(x_B-x_C),\\ y_C-y_A&=\lambda\,(y_B-y_C),\\ z_C-z_A&=\lambda\,(z_B-z_C), \end{aligned} \quad (9.17)$$

откуда, в свою очередь, следует, что

$$x_C=\frac{x_A+\lambda x_B}{1+\lambda},\quad y_C=\frac{y_A+\lambda y_B}{1+\lambda},\quad z_C=\frac{z_A+\lambda z_B}{1+\lambda}. \quad (9.18)$$

Формулы (9.18) позволяют найти координаты точки деления по известной величине λ и известным координатам точек A и B. Если точка C является серединой отрезка AB, то отношение $\lambda=1$ и формулы (9.18) в этом случае принимают вид

$$x_C=\frac{x_A+x_B}{2},\quad y_C=\frac{y_A+y_B}{2},\quad z_C=\frac{z_A+z_B}{2}. \quad (9.18')$$

Разрешая соотношения (9.17) относительно λ, мы получим

$$\lambda = \frac{x_C - x_A}{x_B - x_C} = \frac{y_C - y_A}{y_B - y_C} = \frac{z_C - z_A}{z_B - z_C}. \tag{9.19}$$

Эти формулы позволяют найти отношение λ, если известны одноименные координаты лежащих на одной прямой точек A, B и C хотя бы относительно какой-нибудь одной из координатных осей.

9.2.4. Векторы на декартовой координатной плоскости. Понятие об m-мерных векторах. В предыдущих пунктах этого параграфа мы рассматривали векторы, расположенные в декартовом координатном пространстве трех измерений. Все проделанные там рассуждения, выводы и формулы совершенно очевидным образом переносятся и на тот случай, когда речь идет о векторах, расположенных на декартовой координатной плоскости. Для этого «двумерного случая» формулы, аналогичные формулам (9.7)—(9.17), будут отличаться от этих последних лишь тем, что в них будут отсутствовать члены, связанные с координатной осью Oz и ее ортом $\boldsymbol{k}$. Так, например, формулы, аналогичные (9.9′) и (9.14), примут соответственно вид

$$\overrightarrow{AB} = (x_B - x_A;\ y_B - y_A)$$

и

$$|\overrightarrow{AB}| = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2},$$

а число формул, скажем (9.17), сократится с трех до двух.

Нередко оказывается удобным рассматривать множество всевозможных упорядоченных наборов, состоящих каждый из m чисел, вводя в этом множестве операции сложения и умножения на вещественное число посредством формул, аналогичных формулам (9.10′)—(9.12′). В этих случаях такие наборы тоже принято называть *векторами*, хотя, конечно, при $m > 3$ мы не можем интерпретировать эти числовые наборы и операции над ними в том же духе, как это было сделано для упорядоченных троек чисел. Тем не менее и в этих случаях векторная терминология оказывается полезной. В частности, и при $m > 3$ мы говорим о «длине вектора» $\boldsymbol{a} = (x_1;\ x_2;\ \ldots;\ x_m)$, понимая под этой длиной число

$$|\boldsymbol{a}| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_m^2}. \tag{9.20}$$

В следующем параграфе мы увидим, что и некоторые другие понятия, вводимые сначала для векторов в «обычном» (геометрическом) смысле этого слова, естественным образом переносятся и на m-мерные векторы.

§ 9.3. Дальнейшие операции над векторами

9.3.1. Скалярное умножение векторов. Определение 9.10. *Скалярным произведением вектора* $\boldsymbol{a}$ *на вектор* $\boldsymbol{b}$ *называется число*

$$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=|\boldsymbol{a}|\cdot|\boldsymbol{b}|\cdot\cos\varphi, \tag{9.21}$$

где φ *— угол между* $\boldsymbol{a}$ *и* $\boldsymbol{b}$.

Операция скалярного умножения векторов обладает следующими свойствами:

1°. $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{a}$.

2°. $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{a}=|\boldsymbol{a}|^2$.

3°. $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=0$ тогда и только тогда, когда векторы $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$ взаимно перпендикулярны или же хотя бы один из них равен $\mathbf{0}$[1]).

4°. $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=|\boldsymbol{a}|\cdot b_a$, где b_a означает величину проекции $\boldsymbol{b}$ на ось, направление которой совпадает с направлением $\boldsymbol{a}$.

5°. $(\lambda\boldsymbol{a})\cdot(\boldsymbol{b})=\lambda\cdot(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b})$.

6°. $\boldsymbol{a}\cdot(\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c})=\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}+\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{c}$.

Свойства 1°, 2° и 3° вытекают непосредственно из определения 9.10, а свойство 4° — из этого же определения и формулы (9.4). Для доказательства свойства 5° мы рассмотрим три случая: $\lambda=0$, $\lambda>0$ и $\lambda<0$.

При $\lambda=0$ левая и правая части доказываемого равенства обращаются в нуль.

При $\lambda>0$ направления векторов $\lambda\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{a}$ совпадают, поэтому равны между собой и углы φ_1 и φ_2, составленные соответственно векторами $\lambda\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$ и векторами $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$. Так как, кроме того, при $\lambda>0$ будет $|\lambda\boldsymbol{a}|=\lambda\cdot|\boldsymbol{a}|$, то

$$(\lambda\boldsymbol{a})\cdot\boldsymbol{b}=|\lambda\boldsymbol{a}|\cdot|\boldsymbol{b}|\cdot\cos\varphi_1=\lambda\cdot|\boldsymbol{a}|\cdot|\boldsymbol{b}|\cdot\cos\varphi_2=\lambda\cdot(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}).$$

Если же $\lambda<0$, то векторы $\lambda\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{a}$ направлены противоположно друг другу, поэтому углы φ_1 и φ_2 дополняют друг друга до π, откуда

$$\cos\varphi_1=-\cos\varphi_2. \tag{9.22}$$

[1]) Условившись о возможности приписывать нуль-вектору любое удобное для нас направление, мы могли бы освободиться от этой последней части фразы.

При $\lambda < 0$ будет также

$$|\lambda \boldsymbol{a}| = -\lambda \cdot |\boldsymbol{a}|. \tag{9.23}$$

С учетом (9.22) и (9.23) мы получаем

$$(\lambda \boldsymbol{a}) \cdot \boldsymbol{b} = |\lambda \boldsymbol{a}| \cdot |\boldsymbol{b}| \cdot \cos\varphi_1 = -\lambda \cdot |\boldsymbol{a}| \cdot |\boldsymbol{b}| \cdot (-\cos\varphi_2) = \\ = \lambda \cdot |\boldsymbol{a}| \cdot |\boldsymbol{b}| \cdot \cos\varphi_2 = \lambda \cdot (\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b}).$$

Для доказательства свойства 6° нам достаточно заметить, что, согласно свойствам проекций,

$$(\boldsymbol{b} + \boldsymbol{c})_a = \boldsymbol{b}_a + \boldsymbol{c}_a,$$

после чего выразить левую и правую части 6° по формуле 4°. Доказанные свойства позволяют нам при выполнении операции скалярного умножения выражений вида

$$\lambda_1 \boldsymbol{a}_1 + \ldots + \lambda_m \boldsymbol{a}_m \quad \text{и} \quad \mu_1 \boldsymbol{b}_1 + \ldots + \mu_n \boldsymbol{b}_n$$

раскрывать скобки и перегруппировывать слагаемые так, как если бы речь шла об умножении обычных многочленов. Воспользуемся этим замечанием для вывода формулы скалярного произведения векторов в координатной форме записи. Пусть

$$\boldsymbol{a} = (x_a;\ y_a;\ z_a) \quad \text{и} \quad \boldsymbol{b} = (x_b;\ y_b;\ z_b). \tag{9.24}$$

Переписав (9.24) в виде

$$\boldsymbol{a} = x_a \boldsymbol{i} + y_a \boldsymbol{j} + z_a \boldsymbol{k}, \\ \boldsymbol{b} = x_b \boldsymbol{i} + y_b \boldsymbol{j} + z_b \boldsymbol{k},$$

мы после очевидных преобразований получим

$$\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b} = (x_a \boldsymbol{i} + y_a \boldsymbol{j} + z_a \boldsymbol{k}) \cdot (x_b \boldsymbol{i} + y_b \boldsymbol{j} + z_b \boldsymbol{k}) = \\ = x_a x_b (\boldsymbol{i} \cdot \boldsymbol{i}) + x_a y_b (\boldsymbol{i} \cdot \boldsymbol{j}) + x_a z_b (\boldsymbol{i} \cdot \boldsymbol{k}) + y_a x_b (\boldsymbol{j} \cdot \boldsymbol{i}) + \\ + y_a y_b (\boldsymbol{j} \cdot \boldsymbol{j}) + y_a z_b (\boldsymbol{j} \cdot \boldsymbol{k}) + z_a x_b (\boldsymbol{k} \cdot \boldsymbol{i}) + \\ + z_a y_b (\boldsymbol{k} \cdot \boldsymbol{j}) + z_a z_b (\boldsymbol{k} \cdot \boldsymbol{k}) = x_a x_b + y_a y_b + z_a z_b,$$

ибо, согласно определению 9.10, скалярное произведение орта любой координатной оси на самого себя равно 1, а скалярное произведение ортов различных координатных осей равно 0. Запишем полученный результат так:

$$(x_a;\ y_a;\ z_a) \cdot (x_b;\ y_b;\ z_b) = x_a x_b + y_a y_b + z_a z_b. \tag{9.25}$$

Из формулы (9.21) очевидным образом следует, что

$$\cos\varphi = \frac{\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b}}{|\boldsymbol{a}| \cdot |\boldsymbol{b}|}. \tag{9.26}$$

Переходя в (9.26) к координатам векторов $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$, мы, с учетом (9.25) и (9.13), получаем

$$\cos\varphi = \frac{x_a x_b + y_a y_b + z_a z_b}{\sqrt{x_a^2 + y_a^2 + z_a^2} \cdot \sqrt{x_b^2 + y_b^2 + z_b^2}}. \tag{9.27}$$

Для нахождения угла между двумя векторами, заданными в координатной форме, чаще всего именно эта формула оказывается наиболее удобной.

Из свойства 4° мы получаем для величины проекции вектора $\boldsymbol{b}$ на направление вектора $\boldsymbol{a}$ формулу

$$b_a = \frac{\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b}}{|\boldsymbol{a}|}. \tag{9.28}$$

Переходя к координатам, мы получаем

$$b_a = \frac{x_a x_b + y_a y_b + z_a z_b}{\sqrt{x_a^2 + y_a^2 + z_a^2}}. \tag{9.29}$$

Применяя формулу (9.27) для вычисления косинусов углов, составленных произвольным вектором $\boldsymbol{a} = (x; y; z)$ с координатными осями, или, что то же самое, с ортами этих осей, мы, с учетом того, что

$$\boldsymbol{i} = (1; 0; 0), \quad \boldsymbol{j} = (0; 1; 0), \quad \boldsymbol{k} = (0; 0; 1), \tag{9.30}$$

получаем

$$\cos\alpha = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}, \quad \cos\beta = \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}},$$
$$\cos\gamma = \frac{z}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}, \tag{9.31}$$

где через α, β и γ обозначены углы, составленные вектором $\boldsymbol{a}$ с осями $\overrightarrow{Ox}$, $\overrightarrow{Oy}$ и $\overrightarrow{Oz}$ (соответственно). $\cos\alpha$, $\cos\beta$ и $\cos\gamma$ называют обычно *направляющими косинусами вектора* $\boldsymbol{a}$ (относительно данной системы координат).

Случай, когда рассматриваемые векторы мы относим к декартовой системе координат Oxy на плоскости, отличается от «пространственного случая» лишь тем, что в «двумерных аналогах» формул (9.24)—(9.31) исчезают члены, связанные с осью $\overrightarrow{Oz}$.

Понятие скалярного произведения распространяется и на m-мерные векторы (см. п. 9.2.4). Именно, по аналогии с формулой (9.25) скалярное произведение m-мерных векторов

$$\boldsymbol{a}' = (x_1'; x_2'; \ldots; x_m') \quad \text{и} \quad \boldsymbol{a}'' = (x_1''; x_2''; \ldots; x_m'') \tag{9.32}$$

определяют формулой

$$(x_1'; \ldots; x_m') \cdot (x_1''; \ldots; x_m'') = x_1'x_1'' + x_2'x_2'' + \ldots + x_m'x_m''. \qquad (9.33)$$

«Угол» φ между векторами (9.32) определяют соотношениями

$$\cos\varphi = \frac{x_1'x_1'' + x_2'x_2'' + \ldots + x_m'x_m''}{\sqrt{(x_1')^2 + (x_1')^2 + \ldots + (x_m')^2} \cdot \sqrt{(x_1'')^2 + (x_2'')^2 + \ldots + (x_m'')^2}}, \qquad (9.34)$$

$$0 \leqslant \varphi \leqslant \pi,$$

а «проекцию» вектора $\boldsymbol{a}''$ на «направление» вектора $\boldsymbol{a}'$ — формулой

$$\boldsymbol{a}''_{\boldsymbol{a}'} = (x_1''\nu_1; x_2''\nu_2; \ldots; x_m''\nu_m), \qquad (9.35)$$

где

$$\nu_i = \frac{x_i'}{\sqrt{(x_1')^2 + (x_2')^2 + \ldots + (x_m')^2}}.$$

Разумеется при $m > 3$ не следует пытаться истолковать термины «угол», «направление», «проекция» в привычном для двумерной и трехмерной геометрии смысле.

9.3.2. Векторное умножение векторов. Для векторов, расположенных в трехмерном пространстве, кроме рассмотренной нами в п. 9.3.1 операции скалярного умножения, рассматривают еще одну операцию, также называемую умножением, но теперь уже «векторным». Несколько забегая вперед и предваряя соответствующее определение, отметим, что если прилагательное «скалярное» указывало на то обстоятельство, что результатом операции умножения является число (скаляр), то использование термина «векторное» связано с тем, что здесь уже имеется в виду, что результатом этой новой операции будет служить вектор.

Прежде чем дать определение векторного произведения, мы введем одно важное понятие, связанное с взаимным расположением в пространстве тройки некомпланарных между собой векторов. Подчеркиваем, что все, о чем идет речь в этом и следующем пунктах, относится только к трехмерному пространству.

Определение 9.11. *Упорядоченная тройка некомпланарных между собой векторов* $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ *и* $\boldsymbol{c}$ *называется правой тройкой, если после приведения их к общему началу вращение первого из них до совпадения со вторым через* *наименьший угол между ними при наблюдении из конца третьего вектора представляется происходящим против часовой стрелки.*

Определение *левой тройки* дается аналогично, с той лишь разницей, что вращение должно представляться происходящим по часовой стрелке.

Трехмерная декартова система координат называется *правой*, если тройка ортов ее осей $\boldsymbol{i}$, $\boldsymbol{j}$, $\boldsymbol{k}$ (именно в этом порядке) — правая. Аналогично дается определение *левой* системы координат. Мы впредь всегда будем использовать только правую координатную систему.

Определение 9.12. *Векторным произведением вектора $\boldsymbol{a}$ на вектор $\boldsymbol{b}$ (в указанном порядке) мы будем называть вектор $\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}$ такой, что*

I. *Его длина* $|\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}|=|\boldsymbol{a}|\cdot|\boldsymbol{b}|\cdot\sin\varphi$, *где* φ — *угол между $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$.*

II. $\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}$ *перпендикулярен каждому из перемножаемых векторов.*

III. *В тех случаях, когда* $|\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}|\neq 0$, *направление* $\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}$ *таково, что тройка* $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ *и* $(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})$ — *правая.*

Условия I—III всегда однозначно определяют вектор $\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}$. Действительно, если $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$ коллинеарны друг другу (мы включаем сюда и случай, когда один из них или они оба равны 0), то $|\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}|=0$, откуда $\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}=\boldsymbol{0}$. Во всех остальных случаях $\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}$, согласно условию II, перпендикулярен плоскости векторов $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$, условие III определяет одно из двух возможных направлений на этом перпендикуляре, а условие I — длину вектора $\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}$. (См. также рис. 9.18.)

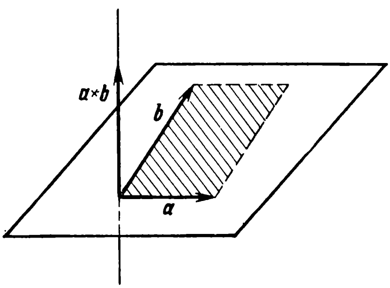


Рис. 9.18.

Операция векторного умножения обладает следующими свойствами:

1°. $\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}=-\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{a}$.

2°. $\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{a}=\boldsymbol{0}$.

3°. $\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}=\boldsymbol{0}$ *тогда и только тогда, когда $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$ коллинеарны друг другу (включая сюда и те случаи, когда хоть один из них равен* $\boldsymbol{0}$).

4°. $(\lambda\boldsymbol{a})\times\boldsymbol{b}=\lambda\cdot(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})$.

5°. $\boldsymbol{a}\times(\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c})=\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}+\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{c}$.

Свойства 1°—4° очевидным образом следуют из определения 9.12. Что же касается свойства 5°, то мы его здесь примем без доказательства.

Заметим, что свойства 1°—5° позволяют нам при векторном умножении выражения $\lambda_1 \boldsymbol{a}_1 + \lambda_2 \boldsymbol{a}_2 + \ldots + \lambda_m \boldsymbol{a}_m$ на выражение $\mu_1 \boldsymbol{b}_1 + \mu_2 \boldsymbol{b}_2 + \ldots + \mu_n \boldsymbol{b}_n$ раскрывать скобки и переставлять слагаемые так, как если бы умножались обычные многочлены. Единственная (но весьма существенная!) разница состоит здесь в том, что в получившихся произведениях векторы $\boldsymbol{a}_i$ всегда будут являться первыми сомножителями, а $\boldsymbol{b}_k$—вторыми, коль скоро речь идет о произведении

$$(\lambda_1 \boldsymbol{a}_1 + \lambda_2 \boldsymbol{a}_2 + \ldots + \lambda_m \boldsymbol{a}_m) \times (\mu_1 \boldsymbol{b}_1 + \mu_2 \boldsymbol{b}_2 + \ldots + \mu_n \boldsymbol{b}_n).$$

Рассмотрим теперь, как выполняется операция векторного умножения в координатной форме записи. Отметим сначала, что непосредственно из определения 9.12 следует справедливость следующей «таблицы умножения» для ортов координатных осей $\boldsymbol{i}$, $\boldsymbol{j}$ и $\boldsymbol{k}$:

2-й сомножитель / 1-й сомножитель	$\boldsymbol{i}$	$\boldsymbol{j}$	$\boldsymbol{k}$
$\boldsymbol{i}$	0	$\boldsymbol{k}$	$-\boldsymbol{j}$
$\boldsymbol{j}$	$-\boldsymbol{k}$	0	$\boldsymbol{i}$
$\boldsymbol{k}$	$\boldsymbol{j}$	$-\boldsymbol{i}$	0

Пусть теперь

$$\boldsymbol{a}_1 = (x_1;\ y_1;\ z_1) \quad \text{и} \quad \boldsymbol{a}_2 = (x_2;\ y_2;\ z_2). \tag{9.36}$$

Перепишем (9.36) в виде

$$\boldsymbol{a}_1 = x_1 \boldsymbol{i} + y_1 \boldsymbol{j} + z_1 \boldsymbol{k}, \quad \boldsymbol{a}_2 = x_2 \boldsymbol{i} + y_2 \boldsymbol{j} + z_2 \boldsymbol{k} \tag{9.37}$$

и преобразуем выражение для $\boldsymbol{a}_1 \times \boldsymbol{a}_2$:

$$\begin{aligned} \boldsymbol{a}_1 \times \boldsymbol{a}_2 &= (x_1 \boldsymbol{i} + y_1 \boldsymbol{j} + z_1 \boldsymbol{k}) \times (x_2 \boldsymbol{i} + y_2 \boldsymbol{j} + z_2 \boldsymbol{k}) = \\ &= x_1 x_2 (\boldsymbol{i} \times \boldsymbol{i}) + x_1 y_2 (\boldsymbol{i} \times \boldsymbol{j}) + x_1 z_2 (\boldsymbol{i} \times \boldsymbol{k}) + y_1 x_2 (\boldsymbol{j} \times \boldsymbol{i}) + \\ &+ y_1 y_2 (\boldsymbol{j} \times \boldsymbol{j}) + y_1 z_2 (\boldsymbol{j} \times \boldsymbol{k}) + z_1 x_2 (\boldsymbol{k} \times \boldsymbol{i}) + \\ &+ z_1 y_2 (\boldsymbol{k} \times \boldsymbol{j}) + z_1 z_2 (\boldsymbol{k} \times \boldsymbol{k}) = 0 + x_1 y_2 \cdot \boldsymbol{k} - x_1 z_2 \cdot \boldsymbol{j} - \\ &- y_1 x_2 \boldsymbol{k} + 0 + y_1 z_2 \boldsymbol{i} + z_1 x_2 \boldsymbol{j} - z_1 y_2 \boldsymbol{i} + 0. \end{aligned} \tag{9.38}$$

Отбрасывая нулевые слагаемые и проводя группировку относительно $\boldsymbol{i}$, $\boldsymbol{j}$ и $\boldsymbol{k}$, мы получаем, что

$$\boldsymbol{a}_1\times \boldsymbol{a}_2=\boldsymbol{i}\,(y_1z_2-z_1y_2)-\boldsymbol{j}\,(x_1z_2-z_1x_2)+\boldsymbol{k}\,(x_1y_2-x_2y_1). \quad (9.39)$$

Выражение в правой части (9.39) удобно записывается в виде определителя

$$\boldsymbol{a}_1\times \boldsymbol{a}_2=\begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \end{vmatrix}. \quad (9.40)$$

Действительно, разлагая этот определитель по элементам первой строки, мы и получим как раз правую часть формулы (9.39).

Правая часть формулы, выражающая длину векторного произведения через длины перемножаемых векторов и угол между ними, численно представляет собой площадь параллелограмма, построенного на перемножаемых векторах. Это обстоятельство может оказаться полезным при решении ряда геометрических задач с помощью аппарата векторного исчисления.

9.3.3. Смешанное произведение векторов. Определение 9.13. *Смешанным произведением векторов* $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ *и* $\boldsymbol{c}$ *(взятых в указанном порядке) называют скалярное произведение вектора* $\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}$ *на вектор* $\boldsymbol{c}$.

Будем считать сперва, что $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ и $\boldsymbol{c}$ некомпланарны.

Пусть Q — параллелепипед, построенный на векторах $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ и $\boldsymbol{c}$, приведенных к общему началу. Согласно (9.21)

$$(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})\cdot\boldsymbol{c}=|\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}|\cdot|\boldsymbol{c}|\cdot\cos\theta, \quad (9.41)$$

где θ — угол между векторами $\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}$ и $\boldsymbol{c}$; $|\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}|$, как мы видели в п. 9.3.2, представляет собой площадь параллелограмма, построенного на $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$. Будем рассматривать этот параллелограмм в качестве основания параллелепипеда Q. Произведение $|\boldsymbol{c}|\cdot\cos\theta$ будет представлять собой тогда высоту этого параллелограмма, взятую со знаком плюс, если тройка векторов $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{c}$ — правая, и со знаком минус, если эта тройка — левая.

Мы видим, таким образом, что смешанное произведение $(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})\cdot\boldsymbol{c}$ представляет собой объем Q, взятый со знаком плюс или минус в зависимости от того, правую или левую тройку образуют векторы $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ и $\boldsymbol{c}$.

Если же $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ и $\boldsymbol{c}$ компланарны, то вектор $\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}$, будучи перпендикулярным векторам $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$, окажется перпендикулярным и к $\boldsymbol{c}$, а тогда $(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})\cdot\boldsymbol{c}=0$. Полученная геометрическая интерпретация приводит нас к следующим свойствам смешанного произведения:

1°. $(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})\cdot\boldsymbol{c} = (\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c})\cdot\boldsymbol{a} = (\boldsymbol{c}\times\boldsymbol{a})\cdot\boldsymbol{b} = -(\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{a})\cdot\boldsymbol{c} = -(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{c})\cdot\boldsymbol{b} = -(\boldsymbol{c}\times\boldsymbol{b})\cdot\boldsymbol{a}$. (Таким образом, любая циклическая перестановка перемножаемых векторов сохраняет величину их смешанного произведения, любая другая их перестановка влечет за собой только перемену знака этого произведения на противоположный.)

2°. $(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})\cdot\boldsymbol{c} = 0$ тогда и только тогда, когда векторы $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ и $\boldsymbol{c}$ компланарны. Иными словами, равенство смешанного произведения векторов нулю является необходимым и достаточным признаком их компланарности.

Пусть $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ и $\boldsymbol{c}$ представлены в координатной форме (относительно какой-нибудь декартовой системы координат $Oxyz$):

$$\boldsymbol{a} = (x_1;\ y_1;\ z_1), \qquad \boldsymbol{b} = (x_2;\ y_2;\ z_2), \qquad \boldsymbol{c} = (x_3;\ y_3;\ z_3),$$

тогда, согласно формуле (9.39),

$$\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b} = \boldsymbol{i}\,(y_1z_2 - z_1y_2) - \boldsymbol{j}\,(x_1z_2 - z_1x_2) + \boldsymbol{k}\,(x_1y_2 - y_1x_2),$$

и теперь уже — по формуле (9.25)

$$(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})\cdot\boldsymbol{c} = x_3\,(y_1z_2 - z_1y_2) - y_3\,(x_1z_2 - z_1x_2) + z_3\,(x_1y_2 - y_1x_2).$$

Правая часть этой формулы может быть записана в виде определителя

$$(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})\cdot\boldsymbol{c} = \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix}. \qquad (9.42)$$

(Чтобы убедиться в этом, достаточно разложить этот определитель по элементам третьей строки.)

9.3.4. Замечания о терминологии и обозначениях. При самостоятельной работе с литературой учащийся может столкнуться с системой обозначений, несколько отличной от той, которой мы здесь придерживались. Частично об этом уже шла речь в п. 9.1.1.

Для обозначения скалярного произведения сомножители заключают иногда в круглые скобки, а для векторного произведения — используют квадратные. В таких обозначениях $(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b})$ следует понимать как скалярное произведение $\boldsymbol{a}$ на $\boldsymbol{b}$, а $[\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}]$ — как векторное произведение этих векторов. Смешанное произведение $(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})\cdot\boldsymbol{c}$ записывают иногда, как $\boldsymbol{abc}$. Большое разнообразие существует в способах записи проекций векторов на оси и величин этих проекций. Иногда термин «проекция» понимают в том смысле, как мы употребляли здесь выражение «величина проекции». Смысл такого рода терминов всегда становится ясен из контекста, так как в одних случаях речь идет о векторных величинах, а в других — о числах. Вместо термина «перпендикулярность» нередко употребляют «ортогональность».

ВОПРОСЫ ДЛЯ ПОВТОРЕНИЯ К ГЛАВЕ 9

1. Что такое направленный отрезок? В каких случаях мы говорим о свободных векторах, скользящих векторах, связанных векторах?

2. Сформулируйте определение понятий коллинеарности и компланарности.

3. Дайте определения понятий суммы и разности векторов, противоположного вектора. Какими свойствами обладают соответствующие операции?

4. Что называется произведением вектора на вещественное число? Какими свойствами обладает соответствующая операция?

5. Что такое проекция вектора на ось? Величина этой проекции? Сформулируйте основные свойства проекций.

6. В чем состоит задача разложения вектора по заданным направлениям? Всегда ли она разрешима? Сколько различных решений она может иметь?

7. Что представляет собой декартова система координат в пространстве? Что такое координата точки, координаты вектора? Как выражаются координаты вектора через координаты его начала и конца?

8. Что такое орты координатных осей? Как следует понимать записи вида $\boldsymbol{a}=(x;\ y;\ z)$? Каким образом проводятся линейные операции над векторами в координатной форме?

9. Что значит, что точка C делит отрезок $\overrightarrow{AB}$ в отношении λ? Приведите примеры. Как можно найти точку, делящую данный отрезок в заданном отношении?

10. Дайте определение скалярного произведения и перечислите его основные свойства. Приведите примеры.

11. Как вычисляется скалярное произведение векторов, заданных в координатной форме?

12. Приведите известные вам формулы для нахождения угла между двумя векторами и проекции вектора на ось (или — на направление другого вектора).

13. Дайте определение правой и левой тройки векторов. Приведите примеры.

14. Что такое векторное произведение? Какими свойствами оно обладает?

15. Как вычисляется векторное произведение векторов, заданных в координатной форме? Приведите примеры.

16. Дайте определение смешанного произведения векторов. Какими свойствами оно обладает? В чем состоит его геометрический смысл? Как вычисляется смешанное произведение векторов, заданных в координатной форме?

УПРАЖНЕНИЯ К ГЛАВЕ 9

1. В правильном шестиугольнике $ABCDEF$ $\overrightarrow{AB}=\boldsymbol{a}$ и $\overrightarrow{BC}=\boldsymbol{b}$. Выразите через $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$ векторы $\overrightarrow{CD}$, $\overrightarrow{DE}$, $\overrightarrow{EF}$, $\overrightarrow{FA}$, $\overrightarrow{AD}$ и $\overrightarrow{AE}$.

2. Треугольник ABC построен на векторах $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$ так, что сторона $\overrightarrow{CB}$ совпадает с $\boldsymbol{a}$, а сторона $\overrightarrow{CA}$ — с $\boldsymbol{b}$. Выразите через $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$ вектор $\overrightarrow{AB}$ и векторы $\overrightarrow{AD}$, $\overrightarrow{BE}$ и $\overrightarrow{CF}$, совпадающие с медианами данного треугольника.

3. В правильной четырехугольной пирамиде $SABCD$ (S — вершина) $\overrightarrow{AB}=\boldsymbol{m}$, $\overrightarrow{AD}=\boldsymbol{n}$, $\overrightarrow{AS}=\boldsymbol{p}$. Выразите через $\boldsymbol{m}$, $\boldsymbol{n}$ и $\boldsymbol{p}$ векторы, совпадающие с остальными ребрами пирамиды.

4. В прямой треугольной призме $ABCA_1B_1C_1$ дано: $\overrightarrow{AA_1}=\boldsymbol{m}$, $\overrightarrow{AB_1}=\boldsymbol{n}$ и $\overrightarrow{AC_1}=\boldsymbol{p}$. Выразите через $\boldsymbol{m}$, $\boldsymbol{n}$ и $\boldsymbol{p}$ векторы, совпадающие с ребрами этой призмы.

5. Вершины треугольника находятся в точках $A(1;\ 4;\ 2)$, $B(3;\ 2;\ 6)$ и $C(-1;\ 0;\ 4)$. Найдите координаты векторов $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{BC}$ и $\overrightarrow{CA}$, середины сторон этого треугольника и его центр.

6. Докажите, что координаты центра M любого треугольника ABC связаны с координатами его вершин формулами

$$x_M=\frac{x_A+x_B+x_C}{3},\quad y_M=\frac{y_A+y_B+y_C}{3},\quad z_M=\frac{z_A+z_B+z_C}{3}.$$

7. Точка $A(1;\ 1;\ 1)$ — вершина параллелепипеда, точки $B(2;\ 3;\ 0)$, $D(0;\ 0;\ 4)$ и $A_1(3;\ 5;\ 6)$ — смежные с ней вершины. Найдите координаты остальных вершин.

8. В параллелограмме $ABCD$ диагонали $\overrightarrow{AC}=\boldsymbol{a}$ и $\overrightarrow{BD}=\boldsymbol{b}$. Какому условию должны удовлетворять $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$ для того, чтобы $ABCD$ представлял собой ромб? прямоугольник?

9. Вершины треугольника находятся в точках $A(-1;\ 2;\ -1)$, $B(-3;\ 1;\ 1)$ и $C(0;\ 4;\ -3)$. Найдите площадь этого треугольника и его внутренний угол A.

10. Векторы $\boldsymbol{a}=2\boldsymbol{i}-\boldsymbol{j}+2\boldsymbol{k}$, $\boldsymbol{b}=\boldsymbol{i}+2\boldsymbol{j}-2\boldsymbol{k}$ и $\boldsymbol{c}=3\boldsymbol{i}-6\boldsymbol{j}+2\boldsymbol{k}$ совпадают с ребрами параллелепипеда Q, выходящими из одной вершины. Найдите объем Q и площадь его грани, построенной на векторах $\boldsymbol{b}$ и $\boldsymbol{c}$.

11. Вершины пирамиды находятся в точках $A(2;\ 3;\ 3)$, $B(4;\ 1;\ 4)$, $C(-5;\ 7;\ -1)$ и $D(5;\ -3;\ 5)$. Найдите ее объем и площадь грани ABC.

12. Проверьте, расположены ли точки $A(1;\ 0;\ 1)$, $B(4;\ 4;\ 6)$, $C(2;\ 2;\ 3)$ и $D(10;\ 14;\ 17)$ в одной плоскости.

ОТВЕТЫ, УКАЗАНИЯ И РЕШЕНИЯ К ГЛАВЕ 9

1. Проделав дополнительные построения (рис. 9.19), мы находим, что $\overrightarrow{CD}=\overrightarrow{HC}=\overrightarrow{BC}-\overrightarrow{BH}=\boldsymbol{b}-\boldsymbol{a}$. Далее $\overrightarrow{DE}=-\overrightarrow{AB}=-\boldsymbol{a}$, $\overrightarrow{EF}=-\overrightarrow{BC}=-\boldsymbol{b}$, $\overrightarrow{FA}=-\overrightarrow{CD}=\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}$, $\overrightarrow{AD}=2\cdot\overrightarrow{BC}=2\boldsymbol{b}$ (другой способ: $\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CD}=\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}+(\boldsymbol{b}-\boldsymbol{a})=2\boldsymbol{b}$), $\overrightarrow{AE}=\overrightarrow{AF}+\overrightarrow{FE}=-\overrightarrow{FA}-\overrightarrow{FE}=-\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}+\boldsymbol{b}=2\boldsymbol{b}-\boldsymbol{a}$.

2. $\overrightarrow{AB}=\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}$, $\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BD}=\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}+\left(-\frac{1}{2}\boldsymbol{a}\right)=\frac{1}{2}\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}$, $\overrightarrow{BE}=\frac{1}{2}\boldsymbol{b}-\boldsymbol{a}$, $\overrightarrow{CF}=\frac{1}{2}\boldsymbol{a}+\frac{1}{2}\boldsymbol{b}$.

3. $\overrightarrow{BC}=\boldsymbol{n}$, $\overrightarrow{DC}=\boldsymbol{m}$, $\overrightarrow{SB}=\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AS}=\boldsymbol{m}-\boldsymbol{p}$, $\overrightarrow{SD}=\boldsymbol{n}-\boldsymbol{p}$, $\overrightarrow{SC}=$ $=\boldsymbol{m}+\boldsymbol{n}-\boldsymbol{p}$.

4. $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{A_1B_1}=\boldsymbol{n}-\boldsymbol{m}$, $\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{A_1C_1}=\boldsymbol{p}-\boldsymbol{m}$, $\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{B_1C_1}=\boldsymbol{p}-\boldsymbol{n}$. $\overrightarrow{BB_1}=\overrightarrow{CC_1}=\overrightarrow{AA_1}=\boldsymbol{m}$.

5. По формулам (9.9′): $\overrightarrow{AB}=(2;\ -2;\ 4)$, $\overrightarrow{BC}=(-4;\ -2;\ -2)$, $\overrightarrow{CA}=(2;\ 4;\ -2)$. Середины сторон BC, CA, AB находим по формулам (9.18′): $D(1;\ 1;\ 5)$, $E(0;\ 2;\ 3)$, $F(2;\ 3;\ 4)$. Центр треугольника M (точка пересечения его медиан) делит медиану $\overrightarrow{AD}$ в отношении $\lambda=2$. Поэтому $x_M=\dfrac{x_B+2x_D}{1+2}=1$, $y_M=\dfrac{y_A+2y_D}{1+2}=$ $=2$, $z_M=\dfrac{z_A+2z_D}{1+2}=4$.

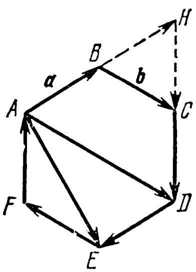


Рис. 9.19.

7. $C(1;\ 2;\ 3)$, $B_1(4;\ 7;\ 5)$, $C_1(3;\ 6;\ 8)$, $D_1(2;\ 4;\ 9)$.

8. Для ромба $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=0$; для прямоугольника $|\boldsymbol{a}|=|\boldsymbol{b}|$.

9. Согласно (9.9′) $\overrightarrow{AB}=(-2;\ -1;\ 2)$; $\overrightarrow{AC}=(1;\ 2;\ -2)$, $\overrightarrow{BC}=(3;\ 3;\ -4)$. Находим косинус угла φ между векторами $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{AC}$:

$$\cos\varphi=\frac{\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}}{|\overrightarrow{AB}|\cdot|\overrightarrow{AC}|}=\frac{-2\cdot 1+(-1)\cdot 2+2\cdot(-2)}{\sqrt{(-2)^2+(-1)^2+2^2}\cdot\sqrt{1^2+2^2+(-2)^2}}=$$
$$=-\frac{8}{9}.$$

Так как $|\overrightarrow{AB}|^2+|\overrightarrow{AC}|^2=18<|\overrightarrow{BC}|^2=34$, то угол A в треугольнике ABC тупой. Значит, φ — искомый внутренний угол: $\varphi=$ $=\arccos(-8/9)=\pi-\arccos(8/9)=2{,}668$. Найдем векторное произведение $\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}$:

$$\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}=\begin{vmatrix}\boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k}\\ -2 & -1 & 2\\ 1 & 2 & -2\end{vmatrix}=-2\boldsymbol{i}-2\boldsymbol{j}-3\boldsymbol{k}.$$

Его длина $|\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}|=\sqrt{(-2)^2+(-2)^2+(-3)^2}=\sqrt{17}$ представляет собой площадь параллелограмма, построенного на $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{AC}$. Значит, площадь треугольника $ABC=\sqrt{17}/2$.

10. $(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})\cdot\boldsymbol{c}=\begin{vmatrix}2 & -1 & 2\\ 1 & 2 & -2\\ 3 & -6 & 2\end{vmatrix}=-32$. Объем равен 32. $\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c}=$ $=(-8;\ -8;\ -12)=-4\cdot(2;\ 2;\ 3)$, $|\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c}|=4\cdot\sqrt{17}$, откуда $S=4\sqrt{17}$.

11. Объем пирамиды равен 1, площадь грани $ABC=\sqrt{53}/2$.

12. Указание. Использовать условие компланарности тройки векторов применительно к $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$ и $\overrightarrow{AD}$.

ГЛАВА 10

ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИЕ ФУНКЦИИ

§ 10.1. Тригонометрические функции числового аргумента и их простейшие свойства

10.1.1. Радианное измерение дуг и углов. Радианная мера дуги и угла. В курсе математики восьмилетней школы изучались различные единицы измерения углов и дуг: прямой угол d, градус, минута, секунда: $d=90°$, $1°=60'$, $1'=60''$, $1°=d/90$, $1'=(1/60)°$, $1''=(1/60)'$.

В дальнейшем мы будем применять еще одну единицу измерения дуг и углов — радиан.

Из геометрии известно, что длины дуг l_1 и l_2 двух концентрических окружностей, соответствующих одному и тому же центральному углу, пропорциональны их радиусам R_1 и R_2 (рис. 10.1)

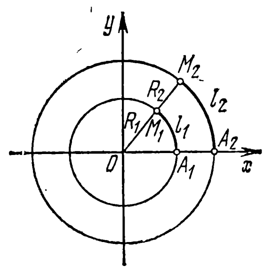


Рис. 10.1.

$$\frac{l_1}{R_1}=\frac{l_2}{R_2},$$

т. е. при одном и том же центральном угле отношение длины дуги окружности к ее радиусу не зависит от величины радиуса. При изменении центрального угла величина этого отношения изменяется. Поэтому отношение l/R может служить мерой дуги и соответствующего ей центрального угла.

Определение 10.1. *Отношение длины дуги окружности l к длине ее радиуса R называется радианной мерой a этой дуги*

$$a=\frac{l}{R}, \qquad (10.1)$$

При радианном измерении дуг за единицу измерения принимается дуга, длина которой равна радиусу этой дуги. Эта дуга называется *радианом* (рис. 10.2).

Определение 10.2. *При радианном измерении углов за единицу измерения принимается центральный угол, опирающийся на дугу в один радиан. Такой угол также называется радианом.*

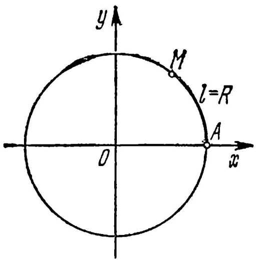


Рис. 10.2.

Число радианов в данной дуге (соответствующем ей центральном угле) будет радианной мерой этой дуги (соответствующего ей центрального угла).

Из формулы (10.1) следует, что окружность имеет радианную меру 2π радианов:

$$a = \frac{2\pi R}{R} = 2\pi.$$

Полуокружности соответствует π радианов.

Формула перехода от градусного измерения к радианному. Пусть дуге в α градусов соответствует дуга в a радианов, тогда из пропорции

$$\frac{180^\circ}{\alpha} = \frac{\pi}{a}$$

получим формулу перехода от градусного измерения к радианному:

$$a = \frac{\pi}{180^\circ} \alpha. \qquad (10.2)$$

При $\alpha = 1^\circ$ по формуле (10.2) получим радианную меру дуги в 1°:

$$a = \frac{\pi}{180^\circ} 1^\circ \approx 0{,}0175 \text{ радиана.}$$

Величину дуги (угла), выраженную в радианах, принято записывать числом без наименования. Например, вместо «дуга равна 0,8 радиана» пишут «дуга 0,8».

Применяя формулу (10.2), составим таблицу зависимости между градусной и радианной мерами для некоторых часто встречающихся дуг (углов):

Градусы	30°	45°	60°	90°	180°	270°	360°
Радианы	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π

Пример 10.1. Найдите радианную меру дуги 210°.

По формуле (10.2) получим

$$a=\frac{\pi}{180^\circ}\cdot 210^\circ=\frac{7\pi}{6}.$$

Пример 10.2. Найдите по таблице радианную меру угла 115°17′. По таблице XVI В. М. Брадиса находим

$$\begin{array}{lcr} 90^\circ & — & 1{,}5708 \\ 25^\circ 18' & — & 0{,}4416 \\ -1' & — & -3 \\ \hline & & 2{,}0121 \end{array}$$ (поправка на 1′ вычитается).

Формула перехода от радианного измерения к градусному. Из формулы (10.2), выражая α через a, получаем формулу перехода от радианного измерения к градусному

$$\alpha=\frac{180^\circ}{\pi}\cdot a. \qquad (10.3)$$

При $a=1$ радиану по формуле (10.3) получим градусную меру 1 радиана:

$$\alpha=\frac{180^\circ}{\pi}\cdot 1\approx 57^\circ 17' 44'',8\approx 57^\circ,3.$$

Пример 10.3. Найдите градусную меру угла, равного $7\pi/4$ радиана. По формуле (10.3) получим

$$\alpha=\frac{180^\circ}{\pi}\cdot\frac{7\pi}{4}=315^\circ.$$

Пример 10.4. Найдите градусную меру дуги, равной 0,8715 радиана.

По таблице XVI В. М. Брадиса находим

$$\begin{array}{rcr} 0{,}8709 & — & 49^\circ 54' \\ 6 & — & 2' \\ \hline & & 49^\circ 56' \end{array}$$ (поправка на 0,0006 радиана).

Длина дуги окружности. Из формулы (10.1) получаем формулу для вычисления дуги окружности, измеренной в радианах

$$l=a\cdot R. \qquad (10.4)$$

Длина дуги окружности равна радианной мере дуги, умноженной на радиус этой дуги.

При $R=1$ длина дуги равна ее радианной мере. Это обстоятельство делает радианную меру весьма удобной для вычисления длин дуг.

Пример 10.5. Колесо радиуса 0,35 м повернулось на угол 72°36′. Найдите длину пути, пройденного точкой на ободе колеса.

Решение. По формуле (10.4) находим

$$l \approx 0{,}35 \cdot 1{,}27 \approx 0{,}443 \approx 0{,}44 \text{ (м)}.$$

По таблице В. М. Брадиса радианная мера угла 72°36′ взята приближенно с тремя значащими цифрами (1,27). Одна цифра взята запасной, так как радиус колеса дан с двумя значащими цифрами.

Формула длины дуги, измеренной градусной мерой, имеет менее удобную форму для ее вычисления:

$$l=\frac{2\pi R}{360^\circ}\alpha=\frac{\pi R\alpha}{180^\circ}. \qquad (10.5)$$

Площадь кругового сектора. Если центральный угол измеряется градусной мерой, то площадь сектора находим по формуле

$$S_{\text{сект}}=\frac{\pi R^2\alpha}{360^\circ}. \qquad (10.6)$$

Если центральный угол измеряется в радианах, то, подставив в формулу (10.6) значение α из формулы (10.3), получим более простую формулу для вычисления площади сектора

$$S_{\text{сект}}=\frac{\pi R^2}{360^\circ}\cdot\frac{180^\circ}{\pi}\cdot a=\frac{1}{2}aR^2. \qquad (10.7)$$

Пример 10.6. Вычислите площадь сектора круга радиуса 0,76 м, если радианная мера дуги сектора равна 1,12 радиана.

Решение. Площадь сектора вычислим по формуле (10.7)

$$S_{\text{сект}}=\frac{1{,}12}{2}\cdot 0{,}76^2 \approx 0{,}56\cdot 0{,}578 \approx 0{,}324 \approx 0{,}32 \text{ (м}^2\text{)}.$$

Линейная скорость при вращательном движении. Во вращательном движении твердого тела вокруг неподвижной оси различают две скорости: *линейную и угловую.*

Скорость любой точки твердого тела во вращательном движении называется *линейной скоростью.*

Линейная скорость v при равномерном движении точки по окружности радиуса R выражается формулой

$$v=\frac{2\pi R}{T}, \qquad (10.8)$$

где T — период вращения — время (в секундах), за которое совершается один полный оборот точки.

Зависимость линейной скорости v от R и n — числа оборотов, совершаемых точкой в 1 секунду, выражается формулой

$$v=2\pi Rn. \qquad (10.9)$$

Зависимость между числом оборотов в секунду n и периодом вращения связаны соотношением

$$T=\frac{1}{n}. \qquad (10.10)$$

Пример 10.7. Колесо, радиус которого 0,45 м, в минуту совершает при равномерном вращении 120 оборотов. Найдите линейную скорость точки, находящейся на ободе колеса.

Решение. Находим число оборотов в секунду

$$n=\frac{120}{60}=2.$$

По формуле (10.9) вычисляем линейную скорость точки на ободе колеса:

$$v=2\pi\cdot 0{,}45\cdot 2=1{,}8\pi \text{ (м/с)}.$$

Пример 10.8. Найдите период вращения точки колеса, находящейся от его центра на расстоянии 0,61 м и вращающейся равномерно с линейной скоростью 5,8 м/с.

Решение. Из формулы (10.8) находим T и подставляем в найденное выражение для T числовые значения R и v:

$$T=\frac{2\pi R}{v}=\frac{2\pi\cdot 0{,}61}{5{,}8}=0{,}65 \text{ (с)}.$$

Угловая скорость при вращательном движении. Угол, на который поворачивается радиус любой точки равномерно вращающегося твердого тела за 1 секунду называется *угловой скоростью*. Угловая скорость выражается в радианах в секунду.

Зависимость между угловой скоростью ω и периодом вращения T выражается формулой

$$\omega=\frac{2\pi}{T}\ \frac{\text{рад}}{\text{с}}. \qquad (10.11)$$

Зависимость между угловой скоростью ω и числом оборотов в секунду n находится по формуле

$$\omega = 2\pi n. \tag{10.12}$$

Линейная скорость v точки, находящейся на расстоянии R от оси вращения и ее угловая скорость ω связаны соотношением

$$v = \omega R. \tag{10.13}$$

При неравномерном вращении твердого тела его *угловой скоростью* ω называется скорость изменения угла φ за время t. Угловая скорость в этом случае есть производная угла поворота φ по времени t

$$\omega = \frac{d\varphi}{dt} \frac{\text{рад}}{\text{с}}. \tag{10.14}$$

Угловое ускорение ε есть производная от угловой скорости ω по времени t

$$\varepsilon = \frac{d\omega}{dt} \frac{\text{рад}}{\text{с}^2}. \tag{10.15}$$

Пример 10.9. Найдите угловую скорость и период вращения равномерно вращающегося вала, делающего 540 оборотов в минуту.

Решение. Находим число оборотов в секунду и подставляем найденное значение в формулу (10.12):

$$n = \frac{540}{60} = 9 \text{ оборотов в секунду},$$

$$\omega = 2\pi \cdot 9 = 18\pi \frac{\text{рад}}{\text{с}}.$$

Подставив значение $n = 9$ оборотов в секунду в формулу (10.10), получим период вращения вала

$$T = 1/9 \text{ (с)}.$$

Пример 10.10. Найдите угловую скорость равномерно вращающегося колеса с радиусом 0,81 м, если линейная скорость точки на его окружности равна 324 м/с.

Решение. Выразив из формулы (10.13) угловую скорость ω и подставив в полученную формулу числовые значения v и R, получим

$$\omega = \frac{v}{R} = \frac{324}{0,81} = 400 \frac{\text{рад}}{\text{с}}.$$

Пример 10.11. Колесо радиуса 1,25 м равномерно вращается с угловой скоростью 12 радианов в секунду. Вычислите линейную скорость в точке на внешней части обода колеса.

Решение. По формуле (10.13) получим

$$v = 12 \cdot 1,25 = 15 \text{ (м/с)}.$$

Пример 10.12. Тело вращается вокруг оси по закону $\varphi = 10t - t^2$. Найдите: 1) угловую скорость вращения в момент $t = 4$ с; 2) угловое ускорение в момент $t = 4$с; 3) момент, когда прекратится вращение.

Решение. 1) По формуле (10.14) найдем угловую скорость в момент $t = 4$ с

$$\omega = \frac{d\varphi}{dt} = 10 - 2t, \qquad \omega_{t=4c} = 10 - 2\cdot 4 = 2\,\frac{\text{рад}}{\text{с}}.$$

2) По формуле (10.15) найдем угловое ускорение в момент $t = 4$ с:

$$\varepsilon = \frac{d\omega}{dt} = -2\,\frac{\text{рад}}{\text{с}}.$$

3) Положив $\omega = 0$, найдем t

$$10 - 2t = 0, \qquad t = 5 \text{ с}.$$

Вращение прекратится в конце 5 с.

10.1.2. Обобщение понятия дуги (угла). Координатная плоскость. Единичная окружность. В прямоугольной системе координат xOy построим круг с центром в начале координат и с радиусом, равным 1. Будем называть этот круг *единичным кругом*, а его окружность *единичной окружностью*. Уравнение единичной окружности $x^2 + y^2 = 1$.

Точку A (1; 0) — точку пересечения единичной окружности с осью Ox примем за начало отсчета дуг, а положительную полуось Ox — за начальную сторону центрального угла, образуемого подвижным радиус-вектором $\overrightarrow{OM}$[1]) с осью Ox. Радиус-вектор $\overrightarrow{OM}$ будет соответственно конечной стороной центрального угла $\angle AOM$ (рис. 10.3).

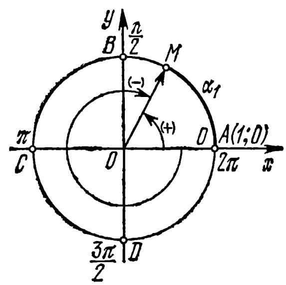


Рис. 10.3.

Положительные и отрицательные дуги и углы. Вращение радиус-вектора $\overrightarrow{OM}$ от положительной полуоси Ox против движения часовой стрелки назовем *положительным*, а дугу $\overset{\frown}{AM}$, образуемую концом радиус-вектора $\overrightarrow{OM}$, и соответствующий этой дуге центральный угол $\angle AOM$ *положительными* (рис. 10.3). Вращение радиус-вектора $\overrightarrow{OM}$ от положительной полуоси Ox по часовой

[1]) *Радиус-вектором* точки M называется вектор, началом которого является начало координат, а концом данная точка M.

стрелке назовем *отрицательным*, а дугу $\overset{\frown}{ADM}$, образуемую концом радиус-вектора $\overrightarrow{OM}$, и соответствующий дуге центральный угол $\angle ADM$ *отрицательными*.

Если отсчет дуг вести против движения часовой стрелки, то дуга $\overset{\frown}{AB}=\pi/2$, $\overset{\frown}{ABC}=\pi$, $\overset{\frown}{ABD}=3\pi/2$ и $\overset{\frown}{ABA}=2\pi$. Если отсчет дуг вести по часовой стрелке, то дуга $\overset{\frown}{AD}=-\pi/2$, $\overset{\frown}{ADC}=-\pi$, $\overset{\frown}{ADB}=-3\pi/2$ и $\overset{\frown}{ADA}=$ $=-2\pi$. Дуга, равная нулю (нулевая дуга), имеет совпадающие точки A и M. Центральный угол рáвен нулю, если радиус-векторы $\overrightarrow{OA}$ и $\overrightarrow{OM}$ совпадают.

Дуги первой четверти заключены в промежутке $(0, \pi/2)$, второй — $(\pi/2, \pi)$, третьей — $(\pi, 3\pi/2)$ и четвертой — $(3\pi/2, 2\pi)$.

Дуги и углы, большие 2π (360°). Во многих задачах приходится рассматривать вращения, бóльшие полного оборота (вращение пропеллера, маховика и т. п.). Такие задачи были рассмотрены в предыдущем пункте. Поэтому понятие дуги (угла) необходимо обобщить: ввести дуги (углы), большие полного оборота (большие 2π).

Пусть точка M (конец радиус-вектора $\overrightarrow{OM}$), вращаясь в положительном направлении от начала отсчета дуг — точки A, совершила один полный оборот, а затем описала дугу $\overset{\frown}{AM}=\alpha_1$ (рис. 10.3). Тогда общая дуга α, которую описала точка M (угол, на который повернулся радиус-вектор $\overrightarrow{OM}$), будет $\alpha=2\pi+\alpha_1$, где $\alpha_1\in(0, 2\pi)$ (в градусной мере $\alpha=360°+\alpha_1$, где α_1 и α рассматриваются в градусной мере).

Существует бесконечное множество дуг (углов), имеющих данное начало A и данный конец M (данные начальную и конечную стороны угла).

Множество этих дуг (углов) как положительных, так и отрицательных можно записать общей формулой

$$\alpha=2\pi k+\alpha_1 \qquad (\alpha=360°k+\alpha_1), \tag{10.16}$$

где $\alpha_1\in(0, 2\pi)$ и $k\in Z$.

Пример 10.13. Укажите на единичной окружности точку M дуги $\overset{\frown}{AM}=19\pi$.

Решение. По формуле (10.16) получим $19\pi=2\pi\cdot 9+\pi$. Конец дуги $\overset{\frown}{AM}$ будет в точке M $(-1;\ 0)$.

Пример 10.14. Запишите, применяя формулу (10.16), дугу 2050°.

Решение. 2050°:360°=5 (остаток 250°), следовательно,

$$2050°=360°\cdot 5+250° \qquad (k=5).$$

Пример 10.15. Запишите, применяя формулу (10.16), угол $-1490°$.

Решение. $-1490°:360° = -4$ (остаток $-50°$), следовательно,

$$-1490° = 360°(-4) - 50° \quad \text{или} \quad -1490° = 360° \cdot (-5) + 310°.$$

Пример 10.16. Записать в общем виде концы дуг единичной окружности: а) абсциссы которых равны нулю; б) ординаты которых равны нулю.

Решение. Концы дуг $\pi/2$ и $3\pi/2$ имеют абсциссы, равные нулю, следовательно, множество концов дуг с абсциссой, равной нулю, запишется формулой $\frac{\pi}{2} + \pi k$, $k \in Z$. Концы дуг 0 и π имеют ординаты, равные нулю, следовательно, множество концов дуг с ординатой, равной нулю, запишется формулой πk, $k \in Z$.

Пример 10.17. Записать в общем виде дуги, оканчивающиеся в точках $A(1;\ 0)$, $B(0;\ 1)$, $C(-1;\ 0)$ и $D(0;\ -1)$ единичной окружности.

Решение. Дуги, оканчивающиеся в точке $A(1;\ 0)$, имеют общий вид $2\pi k$ ($360° \cdot k$). При $k=0$ имеем дугу, равную нулю, при $k=1$ — дугу 2π, при $k=2$ — дугу 4π и т. д. Дуги, оканчивающиеся в точке B $(0;\ 1)$, записываются формулой $\pi/2 + 2\pi k$ ($90° + 360° \cdot k$). При $k=0$ имеем дугу $\pi/2$, при $k=1$ — дугу $5\pi/2$, при $k=-1$ — дугу $-3\pi/2$ и т. д. Дуги, оканчивающиеся в точке C $(-1;\ 0)$, записываются формулой $\pi + 2\pi k = \pi(2k+1)$ ($180°(2k+1)$). При $k=0$ имеем дугу π, при $k=1$ — дугу 3π, при $k=-1$ — дугу $-\pi$ и т. д. Дуги, оканчивающиеся в точке D $(0;\ -1)$, записываются формулой $-\pi/2 + 2\pi k$ ($-90° + 360° k$). При $k=0$ имеем дугу $-\pi/2$, при $k=1$ — дугу $3\pi/2$ и т. д.

Пример 10.18. В каких точках единичной окружности оканчиваются дуги вида $\frac{\pi}{2} \cdot k$?

Решение. Этой формулой записываются дуги, оканчивающиеся в точках A, B, C и D единичной окружности (см. рис. 10.3).

Единичная числовая окружность. Пусть каждому действительному числу α на единичной окружности соответствует точка $M(\alpha)$ — конец дуги $\smile{AM}$, для которой дуга $\smile{AM}$ имеет величину α.

Такую единичную окружность будем называть *числовой единичной окружностью*. Для числовой единичной окружности должны быть заданы: начало отсчета A, положительное направление движения и единица измерения дуг — радиус этой окружности.

Длина всей числовой единичной окружности равна 2π. Поэтому, если два числа отличаются друг от друга на целое кратное 2π, то им на числовой единичной окружности будет соответствовать одна и та же точка. Если два числа соответствуют одной и той же точке числовой единичной окружности, то их разность будет кратной 2π.

Установим соответствие между точками числовой оси и точками числовой единичной окружности. Каждому действительному числу α на числовой оси соответствует точка $P(\alpha)$ и на числовой единичной окружности — точка $M(\alpha)$, причем каждой точке числовой оси соответствует одна и только одна точка числовой окружности. Это соответствие можно представить «наматыванием» в положительном или отрицательном направлении числовой оси на числовую единичную окружность, начав наматывание от их общих нулевых точек (0 на числовой оси и точка A (1; 0) на числовой единичной окружности). В то же время каждой точке числовой окружности на числовой оси соответствует не одна, а бесконечное множество точек числовой оси, что можно установить качением числовой единичной окружности (вправо или влево) по числовой оси, начав качение от совмещенных их нулевых точек.

10.1.3. Определение тригонометрических функций числового аргумента. Определение тригонометрических функций числового аргумента. Области их определения. Ограниченность и неограниченность тригонометрических функций. Каждому действительному числу α соответствует единственная точка $M(\alpha)$ на числовой единичной окружности $x^2+y^2=1$ и каждая точка $M(\alpha)$ этой окружности однозначно определена ее абсциссой и ординатой, т. е. абсцисса и ордината есть функции числа α: $x=f(\alpha)$ и $y=\varphi(\alpha)$, причем абсцисса и ордината по абсолютной величине не больше единицы ($|x|\leqslant 1$ и $|y|\leqslant 1$).

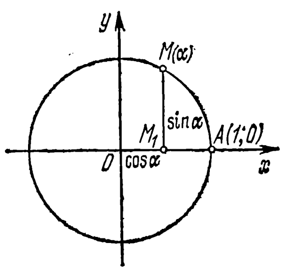


Рис. 10.4.

Определение 10.3. *Абсцисса x точки $M(\alpha)$ числовой единичной окружности называется косинусом числа α* (рис. 10.4)

$$\cos\alpha = x. \tag{10.17}$$

Определение 10.4. *Ордината y точки $M(\alpha)$ числовой единичной окружности называется синусом числа α* (рис. 10.4)

$$\sin\alpha = y. \tag{10.18}$$

Функции $\cos\alpha$ и $\sin\alpha$ определены для любого действительного числа α, следовательно, их области определения $(-\infty, +\infty)$.

Функции $\cos\alpha$ и $\sin\alpha$ ограничены, так как каждая из них может принимать любое числовое значение, не превосходящее по абсолютной величине единицу: $|\cos\alpha| \leqslant 1$ и $|\sin\alpha| \leqslant 1$, т. е. множество значений функций $\cos\alpha$ и $\sin\alpha$ принадлежат промежутку $[-1, 1]$.

Определение 10.5. *Отношение синуса числа α к его косинусу называется тангенсом числа α:*

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}. \qquad (10.19)$$

Следовательно, $\operatorname{tg}\alpha$ есть отношение ординаты точки $M(\alpha)$ числовой единичной окружности к ее абсциссе.

Функция $\operatorname{tg}\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$ не определена для тех значений аргумента α, когда $\cos\alpha = 0$ (абсцисса x равна нулю), т. е. тангенс не определен для значений аргумента $\pm\frac{\pi}{2}$, $\pm\frac{3\pi}{2}$, ... Множество значений аргумента α, для которых $\cos\alpha = 0$, записывается формулой $\alpha = \frac{\pi}{2} + \pi k$, $k \in Z$. Следовательно, область определения тангенса — все вещественные числа, кроме чисел вида $\frac{\pi}{2} + \pi k$, $k \in Z$. Область изменения функции $\operatorname{tg}\alpha$ — множество всех вещественных чисел, т. е. тангенс не ограничен.

В точке $A(1;\ 0)$ числовой единичной окружности проведем касательную, выбрав на ней положительное направление, одинаковое с положительным направлением на оси Oy. За начало отсчета на этой оси, которую назовем *осью тангенсов*, примем точку $A(1;\ 0)$ (рис. 10.5).

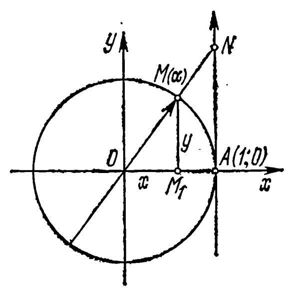


Рис. 10.5.

Пусть точка $M(\alpha)$ — любая точка числовой единичной окружности (точки $(0;\ 1)$ и $(0;\ -1)$, т. е. точки, лежащие на оси Oy, исключаются). Продолжив радиус $\overrightarrow{OM}$ до пересечения с осью тангенсов, получим на этой оси точку N (если точка $M(\alpha)$ лежит на оси ординат, это построение выполнить нельзя). Точка N лежит на оси тангенсов выше точки A, если точка $M(\alpha)$ лежит в первой или третьей четвертях и ниже точки A, если точка $M(\alpha)$ лежит во второй или четвертой четвертях.

Из пропорциональности сторон треугольников OMM_1 и ONA (рис. 10.5) имеем

$$\operatorname{tg}\alpha=\frac{y}{x}=\frac{AN}{OA}=\frac{AN}{1}=AN, \quad \operatorname{tg}\alpha=AN.$$

Тангенс числа α равен ординате точки N (ординате точки пересечения продолженного радиуса $\overrightarrow{OM}$ с осью тангенсов). Таким образом, каждой точке $M(\alpha)$ числовой единичной окружности (за исключением точек (0; 1) и (0; —1)) соответствует точка на оси тангенсов.

Определение 10.6. *Отношение косинуса числа α к его синусу называется котангенсом числа α:*

$$\operatorname{ctg}\alpha=\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}. \tag{10.20}$$

Следовательно, $\operatorname{ctg}\alpha$ есть отношение абсциссы точки $M(\alpha)$ числовой единичной окружности к ее ординате.

Функция $\operatorname{ctg}\alpha=\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}$ не определена для тех значений аргумента, для которых $\sin\alpha=0$ (ордината y равна нулю), т. е. котангенс не определен для значений аргумента 0, π, 2π, ... Множество значений аргумента α, для которых $\sin\alpha=0$, записывается формулой $\alpha=\pi k$, $k\in Z$. Следовательно, область определения котангенса — все действительные числа, кроме чисел вида πk. Область изменения функции $\operatorname{ctg}\alpha$ — множество всех действительных чисел, т. е. котангенс не ограничен.

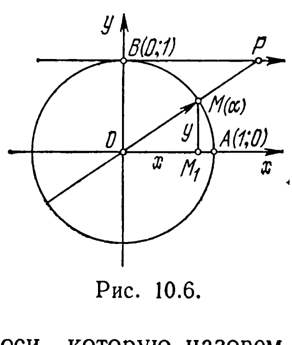


Рис. 10.6.

В точке $B(0;\ 1)$ числовой единичной окружности проведем касательную, выбрав на ней положительное направление, одинаковое с положительным направлением на оси Ox. За начало отсчета на этой оси, которую назовем *осью котангенсов*, примем точку B (0; 1) (рис. 10.6).

Пусть точка $M(\alpha)$ — любая точка числовой единичной окружности (точки (1; 0) и (—1; 0), т. е. точки, лежащие на оси Ox, исключаются). Продолжив радиус $\overrightarrow{OM}$ до пересечения с осью котангенсов, получим на этой оси точку P (если точка $M(\alpha)$ лежит на оси абсцисс, это построение выполнить нельзя). Точка P лежит на оси котангенсов правее точки B, если точка $M(\alpha)$ лежит в первой или третьей четвертях и левее точки B, если точка $M(\alpha)$ лежит во второй или четвертой четвертях.

Из пропорциональности сторон треугольников OMM_1 и OBP (рис. 10.6) имеем

$$\operatorname{ctg}\alpha=\frac{x}{y}=\frac{BP}{OB}=\frac{BP}{1}=BP, \quad \operatorname{ctg}\alpha=BP.$$

Котангенс числа α равен абсциссе точки P (абсциссе точки пересечения продолженного радиуса $\overrightarrow{OM}$ с осью котангенсов). Таким образом, каждой точке $M(\alpha)$ числовой единичной окружности (за исключением точек (1; 0) и (—1; 0)) соответствует точка P на оси котангенсов.

Кроме первых четырех тригонометрических функций, рассматриваются еще две функции: секанс и косеканс, которые применяются значительно реже.

Определение 10.7. *Величина, обратная косинусу числа α, называется секансом числа α:*

$$\sec\alpha=\frac{1}{\cos\alpha}. \tag{10.21}$$

Функция $\sec\alpha=\frac{1}{\cos\alpha}$ не определена, как и $\operatorname{tg}\alpha$, для значений аргумента $\frac{\pi}{2}+\pi k$, $k\in Z$. Следовательно, область определения секанса — все действительные числа, кроме чисел вида $\frac{\pi}{2}+\pi k$.

Определение 10.8. *Величина, обратная синусу числа α, называется косекансом числа α:*

$$\operatorname{cosec}\alpha=\frac{1}{\sin\alpha}. \tag{10.22}$$

Функция $\operatorname{cosec}\alpha=\frac{1}{\sin\alpha}$ не определена, как и $\operatorname{ctg}\alpha$, для значений аргумента πk, $k\in Z$. Следовательно, область определения косеканса — все действительные числа, кроме чисел вида πk.

Знаки значений тригонометрических функций. Из определения косинуса и синуса следует, что знак косинуса совпадает со знаком абсциссы точки $M(\alpha)$ числовой единичной окружности, а знак синуса — со знаком ординаты точки $M(\alpha)$. Знаки тангенса и котангенса находим по знакам синуса и косинуса одного и того же аргумента.

α	Четверть	$\cos\alpha$	$\sin\alpha$	$\operatorname{tg}\alpha$	$\operatorname{ctg}\alpha$
$\alpha\in\left(0,\ \frac{\pi}{2}\right)$	I	+	+	+	+
$\alpha\in\left(\frac{\pi}{2},\ \pi\right)$	II	−	+	−	−
$\alpha\in\left(\pi,\ \frac{3\pi}{2}\right)$	III	−	−	+	+
$\alpha\in\left(\frac{3\pi}{2},\ 2\pi\right)$	IV	+	−	−	−

10.1.4. Вычисление числовых значений тригонометрических функций для некоторых значений аргумента. Вычисление числовых значений тригонометрических функций для значений аргумента: 0, $\pi/2$, π, $3\pi/2$, 2π. На числовой единичной окружности (рис. 10.7) каждому из значений α: 0, $\pi/2$, π, $3\pi/2$ и 2π соответствует определенное числовое значение $\cos\alpha$ и $\sin\alpha$.

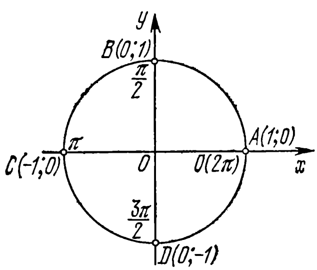


Рис. 10.7.

Из определений тригонометрических функций следует:

1) $\cos 0 = 1$, $\sin 0 = 0$, $\operatorname{tg} 0 = \frac{\sin 0}{\cos 0} = \frac{0}{1} = 0$, $\operatorname{ctg} 0$ не определен.

2) $\cos\frac{\pi}{2} = 0$, $\sin\frac{\pi}{2} = 1$, $\operatorname{tg}\frac{\pi}{2}$ не определен, $\operatorname{ctg}\frac{\pi}{2} = \frac{\cos\frac{\pi}{2}}{\sin\frac{\pi}{2}} = \frac{0}{1} = 0$.

3) $\cos\pi = -1$, $\sin\pi = 0$, $\operatorname{tg}\pi = \frac{\sin\pi}{\cos\pi} = \frac{0}{-1} = 0$, $\operatorname{ctg}\pi$ не определен.

4) $\cos\frac{3\pi}{2}=0$, $\sin\frac{3\pi}{2}=-1$, $\operatorname{tg}\frac{3\pi}{2}$ не определён, $\operatorname{ctg}\frac{3\pi}{2}=$

$$=\frac{\cos\frac{3\pi}{2}}{\sin\frac{3\pi}{2}}=\frac{0}{-1}=0.$$

5) $\cos 2\pi=1$, $\sin 2\pi=0$, $\operatorname{tg}2\pi=\frac{\sin 2\pi}{\cos 2\pi}=\frac{0}{1}=0$, $\operatorname{ctg}2\pi$ не определен.

Вычисление числовых значений тригонометрических функций для аргумента $\pi/6$. На числовой единичной окружности построим дугу $\overset{\smile}{AM}=\pi/6$ (рис. 10.8). В $\triangle M_1OM$ угол $M_1OM=\pi/6$, $OM=1$,

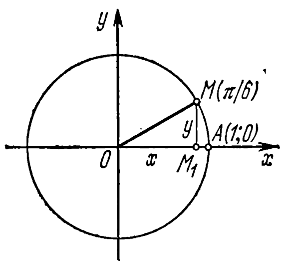


Рис. 10.8.

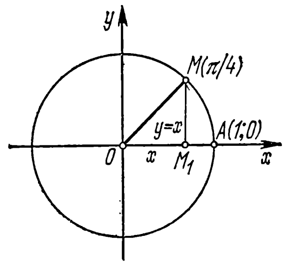


Рис. 10.9.

$y=M_1M=1/2$ (свойство катета, лежащего против угла $\pi/6$ (30°)). По теореме Пифагора вычислим $x=OM_1=$ $=\sqrt{1-(1/2)^2}=\sqrt{3}/2$. Применив определения тригонометрических функций, получим

$$\cos\frac{\pi}{6}=\frac{\sqrt{3}}{2},\ \sin\frac{\pi}{6}=\frac{1}{2},\quad \operatorname{tg}\frac{\pi}{6}=\frac{1}{\sqrt{3}}=\frac{\sqrt{3}}{3},\quad \operatorname{ctg}\frac{\pi}{6}=\sqrt{3}.$$

Вычисление числовых значений тригонометрических функций для аргумента $\pi/4$. На числовой единичной окружности построим дугу $\overset{\smile}{AM}=\pi/4$ (рис. 10.9). В $\triangle M_1OM$ угол $M_1OM=\pi/4$, $OM=1$, $OM_1=M_1M=x=y$. По теореме Пифагора имеем $x^2+x^2=1$, откуда $x=\sqrt{2}/2$. Применив определения тригонометрических функций, получим

$$\cos\frac{\pi}{4}=\frac{\sqrt{2}}{2},\quad \sin\frac{\pi}{4}=\frac{\sqrt{2}}{2},\quad \operatorname{tg}\frac{\pi}{4}=1,\quad \operatorname{ctg}\frac{\pi}{4}=1.$$

Вычисление числовых значений тригонометрических функций для аргумента $\pi/3$. На числовой единичной окружности построим дугу $\overset{\frown}{AM} = \pi/3$ (рис. 10.10). В $\triangle M_1OM$ угол $M_1OM = \pi/3$, $OM = 1$, $x = OM_1 = 1/2$ (свойство катета, лежащего против угла $\pi/6$ (30°)). По теореме Пифагора вычислим: $y = M_1M = \sqrt{1-(1/2)^2} = \sqrt{3}/2$. Применив определения тригонометрических функций, получим

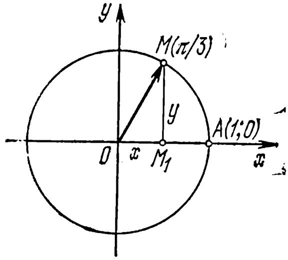


Рис. 10.10.

$$\cos\frac{\pi}{3} = \frac{1}{2}, \quad \sin\frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2},$$

$$\operatorname{tg}\frac{\pi}{3} = \sqrt{3}, \quad \operatorname{ctg}\frac{\pi}{3} = \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}.$$

Таблица значений тригонометрических функций для наиболее часто встречающихся значений аргумента

Аргумент / Функция	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π
Синус	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	0	-1	0
Косинус	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	-1	0	1
Тангенс	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	не определен	0	не определен	0
Котангенс	не определен	$\sqrt{3}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	0	не определен	0	не определен

10.1.5. Изменение тригонометрических функций при возрастании аргумента от 0 до 2π. Изменение функции $\cos\alpha$. Изменение $\cos\alpha$ при возрастании аргумента α от 0 до 2π легко проследить по изменению абсциссы движущейся точки $M(\alpha)$ по единичной числовой окружности в положительном направлении от точки $A(1;\ 0)$.

В I четверти при возрастании аргумента α в промежутке $[0,\ \pi/2]$ абсцисса точки $M(\alpha)$ принимает положительные значения и убывает от 1 до 0. Следовательно, при возрастании аргумента в промежутке $[0, \pi/2]$ косинус убывает от 1 до 0 (рис. 10.11).

Во II четверти при возрастании аргумента α в промежутке $[\pi/2, \pi]$ абсцисса точки $M(\alpha)$ принимает отрицательные значения и убывает от 0 до -1. Следовательно, при возрастании аргумента в промежутке $[\pi/2, \pi]$ косинус убывает от 0 до -1.

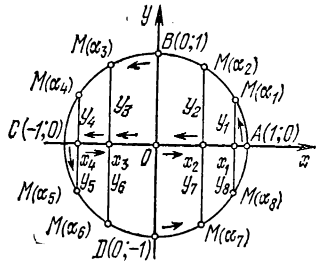


Рис. 10.11.

В III четверти при возрастании аргумента α в промежутке $[\pi, 3\pi/2]$ абсцисса точки $M(\alpha)$, оставаясь отрицательной, возрастает от -1 до 0. Следовательно, при возрастании аргумента в промежутке $[\pi, 3\pi/2]$ косинус возрастает от -1 до 0.

В IV четверти при возрастании аргумента α в промежутке $[3\pi/2, 2\pi]$ абсцисса точки $M(\alpha)$ принимает положительные значения и возрастает от 0 до 1. Следовательно, при возрастании аргумента в промежутке $[3\pi/2, 2\pi]$ косинус возрастает от 0 до 1.

Полученные результаты представим таблицей.

Четверть	I	II	III	IV
α	$0 \nearrow \frac{\pi}{2}$	$\frac{\pi}{2} \nearrow \pi$	$\pi \nearrow \frac{3\pi}{2}$	$\frac{3\pi}{2} \nearrow 2\pi$
$\cos\alpha$	убывает $1 \searrow 0$	убывает $0 \searrow -1$	возрастает $-1 \nearrow 0$	возрастает $0 \nearrow 1$

Изменение функции $\sin\alpha$. Изменение $\sin\alpha$ при возрастании аргумента α от 0 до 2π рассмотрим по изменению ординаты движущейся точки $M(\alpha)$ по единичной числовой окружности в положительном направлении от точки $A(1; 0)$ (рис. 10.11).

В I четверти при возрастании аргумента α в промежутке $[0, \pi/2]$ ордината точки $M(\alpha)$ принимает положительные значения и возрастает от 0 до 1. Следовательно, при возрастании аргумента в промежутке $[0, \pi/2]$, синус возрастает от 0 до 1.

Во II четверти при возрастании аргумента α в промежутке $[\pi/2, \pi]$ ордината точки $M(\alpha)$, оставаясь положительной, убывает от 1 до 0. Следовательно, при возрастании аргумента в промежутке $[\pi/2, \pi]$ синус убывает от 1 до 0.

В III четверти при возрастании аргумента α в промежутке $[\pi, 3\pi/2]$ ордината точки $M(\alpha)$ принимает отрицательные значения и убывает от 0 до -1. Следовательно, при возрастании аргумента в промежутке $[\pi, 3\pi/2]$ синус убывает от 0 до -1.

В IV четверти при возрастании аргумента α в промежутке $[3\pi/2, 2\pi]$ ордината точки $M(\alpha)$, оставаясь отрицательной, возрастает от -1 до 0. Следовательно, при возрастании аргумента в промежутке $[3\pi/2, 2\pi]$ синус возрастает от -1 до 0.

Полученные результаты представлены таблицей:

Четверть	I	II	III	IV
α	$0 \nearrow \frac{\pi}{2}$	$\frac{\pi}{2} \nearrow \pi$	$\pi \nearrow \frac{3\pi}{2}$	$\frac{3\pi}{2} \nearrow 2\pi$
$\sin\alpha$	возрастает $0 \nearrow 1$	убывает $1 \searrow 0$	убывает $0 \searrow -1$	возрастает $-1 \nearrow 0$

Изменение функции $\operatorname{tg}\alpha$. Пусть аргумент α возрастает в промежутке $[0, \pi/2)$. Выше мы установили, что в промежутке $[0, \pi/2)$ синус возрастает от 0 до 1, а косинус убывает от 1 до 0. Из убывания косинуса следует, что $\frac{1}{\cos\alpha}$ в промежутке $[0, \pi/2)$ возрастает. Тангенс является произведением двух положительных возрастающих функций: $\operatorname{tg}\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = \sin\alpha \cdot \frac{1}{\cos\alpha}$, следовательно, в промежутке $[0, \pi/2)$ тангенс также возрастает.

Для значений аргумента α, близких к $\pi/2$ (меньших $\pi/2$), значения $\operatorname{tg}\alpha$ неограниченно возрастают и положительны. Следовательно, в промежутке $[0, \pi/2)$ тангенс возрастает от 0 до $+\infty$.

Неограниченность возрастания тангенса при $\alpha \to \pi/2$ $(\alpha < \pi/2)$ в промежутке $[0, \pi/2)$ можно проследить по изменению ординаты точки N (ординаты точек N_1, N_2, ...) (рис. 10.12). Действительно, при стремлении $\alpha \to \pi/2$ ордината точки N $(N_1, N_2, \dots)$ может превзойти по величине любое сколь угодно большое наперед заданное положительное число, следовательно, тангенс при $\alpha \to \pi/2$ $(\alpha < \pi/2)$ неограниченно возрастает.

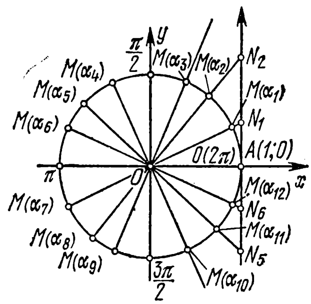


Рис. 10.12.

Во II четверти тангенс принимает отрицательные значения и при возрастании аргумента в промежутке $(\pi/2, \pi]$ возрастает от $-\infty$ до 0 (рис. 10.12).

При возрастании аргумента α в промежутке $[\pi, 3\pi/2)$ тангенс возрастает как в I четверти и с возрастанием аргумента в промежутке $(3\pi/2, 2\pi]$ тангенс возрастает, как во II четверти (рис. 10.12).

Изменение тангенса при возрастании аргумента от 0 до 2π представлено в таблице.

Четверть	I	II	III	IV
α	$0 \nearrow \frac{\pi}{2}$	$\frac{\pi}{2} \nearrow \pi$	$\pi \nearrow \frac{3\pi}{2}$	$\frac{3\pi}{2} \nearrow 2\pi$
$\operatorname{tg}\alpha$	возрастает $0 \nearrow +\infty$	возрастает $-\infty \nearrow 0$	возрастает $0 \nearrow +\infty$	возрастает $-\infty \nearrow 0$

Изменение функции $\operatorname{ctg}\alpha$. Пусть аргумент α возрастает в промежутке $(0, \pi/2]$. Тогда

$$\operatorname{ctg}\alpha = \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha} = \frac{1}{\sin\alpha}\cdot\cos\alpha.$$

Из возрастания синуса следует, что $\frac{1}{\sin\alpha}$ в промежутке $(0, \pi/2]$ убывает. Тогда $\mathrm{ctg}\,\alpha$ является произведением двух положительных убывающих функций. Следовательно, в промежутке $(0, \pi/2]$ котангенс также убывает. Для значений аргумента α, приближающихся к нулю (бóльших нуля), значения $\mathrm{ctg}\,\alpha$ неограниченно возрастают и положительны. Следовательно, в промежутке $(0, \pi/2]$ котангенс убывает от $+\infty$ до 0.

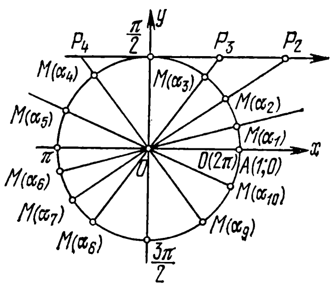


Рис. 10.13.

Убывание котангенса можно проследить по изменению абсциссы точки P (абсциссы точек P_1, P_2, ...) при $\alpha \to 0$ в промежутке $(0, \pi/2]$ (рис. 10.13). Для значений α, близких к нулю (бóльших нуля), абсцисса точки P может превзойти по величине любое сколь угодно большое наперед заданное положительное число, следовательно, в промежутке $(0, \pi/2]$ котангенс убывает от $+\infty$ до 0.

Во II четверти котангенс принимает отрицательные значения и при возрастании аргумента в промежутке $[\pi/2, \pi)$ котангенс убывает от 0 до $-\infty$.

При возрастании аргумента α в промежутке $(\pi, 3\pi/2]$ котангенс убывает, как в I четверти, и с возрастанием аргумента в промежутке $[3\pi/2, 2\pi)$ котангенс убывает как во II четверти (рис. 10.13).

Изменение котангенса при возрастании аргумента от 0 до 2π представлено в таблице.

Четверть	I	II	III	IV
α	$0 \nearrow \frac{\pi}{2}$	$\frac{\pi}{2} \nearrow \pi$	$\pi \nearrow \frac{3\pi}{2}$	$\frac{3\pi}{2} \nearrow 2\pi$
$\mathrm{ctg}\,\alpha$	убывает $+\infty \searrow 0$	убывает $0 \searrow -\infty$	убывает $+\infty \searrow 0$	убывает $0 \searrow -\infty$

10.1.6. Соотношения между тригонометрическими функциями одного и того же аргумента. Основные тождества. Если две тригонометрические функции от одних и тех же аргументов имеют одну и ту же область определения и принимают равные значения при всех допустимых значениях аргументов, то они называются *тождественно равными*. Равенство, справедливое при всех допустимых значениях аргументов, называется *тождеством*.

1. *Сумма квадратов синуса и косинуса одного и того же аргумента равна единице*:

$$\sin^2\alpha+\cos^2\alpha=1. \qquad (10.23)$$

Доказательство. Координаты $x=\cos\alpha$ и $y=\sin\alpha$ любой точки $M(\alpha)$ числовой единичной окружности удовлетворяют уравнению $x^2+y^2=1$, поэтому для любого действительного числа α имеет место равенство (10.23).

2. *Перемножив почленно равенства* (10.19) *и* (10.20), *получим*

$$\operatorname{tg}\alpha\cdot\operatorname{ctg}\alpha=\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}\cdot\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}=1, \quad \alpha\neq\frac{\pi}{2}\cdot k,$$

т. е.

$$\operatorname{tg}\alpha\cdot\operatorname{ctg}\alpha=1, \quad \alpha\neq\frac{\pi}{2}k. \qquad (10.24)$$

Следствия.

$$\operatorname{tg}\alpha=\frac{1}{\operatorname{ctg}\alpha}, \quad \alpha\neq\frac{\pi}{2}\cdot k, \qquad (10.25)$$

$$\operatorname{ctg}\alpha=\frac{1}{\operatorname{tg}\alpha}, \quad \alpha\neq\frac{\pi}{2}\cdot k. \qquad (10.26)$$

3. *Разделив почленно равенство* (10.23) *на* $\cos^2\alpha$, *получим*

$$1+\operatorname{tg}^2\alpha=\frac{1}{\cos^2\alpha}, \quad \alpha\neq\frac{\pi}{2}+\pi k. \qquad (10.27)$$

4. *Разделив почленно равенство* (10.23) *на* $\sin^2\alpha$, *получим*

$$1+\operatorname{ctg}^2\alpha=\frac{1}{\sin^2\alpha}, \quad \alpha\neq\pi k. \qquad (10.28)$$

Доказательство тригонометрических тождеств. Докажем тождество:

$$\frac{1-\cos\alpha}{\sin\alpha}=\frac{\sin\alpha}{1+\cos\alpha}, \quad \alpha\neq\pi k, \quad k\in Z. \qquad (10.29)$$

Первый способ. Выполним преобразования левой части:

$$\frac{1-\cos\alpha}{\sin\alpha}=\frac{(1-\cos\alpha)(1+\cos\alpha)}{\sin\alpha(1+\cos\alpha)}=\frac{1-\cos^2\alpha}{\sin\alpha(1+\cos\alpha)}=$$
$$=\frac{\sin^2\alpha}{\sin\alpha(1+\cos\alpha)}=\frac{\sin\alpha}{1+\cos\alpha}.$$

Левая часть равна правой. Тождество доказано.

Второй способ. По свойству пропорции имеем

$$(1-\cos\alpha)(1+\cos\alpha)=\sin^2\alpha,$$
$$1-\cos^2\alpha=\sin^2\alpha,\quad \sin^2\alpha=\sin^2\alpha.$$

Тождество доказано.

Применяя основные тригонометрические тождества и следствия из них, можно тригонометрическую функцию (от одного и того же аргумента) выразить через любую другую тригонометрическую функцию.

Выражение тригонометрических функций через синус. Из тождества (10.23) имеем

$$\cos\alpha=\pm\sqrt{1-\sin^2\alpha}.$$

В формулах, содержащих радикалы, знак + или — ставится в зависимости от того, какой четверти принадлежит число α.

Подставив значение $\cos\alpha$ в тождества (10.19) и (10.20), получим

$$\operatorname{tg}\alpha=\frac{\sin\alpha}{\pm\sqrt{1-\sin^2\alpha}},\qquad \alpha\neq\frac{\pi}{2}+\pi k,$$
$$\operatorname{ctg}\alpha=\frac{\pm\sqrt{1-\sin^2\alpha}}{\sin\alpha},\qquad \alpha\neq\pi k.$$

Пример 10.19. Дано: $\sin\alpha=-3/5$, $\alpha\in(3\pi/2,\ 2\pi)$. Вычислите значения $\cos\alpha$, $\operatorname{tg}\alpha$ и $\operatorname{ctg}\alpha$.

Решение. $\cos\alpha=\sqrt{1-\left(-\frac{3}{5}\right)^2}=\frac{4}{5}$, $\operatorname{tg}\alpha=\frac{-\frac{3}{5}}{\frac{4}{5}}=-\frac{3}{4}$, $\operatorname{ctg}\alpha=\frac{1}{\operatorname{tg}\alpha}=-\frac{4}{3}$.

Выражение тригонометрических функций через косинус. Из тождества (10.23) имеем

$$\sin\alpha=\pm\sqrt{1-\cos^2\alpha}.$$

Подставив значение $\sin\alpha$ в тождества (10.19) и (10.20), получим

$$\operatorname{tg}\alpha=\frac{\pm\sqrt{1-\cos^2\alpha}}{\cos\alpha},\qquad \alpha\neq\frac{\pi}{2}+\pi k,$$
$$\operatorname{ctg}\alpha=\frac{\cos\alpha}{\pm\sqrt{1-\cos^2\alpha}},\qquad \alpha\neq\pi k.$$

Пример 10.20. Дано $\cos\alpha=-4/5$, $\alpha\in(\pi,\ 3\pi/2)$. Вычислите значения $\sin\alpha$, $\operatorname{tg}\alpha$ и $\operatorname{ctg}\alpha$.

Решение. $\sin\alpha=-\sqrt{1-\left(-\frac{4}{5}\right)^2}=-\frac{3}{5}$,

$$\operatorname{tg}\alpha=\frac{-\frac{3}{5}}{-\frac{4}{5}}=\frac{3}{4},\qquad \operatorname{ctg}\alpha=\frac{1}{\operatorname{tg}\alpha}=\frac{4}{3}.$$

Выражение тригонометрических функций через тангенс. Из тождества (10.27) получим

$$\cos^2\alpha=\frac{1}{1+\operatorname{tg}^2\alpha},\qquad \alpha\neq\frac{\pi}{2}+\pi k,$$
$$\cos\alpha=\frac{1}{\pm\sqrt{1+\operatorname{tg}^2\alpha}},\qquad \alpha\neq\frac{\pi}{2}+\pi k.$$

Из тождества (10.19) имеем

$$\sin\alpha=\operatorname{tg}\alpha\cdot\cos\alpha,\qquad \alpha\neq\frac{\pi}{2}+\pi k.$$

Подставив в это тождество найденное значение $\cos\alpha$, получим

$$\sin\alpha=\frac{\operatorname{tg}\alpha}{\pm\sqrt{1+\operatorname{tg}^2\alpha}},\qquad \alpha\neq\frac{\pi}{2}+\pi k,$$
$$\operatorname{ctg}\alpha=\frac{1}{\operatorname{tg}\alpha},\qquad \alpha\neq\frac{\pi}{2}\cdot k.$$

Пример 10.21. Дано $\operatorname{tg}\alpha=-\sqrt{3}$, $\alpha\in\left(\frac{\pi}{2},\ \pi\right)$. Вычислите значения $\sin\alpha$, $\cos\alpha$ и $\operatorname{ctg}\alpha$.

Решение. $\operatorname{ctg}\alpha=\frac{1}{\operatorname{tg}\alpha}=-\frac{1}{\sqrt{3}}=-\frac{\sqrt{3}}{3}$,

$$\sin\alpha=\frac{\operatorname{tg}\alpha}{-\sqrt{1+\operatorname{tg}^2\alpha}}=\frac{-\sqrt{3}}{-\sqrt{1+3}}=\frac{\sqrt{3}}{2},$$
$$\cos\alpha=-\sqrt{1-\sin^2\alpha}=-\sqrt{1-\frac{3}{4}}=-\frac{1}{2}.$$

Выражение тригонометрических функций через котангенс. Из тождества (10.28) получим

$$\sin^2\alpha=\frac{1}{1+\operatorname{ctg}^2\alpha},\qquad \alpha\neq\pi k,$$

$$\sin\alpha=\frac{1}{\pm\sqrt{1+\operatorname{ctg}^2\alpha}},\qquad \alpha\neq\pi k.$$

Из тождества (10.20) имеем

$$\cos\alpha=\operatorname{ctg}\alpha\cdot\sin\alpha,\qquad \alpha=\pi k.$$

Подставив в это тождество найденное значение $\sin\alpha$, получим

$$\cos\alpha=\frac{\operatorname{ctg}\alpha}{\pm\sqrt{1+\operatorname{ctg}^2\alpha}},\qquad \alpha\neq\pi k,$$

и

$$\operatorname{tg}\alpha=\frac{1}{\operatorname{ctg}\alpha},\qquad \alpha\neq\frac{\pi}{2}k.$$

Полученные формулы запишем в таблицу.

	$\sin\alpha$	$\cos\alpha$	$\operatorname{tg}\alpha$	$\operatorname{ctg}\alpha$
$\sin\alpha$	$\sin\alpha$	$\pm\sqrt{1-\sin^2\alpha}$	$\dfrac{\sin\alpha}{\pm\sqrt{1-\sin^2\alpha}}$	$\dfrac{\pm\sqrt{1-\sin^2\alpha}}{\sin\alpha}$
$\cos\alpha$	$\pm\sqrt{1-\cos^2\alpha}$	$\cos\alpha$	$\dfrac{\pm\sqrt{1-\cos^2\alpha}}{\cos\alpha}$	$\dfrac{\cos\alpha}{\pm\sqrt{1-\cos^2\alpha}}$
$\operatorname{tg}\alpha$	$\dfrac{\operatorname{tg}\alpha}{\pm\sqrt{1+\operatorname{tg}^2\alpha}}$	$\dfrac{1}{\pm\sqrt{1+\operatorname{tg}^2\alpha}}$	$\operatorname{tg}\alpha$	$\dfrac{1}{\operatorname{tg}\alpha}$
$\operatorname{ctg}\alpha$	$\dfrac{1}{\pm\sqrt{1+\operatorname{ctg}^2\alpha}}$	$\dfrac{\operatorname{ctg}\alpha}{\pm\sqrt{1+\operatorname{ctg}^2\alpha}}$	$\dfrac{1}{\operatorname{ctg}\alpha}$	$\operatorname{ctg}\alpha$

10.1.7. Четность и нечетность тригонометрических функций, их периодичность. На числовой единичной окружности построим точки $M(\alpha)$ и $N(-\alpha)$. Эти точки симметричны относительно оси абсцисс (рис. 10.14). Дуги $\smile{AM}$ и $\smile{AN}$ равны по абсолютной величине и противоположны по знаку. Точки M и N имеют одну и ту же абсциссу и равные по абсолютной величине, но противоположные по знаку ординаты. Отсюда следует

$$\cos(-\alpha) = \cos\alpha, \qquad (10.30)$$

$$\sin(-\alpha) = -\sin\alpha, \qquad (10.31)$$

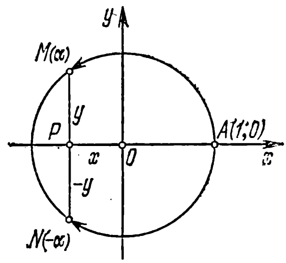


Рис. 10.14.

т. е. косинус — функция четная, а синус — нечетная.

Легко показать, что тангенс и котангенс нечетные функции:

$$\operatorname{tg}(-\alpha) = \frac{\sin(-\alpha)}{\cos(-\alpha)} = \frac{-\sin\alpha}{\cos\alpha} = -\operatorname{tg}\alpha,$$

т. е.

$$\operatorname{tg}(-\alpha) = -\operatorname{tg}\alpha, \qquad \alpha \neq \frac{\pi}{2} + \pi k. \qquad (10.32)$$

Аналогично

$$\operatorname{ctg}(-\alpha) = \frac{\cos(-\alpha)}{\sin(-\alpha)} = \frac{\cos\alpha}{-\sin\alpha} = -\operatorname{ctg}\alpha,$$

т. е.

$$\operatorname{ctg}(-\alpha) = -\operatorname{ctg}\alpha, \qquad \alpha \neq \pi k. \qquad (10.33)$$

Пример 10.22. $\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right) = \cos\frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}$, $\sin\left(-\frac{\pi}{4}\right) = -\sin\frac{\pi}{4} = -\frac{\sqrt{2}}{2}$, $\operatorname{tg}\left(-\frac{\pi}{4}\right) = -\operatorname{tg}\frac{\pi}{4} = -1$, $\operatorname{ctg}\left(-\frac{\pi}{4}\right) = -\operatorname{ctg}\frac{\pi}{4} = -1$.

Пример 10.23. $\cos(-\pi) = \cos\pi = -1$, $\sin(-\pi) = -\sin\pi = 0$, $\operatorname{tg}(-\pi) = -\operatorname{tg}\pi = 0$.

По определению функция $f(\alpha)$ называется *периодической*, если существует такое положительное число $\lambda \neq 0$, называемое *периодом*, что равенство $f(\alpha \pm \lambda) = f(\alpha)$, удовлетворяется при любом допустимом для данной функции значении аргумента α.

Периодичность косинуса и синуса. На числовой единичной окружности числам α и $\alpha + 2\pi k$ соответствует одна и та же точка $M(\alpha)$: $M(\alpha) = M(\alpha + 2\pi k)$, но так как $\cos\alpha$ и $\sin\alpha$ — координаты точки M, то имеем тождества

$$\cos\alpha = \cos(\alpha + 2\pi k), \tag{10.34}$$

$$\sin\alpha = \sin(\alpha + 2\pi k). \tag{10.35}$$

Из равенств (10.34) и (10.35) следует, что $\cos\alpha$ и $\sin\alpha$ — периодические функции, а 2π — один из периодов этих функций.

Докажем, что 2π — основной (наименьший положительный) период для функции $\cos\alpha$. Для этого нужно показать, что не существует такого положительного числа λ $(0 < \lambda < 2\pi)$, для которого равенство (10.34) было бы верным для всех допустимых значений α. Докажем от противного. Пусть периодом функции $\cos\alpha$ будет число λ $(0 < \lambda < 2\pi)$, т. е. $\cos(\alpha + \lambda) = \cos\alpha$. Положим $\alpha = 0$, тогда $\cos(0 + \lambda) = \cos 0 = 1$, но $\cos\lambda = 1$ только в точке $A(1; 0)$ числовой единичной окружности, для которой $\alpha = 2\pi k$. Но дуга, измеряющаяся числом $0 < \lambda < 2\pi$, не оканчивается в точке $A(1; 0)$, а потому ее косинус не равен единице. Полученное противоречие показывает, что не существует положительного числа $0 < \lambda < 2\pi$, для которого было бы справедливо равенство $\cos(\alpha + \lambda) = \cos\alpha$.

Наименьшим положительным значением λ является число 2π, так как для $\cos\lambda = 1$, $\lambda = 0, \pm 2\pi, \pm 4\pi, \ldots$, откуда следует, что $\cos\alpha$ — периодическая функция с периодом, равным 2π. Периодичность косинуса записывается формулой (10.34).

Докажем от противного справедливость формулы (10.35). Допустим, что периодом синуса будет число λ $(0 < \lambda < 2\pi)$, тогда $\sin(\alpha + \lambda) = \sin\alpha$. Положим $\alpha = \pi/2$, тогда $\sin\left(\frac{\pi}{2} + \lambda\right) = \sin\frac{\pi}{2} = 1$; но $\sin\left(\frac{\pi}{2} + \lambda\right) = 1$ только в точке $B(0; 1)$ числовой единичной окружности, для которой $\alpha = \frac{\pi}{2} + 2\pi k$. Следовательно, $\frac{\pi}{2} + \lambda = \frac{\pi}{2} + 2\pi k$, откуда $\lambda = 2\pi k$, но по допущению $0 < \lambda < 2\pi$, тогда $0 < 2\pi k < 2\pi$. Разделив члены неравенства на 2π, получим $0 < k < 1$, но k по допущению — целое число, а между 0 и 1 целых чисел нет. Полученное противоречие показывает, что не существует положительного числа $\lambda < 2\pi$, для которого равенство $\sin(\alpha + \lambda) = \sin\alpha$ было бы справедливым. Наименьшим положительным значением λ является число 2π, следовательно, $\sin\alpha$ — периодическая функция с основным периодом, равным 2π. Периодичность синуса записывается формулой (10.35).

Периодичность тангенса и котангенса. На числовой единичной окружности числам α и $\alpha+\pi k$ соответствуют точки $M(\alpha)$ и $M'(\alpha+\pi k)$ (рис. 10.15). Следовательно, $\operatorname{tg}\alpha = AN$ и $\operatorname{tg}(\alpha+\pi k)=AN$, тогда

$$\operatorname{tg}\alpha=\operatorname{tg}(\alpha+\pi k). \qquad (10.36)$$

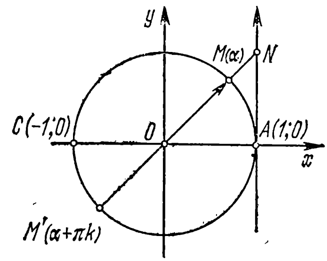


Рис. 10.15.

Очевидно, число π является основным (наименьшим положительным) периодом тангенса, т. е. равенство (10.36) выполняется при любом значении α, кроме $\alpha=\frac{\pi}{2}+\pi k$. Докажем (методом от противного), что не существует положительного числа $\lambda<\pi$, для которого выполнялось бы равенство $\operatorname{tg}(\alpha+\lambda)=\operatorname{tg}\alpha$ для любого значения аргумента $\alpha\left(\alpha\neq\frac{\pi}{2}+\pi k\right)$. Пусть $\alpha=0$, тогда $\operatorname{tg}(0+\lambda)=\operatorname{tg}0=0$, $\operatorname{tg}\lambda=0$. Тангенс равен 0 в точках A и C (рис. 10.15) при значениях аргумента πk. Тогда $\lambda=\pi k$. По допущению $0<\lambda<\pi$ или $0<\pi k<\pi$; разделив члены этого неравенства на π, получим неравенство $0<k<1$, но k по допущению целое число, а между 0 и 1 целых чисел нет. Отсюда следует, что не существует положительного числа $\lambda<\pi$, для которого равенство $\operatorname{tg}(\alpha+\lambda)=\operatorname{tg}\alpha$ было бы справедливым. Наименьшим положительным значением λ является число π, следовательно, $\operatorname{tg}\pi$ — периодическая функция с периодом, равным π. Периодичность тангенса записывается формулой (10.36).

Периодичность котангенса записывается формулой

$$\operatorname{ctg}\alpha=\operatorname{ctg}(\alpha+\pi k), \qquad \alpha\neq\pi k. \qquad (10.37)$$

Формулу (10.37) предоставляется учащемуся доказать самостоятельно.

Пример 10.24. Вычислите $\sin 3660°$.

Решение. По свойству периодичности синуса получим

$$\sin 3660° = \sin(360°\cdot 10+60°)=\sin 60° = \sqrt{3}/2.$$

Пример 10.25. Вычислите $\sin 2{,}5\pi+2\cos 6{,}1\pi$.

Решение. $\sin 2{,}5\pi+2\cos 6{,}1\pi=\sin(2\pi+0{,}5\pi)+$
$+2\cos(2\pi\cdot 3+0{,}1\pi)=\sin 0{,}5\pi+2\cos 0{,}1\pi\approx 1+2\cos 0{,}3142=1+$
$+2\cdot 0{,}9511=2{,}9022$.

Пример 10.26. Найдите период функции $y=\cos 5x$.

Решение. Обозначив искомый период через λ, получим $\cos 5(x+\lambda)=\cos 5x$ или $\cos(5x+5\lambda)=\cos 5x$, откуда заключаем, что $5\lambda=2\pi$, т. е. $\lambda=2\pi/5$.

Пример 10.27. Найдите период функции $y=\sin\frac{5x}{3}+\cos\frac{3x}{5}$.

Решение. Общим наименьшим положительным периодом этой функции будет общее наименьшее кратное периодов каждого из слагаемых. Имеем

$$\sin\frac{5x}{3}=\sin\frac{5}{3}(x+\lambda_1)=\sin\left(\frac{5x}{3}+\frac{5\lambda_1}{3}\right),$$

$$\frac{5\lambda_1}{3}=2\pi,\qquad \lambda_1=\frac{6\pi}{5},$$

$$\cos\frac{3x}{5}=\cos\frac{3}{5}(x+\lambda_2)=\cos\left(\frac{3x}{5}+\frac{3\lambda_2}{5}\right),$$

$$\frac{3\lambda_2}{5}=2\pi,\qquad \lambda_2=\frac{10\pi}{3}.$$

Период функции y равен 30π (наименьшему общему кратному периодов λ_1 и λ_2).

§ 10.2. Формулы приведения

10.2.1. Свойство половины периода косинуса и синуса. На числовой единичной окружности возьмем произвольную точку $M(\alpha)$ и точку $N(\alpha\pm\pi)$. Дуга $\smile{MN}=\pi$, дуга $\smile{MAN}=-\pi$ (рис. 10.16). Эти точки симметричны относительно начала координат. Поэтому соответствующие координаты этих точек равны по абсолютной величине и противоположны по знаку. Координаты точки $M(\alpha)$: $(-x;\,y)$ и координаты точки $N(\alpha\pm\pi)$: $(x;\,-y)$. Следовательно,

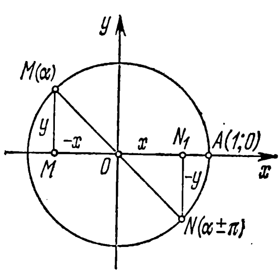


Рис. 10.16.

$$\cos\alpha=-\cos(\alpha\pm\pi),\quad(10.38)$$

$$\sin\alpha=-\sin(\alpha\pm\pi).\quad(10.39)$$

Функции косинус и синус при увеличении или уменьшении аргумента на π изменяются только по знаку.

Пример 10.28. Вычислите: 1) $\sin\frac{5\pi}{6}$, 2) $\sin\frac{7\pi}{6}$, 3) $\cos\frac{2\pi}{3}$, 4) $\cos\frac{5\pi}{4}$, 5) $\sin\left(-\frac{2\pi}{3}\right)$, 6) $\cos\left(-\frac{5\pi}{6}\right)$, 7) $\sin 225°$, 8) $\cos(-210°)$.

Решение. Применив формулу (10.38) или (10.39), получим

1) $\sin\frac{5\pi}{6}=-\sin\left(\frac{5\pi}{6}-\pi\right)=-\sin\left(-\frac{\pi}{6}\right)=\sin\frac{\pi}{6}=\frac{1}{2}$.

2) $\sin\frac{7\pi}{6}=-\sin\left(\frac{7\pi}{6}-\pi\right)=-\sin\frac{\pi}{6}=-\frac{1}{2}$.

3) $\cos\frac{2\pi}{3}=-\cos\left(\frac{2\pi}{3}-\pi\right)=-\cos\left(-\frac{\pi}{3}\right)=-\cos\frac{\pi}{3}=-\frac{1}{2}$.

4) $\cos\frac{5\pi}{4}=-\cos\left(\frac{5\pi}{4}-\pi\right)=-\cos\frac{\pi}{4}=-\frac{\sqrt{2}}{2}$.

5) $\sin\left(-\frac{2\pi}{3}\right)=-\sin\left(-\frac{2\pi}{3}+\pi\right)=-\sin\frac{\pi}{3}=-\frac{\sqrt{3}}{2}$.

6) $\cos\left(-\frac{5\pi}{6}\right)=-\cos\left(-\frac{5\pi}{6}+\pi\right)=-\cos\frac{\pi}{6}=-\frac{\sqrt{3}}{2}$.

7) $\sin 225°=-\sin(225°-180°)=-\sin 45°=-\sqrt{2}/2$.

8) $\cos(-210°)=-\cos(-210°+180°)=-\cos(-30°)=-\cos 30°=$ $=-\sqrt{3}/2$.

10.2.2. Тригонометрические функции взаимно дополнительных аргументов. Два аргумента, в сумме составляющие $\pi/2$, называются *взаимно дополнительными*. Например: 1) $\pi/6$ и $\pi/3$, так как $\pi/6+\pi/3=\pi/2$. 2) $2\pi/3$ и $-\pi/6$, так как $2\pi/3+(-\pi/6)=\pi/2$.

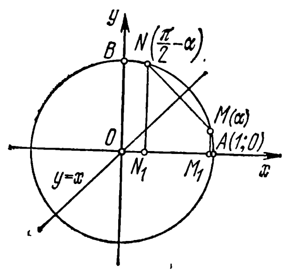


Рис. 10.17.

Числовая единичная окружность симметрична относительно прямой $y=x$ (биссектрисы I и III координатных углов). Пусть дуга $\overset{\frown}{AM}=\alpha$ и $\overset{\frown}{BN}=-\alpha$ (рис. 10.17), тогда точки $M(\alpha)$ и $N\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)$ симметричны относительно прямой $y=x$. При отражении в прямой $y=x$ оси меняются местами: ось абсцисс переходит в ось ординат и, наоборот, ось ординат переходит в ось абсцисс.

Сравнивая координаты точек

$$M(\cos\alpha;\ \sin\alpha) \text{ и } N\left[\cos\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right);\ \sin\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)\right],$$

замечаем, что абсцисса точки N равна ординате точки M и, наоборот, ордината точки N равна абсциссе точки M, откуда следуют равенства

$$\sin\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)=\cos\alpha, \qquad (10.40)$$

$$\cos\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)=\sin\alpha. \qquad (10.41)$$

Мы установили зависимость между синусом и косинусом взаимно дополнительных аргументов. Применив формулы (10.40) и (10.41), установим зависимость между тангенсом и котангенсом взаимно дополнительных аргументов

$$\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)=\frac{\sin\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)}{\cos\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)}=\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}=\operatorname{ctg}\alpha,$$

т. е.

$$\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)=\operatorname{ctg}\alpha, \qquad \alpha\neq\pi k, \tag{10.42}$$

точно так же

$$\operatorname{ctg}\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)=\frac{\cos\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)}{\sin\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)}=\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}=\operatorname{tg}\alpha,$$

т. е.

$$\operatorname{ctg}\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)=\operatorname{tg}\alpha, \quad \alpha\neq\frac{\pi}{2}+\pi k. \tag{10.43}$$

Формулы тригонометрических функций взаимно дополнительных аргументов обычно применяют для приведения тригонометрических функций к положительному аргументу, меньшему $\pi/4$ (45°).

Пример 10.29. Вычислите 1) $\cos 70°$, 2) $\sin 80°$, 3) $\cos\frac{\pi}{3}$, 4) $\sin\frac{2\pi}{3}$, 5) $\cos\frac{5\pi}{6}$.

Решение.

1) $\cos 70°=\sin 20°$,

2) $\sin 80°=\cos 10°$,

3) $\cos\frac{\pi}{3}=\sin\frac{\pi}{6}=\frac{1}{2}$,

4) $\sin\frac{2\pi}{3}=\sin\left[\frac{\pi}{2}-\left(-\frac{\pi}{6}\right)\right]=\cos\left(-\frac{\pi}{6}\right)=\cos\frac{\pi}{6}=\frac{\sqrt{3}}{2}$,

5) $\cos\frac{5\pi}{6}=\cos\left[\frac{\pi}{2}-\left(-\frac{\pi}{3}\right)\right]=\sin\left(-\frac{\pi}{3}\right)=-\sin\frac{\pi}{3}=-\frac{\sqrt{3}}{2}$.

10.2.3. Тригонометрические функции аргументов $\frac{\pi}{2}+\alpha$, $\pi\pm\alpha$, $\frac{3\pi}{2}\pm\alpha$, $2\pi-\alpha$. Докажем тождества:

$$\sin\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)=\cos\alpha, \tag{10.44}$$

$$\cos\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)=-\sin\alpha, \tag{10.45}$$

$$\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)=-\operatorname{ctg}\alpha, \tag{10.46}$$

$$\operatorname{ctg}\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)=-\operatorname{tg}\alpha. \tag{10.47}$$

Для доказательства тождеств (10.44) и (10.45) в тождествах (10.42) и (10.43) заменим аргумент α аргументом $-\alpha$ и, применив свойства четности и нечетности, получим

$$\sin\left[\frac{\pi}{2}-(-\alpha)\right]=\cos(-\alpha), \text{ т. е. } \sin\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)=\cos\alpha.$$

Так же доказываются тождества (10.45)—(10.47).

Пример 10.30. Вычислите с применением тождеств (10.44)—(10.47): 1) $\sin 150°$, 2) $\cos 120°$, 3) $\operatorname{tg} 135°$, 4) $\operatorname{ctg} 2\pi/3$.

Решение.

1) $\sin 150°=\sin(90°+60°)=\cos 60°=1/2$,

2) $\cos 120°=\cos(90°+30)=-\sin 30°=-1/2$,

3) $\operatorname{tg} 135°=\operatorname{tg}(90°+45°)=-\operatorname{ctg} 45°=-1$,

4) $\operatorname{ctg}\frac{2\pi}{3}=\operatorname{ctg}\left(\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{6}\right)=-\operatorname{tg}\frac{\pi}{6}=-\sqrt{3}/3$.

Тригонометрические функции аргумента $\pi-\alpha$. Докажем тождества:

$$\sin(\pi-\alpha)=\sin\alpha, \tag{10.48}$$

$$\cos(\pi-\alpha)=-\cos\alpha, \tag{10.49}$$

$$\operatorname{tg}(\pi-\alpha)=-\operatorname{tg}\alpha, \tag{10.50}$$

$$\operatorname{ctg}(\pi-\alpha)=-\operatorname{ctg}\alpha. \tag{10.51}$$

Для доказательства тождеств (10.48) и (10.49) в тождествах (10.38) и (10.39) заменим аргумент α аргументом $-\alpha$ и, применив свойства четности и нечетности, получим

$$\sin[\pi+(-\alpha)]=-\sin(-\alpha), \text{ т. е. } \sin(\pi-\alpha)=\sin\alpha,$$

$$\cos[\pi+(-\alpha)]=-\cos(-\alpha), \text{ т. е. } \cos(\pi-\alpha)=-\cos\alpha.$$

Тождества (10.50) и (10.51) можно доказать, применив свойства периодичности тангенса и котангенса и свойства четности и нечетности.

Пример 10.31. Вычислите с применением тождеств (10.48) — (10.51): 1) $\sin 480°$, 2) $\cos 150°$, 3) $\operatorname{tg} 120°$, 4) $\operatorname{ctg} 135°$.

Решение.

1) $\sin 480° = \sin 120° = \sin(180° - 60°) = \sin 60° = \sqrt{3}/2$,

2) $\cos 150° = \cos(180° - 30°) = -\cos 30° = -\sqrt{3}/2$,

3) $\operatorname{tg} 120° = \operatorname{tg}(180° - 60°) = -\operatorname{tg} 60° = -\sqrt{3}$,

4) $\operatorname{ctg} 135° = \operatorname{ctg}(180° - 45°) = -\operatorname{ctg} 45° = -1$.

Тригонометрические функции аргумента $\pi + \alpha$. Докажем тождества:

$$\sin(\pi + \alpha) = -\sin\alpha, \tag{10.52}$$

$$\cos(\pi + \alpha) = -\cos\alpha, \tag{10.53}$$

$$\operatorname{tg}(\pi + \alpha) = \operatorname{tg}\alpha, \tag{10.54}$$

$$\operatorname{ctg}(\pi + \alpha) = \operatorname{ctg}\alpha. \tag{10.55}$$

Тождества (10.52) и (10.53) есть видоизмененные тождества (10.38) и (10.39), а тождества (10.54) и (10.55) есть формулы периодичности тангенса и котангенса.

Пример 10.32. Вычислите с применением тождеств (10.52) — (10.55): 1) $\sin 225°$; 2) $\cos 585°$; 3) $\operatorname{tg} 210°$; 4) $\operatorname{ctg} 240°$.

Решение.

1) $\sin 225° = \sin(180° + 45°) = -\sin 45° = -\sqrt{2}/2$,

2) $\cos 585° = \cos 225° = \cos(180° + 45°) = -\cos 45° = -\sqrt{2}/2$,

3) $\operatorname{tg} 210° = \operatorname{tg}(180° + 30°) = \operatorname{tg} 30° = \sqrt{3}/3$,

4) $\operatorname{ctg} 240° = \operatorname{ctg}(180° + 60°) = \operatorname{ctg} 60° = \sqrt{3}/3$.

Тригонометрические функции аргумента $\frac{3\pi}{2} - \alpha$. Докажем тождества:

$$\sin\left(\frac{3\pi}{2} - \alpha\right) = -\cos\alpha, \tag{10.56}$$

$$\cos\left(\frac{3\pi}{2} - \alpha\right) = -\sin\alpha, \tag{10.57}$$

$$\operatorname{tg}\left(\frac{3\pi}{2} - \alpha\right) = \operatorname{ctg}\alpha, \tag{10.58}$$

$$\operatorname{ctg}\left(\frac{3\pi}{2} - \alpha\right) = \operatorname{tg}\alpha. \tag{10.59}$$

Тождества (10.56) и (10.58) можно доказать следующим образом:

$$\sin\left(\frac{3\pi}{2}-\alpha\right)=\sin\left[\pi+\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)\right]=$$
$$=-\sin\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)=-\cos\alpha,$$
$$\operatorname{tg}\left(\frac{3\pi}{2}-\alpha\right)=\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)=\operatorname{ctg}\alpha.$$

Тождества (10.57) и (10.59) доказываются аналогично.

Пример 10.33. Вычислите с применением тождеств (10.56) и (10.57): 1) $\sin 600°$, 2) $\cos 225°$.

Решение.

1) $\sin 600°=\sin 240°=\sin(270°-30°)=-\cos 30°=-\sqrt{3}/2$,

2) $\cos 225°=\cos(270°-45°)=-\cos 45°=-\sqrt{2}/2$.

Тригонометрические функции аргумента $\frac{3\pi}{2}+\alpha$. Докажем тождества:

$$\sin\left(\frac{3\pi}{2}+\alpha\right)=-\cos\alpha, \tag{10.60}$$
$$\cos\left(\frac{3\pi}{2}+\alpha\right)=\sin\alpha, \tag{10.61}$$
$$\operatorname{tg}\left(\frac{3\pi}{2}+\alpha\right)=-\operatorname{ctg}\alpha, \tag{10.62}$$
$$\operatorname{ctg}\left(\frac{3\pi}{2}+\alpha\right)=-\operatorname{tg}\alpha. \tag{10.63}$$

Заменив в тождествах (10.56)—(10.59) аргумент α аргументом $-\alpha$ и применив свойства четности и нечетности, получим тождества (10.60)—(10.63).

Пример 10.34. Вычислите с применением тождества (10.60) и (10.61): 1) $\sin 330°$, 2) $\cos 315°$.

Решение.

1) $\sin 330°=\sin(270°+60°)=-\cos 60°=-1/2$,

2) $\cos 315°=\cos(270°+45°)=\sin 45°=\sqrt{2}/2$.

Тригонометрические функции аргумента $2\pi-\alpha$. Докажем тождества:

$$\sin(2\pi-\alpha)=-\sin\alpha, \tag{10.64}$$
$$\cos(2\pi-\alpha)=\cos\alpha, \tag{10.65}$$
$$\operatorname{tg}(2\pi-\alpha)=-\operatorname{tg}\alpha, \tag{10.66}$$
$$\operatorname{ctg}(2\pi-\alpha)=-\operatorname{ctg}\alpha. \tag{10.67}$$

По свойству периодичности и нечетности имеем

$$\sin(2\pi-\alpha)=\sin(-\alpha)=-\sin\alpha.$$

Тождества (10.65)—(10.67) доказываются аналогично.

Пример 10.35. Вычислите с применением тождеств (10.64) и (10.65): 1) $\sin 300°$; 2) $\cos 330°$.

Решение.

1) $\sin 300° = \sin(360°-60°) = -\sin 60° = -\sqrt{3}/2$,

2) $\cos 330° = \cos(360°-30) = \cos 30° = \sqrt{3}/2$.

Рассмотренные тождества представим таблицей.

Формулы приведения:

	Функция / Аргумент (радианы, градусы)	sin	cos	tg	ctg
1	$-\alpha$	$-\sin\alpha$	$\cos\alpha$	$-\operatorname{tg}\alpha$	$-\operatorname{ctg}\alpha$
2	$\frac{\pi}{2}-\alpha$ $(90°-\alpha)$	$\cos\alpha$	$\sin\alpha$	$\operatorname{ctg}\alpha$	$\operatorname{tg}\alpha$
3	$\frac{\pi}{2}+\alpha$ $(90°+\alpha)$	$\cos\alpha$	$-\sin\alpha$	$-\operatorname{ctg}\alpha$	$-\operatorname{tg}\alpha$
4	$\pi-\alpha$ $(180°-\alpha)$	$\sin\alpha$	$-\cos\alpha$	$-\operatorname{tg}\alpha$	$-\operatorname{ctg}\alpha$
5	$\pi+\alpha$ $(180°+\alpha)$	$-\sin\alpha$	$-\cos\alpha$	$\operatorname{tg}\alpha$	$\operatorname{ctg}\alpha$
6	$\frac{3\pi}{2}-\alpha$ $(270°-\alpha)$	$-\cos\alpha$	$-\sin\alpha$	$\operatorname{ctg}\alpha$	$\operatorname{tg}\alpha$
7	$\frac{3\pi}{2}+\alpha$ $(270°+\alpha)$	$-\cos\alpha$	$\sin\alpha$	$-\operatorname{ctg}\alpha$	$-\operatorname{tg}\alpha$
8	$2\pi-\alpha$ $(360°-\alpha)$	$-\sin\alpha$	$\cos\alpha$	$-\operatorname{tg}\alpha$	$-\operatorname{ctg}\alpha$

При применении формул приведения рекомендуется пользоваться следующими правилами.

1. Если α откладывается от оси Ox, то наименование приводимой функции, т. е. функции аргумента $-\alpha$, $\pi\pm\alpha$, $2\pi-\alpha$ не изменяется. Если α откладывается от

оси Oy, то наименование приводимой функции, т. е. функции аргумента $\frac{\pi}{2} \pm \alpha$, $\frac{3\pi}{2} \pm \alpha$ заменяется на сходное (синус на косинус, тангенс на котангенс и наоборот).

2. Знак, с которым нужно брать тригонометрическую функцию в правой части, находится по знаку левой части в предположении, что $0 < \alpha < \pi/2$.

Пример 10.36. Составьте формулу приведения для $\operatorname{tg}\left(\frac{3\pi}{2}+\alpha\right)$.

Решение. Так как α откладывается от оси Oy, то в правой части формулы ставится котангенс. Формула верна при всех допустимых значениях аргумента α, следовательно, она верна и для $0 < \alpha < \pi/2$, но в этом случае дуга $\frac{3\pi}{2}+\alpha$ оканчивается в IV четверти, в которой тангенс отрицателен. Тогда $\operatorname{tg}\left(\frac{3\pi}{2}+\alpha\right) = -\operatorname{ctg}\alpha$.

§ 10.3. Графики тригонометрических функций

10.3.1. Графики функций $y = \sin x$ и $y = \cos x$. Используя рассмотренные свойства тригонометрических функций и формулы приведения, построим графики тригонометрических функций.

Построение графика функции $y = \sin x$. В силу периодичности синуса достаточно построить график в промежутке $[-\pi, \pi]$, так как в промежутках $[-3\pi, -\pi]$, $[\pi, 3\pi]$, $[3\pi, 5\pi]$ и т. д. график синуса будет иметь тот же вид, что и в промежутке $[-\pi, \pi]$. В указанных промежутках график получается путем сдвига графика синуса в промежутке $[-\pi, \pi]$ влево или вправо. Учитывая свойство нечетности синуса, достаточно построить график в промежутке $[0, \pi]$, так как в промежутке $[-\pi, 0]$ график будет симметричен графику $[0, \pi]$ относительно начала координат. По свойству $\sin(\pi - x) = \sin x$ заключаем, что точки x и $\pi - x$ симметричны относительно точки $\pi/2$, так как, когда x пробегает промежуток $[0, \pi/2]$, $\pi - x$ пробегает в обратном направлении промежуток $[\pi/2, \pi]$. Поэтому в силу того, что график функции $y = \sin x$ будет симметричен относительно прямой $x = \pi/2$, можно ограничиться построением графика в промежутке $[0, \pi/2]$. В промежутке $[0, \pi/2]$ функция $y = \sin x$ монотонно возрастает от 0 до 1. Для приближенного построения графика функции $y = \sin x$ на числовой единичной окружности в промежутке $[0, \pi/2]$ построим точки: 0, $\pi/8$, $\pi/4$,

$3\pi/8$, $\pi/2$ (рис. 10.18). Затем построим значения аргумента 0, $\pi/8$, $\pi/4$, $3\pi/8$, $\pi/2$ на оси Ox (где $\pi/2$ составляет $\approx 1{,}57$ длины радиуса единичной окружности). Построив ординаты, соответствующие этим значениям аргумента (значениям синусов этих аргументов) и соединив ординаты плавной линией (рис. 10.18), получим кривую, приближенно изображающую график синуса. Построение графика будет тем точнее, чем больше мы возьмем точек деления в промежутке $[0, \pi/2]$.

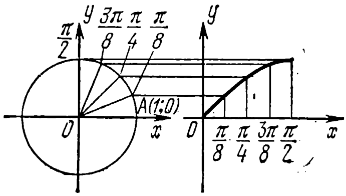


Рис. 10.18.

На рис. 10.19 показан график функции синуса в промежутке $[0, \pi]$, полученный отражением графика в промежутке $[0, \pi/2]$ относительно прямой $x=\pi/2$. На рис. 10.20 показан график функции синуса в промежутке $[-\pi, \pi]$, полученный из графика в

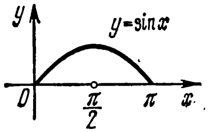


Рис. 10.19.

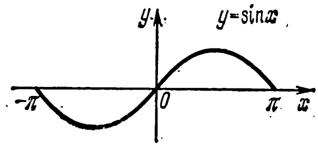


Рис. 10.20.

промежутке $[0, \pi]$ отражением его относительно начала координат. На рис. 10.21 показан график с периодом 2π. График функции синуса называется *синусоидой*.

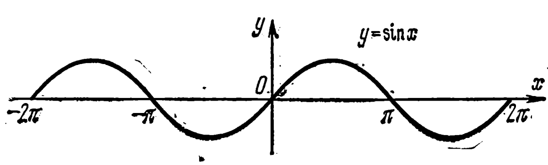


Рис. 10.21.

График функции $y=\cos x$ можно построить, исходя из формулы $\cos x=\sin\left(x+\frac{\pi}{2}\right)$. Эта формула показывает, что график функции $y=\cos x$ получается из графика функции $y=\sin x$ путем сдвига графика функции синуса влево на

$\pi/2$ (рис. 10.22). График функции косинуса называется *косинусоидой*.

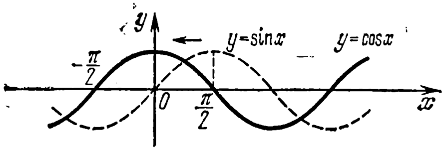


Рис. 10.22.

10.3.2. Графики функций $y=\operatorname{tg} x$ и $y=\operatorname{ctg} x$. При построении графика функции $y=\operatorname{tg} x$ учитываем, что период тангенса равен π, поэтому график тангенса можно построить в промежутке $(-\pi/2, \pi/2)$. Тангенс—функция нечетная, поэтому его график будет симметричен относительно начала координат, тогда достаточно построить график в промежутке $[0, \pi/2)$. В этом промежутке тангенс неограниченно возрастает от нуля. На числовой единичной окружности в промежутке $[0, \pi/2)$ построим точки $0, \pi/8$, $\pi/4$, $3\pi/8$. На оси тангенсов построим точки, соответствующие значениям тангенсов этих аргументов (рис. 10.23). Затем построим эти значения аргумента на оси Ox и соответствующие им ординаты (значения тангенсов этих

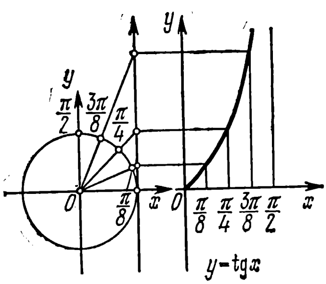


Рис. 10.23.

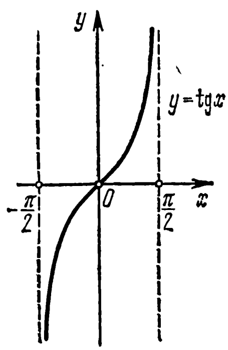


Рис. 10.24.

аргументов). Соединив ординаты плавной линией, получим кривую, приближенно изображающую график тангенса. Взяв большее число точек в промежутке $[0, \pi/2)$, получим более точное изображение графика тангенса.

На рис. 10.24 показан график тангенса в промежутке $(-\pi/2, \pi/2)$, полученный отражением графика $[0, \pi/2)$ относительно начала координат. На рис. 10.25 показан график тангенса, полученный из графика в промежутке $(-\pi/2, \pi/2)$ путем последовательного его переноса вправо и влево на π, 2π, ... и т. д. График тангенса называется *тангенсоидой*.

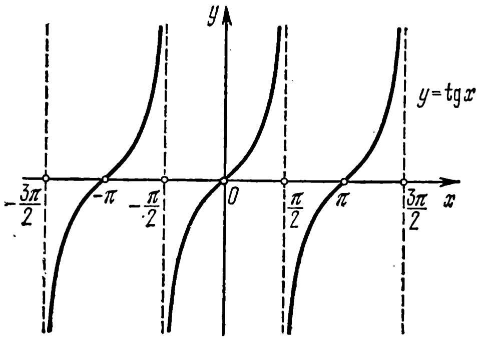


Рис. 10.25.

Для построения графика функции $y = \operatorname{ctg} x$ воспользуемся тождеством $\operatorname{ctg} x = -\operatorname{tg}\left(x+\frac{\pi}{2}\right)$. Из этого тождества следует, что для построения графика котангенса надо

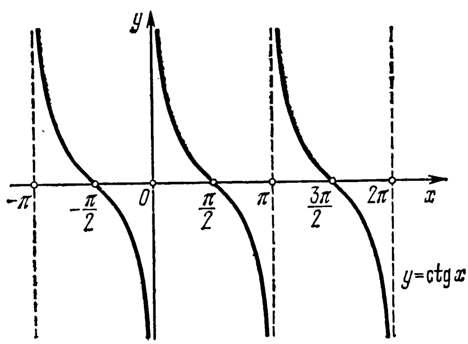


Рис. 10.26.

сдвинуть график тангенса на $\pi/2$ влево вдоль оси Ox и отразить полученную кривую относительно оси Ox (рис. 10.26). График котангенса называется *котангенсоидой*.

В отличие от графиков синуса и косинуса, графики тангенса и котангенса состоят из бесконечного множества одинаковых периодически повторяющихся ветвей.

§ 10.4. Обратные тригонометрические функции

10.4.1. Построение дуги (угла) по данным значениям синуса и косинуса. Функции arcsin x и arccos x. Функция, обратная синусу. Рассмотрим функцию $y=\sin x$ при $x \in [-\pi/2, \pi/2]$.

Известно, что функция $y=\sin x$ в промежутке $[-\pi/2, \pi/2]$ монотонно возрастает от -1 до 1 и принимает все значения, принадлежащие этому промежутку, причем каждое из значений по одному разу, т. е. множество значений $x \in [-\pi/2, \pi/2]$ и множество значений $y \in [-1, 1]$ взаимно однозначно отображаются друг на друга. Тогда функция $y=\sin x$ при $x \in [-\pi/2, \pi/2]$ имеет монотонно возрастающую обратную функцию. Эту функцию называют *арксинусом* (arcsin).

Мы определили новую функцию $y=\arcsin x$, заданную на промежутке $x \in [-1, 1]$ и монотонно возрастающую от $-\pi/2$ до $\pi/2$.

Из определения функции $y=\arcsin x$ следует, что $\sin(\arcsin x)=x$, т. е. $\arcsin x$ есть число из промежутка $[-\pi/2, \pi/2]$, синус которого равен x.

Для функции $y=\arcsin x$ имеет место равенство

$$\arcsin(-x) = -\arcsin x.$$

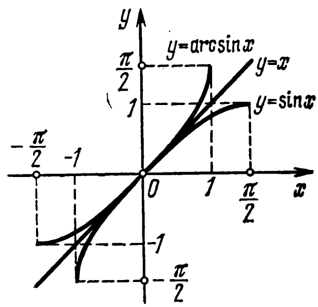


Рис. 10.27

График функции $y=\arcsin x$ получим из графика функции $y=\sin x$ по общему правилу построения графика обратной функции. Для этого построим прямую $y=x$ и отразим от этой прямой синусоиду из промежутка $[-\pi/2, \pi/2]$ (рис. 10.27).

Пример 10.37. Вычислим некоторые значения функции $y=\arcsin x$:

1) $\arcsin 0=0$, так как $\sin 0=0$,

2) $\arcsin(-1)=-\pi/2$, так как $\sin(-\pi/2)=-1$,

3) $\arcsin 1=\pi/2$, так как $\sin(\pi/2)=1$,

4) $\arcsin(\sqrt{3}/2)=\pi/3$, так как $\sin(\pi/3)=\sqrt{3}/2$,

5) $\arcsin(-1/2)=-\pi/6$, так как $\sin(-\pi/6)=-1/2$,

6) $\arcsin 3$ не имеет смысла, так как число 3 не входит в область определения.

Пример 10.38. Найдите множество дуг, синус которых равен a.

Решение. Случай 1. $|a| < 1$ (рис. 10.28). Имеем дуги: $\overset{\frown}{AM_1} = \arcsin a$ и $\overset{\frown}{AM_2} = \pi - \arcsin a$. Каждая из этих дуг имеет синус, равный a. Множество дуг, оканчивающихся в точке M_1, синус которых равен a, записывается формулой

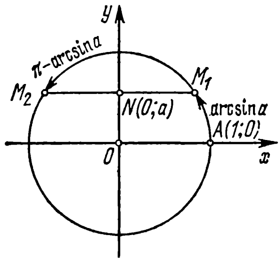


Рис. 10.28.

$$\arcsin a + 2\pi k, \qquad k \in Z,$$

и множество дуг, оканчивающихся в точке M_2, синус которых так же равен a, записывается формулой $\pi - \arcsin a + 2\pi k$ или

$$-\arcsin a + \pi(2k+1), \quad k \in Z,$$

учитывая, что $(-1)^n = 1$, если $n = 2k$ — четное число и $(-1)^n = -1$, если $n = 2k+1$ — нечетное число; эти две формулы можно объединить в одну

$$(-1)^n \arcsin a + \pi n, \qquad n \in Z.$$

Случай 2. Пусть дуга имеет синус, равный $a = \pm 1$ (рис. 10.29). Тогда множество дуг, оканчивающихся в

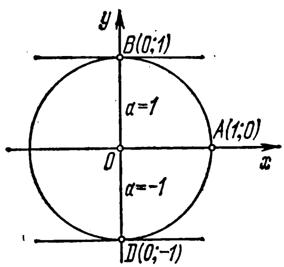


Рис. 10.29.

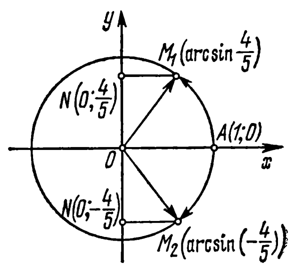


Рис. 10.30.

точке B (т. е. при $a = 1$) записывается формулой

$$\frac{\pi}{2} + 2\pi k, \qquad k \in Z,$$

и множество дуг, оканчивающихся в точке D (т. е. при $a = -1$) записывается формулой

$$-\frac{\pi}{2} + 2\pi k, \qquad k \in Z.$$

Из всех дуг (углов), синус которых равен a, где $|a| \leqslant 1$, главной считается дуга $\arcsin a$ из промежутка $[-\pi/2, \pi/2]$.

Если $|a| > 1$, то $\arcsin a$ не имеет смысла.

Пример 10.39. Постройте дуги $\arcsin 4/5$ и $\arcsin(-4/5)$. Построение выполнено на рис. 10.30.

Функция, обратная косинусу. Рассмотрим функцию $y = \cos x$ при $x \in [0, \pi]$. Функция $y = \cos x$ в промежутке $[0, \pi]$ монотонно убывает от 1 до -1 и принимает каждое значение по одному разу, т. е. множество значений $x \in [0, \pi]$ и множество значений $y \in [-1, 1]$ взаимно однозначно отображаются друг на друга. Следовательно функция $y = \cos x$ при $x \in [0, \pi]$ имеет монотонно убывающую обратную функцию. Эту функцию называют *арккосинусом* (arccos).

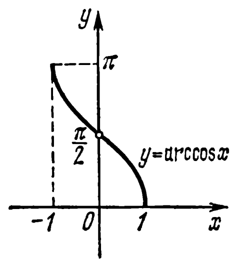


Рис. 10.31.

Функция $y = \arccos x$ определена на промежутке $x \in [-1, 1]$ и монотонно убывает от π до 0.

Из определения функции $y = \arccos x$ следует, что $\cos(\arccos x) = x$, т. е. $\arccos x$ есть число из промежутка $[0, \pi]$, косинус которого равен x.

Для функции $y = \arccos x$ имеет место равенство

$$\arccos(-x) = \pi - \arccos x.$$

График функции $y = \arccos x$ изображен на рис. 10.31.

Пример 10.40. Вычислите некоторые значения функции $y = \arccos x$.

1) $\arccos 0 = \pi/2$, 2) $\arccos 1 = 0$,

3) $\arccos(-1) = \pi$, 4) $\arccos(1/2) = \pi/3$,

5) $\arccos(-\sqrt{2}/2) = 3\pi/4$, 6) $\arccos(-3/4) = \pi - \arccos(3/4)$.

Пример 10.41. Найдите множество дуг, косинус которых равен a.

Решение. Случай 1. $|a| < 1$ (рис. 10.32). Имеем дуги: $\overset{\frown}{AM_1} = \arccos a$, $\overset{\frown}{AM_2} = -\arccos a$. Каждая из этих дуг имеет косинус, равный a. Множество дуг, оканчивающихся в точке M_1, косинус которых равен a, записывается формулой

$$\arccos a + 2\pi k, \qquad k \in Z,$$

и множество дуг, оканчивающихся в точке M_2, косинус которых также равен a записывается формулой

$$-\arccos a + 2\pi k, \qquad k \in Z.$$

Эти две формулы можно объединить в одну

$$\pm \arccos a + 2\pi k, \qquad k \in Z.$$

Случай 2. Пусть дуга имеет косинус, равный $a = \pm 1$ (рис. 10.33). Тогда множество дуг, оканчивающихся

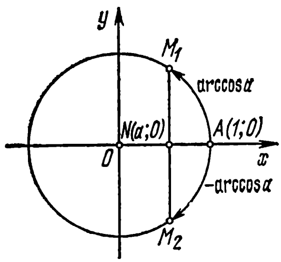


Рис. 10.32.

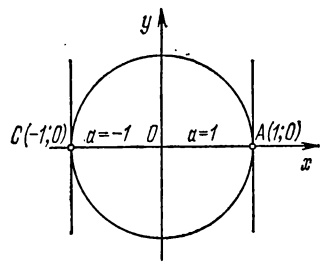


Рис. 10.33.

в точке A (т. е. при $a = 1$), записывается формулой

$$2\pi k, \qquad k \in Z,$$

и множество дуг, оканчивающихся в точке C (т. е. при $a = -1$), записывается формулой

$$\pi(2k+1), \qquad k \in Z.$$

Из всех дуг (углов), косинус которых равен a, где $|a| \leqslant 1$, главной считается дуга $\arccos a$ из промежутка $[0, \pi]$. Если $|a| > 1$, то $\arccos a$ не имеет смысла.

Пример 10.42. Найдите α, если $\cos \alpha = \sqrt{3}/2$.

Ответ. $\alpha = \pm \arccos \sqrt{3}/2 + 2\pi k = \pm \dfrac{\pi}{6} + 2\pi k.$

Пример 10.43. Запишите формулой множество дуг, косинус которых равен 0,4.

Ответ. $\alpha = \pm \arccos 0{,}4 + 2\pi k.$

Пример 10.44. Запишите формулой множество дуг, косинус которых равен $-1/2$.

Ответ. $\alpha = \pm \dfrac{2\pi}{3} + 2\pi k.$

10.4.2. Построение дуги (угла) по данным значениям тангенса и котангенса. Функции $\operatorname{arctg} x$ и $\operatorname{arcctg} x$. Функция, обратная тангенсу. Функция $y = \operatorname{tg} x$ в промежутке $(-\pi/2, \pi/2)$ монотонно возрастает от $-\infty$ до $+\infty$ и принимает каждое значение по одному разу, т. е. множество значений $x \in (-\pi/2, \pi/2)$ и множество $y \in R$ (числовая прямая) взаимно однозначно отображаются друг на друга. Тогда функция $y = \operatorname{tg} x$ при $x \in (-\pi/2, \pi/2)$ имеет монотонно возрастающую обратную функцию. Эту функцию называют *арктангенсом* (arctg).

Областью определения функции $y = \operatorname{arctg} x$ является R (числовая прямая), а множеством значений $\operatorname{arctg} x$ является промежуток $(-\pi/2, \pi/2)$.

Из определения функции $y = \operatorname{arctg} x$ следует, что для всех $x \in R$ $\operatorname{tg}(\operatorname{arctg} x) = x$, т. е. $\operatorname{arctg} x$ есть число из промежутка $(-\pi/2, \pi/2)$, тангенс которого равен x.

Для функции $y = \operatorname{arctg} x$ имеет место равенство

$$\operatorname{arctg}(-x) = -\operatorname{arctg} x.$$

График функции $y = \operatorname{arctg} x$ изображен на рис. 10.34.

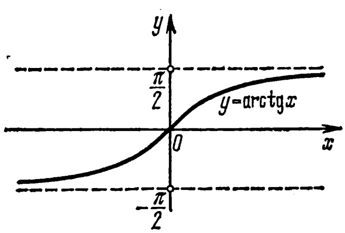


Рис. 10.34.

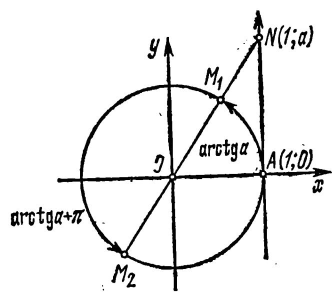


Рис. 10.35.

Пример 10.45. Вычислите некоторые значения функции $y = \operatorname{arctg} x$:

1) $\operatorname{arctg} 0 = 0$, 2) $\operatorname{arctg} \sqrt{3} = \pi/3$,

3) $\operatorname{arctg}(-\sqrt{3}/3) = -\pi/6$, 4) $\operatorname{arctg} 1 = \pi/4$,

5) $\operatorname{arctg}(-1) = -\pi/4$.

Пример 10.46. Найдите множесто дуг, тангенс которых равен a.

Решение. Имеем дуги: $\overset{\smile}{AM_1} = \operatorname{arctg} a$ и $\overset{\smile}{AM_2} = \operatorname{arctg} a + \pi$ (рис. 10.35). Каждая из этих дуг имеет тангенс, равный a. Множество дуг, оканчивающихся в точках M_1 и M_2, записываются общей формулой

$$\operatorname{arctg} a + \pi k, \qquad k \in Z.$$

Из всех дуг (углов), имеющих данный тангенс a, главной считается дуга $\operatorname{arctg} a$ из промежутка $(-\pi/2, \pi/2)$. Точки $-\pi/2$ и $\pi/2$ исключаются, так как тангенс этих дуг не определен.

Пример 10.47. Найдите α, если $\operatorname{tg}\alpha = \sqrt{3}$.

Ответ. $\alpha = \operatorname{arctg}\sqrt{3} + \pi k = \frac{\pi}{3} + \pi k$.

Пример 10.48. Найдите α, если $\operatorname{tg}\alpha = -4/5$.

Решение. $\alpha = \operatorname{arctg}(-4/5) + \pi k$, но $\operatorname{arctg}(-4/5) = -\operatorname{arctg}(4/5)$, тогда $\alpha = -\operatorname{arctg}(4/5) + \pi k$.

Пример 10.49. Постройте дугу $\operatorname{arctg}(-1{,}5)$.

На рис. 10.36 показано построение дуги $\operatorname{arctg}(-1{,}5)$.

Функция, обратная котангенсу. Функция $y = \operatorname{ctg} x$ в промежутке $(0, \pi)$ монотонно убывает от $+\infty$ до $-\infty$ и принимает каждое значение по одному разу,

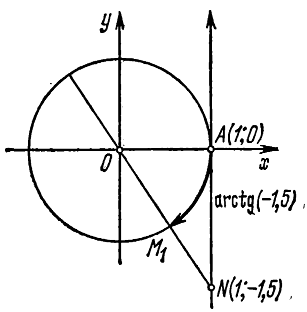


Рис. 10.36.

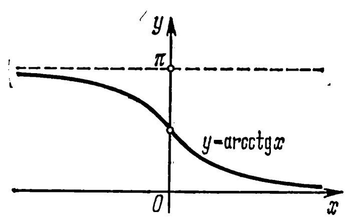


Рис. 10.37.

т. е. множество значений $x \in (0, \pi)$ и множество $y \in R$ (числовая прямая) взаимно однозначно отображаются друг на друга. Тогда функция $y = \operatorname{ctg} x$ при $x \in (0, \pi)$ имеет монотонно убывающую обратную функцию. Эту функцию называют *арккотангенсом* (arcctg).

Областью определения функции $y = \operatorname{arcctg} x$ является R (числовая прямая), а множеством значений $\operatorname{arcctg} x$ является промежуток $(0, \pi)$.

Из определения функции $y=\operatorname{arcctg} x$ следует, что для всех $x \in R$ $\operatorname{ctg}(\operatorname{arcctg} x)=x$, т. е. $\operatorname{arcctg} x$ есть число из промежутка $(0, \pi)$, котангенс которого равен x.

Для функции $y=\operatorname{arcctg} x$ имеет место равенство

$$\operatorname{arcctg}(-x)=\pi-\operatorname{arcctg} x.$$

График функции $y=\operatorname{arcctg} x$ изображен на рис. 10.37.

Пример 10.50. Вычислите некоторые значения функции $y=\operatorname{arcctg} x$:

1) $\operatorname{arcctg} 0=\pi/2$, 2) $\operatorname{arcctg} \sqrt{3}=\pi/6$,

3) $\operatorname{arcctg} 1=\pi/4$, 4) $\operatorname{arcctg}(-1)=3\pi/4$,

5) $\operatorname{arcctg}(-\sqrt{3})=5\pi/6$.

Пример 10.51. Найдите множество дуг, котангенс которых равен a.

Решение. Имеем дуги: $\overset{\frown}{AM_1}=\operatorname{arcctg} a$ и $\overset{\frown}{AM_2}= \operatorname{arcctg} a+\pi$ (рис. 10.38). Каждая из этих дуг имеет

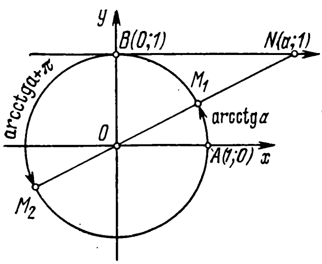


Рис. 10.38.

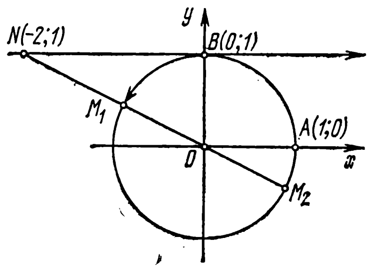


Рис. 10.39.

котангенс, равный a. Множество дуг, оканчивающихся в точках M_1 и M_2, записывается общей формулой

$$\operatorname{arcctg} a+\pi k, \qquad k \in Z.$$

Из всех дуг (углов), имеющих данный котангенс a, главной считается дуга $\operatorname{arcctg} a$ из промежутка $(0, \pi)$. Точки 0 и π исключаются, так как котангенс этих дуг не определен.

Пример 10.52. Постройте дугу $\operatorname{arcctg}(-2)$.

Построение дуги $\operatorname{arcctg}(-2)$ показано на рис. 10.39.

10.4.3. Простейшие тригонометрические уравнения и неравенства. Определение 10.9. *Простейшими тригонометрическими уравнениями называются уравнения:*

$\sin x = m$, $\cos x = m$, $\operatorname{tg} x = m$, $\operatorname{ctg} x = m$, *где* m — *данное число.*

Решить простейшее тригонометрическое уравнение — значит найти множество всех дуг (углов), имеющих данное значение m *тригонометрической функции.*

Определение 10.10. *Простейшими тригонометрическими неравенствами называются неравенства* $\sin x < m$, $\sin x > m$, $\cos x < m$, $\cos x > m$, $\operatorname{tg} x < m$, $\operatorname{tg} x > m$, $\operatorname{ctg} x < m$, $\operatorname{ctg} x > m$, *где* m — *данное число.*

Решить простейшее тригонометрическое неравенство — значит найти множество всех дуг (углов), которые обращают данное неравенство в верное числовое неравенство.

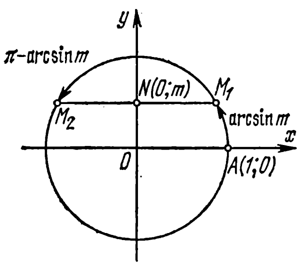


Рис. 10.40.

Уравнение $\sin x = m$. Неравенства $\sin x > m$, $\sin x < m$. Требуется решить уравнение $\sin x = m$.

Решение. Если $|m| \leqslant 1$, то имеем две дуги $\arcsin m$ и $\pi - \arcsin m$, синус которых равен m и концы которых симметричны относительно оси ординат (рис. 10.40). Наименьшая по абсолютной величине дуга $\arcsin m$ из промежутка $[-\pi/2, \pi/2]$, синус которой равен m, называется *главным решением уравнения* $\sin x = m$.

Множество всех искомых дуг, удовлетворяющих уравнению $\sin x = m$ ($|m| \leqslant 1$), находится прибавлением к найденным двум дугам любого целого числа периодов синуса

$$x = \begin{cases} \arcsin m + 2\pi k, \\ \pi - \arcsin m + 2\pi k, \end{cases} \quad \text{или} \quad x = \begin{cases} \arcsin m + 2\pi k, \\ -\arcsin m + (2k+1)\pi. \end{cases}$$

Общее решение можно записать одной формулой

$$x = (-1)^n \arcsin m + \pi n, \qquad n \in Z.$$

Если $|m| > 1$, то уравнение решений не имеет.

Частные случаи:

1) $\sin x = -1$, $\quad x = -\frac{\pi}{2} + 2\pi k$;

2) $\sin x = 0$, $\quad x = \pi k$;

3) $\sin x = 1$, $\quad x = \frac{\pi}{2} + 2\pi k$.

Пример 10.53. Решите уравнение $\sin x = 1/2$.

Решение. Главным решением будет дуга из промежутка $[-\pi/2, \pi/2]$, т. е. дуга $\pi/6$, синус которой равен $1/2$. Общее решение уравнения запишется формулой $x = (-1)^n \frac{\pi}{6} + \pi n$, $n \in Z$.

Пример 10.54. Решите неравенство $\sin x > 1/2$.

Решение. Учитывая свойство ограниченности синуса, данное неравенство можно переписать так:

$$1/2 < \sin x \leqslant 1.$$

Неравенству $\sin x > 1/2$ на первом периоде удовлетворяют дуги из

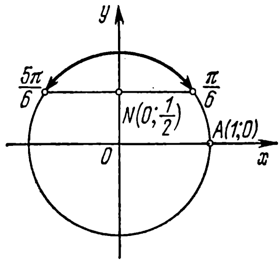


Рис. 10.41.

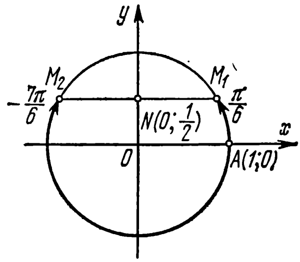


Рис. 10.42.

промежутка $(\pi/6, 5\pi/6)$ (рис. 10.41). В силу периодичности синуса общим решением будет множество дуг

$$\left(\frac{\pi}{6} + 2\pi k, \quad \frac{5\pi}{6} + 2\pi k\right).$$

Пример 10.55. Решите неравенство $\sin x < 1/2$.

Решение. Учитывая свойство ограниченности синуса, данное неравенство можно переписать так:

$$-1 \leqslant \sin x < 1/2.$$

Неравенству $\sin x < 1/2$ на первом периоде удовлетворяют дуги из промежутка $(-7\pi/6, \pi/6)$. В силу периодичности синуса общим решением будет множество дуг

$$\left(-\frac{7\pi}{6} + 2\pi k, \quad \frac{\pi}{6} + 2\pi k\right)$$

(рис. 10.42).

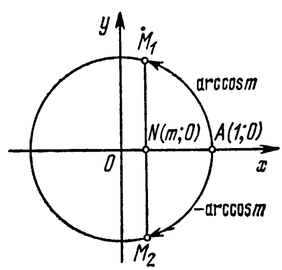


Рис. 10.43.

Уравнение: $\cos x = m$. Неравенства: $\cos x > m$, $\cos x < m$. Требуется решить уравнение $\cos x = m$.

Решение. Если $|m| \leqslant 1$, то имеем две симметричные относительно оси абсцисс дуги: $\overset{\smile}{AM_1} = \arccos m$ и $\overset{\smile}{AM_2} = -\arccos m$, косинус которых равен m (рис. 10.43).

Наименьшая положительная дуга $\arccos m$ из промежутка $[0, \pi]$, косинус которой равен m, называется *главным решением уравнения* $\cos x = m$.

Множество всех искомых дуг, удовлетворяющих уравнению $\cos x = m$ ($|m| \leqslant 1$), находится прибавлением к найденным двум дугам любого целого числа периодов косинуса:

$$x = \pm \arccos m + 2\pi k.$$

Если $|m| > 1$, то уравнение решений не имеет.

Частные случаи:

1) $\cos x = -1$, $x = \pm \pi + 2\pi k$, или $x = (2k+1)\pi$;

2) $\cos x = 0$, $x = \frac{\pi}{2} + \pi k$; 3) $\cos x = 1$, $x = 2\pi k$.

Пример 10.56. Решите уравнение $\cos x = -1/2$.

Решение. Главным решением будет дуга из промежутка $[0, \pi]$, т. е. дуга $\smile{AM_1} = \pi - \frac{\pi}{3} = \frac{2\pi}{3}$, косинус которой равен $-1/2$. Общее решение уравнения: $x = \pm \frac{2\pi}{3} + 2\pi k$ (рис. 10.44).

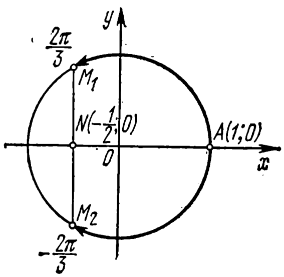


Рис. 10.44

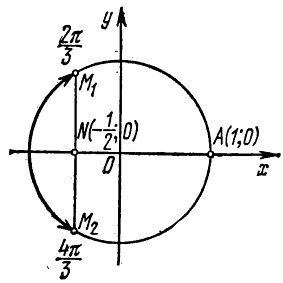


Рис. 10.45.

Пример 10.57. Решите неравенство $\cos x < -1/2$.

Решение. Учитывая свойство ограниченности косинуса, неравенство можно переписать так:

$$-1 \leqslant \cos x < -1/2.$$

Дуга $\smile{AM_1} = \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{6} = \frac{2\pi}{3}$. Дуга $\smile{AM_2} = \frac{3\pi}{2} - \frac{\pi}{6} = \frac{4\pi}{3}$ (рис. 10.45).

Неравенству $\cos x < -1/2$ на первом периоде удовлетворяют дуги из промежутка $\left(\frac{2\pi}{3}, \frac{4\pi}{3}\right)$. В силу периодичности косинуса общим решением будет множество дуг

$$\left(\frac{2\pi}{3} + 2\pi k, \quad \frac{4\pi}{3} + 2\pi k\right).$$

Пример 10.58. Решите неравенство $\cos x > -1/2$.

Решение. По свойству ограниченности косинуса запишем

$$-1/2 < \cos x \leqslant 1.$$

Неравенству $\cos x > -1/2$ на первом периоде удовлетворяют дуги из промежутка $(-2\pi/3,\ 2\pi/3)$ (рис. 10.44).

Общим решением неравенства будет множество дуг

$$\left(-\frac{2\pi}{3}+2\pi k,\ \ \frac{2\pi}{3}+2\pi k\right).$$

Уравнение: $\operatorname{tg} x = m$. Неравенства: $\operatorname{tg} x > m$, $\operatorname{tg} x < m$. Решить уравнение $\operatorname{tg} x = m$.

Решение. Наименьшая по абсолютной величине дуга $\operatorname{arctg} m$ из промежутка $(-\pi/2,\ \pi/2)$, тангенс которой равен m, называется *главным решением уравнения* $\operatorname{tg} x = m$.

Множество всех искомых дуг, удовлетворяющих уравнению $\operatorname{tg} x = m$, находится прибавлением любого целого числа периодов тангенса:

$$x = \operatorname{arctg} m + \pi k.$$

Частный случай: $\operatorname{tg} x = 0$, $x = \pi k$.

Пример 10.59. Решить уравнение $\operatorname{tg} x = \sqrt{3}$.

Решение. Главным решением будет дуга из промежутка $(-\pi/2,\ \pi/2)$, т. е. дуга $\pi/3$, тангенс которой равен $\sqrt{3}$. Общее решение уравнения записывается формулой

$$x = \frac{\pi}{3} + \pi k.$$

Пример 10.60. Решите неравенство $\operatorname{tg} x > \sqrt{3}$.

Решение. Учитывая свойство неограниченности тангенса, запишем $\sqrt{3} < \operatorname{tg} x < +\infty$.

Неравенству $\operatorname{tg} x > \sqrt{3}$ на первом периоде удовлетворяют дуги из промежутка $(\pi/3,\ \pi/2)$. В силу периодичности тангенса общим решением будет множество дуг

$$\left(\frac{\pi}{3}+\pi k,\ \ \frac{\pi}{2}+\pi k\right).$$

Решение некоторых тригонометрических уравнений. Рассмотрим несколько примеров, когда тригонометрическое уравнение более сложного вида приводится к простейшему тригонометрическому уравнению.

Пример 10.61. Решите тригонометрическое уравнение $2\cos^2 x + 3\sin x = 0$.

Решение. Заменив $\cos^2 x$ тождественно равным ему выражением $1-\sin^2 x$, получим $2\sin^2 x - 3\sin x - 2 = 0$. Решая это уравнение относительно $\sin x$, получим

$$\sin x = 2 \quad \text{и} \quad \sin x = -1/2.$$

Данное уравнение равносильно двум простейшим уравнениям. Уравнение $\sin x=2$ решения не имеет. Из уравнения $\sin x=-1/2$ имеем

$$x=-\frac{\pi}{6}+2\pi k \quad \text{и} \quad x=-\frac{5\pi}{6}+2\pi k,$$

или

$$x=-\frac{\pi}{6}(-1)^n+\pi n,$$

где k и n — любые целые числа.

Пример 10.62. Решите уравнение $\cos x-\sin x=0$.

Решение. Уравнение $\cos x-\sin x=0$ — однородное. (Тригонометрические уравнения, у которых левая часть есть однородный многочлен относительно $\sin x$ и $\cos x$, а правая часть равна нулю, называются *однородными*.)

Разделим обе части уравнения на $\cos x$ (такое деление выполнимо, так как при $\cos x=0$ уравнение не удовлетворяется)

$$1-\operatorname{tg} x=0, \quad \operatorname{tg} x=1, \quad x=\frac{\pi}{4}+\pi k.$$

Пример 10.63. Решите уравнение $2\sin^2 x-\sin x\cos x-3\cos^2 x=0$.

Решение. Данное уравнение однородное. Разделим обе части уравнения на $\cos^2 x$ ($\cos^2 x\neq 0$): $2\operatorname{tg}^2 x-\operatorname{tg} x-3=0$. Решив уравнение относительно $\operatorname{tg} x$, получим $\operatorname{tg} x=-1$ и $\operatorname{tg} x=3/2$. Из первого уравнения имеем $x=-\frac{\pi}{4}+\pi k$ и из второго $x=\operatorname{arctg}\frac{3}{2}+\pi k$.

Пример 10.64. Решите уравнение $\cos 5x=0$.

Решение. $5x=\frac{\pi}{2}+\pi k$, откуда $x=\frac{\pi}{10}+\frac{\pi}{5}k$.

§ 10.5. Формулы сложения и их следствия

10.5.1. Тригонометрические функции суммы и разности двух аргументов. Косинус суммы и разности двух аргументов. Пусть в единичном круге

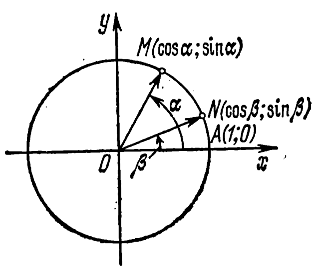


Рис. 10.46.

радиус-вектор $\overrightarrow{OM}=\{x;\ y\}$ образует с осью Ox угол α и радиус-вектор $\overrightarrow{ON}=\{x_1;\ y_1\}$ угол β (рис. 10.46), тогда угол между радиус-векторами $\overrightarrow{ON}$ и $\overrightarrow{OM}$ будет равен $\alpha-\beta$, при условии, что модуль $|\alpha-\beta| \leqslant \pi$. В единичном круге соответственно имеем

$$x=\cos\alpha, \quad y=\sin\alpha, \quad x_1=\cos\beta \text{ и } y_1=\sin\beta.$$

Скалярное произведение векторов $\overrightarrow{OM}$ и $\overrightarrow{ON}$ будет $\overrightarrow{OM}\cdot\overrightarrow{ON}=|\overrightarrow{OM}|\cdot|\overrightarrow{ON}|\cdot\cos(\alpha-\beta)$. Скалярное произведение, выраженное в координатах, равно

$$\overrightarrow{OM}\cdot\overrightarrow{ON}=x\cdot x_1+y\cdot y_1=\cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta.$$

Но так как длины векторов равны 1, то имеем

$$\cos(\alpha-\beta)=\cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta. \tag{10.68}$$

Косинус разности двух аргументов равен произведению косинусов этих аргументов плюс произведение их синусов.

Формула (10.68) справедлива для любых значений аргументов α и β, так как теоремы, на которые опиралось доказательство, справедливы для любых значений аргументов.

Заменив в формуле (10.68) аргумент β на аргумент $-\beta$, получим

$$\cos(\alpha+\beta)=\cos\alpha\cos(-\beta)+\sin\alpha\sin(-\beta),$$

или

$$\cos(\alpha+\beta)=\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta. \tag{10.69}$$

Косинус суммы двух аргументов равен произведению косинусов этих аргументов минус произведение их синусов.

Синус суммы и разности двух аргументов. Для получения формулы синуса суммы двух аргументов воспользуемся формулой (10.68)

$$\sin(\alpha+\beta)=\cos\left[\frac{\pi}{2}-(\alpha+\beta)\right]=\cos\left[\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)-\beta\right]=$$
$$=\cos\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)\cos\beta+\sin\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)\sin\beta,$$

т. е.

$$\sin(\alpha+\beta)=\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta. \tag{10.70}$$

Синус суммы двух аргументов равен сумме произведений синуса первого аргумента на косинус второго и косинуса первого аргумента на синус второго.

Заменив в формуле (10.70) аргумент β на аргумент $-\beta$, получим

$$\sin(\alpha-\beta)=\sin\alpha\cos(-\beta)+\cos\alpha\sin(-\beta),$$

или

$$\sin(\alpha-\beta)=\sin\alpha\cos\beta-\cos\alpha\sin\beta. \qquad (10.71)$$

Синус разности двух аргументов равен разности произведений синуса первого аргумента на косинус второго и косинуса первого аргумента на синус второго.

Формулы (10.69)—(10.71) верны для любых значений α и β.

Все выведенные ранее формулы приведения являются частными случаями формул сложения.

Тангенс суммы и разности двух аргументов. Из формул (10.70) и (10.69) получим формулу для тангенса суммы двух аргументов

$$\operatorname{tg}(\alpha+\beta)=\frac{\sin(\alpha+\beta)}{\cos(\alpha+\beta)}=\frac{\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta}{\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta}.$$

Предположив, что $\cos\alpha\neq0$ и $\cos\beta\neq0$, разделим числитель и знаменатель дроби, стоящей в правой части, на произведение $\cos\alpha\cos\beta$:

$$\operatorname{tg}(\alpha+\beta)=\frac{\dfrac{\sin\alpha\cos\beta}{\cos\alpha\cos\beta}+\dfrac{\cos\alpha\sin\beta}{\cos\alpha\cos\beta}}{\dfrac{\cos\alpha\cos\beta}{\cos\alpha\cos\beta}-\dfrac{\sin\alpha\sin\beta}{\cos\alpha\cos\beta}}=\frac{\dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha}+\dfrac{\sin\beta}{\cos\beta}}{1-\dfrac{\sin\alpha\sin\beta}{\cos\alpha\cos\beta}}=\frac{\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{tg}\beta}{1-\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta},$$

или

$$\operatorname{tg}(\alpha+\beta)=\frac{\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{tg}\beta}{1-\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta}. \qquad (10.72)$$

Тангенс суммы двух аргументов равен сумме тангенсов этих аргументов, деленной на разность единицы и произведения их тангенсов.

Заменив в формуле (10.72) аргумент β на аргумент $-\beta$, получим

$$\operatorname{tg}(\alpha-\beta)=\frac{\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{tg}(-\beta)}{1+\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}(-\beta)},$$

или

$$\operatorname{tg}(\alpha-\beta)=\frac{\operatorname{tg}\alpha-\operatorname{tg}\beta}{1+\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta}. \qquad (10.73)$$

Тангенс разности двух аргументов равен разности тангенсов этих аргументов, деленной на сумму единицы и произведения их тангенсов.

Формулы сложения и вычитания для котангенса выводятся аналогично формулам для тангенса:

$$\operatorname{ctg}(\alpha\pm\beta)=\frac{1\mp\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta}{\operatorname{tg}\alpha\pm\operatorname{tg}\beta}=\frac{\operatorname{ctg}\alpha\operatorname{ctg}\beta\mp1}{\operatorname{ctg}\beta\pm\operatorname{ctg}\alpha}. \qquad (10.74)$$

Пример 10.65.1. Вычислите $\sin 15°$, $\cos 15°$, $\operatorname{tg} 15°$ и $\operatorname{ctg} 15°$.
Решение.

$$\sin 15° = \sin(45° - 30°) = \sin 45° \cos 30° - \cos 45° \sin 30° =$$

$$= \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{\sqrt{2}}{4}(\sqrt{3} - 1);$$

$$\cos 15° = \cos(45° - 30°) = \cos 45° \cos 30° + \sin 45° \sin 30° =$$

$$= \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{\sqrt{2}}{4}(\sqrt{3} + 1);$$

$$\operatorname{tg} 5° = \frac{\sin 15°}{\cos 15°} = \frac{\sqrt{3} - 1}{\sqrt{3} + 1} = 2 - \sqrt{3}; \quad \operatorname{ctg} 15° = \frac{\sqrt{3} + 1}{\sqrt{3} - 1} = 2 + \sqrt{3}.$$

Пример 10.66. Вычислите $\sin 70° \cos 40° - \cos 70° \sin 40°$.
Решение. Применив формулу (10.70), получим

$$\sin 70° \cos 40° - \cos 70° \sin 40° = \sin(70° - 40°) = \sin 30° = 1/2.$$

Пример 10.67. Вычислить $\cos(\alpha + \beta)$, если $\cos\alpha = 3/5$, $\cos\beta = 4/5$ и $\pi/2 < \alpha < \pi$, $\pi < \beta < 3\pi/2$.

Решение. Вычислим $\sin\alpha$ и $\sin\beta$ с учетом четверти, которой принадлежат углы α и β:

$$\sin\alpha = \sqrt{1 - \left(\frac{3}{5}\right)^2} = \frac{4}{5}, \quad \sin\beta = -\sqrt{1 - \left(\frac{4}{5}\right)^2} = -\frac{3}{5}.$$

Подставив данные и найденные значения в формулу (10.69), получим

$$\cos(\alpha + \beta) = \frac{3}{5} \cdot \frac{4}{5} - \frac{4}{5}\left(-\frac{3}{5}\right) = \frac{24}{25}.$$

Пример 10.68. Решите уравнение $\sin 2x \cos x = \cos 2x \sin x$.

Решение. $\sin 2x \cos x - \cos 2x \cdot \sin x = 0$, т. е. $\sin(2x - x) = 0$, $\sin x = 0$, $x = \pi k$.

10.5.2. Тригонометрические функции удвоенного и половинного аргументов. Рассмотрим теоремы сложения для частного случая, когда слагаемые аргумента равны, таким образом получим формулы, выражающие тригонометрические функции от 2α через тригонометрические функции от аргумента α:

$$\sin 2\alpha = \sin(\alpha + \alpha) = \sin\alpha\cos\alpha + \sin\alpha\cos\alpha = 2\sin\alpha\cos\alpha,$$

$$\cos 2\alpha = \cos(\alpha + \alpha) = \cos\alpha\cos\alpha - \sin\alpha\sin\alpha = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha,$$

$$\operatorname{tg} 2\alpha = \operatorname{tg}(\alpha + \alpha) = \frac{\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{tg}\alpha}{1 - \operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\alpha} = \frac{2\operatorname{tg}\alpha}{1 - \operatorname{tg}^2\alpha}.$$

Мы получили следующие формулы тригонометрических функций удвоенного аргумента:

$$\sin 2\alpha = 2\sin\alpha\cos\alpha, \tag{10.74}$$

$$\cos 2\alpha = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha, \tag{10.75}$$

$$\operatorname{tg} 2\alpha = \frac{2\operatorname{tg}\alpha}{1-\operatorname{tg}^2\alpha}, \quad \alpha \neq \frac{\pi}{2} + \pi k \quad \text{и} \quad \alpha \neq \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{2}k. \tag{10.76}$$

Формулу для косинуса удвоенного аргумента полезно применять еще в таких видах:

$$\cos 2\alpha = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha = \cos^2\alpha - (1-\cos^2\alpha) = 2\cos^2\alpha - 1,$$
$$\cos 2\alpha = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha = 1 - \sin^2\alpha - \sin^2\alpha = 1 - 2\sin^2\alpha.$$

Получили формулы, позволяющие косинус удвоенного аргумента выражать или только через косинус или только через синус этого аргумента:

$$\cos 2\alpha = 2\cos^2\alpha - 1, \tag{10.77}$$

$$\cos 2\alpha = 1 - 2\sin^2\alpha. \tag{10.78}$$

Пример 10.69. Выразите $\operatorname{tg} 3\alpha$ через $\operatorname{tg}\alpha$.
Решение.

$$\operatorname{tg} 3\alpha = \operatorname{tg}(2\alpha+\alpha) = \frac{\operatorname{tg} 2\alpha + \operatorname{tg}\alpha}{1-\operatorname{tg} 2\alpha \operatorname{tg}\alpha} = \frac{\frac{2\operatorname{tg}\alpha}{1-\operatorname{tg}^2\alpha} + \operatorname{tg}\alpha}{1 - \frac{2\operatorname{tg}\alpha}{1-\operatorname{tg}^2\alpha}\operatorname{tg}\alpha} = \frac{3\operatorname{tg}\alpha - \operatorname{tg}^3\alpha}{1-3\operatorname{tg}^2\alpha}.$$

Пример 10.70. Вычислите $\sin 2\alpha$, если $\sin\alpha = 4/5$ и $\pi/2 < \alpha < \pi$.
Решение. $\cos\alpha = -\sqrt{1-(4/5)^2} = -3/5$, по формуле (10.74) получим $\sin 2\alpha = 2(4/5)(-3/5) = -24/25$.

Пример 10.71. Вычислите $\cos 2\alpha$, если $\sin\alpha = -0{,}3$.
Решение. Применив формулу (10.78), получим

$$\cos 2\alpha = 1 - 2(-0{,}3)^2 = 0{,}82.$$

Пример 10.72. Вычислите $\operatorname{tg} 2\alpha$, если $\operatorname{tg}\alpha = -0{,}6$.
Решение. По формуле (10.76) получим

$$\operatorname{tg} 2\alpha = \frac{2(-0{,}6)}{1-0{,}36} = \frac{-1{,}2}{0{,}64} = -\frac{15}{8}.$$

Пример 10.73. Вычислите $\sin 3\alpha$.
Решение.

$$\sin 3\alpha = \sin(2\alpha+\alpha) = \sin 2\alpha\cos\alpha + \cos 2\alpha\sin\alpha =$$
$$= 2\sin\alpha\cos\alpha\cos\alpha + (\cos^2\alpha - \sin^2\alpha)\sin\alpha = 2\sin\alpha\cos^2\alpha +$$
$$+ \cos^2\alpha\sin\alpha - \sin^3\alpha = 3\sin\alpha\cos^2\alpha - \sin^3\alpha = 3\sin\alpha - 4\sin^3\alpha.$$

Пример 10.74. Решите уравнение $\sin x\cos x = 1/2$.

Решение. Умножив левую и правую части на 2, получим

$$2\sin x\cos x=1,\quad \sin 2x=1,\quad 2x=\frac{\pi}{2}+2\pi k,\quad x=\frac{\pi}{4}+\pi k.$$

Выразим тригонометрические функции аргумента α через тригонометрические функции аргумента $\alpha/2$. Для этого используем формулы (10.77) и (10.78). Заменив в этих формулах аргумент α аргументом $\alpha/2$, получим

$$\cos\alpha=2\cos^2\frac{\alpha}{2}-1 \text{ или } \frac{1+\cos\alpha}{2}=\cos^2\frac{\alpha}{2}, \quad (10.79)$$

$$\cos\alpha=1-2\sin^2\frac{\alpha}{2} \text{ или } \frac{1-\cos\alpha}{2}=\sin^2\frac{\alpha}{2}, \quad (10.80)$$

откуда имеем

$$\cos\frac{\alpha}{2}=\pm\sqrt{\frac{1+\cos\alpha}{2}}, \quad (10.81)$$

$$\sin\frac{\alpha}{2}=\pm\sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{2}}, \quad (10.82)$$

где знак перед корнем находится по знаку четверти, которой принадлежит аргумент α.

Разделив почленно (10.82) на (10.81), получим

$$\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}=\pm\sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{1+\cos\alpha}}, \qquad \alpha\neq\pi+2\pi k. \quad (10.83)$$

Знак перед радикалом надо брать так, чтобы он совпадал со знаком $\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}$: знак $+$, если $\alpha/2$ принадлежит I или III четверти, и знак —, если $\alpha/2$ принадлежит II или IV четверти.

Разделив почленно (10.81) на (10.82), получим

$$\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2}=\pm\sqrt{\frac{1+\cos\alpha}{1-\cos\alpha}}, \qquad \alpha\neq 2\pi k. \quad (10.84)$$

Вместо формул (10.83) и (10.84) можно получить формулы, дающие рациональное выражение $\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}$ через тригонометрические функции аргумента α.

Имеем равенство $\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}=\dfrac{\sin\frac{\alpha}{2}}{\cos\frac{\alpha}{2}}$, полагаем $\cos\frac{\alpha}{2}\neq 0$.

Умножив при этом условии числитель и знаменатель правой части на $2\cos\frac{\alpha}{2}$, получим

$$\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}=\frac{2\sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2}}{2\cos^2\frac{\alpha}{2}},$$

но $2\sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2}=\sin\alpha$ и $2\cos^2\frac{\alpha}{2}=1+\cos\alpha$, тогда

$$\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}=\frac{\sin\alpha}{1+\cos\alpha},\qquad \alpha\neq\pi+2\pi k. \tag{10.85}$$

Аналогично можно доказать равенства

$$\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}=\frac{1-\cos\alpha}{\sin\alpha}, \tag{10.86}$$

$$\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2}=\frac{1+\cos\alpha}{\sin\alpha}, \tag{10.87}$$

$$\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2}=\frac{\sin\alpha}{1-\cos\alpha}. \tag{10.88}$$

В равенствах (10.86) и (10.87) левая и правая части имеют различные области определения. В равенстве (10.86) левая часть имеет область определения $\alpha\neq\pi+2\pi k$, а правая часть $\alpha\neq\pi k$. В равенстве (10.87) область определения левой части $\alpha\neq 2\pi k$, а правой части $\alpha\neq\pi k$. В равенстве (10.88) области определения совпадают: $\alpha\neq 2\pi k$. Применяя формулы (10.86) и (10.87) при решении тригонометрических уравнений, надо учитывать несовпадение их областей определения.

Пример 10.75. $\sin\alpha=0{,}6$ и $0<\alpha<\pi/2$. Найдите $\sin(\alpha/2)$, $\cos(\alpha/2)$ и $\operatorname{tg}(\alpha/2)$.

Решение. $\cos\alpha=\sqrt{1-0{,}36}=0{,}8$. По формулам (10.82) и (10.81) находим

$$\sin\frac{\alpha}{2}=\sqrt{\frac{1-0{,}8}{2}}=\sqrt{0{,}1}=\frac{\sqrt{10}}{10},$$

$$\cos\frac{\alpha}{2}=\sqrt{\frac{1+0{,}8}{2}}=\sqrt{0{,}9}=\frac{3\sqrt{10}}{10},$$

$$\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}=\frac{1}{3}.$$

Выражение тригонометрических функций через тангенс половинного аргумента. Все тригонометрические функции любого аргумента выражаются рационально через тангенс половины этого аргумента. Выразим $\sin\alpha$ и $\cos\alpha$ через $\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}$.

Имеем $\sin\alpha = 2\sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2}$, $\cos\alpha = \cos^2\frac{\alpha}{2} - \sin^2\frac{\alpha}{2}$. Разделив правые части этих равенств на $1 = \sin^2\frac{\alpha}{2} + \cos^2\frac{\alpha}{2}$, получим

$$\sin\alpha = \frac{2\sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2}}{\sin^2\frac{\alpha}{2} + \cos^2\frac{\alpha}{2}}, \quad \cos\alpha = \frac{\cos^2\frac{\alpha}{2} - \sin^2\frac{\alpha}{2}}{\sin^2\frac{\alpha}{2} + \cos^2\frac{\alpha}{2}}.$$

Разделив правые части этих двух равенств на $\cos^2\frac{\alpha}{2}$, получим

$$\sin\alpha = \frac{2\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}}{1 + \operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2}}, \tag{10.89}$$

$$\cos\alpha = \frac{1 - \operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2}}{1 + \operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2}}. \tag{10.90}$$

Из формул (10.89) и (10.90) получаем

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{2\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}}{1 - \operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2}}, \tag{10.91}$$

$$\operatorname{ctg}\alpha = \frac{1 - \operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2}}{2\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}}. \tag{10.92}$$

Полученные формулы теряют смысл, если $\frac{\alpha}{2} = \frac{\pi}{2} + \pi k$, т. е. при всех $\alpha = \pi(2k+1)$, $k \in Z$.

Пример 10.76. Вычислите выражение $\frac{5\cos\alpha - 3}{10\sin\alpha + 1}$, если $\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2} = 3$.

Решение. По формулам (10.89) и (10.90) получим

$$\sin\alpha = \frac{6}{1+9} = \frac{3}{5}, \quad \cos\alpha = \frac{1-9}{1+9} = -\frac{4}{5},$$

следовательно,

$$\frac{5\cos\alpha-3}{10\sin\alpha+1}=\frac{-4-3}{6+1}=-1.$$

Пример 10.77. Решите уравнение $3\sin x+4\cos x=4$.

Решение. Выразим $\sin x$ и $\cos x$ через $z=\operatorname{tg}(x/2)$:

$$\sin x=\frac{2z}{1+z^2},\qquad \cos x=\frac{1-z^2}{1+z^2},$$

тогда

$$\frac{6z}{1+z^2}+\frac{4-4z^2}{1+z^2}=4,\qquad 4z^2-3z=0,\qquad z_1=0,\qquad z_2=\frac{3}{4}.$$

Данное уравнение равносильно уравнениям $\operatorname{tg}\frac{x}{2}=0$ и $\operatorname{tg}\frac{x}{2}=\frac{3}{4}$, откуда

$$\frac{x}{2}=\pi k,\qquad x=2\pi k,$$

$$\frac{x}{2}=\operatorname{arctg}\frac{3}{4}+\pi k,\qquad x=2\operatorname{arctg}\frac{3}{4}+2\pi k,\qquad k\in Z.$$

10.5.3. Преобразование произведения тригонометрических функций в сумму. В тригонометрических вычислениях при решении тригонометрических уравнений нередки случаи, когда необходимо преобразовать произведение тригонометрических функций ($\sin\alpha\cos\beta$, $\cos\alpha\cos\beta$, $\sin\alpha\sin\beta$) в алгебраическую сумму.

Сложив почленно равенства (10.70) и (10.71):

$$\sin(\alpha+\beta)=\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta,$$
$$\sin(\alpha-\beta)=\sin\alpha\cos\beta-\cos\alpha\sin\beta,$$

получим

$$\sin(\alpha+\beta)+\sin(\alpha-\beta)=2\sin\alpha\cos\beta,$$

откуда

$$\sin\alpha\cos\beta=\frac{1}{2}[\sin(\alpha-\beta)+\sin(\alpha-\beta)]. \qquad (10.93)$$

Справедливы равенства (см. (10.69) и (10.68))

$$\cos(\alpha+\beta)=\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta,$$
$$\cos(\alpha-\beta)=\cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta.$$

Складывая почленно эти равенства и вычитая первое равенство из второго, получим

$$\cos(\alpha+\beta)+\cos(\alpha-\beta)=2\cos\alpha\cos\beta,$$
$$\cos(\alpha-\beta)-\cos(\alpha+\beta)=2\sin\alpha\sin\beta,$$

откуда

$$\cos\alpha\cos\beta=\frac{1}{2}[\cos(\alpha+\beta)+\cos(\alpha-\beta)], \qquad (10.94)$$

$$\sin\alpha\sin\beta=\frac{1}{2}[\cos(\alpha-\beta)-\cos(\alpha+\beta)]. \qquad (10.95)$$

Формулы (10.93)—(10.95) применяются для преобразования произведения тригонометрических функций в алгебраическую сумму.

Пример 10.78. Представьте произведение $\sin 25^\circ \sin 5^\circ$ в виде суммы.

Решение. По формуле (10.95) получим

$$\sin 25^\circ \sin 5^\circ=\frac{1}{2}[\cos 20^\circ-\cos 30^\circ]=\frac{1}{2}\cos 20^\circ-\frac{\sqrt{3}}{4}.$$

Пример 10.79. Представьте произведение $\sin 40^\circ \cos 20^\circ$ в виде суммы.

Решение. По формуле (10.93) получим

$$\sin 40^\circ \cos 20^\circ=\frac{1}{2}[\sin 60^\circ+\sin 20^\circ]=\frac{\sqrt{3}}{4}+\frac{1}{2}\sin 20^\circ.$$

Пример 10.80. Преобразуйте в алгебраическую сумму произведение $\cos\frac{x}{2}\cos\frac{x}{3}\cos\frac{x}{4}$.

Решение.

$$\cos\frac{x}{2}\cos\frac{x}{3}\cos\frac{x}{4}=\left(\cos\frac{x}{2}\cos\frac{x}{4}\right)\cos\frac{x}{3}=$$

$$=\frac{1}{2}\left[\cos\frac{3x}{4}+\cos\frac{x}{4}\right]\cos\frac{x}{3}=\frac{1}{2}\left(\cos\frac{3x}{4}\cos\frac{x}{3}+\cos\frac{x}{4}\cos\frac{x}{3}\right)=$$

$$=\frac{1}{4}\left[\cos\frac{13x}{12}+\cos\frac{5x}{12}+\cos\frac{7x}{12}+\cos\frac{x}{12}\right].$$

Понижение степени тригонометрических функций. Преобразование произведения тригонометрических функций в сумму используется для понижения степени $\sin^2 x$, $\cos^2 x$, $\sin^3 x$ и т. д.

Пример 10.81.

$$\sin^2 x=\sin x\sin x=\frac{1}{2}(\cos 0-\cos 2x)=\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\cos 2x.$$

Пример 10.82.

$$\cos^2 x=\cos x\cos x=\frac{1}{2}(\cos 0+\cos 2x)=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\cos 2x.$$

Пример 10.83.

$$\sin^3 x = \sin^2 x \sin x = \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\cos 2x\right)\sin x =$$

$$= \frac{1}{2}\sin x - \frac{1}{2}\sin x \cos 2x = \frac{1}{2}\sin x - \frac{1}{4}(\sin 3x - \sin x) =$$

$$= \frac{1}{2}\sin x - \frac{1}{4}\sin 3x + \frac{1}{4}\sin x = \frac{3}{4}\sin x - \frac{1}{4}\sin 3x.$$

Отсюда получаем формулу для синуса утроенного аргумента

$$\sin 3x = 3\sin x - 4\sin^3 x. \qquad (10.96)$$

Пример 10.84.

$$\cos^3 x = \cos^2 x \cos x = \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cos 2x\right)\cos x =$$

$$= \frac{1}{2}\cos x + \frac{1}{2}\cos 2x \cos x = \frac{1}{2}\cos x + \frac{1}{4}(\cos 3x + \cos x) =$$

$$= \frac{1}{2}\cos x + \frac{1}{4}\cos 3x + \frac{1}{4}\cos x = \frac{3}{4}\cos x + \frac{1}{4}\cos 3x.$$

Отсюда получаем формулу для косинуса утроенного аргумента

$$\cos 3x = 4\cos^3 x - 3\cos x. \qquad (10.97)$$

Пример 10.85.

$$\cos^5 x = \cos^3 x \cos^2 x = \left(\frac{3}{4}\cos x + \frac{1}{4}\cos 3x\right)\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cos 2x\right) =$$

$$= \frac{3}{8}\cos x + \frac{1}{8}\cos 3x + \frac{3}{8}\cos x \cos 2x + \frac{1}{8}\cos 3x \cos 2x =$$

$$= \frac{3}{8}\cos x + \frac{1}{8}\cos 3x + \frac{3}{8}\cdot\frac{1}{2}(\cos 3x + \cos x) + \frac{1}{8}\cdot\frac{1}{2}(\cos 5x + \cos x) =$$

$$= \frac{5}{8}\cos x + \frac{5}{16}\cos 3x + \frac{1}{16}\cos 5x.$$

10.5.4. Преобразование алгебраической суммы тригонометрических функций в произведение. Представим суммы и разности тригонометрических функций в виде произведения тригонометрических функций от других аргументов.

Сумма синусов. Из формулы (10.93) имеем

$$\sin(A+B) + \sin(A-B) = 2\sin A \sin B.$$

Пусть $A+B=\alpha$, $A-B=\beta$; решив систему

$$\begin{cases} A+B=\alpha, \\ A-B=\beta \end{cases}$$

относительно аргументов A и B, получим

$$A = \frac{\alpha+\beta}{2}, \qquad B = \frac{\alpha-\beta}{2}.$$

Тогда

$$\sin\alpha+\sin\beta=2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}. \qquad (10.98)$$

Сумма синусов двух аргументов равна удвоенному произведению синуса полусуммы на косинус их полуразности.

Разность синусов. Чтобы получить разность синусов в формуле (10.98), заменим аргумент β на аргумент $-\beta$:

$$\sin\alpha+\sin(-\beta)=2\sin\frac{\alpha-\beta}{2}\cos\frac{\alpha+\beta}{2},$$

или

$$\sin\alpha-\sin\beta=2\sin\frac{\alpha-\beta}{2}\cos\frac{\alpha+\beta}{2}. \qquad (10.99)$$

Разность синусов двух аргументов равна удвоенному произведению синуса полуразности этих аргументов на косинус их полусуммы.

Сумма косинусов. Для вывода формулы суммы косинусов двух аргументов воспользуемся формулой (10.98), заменив в ней косинус каждого аргумента синусом дополнительного аргумента.

$$\cos\alpha+\cos\beta=\sin\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)+\sin\left(\frac{\pi}{2}-\beta\right)=$$

$$=2\sin\frac{\frac{\pi}{2}-\alpha+\frac{\pi}{2}-\beta}{2}\cos\frac{\frac{\pi}{2}-\alpha-\frac{\pi}{2}+\beta}{2}=$$

$$=2\sin\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\alpha+\beta}{2}\right)\cos\frac{\beta-\alpha}{2}=2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2},$$

т. е.

$$\cos\alpha+\cos\beta=2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}. \qquad (10.100)$$

Сумма косинусов двух аргументов равна удвоенному произведению косинуса полусуммы этих аргументов на косинус их полуразности.

Разность косинусов. Аналогично

$$\cos\alpha-\cos\beta=\sin\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)-\sin\left(\frac{\pi}{2}-\beta\right)=$$

$$=2\sin\frac{\frac{\pi}{2}-\alpha-\frac{\pi}{2}+\beta}{2}\cos\frac{\frac{\pi}{2}-\alpha+\frac{\pi}{2}-\beta}{2}=$$

$$=2\sin\frac{\beta-\alpha}{2}\cos\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\alpha+\beta}{2}\right)=2\sin\frac{\beta-\alpha}{2}\sin\frac{\alpha+\beta}{2}=$$

$$=2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\sin\frac{\beta-\alpha}{2},$$

т. е.

$$\cos\alpha-\cos\beta=2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\sin\frac{\beta-\alpha}{2}. \qquad (10.101)$$

Разность косинусов двух аргументов равна удвоенному произведению синуса полусуммы на синус их обратной полуразности.

Сумма тангенсов.

$$\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{tg}\beta=$$
$$=\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}+\frac{\sin\beta}{\cos\beta}=\frac{\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta}{\cos\alpha\cos\beta}=\frac{\sin(\alpha+\beta)}{\cos\alpha\cos\beta},$$

т. е.

$$\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{tg}\beta=\frac{\sin(\alpha+\beta)}{\cos\alpha\cos\beta}, \quad \alpha\neq\frac{\pi}{2}+\pi k, \quad \beta\neq\frac{\pi}{2}+\pi l. \qquad (10.102)$$

Разность тангенсов. Заменив в формуле (10.102) аргумент β на аргумент $-\beta$, получим

$$\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{tg}(-\beta)=\frac{\sin(\alpha-\beta)}{\cos\alpha\cos(-\beta)},$$

т. е.

$$\operatorname{tg}\alpha-\operatorname{tg}\beta=\frac{\sin(\alpha-\beta)}{\cos\alpha\cos\beta}, \quad \alpha\neq\frac{\pi}{2}+\pi k, \quad \beta\neq\frac{\pi}{2}+\pi l. \qquad (10.103)$$

Преобразование выражений $1+\cos\alpha$, $1-\cos\alpha$, $1+\sin\alpha$ и $1-\sin\alpha$ в произведение. Заменив в формулах для косинуса удвоенного аргумента α аргументом $\alpha/2$, получим

$$\cos\alpha=2\cos^2\frac{\alpha}{2}-1 \quad \text{и} \quad \cos\alpha=1-2\sin^2\frac{\alpha}{2};$$

тогда

$$1+\cos\alpha=2\cos^2\frac{\alpha}{2}, \qquad (10.104)$$

$$1-\cos\alpha=2\sin^2\frac{\alpha}{2}, \qquad (10.105)$$

$$1+\sin\alpha=1+\cos\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)=2\cos^2\frac{\frac{\pi}{2}-\alpha}{2}=2\cos^2\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\alpha}{2}\right),$$

т. е.

$$1+\sin\alpha=2\cos^2\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\alpha}{2}\right), \qquad (10.106)$$

$$1-\sin\alpha=1-\cos\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)=2\sin^2\frac{\frac{\pi}{2}-\alpha}{2}=$$

$$=2\sin^2\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\alpha}{2}\right),$$

т. е.

$$1-\sin\alpha=2\sin^2\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\alpha}{2}\right). \qquad (10.107)$$

Пример 10.86. Решите уравнение

$$4\sin^2 5x+2\cos^2 x+\cos 10x-3=0.$$

Решение. $4\cdot\frac{1-\cos 10x}{2}+2\cdot\frac{1+\cos 2x}{2}+\cos 10x-3=0,$

$$2-2\cos 10x+1+\cos 2x+\cos 10x-3=0,$$
$$\cos 2x-\cos 10x=0, \qquad 2\sin 6x\sin 4x=0,$$
$$\sin 6x=0, \qquad 6x=\pi k, \qquad x=\frac{\pi}{6}\cdot k,$$
$$\sin 4x=0, \qquad 4x=\pi l, \qquad x=\frac{\pi}{4}\cdot l.$$

Приведение к логарифмическому виду методом введения вспомогательного угла. Данное число a можно рассматривать как значение тригонометрической функции от некоторого аргумента, называемого *вспомогательным углом*, так как при любом значении a имеет место равенство

$$\mathrm{tg}\,(\mathrm{arctg}\,a)=a$$

и при $|a|\leqslant 1$

$$\sin(\arcsin a)=a \quad \text{и} \quad \cos(\arccos a)=a.$$

Это обстоятельство позволяет представлять алгебраическую сумму любых двух чисел как алгебраическую сумму значений тригонометрических функций, а следовательно, применять формулы преобразования алгебраической суммы тригонометрических функций в произведение.

Пример 10.87. Преобразуйте в произведение при помощи введения вспомогательного угла: 1) $\sqrt{3}+\mathrm{tg}\,\alpha$, 2) $\sqrt{2}\sin\alpha+1$, 3) $4\cos^2\alpha-1$, 4) $a+b$, 5) a^2+b^2.

Решение.

1) $\sqrt{3}+\operatorname{tg}\alpha=\operatorname{tg}\frac{\pi}{3}+\operatorname{tg}\alpha=\frac{\sin\left(\frac{\pi}{3}+\alpha\right)}{\cos\frac{\pi}{3}\cos\alpha}=\frac{2\sin\left(\frac{\pi}{3}+\alpha\right)}{\cos\alpha}.$

2) $\sqrt{2}\sin\alpha+1=\sqrt{2}\left(\sin\alpha+\frac{1}{\sqrt{2}}\right)=\sqrt{2}\left(\sin\alpha+\sin\frac{\pi}{4}\right)=$

$$=\sqrt{2}\cdot 2\sin\frac{\alpha+\frac{\pi}{4}}{2}\cos\frac{\alpha-\frac{\pi}{4}}{2}=2\sqrt{2}\sin\left(\frac{\pi}{8}+\frac{\alpha}{2}\right)\cos\left(\frac{\alpha}{2}-\frac{\pi}{8}\right).$$

3) $4\cos^2\alpha-1=4\left(\cos^2\alpha-\frac{1}{4}\right)=4\left(\cos\alpha+\frac{1}{2}\right)\left(\cos\alpha-\frac{1}{2}\right)=$

$$=4\left(\cos\alpha+\cos\frac{\pi}{3}\right)\left(\cos\alpha-\cos\frac{\pi}{3}\right)=$$

$$=4\cdot 2\cos\left(\frac{\alpha}{2}+\frac{\pi}{6}\right)\cos\left(\frac{\alpha}{2}-\frac{\pi}{6}\right)2\sin\left(\frac{\alpha}{2}+\frac{\pi}{6}\right)\sin\left(\frac{\pi}{6}-\frac{\alpha}{2}\right)=$$

$$=4\sin\left(\alpha+\frac{\pi}{3}\right)\sin\left(\frac{\pi}{3}-\alpha\right).$$

4) $a+b=a\left(1+\frac{b}{a}\right)=a(1+\operatorname{tg}\varphi)=a\left(\operatorname{tg}\frac{\pi}{4}+\operatorname{tg}\varphi\right)=$

$$=\frac{a\sin\left(\frac{\pi}{4}+\varphi\right)}{\cos\frac{\pi}{4}\cos\varphi}=\frac{a\sqrt{2}\sin\left(\frac{\pi}{4}+\varphi\right)}{\cos\varphi},\quad \text{где } \varphi=\operatorname{arctg}\frac{b}{a}.$$

5) $a^2+b^2=a^2\left(1+\frac{b^2}{a^2}\right)=a^2(1+\operatorname{tg}^2\varphi)=\frac{a^2}{\cos^2\varphi}$, где $\varphi=\operatorname{arctg}\frac{b}{a}$.

Приведение к логарифмическому виду выражения $a\sin\alpha+b\cos\alpha$ (a и b — любые действительные числа, не равные нулю). Представим данное выражение так:

$$a\sin\alpha+b\cos\alpha=\sqrt{a^2+b^2}\left(\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}\sin\alpha+\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}\cos\alpha\right);$$

так как $\left|\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}\right|<1$, $\left|\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}\right|<1$ и $\left(\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}\right)^2+\left(\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}\right)^2=1$, то можно подобрать такой угол φ, чтобы

$$\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}=\cos\varphi,\qquad \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}=\sin\varphi, \tag{10.108}$$

тогда

$$a\sin\alpha+b\cos\alpha=\sqrt{a^2+b^2}(\sin\alpha\cos\varphi+\sin\varphi\cos\alpha)=$$
$$=\sqrt{a^2+b^2}\sin(\alpha+\varphi).$$

Таким образом, мы получили

$$a\sin\alpha+b\cos\alpha=\sqrt{a^2+b^2}\sin(\alpha+\varphi), \qquad (10.109)$$

где φ вычисляется из системы (10.108).

Угол φ можно найти из равенства $\operatorname{tg}\varphi=\frac{b}{a}$, так как $\operatorname{tg}\varphi=\frac{\sin\varphi}{\cos\varphi}=\frac{b}{a}$, $\varphi=\operatorname{arctg}\frac{b}{a}$, тогда

$$a\sin\alpha+b\cos\alpha=\sqrt{a^2+b^2}\sin\left(\alpha+\operatorname{arctg}\frac{b}{a}\right).$$

Пример 10.88. Приведите к логарифмическому виду: 1) $4\sin\alpha+3\cos\alpha$, 2) $\sqrt{3}\sin\alpha-\cos\alpha$.

Решение. 1) $\sqrt{4^2+3^2}=5$, $\varphi=\operatorname{arctg}\frac{3}{4}$, тогда $4\sin\alpha+3\cos\alpha=5\sin\left(\alpha+\operatorname{arctg}\frac{3}{4}\right)$;

2) $\sqrt{(\sqrt{3})^2+1^2}=2$, $\qquad \varphi=\operatorname{arctg}\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\right)=-\frac{\pi}{6}$, $\qquad$ тогда $\sqrt{3}\sin\alpha-\cos\alpha=2\sin\left(\alpha-\frac{\pi}{6}\right)$.

Решение тригонометрических уравнений вида $a\sin x+b\cos x=c$ методом введения вспомогательного угла. Полагаем $a>0$. Приведем левую часть уравнения к логарифмическому виду

$$\sqrt{a^2+b^2}\sin\left(x+\operatorname{arctg}\frac{b}{a}\right)=c,$$

откуда

$$\sin\left(x+\operatorname{arctg}\frac{a}{b}\right)=\frac{c}{\sqrt{a^2+b^2}}.$$

Уравнение имеет корни, если $\frac{|c|}{\sqrt{a^2+b^2}}\leqslant 1$, т. е. $c^2\leqslant a^2+b^2$.

По этому неравенству можно судить до решения уравнения, имеет ли уравнение корни. Корни уравнения запишем формулой

$$x=(-1)^k\arcsin\frac{c}{\sqrt{a^2+b^2}}-\operatorname{arctg}\frac{b}{a}+\pi k.$$

Пример 10.89. Решите, используя метод введения вспомогательного угла, уравнение $\sin x+\sqrt{3}\cos x=2$.

Решение. $\sqrt{1+(\sqrt{3})^2}=2$, $2\sin(x+\operatorname{arctg}\sqrt{3})=2$,

$$\sin\left(x+\frac{\pi}{3}\right)=1, \qquad x+\frac{\pi}{3}=\frac{\pi}{2}+2\pi k,$$

$$x=\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{3}+2\pi k, \qquad x=\frac{\pi}{6}+2\pi k.$$

10.5.5. Решение примеров. Пример 10.90. Преобразовать в произведение $\sin\alpha+\sin\beta+\sin\gamma$, если $\alpha+\beta+\gamma=\pi$.

Решение. $\gamma=\pi-(\alpha+\beta)$, $\sin\gamma=\sin[\pi-(\alpha+\beta)]=\sin(\alpha+\beta)$. Тогда, заменив $\sin\gamma=\sin(\alpha+\beta)$, получим

$$\sin\alpha+\sin\beta+\sin\gamma=\sin\alpha+\sin\beta+\sin(\alpha+\beta)=$$
$$=2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}+\sin\left(2\cdot\frac{\alpha+\beta}{2}\right)=$$
$$=2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}+2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha+\beta}{2}=$$
$$=2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\left(\cos\frac{\alpha-\beta}{2}+\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\right)=$$
$$=2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cdot 2\cos\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\beta}{2},$$

но $\frac{\alpha+\beta}{2}=\frac{\pi}{2}-\frac{\gamma}{2}$, поэтому $\sin\frac{\alpha+\beta}{2}=\sin\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\gamma}{2}\right)=\cos\frac{\gamma}{2}$, следовательно,

$$\sin\alpha+\sin\beta+\sin\gamma=4\cos\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\beta}{2}\cos\frac{\gamma}{2}.$$

Таким образом, если $\alpha+\beta+\gamma=\pi$, то сумма синусов этих аргументов равна учетверенному произведению косинусов половинных аргументов.

Тригонометрические уравнения вида $\sin f(x)=\sin\varphi(x)$, $\cos f(x)=\cos\varphi(x)$, $\operatorname{tg} f(x)=\operatorname{tg}\varphi(x)$. Некоторые тригонометрические уравнения могут быть приведены к равенству одноименных тригонометрических функций

$$\sin x=\sin y, \ \cos x=\cos y, \ \operatorname{tg} x=\operatorname{tg} y.$$

Установим условия, которым должны удовлетворять аргументы x и y, чтобы одноименные функции от этих аргументов были равны.

Для того чтобы синусы двух аргументов были равны ($\sin x=\sin y$), *необходимо и достаточно выполнение одного из следующих условий*:

1) $x+y=(2k+1)\pi$,
2) $x-y=2k\pi$.

Пример 10.91.

1) $\sin 3{,}8\pi = \sin 1{,}2\pi$, так как $3{,}8\pi + 1{,}2\pi = 5\pi$.

2) $\sin(\alpha - 5\pi) = \sin(4\pi - \alpha)$, так как $\alpha - 5\pi + 4\pi - \alpha = -\pi$.

3) $\sin 5{,}1\pi = \sin(-2{,}9\pi)$, так как $5{,}1\pi - (-2{,}9\pi) = 8\pi$.

4) $\sin 2{,}2\pi \neq \sin 0{,}9\pi$, так как не выполнено ни одно из условий равенства синусов:

$$2{,}2\pi + 0{,}9\pi = 3{,}1\pi \neq (2k+1)\pi,$$
$$2{,}2\pi - 0{,}9\pi = 1{,}3\pi \neq 2k\pi.$$

Доказательство.

$$\sin x = \sin y, \qquad \sin x - \sin y = 0,$$
$$2\sin\frac{x-y}{2}\cos\frac{x+y}{2} = 0.$$

Отсюда следует, что или $\sin\frac{x-y}{2} = 0$, или $\cos\frac{x+y}{2} = 0$, т. е.

$$\frac{x-y}{2} = \pi k, \qquad x - y = 2k\pi,$$
$$\frac{x+y}{2} = \frac{\pi}{2} + \pi k, \quad x + y = \pi + 2\pi k = (2k+1)\pi.$$

Пример 10.92. Решите уравнение $\sin 3x = \sin 4x$.

Решение.

$$3x + 4x = (2k+1)\pi, \qquad 7x = (2k+1)\pi, \qquad x = (2k+1)\frac{\pi}{7},$$
$$4x - 3x = 2k\pi, \qquad x = 2k\pi.$$

Для того чтобы косинусы двух аргументов были равны ($\cos x = \cos y$), *необходимо и достаточно выполнение одного из следующих условий:*

1) $x + y = 2k\pi$,

2) $x - y = 2k\pi$.

Пример 10.93.

1) $\cos 2{,}7\pi = \cos 1{,}3\pi$, так как $2{,}7\pi + 1{,}3\pi = 4\pi$;

2) $\cos 7{,}2\pi = \cos 1{,}2\pi$, так как $7{,}2\pi - 1{,}2\pi = 6\pi$;

3) $\cos 580° = \cos 220°$, так как $580° - 220° = 360°$;

4) $\cos 1{,}3\pi \neq \cos 3{,}7\pi$, так как не выполнено ни одно из условий равенства косинусов $1{,}3\pi + 3{,}7\pi = 5\pi \neq 2k\pi$, $1{,}3\pi - 3{,}7\pi = -2{,}4\pi \neq 2k\pi$.

Доказательство.

$$\cos x = \cos y, \qquad \cos x - \cos y = 0,$$
$$2\sin\frac{x+y}{2}\sin\frac{y-x}{2} = 0,$$
$$\sin\frac{x+y}{2} = 0 \quad \text{или} \quad \sin\frac{y-x}{2} = 0, \quad \text{или} \quad \sin\frac{x-y}{2} = 0,$$

откуда или $\frac{x+y}{2} = \pi k$, или $\frac{x-y}{2} = \pi k$, т. е. или $x + y = 2k\pi$, или $x - y = 2k\pi$.

Пример 10.93. Решите уравнение $\cos 5x = \cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right)$.

Решение. $5x + x - \frac{\pi}{4} = 2k\pi$, $x = \frac{\pi}{24}(8k+1)$,

$$5x - x + \frac{\pi}{4} = 2k\pi, \quad x = \frac{\pi}{16}(8k-1).$$

Пример 10.94. Решите уравнение $\cos x = \sin 3x$.

Решение. $\cos x = \cos\left(\frac{\pi}{2} - 3x\right)$,

$$x + \frac{\pi}{2} - 3x = 2k\pi, \quad -2x = 2k\pi - \frac{\pi}{2}, \text{ или } 2x = \frac{\pi}{2} - 2k\pi,$$

$$x = \frac{\pi}{4}(4l+1), \quad x - \frac{\pi}{2} + 3x = 2k\pi, \quad 4x = 2k\pi + \frac{\pi}{2}, \quad x = \frac{\pi}{8}(4k+1).$$

Для того чтобы тангенсы двух аргументов были равны ($\operatorname{tg} x = \operatorname{tg} y$), необходимо и достаточно одновременное выполнение двух условий: 1) тангенс каждого из данных аргументов существует, 2) $x - y = \pi k$.

Пример 10.95.

1) $\operatorname{tg} 5{,}3\pi = \operatorname{tg} 0{,}3\pi$, так как $5{,}3\pi - 0{,}3\pi = 5\pi$;

2) $\operatorname{tg} 2{,}8\pi = \operatorname{tg}(-1{,}2\pi)$, так как $2{,}8\pi - (-1{,}2\pi) = 4\pi$;

3) $\operatorname{tg}\frac{\pi}{2} = \operatorname{tg}\frac{5\pi}{2}$, не выполнено первое условие: тангенсы этих аргументов не существуют;

4) $\operatorname{tg} 2{,}6\pi \neq \operatorname{tg} 1{,}2\pi$, так как не выполнено второе условие $2{,}6\pi - 1{,}2\pi = 1{,}4\pi \neq \pi k$.

Доказательство. $\operatorname{tg} x = \operatorname{tg} y$, $\operatorname{tg} x - \operatorname{tg} y = 0$,

$$\frac{\sin(x-y)}{\cos x \cos y} = 0,$$

откуда следует, что $\sin(x-y) = 0$, тогда $x - y = \pi k$.

Пример 10.96. Решите уравнение $\operatorname{tg} x = \operatorname{tg} 5x$.

Решение. По условию равенства тангенсов получим

$$5x - x = \pi k, \quad 4x = \pi k, \quad x = \frac{\pi}{4}k.$$

Из множества решений надо исключить те значения аргумента x, при которых левая и правая части уравнения не существуют, т. е. значения вида $\frac{\pi}{2}(2l+1)$. В множестве $x = \frac{\pi}{4}\cdot k = \frac{\pi}{2}\cdot\frac{k}{2}$ такие значения будут при $\frac{k}{2}$ нечетном, т. е. при $\frac{k}{2} = 2n+1$ или при $k = 4n+2$. Следовательно, уравнению удовлетворяет множество корней вида $\frac{\pi}{4}k$, если $k \neq 4n+2$.

§ 10.6. Непрерывность тригонометрических функций и их производные

10.6.1. Неравенство $|\sin x|<|x|<|\operatorname{tg} x|$ и его следствия. Неравенство

$$|\sin x|<|x|<|\operatorname{tg} x| \qquad (10.110)$$

справедливо для всех x, удовлетворяющих неравенствам $0<|x|<\pi/2$. Рассмотрим случай, когда $0<x<\pi/2$.

В единичном круге (рис. 10.47) построим дугу $\overset{\frown}{ACM}=x$ $(0<x<\pi/2)$, хорду AM и ось тангенсов AN, тогда $M_1M=\sin x$, $AN=\operatorname{tg} x$.

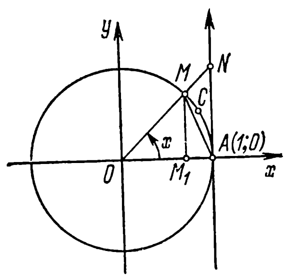


Рис. 10.47.

Рассмотрим треугольник AOM, сектор AOM и треугольник AON. Между площадями этих фигур имеет место соотношение

$$S_{\triangle AOM}<S_{\text{сект. } AOM}<S_{\triangle AON}$$

или

$$\frac{1}{2}OA\cdot M_1M<\frac{1}{2}OA^2\cdot \overset{\frown}{ACM}<\frac{1}{2}OA\cdot AN,$$

но $OA=1$, тогда $M_1M<\overset{\frown}{ACM}<AN$ или

$$\sin x<x<\operatorname{tg} x. \qquad (10.111)$$

Следовательно, если $0<x<\pi/2$, то неравенство (9.110) выполняется, так как

$$|\sin x|=\sin x, \qquad |x|=x, \qquad |\operatorname{tg} x|=\operatorname{tg} x.$$

Если $-\pi/2<x<0$, то $0<-x<\pi/2$. Тогда, согласно неравенству (10.110), имеем

$$\sin(-x)<-x<\operatorname{tg}(-x). \qquad (10.112)$$

Но для $x<0$

$$-x=|x|,$$
$$\sin(-x)=-\sin x=|\sin x|,$$
$$\operatorname{tg}(-x)=-\operatorname{tg} x=|\operatorname{tg} x|,$$

т. е. неравенство (10.112) имеет вид

$$|\sin x|<|x|<|\operatorname{tg} x|.$$

Непрерывность синуса. *Функция $y=\sin x$ непрерывна на всей числовой оси.*

Для доказательства непрерывности функции $y=\sin x$ в точке x необходимо показать соблюдение двух условий непрерывности функции:

1) в точке x функция $y=\sin x$ определена, т. е. имеет вещественное значение;

2) бесконечно малому приращению аргумента Δx будет соответствовать бесконечно малое приращение функции Δy.

Первое условие соблюдается, так как функция $y=\sin x$ определена при любом значении аргумента x.

Докажем выполнение второго условия. Дадим аргументу x приращение Δx и найдем соответствующее приращение функции

$$\Delta y=\sin(x+\Delta x)-\sin x=2\cos\left(x+\frac{\Delta x}{2}\right)\sin\frac{\Delta x}{2},$$

откуда получаем

$$|\Delta y|=2\left|\cos\left(x+\frac{\Delta x}{2}\right)\right|\left|\sin\frac{\Delta x}{2}\right|.$$

В силу неравенства $|\sin x|<|x|$ $(x\neq 0)$ имеем

$$\left|\sin\frac{\Delta x}{2}\right|<\frac{|\Delta x|}{2}.$$

Абсолютная величина косинуса любого аргумента не превосходит единицы, следовательно,

$$\left|\cos\left(x+\frac{\Delta x}{2}\right)\right|\leqslant 1.$$

Тогда

$$|\Delta y|<2\left|\cos\left(x+\frac{\Delta x}{2}\right)\right|\left|\sin\frac{\Delta x}{2}\right|<2\cdot 1\cdot\frac{|\Delta x|}{2}=|\Delta x|,$$

откуда имеем

$$\lim_{\Delta x\to 0}|\Delta y|\leqslant\lim_{\Delta x\to 0}|\Delta x|=0,$$

а это значит, что функция $y=\sin x$ непрерывна в точке x.

Непрерывность косинуса. Так как

$$\cos x = \sin\left(\frac{\pi}{2}+x\right),$$

то из непрерывности синуса вытекает непрерывность косинуса $\left(-\infty < \frac{\pi}{2}+x < +\infty\right)$.

Непрерывность тангенса и котангенса. Из непрерывности функций $y=\sin x$ и $y=\cos x$ на всей числовой оси следует, что функция $y=\operatorname{tg} x=\frac{\sin x}{\cos x}$ также непрерывна при всех значениях x, за исключением точек, в которых $\cos x=0$, т. е. точек $x=\frac{\pi}{2}+\pi k$, $k \in Z$.

Функция $y=\operatorname{ctg} x=\frac{\cos x}{\sin x}$ будет непрерывной функцией при всех значениях x, кроме значений $x=\pi k$ ($k \in Z$), обращающих в нуль $\sin x$.

Предел отношения $\frac{\sin x}{x}$ при $x \to 0$. При вычислении пределов и выводе формул дифференцирования тригонометрических функций используется предел отношения синуса дуги к ее дуге:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1 \quad \text{или} \quad \lim_{x\to 0}\frac{x}{\sin x}=1 \ (x \text{— в радианах}). \tag{10.113}$$

Доказательство. Пусть $0<|x|<\pi/2$. Тогда выполняется неравенство

$$|\sin x|<|x|<|\operatorname{tg} x|.$$

Разделив все три части неравенства на $|\sin x|$, получим

$$1<\left|\frac{x}{\sin x}\right|<\frac{1}{|\cos x|},$$

но $\frac{x}{\sin x}>0$, $\frac{1}{\cos x}>0$, тогда $1<\frac{x}{\sin x}<\frac{1}{\cos x}$. Перейдем к обратным величинам $1>\frac{\sin x}{x}>\cos x$. $\lim\limits_{x\to 0}\cos x=1$, следовательно, пределы левой и правой частей при $x\to 0$ равны 1, тогда и предел средней части неравенства также равен 1, т. е.

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1.$$

Пример 10.97. 1) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin 3x}{2x}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin 3x}{3x}\cdot\frac{3}{2}=1\cdot\frac{3}{2}=\frac{3}{2}$;

2) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin 4x}{\sin 6x}=\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{\sin 4x}{4x}\cdot\frac{6x}{\sin 6x}\cdot\frac{4}{6}\right)=$

$$=\frac{2}{3}\lim_{x\to 0}\frac{\sin 4x}{4x}\lim_{x\to 0}\frac{6x}{\sin 6x}=\frac{2}{3}\cdot 1\cdot 1=\frac{2}{3}.$$

10.6.2. Производные функций $y=\sin x$, $y=\cos x$, $y=\operatorname{tg} x$, $y=\operatorname{ctg} x$. Производная функции $y=\sin x$, $x\in R$.

$$y'=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\sin(x+\Delta x)-\sin x}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\left[2\cos\left(x+\frac{\Delta x}{2}\right)\sin\frac{\Delta x}{2}\right]}{\Delta x},=$$

$$=\lim_{\Delta x\to 0}\cos\left(x+\frac{\Delta x}{2}\right)\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\sin\frac{\Delta x}{2}}{\frac{\Delta x}{2}}=\cos x\cdot 1=\cos x,$$

т. е.

$$(\sin x)'=\cos x. \qquad (10.114)$$

При доказательстве использованы: теорема о пределе произведения, непрерывность косинуса, $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\cos\left(x+\frac{\Delta x}{2}\right)=$ $=\cos x$ и $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1$.

Если синус имеет сложный аргумент $u=\varphi(x)$, то производная синуса находится по формуле дифференцирования сложной функции

$$(\sin u)'=\cos u\cdot u'. \qquad (10.115)$$

Производная функции $y=\cos x$, $x\in R$.

$$y'=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\cos(x+\Delta x)-\cos x}{\Delta x}=$$

$$=\lim_{\Delta x\to 0}\left[-2\sin\left(x+\frac{\Delta x}{2}\right)\frac{\sin\frac{\Delta x}{2}}{\Delta x}\right]=$$

$$=-\lim_{\Delta x\to 0}\sin\left(x+\frac{\Delta x}{2}\right)\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\sin\frac{\Delta x}{2}}{\frac{\Delta x}{2}}=-\sin x\cdot 1=-\sin x,$$

т. е.

$$(\cos x)'=-\sin x. \qquad (10.116)$$

При доказательстве использованы: теорема о пределе произведения, непрерывность синуса, $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\sin\left(x+\frac{\Delta x}{2}\right)=$ $=\sin x$ и $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1$.

Для сложного аргумента $u=\varphi(x)$ имеем

$$(\cos u)'=-\sin u\cdot u'. \qquad (10.117)$$

Производная тангенса.

$$y=\operatorname{tg} x=\frac{\sin x}{\cos x},\quad x\in R,\quad \text{кроме}\quad x=\frac{\pi}{2}+\pi k,\ k\in Z.$$

Применяя формулу производной дроби, получим

$$(\operatorname{tg} x)'=\left(\frac{\sin x}{\cos x}\right)'=\frac{(\sin x)'\cos x-(\cos x)'\sin x}{\cos^2 x}=$$
$$=\frac{\cos^2 x+\sin^2 x}{\cos^2 x}=\frac{1}{\cos^2 x},$$

т. е.

$$(\operatorname{tg} x)'=\frac{1}{\cos^2 x}. \qquad (10.118)$$

Если $u=\varphi(x)$, то

$$(\operatorname{tg} u)'=\frac{1}{\cos^2 u}\cdot u'. \qquad (10.119)$$

Производная котангенса.

$$y=\operatorname{ctg} x=\frac{\cos x}{\sin x},\quad x\in R,\quad \text{кроме } x=\pi k,\ k\in Z,$$

$$(\operatorname{ctg} x)'=\left(\frac{\cos x}{\sin x}\right)'=\frac{(\cos x)'\sin x-(\sin x)'\cos x}{\sin^2 x}=$$
$$=\frac{-\sin^2 x-\cos^2 x}{\sin^2 x}=-\frac{1}{\sin^2 x},$$

т. е.

$$(\operatorname{ctg})'=-\frac{1}{\sin^2 x}. \qquad (10.120)$$

Если $u=\varphi(x)$, то

$$(\operatorname{ctg} u)'=-\frac{1}{\sin^2 u}\cdot u'. \qquad (10.121)$$

Пример 10.98. Найдите производные следующих тригонометрических функций: 1) $y=\sin 2x$, 2) $y=\sin^2 x$, 3) $y=\operatorname{tg}^2 3x$, 4) $y=\frac{1}{\operatorname{ctg} x}$.

Решение. 1) По формуле (10.115) получим

$$(\sin 2x)'=\cos 2x\cdot(2x)'=2\cos 2x.$$

2) По формуле производной степени и формуле (10.115) получим

$$(\sin^2 x)' = 2\sin x \cdot (\sin x)' = 2\sin x \cos x = \sin 2x.$$

3) По формуле производной степени и формуле (10.119) получим

$$(\operatorname{tg}^2 3x)' = 2\operatorname{tg} 3x \cdot (\operatorname{tg} 3x)' = 2\operatorname{tg} 3x \cdot \frac{1}{\cos^2 3x} \cdot (3x)' = \frac{6\operatorname{tg} 3x}{\cos^2 3x}.$$

4) По формуле производной дроби с постоянным числителем и по формуле (10.120) получим

$$\left(\frac{1}{\operatorname{ctg} x}\right)' = -\frac{1}{\operatorname{ctg}^2 x}(\operatorname{ctg} x)' = -\frac{1}{\operatorname{ctg}^2 x}\left(-\frac{1}{\sin^2 x}\right) = \frac{1}{\cos^2 x}.$$

Исследование свойств тригонометрических функций с применением производной. Исследование функции $y = \sin x$.

I. Нули функции

$$\sin x = 0, \qquad x = \pi k, \qquad k \in z.$$

Синус обращается в нуль в точках $x_1 = 0$, $x_2 = \pm\pi$, $x_3 = \pm 2\pi$ и т. д.

II. Промежутки возрастания и убывания:

$$y' = (\sin x)' = \cos x.$$

Найдем промежутки возрастания. Если $\cos x > 0$, то

$$x \in \left(-\frac{\pi}{2} + 2\pi k, \ \frac{\pi}{2} + 2\pi k\right), \qquad k \in Z.$$

Следовательно, синус монотонно возрастает от -1 до 1 в промежутке $[-\pi/2, \ \pi/2]$, а в силу его периодичности промежутками возрастания будет множество значений аргумента вида

$$\left[-\frac{\pi}{2} + 2\pi k, \ \frac{\pi}{2} + 2\pi k\right].$$

Найдем промежутки убывания. Если $y' = \cos x < 0$, то

$$x \in \left(\frac{\pi}{2} + 2\pi k, \ \frac{3\pi}{2} + 2\pi k\right), \qquad k \in Z.$$

Следовательно, синус монотонно убывает от 1 до -1 в промежутке $[\pi/2, \ 3\pi/2]$, а в силу его периодичности промежутками убывания будет множество значений аргумента вида

$$\left[\frac{\pi}{2} + 2\pi k, \ \frac{3\pi}{2} + 2\pi k\right].$$

III. Наибольшее и наименьшее значения синуса. Исследуем функцию на максимум и минимум в промежутке $[0, 2\pi]$. На концах этого промежутка синус равен нулю:

$$y' = (\sin x)' = \cos x, \quad \cos x = 0, \quad x = \frac{\pi}{2} + \pi k, \quad k \in Z,$$

стационарные точки $x_1 = \frac{\pi}{2}$, $x_2 = \frac{3\pi}{2}$ (при $k = 0$ и $k = 1$),

$$y'' = (\cos x)' = -\sin x.$$

Тогда

$$y''_{x=\pi/2} = -\sin\frac{\pi}{2} < 0,$$

т. е. вторая производная в точке $x = \pi/2$ отрицательна, следовательно, функция $y = \sin x$ в точке $(\pi/2;\ 1)$ имеет максимум. Далее

$$y''_{x=3\pi/2} = -\sin\frac{3\pi}{2} > 0,$$

вторая производная в точке $x = 3\pi/2$ положительна, следовательно, функция $y = \sin x$ в точке $(3\pi/2; -1)$ имеет минимум.

Для всех значений аргумента вида $x = \frac{\pi}{2} + 2\pi k$, $k \in Z$, синус имеет наибольшее значение (равен 1) и для всех значений аргумента вида $x = \frac{3\pi}{2} + 2\pi k$, $k \in Z$, имеет наименьшее значение (равен -1).

IV. Промежутки выпуклости. Находим вторую производную синуса:

$$y'' = (\cos x)' = -\sin x.$$

В промежутке выпуклости вверх вторая производная имеет отрицательное значение

$$-\sin x < 0, \quad \sin x > 0, \quad x \in (2\pi k,\ \pi + 2\pi k)$$

при $k = 0$ $(0, \pi)$, при $k = 1$ $(2\pi, 3\pi)$ и т. д.

В промежутке выпуклости вниз вторая производная имеет положительное значение, поэтому

$$-\sin x > 0, \quad \sin x < 0, \quad x \in (\pi + 2\pi k,\ 2\pi + 2\pi k)$$

при $k = 0$ $(\pi, 2\pi)$, при $k = 1$ $(3\pi, 4\pi)$ и т. д.

Следовательно, при значениях аргумента $x \in (2\pi k, \pi + 2\pi k)$ график синуса выпукл вверх и при значениях аргумента $x \in (\pi + 2\pi k,\ 2\pi + 2\pi k)$ график синуса выпукл вниз.

V. Точки перегиба. Переходя через точку перегиба, вторая производная меняет свой знак, а в самой точке перегиба или обращается в нуль, или не существует. Следовательно,

$$y'' = -\sin x, \quad -\sin x = 0, \quad \sin x = 0, \quad x = \pi k, \quad k \in Z.$$

Корни $x_1 = -\pi$, $x_2 = 0$, $x_3 = \pi$ и т. д.

Запишем промежутки, ограниченные найденными корнями:

$$(-\pi,\ 0),\quad (0,\ \pi),\quad (\pi,\ 2\pi)\ \text{ и т. д.}$$

Найдем знаки второй производной в смежных промежутках

$$y''_{-\pi < x < 0} = (+), \qquad y''_{0 < x < \pi} = (-),$$

следовательно, при $x = 0$ имеется точка перегиба (0; 0).

$$y''_{0 < x < \pi} = (-), \qquad y''_{\pi < x < 2\pi} = (+),$$

следовательно, при $x = \pi$ имеется точка перегиба (π; 0).

$$y''_{\pi < x < 2\pi} = (+), \qquad y''_{2\pi < x < 3\pi} = (-),$$

следовательно, при $x = 2\pi$ также будет точка перегиба (2π; 0).

Точками перегиба графика синуса будут точки вида $x = \pi k$, $y = 0$.

Составим таблицу характерных точек функции $y = \sin x$ в промежутке $[0, 2\pi]$

По характерным точкам легко строится график синуса.

Четверть и значения аргумента	0	I четверть	$\pi/2$	II четверть
Значение функции	0		1	
Поведение функции	Корень функции и точка перегиба	Функция возрастает от 0 до 1, график выпукл вверх	Наибольшее значение функции	Функция убывает от 1 до 0, график выпукл вверх

Сформулируем основные свойства синуса.

1) Область определения: множество действительных чисел $(-\infty, +\infty)$.

2) Область изменения: $[-1, 1]$, т. е. функция ограничена.

3) Нули функции $x = \pi k$, $k \in Z$. Нули функции одновременно являются и точками перегиба.

4) Функция имеет наибольшие значения, равные 1, в точках $x = \frac{\pi}{2} + 2\pi k$, $k \in Z$.

5) Функция имеет наименьшие значения, равные -1, в точках $x = -\frac{\pi}{2} + 2\pi k$, $k \in Z$.

6) Функция нечетная, т. е. $\sin(-x) = -\sin x$. Точки $(x; \sin x)$ и $(-x; \sin(-x))$ симметричны относительно начала координат.

7) Функция периодическая с периодом 2π, т. е. равенство $\sin(x + 2\pi k) = \sin x$ справедливо для любого аргумента x, где $k \in Z$.

8) $\sin x > 0$ для всех $x \in (2\pi k, \pi + 2\pi k)$. Для этих значений аргумента график выпукл вверх.

9) $\sin x < 0$ для всех $x \in (\pi + 2\pi k, 2\pi + 2\pi k)$. Для этих значений аргумента график выпукл вниз.

10) Функция возрастает в промежутках $\left[-\frac{\pi}{2} + 2\pi k, \frac{\pi}{2} + 2\pi k\right]$ и убывает в промежутках $\left[\frac{\pi}{2} + 2\pi k, \frac{3\pi}{2} + 2\pi k\right]$, $k \in Z$.

π	III четверть	$3\pi/2$	IV четверть	2π
0		-1		0
Корень функции и точка перегиба	Функция убывает от 0 до -1, график выпукл вниз	Наименьшее значение функции	Функция возрастает от -1 до 0, график выпукл вниз	Корень функции и точка перегиба

Исследование функций $y=\cos x$, $y=\operatorname{tg} x$, $y=\operatorname{ctg} x$ и формулировки их основных свойств предлагается учащемуся проделать самостоятельно.

10.6.3. Производные обратных тригонометрических функций. Пусть дана функция $y=\arcsin x$, тогда $x=\sin y$. По формуле дифференцирования обратной функции:

$$(\arcsin x)'=\frac{1}{(\sin y)'}=\frac{1}{\cos y}.$$

Выразим $\cos y$ через аргумент x. Известно, что $-\pi/2\leqslant\leqslant\arcsin x\leqslant\pi/2$, а в этом промежутке $\cos y\geqslant 0$, тогда $\cos y=\sqrt{1-\sin^2 y}=\sqrt{1-x^2}$, следовательно, искомая производная будет

$$(\arcsin x)'=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}. \qquad (10.122)$$

Дана функция $y=\arccos x$, тогда $x=\cos y$,

$$(\arccos x)'=\frac{1}{(\cos y)'}=-\frac{1}{\sin y}.$$

Выразим $\sin y$ через аргумент x. Известно, что $0\leqslant\arccos x\leqslant\pi$, но в этом промежутке $\sin y\geqslant 0$, тогда $\sin y=\sqrt{1-\cos^2 y}=\sqrt{1-x^2}$. Искомая производная будет

$$(\arccos x)'=-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}. \qquad (10.123)$$

Дана функция $y=\operatorname{arctg} x$, тогда $x=\operatorname{tg} y$,

$$(\operatorname{arctg} x)'=\frac{1}{(\operatorname{tg} y)'}=\cos^2 y=\frac{1}{1+\operatorname{tg}^2 y}=\frac{1}{1+x^2}.$$

Получили формулу для дифференцирования $\operatorname{arctg} x$:

$$(\operatorname{arctg} x)'=\frac{1}{1+x^2}. \qquad (10.124)$$

Дана функция $y=\operatorname{arcctg} x$, тогда $x=\operatorname{ctg} y$,

$$(\operatorname{arcctg} x)'=\frac{1}{(\operatorname{ctg} y)'}=-\sin^2 y=-\frac{1}{1+\operatorname{ctg}^2 y}=-\frac{1}{1+x^2},$$

т. е.

$$(\operatorname{arcctg} x)'=-\frac{1}{1+x^2}. \qquad (10.125)$$

Пример 10.99. Найдите производные функций: 1) $y=\arcsin x^2$, 2) $y=\operatorname{arctg}\sqrt{2x}$.

Решение. 1) $(\arcsin x^2)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^4}}(x^2)' = \frac{2x}{\sqrt{1-x^4}}$.

2) $(\operatorname{arctg}\sqrt{2x})' = \frac{1}{1+2x}(\sqrt{2x})' = \frac{1}{1+2x}\cdot\frac{1}{2\sqrt{2x}}(2x)' =$

$$= \frac{1}{(1+2x)\,2\sqrt{2x}}\cdot 2 = \frac{1}{(1+2x)\sqrt{2x}}.$$

§ 10.7. Тригонометрическая форма комплексного числа. Показательная функция с комплексным показателем

Напомним некоторые сведения из главы 1 (п. 1.2.3). Каждой точке комплексной плоскости xOy соответствует определенный вектор, соединяющий начало координат с этой точкой, поэтому каждому комплексному числу соответствует определенный вектор, и наоборот (рис. 10.48).

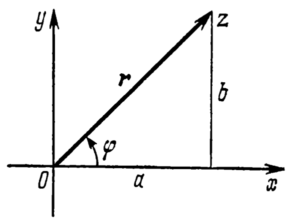


Рис. 10.48.

Пусть точке z соответствует комплексное число $z=a+bi$. Модуль вектора $\overrightarrow{Oz}$, соответствующего комплексному числу $z=a+bi$, называют *модулем* комплексного числа и обозначают $|z|$. Модуль $|z|$ комплексного числа $z=a+bi$:

$$|z| = |a+bi| = \sqrt{a^2+b^2},$$

т. е. всегда есть действительное неотрицательное число.

Угол φ между действительной осью Ox и вектором $\overrightarrow{Oz}$, отсчитываемый от положительного направления действительной оси, называется *аргументом* комплексного числа $z\neq 0$. Если отсчет ведется против движения часовой стрелки, то величина угла считается положительной, а если — по движению часовой стрелки, то отрицательной. Аргумент φ комплексного числа $z=a+bi$ записывают так: $\varphi=\operatorname{Arg} z$, или $\varphi=\operatorname{Arg}(a+bi)$. Для числа $z=0$ аргумент не определяется. Для фиксированного числа $z\neq 0$ аргумент определяется неоднозначно: если φ — одно из значений аргумента числа z, то углы $\varphi+2k\pi$, $k\in Z$, тоже являются значениями аргумента того же числа z. Таким образом, для каждого числа z имеется бесконечное множество значений аргумента, каждые два из которых отличаются друг от друга на число, кратное 2π.

Главное значение аргумента принадлежит промежутку $-\pi < \arg z \leqslant \pi$.

Из определения тригонометрических функций следует, что если $\varphi = \operatorname{Arg}(a+bi)$, то имеют место равенства

$$\cos\varphi = \frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}, \qquad \sin\varphi = \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}. \qquad (10.126)$$

Справедливо и обратное утверждение: если выполняются оба равенства (10.126), то $\varphi = \operatorname{Arg}(a+bi)$.

Все значения аргумента φ можно находить, решая совместно уравнения (10.126). Все значения аргумента комплексного числа $z = a+bi \neq 0$ можно находить так:

1) Определить, в какой четверти находится точка $z = a+bi$ (использовать геометрическую интерпретацию числа $z = a+bi$).

2) В этой четверти найти угол φ, решив одно из уравнений (10.126) или уравнение $\operatorname{tg}\varphi = \frac{b}{a}$.

3) Найти все значения аргумента числа z по формуле

$$\operatorname{Arg} z = \varphi + 2k\pi, \qquad k \in Z.$$

10.7.1. Тригонометрическая форма комплексного числа. Пусть $r = |a+bi| = \sqrt{a^2+b^2}$ — модуль, а φ — одно из значений аргумента комплексного числа $a+bi$.

Из формул (10.126) следует

$$a = r\cos\varphi, \qquad b = r\sin\varphi.$$

Поэтому

$$a+bi = r(\cos\varphi + i\sin\varphi). \qquad (10.127)$$

Таким образом, любое комплексное число $a+bi \neq 0$ можно записать формулой (10.127), где r — модуль числа $a+bi$, а φ — одно из значений аргумента этого числа.

Верно и обратное утверждение: если комплексное число $a+bi$ представлено в виде (10.127), где $r > 0$, то $r = |a+bi|$, а φ — одно из значений $\operatorname{Arg}(a+bi)$.

Комплексное число z вида

$$z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi), \qquad (10.128)$$

где $r > 0$, называется *тригонометрической формой записи* комплексного числа.

Для представления комплексного числа $z = a+bi$ в тригонометрической форме необходимо: 1) найти модуль этого числа, 2) найти одно из значений аргумента комплексного числа.

В силу многозначности $\operatorname{Arg} z$ тригонометрическая форма комплексного числа также неоднозначна.

Пример 10.100. Запишите в тригонометрической форме числа: 1) $1+i$, 2) $\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{1}{2}i$.

Решение. 1) $r=\sqrt{1+1}=\sqrt{2}$, $\operatorname{tg}\varphi=\frac{b}{a}=1$. Точка, соответствующая числу $1+i$, лежит в I четверти, тогда $\varphi=\pi/4$. Следовательно,

$$1+i=\sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4}\right)$$

или, в общем виде,

$$1+i=\sqrt{2}\left[\cos\left(\frac{\pi}{4}+2\pi k\right)+i\sin\left(\frac{\pi}{4}+2\pi k\right)\right], \qquad k\in Z.$$

2) $r=\sqrt{\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2+\left(\frac{1}{2}\right)^2}=1$, $\operatorname{tg}\varphi=\frac{b}{a}=-\frac{\sqrt{3}}{3}$. Точка, соответствующая числу $\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{1}{2}i$, лежит в IV четверти, тогда $\varphi=\frac{11\pi}{6}$. Следовательно,

$$\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{1}{2}i=\cos\frac{11\pi}{6}+i\sin\frac{11\pi}{6}$$

или

$$\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{1}{2}i=\left[\cos\left(\frac{11\pi}{6}+2\pi k\right)+i\sin\left(\frac{11\pi}{6}+2\pi k\right)\right], \qquad k\in Z.$$

Умножение двух комплексных чисел, заданных в тригонометрической форме.

$$\begin{aligned} z_1z_2 &= r_1(\cos\varphi_1+i\sin\varphi_1)\,r_2(\cos\varphi_2+i\sin\varphi_2)= \\ &= r_1r_2[\cos\varphi_1\cos\varphi_2-\sin\varphi_1\sin\varphi_2+ \\ &+ i(\sin\varphi_1\cos\varphi_2+\cos\varphi_1\sin\varphi_2)]= \\ &= r_1r_2[\cos(\varphi_1+\varphi_2)+i\sin(\varphi_1+\varphi_2)], \end{aligned}$$

т. е.

$$\begin{aligned} r_1(\cos\varphi_1+i\sin\varphi_1)\,r_2(\cos\varphi_2+i\sin\varphi_2)&= \\ = r_1r_2[\cos(\varphi_1+\varphi_2)+i\sin(\varphi_1+\varphi_2)]&. \end{aligned}$$

Мы получили тригонометрическую форму комплексного числа, так как $r_1r_2>0$. Отсюда вытекает, что

$$\varphi_1+\varphi_2+2\pi k=\operatorname{Arg}(z_1\cdot z_2),$$
$$|z_1\cdot z_2|=r_1r_2=|z_1|\cdot|z_2|.$$

Модуль произведения двух комплексных чисел равен произведению модулей сомножителей, а сумма аргументов сомножителей является одним из значений аргумента произведения.

Пример 10.101.

$$8\left(\cos\frac{\pi}{6}+i\sin\frac{\pi}{6}\right)\cdot\frac{1}{4}\left(\cos\frac{7}{12}\pi+i\ \sin\frac{7}{12}\pi\right)=$$
$$=2\left(\cos\frac{3}{4}\pi+i\ \sin\frac{3}{4}\pi\right).$$

Деление двух комплексных чисел, заданных в тригонометрической форме.

$$\frac{z_1}{z_2}=\frac{r_1(\cos\varphi_1+i\sin\varphi_1)}{r_2(\cos\varphi_2+i\sin\varphi_2)}=\frac{r_1(\cos\varphi_1+i\sin\varphi_1)(\cos\varphi_2-i\sin\varphi_2)}{r_2(\cos\varphi_2+i\sin\varphi_2)(\cos\varphi_2-i\sin\varphi_2)}=$$
$$=\frac{r_1}{r_2}\,\frac{\cos\varphi_1\cos\varphi_2+\sin\varphi_1\sin\varphi_2+i(\sin\varphi_1\cos\varphi_2-\cos\varphi_1\sin\varphi_2)}{\cos^2\varphi+\sin^2\varphi}=$$
$$=\frac{r_1}{r_2}[\cos(\varphi_1-\varphi_2]+i\sin(\varphi_1-\varphi_2)],$$

т. е.

$$\frac{r_1(\cos\varphi_1+i\sin\varphi_1)}{r_2(\cos\varphi_2+i\sin\varphi_2)}=\frac{r_1}{r_2}[\cos(\varphi_1-\varphi_2)+i\sin(\varphi_1-\varphi_2)],$$
$$\left|\frac{z_1}{z_2}\right|=\frac{r_1}{r_2}=\frac{|z_1|}{|z_2|},$$
$$\varphi_1-\varphi_2+2\pi k=\operatorname{Arg}\frac{z_1}{z_2}.$$

Модуль частного двух комплексных чисел равен частному модулей делимого и делителя, а разность аргументов делимого и делителя является одним из значений аргумента частного.

Пример 10.102.

$$6\left(\cos\frac{\pi}{3}+i\sin\frac{\pi}{3}\right):3\left(\cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4}\right)=2\left(\cos\frac{\pi}{12}+i\sin\frac{\pi}{12}\right).$$

Возведение в степень комплексных чисел, заданных в тригонометрической форме. На основании формулы

$$r_1(\cos\varphi_1+i\sin\varphi_1)\,r_2(\cos\varphi_2+i\sin\varphi_2)\ldots$$
$$\ldots r_n(\cos\varphi_n+i\sin\varphi_n)=r_1r_2\ldots r_n[\cos(\varphi_1+\varphi_2+\ldots+\varphi_n)+$$
$$+i\sin(\varphi_1+\varphi_2+\ldots+\varphi_n)],$$

положив в которой

$$r_1=r_2=\ldots=r_n=r,\quad \varphi_1=\varphi_2=\ldots=\varphi_n=\varphi,$$

получим

$$z^n=[r(\cos\varphi+i\sin\varphi)]^n=r^n[\cos n\varphi+i\sin n\varphi],\quad n\in Z.$$

Для любого числа φ и любого натурального числа n выполняется соотношение

$$(\cos\varphi+i\sin\varphi)^n=\cos n\varphi+i\sin n\varphi \tag{10.129}$$

(*формула Муавра*).

Пример 10.103. $\left(\cos\frac{\pi}{3}+i\sin\frac{\pi}{3}\right)^3=\cos\pi+i\sin\pi=-1.$

Извлечение корня из комплексных чисел, заданных в тригонометрической форме.

$$\sqrt[n]{r(\cos\varphi+i\sin\varphi)}=\rho(\cos\theta+i\sin\theta),$$
$$[\rho(\cos\theta+i\sin\theta)]^n=r(\cos\varphi+i\sin\varphi),$$
$$\rho^n(\cos n\theta+i\sin n\theta)=r(\cos\varphi+i\sin\varphi),$$

$\rho^n=r,\ \rho=\sqrt[n]{r}$ — арифметический корень,

$$n\theta=\varphi+2\pi k,\quad \theta=\frac{\varphi+2\pi k}{n},\qquad k\in Z.$$

Пример 10.104. Извлеките корень из комплексных чисел: 1) $\sqrt{i}$, 2) $\sqrt[3]{1}$.

Решение.

1) $i=0+1\cdot i=\cos\frac{\pi}{2}+i\sin\frac{\pi}{2}$, так как $a=0$, $b=1$, $r=1$, $\cos\varphi=0/1=0$, $\sin\varphi=1/1=1$, $\varphi=\pi/2$,

$$\sqrt{i}=\sqrt{\cos\frac{\pi}{2}+i\sin\frac{\pi}{2}}=\cos\frac{\frac{\pi}{2}+2\pi k}{2}+i\sin\frac{\frac{\pi}{2}+2\pi k}{2}=$$
$$=\cos\left(\frac{\pi}{4}+\pi k\right)+i\sin\left(\frac{\pi}{4}+\pi k\right);$$

если $k=0$, то $\sqrt{i}=\cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4}=\frac{\sqrt{2}}{2}+i\,\frac{\sqrt{2}}{2}=\frac{\sqrt{2}}{2}(1+i)$,

если $k=1$, то $\sqrt{i}=\cos\left(\frac{\pi}{4}+\pi\right)+i\sin\left(\frac{\pi}{4}+\pi\right)=$

$$=-\cos\frac{\pi}{4}-i\sin\frac{\pi}{4}=-\frac{\sqrt{2}}{2}-i\,\frac{\sqrt{2}}{2}=-\frac{\sqrt{2}}{2}(1+i).$$

2) $1=1+0\cdot i=\cos 0+i\sin 0$, так как $a=1$, $b=0$, $r=1$, $\cos\varphi=1$, $\sin\varphi=0$, $\varphi=0$,

$$\sqrt[3]{\cos 0+\sin 0}=\cos\frac{0+2\pi k}{3}+i\sin\frac{0+2\pi k}{3}=\cos\frac{2\pi}{3}k+i\sin\frac{2\pi}{3}k;$$

если $k=0$, то $\sqrt[3]{1}=\cos 0+i\sin 0=1$,

если $k=1$, то $\sqrt[3]{1}=\cos\frac{2\pi}{3}+i\sin\frac{2\pi}{3}=-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i$,

если $k=2$, то $\sqrt[3]{1}=\cos\frac{4\pi}{3}+i\sin\frac{4\pi}{3}=-\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i$.

10.7.2. Показательная функция с комплексным показателем. Формула Эйлера. Степень e^z с комплексным показателем $z=x+iy$ определяется равенством

$$e^z=\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{z}{n}\right)^n.$$

Можно доказать, что

$$e^z=\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{z}{n}\right)^n=e^x(\cos y+i\sin y).$$

Величина показательной функции с комплексным показателем определяется равенством

$$e^{x+iy}=e^x(\cos y+i\sin y).$$

В частном случае при $x=0$ получим формулу

$$e^{iy}=\cos y+i\sin y. \tag{10.130}$$

Эта формула называется *формулой Эйлера.*

Для комплексных показателей остаются в силе правила обращения с показателями. Например, при умножении показатели складываются, при делении вычитаются, при возведении в степень перемножаются.

Показательная функция e^z обладает периодом, равным $2\pi i$,

$$e^{z+2\pi i}=e^z,$$

при $z=0$ получаем $e^{2\pi i}=1$.

Тригонометрическую форму комплексного числа $z=r(\cos\varphi+i\sin\varphi)$ можно заменить *показательной* $z=re^{\varphi i}$.

При этом правила умножения и деления комплексных чисел в показательной форме можно записать в таком виде:

$$r_1e^{i\varphi_1}r_2e^{i\varphi_2}=r_1r_2e^{i(\varphi_1+\varphi_2)},$$

$$\frac{r_1e^{i\varphi_1}}{r_2e^{i\varphi_2}}=\frac{r_1}{r_2}e^{i(\varphi_1-\varphi_2)}.$$

Формула Муавра $(\cos\varphi+i\sin\varphi)^n=\cos n\varphi+i\sin n\varphi$ принимает такой вид:

$$(e^{i\varphi})^n=e^{in\varphi}.$$

ВОПРОСЫ ДЛЯ ПОВТОРЕНИЯ К ГЛАВЕ 10

1. Какие величины принимаются за единицу при градусном и радианном измерениях дуг (углов)? Как связаны друг с другом эти единицы?

2. Укажите на числовой оси и на числовой окружности точки, соответствующие числам $\alpha = \pi k$, $\alpha = \frac{\pi}{2}(2k+1)$, $\alpha = \pi(2k+1)$. Сколько таких точек на числовой окружности и на числовой оси?

3. Какое положение относительно оси Ox занимают точки числовой окружности $M(\alpha)$ и $M'(-\alpha)$?

4. Какое положение занимают относительно осей координат точки числовой окружности $M(\alpha)$ и $M'(\alpha+\pi)$?

5. Укажите условия, которым удовлетворяют числа, соответствующие точкам II, III и IV четвертей числовой окружности.

6. Дайте определения тригонометрических функций числового аргумента.

7. Каковы области определения и области изменения каждой из тригонометрических функций?

8. Как изменяются синус, косинус, тангенс и котангенс при изменении аргумента от 0 до 2π?

9. Дайте определение периодической функции. Какой период имеют функции $\sin x$, $\cos x$, $\operatorname{tg} x$ и $\operatorname{ctg} x$?

10. Сформулируйте правила применения формул приведения.

11. Запишите в общем виде формулы для углов, соответствующих заданному значению каждой из основных тригонометрических функций и поясните эти формулы при помощи графиков этих функций.

12. Дайте определение обратных тригонометрических функций.

13. Какие уравнения называются простейшими тригонометрическими уравнениями?

14. Какие неравенства называются простейшими тригонометрическими неравенствами?

15. Сформулируйте правило применения формул сложения.

16. Запишите тригонометрические функции удвоенного и половинного аргументов.

17. Выведите формулы преобразования произведения тригонометрических функций в сумму и наоборот.

18. Докажите, что $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$.

19. Получите формулы производных тригонометрических функций.

20. Получите формулы производных обратных тригонометрических функций.

21. Запишите комплексное число в тригонометрической и показательной форме

22. Расскажите о правилах действия с комплексными числами в тригонометрической записи.

23. Какой вид имеет формула Муавра?

24. Какой вид имеет формула Эйлера?

УПРАЖНЕНИЯ К ГЛАВЕ 10

1. Найдите без применения таблиц радианную меру дуг: а) 30°, б) 45°, в) 60°, г) 90°, д) 120°, е) 135°, ж) 150°, з) 180°, и) 210°, к) 240°, л) 270°, м) 315°.

2. Найдите по таблице радианную меру дуг: а) 15°30′, б) 7°10′, в) 82°42′, г) 115°, д) 312°20′.

3. Найдите радианную меру дуг, используя логарифмическую линейку: а) 13,5°, б) 25,3°, в) 35°, г) 85°, д) 120°.

4. Найдите без применения таблиц градусную меру дуг: а) $5\pi/36$, б) $5\pi/9$, в) $11\pi/18$, г) $13\pi/30$, д) $4/3\ \pi$.

5. Найдите по таблице градусную меру дуг: а) 0,4416, б) 0,8785, в) 1,0472, г) 1,4850, д) 1,7453.

6. Окружность разделена тремя точками в отношении 3:4:5. Выразите в радианной мере каждую из полученных дуг.

7. Углы треугольника относятся как 2:3:7. Найдите радианную меру этих углов.

8. Вычислите радиус окружности, если ее дуга длиной 0,75 м содержит три радиана.

9. Вычислите площадь сектора круга радиуса 0,25 м, если дуга сектора равна 1,6 радиана.

10. Площадь сектора круга радиуса 1,6 м равна 0,64 м^2. Найдите дугу сектора в радианах.

11. Сектор круга площадью 12,8 м^2 стягивается дугой в 0,4 радиана. Найти радиус круга.

12. Какой знак имеют: a) $\sin 1$, b) $\sin 2$, c) $\cos 1$, d) $\cos 3$, e) $\operatorname{tg} 2$, f) $\operatorname{tg} 3{,}5$?

13. Возможны ли равенства:

a) $2-\sin\alpha=1{,}5$, b) $1+\cos\alpha=\sqrt{3}$,

c) $\sin\alpha=\dfrac{-1-\sqrt{5}}{2}$, d) $\operatorname{tg}\alpha=\dfrac{5+\sqrt{3}}{2}$?

14. Найдите знаки разностей:

a) $\sin 135°-\sin 155°$, b) $\cos 2-\cos 3$,

c) $\operatorname{tg} 150°-\operatorname{tg} 125°$, d) $\operatorname{ctg} 100°-\operatorname{ctg} 120°$.

15. Найдите знаки дробей (не производя вычислений):

a) $\dfrac{\sin 2+\sin 3}{\operatorname{tg} 2+\operatorname{tg} 3}$, b) $\dfrac{\sin 2-\sin 3}{\operatorname{tg} 2-\operatorname{tg} 3}$,

c) $\dfrac{\sin(-2)-\sin(-2{,}5)}{\cos 5-\cos 3}$, d) $\dfrac{\operatorname{tg} 1{,}7-\operatorname{tg} 1{,}6}{\operatorname{tg} 4}$.

16. Даны числа: a) $\dfrac{\sqrt{3}-1}{2}$, b) $\dfrac{\sqrt{3}+1}{2}$, c) $-4{,}5$, d) $\dfrac{\sqrt{5}-\sqrt{3}}{2}$, e) $-3{,}2$, f) $\dfrac{\sqrt{3}-\sqrt{7}}{2}$. Какие из них могут быть значениями функций $\sin\alpha$ и $\cos\alpha$, а какие нет и почему?

17. Какие знаки имеют произведения: а) $\sin 100°\cos 100°\operatorname{tg} 100°$, б) $\sin\dfrac{5\pi}{3}\cos\dfrac{5\pi}{3}\operatorname{tg}\dfrac{5\pi}{3}$, в) $\sin^2\alpha\cos^2\alpha^2$.

18. В какой части промежутка $(0,\ 2\pi)$ будут справедливы неравенства:

а) $\sin\alpha\cos\alpha > 0$, б) $\operatorname{tg}\alpha\sin\alpha < 0$, в) $\operatorname{tg}\alpha\cos\alpha < 0$,

г) $\cos\alpha\operatorname{ctg}\alpha > 0$, д) $\frac{\operatorname{tg}\alpha}{\sin\alpha} > 0$, е) $\frac{\operatorname{ctg}\alpha}{\cos\alpha} < 0$.

19. Если α, β и γ — углы треугольника, то какой знак имеет сумма:

а) $\sin\alpha+\sin\beta+\sin\gamma$, б) $\cos\frac{\alpha}{2}+\cos\frac{\beta}{2}+\cos\frac{\gamma}{2}$,

в) $\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}+\operatorname{tg}\frac{\beta}{2}+\operatorname{tg}\frac{\gamma}{2}$?

20. Найдите: 1) $\sin\pi k$, 2) $\cos\pi k$, 3) $\operatorname{tg}\pi k$, 4) $\operatorname{ctg}\pi k$.

21. Упростите: $\frac{\sin\pi k+\cos\pi k+\operatorname{tg}\pi k}{\cos 2\pi k}$ $(k\in Z)$.

22. Вычислите: $\frac{1+\cos\pi k}{1+\cos 2\pi k}$ при а) $k=2n$, б) $k=2n+1$ $(n\in Z)$.

23. Укажите при каких значениях x не определены функции: а) $\operatorname{tg}x$, б) $\operatorname{ctg}x$, в) $\operatorname{tg}x\operatorname{ctg}x$, г) $\operatorname{tg}x+\operatorname{ctg}x$.

24. Какой четверти принадлежит α, если:

а) $0 < \sin\alpha < 1$, б) $-1 < \sin\alpha < 0$,

в) $0 < \cos\alpha < 1$, г) $-1 < \cos\alpha < 0$.

25. По данному значению одной из тригонометрических функций и четверти, в которой находится α, найдите значения остальных трех функций:

а) $\sin\alpha=3/5$, $\pi/2 < \alpha < \pi$, б) $\cos\alpha=-12/13$, $\pi < \alpha < 3\pi/2$,

в) $\operatorname{tg}\alpha=-3/4$, $\pi/2 < \alpha < \pi$, г) $\operatorname{ctg}\alpha=8/15$, $0 < \alpha < \pi/2$.

Упростите выражения:

26. $(a\sin\alpha+b\cos\alpha)^2+(a\cos\alpha-b\sin\alpha)^2$.

27. $\cos^2\alpha-\cos^4\alpha+\sin^4\alpha$. 28. $\sin^4\alpha-\cos^4\alpha-\sin^2\alpha+\cos^2\alpha$.

29. $\frac{2\sin^2\alpha-1}{\sin\alpha+\cos\alpha}$. 30. $\frac{2\sin^2\alpha-1}{1-2\cos^2\alpha}$. 31. $\frac{1-\sin\alpha}{\cos\alpha}-\frac{\cos\alpha}{1+\sin\alpha}$.

32. $\frac{\sin^2\alpha}{\sin\alpha-\cos\alpha}-\frac{\sin\alpha+\cos\alpha}{\operatorname{tg}^2\alpha-1}$.

33. $\left(1+\frac{1-\cos\alpha}{1+\cos\alpha}\right)\left(1+\frac{1+\cos\alpha}{1-\cos\alpha}\right)$.

Докажите тождества:

34. $\sin^6\alpha+3\sin^2\alpha\cos^2\alpha+\cos^6\alpha=1$.

35. $\sin^4\alpha-\cos^4\alpha=2\sin^2\alpha-1$.

36. $2(\sin^6\alpha+\cos^6\alpha)+1=3(\sin^4\alpha+\cos^4\alpha)$.

37. $\frac{\sin^2\alpha}{\sin\alpha-\cos\alpha}+\frac{\sin\alpha+\cos\alpha}{1-\operatorname{tg}^2\alpha}-\cos\alpha=\sin\alpha$.

38. $\sin^4\alpha+2\sin^2\alpha\cos^2\alpha+\cos^4\alpha=1$.

39. $(\sin\alpha+\cos\alpha)^2+(\cos\alpha-\sin\alpha)^2=2$.

40. Установите, какие из данных функций являются четными и нечетными и какие ни четными, ни нечетными:

а) $1-\sin x$, б) $1-\cos x$, в) $x-\sin x$, г) $x-\cos x$,

д) $x^2+\sin^2 x$, е) $x^2-\cos x$, ж) $x^3+\sin x$, з) $\frac{1+\sin x}{1-\sin x}$,

и) $\frac{1-\cos x}{1+\cos x}$, к) $\frac{x^2+\sin^2 x}{3+\sin^2 x}$, л) $\sin x \cos x$. м) $\sin^2 x \operatorname{tg} x$.

41. Найдите период следующих функций:

а) $\sin 5x$, б) $\cos \frac{5}{8} x$, в) $\operatorname{tg} 4x$, г) $\operatorname{ctg} \frac{x}{3}$.

Упростите выражения:

42. $\frac{\sin 350° + \cos(-370°)}{\sin 190° - \sin(-170°)}$.

43. $\sin 32° \sin 148° - \sin 302° \sin 122° + \operatorname{tg} 198° \operatorname{tg} 288°$.

44. $\sin\left(-\frac{23\pi}{6}\right) + \operatorname{tg}\left(-\frac{13\pi}{4}\right) + \cos\frac{13\pi}{3}$.

Докажите тождества:

45. $$\left[\sin\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)+\sin(\pi-\alpha)\right]^2+\left[\cos\left(\frac{3\pi}{2}-\alpha\right)+\cos(2\pi-\alpha)\right]^2=2.$$

46. $$\left[\operatorname{tg}\frac{\pi}{4}+\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)\right]^2+\left[\operatorname{ctg}\left(\pi+\frac{\pi}{4}\right)+\operatorname{ctg}(\pi-\alpha)\right]^2=\frac{2}{\sin^2\alpha}.$$

47. $$\cos\left(\frac{3\pi}{2}-\alpha\right)-\sin(\alpha-2\pi)+\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)+\operatorname{ctg}(\alpha-\pi)=-2\sin\alpha.$$

48. $$\sin(\alpha-\pi)-\cos\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)+\operatorname{tg}(\alpha-2\pi)+\operatorname{ctg}\left(\frac{3\pi}{2}+\alpha\right)=0.$$

49. Постройте углы α, если:

а) $\sin\alpha=1/2$, б) $\cos\alpha=-1/2$, в) $\operatorname{tg}\alpha=2$, г) $\operatorname{ctg}\alpha=-1$.

50. Найдите наибольшие и наименьшие значения функций:

а) $y=2+\sin x$, б) $y=4-2\cos x$.

51. Напишите множество дуг x, соответствующих данным значениям тригонометрических функций:

а) $\sin x=0$, б) $\sin x=1$, в) $\sin x=-1$, г) $|\sin x|=1$,

д) $\cos x=0$, е) $\cos x=1$, ж) $\cos x=-1$, з) $|\cos x|=1$,

и) $\operatorname{tg} x=0$, к) $\operatorname{tg} x=1$, л) $\operatorname{tg} x=-1$, м) $|\operatorname{tg} x|=1$.

52. Напишите множество дуг x и постройте эти дуги в единичной окружности, если:

а) $\sin x=1/2$, б) $\sin x=-1/2$, в) $\sin x=\sqrt{2}/2$,

г) $\sin x=-\sqrt{3}/2$, д) $\cos x=-\sqrt{2}/2$, е) $\operatorname{tg} x=-\sqrt{3}/3$,

ж) $\operatorname{ctg} x=1$, з) $\operatorname{ctg} x=-\sqrt{3}$.

53. Постройте графики функций:

а) $y=|\sin x|$, б) $y=|\cos x|$, в) $y=|\operatorname{tg} x|$.

54. Решите неравенства:

а) $\sin x > \sqrt{2}/2$, б) $\cos x < 1/2$, в) $\operatorname{tg} x > \sqrt{3}$, г) $\operatorname{ctg} x < 1$.

55. Найдите область определения функций:

а) $y=\arcsin\frac{x}{4}$, б) $y=\arcsin\frac{2x-1}{2}$,

в) $y=\arcsin\frac{x}{2}$, г) $y=\arccos\left|\frac{x}{3}\right|$.

56. Найдите числовые значения выражений:

а) $\sin\left(\arcsin\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$, б) $\sin\left(\operatorname{arctg}\frac{3}{4}\right)$, в) $\operatorname{tg}\left(\operatorname{arctg}\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$,

г) $\cos\left(\arccos\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$, д) $\operatorname{tg}\left(\operatorname{arctg}\frac{\sqrt{3}}{3}\right)$, е) $\operatorname{ctg}(\operatorname{arcctg} 1)$.

57. Найдите числовые значения выражений:

а) $\arcsin[\sin(-1)]$, б) $\arcsin\left(\sin\frac{\pi}{8}\right)$,

в) $\arccos(\cos 3)$, г) $\operatorname{arctg}\left(\operatorname{tg}\frac{\pi}{5}\right)$.

58. Найдите числовые значения выражений:

а) $\sin\left(\arccos\frac{\sqrt{2}}{2}+\arcsin\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$,

б) $\sin\left[\arcsin\frac{\sqrt{3}}{2}+\arcsin(-1)\right]$, в) $\cos(\operatorname{arctg} 1+\operatorname{arcctg} 1)$.

59. Найдите: а) $\cos(\arcsin x)$, б) $\sin(\arccos x)$, в) $\operatorname{tg}(\arcsin x)$, г) $\operatorname{ctg}(\operatorname{arcctg} x)$.

60. Проверьте справедливость следующих равенств:

а) $\arcsin\frac{4}{5}=\arccos\frac{3}{5}$, б) $\arcsin\frac{4}{5}=\operatorname{arctg}\frac{4}{3}$,

в) $\arcsin\frac{2\sqrt{6}}{7}=\arccos\frac{5}{7}$, г) $\arccos\frac{2}{3}=\operatorname{arctg}\frac{\sqrt{5}}{2}$,

д) $\arcsin\left(-\frac{1}{3}\right)=-\arccos\frac{2\sqrt{2}}{3}$,

е) $\arccos\left(-\frac{4}{5}\right)=\pi-\arccos\frac{4}{5}$.

61. Найдите знак разности без применения таблиц:

а) $\arcsin 0{,}51-\arcsin 0{,}499$, б) $\arccos 0{,}3-\arccos 0{,}2$,

в) $\operatorname{arctg} 1-\operatorname{arctg}\frac{\pi}{2}$, г) $\operatorname{arcctg} 3-\operatorname{arcctg} 2{,}5$.

62. Найдите x из уравнений: а) $\arcsin x^2=\pi/4$,

б) $\arccos(3x-1)=\frac{5\pi}{6}$, в) $\operatorname{arctg}\sqrt{x}=\frac{\pi}{3}$, г) $\arcsin\frac{x-2}{3}=1$.

63. Найдите общий вид углов, удовлетворяющих уравнениям:

а) $\sin 3x=1/2$, б) $\cos 4x=\sqrt{2}/2$, в) $\operatorname{tg} 10x=1$.

г) $\sin^2 4x=1/4$, д) $\cos\left(\frac{x}{5}+\frac{\pi}{6}\right)=1/2$, е) $\sqrt{3}\operatorname{tg} 2x=1$.

Решите уравнения:

64. $2\sin^2 x - 3\cos x = 0$.

65. $\operatorname{tg}\frac{x}{2}(1+\cos x) = 0$.

66. $\cos x(\operatorname{tg} x - 1) = 0$.

67. $2\sin^2 x + 8\cos^2 x - 5 = 0$.

68. $2\operatorname{tg}^2 x - 7\operatorname{tg} x + 3 = 0$.

69. $10\operatorname{ctg}^2 x - 27\operatorname{ctg} x + 11 = 0$.

70. $12\sin^2 x + 16\cos x - 17 = 0$.

71. $\sin^2 x - 3\sin x\cos x + 2\cos^2 x = 0$.

72. $\cos^2 x - 4\cos x\sin x - 12\sin^2 x = 0$.

73. $2\sin^2 x - 3\cos^2 x + \sin x\cos x = 0$.

74. $4\sin^2 x + \sin x\cos x - 3\cos^2 x = 0$.

Вычислите:

75. $\sin 10^\circ\cos 50^\circ + \cos 10^\circ\sin 50^\circ$.

76. $\cos 18^\circ\cos 15^\circ + \sin 18^\circ\sin 5^\circ$.

77. $\cos 18^\circ\cos 42^\circ - \sin 18^\circ\sin 42^\circ$.

78. $\sin(x+y)\cos(x-y) + \cos(x+y)\sin(x-y)$.

Упростите выражения:

79. $\dfrac{\sin x\cos(x-y) - \sin y}{\sin(x-y)}$.

80. $\dfrac{\cos(x+y)}{\sin x\cos y} + \operatorname{tg} y$.

81. $\operatorname{ctg}\alpha - \dfrac{\cos(\alpha+\beta)}{\sin\alpha\cos\beta}$.

82. $\dfrac{\sin(2x+y) - \cos 2x\sin y}{\cos(2x-y) - \sin 2x\sin y}$.

83. Вычислите $\sin(\alpha+\beta)$ и $\sin(\alpha-\beta)$, если $\cos\alpha = -3/5$, $\cos\beta = -12/13$ и α во II четверти, а β в III четверти.

84. Вычислите $\cos(\alpha+\beta)$ и $\cos(\alpha-\beta)$, если $\sin\alpha = -5/13$, $\sin\beta = 4/5$ и α в III четверти, а β во II четверти.

85. Вычислите $\operatorname{tg}(\alpha+\beta)$ и $\operatorname{tg}(\alpha-\beta)$, если $\cos\alpha = -15/17$, $\sin\beta = -3/5$ и α во II четверти, а β в IV четверти.

86. Вычислите $\sin\left(\frac{\pi}{6}+\alpha\right)$, если $\sin\alpha = -\frac{4}{5}$ и α в III четверти.

Упростите выражения:

87. $\sin\left(\alpha - \frac{\pi}{3}\right) - \cos\left(\alpha + \frac{\pi}{3}\right)$.

88. $\dfrac{\sin(\alpha+\beta) - 2\cos\alpha\sin\beta}{\cos(\alpha-\beta) - 2\cos\alpha\cos\beta}$.

89. $\dfrac{\cos(\alpha+\beta) + \cos(\alpha-\beta)}{\cos(\alpha-\beta) - \cos(\alpha+\beta)}$.

90. $\dfrac{\sin\left(\frac{\pi}{4}+\alpha\right) - \cos\left(\frac{\pi}{4}+\alpha\right)}{\sin\left(\frac{\pi}{4}+\alpha\right) + \cos\left(\frac{\pi}{4}+\alpha\right)}$.

91. $\dfrac{\sqrt{2}\cos\alpha-2\cos\left(\frac{\pi}{4}-\alpha\right)}{2\sin\left(\frac{\pi}{6}+\alpha\right)-\sqrt{3}\sin\alpha}$.

92. $\dfrac{1-\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4}+\alpha\right)\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4}+3\alpha\right)}{\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4}+\alpha\right)+\operatorname{ctg}\left(\frac{\pi}{4}-3\alpha\right)}$.

93. $\dfrac{1}{\operatorname{tg}(\alpha+\beta)+\operatorname{ctg}\beta}\cdot\dfrac{\cos(\pi+\alpha)}{\cos\left(\frac{3\pi}{2}+\beta\right)}$.

94. $\cos\left(\frac{\pi}{3}+\alpha\right)\cos\left(\frac{\pi}{12}-\alpha\right)-\sin\left(\frac{\pi}{4}+\alpha\right)\sin\left(\frac{\pi}{12}-\alpha\right)$.

Докажите тождества:

95. $\cos^2\alpha-2\cos\alpha\cos\beta\cos(\alpha+\beta)+\cos^2(\alpha+\beta)=\sin^2\beta$.

96. $\sin(\alpha+\beta)\sin(\alpha-\beta)=\sin^2\alpha-\sin^2\beta$.

97. $\cos\left(\frac{\pi}{3}-\alpha\right)=\frac{1}{2}(\cos\alpha+\sqrt{3}\sin\alpha)$.

98. $\dfrac{\cos\alpha+\sin\alpha}{\cos\alpha-\sin\alpha}=\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4}+\alpha\right)$.

99. $\dfrac{\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4}+\alpha\right)-\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4}-\alpha\right)}{\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4}+\alpha\right)+\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4}-\alpha\right)}=2\sin\alpha\cos\alpha$.

100. $\dfrac{\cos\left(20-\frac{\pi}{6}\right)-\frac{1}{2}\sin 20}{\cos 3\cos 17-\sin 3\sin 17}=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$.

Докажите справедливость равенств:

101. $\cos 20^\circ+\cos 31^\circ\cos 11^\circ+\cos 59^\circ\cos 79^\circ=2\cos 20^\circ$.

102. $\cos 15^\circ-\sin 15^\circ=\sin 45^\circ$.

103. $\dfrac{\sin 40^\circ\cos 15^\circ-\cos 40^\circ\sin 15^\circ}{\cos 15^\circ\cos 10^\circ-\sin 15^\circ\sin 10^\circ}=\operatorname{tg} 25^\circ$.

104. $\dfrac{\cos 115^\circ\sin 305^\circ+\sin 35^\circ\cos 25^\circ}{\cos 160^\circ\sin 230^\circ-\sin 40^\circ\cos 70^\circ}=\sqrt{3}$.

Решите уравнения:

105. $\sin 2x\cos x+\cos 2x\sin x=0$.

106. $\sin\left(\frac{\pi}{4}+x\right)+\cos\left(x-\frac{\pi}{4}\right)=0$.

107. $\dfrac{\operatorname{tg}x+1}{1-\operatorname{tg}x}=1$.

108. Вычислите:

а) $\sin 2\alpha$, если $\cos\alpha=\frac{4}{5}$ и $\alpha\in(3\pi/2,\ 2\pi)$,

б) $\cos 2\alpha$, если $\cos\alpha=0{,}2$,

в) $\operatorname{tg} 2\alpha$, если $\operatorname{tg}\alpha=3/4$.

109. Вычислите:

а) $\operatorname{ctg} x$, если $\operatorname{tg}\frac{x}{2}=\frac{5}{3}$,

в) $\cos 4x$ и $\operatorname{tg} 4x$, если $\operatorname{tg} x=1/5$.

110. Выразите: а) $\sin 3\alpha$ через $\sin\alpha$, б) $\cos 3\alpha$ через $\cos\alpha$, в) $\sin 4\alpha$ через $\sin\alpha$ и $\cos\alpha$, г) $\cos 4\alpha$ через $\sin\alpha$ и $\cos\alpha$.

111. Выразите: а) $\operatorname{tg} 3\alpha$ через $\operatorname{tg}\alpha$, б) $\cos 4\alpha$ через $\cos\alpha$, в) $\sin 5\alpha$ через $\sin\alpha$.

Докажите тождества:

112. $\dfrac{1-\cos 2\alpha+\sin 2\alpha}{1+\cos 2\alpha+\sin 2\alpha}=\operatorname{tg}\alpha.$

113. $\dfrac{\sin 3\alpha}{\sin\alpha}-\dfrac{\cos 3\alpha}{\cos\alpha}=2.$

114. $\cos 4\alpha+4\cos 2\alpha+3=8\cos^4\alpha.$

115. $\dfrac{\sin 2\alpha-\sin\alpha}{1-\cos\alpha+\cos 2\alpha}=\operatorname{tg}\alpha.$

116. $\cos\alpha=1/2$, $\alpha\in(\pi/2,\ \pi)$. Вычислите $\sin\frac{\alpha}{2}$, $\cos\frac{\alpha}{2}$ и $\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}$.

117. $\operatorname{tg}\alpha=4/3$, $\alpha\in(0,\ \pi/2)$. Вычислите $\sin\frac{\alpha}{2}$, $\cos\frac{\alpha}{2}$ и $\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}$.

Упростите выражения:

118. $\dfrac{1-\cos\alpha}{1+\cos\alpha}$ **119.** $\dfrac{1-\sin\alpha}{1+\sin\alpha}$. **120.** $\operatorname{ctg}\alpha\,(1-\cos 2\alpha)$.

Докажите тождества:

121. $\dfrac{2\sin\alpha-\sin 2\alpha}{2\sin\alpha+\sin 2\alpha}=\operatorname{tg}^2\dfrac{\alpha}{2}.$

122. $\dfrac{\cos\alpha-\cos 2\alpha-1}{\sin\alpha-\sin 2\alpha}=\operatorname{ctg}\alpha.$

123. Вычислите:

а) $\sin\alpha$, если $\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}=2$,

б) $\cos\alpha$, если $\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}=3$,

в) $\operatorname{tg}\alpha$, если $\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}=\sqrt{3}$.

Решите уравнения:

124. $\sin x+\cos x=1$.

125. $1-\cos x=\sin\frac{x}{2}$.

126. $1+\cos x=\sin x$.

127. Преобразуйте в алгебраическую сумму:

а) $\sin 5x\sin 3x$, б) $\cos\frac{x}{2}\cos\frac{x}{3}\cos\frac{x}{4}$.

Докажите тождества:

128. $1+\cos\alpha=2\cos^2\frac{\alpha}{2}$.

129. $1-\cos\alpha=2\sin^2\frac{\alpha}{2}$.

130. $1+\sin\alpha=2\cos^2\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\alpha}{2}\right)$.

131. $1-\sin\alpha=2\sin^2\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\alpha}{2}\right)$.

132. Преобразуйте в произведение:

а) $\cos\frac{\pi}{2}-\cos\frac{2\pi}{5}$, б) $2\cos^2\alpha-\sin 2\alpha$,

в) $\operatorname{tg} 25°-\operatorname{ctg} 75°$, г) $\sin^2 5\alpha-\sin^2 3\alpha$.

Преобразуйте в произведение:

133. $\sin 2\alpha\cos 3\alpha-2\sin^2\alpha\sin 3\alpha$.

134. $\sin 10°+2\sin 5°\cos 15°+\cos 50°$. 135. $1+\sin\alpha+\cos\alpha$.

136. $\sin x+\sin 2x+\sin 3x$.

137. Покажите, что для углов A, B и C всякого треугольника имеют место соотношения:

а) $\sin A-\cos B-\sin C=4\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2}$,

б) $\sin A-\sin B+\sin C=4\sin\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}$,

в) $\sin A+\cos B-\cos C=4\cos\frac{A}{2}\cos\left(\frac{\pi}{4}+\frac{B}{2}\right)\sin\left(\frac{\pi}{4}+\frac{C}{2}\right)$.

Найдите производные следующих функций:

138. $f(x)=\frac{1-\sin x}{1+\sin x}$. Найдите $f'\left(\frac{\pi}{4}\right)$.

139. $f(x)=\frac{\sin x-1}{\sin x}$. Найдите $f'\left(\frac{\pi}{3}\right)$.

140. $y=\sin(2x^2+3)$. 141. $f=\sin^3 5\varphi^2$.

142. $y=\frac{1}{\sin^3 2x}$. 143. $y=\sqrt{\sin 2x}$.

144. $y=\sqrt{\sin^2 2x}$. 145. $y=\frac{1}{\sqrt[3]{\sin^2 x}}$.

146. Найдите ускорение точки, движущейся прямолинейно по закону $v=\sin 2t$, в момент времени $t=\pi/6$ (s дано в метрах, t в секундах).

147. Найдите угол наклона касательной к оси Ox, проведенной к кривой $y=\sin x$ в точке $x=\pi/3$.

148. Найдите координаты точки, в которой касательная к кривой $y=\sin x$ $(x\in(0, \pi/2))$ образует угол $\operatorname{arctg}(\sqrt{3}/2)$ с осью Ox.

149. Найдите, под каким углом кривая $y=\sin x$ пересекает ось Ox в точке $x=\pi$.

150. Найдите угол наклона касательной к оси Ox, проведенной к кривой $y=\sin 3x$ в точке $(\pi/3; 0)$.

151. $f(x)=\frac{\cos x+1}{\cos x-1}$. Найдите $f'(\pi/3)$.

152. $f(x)=2\sin x-2\cos x$. Найдите $f'(\pi/6)$.

153. $f(x)=\cos^3\sin x$. Найдите $f'(\pi/3)$.

154. $f(x)=\frac{\operatorname{tg} x-1}{\operatorname{tg} x}$. Найдите $f'(\pi/3)$.

155. $f(x)=\dfrac{\operatorname{tg}\dfrac{x}{2}}{1+\operatorname{tg}\dfrac{x}{3}}$. Найдите $f'(\pi/2)$. 156. $y=\cos(x^2-3)$.

157. $y=\cos^2\sqrt[3]{x}$.

158. $y=\dfrac{1}{\cos^2 x}$.

159. $y=\operatorname{tg}^2 3x$.

160. $y=\operatorname{ctg} x^3$.

161. $y=\sqrt{\operatorname{ctg} 2x}$.

162. $y=\dfrac{1}{\sqrt[3]{\operatorname{ctg} x}}$.

163. $y=\ln\sqrt{\dfrac{1+\cos x}{1-\cos x}}$.

164. $y=\ln\sin^2(x-1)$.

165. $y=\ln\operatorname{tg}^2 x^2$.

166. $S=\ln e^{\sin 2t}$.

167. $y=e^{\sin x}\cos x$.

168. $y=e^{\operatorname{tg} x}\cos^2 x$.

169. $x=\operatorname{arctg}\dfrac{1}{x}$.

170. $y=\arcsin 2x$.

171. $f(x)=2\arcsin x-3\arccos x$. Найдите $f'(\sqrt{3}/2)$.

172. $y=\arccos\sqrt{2x}$. 173. $y=\arcsin\dfrac{x^2-a^2}{x^2+a^2}$.

174. $y=\operatorname{arcctg}\sqrt{2x}$. 175. $y=\operatorname{arctg}\dfrac{1+x}{1-x}$.

176. Найдите, под каким углом кривая $y=\operatorname{tg} x$ пересекает ось Ox в точке $x=\pi/4$.

177. Найдите острый угол между кривыми $y=\operatorname{tg} x$ и $y=\operatorname{ctg} x$ в точке их пересечения в промежутке $(0, \pi/2)$.

Найдите производные неявных функций:

178. $\sin y=xy^2$. 179. $\cos^2 y=x^2$.

180. $\operatorname{tg} y=xy$. 181. $\arcsin y=x$. 182. $\operatorname{arcctg} y=x^2$.

183. Представьте в тригонометрической форме числа:
а) $2i$, б) $1+i$, в) $1-i$.

Упростите:

184. $3\left(\cos\dfrac{\pi}{3}+i\sin\dfrac{\pi}{3}\right)\cdot 2\left(\cos\dfrac{\pi}{4}+i\sin\dfrac{\pi}{4}\right)$.

185. $\left(\cos\dfrac{\pi}{3}+i\sin\dfrac{\pi}{3}\right)\left(\cos\dfrac{\pi}{6}+i\sin\dfrac{\pi}{6}\right)$.

186. $8\left(\cos\dfrac{4\pi}{3}+i\sin\dfrac{4\pi}{3}\right):2\left(\cos\dfrac{\pi}{3}+i\sin\dfrac{\pi}{3}\right)$.

187. $\left(\cos\dfrac{\pi}{4}+i\sin\dfrac{\pi}{4}\right):\left(\cos\dfrac{3\pi}{4}+i\sin\dfrac{3\pi}{4}\right)$.

Докажите справедливость равенств:

188. $\left(\cos\dfrac{\pi}{3}+i\sin\dfrac{\pi}{3}\right)^6=1$.

189. $\left(\cos\dfrac{\pi}{4}+i\sin\dfrac{\pi}{4}\right)^4=-1$.

190. Вычислить все значения корня:

а) $\sqrt[3]{\cos\frac{2\pi}{3}+i\sin\frac{2\pi}{3}}$, б) $\sqrt[4]{\cos\frac{4\pi}{3}+i\sin\frac{4\pi}{3}}$.

Задачи по стереометрии с применением тригонометрии.

191. Определите объем прямоугольного параллелепипеда, диагональ которого a составляет с плоскостью основания угол α, а с большей боковой гранью угол β.

192. Диагональ прямоугольного параллелепипеда образует с меньшей боковой гранью угол β. Через большую сторону основания и диагональ параллелепипеда проведено сечение параллелепипеда. Зная, что периметр этого сечения m и что плоскость его образует с плоскостью основания угол α, найдите объем параллелепипеда.

193. Через одно из ребер куба проведена плоскость, составляющая со смежной гранью угол α. Вычислите объем каждой части куба, зная, что площадь сечения равна m^2.

194. Боковые ребра правильной четырехугольной пирамиды равны a и наклонены к плоскости основания под углом α. Найдите боковую поверхность и объем пирамиды.

195. Основанием пирамиды служит треугольник с углами α и β. Высота пирамиды равна h. Угол ребер с плоскостью основания γ. Найдите объем пирамиды.

196. Плоский угол α боковой грани при вершине правильной треугольной пирамиды меньше 90°, сторона основания равна a. Определите двугранный угол между боковыми гранями и площадь сечения пирамиды, проведенного через сторону основания пирамиды перпендикулярно к боковому ребру (противолежащему).

197. Найдите объем правильной треугольной пирамиды, у которой боковое ребро наклонено к плоскости основания под углом α и удалено от середины противоположной стороны основания на расстояние k.

198. Основанием пирамиды служит ромб со стороной a и острым углом β. Все двугранные углы при основании равны α. Найдите объем и полную поверхность пирамиды.

199*. Установите зависимость между косинусами углов α и β, которые образует в правильной треугольной пирамиде боковая грань с плоскостью основания и смежной боковой гранью соответственно.

200.* Установите зависимость между косинусами углов α и β, которые образует в правильной шестиугольной пирамиде боковая грань с плоскостью основания и смежной боковой гранью соответственно.

201. Найдите двугранный угол между боковыми гранями правильной треугольной пирамиды, если двугранный угол, образуемый боковой гранью с основанием, равен β.

202. В правильной четырехугольной пирамиде через сторону основания под углом β к нему проведена плоскость. Определите площадь полученного сечения, если апофема пирамиды равна a и боковая грань наклонена к плоскости основания под углом α.

203. В правильной четырехугольной пирамиде боковые ребра b образуют с плоскостью основания угол α. Через диагональ основания проведена плоскость параллельно боковому ребру. Вычислите площадь сечения.

204. Шар вписан в прямую призму, в основании которой лежит прямоугольный треугольник. В этом треугольнике перпендикуляр длины h, опущенный из вершины прямого угла на гипотенузу, составляет с одним из катетов угол α. Найдите объем призмы.

205. Основанием пирамиды служит треугольник с углами α и β. Все боковые ребра пирамиды наклонены к плоскости основания под углом γ. Найдите объем пирамиды, если радиус описанного около нее шара равен R.

206. В правильную четырехугольную пирамиду вписан шар. Определите поверхность шара, если известно, что сторона основания равна a, а плоский угол при вершине пирамиды равен α.

207. Основанием пирамиды служит равнобедренный треугольник, у которого боковые стороны равны b, две боковые грани пирамиды, проходящие через равные стороны, перпендикулярны к основанию, а третья грань наклонена к нему под углом α. Угол при вершине равнобедренного треугольника в основании также равен α. Определите радиус шара, вписанного в пирамиду.

208. Сохраняя условия предыдущей задачи, найдите радиус шара, описанного около этой пирамиды.

209. Найдите высоту правильной четырехугольной пирамиды, если известно, что объем шара, описанного около пирамиды, равен V, а перпендикуляр, опущенный из центра шара на ее боковую грань, образует с высотой пирамиды угол α.

ОТВЕТЫ, УКАЗАНИЯ И РЕШЕНИЯ К ГЛАВЕ 10

2. а) 0,2705, б) 0,1251, в) 1,4434, г) 2,0071, д) 5,4512.
3. а) 0,236, б) 0,442, в) 0,611, г) 1,48, д) 2,09.
4. а) 25°, б) 100°, в) 110°, г) 78°, д) 240°.
5. а) 25°18′, б) 50°20′, в) 60°, г) 85°05′, д) 100°.
6. $\pi/2$, $2\pi/3$, $5\pi/6$.
7. $\pi/6$, $\pi/4$, $7\pi/12$.
8. 0,25 м. **9.** 0,05 м^2. **10.** 0,5. **11.** 8 м.

64. $x=2\pi k\pm\frac{\pi}{3}$. **65.** $x=\pi k$. **66.** $\pi k+\frac{\pi}{4}$.

71. $x=\frac{\pi}{4}+\pi k$, $x=\operatorname{arctg}2+\pi k$.

72. $x=\operatorname{arcctg}6+\pi k$, $x=-\operatorname{arcctg}2+\pi k$.

73. $x=\frac{\pi}{4}+\pi k$, $x=-\operatorname{arctg}\frac{3}{2}+\pi k$.

74. $x=-\frac{\pi}{4}+\pi k$, $x=\operatorname{arctg}\frac{3}{4}+\pi k$.

105. $x=\frac{\pi}{3}k$. **106.** $x=-\frac{\pi}{4}+\pi k$. **107.** $x=\pi k$.

108. а) $-\frac{24}{25}$, б) $-0,92$, в) $3\frac{3}{7}$.

109. а) $-\frac{8}{15}$, б) $\frac{119}{169}$, $\frac{120}{119}$.

111. а) $\frac{3\operatorname{tg}\alpha-\operatorname{tg}^3\alpha}{1-3\operatorname{tg}^2\alpha}$, б) $8\cos^4\alpha-8\cos^2\alpha+1$,
в) $16\sin^5\alpha-20\sin^3\alpha+5\sin\alpha$.

116. $\frac{1}{2}$, $\frac{\sqrt{3}}{2}$, $\frac{\sqrt{3}}{3}$. **117.** $\frac{\sqrt{5}}{5}$, $\frac{2\sqrt{5}}{5}$, $\frac{1}{2}$.

118. $\operatorname{tg}^2 \frac{\alpha}{2}$. **119.** $\operatorname{tg}^2\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\alpha}{2}\right)$. **120.** $\sin 2\alpha$.

123. а) $\frac{4}{5}$, б) $-\frac{4}{5}$, в) $-\sqrt{3}$.

127. а) $\frac{1}{2}\cos 2x-\frac{1}{2}\cos 8x$,

б) $\frac{1}{4}\cos\frac{13x}{12}+\frac{1}{4}\cos\frac{5x}{12}+\frac{1}{4}\cos\frac{7x}{12}+\frac{1}{4}\cos\frac{x}{12}$.

132. а) $\frac{1}{2}$, б) $2\sqrt{2}\cos\alpha\sin\left(\frac{\pi}{4}-\alpha\right)$, в) $\frac{\sin 10^\circ}{\cos 15^\circ\cos 25^\circ}$

г) $\sin 8\alpha\sin 2\alpha$.

133. $2\sin\alpha\cos 4\alpha$. **134.** $\cos 10^\circ$.

135. $2\sqrt{2}\cos\frac{\alpha}{2}\cos\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\alpha}{2}\right)$. **136.** $4\sin\frac{3x}{2}\cos x\cos\frac{x}{2}$.

138. $8-6\sqrt{2}$. **139.** $\frac{2}{3}$. **140.** $4x\cos(2x^2+3)$.

141. $15\varphi\sin 5\varphi^2\sin 10\varphi^2$. **142.** $-\frac{6\cos 2x}{\sin^4 2x}$.

143. $\operatorname{ctg} 2x\sqrt{\sin 2x}$. **144.** $\frac{10\cos 5x}{3\sqrt[3]{\sin 5x}}$.

145. $-\frac{2}{3}\frac{\operatorname{ctg} x}{\sqrt[3]{\sin^2 x}}$. **146.** 1 м/с². **147.** $\operatorname{arctg}\frac{1}{2}$.

148. $\left(\frac{\pi}{6}, \frac{1}{2}\right)$. **149.** $\frac{3\pi}{4}$. **150.** $-\operatorname{arctg} 3$.

151. $4\sqrt{3}$. **152.** $\sqrt{3}+1$. **153.** $-1/2$. **154.** $4/3$.

155. $\frac{1+\sqrt{3}}{6}$. **156.** $-2x\sin(x^2-3)$. **157.** $-\frac{\sqrt[3]{x}}{3x}\sin 2\sqrt[3]{x}$.

158. $\frac{2\sin x}{\cos^3 x}$. **159.** $\frac{6\sin 3x}{\cos^3 3x}$. **160.** $-\frac{3x^2}{\sin^2 x^3}$.

161. $-\frac{2\sqrt{\operatorname{ctg} 2x}}{\sin 4x}$. **162.** $\frac{2}{3\sin 2x\sqrt[3]{\operatorname{ctg} x}}$. **163.** $-\frac{1}{\sin x}$.

164. $2\operatorname{ctg}(x-1)$. **165.** $\frac{8x}{\sin 2x^2}$. **166.** $2\cos 2t$.

167. $e^{\sin x}(\cos^2 x-\sin x)$. **168.** $e^{\operatorname{tg} x}(1-\sin 2x)$.

169. $-\frac{1}{1+x^2}$. **170.** $\frac{2}{\sqrt{1-4x^2}}$. **171.** 16.

172. $-\frac{1}{\sqrt{2x(1-2x)}}$. **173.** $\frac{2a}{x^2+a^2}$. **174.** $-\frac{1}{(1+2x)\sqrt{2x}}$.

175. $\frac{1}{1+x^2}$. **178.** $\frac{y^2}{\cos y-2xy}$. **179.** $-\frac{2x}{\sin 2y}$.

180. $\frac{y\cos^2 y}{1-x\cos^2 y}$. **181.** $\sqrt{1-y^2}$. **182.** $-2x(1+y^2)$.

191. Решение. Дан прямоугольный параллелепипед $ABCDA'B'C'D'$ (рис. 10.49), у которого диагональ $BD'=a$, $\angle D'BD = \alpha$ и $\angle A'BD'=\beta$.

Из треугольника $D'BD$ ($\angle D=90°$) находим $H=DD'=BD'\sin\alpha = a\sin\alpha$. Из треугольника $BA'D'$ ($\angle A'=90°$) находим $A'D'=AD=$

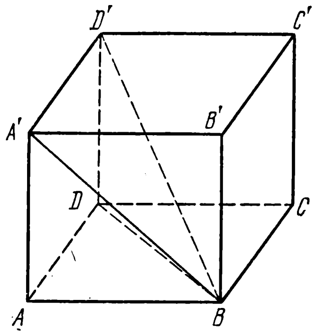


Рис. 10.49.

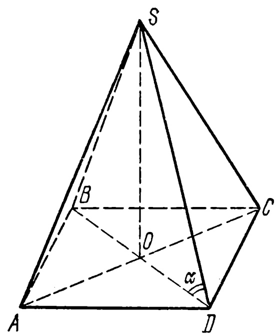


Рис. 10.50.

$=BD'\sin\beta=a\sin\beta$, $A'B=BD'\cos\beta=a\cos\beta$. В треугольнике $A'AB$ ($\angle A=90°$) $AA'=DD'=a\sin\alpha$, откуда

$$AB=\sqrt{(A'B)^2-(A'A)^2}=\sqrt{a^2\cos^2\beta-a^2\sin^2\alpha}=a\sqrt{\cos^2\beta-\sin^2\alpha}.$$

Тогда $S=AB\cdot AD=a^2\sin\beta\sqrt{\cos^2\beta-\sin^2\alpha}$ и, следовательно, $V=S\cdot H=a^3\sin\alpha\sin\beta\sqrt{\cos^2\beta-\sin^2\alpha}$. Полученный результат можно упростить:

$$\cos^2\beta-\sin^2\alpha=\sin^2\left(\frac{\pi}{2}-\beta\right)-\sin^2\alpha=$$

$$=\left[\sin\left(\frac{\pi}{2}-\beta\right)+\sin\alpha\right]\left[\sin\left(\frac{\pi}{2}-\beta\right)-\sin\alpha\right]=$$

$$=4\sin\frac{\frac{\pi}{2}-\beta+\alpha}{2}\cos\frac{\frac{\pi}{2}-\beta-\alpha}{2}\sin\frac{\frac{\pi}{2}-\beta-\alpha}{2}\cos\frac{\frac{\pi}{2}-\beta+\alpha}{2}=$$

$$=\cos(\alpha+\beta)\cos(\alpha-\beta).$$

Ответ. $V=a^3\sin\alpha\sin\beta\sqrt{\cos(\alpha+\beta)\cos(\alpha-\beta)}$.

192. Ответ. $V=\dfrac{\sqrt{2}\,m^3\sin 2\alpha\sin 2\beta\cos\beta}{128\cos^3\left(\beta-\frac{\pi}{4}\right)}$.

193. Ответ.

$$V_1=\frac{1}{2}m^3\sin\alpha\sqrt{\cos\alpha},\quad V_2=\frac{1}{2}m^3(2\cos\alpha-\sin\alpha)\sqrt{\cos\alpha}.$$

194. Согласно условию задачи (рис. 10.50) $OA=a\cos\alpha$, $d=2OA=2a\cos\alpha$. Высота пирамиды $H=a\sin\alpha$. Сторона квадрата основания $x=\frac{d\sqrt{2}}{2}=\sqrt{2}\,a\cos\alpha$. Площадь основания пирамиды $Q=2a^2\cos^2\alpha$. Апофема

$$l=\sqrt{a^2-\left(\frac{x}{2}\right)^2}=a\sqrt{\frac{1+\sin^2\alpha}{2}}.$$

Боковую поверхность и объем пирамиды находим по известным формулам. Ответ: $S_{\text{бок}}=2a^2\cos\alpha\sqrt{1+\sin^2\alpha}$, $V=\frac{1}{3}a^3\sin 2\alpha\cos\alpha$.

195. Ответ. $V=\frac{2}{3}h^3\sin\alpha\sin\beta\sin(\alpha+\beta)\operatorname{ctg}^2\gamma$.

196. Ответ.

$$\varphi=2\arcsin\frac{1}{2\cos(\alpha/2)},\quad S=\frac{a^2}{8\sqrt{\sin\left(\frac{\pi}{3}-\frac{\alpha}{2}\right)\sin\left(\frac{\pi}{3}+\frac{\alpha}{2}\right)}}.$$

197. Ответ. $V=\frac{4k^3}{27\sin\alpha\sin 2\alpha}$.

198. Ответ. $V=\frac{a^3}{6}\sin^2\beta\operatorname{tg}\alpha$, $S=a^2\sin\beta(1+\sec\alpha)$.

199. Решение. Пусть сторона основания равна a. Тогда высота боковой грани, проведенная из вершины пирамиды, равна

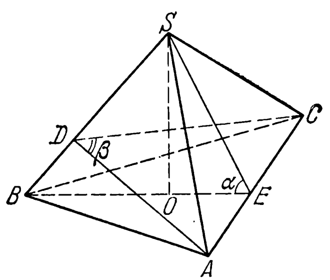


Рис. 10.51.

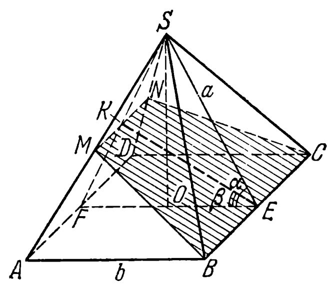


Рис. 10.52.

(рис. 10.51) $SE=\frac{a\sqrt{3}}{6\cos\alpha}$, а боковое ребро равно $SC=SA=SB=$ $=\frac{a\sqrt{3}}{6}\sqrt{\frac{1}{\cos^2\alpha}+3}$. Найдем теперь высоту боковой грани, проведенную из вершины основания на боковое ребро: $AD=DC=$ $=\frac{a}{2\sin(\beta/2)}$. Далее надо вычислить площади треугольников ASC и BAS и приравнять полученные результаты. Ответ. $3\cos^2\alpha=1-2\cos\beta$.

200. Ответ. $1+\cos^2\alpha=-2\cos\beta$.

201. Ответ. $\arccos\frac{1-3\cos^2\beta}{2}$.

202. Решение. Нетрудно доказать, что полученное сечение — равнобочная трапеция. Из треугольника OSE (рис. 10.52) $OE=a\cos\alpha$, $b=2\cdot OE=2a\cos\alpha$. Из треугольника ESK по теореме синусов имеем

$$\frac{KE}{\sin(180^\circ-2\alpha)}=\frac{KS}{\sin(\alpha-\beta)}=\frac{a}{\sin(\alpha+\beta)},$$

откуда высота трапеции $KE=\frac{a\sin 2\alpha}{\sin(\alpha+\beta)}$, отрезок $KS=\frac{a\sin(\alpha-\beta)}{\sin(\alpha+\beta)}$.

Далее $\triangle ASD\sim\triangle MSN$, поэтому $\frac{MN}{b}=\frac{KS}{a}$, откуда меньшая сторона основания трапеции

$$MN=\frac{b\cdot KS}{a}=\frac{2a\cos\alpha\sin(\alpha-\beta)}{\sin(\alpha+\beta)}.$$

Искомая площадь сечения

$$S=\left[a\cos\alpha+\frac{a\cos\alpha\sin(\alpha-\beta)}{\sin(\alpha+\beta)}\right]\frac{a\sin 2\alpha}{\sin(\alpha+\beta)}=$$

$$=\frac{a^2\cos\alpha\sin 2\alpha\,[\sin(\alpha+\beta)+\sin(\alpha-\beta)]}{\sin^2(\alpha+\beta)}=$$

$$=\frac{a^2\cos\alpha\sin 2\alpha\cdot 2\sin\alpha\cos\beta}{\sin^2(\alpha+\beta)}=\frac{a^2\sin^2 2\alpha\cos\beta}{\sin^2(\alpha+\beta)}.$$

Ответ. $S=\frac{a^2\sin^2 2\alpha\cos\beta}{\sin^2(\alpha+\beta)}$.

203. Ответ. $S=\frac{1}{2}b^2\cos\alpha$.

204. Указание. Высота призмы равна диаметру вписанного шара.

Ответ. $V=S\cdot 2r=\frac{h^3\sqrt{2}}{2\sin 2\alpha\cos\frac{\alpha}{2}\sin\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\alpha}{2}\right)}$.

205. Ответ. $V=\frac{2}{3}R^3\sin^3 2\gamma\,\mathrm{tg}\,\gamma\sin\alpha\sin\beta\sin(\alpha+\beta)$.

206. Ответ. $S=\frac{\pi a^2\cos\alpha}{2\cos^2\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\alpha}{2}\right)}$.

207. Ответ. $r=b\cos\frac{\alpha}{2}\,\mathrm{tg}\,\frac{\alpha}{4}$.

208. Ответ. $R=\frac{b}{2\cos\frac{\alpha}{2}}\sqrt{1+\cos^4\frac{\alpha}{2}\,\mathrm{tg}^2\,\alpha}$.

209. Ответ. $h=\frac{1}{1+2\,\mathrm{ctg}^2\,\alpha}\left(\frac{6V}{\pi}\right)^{1/3}$.

ГЛАВА 11

ПРЯМЫЕ И ПЛОСКОСТИ В ПРЯМОУГОЛЬНОЙ СИСТЕМЕ КООРДИНАТ

§ 11.1. Задание прямой линии на плоскости уравнениями в векторной и координатной форме

11.1.1. Уравнения прямой, проходящей через данную точку в заданном направлении. Пусть l — прямая линия на координатной плоскости xOy, $M_0(x_0; y_0)$ — фиксированная точка на l, а $\boldsymbol{n}=(A; B)$ — ненулевой вектор, перпендикулярный к этой прямой. Будем называть его *нормальным* вектором нашей прямой. Отметим, что задание точки M_0 и вектора $\boldsymbol{n}$ полностью определяют l и что таким образом может быть задана любая прямая линия на плоскости xOy (рис. 11.1).

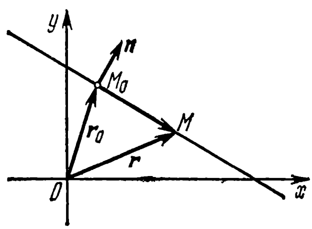


Рис. 11.1.

Произвольная точка $M(x; y)$ будет принадлежать l тогда и только тогда, когда векторы $\overrightarrow{M_0M}$ и $\boldsymbol{n}$ будут взаимно перпендикулярны. Для этого, в свою очередь, необходимо и достаточно, чтобы равнялось нулю скалярное произведение этих векторов

$$\boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{M_0M}=0. \qquad (11.1)$$

Обозначив радиус-вектор точки M_0 через $\boldsymbol{r}_0$ и радиус-вектор точки M через $\boldsymbol{r}$, мы можем переписать (11.1) в виде

$$\boldsymbol{n}(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_0)=0. \qquad (11.2)$$

Соотношение (11.2) представляет собой необходимое и достаточное условие принадлежности точки M прямой l. Оно называется *векторным уравнением* этой *прямой*.

Так как $\overrightarrow{M_0M}=(x-x_0;\ y-y_0)$, то, выражая скалярное произведение $\boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{M_0M}$ через координаты сомножителей, мы получим

$$A(x-x_0)+B(y-y_0)=0. \tag{11.3}$$

Уравнение (11.3) представляет собой уравнение прямой в координатной форме.

11.1.2. Общее уравнение прямой. Раскроем скобки в уравнении (11.3)

$$Ax+By-Ax_0-By_0=0$$

и обозначим $-Ax_0-By_0$ через C.

Тогда это уравнение приведется к виду

$$Ax+By+C=0. \tag{11.4}$$

Уравнение (11.4) называется *общим уравнением прямой* на плоскости. Термин «общее» объясняется тем, что произвольная прямая на плоскости может быть задана уравнением первой степени относительно переменных x и y (при этом коэффициенты A и B не обращаются в нуль одновременно, ибо вектор $\boldsymbol{n}$ ненулевой). Не трудно показать и обратное: всякое уравнение вида (11.4) при A и B, не обращающихся одновременно в нуль, задает прямую линию. Например, если $A\neq 0$, то это будет прямая, проходящая через точку $M_0\left(-\frac{C}{A};0\right)$ перпендикулярно $\boldsymbol{n}=(A;\ B)$.

Отметим характерные частные случаи общего уравнения прямой, когда некоторые коэффициенты равны нулю.

1. Пусть $A=0$, $B\neq 0$, тогда уравнение (11.4) будет иметь вид

$$y=b \qquad (b=-C/B),$$

из которого следует, что все точки прямой имеют одну и ту же ординату, равную числу b; следовательно, прямая параллельна оси абсцисс.

2. Пусть $B=0$, $A\neq 0$, тогда будем иметь

$$x=a \qquad (a=-C/A).$$

Все точки прямой имеют одну и ту же абсциссу, следовательно, прямая параллельна оси ординат.

3. Пусть $C=0$, $B \neq 0$. Обозначая $-A/B$ через k, мы приведем (11.4) к виду

$$y=kx.$$

Выясним смысл коэффициента k. Уравнению прямой удовлетворяет точка $(0; 0)$, следовательно, прямая проходит через начало координат. Взяв на прямой произвольную точку $M_0(x_0; y_0)$ $(x_0 \neq 0)$, получим $y_0=kx_0$, откуда $k=y_0/x_0$. Обратившись к рис. 11.2, мы видим, что число k равно тангенсу угла α наклона прямой к оси x. Число k называется *угловым коэффициентом прямой*.

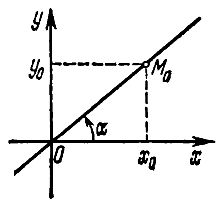


Рис. 11.2.

11.1.3. Специальные виды уравнения прямой в предположении, что $B \neq 0$. Разрешим уравнение относительно y:

$$y=-\frac{A}{B}x-\frac{C}{B}.$$

или

$$y=kx+b. \qquad (11.5)$$

Выясним смысл числа b. Если $x=0$, то $y=b$, следовательно, наша прямая пересекает ось ординат в точке $(0; b)$. Число b называется *начальной ординатой прямой*, а уравнение (11.5) — *уравнением прямой с угловым коэффициентом и начальной ординатой*.

Если уравнение (11.3) разделить на B (считая, конечно, что $B \neq 0$) и положить вновь $k=-A/B$, то получим

$$y-y_0=k(x-x_0). \qquad (11.6)$$

Это уравнение называется *уравнением прямой, проходящей через данную точку в данном направлении*.

При фиксированной точке $M_0(x_0; y_0)$ и различных k это уравнение дает множество прямых, называемых *пучком прямых* с центром в точке M_0. Заметим, что только одна прямая из всех проходящих через M_0, а именно прямая, перпендикулярная оси абсцисс, не выражается таким уравнением. Ее уравнением будет $x=x_0$.

Пусть требуется составить уравнение прямой, проходящей через две заданные точки: $M_1(x_1; y_1)$ и $M_2(x_2; y_2)$ (будем считать, что $x_1 \neq x_2$).

Найдем угловой коэффициент данной прямой, для чего найдем тангенс угла, образуемого отрезком M_1M_2 с осью абсцисс.

Легко видеть по рис. 11.3, что

$$\operatorname{tg}\alpha = k = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}. \tag{11.7}$$

Подставим это значение k в уравнение пучка прямой с центром в точке $M_1(x_1; y_1)$:

$$y - y_1 = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}(x - x_1).$$

Запишем это уравнение в более симметричной форме (при этом мы будем считать, что $y_1 \neq y_2$):

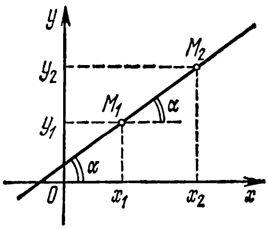


Рис. 11.3.

$$\frac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \frac{x - x_1}{x_2 - x_1}. \tag{11.8}$$

Полученное уравнение является искомым. Оно называется *уравнением прямой, проходящей через две заданные точки.*

Легко проверить, что уравнение любой прямой, проходящей через точки $(x_1; y_1)$ и $(x_2; y_2)$, можно записать в следующем виде:

$$\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \end{vmatrix} = 0. \tag{11.9}$$

Действительно, вычитая вторую сторону из первой и из третьей и разлагая затем этот определитель по элементам третьего столбца, получим

$$(x - x_1)(y_2 - y_1) - (y - y_1)(x_2 - x_1) = 0. \tag{11.10}$$

11.1.4. Угол между двумя прямыми. Условия коллинеарности и перпендикулярности. Пусть прямые l_1, l_2 заданы соответственно уравнениями

$$A_1x + B_1y + C_1 = 0 \quad \text{и} \quad A_2x + B_2y + C_2 = 0, \tag{11.11}$$

тогда вектор $\boldsymbol{n}_1 = (A_1; B_1)$ будет нормальным к l_1, а вектор $\boldsymbol{n}_2 = (A_2; B_2)$ — нормальным к l_2. Если l_1 и l_2 неколлинеарны, то угол φ между $\boldsymbol{n}_1$ и $\boldsymbol{n}_2$ равен одному из углов, образованных прямыми l_1 и l_2, если же $l_1 \parallel l_2$, то $\varphi = 0$ или $\varphi = \pi$. Выражая φ через скалярное произведение $\boldsymbol{n}_1$ и $\boldsymbol{n}_2$ их длины и переходя затем к координатам этих векторов, мы получаем

$$\cos\varphi=\frac{\boldsymbol{n}_1\cdot\boldsymbol{n}_2}{|\boldsymbol{n}_1|\cdot|\boldsymbol{n}_2|}=\frac{A_1A_2+B_1B_2}{\sqrt{A_1^2+B_1^2}\sqrt{A_2^2+B_2^2}}. \qquad (11.12)$$

Если $B_1\neq 0$ и $B_2\neq 0$, то, разделив все члены правой части на B_1B_2, получим

$$\cos\varphi=\frac{\frac{A_1}{B_1}\cdot\frac{A_2}{B_2}+1}{\sqrt{\frac{A_1^2}{B_1^2}+1}\sqrt{\frac{A_2^2}{B_2^2}+1}}.$$

Введя $k_1=-A_1/B_1$ и $k_2=-A_2/B_2$, получим выражение для $\cos\varphi$ через угловые коэффициенты прямых

$$\cos\varphi=\frac{k_1k_2+1}{\sqrt{(k_1^2+1)(k_2^2+1)}}. \qquad (11.13)$$

Нередко оказывается более удобной формула, выражающая тангенс угла между двумя прямыми через коэффициенты уравнения этих прямых. Так как (рис. 11.4) один из углов θ между прямыми представляет собой разность углов наклона этих прямых l_1 и l_2 к оси Ox:

$$\theta=\alpha_2-\alpha_1$$

или же отличается от этой разности на $\pm\pi$, то (при условии, разумеется, что $\theta\neq\pi/2$, $\alpha_2\neq\pi/2$ и $\alpha_1\neq\pi/2$)

$$\operatorname{tg}\theta=\frac{\operatorname{tg}\alpha_2-\operatorname{tg}\alpha_1}{\operatorname{tg}\alpha_1\operatorname{tg}\alpha_2+1}=\frac{k_2-k_1}{k_1k_2+1}. \qquad (11.14)$$

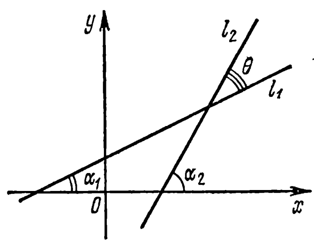


Рис. 11.4.

Заменяя k_1 на $-A_1/B_1$, а k_2 — на $-A_2/B_2$, мы после очевидных преобразований получим

$$\operatorname{tg}\theta=\frac{A_1B_2-A_2B_1}{A_1A_2+B_1B_2}. \qquad (11.15)$$

Условие перпендикулярности двух прямых можно получить из условия равенства нулю скалярного произведения $\boldsymbol{n}_1\cdot\boldsymbol{n}_2$:

$$A_1A_2+B_1B_2=0$$

или, если ни одна из прямых не коллинеарна Oy,

$$k_1k_2+1=0.$$

Условие параллельности прямых вытекает из условия коллинеарности нормальных векторов:

$$\boldsymbol{n}_1 = m\boldsymbol{n}_2 \quad \text{или} \quad (A_1;\ B_1) = (mA_2;\ mB_2),$$

что равносильно

$$A_1B_2 - A_2B_1 = 0. \tag{11.16}$$

Разделив обе части (11.16) на B_1B_2 (считая, что $B_1 \neq 0$ и $B_2 \neq 0$), мы получим

$$k_1 = k_2. \tag{11.17}$$

(Впрочем, в таком виде, как (11.17), условие коллинеарности очевидным образом вытекает из условия равенства α_1 и α_2.)

11.1.5. Примеры решения задач. Пример 11.1. Написать уравнение прямой, отсекающей на оси абсцисс и ординат направленные отрезки, величины которых равны a и b.

Решение. Искомая прямая проходит через точки $M_1(a;\ 0)$ и $M_2(0;\ b)$; воспользуемся уравнением (11.8) прямой, проходящей через две точки, получим

$$\frac{y-0}{b-0} = \frac{x-a}{0-a},$$

или

$$\frac{y}{b} = -\frac{x}{a} + 1,$$

откуда

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1, \tag{11.18}$$

Такая форма уравнения прямой линии называется *уравнением в отрезках* на осях.

Пример 11.2. Найти угол между прямыми, заданными уравнениями

$$2x + 2y - 13 = 0,$$
$$7x - y + 8 = 0.$$

По формуле (11.12) находим

$$\cos\varphi = \frac{2\cdot 7 - 2\cdot 1}{\sqrt{2^2+2^2}\ \sqrt{7^2+1}} = \frac{3}{5} = 0{,}6.$$

По таблицам находим

$$\varphi = 53°08'.$$

Пример 11.3. Вычислить расстояние от точки $M_0(7; 9)$ до прямой

$$3x+4y-17=0. \qquad (11.19)$$

Проведем прямую перпендикулярно данной прямой через точку M_0. Угловой коэффициент данной прямой $-3/4$, угловой коэффициент перпендикулярной прямой находим из условия $k_1 \cdot k_2+1=0$, откуда $k_2=4/3$; подставив это значение k в уравнение пучка прямых с центром в точке M_0, получим уравнение

$$y-9=\frac{4}{3}(x-7),$$

или

$$4x-3y-1=0.$$

Находим основание перпендикуляра, опущенного из точки M_0 на данную прямую (11.19), т. е. точку пересечения M_1 прямых

$$\begin{cases} 4x-3y-1=0 \\ 3x+4y-17=0. \end{cases}$$

Решив систему, получим точку $M_1(11/5; 13/5)$. Теперь найдем искомое расстояние между точками M_1 и M_0:

$$d=\sqrt{\left(7-\frac{11}{5}\right)^2+\left(9-\frac{13}{5}\right)^2}=8.$$

§ 11.2. Задание плоскости уравнениями в векторной и координатной форме

11.2.1. Уравнения плоскости, проходящей через данную точку в заданном направлении. Пусть дана точка $M_0(x_0; y_0; z_0)$, принадлежащая некоторой плоскости P в пространстве, и ненулевой вектор $\boldsymbol{n}(A; B; C)$, перпендикулярный данной плоскости. Вектор $\boldsymbol{n}$ называется *нормальным вектором* для P. Этими двумя элементами положение плоскости в пространстве вполне определено (рис. 11.5).

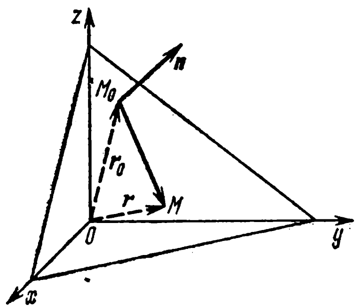


Рис. 11.5.

Точка $M(x; y; z)$ будет принадлежать P тогда и только тогда, когда векторы $\overrightarrow{M_0M}$ и $\boldsymbol{n}$ будут перпендикулярны друг другу, для чего, в свою очередь, необходимо и достаточно, чтобы их скалярное произведение равнялось нулю:

$$\boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{M_0M}=0. \qquad (11.20)$$

Заменяя в (11.19) $\overrightarrow{M_0M}$ на $\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_0$ (где $\boldsymbol{r}$ — радиус-вектор точки M, а $\boldsymbol{r}_0$ — радиус-вектор точки M_0), приходим к уравнению

$$\boldsymbol{n}(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_0)=0, \qquad (11.21)$$

называемому *уравнением плоскости P в векторной форме.*

Так как

$$\overrightarrow{M_0M}=(x-x_0;\ y-y_0;\ z-z_0),$$

то, переходя в (11.20) к координатам, получим

$$A(x-x_0)+B(y-y_0)+C(z-z_0)=0. \qquad (11.22)$$

11.2.2. Общее уравнение плоскости. Раскрывая скобки в (11.22) и обозначая

$$-Ax_0-By_0-Cz_0=D,$$

получим

$$Ax+By+Cz+D=0. \qquad (11.23)$$

Уравнение (11.23) называется *общим уравнением плоскости* в координатной форме.

Заметим, что так как нормальный вектор плоскости $\boldsymbol{n}$ — ненулевой вектор, то A, B и C не могут быть равны нулю одновременно.

Рассмотрим частные виды расположения плоскости, соответствующие тем случаям, когда некоторые из коэффициентов A, B, C, D равны нулю.

1. $D=0$. Тогда уравнение плоскости имеет вид

$$Ax+By+Cz=0.$$

Этому уравнению удовлетворяет точка $O(0;\ 0;\ 0)$, следовательно, плоскость проходит через начало координат.

2. $A=0$. Уравнение плоскости принимает вид

$$By+Cz+D=0.$$

Здесь нормальный вектор $\boldsymbol{n}(0;\ B;\ C)$ имеет составляющую на оси x, равную **0**, следовательно, он перпендикулярен оси Ox; в таком случае плоскость, перпендикулярная к данному вектору, параллельна оси Ox.

Аналогично, при $B=0$ или $C=0$ плоскость параллельна соответственно оси Oy или Oz.

3. $A=0$ и $B=0$. Уравнение плоскости обращается в

$$Cz+D=0,$$

вектор $\boldsymbol{n}(0; 0; C)$ коллинеарен оси Oz. Следовательно, плоскость перпендикулярна к оси Oz и параллельна координатной плоскости Oxy, она отсекает на оси Oz отрезок $-D/C$.

Аналогично рассматриваются случаи, когда $A=0$ и $C=0$ или $B=0$ и $C=0$.

4. $A=0$ и $D=0$. Уравнение плоскости принимает вид

$$By+Cz=0.$$

Принимая во внимание случаи 1 и 2, заключаем, что плоскость проходит через ось x.

5. $A=0$, $B=0$, $D=0$, $C\neq 0$. Уравнение

$$Cz=0, \quad \text{или} \quad z=0,$$

определяет плоскость координат Oxy.

Аналогично рассматриваются остальные частные случаи.

11.2.3. Примеры решения задач. Пример 11.4. Найти уравнение плоскости P, проходящей через три данные точки:

$$M_1(x_1; y_1; z_1), \quad M_2(x_2; y_2; z_2), \quad M_3(x_3; y_3; z_3).$$

Рассмотрим три вектора:

$$\overrightarrow{M_1M}=(x-x_1; y-y_1; z-z_1),$$
$$\overrightarrow{M_1M_2}=(x_2-x_1; y_2-y_1; z_2-z_1),$$
$$\overrightarrow{M_1M_3}=(x_3-x_1; y_3-y_1; z_3-z_1).$$

Для того чтобы точка $M(x; y; z)\in P$, необходимо и достаточно, чтобы смешанное произведение векторов $\overrightarrow{M_1M}$, $\overrightarrow{M_1M_2}$, $\overrightarrow{M_1M_3}$ было равно нулю, ибо эти векторы должны быть компланарны:

$$\overrightarrow{M_1M}\cdot\overrightarrow{M_1M_2}\cdot\overrightarrow{M_1M_3}=0.$$

Подставляя координаты векторов и записывая произведение при помощи определителя, имеем

$$\begin{vmatrix} x-x_1 & y-y_1 & z-z_1 \\ x_2-x_1 & y_2-y_1 & z_2-z_1 \\ x_3-x_1 & y_3-y_1 & z_3-z_1 \end{vmatrix}=0. \qquad (11.24)$$

Это и есть искомое уравнение плоскости P.

Пример 11.5. Найти угол между двумя плоскостями. *Углом между двумя плоскостями* называется любой из смежных двугранных углов, образованных этими плоскостями. Один из них равен углу между нормальными векторами плоскостей.

Пусть плоскости заданы общими уравнениями

$$\begin{aligned} A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0, \\ A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0. \end{aligned} \qquad (11.25)$$

Тогда угол между нормальными векторами $\boldsymbol{n}_1(A_1;\ B_1;\ C_1)$ и $\boldsymbol{n}_2(A_2;\ B_2;\ C_2)$ вычисляется с помощью скалярного произведения

$$\cos\alpha=\frac{\boldsymbol{n}_1\cdot\boldsymbol{n}_2}{|\boldsymbol{n}_1|\cdot|\boldsymbol{n}_2|}=\frac{A_1A_2+B_1B_2+C_1C_2}{\sqrt{A_1^2+B_1^2+C_1^2}\sqrt{A_2^2+B_2^2+C_2^2}}. \qquad (11.26)$$

Пример 11.6. Условия параллельности и перпендикулярности плоскостей. Для того чтобы плоскости были параллельны, их нормальные векторы должны быть коллинеарны друг другу, т. е. должно быть

$$\boldsymbol{n}_1=\lambda\boldsymbol{n}_2,$$

что равносильно

$$A_1=\lambda A_2,\quad B_1=\lambda B_2,\quad C_1=\lambda C_2; \qquad (11.27)$$

если $A_2\neq0$, $B_2\neq0$, $C_2\neq0$, то из этих равенств следует, что

$$\frac{A_1}{A_2}=\frac{B_1}{B_2}=\frac{C_1}{C_2}. \qquad (11.28)$$

Разумеется, и из (11.28) при $\lambda=A_1/A_2$ получаем (11.27).

Для того чтобы плоскости были перпендикулярны, необходимо и достаточно, чтобы были перпендикулярны их нормальные векторы

$$\boldsymbol{n}_1\cdot\boldsymbol{n}_2=0.$$

Следовательно, условие

$$A_1A_2+B_1B_2+C_1C_2=0 \qquad (11.29)$$

является необходимым и достаточным условием перпендикулярности плоскостей (11.25).

§ 11.3. Задание прямой линии в пространстве

11.3.1. Векторно-параметрическое уравнение прямой и его следствия. Пусть дана точка некоторой прямой l и вектор $\boldsymbol{a}=(m;\ n;\ p)$, коллинеарный l (вектор $\boldsymbol{a}$ называют *направляющим вектором* прямой). Этими двумя элементами вполне определяется положение прямой l в пространстве (рис. 11.6). Для того чтобы точка $M(x, y, z) \in l$, необходимо и достаточно, чтобы векторы $\overrightarrow{M_0M}$ и $\boldsymbol{a}$ были коллинеарны, для чего в свою очередь при некотором вещественном t должно быть

$$\overrightarrow{M_0M} = t\boldsymbol{a}. \qquad (11.30)$$

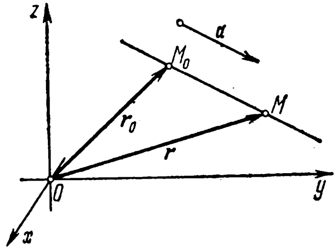


Рис. 11.6.

Заменяя в (11.30) $\overrightarrow{M_0M}$ на $\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_0$ (где, как обычно, под $\boldsymbol{r}$ и $\boldsymbol{r}_0$ мы понимаем радиус-векторы точек M и M_0), мы приходим к уравнению

$$\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}_0 + t\boldsymbol{a}. \qquad (11.31)$$

Уравнение (11.31) называется *векторно-параметрическим уравнением прямой* l.

Переходя в (11.30) к координатам векторов $\overrightarrow{M_0M}$ и $\boldsymbol{a}t$, получим

$$(x;\ y;\ z) = (x_0;\ y_0;\ z_0) + (m;\ n;\ p)\,t,$$

откуда следует

$$x = x_0 + mt, \quad y = y_0 + nt, \quad z = z_0 + pt. \qquad (11.32)$$

Записав эти равенства в форме

$$\frac{x-x_0}{m} = t, \quad \frac{y-y_0}{n} = t \quad \text{и} \quad \frac{z-z_0}{p} = t$$

и исключая параметр t, получим

$$\frac{x-x_0}{m} = \frac{y-y_0}{n} = \frac{z-z_0}{p}. \qquad (11.33)$$

Уравнения (11.33) называют *каноническими уравнениями прямой линии*, а систему уравнений (11.32) — системой ее *уравнений в координатно-параметрической форме.*

11.3.2. Примеры решения задач. Пример 11.7. Найти уравнение прямой, проходящей через две данные точки: $M_1(x_1;\ y_1;\ z_1)$ и $M_2(x_2;\ y_2;\ z_2)$.

Вектор $\overrightarrow{M_1M_2}$ будет коллинеарен данной прямой. Взяв его в качестве направляющего вектора и точку M_1 в качестве начальной, получим

$$\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}_1 + \overrightarrow{M_1M_2} \cdot t$$

или

$$(x;\ y;\ z)=(x_1;\ y_1;\ z_1)+(x_2-x_1;\ y_2-y_1;\ z_2-z_1)\,t.$$

В каноническом виде это уравнение запишется так:

$$\frac{x-x_1}{x_2-x_1}=\frac{y-y_1}{y_2-y_1}=\frac{z-z_1}{z_2-z_1}. \qquad (11.34)$$

Пример 11.8. Найти угол между двумя прямыми в пространстве.

Углом между двумя прямыми в пространстве называем любой из углов, образованный двумя прямыми, проведенными через любую точку пространства параллельно данным прямым. Следовательно, за искомый угол можно принять угол между направляющими векторами прямых.

Пусть прямые заданы каноническими уравнениями

$$\frac{x-x_1}{m_1}=\frac{y-y_1}{n_1}=\frac{z-z_1}{p_1}, \qquad \frac{x-x_2}{m_2}=\frac{y-y_2}{n_2}=\frac{z-z_2}{p_2}. \qquad (11.35)$$

Тогда угол между векторами $\boldsymbol{a}_1(m_1;\ n_1;\ p_1)$ и $\boldsymbol{a}_2(m_2;\ n_2;\ p_2)$ вычисляется по формуле

$$\cos\varphi=\frac{m_1m_2+n_1n_2+p_1p_2}{\sqrt{m_1^2+n_1^2+p_1^2}\,\sqrt{m_2^2+n_2^2+p_2^2}}. \qquad (11.36)$$

Отсюда вытекает условие перпендикулярности двух прямых

$$m_1m_2+n_1n_2+p_1p_2=0. \qquad (11.37)$$

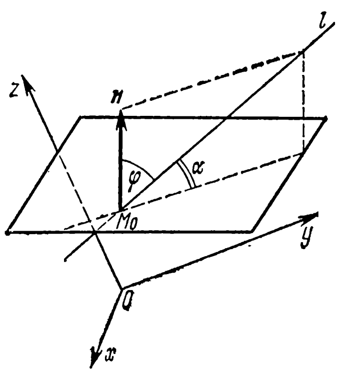


Рис. 11.7.

Условие параллельности прямых (11.35) получим из условия коллинеарности направляющих векторов, оно будет иметь вид

$$\frac{m_1}{m_2}=\frac{n_1}{n_2}=\frac{p_1}{p_2}. \qquad (11.38)$$

Пример 11.9. Найти угол между прямой и плоскостью.

Так как *углом между прямой и плоскостью* считается острый угол между прямой и ее проекцией на плоскость (рис. 11.7), то за искомый угол можно взять дополнительный до $\pi/2$ угол между нормальным вектором плоскости и направляющим вектором прямой, выбрав направление этих векторов так, чтобы угол между ними не превосходил $\pi/2$.

Пусть плоскость и прямая заданы уравнениями

$$Ax + By + Cz + D = 0,$$
$$\frac{x - x_0}{m} = \frac{y - y_0}{n} = \frac{z - z_0}{p}. \qquad (11.39)$$

Тогда искомый угол φ может быть вычислен по формуле

$$\sin\varphi = \frac{|Am + Bm + Cp|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}\ \sqrt{m^2 + n^2 + p^2}}. \qquad (11.40)$$

Отсюда вытекают условия параллельности прямой и плоскости, заданные уравнениями (11.39). Условие параллельности имеет вид

$$Am + Bn + Cp = 0 \qquad (\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{a} = 0),$$

а условием перпендикулярности будет

$$\frac{A}{m} = \frac{B}{n} = \frac{C}{p} \qquad (\boldsymbol{n} = \lambda\boldsymbol{a}).$$

11.3.3. Задание прямой линии в пространстве как линии пересечения двух плоскостей. Любые не параллельные плоскости пересекаются по прямой линии.

Пусть заданы две плоскости

$$\begin{aligned} A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0, \\ A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0. \end{aligned} \qquad (11.41)$$

Если направляющие векторы этих плоскостей не параллельны, то написанная система уравнений определяет некоторую прямую линию.

Перейдем от системы (11.41) к каноническому уравнению прямой. Для этого надо иметь какую-либо точку прямой и направляющий вектор. Точка прямой найдется, если задать произвольно значение одной из координат и затем решить полученную систему из двух уравнений с двумя оставшимися координатами.

Очевидно, что прямая, принадлежащая обеим плоскостям, перпендикулярна каждому из направляющих векторов

$$\boldsymbol{n}_1(A_1;\ B_1;\ C_1), \quad \boldsymbol{n}_2(A_2;\ B_2;\ C_2).$$

Итак, любой вектор, перпендикулярный к $\boldsymbol{n}_1$ и $\boldsymbol{n}_2$, является направляющим вектором прямой.

Как известно из предыдущего, векторное произведение векторов $\boldsymbol{n}_1$ и $\boldsymbol{n}_2$ перпендикулярно обоим векторам, поэтому за направляющий вектор $\boldsymbol{a}$ можно взять вектор $\boldsymbol{n}_1 \times \boldsymbol{n}_2$.

Пример 11.10. Написать каноническое уравнение прямой, заданной плоскостями

$$3x+5y-z-5=0,$$
$$4x-y+2z+2=0.$$

Имеем

$$\boldsymbol{n}_1(3;\ 5;\ -1), \quad \boldsymbol{n}_2(4;\ -1;\ 2).$$

Векторное произведение

$$\boldsymbol{n}_1 \times \boldsymbol{n}_2 = \begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ 3 & 5 & -1 \\ 4 & -1 & 2 \end{vmatrix} = 9\boldsymbol{i} - 10\boldsymbol{j} - 23\boldsymbol{k}.$$

Найдем начальную точку. Положив $z=2$, из системы

$$\begin{cases} 3x+5y-7=0, \\ 4x-\ y+6=0 \end{cases}$$

получаем $x_0=-1$, $y_0=2$. Следовательно, $M_0(-1;\ 2;\ 2) \in l$. Таким образом, искомым каноническим уравнением данной прямой будет

$$\frac{x+1}{9}=\frac{y-2}{-10}=\frac{z-2}{-23}.$$

В заключение отметим еще раз, что любая прямая на плоскости (в пространстве) может быть задана уравнением (системами уравнений) первой степени. Вследствие этого они называются линиями первого порядка.

Плоскости по той же причине называют поверхностями первого порядка.

ВОПРОСЫ ДЛЯ ПОВТОРЕНИЯ К ГЛАВЕ 11

1. Запишите в общем виде уравнения прямой (в векторной и координатной форме), проходящей на плоскости xOy через данную точку перпендикулярно данному вектору. Приведите примеры.

2. Что называется общим уравнением прямой на декартовой координатной плоскости? Как будет расположена прямая относительно осей координат, если те или иные коэффициенты в ее общем уравнении равны 0? Приведите примеры.

3. Какие специальные виды уравнений прямой на декартовой координатной плоскости вы знаете? Приведите примеры.

4. По каким формулам можно находить угол между двумя прямыми на декартовой координатной плоскости? Поясните свой ответ примерами. Сформулируйте условия коллинеарности и перпендикулярности двух прямых.

5. Запишите в общем виде (в векторной и координатной форме) уравнения плоскости, проходящей через данную точку перпендикулярно данному вектору. Приведите примеры.

6. Что называется общим уравнением плоскости? Как будет расположена плоскость относительно координатных осей, если те или иные коэффициенты в ее общем уравнении равны 0? Приведите примеры.

7. По какой формуле можно составить уравнение плоскости, проходящей через три данные точки? Поясните свой ответ примерами.

8. Как можно найти величину угла между двумя плоскостями? В чем состоят условия параллельности и перпендикулярности двух плоскостей? Приведите примеры.

9. Каким образом можно аналитически описать прямую, проходящую через данную точку коллинеарно данному вектору? Приведите примеры.

10. По каким формулам можно найти угол между двумя прямыми? Прямой и плоскостью? В чем состоят условия коллинеарности и перпендикулярности двух прямых? Прямой и плоскости? Поясните свой ответ примерами.

11. Какими способами можно аналитически задать прямую в декартовом координатном пространстве? Приведите примеры.

12. Почему прямые линии носят название линий первого порядка, а плоскости — поверхностей первого порядка?

УПРАЖНЕНИЯ К ГЛАВЕ 11

1. Вершины треугольника находятся в точках $A(3; -4)$, $B(1; 3)$ и $C(-4; -2)$. Составьте уравнения его сторон и высот.

2. $x-y-1=0$ и $x-2y=0$ — уравнения сторон параллелограмма, $M(3; -1)$ — точка пересечения его диагоналей. Найдите координаты вершин этого параллелограмма.

3. $A(-6; 2)$ и $B(2; -2)$ — вершины треугольника, $M(1; 2)$ — точка пересечения высот. Найдите координаты третьей вершины.

4. $x+y-1=0$ — уравнение основания равнобедренного треугольника, $x-2y-2=0$ — уравнение боковой его стороны. Точка $(-2; 0)$ принадлежит другой боковой стороне. Требуется найти уравнение этой стороны.

5. Через точку $(5; 4)$ провести прямую так, чтобы площадь треугольника, образованного этой прямой и осями координат, равнялась 40.

6. $2x-y-8=0$ — уравнение стороны прямоугольника, точка $M(-1; 0)$ лежит на стороне, параллельной данной, $8x+y-12=0$ — уравнение диагонали. Составьте уравнения остальных сторон.

7. Составьте уравнение плоскости, проходящей через точку $M(3; 4; -5)$ параллельно векторам $\boldsymbol{a}=(3; 1; -1)$ и $\boldsymbol{b}=(1; -2; 1)$.

8. Составьте уравнение плоскости, проходящей через точку $M(1; -1; 2)$ перпендикулярно плоскостям $2x-y+3z-1=0$ и $x+2y+z=0$.

9. Прямая l представляет собой линию пересечения плоскостей

$$2x+y-3z-1=0 \text{ и } 3x+2y+4z-11=0.$$

Составьте ее канонические уравнения и уравнения в координатно-параметрической форме. Найдите точку пересечения этой прямой с плоскостью $2x+y+z-9=0$.

10. Составьте уравнение плоскости, проходящей через прямую l: $\frac{x-1}{2}=\frac{y-2}{-3}=\frac{z+3}{2}$ и точку M (2; —2; 1).

ОТВЕТЫ, УКАЗАНИЯ И РЕШЕНИЯ К ГЛАВЕ 11

1. Ответ.

$$\begin{aligned} &AB\colon 7x+2y-13=0, && AC\colon 2x+7y+22=0,\\ &BC\colon x-y+2=0, && AD\colon x+y+1=0,\\ &BE\colon 7x-2y-1=0, && CF\colon 2x-7y-6=0. \end{aligned}$$

2. Удобно воспользоваться тем, что диагонали параллелограмма точкой их пересечения делятся пополам.

Ответ. (2; 1), (—8; —9), (4; —3), (14; 7).

3. Ответ. (2; 4).

4. Ответ. $2x-y+4=0$.

5. Удобно использовать уравнение прямой «в отрезках на осях».

Ответ. 1) $\frac{x}{10}+\frac{y}{8}=1$, 2) $\frac{x}{10(\sqrt{2}-1)}-\frac{y}{8(\sqrt{2}+1)}=1$, 3) $-\frac{x}{10(\sqrt{2}+1)}+\frac{y}{8(\sqrt{2}-1)}=1$.

6. Ответ. $2x-y+2=0$, $x+2y-9=0$, $x+2y+6=0$.

7. В качестве нормального вектора можно взять $\boldsymbol{n}=\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}$.

Ответ. $x+4y+7z+16=0$.

8. Ответ. $7x-y-5z+2=0$.

9. Ответ. $\frac{x-1}{10}=\frac{y-2}{-17}=\frac{z-1}{1}$, $x=10t+1$, $y=-17t+2$, $z=t+1$, (11; —15; 2).

10. Ответ. $4x+6y+5z-1=0$.

ГЛАВА 12

КРИВЫЕ И ПОВЕРХНОСТИ ВТОРОГО ПОРЯДКА

§ 12.1. Кривые второго порядка

12.1.1. Окружность. Под *кривой* (*поверхностью*) *второго порядка* понимают кривую (поверхность), которую можно в некоторой декартовой системе координат задать уравнением второй степени относительно координат переменной точки этой кривой (поверхности). Простейшей кривой второго порядка является *окружность*

$$x^2+y^2=R^2 \qquad (12.1)$$

с центром в начале координат и радиусом R (рис. 12.1).

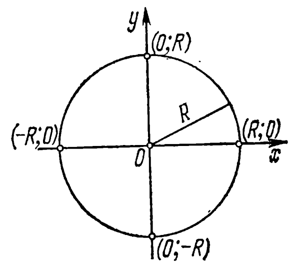


Рис. 12.1.

Окружность представляет собой замкнутую кривую, расположенную в ограниченной области, а именно в квадрате со стороной $2R$ и с центром в начале координат. Эта кривая симметрична относительно осей координат и относительно начала координат.

12.1.2. Эллипс. Рассмотрим кривую второго порядка

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1, \qquad (12.2)$$

где a и b — некоторые положительные числа.

Линия, которая в какой-либо декартовой координатной системе может быть задана таким уравнением, называется *эллипсом*, а уравнение (12.2) называется *каноническим уравнением эллипса.* Изучим свойства и форму этой линии по ее уравнению.

Из уравнения (12.2) видно, что

$$\frac{x^2}{a^2} \leqslant 1, \quad \frac{y^2}{b^2} \leqslant 1,$$

или

$$|x| \leqslant a, \quad |y| \leqslant b. \qquad (12.3)$$

Из этих двух неравенств следует, что эллипс есть линия, ограниченная прямоугольником со сторонами длиной $2a$ и $2b$ и с центром в начале координат (рис. 12.2). Из уравнения (12.2) видно, что если точка $M_1(x;\ y)$ принадлежит эллипсу, то точки $M_2(x;\ -y)$, $M_3(-x;\ y)$ и $M_4(-x;\ -y)$ также принадлежат эллипсу. Из этого следует симметричность эллипса относительно осей координат и начала координат. *Центр симметрии* — начало координат — назовем *центром эллипса*. Точки пересечения *осей симметрии* (осей координат) с эллипсом $A_1(-a;\ 0)$, $A_2(a;\ 0)$, $B_1(0;\ -b)$, $B_2(0;\ b)$ называются *вершинами* эллипса. Для определенности будем считать, что $a > b$. Тогда отрезок оси Ox длиной $2a$ между вершинами A_1 и A_2 будем называть *большой осью* эллипса, а отрезок оси Oy длиной $2b$ между вершинами B_1 и B_2 назовем *малой осью* эллипса.

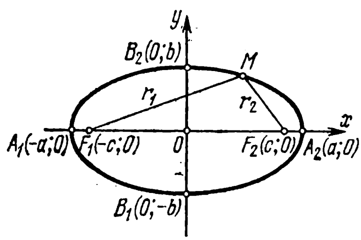


Рис. 12.2.

Для изучения формы эллипса, в силу указанной выше симметрии его относительно осей координат, достаточно изучить форму его части, содержащейся в первой координатной четверти: $x \geqslant 0$, $y \geqslant 0$.

Из уравнения (12.2) при сделанном предположении получим

$$y = \frac{b}{a}\sqrt{a^2 - x^2},$$

откуда следует, что графиком эллипса в первой четверти является непрерывная линия, ординаты которой убывают от b до 0 при движении от точки $B_2(0;\ b)$ до точки $A_2(a;\ 0)$. В остальных четвертях эллипс строится с учетом указанной выше симметрии его.

Введем теперь число $c > 0$ по формуле

$$c^2 = a^2 - b^2 \qquad (c < a),$$

отметим точки $F_1(-c; 0)$ и $F_2(c; 0)$. Эти точки называются *фокусами* эллипса. Так как $c < a$, то фокусы F_1 и F_2 лежат между вершинами A_1 и A_2.

Расстояния r_1 и r_2 любой точки $M(x; y)$ эллипса до фокусов F_1 и F_2 назовем *фокальными радиусами* точки M.

Найдем длины r_1 и r_2. Имеем

$$r_1 = \sqrt{(x+c)^2 + y^2} = \sqrt{x^2 + 2cx + c^2 + b^2 - \frac{b^2x^2}{a^2}} =$$
$$= \sqrt{x^2\left(1 - \frac{b^2}{a^2}\right) + 2cx + a^2} = \sqrt{\frac{x^2c^2}{a^2} + 2cx + a^2} =$$
$$= \sqrt{\left(\frac{xc}{a} + a\right)^2} = \left|\frac{xc}{a} + a\right|.$$

Аналогично находим

$$r_2 = \left|-\frac{xc}{a} + a\right|.$$

Так как $|x| \leqslant a$ и $c/a < 1$, то имеем

$$r_1 = \frac{xc}{a} + a \quad \text{и} \quad r_2 = -\frac{xc}{a} + a. \tag{12.4}$$

Очевидно, что длины фокальных радиусов вершин B_1 и B_2 равны a $(x = 0)$. Этот факт может быть использован для построения фокусов эллипса по его полуосям.

Складывая почленно равенства (12.4), получим

$$r_1 + r_2 = 2a. \tag{12.5}$$

Равенство (12.5) выражает основное свойство эллипса: *сумма расстояний любой точки эллипса* (12.2) *до его фокусов есть величина постоянная и равная* $2a$. Число $\varepsilon = c/a$ $(0 < \varepsilon < 1)$ называется *эксцентриситетом* эллипса. Оно характеризует вытянутость эллипса.

Если у эллипса (12.2) $b = a$, то эллипс превращается в окружность радиусом a, при этом $c = 0$ и $F_1(0; 0) = F_2(0; 0) = O(0; 0)$ — фокусы стягиваются в центр эллипса $(e = 0)$. Получаем уравнение окружности

$$x^2 + y^2 = a^2.$$

Таким образом, окружность можно рассматривать как частный случай эллипса, а именно, как эллипс, эксцентриситет которого равен нулю.

12.1.3. Гипербола. Рассмотрим кривую второго порядка

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1. \tag{12.6}$$

Линия, которая в какой-либо декартовой системе координат может быть задана таким уравнением, называется *гиперболой*, а уравнение (12.6) называется *каноническим уравнением гиперболы*. Изучим свойства и форму этой линии по ее уравнению.

Из уравнения (12.6) видно, что

$$\frac{x^2}{a^2} \geqslant 1,$$

или

$$|x| \geqslant a,$$

так что все точки гиперболы (12.6) лежат вне полосы

$$-a \leqslant x \leqslant a, \quad |y| < +\infty$$

(рис. 12.3), кроме точек $A_1(-a;\ 0)$ и $A_2(a;\ 0)$, лежащих на границе полосы.

При этом, в отличие от эллипса, гипербола является неограниченной кривой, что следует из равенства

$$y = \pm \frac{b}{a} \sqrt{x^2 - a^2}.$$

В самом деле, $|y| \to +\infty$ при $x \to +\infty\ (-\infty)$.

Так же, как и для эллипса, из единовременной принадлежности точек $M_1(x;\ y)$, $M_2(x;\ -y)$, $M_3(-x;\ y)$ и $M_4(-x;\ -y)$ этой линии заключаем о наличии осей симметрии — осей Ox и Oy и центральной симметрии относительно начала координат.

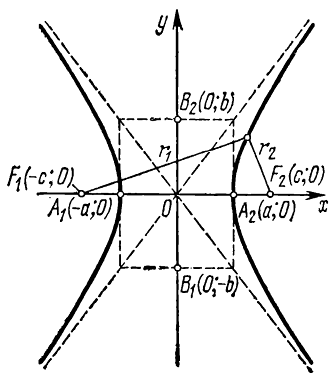


Рис. 12.3.

Точки $A_1(-a;\ 0)$ и $A_2(a;\ 0)$ называются *вершинами* гиперболы, а отрезок длиной $2a$ между ними называется *вещественной осью* гиперболы. Из уравнения (12.6) следует также, что гипербола не пересекает оси Oy, ибо, полагая $x = 0$, мы приходим к уравнению

$$-\frac{y^2}{b^2} = 1,$$

не имеющему вещественных решений.

Отметим на оси Oy точки $B_1(0;\ -b)$ и $B_2(0;\ b)$. Отрезок длиной $2b$ от точки $B_1(0;\ b)$ до $B_2(0;\ -b)$ называют *мнимой осью* гиперболы.

Для построения гиперболы достаточно изучить свойства и форму гиперболы в первой четверти, а именно в области

$$a \leqslant x < +\infty, \quad y \geqslant 0.$$

Тогда имеем

$$y = \frac{b}{a}\sqrt{x^2 - a^2}.$$

Отсюда видно, что при изменении x от a до $+\infty$ ордината y возрастает от 0 до $+\infty$. При этом

$$y < \frac{b}{a}x.$$

Это означает, что гипербола лежит под прямой

$$y = \frac{b}{a}x \tag{12.7}$$

(рис. 12.4), проходящей через начало координат.

Оценивая разность $\delta = NM$ ординат гиперболы (12.6) и прямой (12.7)

$$\delta = \frac{b}{a}\sqrt{x^2 - a^2} - \frac{b}{a}x,$$

нетрудно убедиться, что $\delta \to 0$ при $x \to +\infty$. В самом деле,

$$\delta = \frac{b}{a}\left(\sqrt{x^2 - a^2} - x\right) = \frac{b}{a}\,\frac{-a^2}{\sqrt{x^2 - a^2} + x} \to 0$$

при $x \to +\infty$.

Таким образом, точка M неограниченно приближается к точке N, когда x неограниченно возрастает. Прямая (12.7) является *асимптотой* гиперболы (12.6) (см. п. 5.3.1).

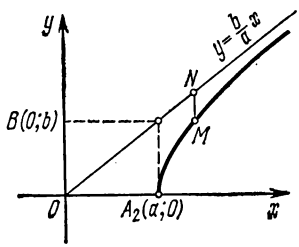


Рис. 12.4.

Из сказанного следует, что в первой четверти гипербола представляет собой кривую, начинающуюся в точке $A_2(a;\ 0)$ и асимптотически приближающуюся к прямой (12.7) при $x \to +\infty$.

Заметим, что асимптоты

$$y = \pm\frac{b}{a}x$$

являются диагоналями прямоугольника (стороны которого параллельны осям Ox и Oy и равны соответственно $2a$ и $2b$, а центр находится в начале координат), вне которого, причем между асимптотами, расположена сама гипербола.

Введем число $c > 0$ по формуле

$$c^2 = a^2 + b^2 \qquad (c > a).$$

Точки $F_1(-c;\ 0)$ и $F_2(c;\ 0)$ называют *фокусами* гиперболы. Так как $c > 0$, то фокусы F_1 и F_2 лежат за вершинами гиперболы и, следовательно, вне полосы $|x| < a$.

Расстояния r_1 и r_2 любой точки $M(x;\ y)$ гиперболы до фокусов называются *фокальными радиусами* точки M. Найдем длины фокальных радиусов:

$$r_1 = \sqrt{(x+c)^2 + y^2} = \sqrt{x^2 + 2cx + c^2 + \frac{b^2x^2}{a^2} - b^2} =$$

$$= \sqrt{x\left(1 + \frac{b^2}{a^2}\right) + 2xc + a^2} = \sqrt{\frac{x^2c^2}{a^2} + 2xc + a^2} =$$

$$= \sqrt{\left(\frac{xc}{a} + a\right)^2} = \left|\frac{xc}{a} + a\right|.$$

Так же находим

$$r_2 = \left|\frac{xc}{a} - a\right|.$$

Так как $|x| \geqslant a$ и $c/a > 1$, то для $x > 0$ имеем

$$r_1 = \frac{c}{a}x + a, \quad r_2 = \frac{c}{a}x - a,$$

откуда

$$r_1 - r_2 = 2a;$$

для $x < 0$ имеем

$$r_1 = -\frac{cx}{a} - a, \quad r_2 = -\frac{cx}{a} + a$$

и снова

$$r_2 - r_1 = 2a.$$

Следовательно, для всех точек гиперболы

$$|r_1 - r_2| = 2a. \tag{12.8}$$

Равенство (12.8) выражает основное свойство гиперболы (12.6): *абсолютная величина разности расстояний от точки гиперболы до ее фокусов есть величина постоянная, равная $2a$.*

Величина $\varepsilon = c/a\ (\varepsilon > 1)$ называется *эксцентриситетом* гиперболы.

Если в гиперболе (12.6) $b = a$, то

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{a^2} = 1,$$

или

$$x^2-y^2=a^2. \tag{12.9}$$

Такая гипербола называется *равносторонней* (рис. 12.5). Асимптотами этой гиперболы будут

$$y=\pm x. \tag{12.10}$$

Это биссектрисы координатных углов. Так как биссектрисы (12.10) взаимно перпендикулярны, то их можно

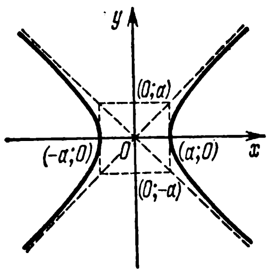


Рис. 12.5.

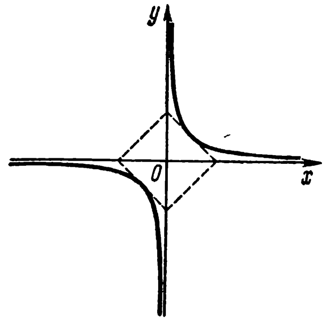


Рис. 12.6.

принять за оси Ox', Oy' новой прямоугольной декартовой системы координат. Переписывая (12.9) в виде

$$(x+y)(x-y)=a^2$$

и полагая

$$x'=\frac{x+y}{\sqrt{2}}, \quad y'=\frac{x-y}{\sqrt{2}},$$

получим

$$x'y'=2a^2,$$

что можно переписать в виде

$$y'=\frac{2a^2}{x'}, \tag{12.11}$$

знакомом учащимся из школьного курса. Уравнение (12.11) называется *уравнением гиперболы, отнесенной к асимптотам*, т. е. когда осями координат являются асимптоты гиперболы (рис. 12.6). Таким образом, графиком обратной пропорциональной зависимости является равнобочная гипербола.

Все равнобочные гиперболы имеют один и тот же эксцентриситет, равный $\sqrt{2}$.

12.1.4. Парабола. Рассмотрим уравнение кривой второго порядка

$$y^2 = 2px. \qquad (12.12)$$

Линия, которая в некоторой декартовой системе может быть задана таким уравнением, называется *параболой*, а уравнение (12.12) — *каноническим уравнением параболы*. Число $p > 0$ называется *параметром* параболы.

Парабола (12.12), так же как и гипербола (12.6), — неограниченная кривая, ибо

$$y = \pm\sqrt{2px} \Rightarrow |y| \to +\infty \quad \text{или} \quad x \to +\infty.$$

В отличие от эллипса и гиперболы, парабола имеет только одну ось симметрии — ось Ox — и не имеет центра симметрии. Ось симметрии называют *осью* параболы. Точку пересечения оси симметрии с самой параболой (12.12) — начало координат — называют вершиной параболы. Точка $F(p/2;\ 0)$ (рис. 12.7) называется *фокусом* параболы. Прямая d, заданная уравнением

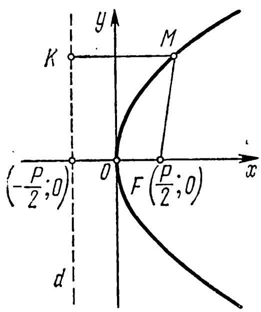


Рис. 12.7.

$$x = -p/2, \qquad (12.13)$$

называется *директрисой* параболы. Она обладает тем свойством, что *расстояние MK от любой точки M параболы (12.12) до директрисы (12.13) равно расстоянию MF от этой точки до фокуса параболы:*

$$|MK| = |MF|. \qquad (12.14)$$

В самом деле, имеем

$$|MK| = x + \frac{p}{2},$$

$$|MF| = \sqrt{\left(x - \frac{p}{2}\right)^2 + y^2} = \sqrt{\left(x - \frac{p}{2}\right)^2 + 2px} = x + \frac{p}{2},$$

откуда и следует (12.14).

Легко увидеть, что если мы поменяем буквы x и y, то полученное уравнение

$$x^2 = 2py \qquad (12.15)$$

будет уравнением параболы с осью Oy в качестве оси симметрии.

Записав уравнение (12.15) в виде, разрешенном относительно y, получим знакомое из школьного курса уравнение параболы

$$y=\frac{1}{2p}x^2,$$

или

$$y=ax^2 \qquad \left(a=\frac{1}{2p}\right).$$

12.1.5. Решение примеров. Пример 12.1. Исследовать уравнение

$$16x^2+25y^2-400=0.$$

Решение. Приведем это уравнение к виду

$$\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{16}=1.$$

Мы видим, что это эллипс с полуосями $a=5$ и $b=4$. Из формулы $c^2=a^2-b^2$ находим $c=3$, откуда $F_1(-3;\ 0)$ и $F_2(3;\ 0)$. Эксцентриситет этого эллипса $\varepsilon=3/5$.

Пример 12.2. Исследовать уравнение

$$9x^2-16y^2-144=0.$$

Решение. Приведем это уравнение к виду

$$\frac{x^2}{16}-\frac{y^2}{9}=1.$$

Это гипербола: $a=4$, $b=3$, $c=5$; $F_1(-5;\ 0)$, $F_2(5;\ 0)$, $\varepsilon=5/4$. Уравнения асимптот $y=3x/4$ и $y=-3x/4$.

Пример 12.3. Исследовать уравнение

$$y^2+8x=0.$$

Решение. Приведя к виду $y^2=-8x$, установим, что это парабола, расположенная в левой полуплоскости, с фокусом в точке $F(-2;\ 0)$ и директрисой, уравнение которой $x-2=0$.

§ 12.2. Поверхности второго порядка

12.2.1. Эллипсоид. Поверхность второго порядка, которая в какой-либо декартовой системе координат $Oxyz$ может быть задана уравнением

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1, \qquad (12.16)$$

называется *эллипсоидом*. Из уравнения непосредственно следует, что

$$|x|\leqslant a, \quad |y|\leqslant b, \quad |z|\leqslant c.$$

Это означает, что эллипсоид есть поверхность, заключенная в прямоугольном параллелепипеде, с измерениями, равными числам $2a$, $2b$, $2c$. Эти числа называются *осями эллипсоида.*

Из того факта, что переменные x, y, z входят в уравнение во второй степени, следует, что поверхность симметрична относительно трех координатных плоскостей и относительно начала координат. Начало координат называется *центром* эллипсоида. Точки пересечения осей координат с эллипсоидом называются *вершинами* эллипсоида.

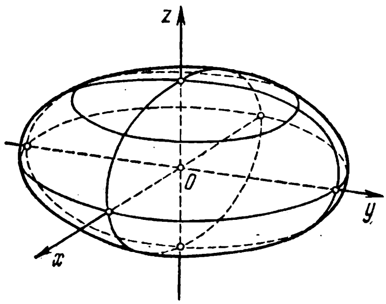


Рис. 12.8.

Проведем сечение эллипсоида плоскостью, параллельной плоскости Oxy; пусть это будет плоскость $z=z_0$, и пусть при этом $|z_0|<c$, тогда

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1-\frac{z_0^2}{c^2}. \qquad (12.17)$$

Обозначим через k^2 положительное число $1-\frac{z_0^2}{c^2}$. Тогда из (12.17) получим

$$\frac{x^2}{(ak)^2}+\frac{y^2}{(bk)^2}=1.$$

Мы видим, что сечение эллипсоида плоскостью $z=z_0$ представляет собой эллипс с полуосями ak и bk, уменьшающимися с увеличением z_0; при $z_0=c$ этот эллипс стягивается в точку, вершину эллипсоида. Аналогично убеждаемся, что сечения эллипсоида плоскостями $x=x_0$ и $y=y_0$ тоже представляют собой эллипсы.

Эллипсоид изображен на рис. 12.8.

В том частном случае, когда $a=b$, мы получаем уравнение

$$\frac{x^2+y^2}{a^2}+\frac{z^2}{c^2}=1.$$

Очевидно, что его сечения плоскостями $z=z_0$ суть окружности радиуса ak. Такой эллипсоид может быть получен вращением эллипса, например

$$\frac{y^2}{a^2}+\frac{z^2}{c^2}=1,$$

расположенного в плоскости Oyz, вокруг оси Oz. Такая поверхность называется *эллипсоидом вращения.*

Если же все три оси равны: $a=b=c$, то получаем

$$x^2+y^2+z^2=a^2,$$

т. е. *сферу*, которая, таким образом, оказывается частным видом эллипсоида.

12.2.2. Гиперболоиды. Поверхность, которая в какой-либо декартовой системе координат может быть задана уравнением

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1, \qquad (12.18)$$

называется *однополостным гиперболоидом.*

Очевидно, что поверхность (12.18) симметрична относительно координатных плоскостей и начала координат. Найдем его сечения плоскостями, параллельными плоскости $Oxy\,(z=z_0)$. Имеем

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1+\frac{z_0^2}{c^2}=k^2 \text{ или } \frac{x^2}{(ak)^2}+\frac{y^2}{(bk)^2}=1. \qquad (12.19)$$

Из уравнения (12.19) следует, что сечения суть эллипсы с неограниченно возрастающими осями, а поверхность (12.18) простирается неограниченно вдоль оси Oz. (рис. 12.9).

Наименьшая величина сечения есть сечение гиперболоида координатной плоскостью Oxy $(z=0)$

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1.$$

Найдем теперь сечение плоскостью $Oyz\,(x=0)$.

Имеем

$$\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1.$$

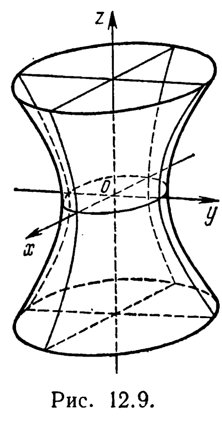


Рис. 12.9.

Эта гипербола, для которой ось Oz есть мнимая ось. Таким же образом сечение гиперболоида плоскостью Oxz $(y=0)$

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{z^2}{c^2}=1$$

есть гипербола с осью Oz в качестве мнимой оси.

Однополостный гиперболоид (12.18) имеет вид, указанный на рис. 12.9.

Если положить $b=a$, то из уравнения

$$\frac{x^2+y^2}{a^2}-\frac{z^2}{c^2}=1 \qquad (12.20)$$

следует, что сечения, параллельные плоскости Oxy, суть окружности радиуса ak.

Поверхность (12.20) называется *однополостным гиперболоидом вращения.*

Поверхность, которая может быть задана в какой-либо декартовой системе уравнением

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=-1, \qquad (12.21)$$

называется *двуполостным гиперболоидом.*

Найдем его сечения плоскостью $z=z_0$

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=\frac{z_0^2}{c^2}-1=k^2,$$

или

$$\frac{x^2}{(ak)^2}+\frac{y^2}{(bk)^2}=1.$$

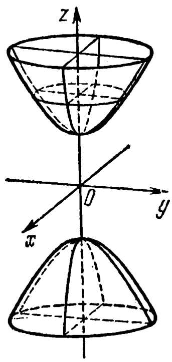


Рис. 12.10.

Из уравнения (12.21) следует, что должно быть $|z|\geqslant c$, следовательно, поверхность распадается на две части, одна при $z\geqslant c$ другая при $z\leqslant -c$ (рис. 12.10).

Сечения представляют собой эллипсы с неограниченно увеличивающимися осями ak и bk.

Сечения двуполостного гиперболоида плоскостями $x=0$ и $y=0$ суть гиперболы

$$\frac{z^2}{c^2}-\frac{y^2}{b^2}=1 \quad \text{и} \quad \frac{z^2}{c^2}-\frac{x^2}{a^2}=1.$$

При $b=a$ имеем *двуполостный гиперболоид вращения* (вокруг оси Oz)

$$\frac{x^2+y^2}{a^2}-\frac{x^2}{c^2}=-1.$$

Двуполостный гиперболоид (12.21) имеет вид, указанный на рис. 12.10.

12.2.3. Параболоиды. Поверхность, описываемая в какой-либо декартовой системе координат уравнением

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=z, \tag{12.22}$$

называется *эллиптическим параболоидом.* Так как $z \geqslant 0$, то поверхность расположена в верхнем полупространстве и неограниченно простирается в направлении оси Oz. Ее сечения плоскостями $z=z_0>0$ суть эллипсы

$$\frac{x^2}{a^2 z_0}+\frac{y^2}{b^2 z_0}=1.$$

Сечения координатными плоскостями $Oyz (x=0)$ и Oxz $(y=0)$

$$y^2=b^2 z \quad \text{и} \quad x^2=a^2 z$$

являются параболами, симметричными относительно оси Oz.

Эллиптический параболоид имеет две плоскости симметрии — плоскости Oxz и Oyz, ось симметрии — ось Oz и вершину — начало координат.

Если положить $b=a$, то получим параболоид вращения

$$a^2 z = x^2+y^2.$$

Его сечения плоскостями $z=z_0>0$ — окружности.

Эллиптический параболоид (12.22) имеет вид, изображенный на рис. 12.11.

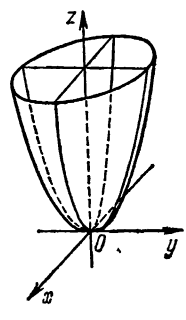


Рис. 12.11.

Поверхность, описываемая в какой-либо декартовой системе координат уравнением

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=z, \tag{12.23}$$

называется *гиперболическим параболоидом.*

Плоскости Oxz и Oyz являются плоскостями симметрии этой поверхности, а линия их пересечения — ось Oz — осью симметрии поверхности. Сечения поверхности плоскостями Oxz и Oyz суть параболы (главные параболы)

$$x^2=a^2 z, \tag{12.24}$$

$$y^2=-b^2 z, \tag{12.25}$$

с осями, совпадающими с осью Oz, и направленными в противоположные стороны. Сечение гиперболического параболоида плоскостью $z = z_0$ есть гипербола. Уравнение проекции этой гиперболы на плоскость Oxy имеет вид

$$\frac{x^2}{a^2 z_0} - \frac{y^2}{b^2 z_0} = 1. \qquad (12.26)$$

Если $z_0 > 0$, то вещественная ось этой гиперболы направлена по оси Ox, а мнимая — по оси Oy. Полуоси этой гиперболы равны $a\sqrt{z_0}$ и $b\sqrt{z_0}$. При возрастании z_0 эти полуоси неограниченно возрастают. Если $z_0 < 0$, то уравнение гиперболы (12.26) перепишем так:

$$-\frac{x^2}{a^2(-z_0)} + \frac{y^2}{b^2(-z_0)} = 1, \qquad (12.27)$$

откуда видно, что вещественная ось этой гиперболы направлена по оси Oy, а мнимая по оси Ox. Полуоси этой гиперболы равны $b\sqrt{-z_0}$ и $a\sqrt{-z_0}$. При $z_0 \to -\infty$ эти полуоси неограниченно возрастают. Если сделать сечение гиперболического параболоида плоскостью $z = z_0 = 0$, то в сечении будут находиться две прямые, уравнение которых

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 0 \quad \text{или} \quad \left(\frac{x}{a} - \frac{y}{b}\right)\left(\frac{x}{a} + \frac{y}{b}\right) = (0).$$

Запишем эти уравнения в виде

$$y = \frac{b}{a}x \quad \text{и} \quad y = -\frac{b}{a}x.$$

Это уравнения асимптот для гипербол, заданных уравнениями (12.26) и (12.27). Если проведем сечение гиперболического параболоида плоскостью $x = x_0$, параллельной плоскости Oyz, то в сечении получится линия, уравнение проекции которой на плоскость Oyz имеет вид

$$\frac{y^2}{b^2} = -z + \frac{x_0^2}{a^2} \quad \text{или} \quad y^2 = -b^2(z - z_0),$$

где

$$z_0 = \frac{x_0^2}{a^2} \quad \text{или} \quad x_0^2 = a^2 z_0,$$

т. е. сечение есть парабола такая же, как и парабола (12.25), но со смещенной вершиной. Вершина этой параболы находится на другой главной параболе (12.24). Совершенно аналогичный результат получим, проведя сечение гиперболического параболоида плоскостью $y = y_0$.

Таким образом, гиперболический параболоид есть поверхность, описанная параболой, вершина которой скользит по другой неподвижной параболе, плоскость которой перпендикулярна к плоскости подвижной параболы, и оси подвижной и неподвижной парабол направлены в противоположные стороны.

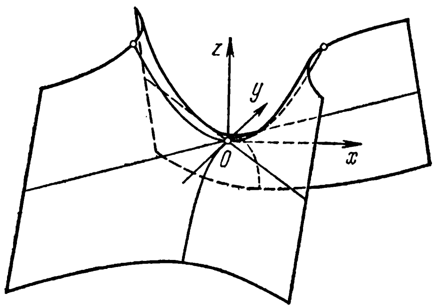


Рис. 12.12.

Гиперболический параболоид имеет вид, изображенный на рис. 12.12.

12.2.4. Конусы второго порядка. Поверхность, которая в какой-либо декартовой системе координат может быть задана уравнением

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=0, \tag{12.28}$$

называется *конусом второго порядка.*

Эта поверхность имеет три плоскости симметрии (координатные плоскости) и центр симметрии — начало координат. Начало координат принадлежит этой поверхности и называется *вершиной.*

Сечениями конуса плоскостями $z=z_0<0$ являются эллипсы

$$\frac{x^2}{(ak)^2}+\frac{y^2}{(bk)^2}=1 \qquad \left(k^2=\frac{z_0^2}{c^2}\right).$$

Конус имеет две полости, при $z>0$ и $z<0$, неограниченно простирающиеся вдоль оси z. Сечениями конуса плоскостями Oxz и Oyz являются прямые. Уравнения сечений суть

$$\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=0 \quad \text{и} \quad \frac{x^2}{a^2}-\frac{z^2}{c^2}=0.$$

Это пары прямых

$$\left(\frac{y}{b}-\frac{z}{c}\right)\left(\frac{y}{b}+\frac{z}{c}\right)=0$$

и

$$\left(\frac{x}{a}-\frac{z}{c}\right)\left(\frac{x}{a}+\frac{z}{c}\right)=0,$$

расположенные в соответствующих координатных плоскостях.

Если $b=a$, то получим конус вращения

$$\frac{x^2+y^2}{a^2}-\frac{z^2}{c^2}=0.$$

Его сечения плоскостями, параллельными Oxy, суть окружности

$$x^2+y^2=\frac{z_0^2a^2}{c^2}.$$

Конус имеет вид, изображенный на рис. 12.13.

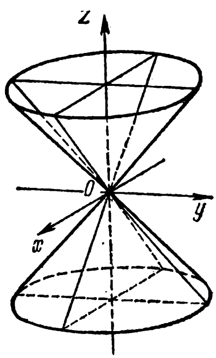


Рис. 12.13.

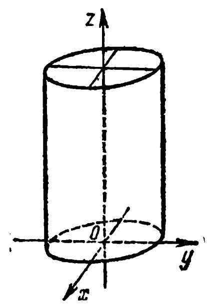


Рис. 12.14.

12.2.5. Цилиндры второго порядка. Поверхности, которые в какой-либо декартовой системе координат могут быть заданы уравнениями

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1, \tag{12.29}$$

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1, \tag{12.30}$$

$$y^2=2px \tag{12.31}$$

(не содержащими буквы z), называются *цилиндрами второго порядка* соответственно *эллиптическим* (в частности, *круговым*), *гиперболическим* и *параболическим*.

Каждой из этих поверхностей вместе с точкой $(x; y; 0)$ принадлежат также точки $(x; y; z_0)$ с любой z_0, поэтому

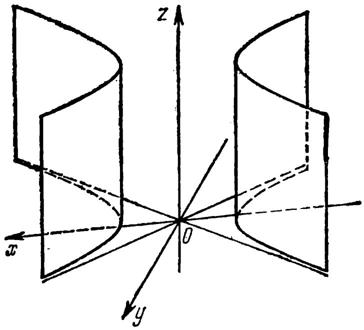


Рис. 12.15.

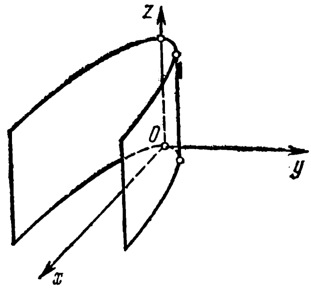


Рис. 12.16.

поверхности содержат прямые линии, параллельные оси Oz, называемые *образующими* цилиндра. Сечения цилиндра, лежащие в плоскости Oxy, называются *направляющими* цилиндра.

Цилиндры (12.29), (12.30), (12.31) изображены соответственно на рис. 12.14, 12.15, 12.16.

ВОПРОСЫ ДЛЯ ПОВТОРЕНИЯ К ГЛАВЕ 12

1. Сформулируйте определения эллипса, гиперболы и параболы. Какова форма этих кривых?

2. Что такое фокусы эллипса, гиперболы, параболы? Какими свойствами они обладают?

3. Что называется эксцентриситетом эллипса и гиперболы? Как по величине эксцентриситета можно судить о форме кривой? Приведите примеры.

4. Какие уравнения имеют асимптоты гиперболы? Приведите примеры.

5. Сформулируйте определения эллипсоида, однополостного и двуполостного гиперболоидов, эллиптического и гиперболического параболоидов, конуса второго порядка, эллиптического, гиперболического и параболического цилиндров. Каким методом можно исследовать форму этих поверхностей?

УПРАЖНЕНИЯ К ГЛАВЕ 12

В примерах 1—8 требуется определить вид кривой второго порядка и построить ее. Найти координаты фокусов, уравнения директрис и асимптот, рассчитать эксцентриситет.

1. $9x^2+25y^2-225=0$.
2. $16x^2-9y^2=144$.
3. $6x-y^2=0$.
4. $xy=4$.
5. $10x^2+7y^2=140$.
6. $2x^2+y=0$.
7. $4x^2-y^2+16=0$.
8. $2xy+3=0$.

В примерах 9—12 требуется преобразованием системы координат по формулам $X=x-x_0$, $Y=y-y_0$ привести уравнение кривой к каноническому виду и построить ее.

9. $4x^2+8x+y^2=12$.
10. $y^2-2y=2x$.
11. $x^2-y^2=4x$.
12. $xy=x+y$.

ОТВЕТЫ, УКАЗАНИЯ И РЕШЕНИЯ К ГЛАВЕ 12

1. Эллипс с вершинами в точках $(\pm 5;\ 0)$ и $(0;\ \pm 3)$, фокусы $(\pm 4;\ 0)$, $\varepsilon=0{,}8$.

2. Гипербола с вершинами в точках $(\pm 3;\ 0)$ (вещественные) и $(0;\ \pm 4)$ (мнимые), фокусы $(\pm 5,\ 0)$, $\varepsilon=5/3$, асимптоты $y=\pm 4/3x$.

3. Парабола с фокусом $F\ (3/2;\ 0)$, уравнение директрисы $x=-3/2$.

4. Равнобочная гипербола, отнесенная к асимптотам. Вещественные вершины — в точках $(2;\ 2)$ и $(-2;\ -2)$, мнимые — в точках $(2;\ -2)$ и $(-2;\ 2)$, $\varepsilon=\sqrt{2}$.

9. Выражая «старые» координаты x и y через «новые» X и Y и подставляя эти выражения в уравнение кривой, получим $4(X+x_0)^2+8(X+x_0)+(Y+y_0)^2=12$ или после преобразования $4X^2+Y^2+X(8x_0+8)+Y\cdot 2y_0=12-4x_0^2-8x_0-y_0^2$. Подберем x_0 и y_0 так, чтобы коэффициенты при первых степенях X и Y обратились в нуль: $8x_0+8=0$, $2y_0=0$, откуда $x_0=-1$, $y_0=0$. В «новых» координатах уравнение принимает вид $4X^2+Y^2=16$, или $\frac{X^2}{4}+\frac{Y^2}{16}=1$. Формулы $X=x+1$, $Y=y$ показывают, что «новая» система координат получается из старой параллельным сдвигом вдоль оси Ox на единицу влево.

Построив на одном рисунке «старую» и «новую» координатные системы и построив (используя «новую» систему) данную кривую, мы тем самым одновременно получим ее чертеж и относительно «старой» системы координат.

ПРИЛОЖЕНИЕ

ТАБЛИЦЫ НЕКОТОРЫХ ЭЛЕМЕНТАРНЫХ ФУНКЦИЙ

1. Тригонометрические функции

$\alpha°$	$\sin\alpha$	$\operatorname{tg}\alpha$	$\operatorname{ctg}\alpha$	$\cos\alpha$	
0	0,0000	0,0000	—	1,000	90
1	0175	0175	57,3	1,000	89
2	0349	0349	28,6	0,999	88
3	0523	0524	19,1	999	87
4	0698	0699	14,3	998	86
5	0,0872	0,0875	11,4	0,996	85
6	1045	1051	9,51	995	84
7	1219	1228	8,14	993	83
8	139	141	7,11	990	82
9	156	158	6,31	988	81
10	0,174	0,176	5,67	985	80
11	191	194	5,145	982	79
12	208	213	4,705	978	78
13	225	231	4,331	974	77
14	242	249	4,011	970	76
15	0,259	0,268	3,732	0,966	75
16	276	287	487	961	74
17	292	306	271	956	73
18	309	325	3,078	951	72
19	326	344	2,904	946	71
20	0,342	0,364	2,747	0,940	70
21	358	384	605	934	69
22	375	404	475	927	68
23	391	424	356	921	67
24	407	445	246	914	66
25	0,423	0,466	2,145	0,906	65
26	438	488	2,050	899	64
27	454	510	1,963	891	63
28	469	532	881	883	62
29	485	554	804	875	61
30	0,500	0,577	1,732	0,866	60
31	515	601	664	857	59
32	530	625	600	848	58
33	545	649	540	839	57
34	559	675	483	829	56
35	0,574	0,700	1,428	0,819	55
36	588	727	376	809	54
37	602	754	327	799	53
38	616	781	280	788	52
39	629	810	235	777	51
40	0,643	0,839	1,192	0,766	50
41	656	869	150	755	49
42	669	900	111	743	48
43	682	933	072	731	47
44	695	966	036	719	46
45	0,707	1,000	1,000	0,707	45
	$\cos\alpha$	$\operatorname{ctg}\alpha$	$\operatorname{tg}\alpha$	$\sin\alpha$	$\alpha°$

2. Таблица значений функций e^x, e^{-x}, $\sin x$ и $\cos x$ для числового значения x

x	e^x	e^{-x}	$\sin x$	$\cos x$
0,00	1,0000	1,0000	0,0000	1,0000
01	1,0101	0,9900	0,0100	1,0000
02	1,0202	0,9802	0,0200	0,9998
03	1,0305	0,9704	0,0300	0,9996
04	1,0408	0,9608	0,0400	0,9992
0,05	1,0513	0,9512	0,0500	0,9988
06	1,0618	0,9418	0,0600	0,9982
07	1,0725	0,9324	0,0699	0,9976
08	1,0833	0,9231	0,0799	0,9968
09	1,0942	0,9139	0,0899	0,9960
0,10	1,1052	0,9048	0,0998	0,9950
11	1,1163	0,8958	0,1098	0,9940
12	1,1275	0,8869	0,1197	0,9928
13	1,1388	0,8781	0,1296	0,9916
14	1,1503	0,8694	0,1395	0,9902
0,15	1,1618	0,8607	0,1494	0,9888
16	1,1735	0,8521	0,1593	0,9872
17	1,1853	0,8437	0,1692	0,9856
18	1,1972	0,8353	0,1790	0,9838
19	1,2092	0,8270	0,1889	0,9820
0,20	1,2214	0,8187	0,1987	0,9801
21	1,2337	0,8106	0,2085	0,9780
22	1,2461	0,8025	0,2182	0,9759
23	1,2586	0,7945	0,2280	0,9737
24	1,2712	0,7866	0,2377	0,9713
0,25	1,2840	0,7788	0,2474	0,9689
26	1,2969	0,7711	0,2571	0,9664
27	1,3100	0,7634	0,2667	0,9638
28	1,3231	0,7558	0,2764	0,9611
29	1,3364	0,7483	0,2860	0,9582
0,30	1,3499	0,7408	0,2955	0,9553
31	1,3634	0,7334	0,3051	0,9523
32	1,3771	0,7261	0,3146	0,9492
33	1,3910	0,7189	0,3240	0,9460
34	1,4049	0,7118	0,3335	0,9428
0,35	1,4191	0,7046	0,3429	0,9394
36	1,4333	0,6977	0,3523	0,9359
37	1,4477	0,6907	0,3616	0,9323
38	1,4623	0,6839	0,3709	0,9287
39	1,4770	0,6771	0,3802	0,9249

x	e^x	e^{-x}	$\sin x$	$\cos x$
0,40	1,4918	0,6703	0,3894	0,9211
41	1,5068	0,6637	0,3986	0,9171
42	1,5220	0,6570	0,4078	0,9131
43	1,5373	0,6505	0,4169	0,9090
44	1,5527	0,6440	0,4259	0,9048
0,45	1,5683	0,6376	0,4350	0,9004
46	1,5841	0,6313	0,4439	0,8961
47	1,6000	0,6250	0,4529	0,8916
48	1,6161	0,6188	0,4618	0,8870
49	1,6323	0,6126	0,4706	0,8823
0,50	1,6487	0,6065	0,4794	0,8776
51	1,6653	0,6005	0,4882	0,8727
52	1,6820	0,5945	0,4969	0,8678
53	1,6989	0,5886	0,5055	0,8628
54	1,7160	0,5827	0,5141	0,8577
0,55	1,7333	0,5769	0,5227	0,8525
56	1,7507	0,5712	0,5312	0,8473
57	1,7683	0,5655	0,5396	0,8419
58	1,7860	0,5599	0,5480	0,8365
59	1,8040	0,5543	0,5564	0,8309
0,60	1,8221	0,5488	0,5646	0,8253
61	1,8404	0,5434	0,5729	0,8196
62	1,8589	0,5379	0,5810	0,8139
63	1,8776	0,5326	0,5891	0,8080
64	1,8965	0,5273	0,5972	0,8021
0,65	1,9155	0,5220	0,6052	0,7961
66	1,9348	0,5169	0,6131	0,7900
67	1,9542	0,5117	0,6210	0,7838
68	1,9739	0,5066	0,6288	0,7776
69	1,9937	0,5016	0,6365	0,7712
0,70	2,0138	0,4966	0,6442	0,7648
71	2,0340	0,4916	0,6518	0,7584
72	2,0544	0,4868	0,6594	0,7518
73	2,0751	0,4819	0,6669	0,7452
74	2,0959	0,4771	0,6743	0,7385
0,75	2,1170	0,4724	0,6816	0,7317
76	2,1383	0,4677	0,6889	0,7248
77	2,1598	0,4630	0,6961	0,7179
78	2,1815	0,4584	0,7033	0,7109
79	2,2034	0,4538	0,7104	0,7038

x	e^x	e^{-x}	$\sin x$	$\cos x$
0,80	2,2255	0,4493	0,7174	0,6967
81	2,2479	0,4449	0,7243	0,6895
82	2,2705	0,4404	0,7311	0,6822
83	2,2933	0,4360	0,7379	0,6749
84	2,3164	0,4317	0,7446	0,6675
0,85	2,3396	0,4274	0,7513	0,6600
86	2,3632	0,4232	0,7578	0,6524
87	2,3869	0,4190	0,7643	0,6448
88	2,4109	0,4148	0,7707	0,6372
89	2,4351	0,4107	0,7771	0,6294
0,90	2,4596	0,4066	0,7833	0,6216
91	2,4843	0,4025	0,7895	0,6137
92	2,5093	0,3985	0,7956	0,6058
93	2,5345	0,3946	0,8016	0,5978
94	2,5600	0,3906	0,8076	0,5898
0,95	2,5857	0,3867	0,8134	0,5817
96	2,6117	0,3829	0,8192	0,5735
97	2,6379	0,3791	0,8249	0,5653
98	2,6645	0,3753	0,8306	0,5570
99	2,6912	0,3716	0,8360	0,5487
1,00	2,7183	0,3679	0,8415	0,5403
01	2,7456	0,3642	0,8468	0,5319
02	2,7732	0,3606	0,8521	0,5234
03	2,8011	0,3570	0,8573	0,5148
04	2,8292	0,3535	0,8624	0,5062
1,05	2,8577	0,3499	0,8674	0,4976
06	2,8864	0,3465	0,8724	0,4889
07	2,9154	0,3430	0,8772	0,4801
08	2,9447	0,3396	0,8820	0,4713
09	2,9743	0,3362	0,8866	0,4625
1,10	3,0042	0,3329	0,8912	0,4536
11	3,0344	0,3296	0,8957	0,4447
12	3,0649	0,3263	0,9001	0,4357
13	3,0957	0,3230	0,9044	0,4267
14	3,1268	0,3198	0,9086	0,4176
1,15	3,1582	0,3166	0,9128	0,4085
16	3,1899	0,3135	0,9168	0,3993
17	3,2220	0,3104	0,9208	0,3902
18	3,2544	0,3073	0,9246	0,3809
19	3,2871	0,3042	0,9284	0,3717

Продолжение

x	e^x	e^{-x}	$\sin x$	$\cos x$
1,20	3,3201	0,3012	0,9320	0,3624
21	3,3535	0,2982	0,9356	0,3530
22	3,3872	0,2952	0,9391	0,3436
23	3,4212	0,2923	0,9425	0,3342
24	3,4556	0,2894	0,9458	0,3248
1,25	3,4903	0,2865	0,9490	0,3153
26	3,5254	0,2837	0,9521	0,3058
27	3,5609	0,2808	0,9551	0,2963
28	3,5966	0,2780	0,9580	0,2867
29	3,6328	0,2753	0,9608	0,2771
1,30	3,6693	0,2725	0,9636	0,2675
31	3,7062	0,2698	0,9662	0,2579
32	3,7434	0,2671	0,9687	0,2482
33	3,7810	0,2645	0,9711	0,2385
34	3,8190	0,2618	0,9735	0,2288
1,35	3,8574	0,2592	0,9757	0,2190
36	3,8962	0,2567	0,9779	0,2092
37	3,9354	0,2541	0,9799	0,1994
38	3,9749	0,2516	0,9819	0,1896
39	4,0149	0,2491	0,9837	0,1798
1,40	4,0552	0,2466	0,9854	0,1700
41	4,0960	0,2441	0,9871	0,1601
42	4,1371	0,2417	0,9887	0,1502
43	4,1787	0,2393	0,9901	0,1403
44	4,2207	0,2369	0,9915	0,1304
1,45	4,2631	0,2346	0,9927	0,1205
46	4,3060	0,2322	0,9939	0,1106
47	4,3492	0,2299	0,9949	0,1006
48	4,3929	0,2276	0,9959	0,0907
49	4,4371	0,2254	0,9967	0,0807
1,50	4,4817	0,2231	0,9975	0,0707
51	4,5267	0,2209	0,9982	0,0608
52	4,5722	0,2187	0,9987	0,0508
53	4,6182	0,2165	0,9992	0,0408
54	4,6646	0,2144	0,9995	0,0308
1,55	4,7115	0,2122	0,9998	0,0208
56	4,7588	0,2101	0,9999	0,0108
57	4,8066	0,2080	1,0000	+0,0008
58	4,8550	0,2060	1,0000	—0,0092
59	4,9037	0,2039	0,9998	—0,0192

3. Обратные величины, квадратные и кубические корни, логарифмы, показательная функция

x	$\frac{1}{x}$	$\sqrt{x}$	$\sqrt{10x}$	$\sqrt[3]{x}$	$\sqrt[3]{10x}$	$\sqrt[3]{100x}$	$\lg x$	$\ln x$	e^x	x
1,0	1,000	1,00	3,16	1,00	2,15	4,64	000	0,000	2,72	1,0
1,1	0,909	05	32	03	22	79	041	095	3,00	1,1
1,2	833	10	46	06	29	93	079	182	3,32	1,2
1,3	769	14	61	09	35	5,07	114	262	3,67	1,3
1,4	714	18	74	12	41	19	146	336	4,06	1,4
1,5	0,667	1,22	3,87	1,14	2,47	5,31	176	0,405	4,48	1,5
1,6	625	26	4,00	17	52	43	204	470	4,95	1,6
1,7	588	30	12	19	57	54	230	530	5,47	1,7
1,8	556	34	24	22	62	65	255	588	6,05	1,8
1,9	526	38	36	24	67	75	279	642	6,69	1,9
2,0	0,500	1,41	4,47	1,26	2,71	5,85	301	0,693	7,39	2,0
2,1	476	45	58	28	76	94	322	742	8,17	2,1
2,2	455	48	69	30	80	6,03	342	789	9,03	2,2
2,3	435	52	80	32	84	13	362	833	9,97	2,3
2,4	417	55	90	34	88	21	380	875	11,0	2,4
2,5	0,400	1,58	5,00	1,36	2,92	6,30	398	0,916	12,2	2,5
2,6	380	61	10	38	96	38	415	955	13,5	2,6
2,7	370	64	20	39	3,00	46	431	993	14,9	2,7
2,8	357	67	29	41	04	54	447	1,030	16,4	2,8
2,9	345	70	39	43	07	62	462	065	18,2	2,9
3,0	0,333	1,73	5,48	1,44	3,11	6,69	477	1,099	20,1	3,0
3,1	323	76	57	46	14	77	491	131	22,2	3,1
3,2	313	79	66	47	18	84	505	163	24,5	3,2
3,3	303	81	75	49	21	91	519	194	27,1	3,3
3,4	294	84	83	50	24	98	532	224	30,0	3,4
3,5	0,286	1,87	5,92	1,52	3,27	7,05	544	1,253	33,1	3,5
3,6	278	90	6,00	53	30	11	556	281	36,6	3,6
3,7	270	92	08	55	33	18	568	308	40,4	3,7
3,8	263	95	16	56	36	24	580	335	44,7	3,8
3,9	256	98	25	57	39	31	591	361	49,4	3,9
4,0	0,250	2,00	6,33	1,59	3,42	7,37	602	1,386	54,6	4,0
4,1	244	03	40	60	45	43	613	411	60,3	4,1
4,2	238	05	48	61	48	49	623	435	66,7	4,2
4,3	233	07	56	63	50	55	634	458	73,7	4,3
4,4	227	10	63	64	53	61	644	482	81,5	4,4
4,5	0,222	2,12	6,71	1,65	3,56	7,66	653	1,504	90,0	4,5
4,6	217	15	78	66	58	72	663	526	99,5	4,6
4,7	213	17	86	68	61	78	672	548	110	4,7
4,8	208	19	93	69	63	83	681	569	121	4,8
4,9	204	21	7,00	70	66	88	690	589	134	4,9
5,0	0,200	2,24	7,07	1,71	3,68	7,94	699	1,609	148	5,0
5,1	196	26	14	72	71	99	708	629	164	5,1
5,2	192	28	21	73	73	8,04	716	649	181	5,2
5,3	189	30	28	74	76	09	724	668	200	5,3
5,4	185	32	35	75	78	14	732	686	221	5,4

x	$\frac{1}{x}$	$\sqrt{x}$	$\sqrt{10x}$	$\sqrt[3]{x}$	$\sqrt[3]{10x}$	$\sqrt[3]{100x}$	$\lg x$	$\ln x$	e^x	x
5,5	0,182	2,35	7,42	1,77	3,80	8,19	740	1,705	244	5,5
5,6	179	37	48	78	83	24	748	723	270	5,6
5,7	175	39	55	79	85	29	756	740	299	5,7
5,8	172	41	62	80	87	34	763	758	330	5,8
5,9	170	43	68	81	89	39	771	775	365	5,9
6,0	0,167	2,45	7,75	1,82	3,92	8,43	778	1,792	403	6,0
6,1	164	47	81	83	94	48	785	808	446	6,1
6,2	161	49	87	84	96	53	792	825	493	6,2
6,3	159	51	94	85	98	57	799	841	545	6,3
6,4	156	53	8,00	86	4,00	62	806	856	602	6,4
6,5	0,154	2,55	8,06	1,87	4,02	8,66	813	1,872	665	6,5
6,6	152	57	12	88	04	71	820	887	735	6,6
6,7	149	59	19	89	06	75	826	902	812	6,7
6,8	147	61	25	89	08	79	833	917	898	6,8
6,9	145	63	31	90	10	84	839	932	992	6,9
7,0	0,143	2,65	8,37	1,91	4,12	8,88	845	1,946	1097	7,0
7,1	141	66	43	92	14	92	851	960	1212	7,1
7,2	139	68	49	93	16	96	857	974	1339	7,2
7,3	137	70	54	94	18	9,00	863	988	1480	7,3
7,4	135	72	60	95	20	05	869	2,001	1636	7,4
7,5	0,133	2,74	8,66	1,96	4,22	9,09	875	2,015	1808	7,5
7,6	132	76	72	97	24	13	881	028	1998	7,6
7,7	130	77	77	97	25	17	886	041	2208	7,7
7,8	128	79	83	98	27	21	892	054	2441	7,8
7,9	127	81	89	99	29	24	898	067	2697	7,9
8,0	0,125	2,83	8,94	2,00	4,31	9,28	903	2,079	2981	8,0
8,1	123	85	9,00	01	33	32	908	092	3294	8,1
8,2	122	86	06	02	34	36	914	104	3641	8,2
8,3	120	88	11	02	36	40	919	116	4024	8,3
8,4	119	90	17	03	38	44	924	128	4447	8,4
8,5	0,118	2,92	9,22	2,04	4,40	9,47	929	2,140	4915	8,5
8,6	116	93	27	05	41	51	935	152	5432	8,6
8,7	115	95	33	06	43	55	940	163	6003	8,7
8,8	114	97	38	06	45	58	944	175	6634	8,8
8,9	112	98	43	07	46	62	949	186	7332	8,9
9,0	0,111	3,00	9,49	2,08	4,48	9,65	954	2,197	8103	9,0
9,1	110	02	54	09	50	69	959	208	8955	9,1
9,2	109	03	59	10	51	73	964	219	9897	9,2
9,3	108	05	64	10	53	76	968	230	10938	9,3
9,4	106	07	69	11	55	80	973	241	12088	9,4
9,5	0,105	3,08	9,75	2,12	4,56	9,83	978	2,251	13360	9,5
9,6	104	10	80	13	58	86	982	262	14765	9,6
9,7	103	11	85	13	59	90	987	272	16318	9,7
9,8	102	13	90	14	61	93	991	282	18034	9,8
9,9	101	15	95	15	63	97	996	293	19930	9,9
10,0	0,100	3,16	10,00	2,15	4,64	10,00	000	2,303	22026	10,0

В графе $\lg x$ даны мантиссы десятичных логарифмов.

Для нахождения натуральных логарифмов чисел, бо́льших 10 или меньших 1, нужно пользоваться формулой

$$\ln (x \cdot 10^k) = \ln x + k \ln 10.$$

Заметим, что

$\ln 10 = 2,303$; $\ln 10^2 = 4,605$;

$\lg x = 0,4343 \ln x$; $\ln x = 2,303 \lg x$.

Виталий Николаевич Матвеев,
Артур Александрович Матюшкин-Герке,
Николай Васильевич Богомолов,
Семен Моисеевич Козловский

КУРС МАТЕМАТИКИ
для техникумов, ч. I

М., 1977 г., 400 стр. с илл.

Редактор А. Ф. Лапко
Техн. редактор С. Я. Шкляр
Корректор Т. С. Вайсберг

Сдано в набор 7/IV 1976 г. Подписано к печати 23/VIII 1976 г. Бумага $84 \times 108^1/_{32}$. Физ. печ. л. 12,5. Условн. печ. л. 21. Уч.-изд. л. 20,93. Тираж 400 000 экз. (2-й завод 100 001—400 000 экз.). Цена книги 67 коп. Заказ № 245.

Издательство «Наука»
Главная редакция
физико-математической литературы
117071, Москва, В-71, Ленинский проспект, 15

Ордена Трудового Красного Знамени
Первая Образцовая типография
имени А. А. Жданова Союзполиграфпрома
при Государственном комитете
Совета Министров СССР по делам издательств,
полиграфии и книжной торговли.
Москва, 113054, Валовая, 28

67 коп.