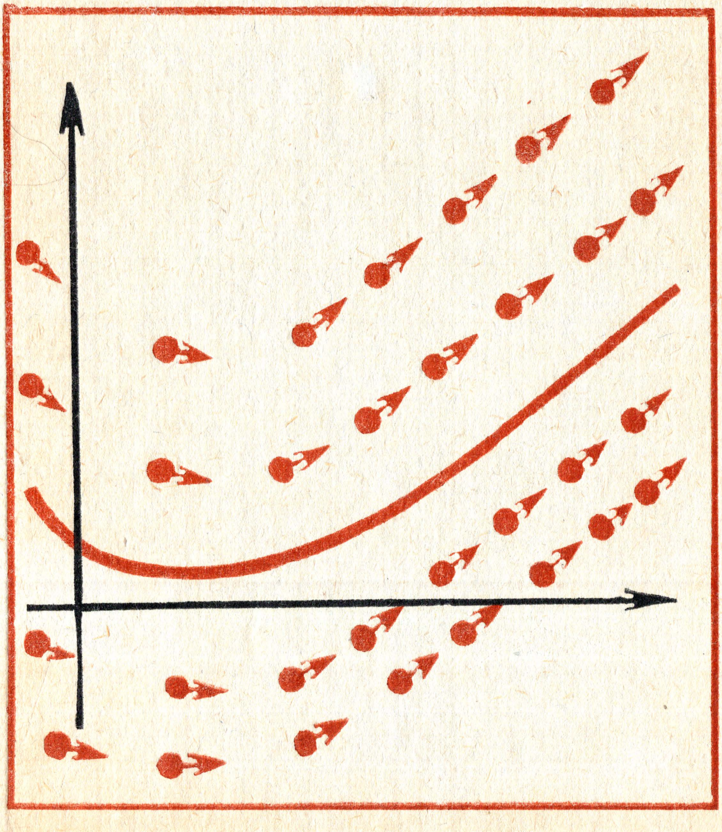
КУРС МАТЕМАТИКИ

ДЛЯ ТЕХНИКУМОВ

ЧАСТЬ II



КУРС МАТЕМАТИКИ

ДЛЯ ТЕХНИКУМОВ

Часть II

Под редакцией Н. М. МАТВЕЕВА

Допущено Министерством
высшего и среднего специального образования СССР
в качестве учебного пособия
для средних специальных учебных заведений

ИЗДАТЕЛЬСТВО «НАУКА»
ГЛАВНАЯ РЕДАКЦИЯ
ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ЛИТЕРАТУРЫ
Москва 1976

517.2
К 93
УДК 517.11

КОЛЛЕКТИВ АВТОРОВ:
В. Н. МАТВЕЕВ, А. А. МАТЮШКИН-ГЕРКЕ,
Н. В. БОГОМОЛОВ, С. М. КОЗЛОВСКИЙ

Книга представляет собой вторую часть «Курса математики для техникумов» в двух частях, написанного группой ленинградских авторов в соответствии с новой программой для техникумов, утвержденной в 1974 году.

Книга подготовлена по предложению Научно-методического кабинета по среднему специальному образованию Министерства высшего и среднего специального образования СССР как экспериментальное учебное пособие.

Отзывы и замечания по данному учебному пособию Научно-методический кабинет по среднему специальному образованию просит направлять в его адрес: 111024, Москва, Е-24, 3-я Кабельная ул., дом 1.

$М \frac{20203-140}{053(02)-76}$ 25-76

ОГЛАВЛЕНИЕ

Глава 13. **Неопределенный интеграл** 9

§ 13.1. Неопределенный интеграл и его простейшие свойства 9

13.1.1. Первообразная функция. Неопределенный интеграл (9). 13.1.2. Основные свойства неопределенного интеграла (12). 13.1.3. Таблица простейших неопределенных интегралов (13). 13.1.4. Непосредственное интегрирование (14).

§ 13.2. Простейшие приложения неопределенного интеграла 16

13.2.1. Вычисление первообразной функции по заданной ее производной или дифференциалу и частным значениям аргумента и функции (16). 13.2.2. Составление уравнения линии, проходящей через данную точку, по заданному угловому коэффициенту касательной (16). 13.2.3. Составление уравнения движения материальной точки (17).

§ 13.3. Методы интегрирования 19

13.3.1. Интегрирование методом замены переменной (способом подстановки) (19). 13.3.2. Метод интегрирования по частям (29). 13.3.3. Интегрирование рациональных дробей (33). 13.3.4. Понятие об интегралах, не выражающихся в конечном виде через элементарные функции (36).

Вопросы для повторения к главе 13 37

Упражнения к главе 13 38

Ответы, указания и решения к главе 13 39

Глава 14. **Определенный интеграл и его приложения** 42

§ 14.1. Основные понятия 42

14.1.1. Задачи, приводящие к понятию определенного интеграла (42). 14.1.2. Интегральная сумма и определенный интеграл (44).

§ 14.2. Свойства определенного интеграла 46

14.2.1. Свойства, выражаемые равенствами (46). 14.2.2. Свойства, выражаемые неравенствами (47). 14.2.3. Теорема о среднем (48).

§ 14.3. Интеграл с переменным верхним пределом 49

14.3.1. Непрерывность интеграла с переменным верхним пределом (49). 14.3.2. Производная от интеграла с переменным верхним пределом (50). 14.3.3. Формула Ньютона—Лейбница (51).

§ 14.4. Методы вычисления определенных интегралов 53

14.4.1. Непосредственное интегрирование (53). 14.4.2. Замена переменной (способ подстановки) (54). 14.4.3. Интегрирование по частям (58). 14.4.4. Приближенные методы вычисления определенных интегралов (59).

§ 14.5. Несобственные интегралы 67

§ 14.6. Вычисление площадей с помощью определенного интеграла 69

14.6.1. Две схемы применения определенного интеграла к вычислению различных величин (69). 14.6.2. Площади плоских фигур (71).

§ 14.7. Вычисление объемов 75

14.7.1. Понятие объема, его основные свойства (75). 14.7.2. Объем прямоугольного и прямого параллелепипеда, прямой призмы и цилиндра (76). 14.7.3. Объем тела с заданными площадями поперечных сечений (80). 14.7.4. Объем наклонной призмы (наклонного цилиндра) (82). 14.7.5. Объем пирамиды и усеченной пирамиды (83). 14.7.6. Объем тела вращения (84). 14.7.7. Объем конуса и усеченного конуса (87). 14.7.8. Объем шара и его частей (89).

§ 14.8. Длина дуги и площадь поверхности вращения 92

14.8.1. Длина дуги кривой. Дифференциал дуги (92). 14.8.2. Площадь поверхности вращения (96). 14.8.3. Площадь поверхности сферы, сферического пояса и сферического сегмента (98).

§ 14.9. Другие приложения определенного интеграла . . . 100

14.9.1. Путь, пройденный телом (100). 14.9.2. Работа переменной силы (101). 14.9.3. Работа, совершаемая при поднятии груза (103). 14.9.4. Давление жидкости (104). 14.9.5. Статические моменты и центр тяжести кривой (108). 14.9.6. Статические моменты и центры тяжести плоских фигур (111). 14.9.7. Моменты инерции (113).

Вопросы для повторения к главе 14 114

Упражнения к главе 14 115

Ответы, указания и решения к главе 14 117

Глава 15. **Понятие о векторнозначных функциях и функциях нескольких переменных** 118

§ 15.1. Обобщение понятия функции 118

15.1.1. Вводные замечания (118). 15.1.2. Основное определение (118).

§ 15.2. Векторнозначные функции скалярного аргумента . . 119

15.2.1. Вектор-функция, ее график и годограф (119).

15.2.2. Предел и непрерывность вектор-функции. Ее дифференцирование и интегрирование (121).

§ 15.3. Функции нескольких переменных 123
15.3.1. Функция двух переменных. Ее график. Частные производные (123). 15.3.2. Полный дифференциал функции двух переменных (126). 15.3.3. Обобщения на случай большего числа переменных (127). 15.3.4. Производная сложной функции (128). 15.3.5. Дифференцирование неявных функций (129).

§ 15.4. Кратные интегралы 131
15.4.1. Основные понятия (131). 15.4.2. Формула для вычисления двойного интеграла (133). 15.4.3. Вычисление тройного интеграла (135).

Вопросы для повторения к главе 15 135
Упражнения к главе 15 136
Ответы, указания и решения к главе 15 138

Глава 16. **Экстремальные задачи для функций нескольких переменных** 144

§ 16.1. Линии и поверхности уровня. Производная по направлению и градиент 144
16.1.1. Линии уровня функции двух переменных (144). 16.1.2. Производная по направлению (144). 16.1.3. Градиент функции двух переменных (147). 16.1.4. Замечания для случая трех и большего числа переменных (148).

§ 16.2. Экстремумы функций нескольких переменных. Классический подход к решению экстремальных задач 149
16.2.1. Основные понятия (149). 16.2.2. Условия существования внутреннего экстремума для функции двух переменных (150). 16.2.3. Классический способ отыскания экстремумов (151). 16.2.4. Случай трех и большего числа переменных (154).

§ 16.3. Линейное программирование 155
16.3.1. Предварительные примеры (155). 16.3.2. Задачи линейного программирования с ограничениями — неравенствами (случай двух переменных) (158).

§ 16.4. Симплекс-метод решения задач линейного программирования 160
16.4.1. Основная идея симплекс-метода и его геометрическая интерпретация (160). 16.4.2. Алгоритм симплекс-метода (163). 16.4.3. Симплекс-таблицы и их использование (165).

§ 16.5. Случай трех и большего числа переменных. Понятие о нелинейных экстремальных задачах 169
16.5.1. Задачи линейного программирования с произвольным количеством переменных (169). 16.5.2. Заключительные замечания об экстремальных задачах (170).

Вопросы для повторения к главе 16 171
Упражнения к главе 16 172
Ответы, указания и решения к главе 16 174

Глава 17. **Дифференциальные уравнения** 183
§ 17.1. Введение 183
17.1.1. Понятие о дифференциальном уравнении. Задачи, приводящие к дифференциальным уравнениям (183). 17.1.2. Основные понятия: порядок дифференциального уравнения, начальные условия, общее и частное решения, граничные условия (185).
§ 17.2. Дифференциальные уравнения первого порядка . . 191
17.2.1. Геометрическая интерпретация дифференциального уравнения первого порядка (191). 17.2.2. Простейшие типы дифференциальных уравнений первого порядка: уравнения с разделяющимися переменными, линейные уравнения (193).
§ 17.3. Дифференциальные уравнения порядка выше первого 195
17.3.1. Линейные дифференциальные уравнения второго порядка с постоянными коэффициентами (195). 17.3.2. Примеры решения дифференциальных уравнений высших порядков (198).
§ 17.4. Метод Эйлера численного интегрирования дифференциального уравнения первого порядка и его геометрическая интерпретация 202
Вопросы для повторения к главе 17 205
Упражнения к главе 17 205
Ответы, указания и решения к главе 17 207

Глава 18. **Числовые и степенные ряды** 212
§ 18.1. Числовые ряды 212
18.1.1. Числовой ряд и его сумма (212). 18.1.2. Примеры сходящихся и расходящихся рядов (213). 18.1.3. Простейшие свойства сходящихся рядов (215).
§ 18.2. Признаки сходимости числовых рядов 218
18.2.1. Необходимый признак сходимости (219). 18.2.2. Признак сравнения и его следствия. Абсолютная сходимость (219). 18.2.3. Признак Даламбера (222). 18.2.4. Признак Лейбница (224). 18.2.5. Интегральный признак сходимости (226). 18.2.6. Примеры исследования рядов на сходимость. Оценки остаточных рядов (230).
§ 18.3. Степенные ряды 232
18.3.1. Понятие о функциональных рядах (232). 18.3.2. Степенные ряды. Структура их областей сходимости (233). 18.3.3. Простейшие свойства степенных рядов (235). 18.3.4. Разложение в степенной ряд $\ln x$ и $\operatorname{arctg} x$ (236).
§ 18.4. Ряды Тейлора 239
18.4.1. Единственность разложения функции в степенной ряд (239). 18.4.2. Ряд Тейлора. Достаточные условия разложимости (241). 18.4.3. Ряды для $\sin x$, $\cos x$ и e^x (242). 18.4.4. Решение дифференциальных уравнений с помощью степенных рядов (244).

Вопросы для повторения к главе 18 246
Упражнения к главе 18 247
Ответы, указания и решения к главе 18 249

Глава 19. **Ряды Фурье** 253

§ 19.1. Обобщенные полиномы и приближение функций «в среднем» 253

19.1.1. Различные способы оценки «близости» двух функций (253). 19.1.2. Ортогональные и ортонормированные системы функций (256). 19.1.3. Обобщенные полиномы наилучшего приближения (258). 19.1.4. Обобщенные ряды Фурье (259).

§ 19.2. Тригонометрические ряды Фурье 261

19.2.1. Разложение в тригонометрический ряд Фурье функции, заданной на конечном промежутке (261). 19.2.2. Разложение периодических функций (262). 19.2.3. Разложение в ряды только по синусам и только по косинусам (263). 19.2.4. Примеры разложения функций в тригонометрические ряды Фурье (266).

Вопросы для повторения к главе 19 268
Упражнения к главе 19 268
Ответы, указания и решения к главе 19 269

Глава 20. **Элементы комбинаторики** 272

§ 20.1. Упорядоченные выборки. Перестановки и сочетания 272

20.1.1. Вводные замечания (272). 20.1.2. Упорядоченные выборки и перестановки (272). 20.1.3. Сочетания (275).

§ 20.2. Бином Ньютона. Треугольник Паскаля 277

20.2.1. Формула разложения в сумму степени бинома (277). 20.2.2. Треугольник Паскаля (278).

Вопросы для повторения к главе 20 279
Упражнения к главе 20 279
Ответы, указания и решения к главе 20 280

Глава 21. **Элементы теории вероятностей и математической статистики** 281

§ 21.1. События, вероятности и действия над ними 281

21.1.1. Введение (281). 21.1.2. События и операции над ними (284). 21.1.3. Классическое определение вероятности (290). 21.1.4. Условная вероятность. Формула полной вероятности и формула Байеса (293). 21.1.5. Общее определение вероятностной функции на конечной алгебре событий (298).

§ 21.2. Случайные величины и функции распределения . . 302

21.2.1. Дискретные случайные величины (302). 21.2.2. Биномиальный закон распределения (308). 21.2.3. Случайные величины (общий случай) (311).

§ 21.3. Сводные числовые характеристики. Аппроксимация распределений 320

21.3.1. Сводные числовые характеристики выборочных и теоретических распределений (320). 21.3.2. Аппроксимация законов распределения (328). 21.3.3. Понятие о законе больших чисел (330).

§ 21.4. Системы случайных величин 332

21.4.1. Совместные распределения случайных величин (332). 21.4.2. Регрессионные зависимости и сводные числовые характеристики совместных распределений (337). 21.4.3. Совместные выборочные распределения и их сводные числовые характеристики (342). 21.4.4. Отыскание регрессионных зависимостей методом наименьших квадратов (346).

Вопросы для повторения к главе 21 351

Упражнения к главе 21 353

Ответы, указания и решения к главе 21 359

Приложение. Таблица значений функции $\Phi_0(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_0^z e^{-u^2/2}du$ 366

ГЛАВА 13

НЕОПРЕДЕЛЕННЫЙ ИНТЕГРАЛ

§ 13.1. Неопределенный интеграл и его простейшие свойства

13.1.1. Первообразная функция. Неопределенный интеграл. Одной из главных задач дифференциального исчисления является задача нахождения скорости изменения какой-либо функции, т. е. задача нахождения производной (или дифференциала). На практике часто приходится решать обратную задачу: зная скорость изменения функции, найти эту функцию. Эта операция называется *интегрированием.*

По данному выражению

$$dF(x) = f(x)\,dx$$

или

$$F'(x) = \frac{dF(x)}{dx} = f(x),$$

где $f(x)$ — известная функция, нужно найти функцию $F(x)$.

Искомая функция $F(x)$ называется *первообразной функцией* по отношению к функции $f(x)$.

Дадим определение первообразной функции.

Определение 13.1. *Первообразной функцией для данной функции $f(x)$ называется такая функция $F(x)$, производная которой равна $f(x)$ (или, что то же самое, дифференциал которой равен $f(x)\,dx$).*

Например, первообразной функцией для функции $3x^2$ будет x^3, ибо $(x^3)' = 3x^2$. Но эта первообразная не единственная, а только одна из многих, так как функции $x^3 - 3$, $x^3 + 2$ и вообще $x^3 + C$, где C — постоянная, тоже являются первообразными для $f(x) = 3x^2$, ибо

$$(x^3 + C)' = 3x^2.$$

Действительно, если на некотором промежутке функция $F(x)$ является первообразной для функции $f(x)$, то для этой последней будет первообразной и любая функция вида

$$\Phi(x) = F(x) + C, \tag{13.1}$$

где C — постоянная. Покажем, что этим выражением исчерпывается все множество первообразных, т. е. что *любую первообразную для* $f(x)$ *можно получить из равенства* (13.1) *при некотором значении* C.

Пусть $F(x)$ и $\Phi(x)$ — две функции, являющиеся первообразными для функции $f(x)$ на некотором промежутке. Тогда на этом промежутке

$$[\Phi(x) - F(x)]' = \Phi'(x) - F'(x) = f(x) - f(x) = 0,$$

откуда $\Phi(x) - F(x) = C$ и тем самым

$$\Phi(x) = F(x) + C.$$

Обращаясь к геометрической интерпретации только что доказанного утверждения, мы можем сказать, что графики всех первообразных для данной функции $f(x)$ представляют собой семейство таких кривых, которые могут быть получены из любой из них путем ее сдвига вдоль оси ординат.

Определение 13.2. *Если* $F(x)$ — *какая-либо первообразная функция для* $f(x)$, *то выражение* $F(x)+C$, *где* C — *произвольное постоянное, называется неопределенным интегралом от функции* $f(x)$ *и обозначается символом*

$$\int f(x)\,dx. \tag{13.2}$$

При этом функция $f(x)$ называется *подынтегральной функцией*, а выражение $f(x)\,dx$ называется *подынтегральным выражением*, знак $\int$ называется *знаком интеграла*.

Согласно определению неопределенного интеграла можно написать:

$$\int f(x)\,dx = F(x) + C. \tag{13.3}$$

Операция нахождения первообразной по данной функции называется *интегрированием*.

Пример 13.1. Найти неопределенный интеграл от функции $y=2x$.

Решение. Для функции $2x$ одной из первообразных является функция x^2. Поэтому

$$\int 2x\,dx = x^2 + C.$$

Геометрически мы имеем семейство одинаковых парабол, симметричных относительно оси Oy и отличающихся друг от друга лишь смещением вдоль оси Oy.

Пример 13.2. Найти $\int 6x^5\,dx$.

Решение. Необходимо найти такую функцию, производная которой равна $6x^5$. Так как $6x^5=(x^6)'$, то

$$\int 6x^5\,dx = x^6 + C.$$

Пример 13.3. Найти $\int \frac{dx}{\cos^2 x}$.

Решение. Находим функцию, производная которой равна $1/\cos^2 x$:

$$(\operatorname{tg} x)' = \frac{1}{\cos^2 x}.$$

Следовательно,

$$\int \frac{dx}{\cos^2 x} = \operatorname{tg} x + C.$$

Пример 13.4. Найти $\int \frac{dx}{x}$.

Решение. Находим функцию, производная которой равна $1/x$:

$$(\ln x)' = 1/x \qquad (\text{где } 0 < x < +\infty).$$

Следовательно, $\int \frac{dx}{x} = \ln x + C$. Заметим, что $(\ln|x|)' = 1/x$, следовательно,

$$\int \frac{dx}{x} = \ln|x| + C,$$

где $x \in (-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$.

Пример 13.5. Проверить дифференцированием равенство

$$\int \frac{x^3\,dx}{\sqrt{3x^4+1}} = \frac{1}{6}\sqrt{3x^4+1} + C.$$

Решение.

$$d\left[\frac{1}{6}\sqrt{3x^4+1}+C\right] = \frac{1}{6}\cdot\frac{1}{2\sqrt{3x^4+1}}\cdot 12x^3\,dx = \frac{x^3\,dx}{\sqrt{3x^4+1}}.$$

Мы получили подынтегральное выражение, следовательно, исходное равенство — верное.

13.1.2. Основные свойства неопределенного интеграла.

I. *Производная неопределенного интеграла равна подынтегральной функции, а дифференциал неопределенного интеграла равен подынтегральному выражению*

$$\left[\int f(x)\,dx\right]' = f(x), \tag{13.4}$$

$$d\int f(x)\,dx = f(x)\,dx. \tag{13.5}$$

Эти свойства непосредственно вытекают из определения неопределенного интеграла.

II. *Неопределенный интеграл от дифференциала функции равен этой функции плюс произвольная постоянная:*

$$\int dF(x) = F(x) + C. \tag{13.6}$$

Для доказательства воспользуемся определением неопределенного интеграла

$$\int f(x)\,dx = F(x) + C,$$

но $dF(x) = f(x)\,dx$, где $f(x) = F'(x)$, тогда

$$\int dF(x) = F(x) + C.$$

III. *Постоянный множитель можно выносить за знак неопределенного интеграла:*

$$\int af(x)\,dx = a\int f(x)\,dx \qquad (a \neq 0). \tag{13.7}$$

Доказательство. Пусть $\int f(x)\,dx = F(x) + C$, где C — произвольная постоянная. Тогда правую часть (13.7) можно записать так:

$$a(F(x) + C) = aF(x) + aC.$$

При $a \neq 0$ выражение aC тоже представляет собой произвольную постоянную. Производная же от $aF(x)$ равна подынтегральной функции из левой части доказываемого равенства

$$[aF(x)]' = a \cdot F'(x) = af(x).$$

Согласно определению неопределенного интеграла свойство III доказано.

IV. *Неопределенный интеграл от суммы двух непрерывных функций равен сумме неопределенных интегралов от этих функций:*

$$\int [f_1(x) + f_2(x)]\,dx = \int f_1(x)\,dx + \int f_2(x)\,dx. \tag{13.8}$$

Доказательство. Пусть $F_1(x)$ — первообразная для $f_1(x)$, а $F_2(x)$ — первообразная для $f_2(x)$. Тогда правую часть (13.8) можо записать в виде

$$F_1(x)+F_2(x)+C_1+C_2,$$

где C_1 и C_2 — произвольные постоянные.

Так как C_1+C_2 тоже будет произвольной постоянной, а производная от $F_1(x)+F_2(x)$ равна подынтегральной функции из левой части (13.8)

$$[F_1(x)+F_2(x)]'=F_1'(x)+F_2'(x)=f_1(x)+f_2(x),$$

то, согласно определению, свойство IV доказано.

13.1.3. Таблица простейших неопределенных интегралов. Пользуясь тем, что интегрирование есть действие, обратное дифференцированию, получим таблицу простейших интегралов.

Учитывая, что если

$$dF(x)=f(x)\,dx,$$

то

$$\int f(x)\,dx=F(x)+C,$$

и обращая формулы дифференцирования, получим:

I. Так как $d(x)=dx$, то $\int dx=x+C$.

II. $d\left(\frac{x^{n+1}}{n+1}\right)=x^n\,dx$, $\int x^n dx=\frac{x^{n+1}}{n+1}+C\,(n\neq-1)$.

III. $d(\ln|x|)=\frac{dx}{x}$, $\int\frac{dx}{x}=\ln|x|+C$.

IV. $d(e^x)=e^x\,dx$, $\int e^x\,dx=e^x+C$.

V. $d\left(\frac{a^x}{\ln a}\right)=a^x\,dx$, $\int a^x dx=\frac{a^x}{\ln a}+C$, где $a\neq1$, $a>0$.

VI. $d(\sin x)=\cos x\,dx$, $\int\cos x\,dx=\sin x+C$.

VII. $d(-\cos x)=\sin x\,dx$, $\int\sin x\,dx=-\cos x+C$.

VIII. $d(\operatorname{tg}x)=\frac{dx}{\cos^2 x}$, $\int\frac{dx}{\cos^2 x}=\operatorname{tg}x+C$.

IX. $d(-\operatorname{ctg}x)=\frac{dx}{\sin^2 x}$, $\int\frac{dx}{\sin^2 x}=-\operatorname{ctg}x+C$.

$$\text{X.}\begin{cases} d(\arcsin x)=\dfrac{dx}{\sqrt{1-x^2}}, \\ d(-\arccos x)=\dfrac{dx}{\sqrt{1-x^2}}, \end{cases} \quad \int\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}=\begin{cases}\arcsin x+C, \\ -\arccos x+C.\end{cases}$$

$$\text{XI.}\begin{cases} d(\operatorname{arctg} x)=\dfrac{dx}{1+x^2}, \\ d(-\operatorname{arctg} x)=\dfrac{dx}{1+x^2}, \end{cases} \quad \int\frac{dx}{1+x^2}=\begin{cases}\operatorname{arctg} x+C, \\ -\operatorname{arcctg} x+C.\end{cases}$$

$$\text{XII.}\begin{cases} d\left(\frac{1}{2}\ln\left|\frac{1+x}{1-x}\right|\right)=\dfrac{dx}{1-x^2}, \quad \displaystyle\int\frac{dx}{1-x^2}=\frac{1}{2}\ln\left|\frac{1+x}{1-x}\right|+C, \\ d\left(\frac{1}{2}\ln\left|\frac{x-1}{x+1}\right|\right)=\dfrac{dx}{x^2-1}, \quad \displaystyle\int\frac{dx}{x^2-1}=\frac{1}{2}\ln\left|\frac{x-1}{x+1}\right|+C. \end{cases}$$

$$\text{XIII.}\ d\left(\ln\left|x+\sqrt{x^2+a}\right|\right)=\frac{dx}{\sqrt{x^2+a}}, \quad \int\frac{dx}{\sqrt{x^2+a}}=\ln\left|x+\sqrt{x^2+a}\right|+C,\ a\neq 0.$$

$$\text{XIV.}\ d\left(\ln\left|\operatorname{tg}\frac{x}{2}\right|\right)=\frac{dx}{\sin x}, \quad \int\frac{dx}{\sin x}=\ln\left|\operatorname{tg}\frac{x}{2}\right|+C.$$

$$\text{XV.}\ d\left(\ln\left|\operatorname{tg}\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{4}\right)\right|\right)=\frac{dx}{\cos x}, \quad \int\frac{dx}{\cos x}=\ln\left|\operatorname{tg}\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{4}\right)\right|+C.$$

$$\text{XVI.}\ d\left(\sqrt{x^2+a}\right)=\frac{xdx}{\sqrt{x^2+a}}, \quad \int\frac{xdx}{\sqrt{x^2+a}}=\sqrt{x^2+a}+C.$$

Интегралы, содержащиеся в этой таблице, называются *табличными*, и учащемуся их необходимо запомнить.

13.1.4. Непосредственное интегрирование. *Непосредственным интегрированием* принято называть вычисление неопределенных интегралов путем приведения их к табличным с применением основных свойств III и IV. Здесь могут представиться следующие случаи:

1) данный интеграл берется непосредственно по формуле соответствующего табличного интеграла;

2) данный интеграл после применения свойств III и IV приводится к одному или нескольким табличным интегралам;

3) данный интеграл после элементарных тождественных преобразований над подынтегральной функцией и применением свойств III и IV приводится к одному или нескольким табличным интегралам.

Поясним сказанное примерами.

Пример 13.6. $\int 4x^2\,dx.$

Решение. Постоянный множитель по свойству III выносим за знак интеграла и, применив формулу II, получим

$$\int 4x^2dx = 4\int x^2dx = 4\cdot\frac{x^3}{3} + C = \frac{4}{3}x^3 + C.$$

Проверка. $d\left(\frac{4}{3}x^3 + C\right) = \frac{4}{3}\cdot 3x^2dx = 4x^2dx.$

Получили подынтегральное выражение, следовательно, интеграл найден правильно.

Пример 13.7. $\int 5\,(x^2 - 2x + 3)\,dx.$

Решение. Применив свойства III и IV и формулы I и II, получим

$$\int 5\,(x^2 - 2x + 3)\,dx = 5\int x^2dx - 10\int x\,dx + 15\int dx =$$

$$= 5\,\frac{x^3}{3} - 10\cdot\frac{x^2}{2} + 15x + C = \frac{5}{3}\,x^3 - 5x^2 + 15x + C.$$

Постоянная интегрирования C равна алгебраической сумме трех постоянных интегрирования

$$C_1 - C_2 + C_3 = C.$$

Пример 13.8. $\int 5\,(3x^2 - 1)^2\,dx.$

Решение. $\int 5\,(3x^2 - 1)^2dx = \int (45x^4 - 30x^2 + 5)\,dx =$

$$= 45\int x^4dx - 30\int x^2dx + 5\int dx = 45\cdot\frac{x^5}{5} - 30\cdot\frac{x^3}{3} + 5x + C =$$

$$= 9\,x^5 - 10x^3 + 5x + C.$$

Пример 13.9. $\int \frac{x^{3/4} + 2x^{2/3} + 3x^{1/2}}{x}\,dx.$

Решение. $\int \frac{x^{3/4} + 2x^{2/3} + 3x^{1/2}}{x}\,dx =$

$$= \int x^{\frac{3}{4}-1}dx + 2\int x^{\frac{2}{3}-1} + 3\int x^{\frac{1}{2}-1}dx = \int x^{-\frac{1}{4}}dx + 2\int x^{-\frac{1}{3}}dx +$$

$$+ 3\int x^{-\frac{1}{2}}\,dx = \frac{x^{-\frac{1}{4}+1}}{-\frac{1}{4}+1} + 2\,\frac{x^{-\frac{1}{3}+1}}{-\frac{1}{3}+1} + 3\,\frac{x^{-\frac{1}{2}+1}}{-\frac{1}{2}+1} + C =$$

$$= \frac{4}{3}\,x^{3/4} + 2\cdot\frac{3}{2}\,x^{2/3} + 3\cdot 2x^{1/2} + C = \frac{4}{3}\,x^{3/4} + 3x^{2/3} + 6x^{1/2} + C.$$

§ 13.2. Простейшие приложения неопределенного интеграла

Отыскание функции по заданной производной или по заданному дифференциалу — задача неопределенная, так как $\int f(x)\,dx$ означает множество первообразных функций вида $y=F(x)+C$, отличающихся друг от друга постоянным слагаемым C; C может принимать любые числовые значения, если на первообразную функцию не наложено никаких начальных условий. Чтобы из множества первообразных функций выделить одну определенную функцию, должны быть заданы начальные условия.

Под начальными условиями понимается задание частных значений x и y для первообразной функции $y=F(x)+C$, по которым находится вполне определенное значение C, удовлетворяющее этим начальным условиям.

13.2.1. Вычисление первообразной функции по заданной ее производной или дифференциалу и частным значениям аргумента и функции. Разберем несколько примеров.

Пример 13.10. Найти функцию, производная которой $y'=4x-3$ и которая при $x=2$ принимает значение $y=6$.

Решение. $y'=4x-3$. Находим интеграл:

$$y=\int(4x-3)\,dx, \qquad y=2x^2-3x+C.$$

Найдем C по заданным значениям $x=2$ и $y=6$. Подставив в функцию эти значения, получим $6=2\cdot2^2-3\cdot2+C$, откуда $C=4$. Функция, удовлетворяющая заданным начальным условиям, примет вид

$$y=2x^2-3x+4.$$

Пример 13.11. Найти $\int(\sin x+\cos x)\,dx$, а затем ту первообразную, которая при $x=\pi/2$ равна 4.

Решение. Находим общий вид первообразной

$$\int(\sin x+\cos x)\,dx=-\cos x+\sin x+C=y.$$

Найдем C по заданным начальным условиям:

$$4=-\cos\frac{\pi}{2}+\sin\frac{\pi}{2}+C,$$

откуда $C=3$, следовательно, искомая первообразная функция

$$y=\sin x-\cos x+3.$$

13.2.2. Составление уравнения линии, проходящей через данную точку, по заданному угловому коэффициенту касательной. Как и в предыдущем пункте, покажем, как решать эту задачу на конкретных примерах.

Пример 13.12. Найти уравнение кривой, проходящей через точку $M(2; -4)$, если угловой коэффициент касательной к кривой в каждой ее точке равен $2x-6$.

Решение. В условии задачи дано: $k=2x-6$, но $k=\frac{dy}{dx}$, следовательно, $\frac{dy}{dx}=2x-6$. Интегрируем:

$$y=\int(2x-6)\,dx, \qquad y=x^2-6x+C.$$

Подставив начальные данные, найдем C: $-4=2^2-6\cdot 2+C$, $C=4$. Следовательно, уравнение искомой кривой

$$y=x^2-6x+4.$$

Найденная кривая — парабола.

Пример 13.13. Найти уравнение кривой, проходящей через точку $(0; 1)$, у которой касательная в любой точке кривой имеет угловой коэффициент, равный удвоенной ординате точки касания.

Решение. По условию

$$k=\frac{dy}{dx}=2y, \quad \text{откуда} \quad \frac{dx}{dy}=\frac{1}{2y}.$$

Будем считать x функцией, а y независимой переменной. Интегрируя это выражение, получим

$$x=\frac{1}{2}\ln|y|+C',$$

или (так как начальным условиям удовлетворяет лишь кривая, у которой $y>0$)

$$\ln y=2x+C$$

(где $C=-2C'$ — произвольное постоянное). Из начальных условий найдем C: $\ln 1=2\cdot 0+C$, $C=0$. Следовательно, уравнение кривой $\ln y=2x$ или $y=e^{2x}$.

13.2.3. Составление уравнения движения материальной точки. 1°. Нахождение закона движения материальной точки по скорости ее движения и по начальным условиям.

Пример 13.14. Скорость прямолинейного движения материальной точки $v=3t^2+2$. Найти закон движения этой точки, т. е. $s=f(t)$, если за время $t=2$ с точка прошла путь 40 м.

Решение. Так как

$$v=\frac{ds}{dt}=3t^2+2,$$

то

$$s=\int(3t^2+2)\,dt, \qquad s=t^3+2t+C.$$

По начальным условиям найдем C:

$$40=2^3+2\cdot 2+C, \qquad C=28.$$

Закон движения точки будет иметь вид

$$s=t^3+2t+28.$$

Пример 13.15. Скорость прямолинейного движения точки задана формулой $v=4\cos t$. Составить закон движения этой точки, если в момент $t=\frac{\pi}{6}$ с точка находилась на расстоянии $s=6$ м от начала отсчета.

Решение. Так как $v=2\cos t$, то $\frac{ds}{dt}=2\cos t$, откуда

$$s=2\sin t+C.$$

По начальным условиям найдем C:

$$6=2\sin\frac{\pi}{6}+C, \qquad C=5.$$

Закон движения точки будет иметь вид

$$s=2\sin t+5.$$

2°. Нахождение закона движения материальной точки по ее ускорению и по начальным условиям.

Пример 13.16. Тело (рассматриваемое как материальная точка) брошено вертикально вверх с начальной скоростью v_0. Найти закон движения этого тела (сопротивлением воздуха пренебречь).

Решение. Примем направление по вертикали вверх за положительное, тогда ускорение силы тяжести, как направленное вниз, примем за отрицательное. Имеем $a=\frac{dv}{dt}=-g$, откуда

$$v=-g\int dt, \qquad v=-gt+C_1.$$

По начальным условиям $t=0$, $v=v_0$ найдем C_1:

$$v_0=-g\cdot 0+C_1, \qquad C_1=v_0.$$

Следовательно, скорость этого тела определяется по формуле

$$v=-gt+v_0.$$

Находим закон движения тела:

$$v=\frac{ds}{dt}, \qquad \text{где} \quad v=-gt+v_0;$$

тогда

$$\frac{ds}{dt}=-gt+v_0.$$

Интегрируя это выражение, получим

$$s=\int(-gt+v_0)\,dt=-\frac{gt^2}{2}+v_0t+C_2.$$

По начальным условиям $t=0$, $s=0$ находим C_2:

$$0=-\frac{g\cdot 0}{2}+v_0\cdot 0+C_2, \qquad C_2=0.$$

Следовательно, закон движения тела будет

$$s=-\frac{gt^2}{2}+v_0t,$$

или

$$s=v_0t-\frac{gt^2}{2}.$$

Пример 13.17. Точка движется прямолинейно с ускорением $a=6t+12$. В момент времени $t=0$ (начало отсчета) начальная скорость $v_0=6$ м/с; расстояние от начала отсчета $s_0=8$ м. Найти: 1) скорость и закон движения точки, 2) величину ускорения, скорости и пути в момент $t=2$ с.

Решение. 1) Находим скорость движения точки: $a=\frac{dv}{dt}$, но $a=6t+12$, тогда $\frac{dv}{dt}=6t+12$. Интегрируем:

$$v=\int(6t+12)\,dt, \qquad v=3t^2+12t+C_1.$$

По начальным условиям $t=0$, $v_0=6$ м/с найдем C_0: $6=3\cdot 0^2+12\cdot 0+C_1$, $C_1=6$. Следовательно, скорость движения точки $v=3t^2+12t+6$.

Находим закон движения точки: $v=\frac{ds}{dt}$, но $v=3t^2+12t+6$, тогда $\frac{ds}{dt}=3t^2+12t+6$. Интегрируем:

$$s=\int(3t^2+12t+6)\,dt, \qquad \text{т. е.} \quad s=t^3+6t^2+6t+C_2.$$

По начальным условиям $t=0$, $s_0=8$ м найдем C_2:

$$8=0^3+6\cdot 0^2+6\cdot 0+C_2, \qquad C_2=8.$$

Имеем закон движения точки: $s=t^3+6t^2+6t+8$.

2) Найдем a, v и s при $t=2$с:

$$a=6\cdot 2+12=24 \text{ м/с}^2,$$

$$v=3\cdot 2^2+12\cdot 2+6=42 \text{ м/с},$$

$$s=2^3+6\cdot 2^2+6\cdot 2+8=52 \text{ м}.$$

§ 13.3. Методы интегрирования

13.3.1. Интегрирование методом замены переменной (способом подстановки). Рассмотрим один из сильнейших приемов интегрирования функций — метод замены переменной или подстановки. В основе его лежит следующая теорема о замене переменной.

Теорема 13.1. *Если* $\int f(u)\,du$ *существует, а* $u=\varphi(x)$, *где* $f(u)$, $\varphi(x)$ *и* $\varphi'(x)$ *непрерывны, то*

$$\int f(u)\,du=\int f[\varphi(x)]\,\varphi'(x)\,dx. \qquad (13.9)$$

Доказательство. Обозначим через $F(u)$ какую-нибудь первообразную для $f(u)$. Тогда левая часть равенства (13.9) может быть записана в виде $F(u)+C$. Покажем, что $F(u)$, рассматриваемая как функция от x, является первообразной для $f[\varphi(x)]\,\varphi'(x)$:

$$\frac{d}{dx}F(u)=F'(u)\cdot u'_x=f[\varphi(x)]\,\varphi'(x).$$

Следовательно, согласно определению неопределенного интеграла, формула (13.9) доказана.

В полученном после интегрирования в правой части (13.9) выражении надо перейти снова к аргументу u. Это всегда можно сделать, если для функции $u=\varphi(x)$ в рассматриваемой области существует обратная функция; например, если функция $u=\varphi(x)$ монотонная в рассматриваемой области.

Часто для вычисления интеграла

$$\int f(u)\,du$$

удобно в качестве нового аргумента x взять некоторую функцию переменного u, положив

$$\psi(u)=x.$$

Рассмотрим примеры.

Пример 13.18. Найти $\int (5x+3)^5\,dx$.

Решение. Введем подстановку $5x+3=u$. Дифференциал этого выражения $5dx=du$, откуда $dx=\frac{1}{5}\,du$. Подставив вместо $5x+3$ и dx их значения в данный интеграл, получим

$$\int (5x+3)^5\,dx=\frac{1}{5}\int u^5\,du=\frac{1}{5}\cdot\frac{u^6}{6}+C=\frac{1}{30}u^6+C.$$

Заменив u его выражением через x, имеем

$$\int (5x+3)^5\,dx=\frac{1}{30}(5x+3)^6+C.$$

Проверка.

$$d\left[\frac{1}{30}(5x+3)^6+C\right]=\frac{6}{30}(5x+3)^5\,5dx=(5x+3)^5\,dx.$$

Интеграл найден правильно.

Пример 13.19. Найти $\int \frac{x^3\,dx}{(6x^4+5)^5}$.

Решение. Полагаем $6x^4+5=u$, тогда $24x^3\,dx=du$, $x^3\,dx=\frac{1}{24}\,du$. Следовательно,

$$\int \frac{x^3\,dx}{(6x^4+5)^5}=\frac{1}{24}\int \frac{du}{u^5}=\frac{1}{24}\int u^{-5}\,du=\frac{1}{24}\cdot\frac{u^{-4}}{-4}+C=-\frac{1}{96u^4}+C=$$
$$=-\frac{1}{96\,(6x^4+5)^4}+C.$$

Проверка.

$$d\left[-\frac{1}{96\,(6x^4+5)^4}+C\right]=d\left[-\frac{1}{96}(6x^4+5)^{-4}+C\right]=$$
$$=\frac{4}{96}(6x^4+5)^{-5}\,24x^3\,dx=\frac{x^3\,dx}{(6x^4+5)^5}.$$

Пример 13.20. Найти $\int \sqrt{2\cos x-1}\cdot\sin x\,dx$.

Решение. Полагаем $2\cos x-1=u$, тогда $-2\sin x\,dx=du$, или $\sin x\,dx=-\frac{1}{2}\,du$, поэтому

$$\int \sqrt{2\cos x-1}\,\sin x\,dx=-\frac{1}{2}\int \sqrt{u}\,du=-\frac{1}{2}\int u^{1/2}\,du=$$
$$=-\frac{1}{2}\cdot\frac{2}{3}u^{3/2}+C=-\frac{1}{3}u^{3/2}+C=-\frac{1}{3}\sqrt{(2\cos x-1)^3}+C.$$

Пример 13.21. Найти $\int \frac{dx}{\sin x}$.

Решение. Из тригонометрии известно, что $\sin x=\sin\left(2\cdot\frac{x}{2}\right)=$ $=2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}$, тогда

$$\int \frac{dx}{\sin x}=\frac{1}{2}\int \frac{dx}{\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}}.$$

Разделив и умножив знаменатель на $\cos(x/2)$, получим

$$\int \frac{dx}{\sin x}=\frac{1}{2}\int \frac{dx}{\operatorname{tg}\frac{x}{2}\cos^2\frac{x}{2}}.$$

Положим $\operatorname{tg}(x/2)=u$, тогда $\frac{1}{\cos^2(x/2)}\cdot\frac{1}{2}dx=du$, или $\frac{dx}{\cos^2(x/2)}=2du$. Имеем

$$\int \frac{dx}{\sin x}=\int \frac{du}{u}=\ln|u|+C=\ln\left|\operatorname{tg}\frac{x}{2}\right|+C.$$

Пример 13.22. Найти $\int \frac{dx}{\cos x}$.

Решение. Так как $\int \frac{dx}{\cos x} = \int \frac{dx}{\sin\left(\frac{\pi}{2}+x\right)}$, то положив $\frac{\pi}{2}+x=u$ и, следовательно, $dx=du$, получим

$$\int \frac{dx}{\cos x} = \int \frac{du}{\sin u} = \ln\left|\operatorname{tg}\frac{u}{2}\right| + C = \ln\left|\operatorname{tg}\frac{\frac{\pi}{2}+x}{2}\right| + C =$$
$$= \ln\left|\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4}+\frac{x}{2}\right)\right| + C.$$

Пример 13.23. Найти $\int \frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}}$, $a > 0$.

Решение. Так как $\int \frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}} = \int \frac{dx}{a\sqrt{1-(x/a)^2}}$, то положив $x/a=u$, $\frac{dx}{a}=du$, находим интеграл

$$\int \frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}} = \int \frac{du}{\sqrt{1-u^2}} = \arcsin u + C = \arcsin\frac{x}{a} + C.$$

Пример 13.24. Найти $\int \frac{dx}{a^2+x^2}$ $(a \neq 0)$.

Решение. Так как $\int \frac{dx}{a^2+x^2} = \frac{1}{a^2}\int \frac{dx}{1+(x/a)^2}$, то, положив $x/a=u$ и, следовательно, $dx=a\,du$, находим интеграл

$$\int \frac{dx}{a^2+x^2} = \frac{1}{a}\int \frac{du}{1+u^2} = \frac{1}{a}\operatorname{arctg} u + C = \frac{1}{a}\operatorname{arctg}\frac{x}{a} + C.$$

Во многих случаях оказывается удобным не вводить явным образом обозначения для новой переменной интегрирования.

Пример 13.25.

$$\int \frac{\ln x}{x}\,dx = \int \ln x \cdot d(\ln x) = \frac{\ln^2 x}{2} + C.$$

Пример 13.26.

$$\int \sin^{11} x \cos x\,dx = \int \sin^{11} x\,d(\sin x) = \frac{\sin^{12} x}{12} + C.$$

Пример 13.27.

$$\int \frac{e^x}{e^x+1}\,dx = \int \frac{d(e^x+1)}{e^x+1} = \ln(e^x+1) + C.$$

Наиболее часто используются такие соотношения:

1°. $dx = d(x+b)$. 2°. $k\,dx = d(kx+b)$.

3°. $x\,dx = \frac{1}{2}d(x^2)$. 4°. $x^n\,dx = \frac{1}{n+1}d(x^{n+1})$ $(n \neq -1)$.

5°. $\frac{dx}{x} = d(\ln x)$. 6°. $e^{kx}\,dx = \frac{1}{k}d(e^{kx})$.

7°. $\cos x \cdot dx = d(\sin x)$. 8°. $\sin x\,dx = -d(\cos x)$.

9°. $\frac{dx}{\cos^2 x} = d(\operatorname{tg} x)$. 10°. $\frac{dx}{\sin^2 x} = -d(\operatorname{ctg} x)$.

Пример 13.28.

$$\int \frac{dx}{3x+5} = \frac{1}{3}\int \frac{d(3x+5)}{3x+5} = \frac{1}{3}\ln|3x+5| + C.$$

Пример 13.29.

$$\int \frac{x\,dx}{x^4+1} = \frac{1}{2}\int \frac{d(x^2)}{(x^2)^2+1} = \frac{1}{2}\operatorname{arctg} x^2 + C.$$

Пример 13.30.

$$\int \frac{\cos x\,dx}{(5\sin x+2)^2} = \frac{1}{5}\int \frac{d(5\sin x+2)}{(5\sin x+2)^2} = -\frac{1}{5}\cdot\frac{1}{5\sin x+2} + C.$$

Пример 13.31.

$$\int 3^{x^2}\cdot x\,dx = \frac{1}{2}\int 3^{x^2}\cdot d(x^2) = \frac{3^{x^2}}{2\ln 3} + C.$$

Пример 13.32.

$$\int \operatorname{tg} x\,dx = \int \frac{\sin x}{\cos x}dx = -\int \frac{d(\cos x)}{\cos x} = -\ln|\cos x| + C.$$

Пример 13.33.

$$\int \frac{\sin^2 x}{\cos^4 x}dx = \int \operatorname{tg}^2 x\,d(\operatorname{tg} x) = \frac{1}{3}\operatorname{tg}^3 x + C.$$

При помощи подстановок $kx = u$ и $\frac{m}{k}x = u$ нетрудно получить следующие результаты:

1°. $\int e^{kx} + dx = \frac{1}{k}e^{kx} + C$. 2°. $\int a^{kx}dx = \frac{a^{kx}}{k\ln a} + C$.

3°. $\int \sin kx\,dx = -\frac{1}{k}\cos kx + C$.

4°. $\int \cos kx\,dx = \frac{1}{k}\sin kx + C$.

5.° $\int \frac{dx}{\cos^2 kx} = \frac{1}{k}\operatorname{tg} kx + C$. 6°. $\int \frac{dx}{\sin^2 kx} = -\frac{1}{k}\operatorname{ctg} kx + C$.

$7^\circ.\ \int \frac{dx}{\sqrt{k^2-m^2x^2}} = \frac{1}{m} \arcsin \frac{mx}{k} + C.$

$8^\circ.\ \int \frac{dx}{k^2+m^2x^2} = \frac{1}{km} \operatorname{arctg} \frac{mx}{k} + C.$

Применение этих формул позволяет дать более короткую запись решения.

Пример 13.34. Найти $\int \sin \frac{3}{4} x\,dx.$

Решение. По формуле 3° получим

$$\int \sin \frac{3}{4} x\,dx = -\frac{4}{3} \cos \frac{3}{4} x + C.$$

Пример 13.35. Найти $\int \frac{dx}{25+16x^2}$

Решение. По формуле 8° получим

$$\int \frac{dx}{25+16x^2} = \frac{1}{5\cdot 4} \operatorname{arctg} \frac{4}{5} x + C = \frac{1}{20} \operatorname{arctg} \frac{4}{5} x + C.$$

В ряде случаев подстановки имеют более сложную форму. Приведем примеры.

Пример 13.36. Найти $\int \frac{dx}{\sqrt{x}+1}$.

Решение. Сделаем подстановку $x=u^2$, откуда $dx=2u\,du$. Тогда

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x}+1} = 2\int \frac{u\,du}{u+1}.$$

К числителю прибавим и отнимем единицу и заменим интеграл суммой интегралов, тогда

$$2\int \frac{u}{u+1}\,du = 2\int \frac{u+1-1}{u+1}\,du = 2\int du - 2\int \frac{du}{u+1} =$$
$$= 2u - 2\ln|u+1| + C = 2\sqrt{x} - 2\ln|\sqrt{x}+1| + C.$$

Пример 13.37. Найти $\int x\sqrt{a-x}\,dx.$

Решение. Положив $\sqrt{a-x}=u$, или $x=a-u^2$ и, следовательно, $dx=-2u\,du$, получим

$$\int x\sqrt{a-x}\,dx = -2\int (a-u^2)\,u^2\,du = -2a\int u^2\,du + 2\int u^4\,du =$$
$$= -2a\frac{u^3}{3} + 2\frac{u^5}{5} + C = -\frac{2a}{3}(\sqrt{a-x})^3 + \frac{2}{5}(\sqrt{a-x})^5 + C.$$

Выполнив преобразования, получим

$$\int x\sqrt{a-x}\,dx=\frac{2}{15}(3x^2-ax-2a^2)\sqrt{a-x}+C.$$

При вычислении некоторых интегралов рекомендуется конкретная подстановка, которая особенно удобна именно в данном случае. К таким подстановкам относятся тригонометрические подстановки

1) $x=a\sin u$ или $x=a\cos u$ в интегралах, содержащих $\sqrt{a^2-x^2}$;

2) $x=a\,\mathrm{tg}\,u$ или $x=a\,\mathrm{ctg}\,x$ в интегралах, содержащих $\sqrt{a^2+x^2}$;

3) $x=\dfrac{a}{\sin u}$ или $x=\dfrac{a}{\cos u}$ в интегралах, содержащих $\sqrt{x^2-a^2}$.

Пример 13.38. Найти $\int\sqrt{a^2-x^2}\,dx$ $(a>0)$.

Решение. Так как $-a\leqslant x\leqslant a$, то воспользуемся подстановкой $x=a\sin u$, где $-\pi/2\leqslant u\leqslant\pi/2$, откуда $dx=a\cos u\,du$. Тогда имеем

$$\int\sqrt{a^2-x^2}\,dx=\int\sqrt{a^2-a^2\sin^2 u}\,a\cos u\,du=$$

$$=a\int\sqrt{a^2(1-\sin^2 u)}\cos u\,du=a^2\int\cos^2 u\,du$$

(в указанных границах изменения для u имеем $\sqrt{\cos^2 u}=|\cos u|=\cos u$. Из тригонометрии известно, что $\cos^2 u=\dfrac{1+\cos 2u}{2}$; тогда

$$a^2\int\cos^2 u\,du=a^2\int\frac{1+\cos 2u}{2}\,du=\frac{a^2}{2}\int du+\frac{a^2}{2}\int\cos 2u\,du=$$

$$=\frac{a^2}{2}u+\frac{a^2}{2}\frac{1}{2}\sin 2u+C=\frac{a^2}{2}\left(u+\frac{1}{2}\sin 2u\right)+C.$$

В этом выражении необходимо перейти к данному в условии аргументу x. Из соотношения $x=a\sin u$ имеем $\sin u=x/a$, тогда $u=\arcsin(x/a)$, $\sin 2u=2\sin u\cos u$, но $\cos u=\sqrt{1-(x/a)^2}=\dfrac{1}{a}\sqrt{a^2-x^2}$, тогда $\sin 2u=2\dfrac{x}{a}\dfrac{1}{a}\sqrt{a^2-x^2}=\dfrac{2x}{a^2}\sqrt{a^2-x^2}$. Окончательно получим

$$\int\sqrt{a^2-x^2}\,dx=\frac{a^2}{2}\left(\arcsin\frac{x}{a}+\frac{1}{2}\frac{2x}{a^2}\sqrt{a^2-x^2}\right)+C=$$

$$=\frac{a^2}{2}\arcsin\frac{x}{a}+\frac{x}{2}\sqrt{a^2-x^2}+C.$$

Пример 13.39. Найти $\int\dfrac{dx}{\sqrt{a^2+x^2}}$ $(a>0)$.

Решение. Здесь $x \in (-\infty, +\infty)$. Воспользуемся подстановкой $x = a \operatorname{tg} u$, где $-\pi/2 < u < \pi/2$, тогда $dx = \frac{a\,du}{\cos^2 u}$ и, следовательно,

$$\int \frac{dx}{\sqrt{a^2+x^2}} = a \int \frac{du}{\cos^2 u \sqrt{a^2+a^2 \operatorname{tg}^2 u}} = \int \frac{du}{\cos^2 u \sqrt{1+\operatorname{tg}^2 u}} =$$

$$= \int \frac{du}{\cos^2 u \sqrt{1/\cos^2 u}} = \int \frac{du}{\cos u} \, {}^{1)} = \ln \left| \operatorname{tg}\left(\frac{u}{2}+\frac{\pi}{4}\right) \right| + C_1$$

(см. пример 13.22). Перейдем к данному в условии аргументу x:

$$\operatorname{tg}\left(\frac{u}{2}+\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\operatorname{tg}\frac{u}{2}+\operatorname{tg}\frac{\pi}{4}}{1-\operatorname{tg}\frac{u}{2}\operatorname{tg}\frac{\pi}{4}} = \frac{\operatorname{tg}\frac{u}{2}+1}{1-\operatorname{tg}\frac{u}{2}} =$$

$$= \frac{\sin\frac{u}{2}+\cos\frac{u}{2}}{\cos\frac{u}{2}-\sin\frac{u}{2}} = \frac{\left(\sin\frac{u}{2}+\cos\frac{u}{2}\right)\left(\cos\frac{u}{2}+\sin\frac{u}{2}\right)}{\left(\cos\frac{u}{2}-\sin\frac{u}{2}\right)\left(\cos\frac{u}{2}+\sin\frac{u}{2}\right)} =$$

$$= \frac{\sin^2\frac{u}{2}+2\sin\frac{u}{2}\cos\frac{u}{2}+\cos^2\frac{u}{2}}{\cos^2\frac{u}{2}-\sin^2\frac{u}{2}} = \frac{1+\sin\left(2\frac{u}{2}\right)}{\cos\left(2\frac{u}{2}\right)} =$$

$$= \frac{1+\sin u}{\cos u} = \frac{1}{\cos u} + \operatorname{tg} u,$$

но

$$\operatorname{tg} u = \frac{x}{a}, \quad \text{а} \quad \frac{1}{\cos u} = \sqrt{1+\operatorname{tg}^2 u} = \sqrt{1+\frac{x^2}{a^2}} = \frac{1}{a}\sqrt{a^2+x^2},$$

следовательно,

$$\frac{1}{\cos u} + \operatorname{tg} u = \frac{1}{a}\sqrt{a^2+x^2} + \frac{x}{a} = \frac{1}{a}\left(\sqrt{a^2+x^2}+x\right).$$

Тогда

$$\int \frac{dx}{\sqrt{a^2+x^2}} = \ln\left|\frac{\sqrt{a^2+x^2}+x}{a}\right| + C_1 =$$

$$= \ln\left|\sqrt{a^2+x^2}+x\right| - \ln a + C_1 = \ln\left|\sqrt{a^2+x^2}+x\right| + C,$$

где $-\ln a + C_1 = C$.

Пример 13.40. Найти $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2-a^2}}$ $(a > 0)$.

---

1) Так как $-\pi/2 < u < \pi/2$, то $\sqrt{\cos^2 u} = |\cos u| = \cos u$.

Решение. Сделаем подстановку $x=\frac{a}{\cos u}$, где $u\in(0, \pi/2)\cup$ $\cup(\pi/2, \pi)$; тогда $dx=\frac{a\sin u\,du}{\cos^2 u}$. Следовательно,

$$\int\frac{dx}{\sqrt{x^2-a^2}}=a\int\frac{\sin u\,du}{\sqrt{\frac{a^2}{\cos^2 u}-a^2\cdot\cos^2 u}}=\int\frac{\sin u\,du}{\frac{\sqrt{\sin^2 u}}{|\cos u|}\cos^2 u}=$$

$$=\int\frac{du}{|\cos u|}=\pm\ln\left|\operatorname{tg}\left(\frac{u}{2}+\frac{\pi}{4}\right)\right|+C_1.$$

Так как (см. пример 13.22) в полученном выражении перед логарифмом надо взять знак $+$, если $u\in(0, \pi/2)$, и знак $-$, если $u\in(\pi/2, \pi)$, и так как $\cos u=\frac{a}{x}$, то $\frac{1}{\cos^2 u}=1+\operatorname{tg}^2 u$ и

$$\operatorname{tg} u=\pm\sqrt{\frac{1}{\cos^2 u}-1}=\pm\sqrt{\frac{x^2}{a^2}-1}=\pm\frac{1}{a}\sqrt{x^2-a^2}.$$

Следовательно,

$$\frac{1}{\cos u}+\operatorname{tg} u=\frac{x}{a}\pm\frac{1}{a}\sqrt{x^2-a^2}=\frac{1}{a}(x\pm\sqrt{x^2-a^2}).$$

Тогда

$$\int\frac{dx}{\sqrt{x^2-a^2}}=\pm\ln\left|\frac{x\pm\sqrt{x^2-a^2}}{a}\right|+C_1=\ln\left|\frac{x+\sqrt{x^2-a^2}}{a}\right|+C_1=$$

$$=\ln|x+\sqrt{x^2-a^2}|-\ln a+C_1=\ln|x+\sqrt{x^2-a^2}|+C,$$

где $C=-\ln a+C_1$. Здесь мы воспользовались тождеством $-\ln\left|\frac{x-\sqrt{x^2-a^2}}{a}\right|=\ln\left|\frac{x+\sqrt{x^2-a^2}}{a}\right|$.

В этом примере можно было применить и подстановку $x=\frac{a}{\sin u}$. Предоставляем это проделать учащемуся самостоятельно.

Пример 13.41. Найти $\int\cos^4 x\,dx$.

Решение.

$$\int\cos^4 x\,dx=\int(\cos^2 x)^2\,dx=\int\left(\frac{1+\cos 2x}{2}\right)^2 dx=$$

$$=\frac{1}{4}\int dx+\frac{1}{2}\int\cos 2x\,dx+\frac{1}{4}\int\cos^2 2x\,dx.$$

В последнем интеграле заменим $\cos^2 2x=\frac{1+\cos 4x}{2}$, тогда

$$\int\cos^4 x\,dx=\frac{1}{4}x+\frac{1}{4}\sin 2x+\frac{1}{8}\int(1+\cos 4x)\,dx=$$

$$=\frac{1}{4}x+\frac{1}{4}\sin 2x+\frac{1}{8}x+\frac{1}{32}\sin 4x+C=$$

$$=\frac{3}{8}x+\frac{1}{4}\sin 2x+\frac{1}{32}\sin 4x+C.$$

Пример 13.42. Найти $\int \operatorname{tg}^2 x\,dx$.

Решение. Так как $\operatorname{tg}^2 x=\frac{1}{\cos^2 x}-1$, то

$$\int \operatorname{tg}^2 x\,dx=\int\left(\frac{1}{\cos^2 x}-1\right)dx=\int\frac{dx}{\cos^2 x}-\int dx=\operatorname{tg} x-x+C.$$

Пример 13.43. Найти $\int \operatorname{tg}^4 x\,dx$.

Решение. Воспользуемся тем же тождеством $\operatorname{tg}^2 x=\frac{1}{\cos^2 x}-1$; тогда

$$\int \operatorname{tg}^4 x\,dx=\int \operatorname{tg}^2 x\left(\frac{1}{\cos^2 x}-1\right)dx=\int\frac{\operatorname{tg}^2 x\,dx}{\cos^2 x}-\int \operatorname{tg}^2 x\,dx.$$

Вычислим первый интеграл. Положим $\operatorname{tg} x=u$, откуда $\frac{dx}{\cos^2 x}=du$ и, следовательно,

$$\int u^2\,du=\frac{u^3}{3}+C=\frac{\operatorname{tg}^3 x}{3}+C.$$

Использовав решение примера 13.42, получим окончательно

$$\int \operatorname{tg}^4 x\,dx=\frac{\operatorname{tg}^3 x}{3}-\operatorname{tg} x+x+C.$$

Пример 13.44. Найти $\int \sin^3 x\,dx$.

Решение.

$$\int \sin^3 x\,dx=\int \sin^2 x\sin x\,dx=\int(1-\cos^2 x)\sin x\,dx=$$
$$=\int \sin x\,dx-\int \cos^2 x\sin x\,dx.$$

Вычислим второй интеграл. Положим $\cos x=u$, тогда $-\sin x\,dx=$ $=du$, следовательно,

$$\int \cos^2 x\sin x\,dx=-\int u^2\,du=-\frac{u^3}{3}+C=-\frac{\cos^3 x}{3}+C.$$

Имеем

$$\int \sin^3 x\,dx=-\cos x+\frac{\cos^3 x}{3}+C.$$

Пример 13.45. Найти $\int \sin^5 x\,dx$.

Решение.

$$\int \sin^5 x\,dx=\int \sin^4 x\sin x\,dx=\int(\sin^2 x)^2\sin x\,dx=$$
$$=\int(1-\cos^2 x)^2\sin x\,dx=\int(1-2\cos^2 x+\cos^4 x)\sin x\,dx.$$

Положим $\cos x = u$, откуда $-\sin x\,dx = du$, тогда имеем

$$\int \sin^5 x\,dx = -\int (1-2u^2+u^4)\,du = -u+\frac{2}{3}u^3-\frac{1}{5}u^5+C =$$
$$= -\cos x+\frac{2}{3}\cos^3 x-\frac{1}{5}\cos^5 x+C.$$

При вычислении интегралов вида

$$\int \sin ax\cos bx\,dx, \quad \int \sin ax\sin bx\,dx \quad \text{и} \quad \int \cos ax\cos bx\,dx$$

применяются формулы:

$$\sin\alpha\cos\beta = \frac{1}{2}[\sin(\alpha-\beta)+\sin(\alpha+\beta)],$$
$$\sin\alpha\sin\beta = \frac{1}{2}[\cos(\alpha-\beta)-\cos(\alpha+\beta)].$$
$$\cos\alpha\cos\beta = \frac{1}{2}[\cos(\alpha-\beta)+\cos(\alpha+\beta)].$$

Пример 13.46. Найти $\int \sin 7x\cos 3x\,dx$.

Решение.

$$\int \sin 7x\cos 3x\,dx = \frac{1}{2}\int (\sin 4x+\sin 10x)\,dx =$$
$$= \frac{1}{2}\int \sin 4x\,dx+\frac{1}{2}\int \sin 10x\,dx = -\frac{1}{8}\cos 4x-\frac{1}{20}\cos 10x+C.$$

Пример 13.47. Найти $\int \sin x\sin 3x\,dx$.

Решение

$$\int \sin x\sin 3x\,dx = \frac{1}{2}\int (\cos 2x-\cos 4x)\,dx = \frac{1}{4}\sin 2x-\frac{1}{8}\sin 4x+C.$$

Пример 13.48. Найти $\int \cos 5x\cos 3x\,dx$.

Решение.

$$\int \cos 5x\cos 3x\,dx = \frac{1}{2}\int (\cos 2x+\cos 8x)\,dx = \frac{1}{4}\sin 2x+\frac{1}{16}\sin 8x+C.$$

13.3.2. Метод интегрирования по частям. Пусть u и v — дифференцируемые функции от x. Применив формулу дифференциала произведения, получим

$$d(uv) = u\,dv+v\,du \Rightarrow uv = \int u\,dv+\int v\,du,$$

или

$$\int u\,dv = uv-\int v\,du. \qquad (13.10)$$

Выражение (13.10) называется *формулой интегрирования по частям.*

Из формулы (13.10) следует, что интеграл $\int u\,dv$ приводится к интегралу $\int v\,du$, который может оказаться более простым, чем данный, или даже табличным.

Рассмотрим примеры интегрирования по частям.

Пример 13.49. Найти $\int xe^x\,dx$.

Решение. В этом примере множителем, упрощающимся от дифференцирования, является x. Положим $u=x$, $dv=e^x\,dx$, тогда $du=dx$, $v=\int e^x\,dx=e^x$. Когда применяют интегрирование по частям и по dv находят v, то произвольной постоянной не вводят, из множества первообразных функций для v' берут какую-нибудь одну, наиболее удобную. Подставив в формулу (13.10) найденные выражения, получим

$$\int xe^x\,dx=xe^x-\int e^x\,dx=xe^x-e^x+C.$$

Пример 13.50. Найти $\int x^2\cos x\,dx$.

Решение. Положим $x^2=u$, $\cos x\,dx=dv$; тогда $2x\,dx=du$, $v=\sin x$. Подставив в формулу (13.10) найденные выражения, получим

$$\int x^2\cos x\,dx=x^2\sin x-2\int x\sin x\,dx.$$

Интеграл $\int x\sin x\,dx$ проще исходного, так как вместо множителя x^2 появился множитель x. Снова применяем интегрирование по частям. Положим $x=u$, $\sin x\,dx=dv$, тогда $dx=du$, $v=-\cos x$, откуда имеем

$$\int x\sin x\,dx=-x\cos x+\int\cos x\,dx=-x\cos x+\sin x+C_1.$$

Следовательно,

$$\int x^2\cos x\,dx=x^2\sin x-2(-x\cos x+\sin x)+C=$$
$$=x^2\sin x+2x\cos x-2\sin x+C.$$

Укажем несколько типов интегралов, вычислять которые удобно интегрированием по частям.

1) $\int x^ne^x\,dx$, 2) $\int x^n\sin x\,dx$, 3) $\int x^n\cos x\,dx$.

В этих интегралах за u принимаем x^n, что приведет к интегралу сходного типа, но уменьшит показатель степени x на единицу. После n-кратного применения этого приема получим один из табличных интегралов:

$$\int e^x\,dx,\quad \int\sin x\,dx \quad\text{и}\quad \int\cos x\,dx.$$

4) $\int x^n\ln x\,dx$, за u принимаем $\ln x$,

5) $\int x^n \operatorname{arctg} x\,dx$, за u принимаем $\operatorname{arctg} x$,

6) $\int x^n \arcsin x\,dx$, за u принимаем $\arcsin x$.

Пример 13.51. Найти $\int x \operatorname{arctg} x\,dx$.

Решение. Положим $u = \operatorname{arctg} x$, $x\,dx = dv$; тогда $du = \frac{1}{1+x^2}\,dx$, $v = \frac{x^2+1}{2}$. Подставив в формулу (13.10) найденные выражения, получим

$$\int x \operatorname{arctg} x\,dx = \frac{x^2+1}{2} \operatorname{arctg} x - \frac{1}{2}\int \frac{x^2+1}{x^2+1}\,dx =$$
$$= \frac{x^2+1}{2} \operatorname{arctg} x - \frac{x}{2} + C.$$

Пример 13.52. Найти $\int \operatorname{arctg} x\,dx$.

Решение. Положим $u = \operatorname{arctg} x$, $dx = dv$; тогда $du = \frac{1}{1+x^2}\,dx$, $v = x$. Подставив найденные выражения в формулу (13.10), получим

$$\int \operatorname{arctg} x\,dx = x \operatorname{arctg} x - \int \frac{x\,dx}{1+x^2},$$

но

$$\int \frac{x\,dx}{1+x^2} = \frac{1}{2}\int \frac{d(1+x^2)}{1+x^2} = \frac{1}{2}\ln(1+x^2) + C,$$

следовательно,

$$\int \operatorname{arctg} x\,dx = x \operatorname{arctg} x - \frac{1}{2}\ln(1+x^2) + C.$$

Пример 13.53. Найти $\int \arcsin x\,dx$.

Решение. Положим $u = \arcsin x$, $dx = dv$; тогда $du = \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$, $x = v$. Подставив в формулу (13.10) найденные выражения, получим

$$\int \arcsin x\,dx = x \arcsin x - \int \frac{x\,dx}{\sqrt{1-x^2}},$$

но

$$\int \frac{x\,dx}{\sqrt{1-x^2}} = -\frac{1}{2}\int \frac{d(1-x^2)}{\sqrt{1-x^2}} = -\sqrt{1-x^2} - C,$$

поэтому

$$\int \arcsin x\,dx = x \arcsin x + \sqrt{1-x^2} + C.$$

Пример 13.54. Найти $\int e^x \cos x\,dx$.

Решение. Положим $u = e^x$, $\cos x\,dx = dv$, тогда $du = e^x\,dx$, $v = \sin x$. Подставляя в формулу (13.10) найденные выражения, получим

$$\int e^x \cos x\,dx = e^x \sin x - \int e^x \sin x\,dx.$$

Интеграл в правой части той же сложности, что и искомый. Когда интегралы формулы (13.10) совпадают или «почти совпадают», как в данном случае, то можно привести интеграл, как говорят, к самому себе. Применим интегрирование по частям к интегралу $\int e^x \sin x\,dx$. Положим $u = e^x$, $\sin x\,dx = dv$; тогда $du = e^x\,dx$, $v = -\cos x$, следовательно,

$$\int e^x \sin x\,dx = -e^x \cos x + \int e^x \cos x\,dx.$$

Подставляя полученный результат в данный интеграл, получим

$$\int e^x \cos x\,dx = e^x \sin x - \left(-e^x \cos x + \int e^x \cos x\,dx\right),$$

или

$$\int e^x \cos x\,dx = e^x \sin x + e^x \cos x - \int e^x \cos x\,dx + C_1.$$

После переноса интеграла из правой части в левую, получим

$$2\int e^x \cos x\,dx = e^x \sin x + e^x \cos x + C_1,$$

откуда

$$\int e^x \cos x\,dx = \frac{e^x}{2}(\sin x + \cos x) + C,$$

где $C_1/2 = C$.

Пример 13.55. Аналогично проводится и вычисление интеграла $\int e^x \sin x\,dx$:

$$\int e^x \sin x\,dx = -e^x \cos x + \frac{e^x}{2}(\sin x + \cos x) + C =$$
$$= -e^x \cos x + \frac{1}{2} e^x \sin x + \frac{1}{2} e^x \cos x + C =$$
$$= \frac{1}{2} e^x \sin x - \frac{1}{2} e^x \cos x + C = \frac{1}{2} e^x (\sin x - \cos x) + C.$$

Пример 13.56. Найти $\int \sqrt{x^2 + m}\,dx$ $(m \neq 0)$.

Решение. Положим $u = \sqrt{x^2 + m}$, $dx = dv$, тогда

$$du = \frac{2x\,dx}{2\sqrt{x^2 + m}} = \frac{x\,dx}{\sqrt{x^2 + m}}, \qquad v = x.$$

Подставляя в формулу (13.10) найденные выражения, получим

$$\int \sqrt{x^2 + m}\,dx = x\sqrt{x^2 + m} - \int \frac{x^2\,dx}{\sqrt{x^2 + m}}.$$

Преобразуем интеграл правой части

$$\int \frac{x^2\,dx}{\sqrt{x^2+m}}=\int \frac{(x^2+m)-m}{\sqrt{x^2+m}}\,dx=\int \sqrt{x^2+m}\,dx-m\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+m}}.$$

Последний интеграл

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+m}}=\ln\left|\sqrt{x^2+m}+x\right|+C_1$$

(см. XIII или примеры 13.39 и 13.40). Тогда

$$\int \frac{x^2\,dx}{\sqrt{x^2+m}}=\int \sqrt{x^2+m}\,dx-m\ln\left|\sqrt{x^2+m}+x\right|-C_1m.$$

Подставив полученное выражение в данный интеграл, получим

$$\int \sqrt{x^2+m}\,dx=x\sqrt{x^2+m}-\int \sqrt{x^2+m}+m\ln\left|x+\sqrt{x^2+m}\right|+C_1m,$$

откуда

$$2\int \sqrt{x^2+m}\,dx=x\sqrt{x^2+m}+m\ln\left|x+\sqrt{x^2+m}\right|+C_1m,$$

или

$$\int \sqrt{x^2+m}\,dx=\frac{1}{2}x\sqrt{x^2+m}+\frac{m}{2}\ln\left|x+\sqrt{x^2+m}\right|+C.$$

13.3.3. Интегрирование рациональных дробей. При интегрировании рациональных функций вида

$$f(x)=\frac{a_0x^n+a_1x^{n-1}+\ldots+a_n}{b_0x^m+b_1x^{m-1}+\ldots+b_m}\qquad (m>n)\qquad (13.11)$$

или $f(x)=\frac{P_n(x)}{Q_m(x)}$ (где m и n означают степени соответствующих многочленов), дробь (13.11) представляют в виде суммы более простых дробей.

Например, так как

$$\frac{1-2x}{x^2-5x+6}=\frac{3}{x-2}-\frac{5}{x-3},$$

то

$$\int \frac{1-2x}{x^2-5x+6}\,dx=3\int \frac{dx}{x-2}-5\int \frac{dx}{x-3}=$$

$$=3\ln|x-2|-5\ln|x-3|+C=\ln\left|\frac{(x-2)^3}{(x-3)^5}\right|+C.$$

Чтобы такой прием удалось использовать при интегрировании, необходимо уметь произвести разложение дроби на более простые дроби.

Не останавливаясь на решении этой задачи в общем виде, рассмотрим ряд частных случаев.

Пример 13.57. Найти $\int \frac{3x-5}{x^2-4x+3}dx$.

Решение. Знаменатель раскладываем на множители:

$$x^2-4x+3=(x-1)(x-3);$$

тогда

$$\frac{3x-5}{x^2-4x+3}=\frac{A}{x-1}+\frac{B}{x-3}. \qquad (13.12)$$

Освободив равенство от дробей, запишем

$$3x-5=A(x-3)+B(x-1)$$

или

$$3x-5=Ax-3A+Bx-B=(A+B)x-(3A+B).$$

Приравняв коэффициенты при одинаковых степенях в обеих частях тождества, составим систему уравнений

$$\begin{cases} A+B=3, \\ 3A+B=5. \end{cases}$$

Решив эту систему, найдем $A=1$, $B=2$. Подставив значения A и B в выражение (13.12), получим

$$\frac{3x-5}{x^2-4x+3}=\frac{1}{x-1}+\frac{2}{x-3}.$$

Следовательно,

$$\int \frac{3x-5}{x^2-4x+3}dx=\int\frac{dx}{x-1}+2\int\frac{dx}{x-3}=$$
$$=\ln|x-1|+2\ln|x-3|+C=\ln|(x-1)(x-3)^2|+C.$$

Пример 13.58. Найти $\int \frac{2dx}{x^3+3x^2+2x}$.

Решение. Разложим знаменатель на множители

$$x^3+3x^2+2x=x(x^2+3x+2)=x(x+1)(x+2).$$

Представим рациональную дробь в виде суммы простейших дробей:

$$\frac{2}{x^3+3x^2+2x}=\frac{A}{x}+\frac{B}{x+1}+\frac{C}{x+2}. \qquad (13.13)$$

Освободив равенство от дробей, запишем

$$2=A(x+1)(x+2)+Bx(x+2)+Cx(x+1)$$

или

$$2=A(x^2+3x+2)+Bx^2+2Bx+Cx^2+Cx,$$
$$2=(A+B+C)x^2+(3A+2B+C)x+2A$$

Приравняв коэффициенты при одинаковых степенях x в обеих частях тождества, составим систему уравнений

$$\begin{cases} A+B+C=0, \\ 3A+2B+C=0, \\ 2A=2. \end{cases}$$

Решив эту систему, найдем $A=1$, $B=-2$, $C=1$. Подставив найденные значения A, B и C в выражение (13.13), получим

$$\frac{2}{x^3+3x^2+2x}=\frac{1}{x}-\frac{2}{x+1}+\frac{1}{x+2}.$$

Следовательно,

$$\int\frac{2dx}{x^3+3x^2+2x}=\int\frac{dx}{x}-2\int\frac{dx}{x+1}+\int\frac{dx}{x+2}=$$
$$=\ln|x|-2\ln|x+1|+\ln|x+2|+C=\ln\left|\frac{x(x+2)}{(x+1)^2}\right|+C.$$

Пример 13.59. Найти $\int\frac{x^3-1}{x(x+1)^3}dx$.

Решение. Знаменатель имеет кратные корни $x_1=x_2=x_3=-1$ и простой корень $x_4=0$. В этом случае дробь представляют в виде следующей суммы:

$$\frac{x^3-1}{x(x+1)^3}=\frac{A}{x+1}+\frac{B}{(x+1)^2}+\frac{C}{(x+1)^3}+\frac{D}{x}, \tag{13.14}$$

откуда

$$x^3-1=Ax(x+1)^2+Bx(x+1)+Cx+D(x+1)^3,$$

или

$$x^3-1=(A+D)x^3+(2A+B+3D)x^2+(A+B+C+3D)x+D.$$

Составим систему уравнений

$$\begin{cases} A+D=1, \\ 2A+B+3D=0, \\ A+B+C+3D=0, \\ D=-1. \end{cases}$$

Решив систему, найдем $A=2$, $B=-1$, $C=2$, $D=-1$. Подставив найденные значения A, B, C и D в выражение (13.14), получим

$$\frac{x^3-1}{x(x+1)^3}=\frac{2}{x+1}-\frac{1}{(x+1)^2}+\frac{2}{(x+1)^3}-\frac{1}{x}.$$

Следовательно,

$$\int\frac{x^3-1}{x(x+1)^3}dx=2\int\frac{dx}{x+1}-\int\frac{dx}{(x+1)^2}+2\int\frac{dx}{(x+1)^3}-\int\frac{dx}{x}=$$
$$=2\ln|x+1|+\frac{1}{x+1}-\frac{1}{(x+1)^2}-\ln|x|+C=$$
$$=\ln\frac{(x+1)^2}{|x|}+\frac{x}{(x+1)^2}+C.$$

Пример 13.60. Найти $\int\frac{dx}{x(x^3+3)}$.

Решение. В этом случае дробь $\frac{1}{x(x^2+3)}$ разлагается на сумму следующим образом:

$$\frac{1}{x(x^2+3)}=\frac{A}{x}+\frac{Bx+C}{x^2+3}, \tag{13.15}$$

откуда

$$1=A(x^2+3)+x(Bx+C),$$

или

$$1=(A+B)x^2+Cx+3A.$$

Составим систему уравнений

$$\begin{cases} A+B=0, \\ C=0, \\ 3A=1. \end{cases}$$

Решив систему, найдем $A=1/3$, $B=-1/3$, $C=0$. Подставив значения A, B и C в выражение (13.15), получим

$$\frac{1}{x(x^2+3)}=\frac{1}{3x}-\frac{x}{3(x^2+3)}.$$

Следовательно,

$$\int\frac{dx}{x(x^2+3)}=\frac{1}{3}\int\frac{dx}{x}-\frac{1}{3}\int\frac{x\,dx}{x^2+3}=\frac{1}{3}\ln|x|-\frac{1}{6}\ln(x^2+3)+C=$$

$$=\frac{1}{3}\left[\ln|x|-\frac{1}{2}\ln(x^2+3)\right]+C=\frac{1}{3}\ln\frac{|x|}{\sqrt{x^2+3}}+C.$$

Можно было бы доказать, что если дробь (13.11) правильная (т.е. степень числителя меньше степени знаменателя) и несократимая, то ее всегда можно представить в виде суммы так называемых *простейших дробей* вида

$$\frac{A}{x-a},\quad \frac{A}{(x-a)^k},\quad \frac{Bx+C}{x^2+px+q},\quad \frac{Bx+C}{(x^2+px+q)^k},$$

причем коэффициенты такого разложения могут быть найдены таким же способом, как и в приведенных выше примерах.

13.3.4. Понятие об интегралах, не выражающихся в конечном виде через элементарные функции. Мы познакомились с некоторыми приемами интегрирования. Но далеко не для каждой элементарной функции можно найти в множестве элементарных функций ее первообразную. Так, например, никакой из приемов интегрирования не позволяет найти в множестве элементарных функций интеграл $\int\frac{\sin x}{x}dx$. Более того, можно утверждать, что никакое дальнейшее развитие техники интегрирования не позволит это сделать. В современной математике мы располагаем некоторым запасом элементарных функций, через которые и выражаются интегралы. Если мы говорим, что интеграл «нельзя найти», то это означает, что он не может быть выражен через конечное число элементарных функций.

Укажем некоторые не являющиеся элементарными, «неберущиеся» интегралы:

$$\int x \cdot \operatorname{tg} x\, dx, \qquad \int \frac{\cos x}{x}\, dx, \qquad \int \frac{e^x}{x}\, dx,$$

$$\int \frac{dx}{\ln x}, \qquad \int e^{-x^2}\, dx, \qquad \int \sin x^2\, dx,$$

$$\int \sqrt{x^3+1}\, dx, \qquad \int \sqrt{\sin x}\, dx, \qquad \int \ln \sin x\, dx.$$

ВОПРОСЫ ДЛЯ ПОВТОРЕНИЯ К ГЛАВЕ 13

1. Какое действие называется интегрированием?
2. Какая функция называется первообразной для данной функции $f(x)$?
3. Чем отличаются друг от друга различные первообразные функции для данной функции $f(x)$?
4. Дайте определение неопределенного интеграла.
5. Дайте определение подынтегральной функции и подынтегрального выражения.
6. Какой геометрический образ соответствует неопределенному интегралу $\int f(x)\, dx$?
7. Как проверяется результат интегрирования?
8. При каком условии справедливо равенство

$$\int f(x)\, dx = F(x) + C?$$

9. Чему равны производная и дифференциал неопределенного интеграла?
10. Чему равен неопределенный интеграл от дифференциала функции $F(x)$?
11. Сформулируйте основные свойства неопределенного интеграла.
12. Чему равен $\int (5x^2 - 1)'\, dx$?
13. Чему равен $\int d(\ln x^2 - \sin x)$?
14. Найдите $f(x)$, зная, что $\int f(x)\, dx = x^2 - 3x + C$.
15. Укажите при каком значении n формула

$$\int x^n\, dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C$$

не имеет смысла $(x > 0)$?

16. Какая формула применяется в том случае, когда $n = -1$ в $\int x^n\, dx$?
17. Из функций, первообразных для функции $f(x) = 5 \sin 3x$ найдите ту, которая при $x = 0$ обращается в нуль.
18. Найдите функцию, производная от которой $y' = \sin x - \cos x$ и которая при $x = \pi/2$ принимает значение, равное 4.
19. Из семейства кривых найдите функцию, угловой коэффициент которой равен $4x$ и которая проходит через точку M (3; 5).

УПРАЖНЕНИЯ К ГЛАВЕ 13

Найдите интегралы и проверьте результат дифференцированием:

1. $\int \sin(ax+b)\,dx$.
2. $\int (4-3\cos x)\,dx$.
3. $\int x^2 \cos x^3\,dx$.
4. $\int \frac{dx}{\cos^2 5x}$.
5. $\int \frac{dx}{\cos^2 (1-x)}$.
6. $\int \frac{dx}{\sin^2 6x}$.
7. $\int \frac{dx}{\sqrt{5-4x^2}}$.
8. $\int \frac{d\varphi}{\sqrt{9-2\varphi^2}}$.
9. $\int \frac{3\,dx}{\sqrt{16-9x^2}}$.
10. $\int \frac{dx}{3+5x^2}$.
11. $\int \frac{dx}{4+x^2}$.
12. $\int \frac{dx}{2+3x^2}$.
13. $\int \frac{dx}{\sqrt[3]{x^2}}$.
14. $\int \left(\frac{3}{t^2}-\frac{2}{\sqrt{t}}+\frac{4\sqrt[3]{t^2}}{t}\right)dt$.
15. $\int \frac{3d\varphi}{2-\varphi}$.
16. $\int \frac{x^2\,dx}{x^3+1}$.
17. $\int \frac{\cos x\,dx}{3\sin x-1}$.
18. $\int \frac{du}{u^2-25}$.
19. $\int b^u\,du$.
20. $\int 2^{x^2} x\,dx$.
21. $\int e^{-3x^2} x\,dx$.
22. $\int \frac{x\,dx}{\sqrt{x^2-5}}$.
23. $\int \frac{x\,dx}{\sqrt{3-x^2}}$.

24. Найдите уравнение кривой, проходящей через точку $A\,(2;\,-1)$, если угловой коэффициент касательной к кривой в каждой ее точке равен $2x-4$.

25. Найдите уравнение кривой, проходящей через точку $A\,(0;\,1)$, у которой касательная в любой точке кривой имеет угловой коэффициент, равный ординате точки касания y.

26. Скорость прямолинейного движения тела задана уравнением $v=3t^2+4$. Найдите закон движения s, если за время $t=2$ с тело оказалось на расстоянии 20 м от начала отсчета.

27. Скорость прямолинейного движения точки задана формулой $v=2\cos t$. Найдите закон движения, если в момент $t=\frac{\pi}{6}$ с точка находилась на расстоянии $s=4$ м от начала отсчета.

28. Тело движется прямолинейно с ускорением $a=12t^2+6t$. Найдите закон движения тела, если в момент $t=1$ с скорость тела $v=8$ м/с и путь $s=6$ м.

29. Точка движется прямолинейно с ускорением $a=-6t+18$. В момент времени $t=0$ (начало отсчета времени) начальная скорость $v_0=24$ м/с, расстояние от начала отсчета $s_0=15$ м. Найдите: а) скорость движения и закон движения; б) величину ускорения, скорости и пути в момент $t=2$ с; в) момент, когда скорость будет наибольшей.

Найдите интегралы способом подстановки:

30. $\int \sqrt[3]{(4-3x)^2}\,dx$. 31. $\int \frac{dx}{\sqrt[3]{(3x-5)^2}}$.

32. $\int (x^2+3)^5\,x\,dx$. 33. $\int 3\sqrt{x^3-1}\,x^2\,dx$.

Вычислите интегралы:

34. $\int \sqrt{2\sin x-1}\cos x\,dx$. 35. $\int \sqrt{e^x+1}\,e^x\,dx$.

36. $\int \sqrt{(x^4-1)^3}\,x^3\,dx$. 37. $\int \frac{\cos x\,dx}{2\sin x+1}$.

38. $\int \operatorname{ctg}\frac{x}{2}\,dx$. 39. $\int \frac{dx}{\sin\frac{x}{3}}$.

40. $\int 3^{5x^2}\,x\,dx$. 41. $\int e^{x^2+1}\,x\,dx$.

42. $\int \sin(t^2-1)\,t\,dt$. 43. $\int \frac{\cos\sqrt{x}\,dx}{\sqrt{x}}$.

44. $\int \frac{x\,dx}{\cos^2 x^2}$. 45. $\int \frac{dx}{x\sin^2\ln x}$.

46. $\int \frac{dz}{z\sqrt{1-\ln^2 z}}$. 47. $\int \frac{\sin x\,dx}{a^2+\cos^2 x}$ $(a\neq 0)$.

48. $\int \frac{x^2\,dx}{1+x^6}$. 49. $\int \frac{dx}{x(1+\ln^2 x)}$.

50. $\int \sin^4 x\,dx$. 51. $\int \operatorname{ctg}^4 x\,dx$.

52. $\int \cos^5 x\,dx$. 53. $\int \sin 5x\sin 3x\,dx$.

54. $\int \cos 4x\cos x\,dx$. 55. $\int \sin 4x\cos 3x\,dx$.

56. $\int x\sin x\,dx$. 57. $\int \frac{\ln x\,dx}{x^2}$.

58. $\int \sqrt{x^2-a^2}\,dx$. 59. $\int x\cos x\,dx$.

60. $\int \frac{dx}{x^2-4}$. 61. $\int \frac{(2x+1)\,dx}{x^2-5x+4}$.

62. $\int \frac{(7x-3)\,dx}{x^3+2x^2-3x}$. 63. $\int \frac{(6x-4)\,dx}{x^3-4x}$.

ОТВЕТЫ, УКАЗАНИЯ И РЕШЕНИЯ К ГЛАВЕ 13

1. $-\frac{1}{a}\cos(ax+b)+C$. 2. $4x-3\sin x+C$. 3. $\frac{1}{3}\sin x^3+C$.

4. $\frac{1}{5}\operatorname{tg}5x+C$. 5. $-\operatorname{tg}(1-x)+C$.

6. $-\frac{1}{6}\operatorname{ctg} 6x+C$. 7. $\frac{1}{2}\arcsin\frac{2x}{\sqrt{5}}+C$.

8. $\frac{\sqrt{2}}{2}\arcsin\frac{\sqrt{2}}{3}\varphi+C$. 9. $\arcsin\frac{3}{4}x+C$.

10. $\frac{1}{\sqrt{15}}\operatorname{arctg}\left(\sqrt{\frac{5}{3}}x\right)+C$. 11. $\frac{1}{2}\operatorname{arctg}\frac{x}{2}+C$.

12. $\frac{1}{\sqrt{6}}\operatorname{arctg}\left(\sqrt{\frac{3}{2}}x\right)+C$. 13. $3\sqrt[3]{u}+C$.

14. $-\frac{3}{t}-4\sqrt{t}+6\sqrt[3]{t^2}+C$. 15. $-3\ln|2-\varphi|+C$.

16. $\frac{1}{3}\ln|x^3+1|+C$. 17. $\frac{1}{3}\ln|3\sin x-1|+C$.

18. $\frac{1}{10}\ln\left|\frac{u-5}{u+5}\right|+C$. 19. $\frac{b^u}{\ln b}+C$. 20. $\frac{2^{x^2-1}}{\ln 2}+C$.

21. $-\frac{1}{6}e^{-3x^2}+C$. 22. $\sqrt{x^2-5}+C$. 23. $-\sqrt{3-x^2}+C$.

24. Так как по условию $y'=2x-4$, то

$$y=\int(2x-4)dx=\frac{1}{2}\int(2x-4)\,d\,(2x-4)=\frac{1}{4}(2x-4)^2+C.$$

Условие прохождения кривой через точку A дает возможность определить значение постоянной C: $-1=\frac{1}{4}(2\cdot2-4)^2+C$, откуда $C=-1$ и $y=\frac{1}{4}(2x-4)^2-1=(x-2)^2-1$.

Ответ. $y=x^2-4x+3$.

25. $y=e^x$. 26. $s=t^3+4t+4$. 27. $s=2\sin t+3$.

28. $s=t^4+t^3+t+3$.

29. а) $v=-3t^2+18t+24$, $s=-t^3+9t^2+24t+15$.

б) $a_{t=2}=6$ м/с^2, $v_{t=2}=48$ м/с, $s=91$ м.

в) скорость имеет максимальное значение при $t=3$ с, она равна $v=51$ м/с.

30. $-\frac{1}{5}(4-3x)^{5/3}+C$. 31. $\sqrt[3]{3x-5}+C$. 32. $\frac{1}{12}(x^2+3)^6+C$.

33. $\frac{2}{3}(x^3-1)^{3/2}+C$. 34. $\frac{1}{3}(2\sin x-1)^{3/2}+C$. 35. $\frac{2}{3}(e^x+1)^{3/2}+C$.

36. $\frac{1}{10}(x^4-1)^{5/2}+C$. 37. $\frac{1}{2}\ln|2\sin x+1|+C$. 38. $2\ln\left|\sin\frac{x}{2}\right|+C$.

39. $3\ln\left|\operatorname{tg}\frac{x}{6}\right|+C$. 40. $\frac{3^{5x^2}}{10\ln 3}+C$. 41. $\frac{1}{2}e^{x^2+1}+C$.

42. $-\frac{1}{2}\cos(t^2-1)+C$. 43. $2\sin\sqrt{x}+C$. 44. $\frac{1}{2}\operatorname{tg}x^2+C$.

45. $-\operatorname{ctg}\ln x+C$. 46. $\arcsin\ln z+C$. 47. $-\frac{1}{a}\operatorname{arctg}\frac{\cos x}{a}+C$.

48. $\frac{1}{3}\operatorname{arctg} x^3+C$. 49. $\operatorname{arctg}\ln x+C$.

50. Удобно использовать формулы $\sin^2\alpha=(1-\cos 2\alpha)/2$ и $\cos^2\alpha=(1+\cos 2\alpha)/2$, тогда

$$\int \sin^4 x\,dx=\frac{1}{4}\int(1-\cos 2x)^2\,dx=$$
$$=\frac{1}{4}\int dx-\frac{1}{2}\int\cos 2x\,dx+\frac{1}{8}\int(1+\cos 4x)\,dx.$$

Ответ. $\frac{3}{8}x-\frac{1}{4}\sin 2x+\frac{1}{32}\sin 4x+C$.

51. $-\frac{1}{3}\operatorname{ctg}^3 x+\operatorname{ctg} x+x+C$.

52. $\sin x-\frac{2}{3}\sin^3 x+\frac{1}{5}\sin^5 x+C$.

53. Удобно использовать формулу

$$\sin\alpha\cdot\sin\beta=\frac{1}{2}[\cos(\alpha-\beta)-\cos(\alpha+\beta)].$$

Ответ. $\frac{1}{4}\sin 2x-\frac{1}{16}\sin 8x+C$.

54. $\frac{1}{6}\sin 3x+\frac{1}{10}\sin 5x+C$. 55. $-\frac{1}{2}\cos x-\frac{1}{14}\cos 7x+C$.

56. Удобно применить формулу «интегрирования по частям». Ответ. $-x\cos x+\sin x+C$.

57. $-\frac{\ln x}{x}-\frac{1}{x}+C$. 58. $\frac{1}{2}x\sqrt{x^2-a^2}-\frac{a^2}{2}\ln\left|x+\sqrt{x^2+a^2}\right|+C$.

59. $x\sin x+\cos x+C$. 60. $\ln\sqrt[4]{\left|\frac{x-2}{x+2}\right|}+C$. 61. $\ln\left|\frac{(x-4)^3}{x-1}\right|+C$.

62. $\ln\frac{|Cx(x-1)|}{(x+3)^2}$. 63. $\ln\frac{|Cx(x-2)|}{(x+2)^2}$.

ГЛАВА 14

ОПРЕДЕЛЕННЫЙ ИНТЕГРАЛ И ЕГО ПРИЛОЖЕНИЯ

§ 14.1. Основные понятия

14.1.1. Задачи, приводящие к понятию определенного интеграла. Рассмотрим несколько задач.

Задача 14.1. Вычислить площадь *криволинейной трапеции aABb*, ограниченной кривой $y=f(x)$, где $f(x)\geqslant 0$, осью Ox и двумя прямыми $x=a$ и $x=b$ (рис. 14.1).

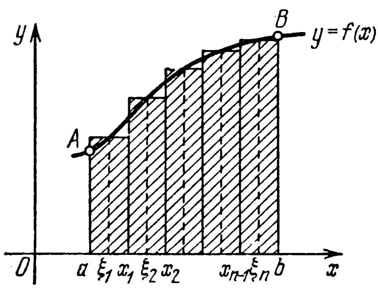


Рис. 14.1.

Решение. Как известно, в планиметрии нет формул, с помощью которых можно было бы в общем случае вычислять такие площади.

Разобьем промежуток $[a, b]$ на n не обязательно равных между собой частей. Пусть абсциссы точек деления x_1, x_2, ..., x_{n-1} удовлетворяют условию

$$a=x_0<x_1<x_2<\ldots<x_{n-1}<x_n=b.$$

В каждом из промежутков $[x_{i-1}, x_i]$ $(1\leqslant i\leqslant n)$ выберем произвольным образом по точке с абсциссой ξ_i. В каждой точке ξ_i восстановим перпендикуляр к оси Ox до пересечения с кривой $y=f(x)$. Каждой точке ξ_i будет соответствовать на кривой точка с координатами $(\xi_i; f(\xi_i))$. Через эти точки кривой $(\xi_i; f(\xi_i))$ проведем прямые, параллельные оси Ox и построим n прямоугольников, каждый из которых имеет основание $x_i - x_{i-1} = \Delta x_i$ $(1 \leqslant i \leqslant n)$, высоту $f(\xi_i)$ и площадь $f(\xi_i)$ x_i. Сумма

$$f(\xi_1)\,\Delta x_1 + f(\xi_2)\,\Delta x_2 + \ldots + f(\xi_n)\,\Delta x_n,$$

которую мы будем обычно записывать в виде

$$\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\,\Delta x_i, \tag{14.1}$$

выражает площадь заштрихованной фигуры ступенчатого вида (см. рис. 14.1).

Интуитивно ясно, что эта ступенчатая фигура будет мало отличаться от исходной криволинейной трапеции при условии, что части, на которые мы разбили промежуток $[a, b]$, достаточно малы.

Предположим теперь, что мы рассматриваем не одно какое-то разбиение исходного отрезка $[a, b]$, а различные последовательности таких разбиений. Будем считать, что каждая такая последовательность характеризуется тем, что наибольшая из длин частичных отрезков $\max \Delta x_i$ стремится к нулю. Если при этом окажется, что сумма (14.1) будет стремиться к некоторому пределу S, не зависящему ни от способов дробления $[a, b]$, ни от выбора вспомогательных точек ξ_i, то естественно это число S и принять в качестве площади нашей криволинейной трапеции:

$$S = \lim_{\max \Delta x_i \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\,\Delta x_i.$$

Задача 14.2. Вычисление пройденного точкой пути по ее скорости. Вычислить путь L, пройденный точкой M по прямой с переменной скоростью $v = f(t) \geqslant 0$ за промежуток времени от $t = a$ до $t = b$ $(a < b)$.

Решение. Разделим промежуток $[a, b]$ точками $t_0 = a < t_1 < t_2 < \ldots < t_n = b$ на n частичных промежутков (не обязательно равных между собой). В каждом из этих промежутков $[t_{i-1}, t_i]$ $(1 \leqslant i \leqslant n)$ выберем произвольно момент времени T_i. Скорость $v = f(t)$ за малый промежуток времени $[t_{i-1}, t_i]$ $(1 \leqslant i \leqslant n)$, равный $\Delta t_i = t_i - t_{i-1}$ изменится мало, поэтому будем считать ее на протяжении каждого промежутка времени $[t_{i-1}, t_i]$ постоянной и равной скорости $f(T_i)$ точки M в момент времени T_i. Мы допустили, что точка M за промежуток времени от $t = t_{i-1}$ до $t = t_i$ движется равномерно. Тогда путь, пройденный точкой M за промежуток времени $[t_{i-1}, t_i]$, равен произведению скорости $f(T_i)$ на время Δt_i:

$$f(T_i)\,\Delta t_i \qquad (1 \leqslant t \leqslant n).$$

Весь путь, пройденный точкой M за время от $t=a$ до $t=b$, приближенно выразится суммой

$$\sum_{i=1}^{n} f(T_i)\,\Delta t_i = f(T_1)\,\Delta t_1 + f(T_2)\,\Delta t_2 + \ldots + f(T_n)\,\Delta t_n.$$

Предположим, что существует

$$\lim_{\max\limits_i \Delta x_i \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(T_i)\,\Delta t_i,$$

не зависящий ни от способов дробления $[a, b]$, ни от выбора вспомогательных точек T_i. Величину этого предела естественно и принять в качестве точного значения пройденного пути:

$$L = \lim_{\max\limits_i \Delta x_i \to 0} \sum f(T_i)\,\Delta t_i.$$

14.1.2. Интегральная сумма и определенный интеграл. Целый ряд геометрических, физических и других задач сводится, подобно рассмотренным выше, к вычислению пределов сумм вида

$$\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\,\Delta x_i.$$

Непосредственное вычисление таких пределов сопряжено со значительными трудностями. Гораздо более удобным является другой подход, к изложению которого мы сейчас и приступаем. Пусть непрерывная функция $f(x)$ определена в промежутке $[a, b]$, где $a < b$. Выполним следующие операции:

1) Разделим промежуток $[a, b]$ на части точками

$$a = x_0 < x_1 < x_2 < \ldots < x_{n-1} < x_n = b.$$

Пусть $x_i - x_{i-1} = \Delta x_i$ $(1 \leqslant i \leqslant n)$. Наибольшую из этих разностей обозначим через $\max \Delta x_i$.

2) В каждом из промежутков $[x_{i-1}, x_i]$ выберем произвольную точку ξ_i:

$$x_{i-1} < \xi_i < x_i \qquad (1 \leqslant i \leqslant n)$$

и вычислим $f(\xi_i)$.

3) Составим произведение числа $f(\xi_i)$ и Δx_i соответствующего промежутка: $f(\xi_i)\,\Delta x_i$.

4) Составим сумму этих произведений:

$$S_n = \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\,\Delta x_i = f(\xi_1)\,\Delta x_1 + f(\xi_2)\,\Delta x_2 + \ldots + f(\xi_n)\,\Delta x_n.$$

Эту сумму будем называть *интегральной суммой* функции $f(x)$ в промежутке $[a, b]$.

5) Будем производить деление промежутка $[a, b]$ на части все более мелкие и мелкие так, чтобы величина $\max \Delta x_i$ стремилась к нулю. Если при этом существует предел

$$\lim_{\max \Delta x_i \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\,\Delta x_i,$$

который не зависит от способа разбиения промежутка $[a, b]$ и от выбора точек ξ_i в промежутках $[x_{i-1}, x_i]$, то этот предел называют *определенным интегралом функции* $f(x)$, взятым по промежутку $[a, b]$, и обозначают символом

$$\int_a^b f(x)\,dx, \quad \text{т. е.} \quad \int_a^b f(x)\,dx = \lim_{\max \Delta x_i \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\,\Delta x_i.$$

Символ $\int_a^b f(x)\,dx$ читается: «интеграл от a до b $f(x)\,dx$».

Числа a и b соответственно называются *нижним* и *верхним пределами интегрирования*, промежуток $[a, b]$ называется *промежутком интегрирования*, функция $f(x)$ называется *интегрируемой функцией*, x — *переменной интегрирования*.

Данное определение оказывается удобным расширить так, чтобы оно охватывало и те случаи, когда $a \geqslant b$. Именно, *для любой функции* $f(x)$, *в область определения которой входит точка* a, *будем считать*

$$\int_a^a f(x)\,dx = 0, \tag{14.2}$$

и для любой функции $f(x)$, *непрерывной на* $[b, a]$ $(b < a)$, *положим*

$$\int_a^b f(x)\,dx = -\int_b^a f(x)\,dx. \tag{14.3}$$

В нашем курсе мы примем без доказательства, что *для любой функции* $f(x)$, *непрерывной на промежутке* $[a, b]$,

$$\int_a^b f(x)\,dx$$

всегда существует.

Возвращаясь к рассмотренным в предыдущем пункте задачам о площади и пройденном пути, мы видим, что их решения с использованием только что введенного понятия определенного интеграла можно записать так:

$$S=\int_a^b f(x)\,dx, \qquad L=\int_a^b f(t)\,dt.$$

Ниже мы еще вернемся к задаче о площади и рассмотрим ее в более общей постановке, чем в п. 14.1.1.

§ 14.2. Свойства определенного интеграла

В этом параграфе мы рассмотрим основные свойства определенного интеграла. Будем предполагать, что все рассматриваемые функции непрерывны, откуда будет следовать, что все интегралы от этих функций существуют.

14.2.1. Свойства, выражаемые равенствами. 1. *Интеграл от суммы двух функций равен сумме интегралов от этих функций:*

$$\int_a^b [f_1(x)+f_2(x)]\,dx=\int_a^b f_1(x)\,dx+\int_a^b f_2(x)\,dx. \tag{14.4}$$

2. *Постоянный множитель можно выносить за знак интеграла:*

$$\int_a^b kf(x)\,dx=k\int_a^b f(x)\,dx, \tag{14.5}$$

где k — *постоянное число.*

Свойства 1 и 2 следуют из определения интеграла и теорем о пределах.

3. *Если промежуток интегрирования* $[a, b]$ *разбит на части* $[a, c]$ *и* $[c, b]$, *то интеграл в промежутке* $[a, b]$ *равен сумме интегралов в промежутках* $[a, c]$ *и* $[c, b]$, *т. е.*

$$\int_a^b f(x)\,dx=\int_a^c f(x)\,dx+\int_c^b f(x)\,dx. \tag{14.6}$$

Доказательство не приводим. Отметим, что эта же формула справедлива и в том случае, когда точка c находится вне отрезка $[a, b]$.

14.2.2. Свойства, выражаемые неравенствами. 4. *Если функция $f(x)$ сохраняет знак в промежутке $[a, b]$, где $a < b$, то интеграл $\int\limits_a^b f(x)\,dx$ имеет тот же знак, что и интегрируемая функция.*

Доказательство. Пусть $f(x) \geqslant 0$ в промежутке $[a, b]$. Тогда

$$\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\,\Delta x_i \geqslant 0,$$

так как $f(\xi_i) \geqslant 0$ и $\Delta x_i > 0$ и слагаемые интегральной суммы неотрицательны. Следовательно, предел этой суммы также неотрицателен, т. е.

$$\int\limits_a^b f(x)\,dx = \lim_{\max \Delta x_i \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\,\Delta x_i \geqslant 0.$$

5. Оценка определенного интеграла. *Если m M — наименьшее и наибольшее значения функции $f(x)$ в промежутке $[a, b]$, то при $a < b$*

$$m(b-a) \leqslant \int\limits_a^b f(x)\,dx \leqslant M(b-a). \tag{14.7}$$

Доказательство. Из условия теоремы следует, что для всех x из промежутка $[a, b]$

$$m \leqslant f(x) \leqslant M.$$

Так как все $\Delta x_i \geqslant 0$, то для любой интегральной суммы для функции $f(x)$ будут иметь место неравенства

$$\sum_{i=1}^{n} m\,\Delta x_i \leqslant \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\,\Delta x_i \leqslant \sum_{i=1}^{n} M\Delta x_i.$$

Заметим, что

$$\sum_{i=1}^{n} m\,\Delta x_i = m \sum_{i=1}^{n} \Delta x_i = m(b-a),$$

$$\sum_{i=1}^{n} M\Delta x_i = M \sum_{i=1}^{n} \Delta x_i = M(b-a).$$

Поэтому для всех интегральных сумм получаем оценку

$$m(b-a)\leqslant\sum_{i=1}^{n}f(\xi_i)\,\Delta x_i\leqslant M(b-a).$$

Переходя в этих неравенствах к пределу при $\max\Delta x_i\to 0$, получим

$$m(b-a)\leqslant\int_a^b f(x)\,dx\leqslant M(b-a).$$

Свойство 5 можно пояснить геометрически (рис. 14.2). Площадь криволинейной трапеции заключена между площадями прямоугольников, основание которых есть $[a, b]$, а высотами будут m и M, если $m\leqslant f(x)\leqslant M$.

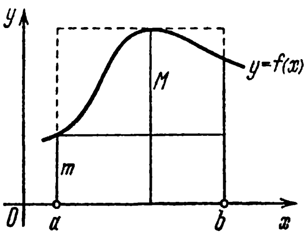


Рис. 14.2.

14.2.3. Теорема о среднем. *Если функция $f(x)$ непрерывна в промежутке $[a, b]$, то интеграл от $f(x)$ в пределах от a до b равен произведению значения интегрируемой функции в некоторой точке c ($c\in[a, b]$) на длину промежутка интегрирования $b-a$:*

$$\int_a^b f(x)\,dx=f(c)\cdot(b-a). \tag{14.8}$$

Доказательство. Функция $f(x)$ в промежутке $[a, b]$ непрерывна, тогда она в этом промежутке имеет наибольшее (M) и наименьшее (m) значения. По свойству 5 (формула (14.7)) имеем

$$m(b-a)\leqslant\int_a^b f(x)\,dx\leqslant M(b-a).$$

Разделив это неравенство на $b-a$, получим

$$m\leqslant\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx\leqslant M. \tag{14.9}$$

Так как функция $f(x)$ непрерывна, то она принимает все значения, заключенные между m и M (см. п. 3.3.3), а, значит, в некоторой точке $c\in[a, b]$ примет значение $f(c)$, совпадающее с числом, заключенным между числами m и M в неравенстве (14.9), т. е.

$$f(c)=\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx. \qquad (14.10)$$

Умножив равенство (14.10) на $b-a$, получим требуемое равенство (14.8).

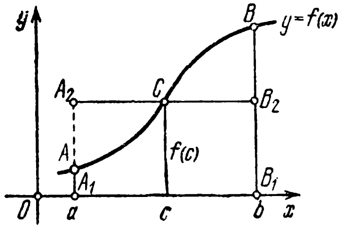


Рис. 14.3.

С геометрической точки зрения теорема о среднем означает, что площадь криволинейной трапеции A_1ABB_1 будет равна площади прямоугольника $A_1A_2B_2B_1$, основанием которого служит отрезок $[a, b]$ и высотой $f(c)$, где $c\in[a, b]$ (рис. 14.3). Отметим, что значение $f(c)$ обычно называют *средним значением* функции $f(x)$ на отрезке $[a, b]$.

§ 14.3. Интеграл с переменным верхним пределом

Рассмотрим интеграл, у которого верхний предел есть переменная величина, т. е.

$$\int_a^x f(t)\,dt.$$

Величина этого интеграла есть функция от x. Обозначим эту функцию через $\Phi(x)$:

$$\Phi(x)=\int_a^x f(t)\,dt. \qquad (14.11)$$

14.3.1. Непрерывность интеграла с переменным верхним пределом. *Интеграл с переменным верхним пределом* $\Phi(x)=\int_a^x f(t)\,dt$ *есть непрерывная функция от* x *в промежутке* $[a, b]$.

Доказательство. Пусть $x\in[a, b]$, дадим x приращение Δx. Вычислим приращение функции $\Phi(x)$:

$$\Delta\Phi(x)=\Phi(x+\Delta x)-\Phi(x)=$$

$$=\int_a^{x+\Delta x} f(t)\,dt-\int_a^x f(t)\,dt=\int_a^{x+\Delta x} f(t)\,dt+\int_x^a f(t)\,dt.$$

По свойству 3 (см. формулу (14.6)), получим

$$\Delta\Phi(x)=\int_x^{x+\Delta x} f(t)\,dt.$$

Пусть m — наименьшее, а M — наибольшее значения функции $f(t)$ в промежутке $[a, b]$. Тогда по свойству 5 (см. (14.7)), получим

$$m\Delta x \leqslant \int_x^{x+\Delta x} f(t)\,dt \leqslant M\Delta x,$$

или

$$m\Delta x \leqslant \Delta\Phi(x) \leqslant M\Delta x.$$

Из последнего неравенства следует, что $\Delta\Phi(x) \to 0$ при $\Delta x \to 0$. Следовательно, функция $\Phi(x)$ непрерывна в точке x. Но x — любая точка из $[a, b]$, значит, функция $\Phi(x)$ непрерывна на всем промежутке $[a, b]$.

14.3.2. Производная от интеграла с переменным верхним пределом. *Производная от интеграла с переменным верхним пределом x по этому верхнему пределу равна подынтегральной функции, вычисленной при значении $t=x$, т. е.*

$$\left(\int_a^x f(t)\,dt\right)' = f(x). \qquad (14.12)$$

Доказательство. Пусть функция $f(x)$ непрерывна в промежутке $[a, b]$. По определению для функции $\Phi(x)$ производная

$$\Phi'(x)=\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta\Phi(x)}{\Delta x}.$$

Приращение $\Delta\Phi(x)$ можно записать в виде

$$\Delta\Phi(x)=\int_x^{x+\Delta x} f(t)\,dt.$$

На основании теоремы о среднем преобразуем этот интеграл

$$\int_x^{x+\Delta x} f(t)\,dt = f(c)\cdot\Delta x,$$

где $\Delta x = (x + \Delta x) - x$, $x < c < x + \Delta x$, если $\Delta x > 0$, или $x + \Delta x < c < x$, если $\Delta x < 0$, тогда $\Delta\Phi(x) = f(c)\,\Delta x$, откуда

$$\frac{\Delta\Phi(x)}{\Delta x} = f(c).$$

Пусть $\Delta x \longrightarrow 0$, тогда $c \longrightarrow x$. В силу непрерывности функции $f(x)$ в точке x получим

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta\Phi(x)}{\Delta x} = \lim_{c \to x} f(c) = f(x),$$

т. е. утверждение (14.12) доказано. Этот важный вывод носит название *теоремы Барроу.*

Мы пришли к выводу, что *интеграл с переменным верхним пределом $\Phi(x)$ есть одна из первообразных подынтегральной функции $f(x)$.*

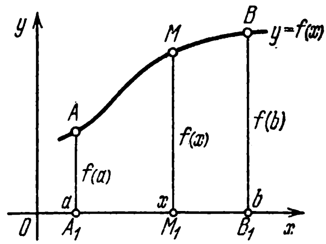


Рис. 14.4.

Следствие 14.1. *Производная $P'(x)$ от переменной площади $P(x)$ криволинейной трапеции, ограниченной кривой $y = f(x)$ осью Ox прямой $x = a$ и ординатой M_1M, соответствующей переменной абсциссе x, равна переменной ординате $y = f(x)$ кривой, ограничивающей эту площадь* (рис. 14.4).

14.3.3. Формула Ньютона — Лейбница. Пусть на промежутке $[a, b]$

$$\Phi(x) = \int_a^x f(x)\,dx,$$

а $F(x)$ — какая-нибудь из первообразных для $f(x)$ на этом же промежутке. Так как $\Phi(x)$, согласно теореме Барроу, тоже является первообразной для $f(x)$, то на $[a, b]$ справедливо

$$\Phi(x) = F(x) + C.$$

Воспользуемся этим последним равенством для получения формулы, позволяющей выразить

$$\int_a^b f(x)\,dx$$

через значения $F(x)$ в начальной и конечной точках промежутка интегрирования. Так как $\Phi(a) = \int\limits_a^a f(x)\,dx = 0$, то

$$\int\limits_a^b f(x)\,dx = \Phi(b) - \Phi(a) = [F(b) + C] - [F(a) + C] =$$
$$= F(b) - F(a).$$

Полученная формула

$$\int\limits_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a) \qquad (14.13)$$

носит название *формулы Ньютона—Лейбница*. При практическом применении этой формулы разность $F(b) - F(a)$ записывают в виде $F(x)\big|_a^b$.

Сформулируем правило для вычисления определенного интеграла

$$\int\limits_a^b f(x)\,dx.$$

1) Находим какую-нибудь первообразную функцию $F(x)$ для функции $f(x)$.

2) Вычисляем значение этой первообразной функции $F(x)$ при $x = b$, т. е. $F(b)$.

3) Вычисляем значение $F(x)$ при $x = a$, т. е. $F(a)$.

4) Из $F(b)$ вычитаем $F(a)$.

5) Записываем полученный результат, $\int\limits_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a)$.

Пример 14.1. Вычислить, пользуясь формулой Ньютона—Лейбница, площадь криволинейной трапеции, ограниченной линиями: $y = x^2$, осью Ox и прямыми $x = 2$ и $x = 3$.

Решение. Искомая площадь

$$P = \int\limits_2^3 x^2\,dx = \frac{x^3}{3}\Bigg|_2^3 = \frac{1}{3}(3^3 - 2^3) = \frac{19}{3} \text{ (кв. ед.)}.$$

Пример 14.2. Вычислить по формуле Ньютона—Лейбница интеграл $\int\limits_0^{\pi/6} \cos x\,dx$.

Решение.

$$\int_0^{\pi/6} \cos x\,dx = \sin x \Big|_0^{\pi/6} = \sin\frac{\pi}{6} - \sin 0 = \frac{1}{2} - 0 = \frac{1}{2}.$$

§ 14.4. Методы вычисления определенных интегралов

14.4.1. Непосредственное интегрирование. Для вычисления определенного интеграла $\int_a^b f(x)\,dx$ нужно найти первообразную функцию и затем применить формулу Ньютона—Лейбница

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(x)\Big|_a^b = F(b) - F(a),$$

При вычислении определенного интеграла применяются следующие свойства определенного интеграла:

1) *При перестановке пределов интегрирования знак определенного интеграла меняется на противоположный.*

2) *Постоянный множитель подынтегрального выражения можно выносить за знак определенного интеграла*:

$$\int_a^b kf(x)\,dx = k\int_a^b f(x)\,dx. \qquad (14.14)$$

3) *Определенный интеграл суммы функций равен сумме определенных интегралов этих функций*:

$$\int_a^b [f(x) + \varphi(x)]\,dx = \int_a^b f(x)\,dx + \int_a^b \varphi(x)\,dx. \qquad (14.15)$$

Пример 14.3. Вычислить $\int_{-1}^{3} (x^3+1)\,dx$.

Решение.

$$\int_{-1}^{3} (x^3+1)\,dx = \left(\frac{x^4}{4} + x\right)\Big|_{-1}^{3} = \left(\frac{3^4}{4} + 3\right) - \left[\frac{(-1)^4}{4} + (-1)\right] =$$

$$= \left(20\frac{1}{4} + 3\right) - \left(\frac{1}{4} - 1\right) = 24.$$

Пример 14.4. Вычислить $\int\limits_1^e \frac{dx}{x}$.

Решение. $\int\limits_1^e \frac{dx}{x} = \ln x \Big|_1^e = \ln e - \ln 1 = 1 - 0 = 1.$

Пример 14.5. Вычислить $\int\limits_{-\pi/4}^{\pi/4} \left(\frac{1}{\cos^2 x} - \sin x\right) dx.$

Решение.

$$\int\limits_{-\pi/4}^{\pi/4} \left(\frac{1}{\cos^2 x} - \sin x\right) dx = (\operatorname{tg} x + \cos x) \Big|_{-\pi/4}^{\pi/4} = \left(\operatorname{tg}\frac{\pi}{4} + \cos\frac{\pi}{4}\right) -$$

$$- \left[\operatorname{tg}\left(-\frac{\pi}{4}\right) + \cos\left(-\frac{\pi}{4}\right)\right] = \left(1 + \frac{\sqrt{2}}{2}\right) - \left(-1 + \frac{\sqrt{2}}{2}\right) = 2.$$

Пример 14.6. Вычислить $\int\limits_{1/2}^{\sqrt{3}/2} \frac{dx}{\sqrt{1 - x^2}}$.

Решение.

$$\int\limits_{1/2}^{\sqrt{3}/2} \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin x \Big|_{1/2}^{\sqrt{3}/2} = \arcsin\frac{\sqrt{3}}{2} - \arcsin\frac{1}{2} =$$

$$= \frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{6} = \frac{\pi}{6}.$$

Пример 14.7. Вычислить $\int\limits_1^{\sqrt{3}} \frac{dx}{1 + x^2}$.

Решение.

$$\int\limits_1^{\sqrt{3}} \frac{dx}{1+x^2} = \operatorname{arctg} x \Big|_1^{\sqrt{3}} = \operatorname{arctg}\sqrt{3} - \operatorname{arctg} 1 = \frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{12}.$$

14.4.2. Замена переменной (способ подстановки). *Пусть дан определенный интеграл* $\int\limits_a^b f(x)\,dx$ *от непрерывной функции* $y = f(x)$ *в промежутке* $[a, b]$. *Введем новую переменную и подстановкой* $x = \varphi(u)$ *и допустим, что выполняются следующие условия:*

1) $x = \varphi(u)$ *имеет обратную;*
2) $\varphi(\alpha) = a$, $\varphi(\beta) = b$;

3) *функции* $\varphi(u)$ *и* $\varphi'(u)$ *непрерывны в промежутке* $[\alpha, \beta]$ *изменения новой переменной* u;

4) *функция* $f[\varphi(u)]$ *определена и непрерывна в промежутке* $[\alpha, \beta]$.

Тогда имеет место равенство

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_\alpha^\beta f[\varphi(u)]\,\varphi'(u)\,du. \qquad (14.16)$$

Доказательство. Пусть $F(x)$—какая-либо первообразная для функции $f(x)$ на $[a, b]$, т. е. $F'(x)=f(x)$. Тогда по формуле Ньютона—Лейбница имеем

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a). \qquad (14.17)$$

Рассмотрим в промежутке $[\alpha, \beta]$ (который в силу условия 1) находится однозначно) функцию $F[\varphi(u)]$ переменного u, определяемую соотношениями $y=F(x)$ и $x=\varphi(u)$. Вычислим ее производную по правилу дифференцирования сложной функции:

$$(F[\varphi(u)])' = F'[\varphi(u)]\cdot\varphi'(u) = f[\varphi(u)]\,\varphi'(u).$$

Отсюда следует, что функция $F[\varphi(u)]$ является первообразной для $f[\varphi(u)]\varphi'(u)$ в промежутке $[\alpha, \beta]$; тогда по формуле Ньютона—Лейбница, учитывая, что функция $f[\varphi(u)]\varphi'(u)$ непрерывна на $[\alpha, \beta]$, получим

$$\int_\alpha^\beta f[\varphi(u)]\,\varphi'(u)\,du = F[\varphi(\beta)] - F[\varphi(\alpha)].$$

Но по условию 1) $\varphi(\alpha)=a$ и $\varphi(\beta)=b$, поэтому предыдущее равенство перепишем так:

$$\int_\alpha^\beta f[\varphi(u)]\,\varphi'(u)\,du = F(b) - F(a). \qquad (14.18)$$

Сравнив равенства (14.17) и (14.18), получим равенство (14.16).

Формула (14.16) позволяет вычисление интеграла $\int_a^b f(x)\,dx$ свести к вычислению интеграла $\int_\alpha^\beta f[\varphi(u)]\,\varphi'(u)du$. При применении формулы (14.16) следует функцию $x=\varphi(u)$

выбирать так, чтобы новый интеграл был более простым для вычисления, чем первоначальный.

При вычислении определенного интеграла по формуле (14.16) отпадает надобность перехода к прежнему переменному x, так как вычисление интеграла $\int\limits_{\alpha}^{\beta} f[\varphi(u)]\varphi'(u)du$ дает число, которому и будет равен интеграл $\int\limits_{a}^{b} f(x)dx$.

Пример 14.8. Вычислить $\int\limits_{2}^{3} (2x-1)^3 dx$.

Решение. Введем подстановку $2x-1=u$, тогда $2dx=du$, откуда $dx=\frac{1}{2}du$. Вместо переменной x мы ввели новую переменную u, которая связана с переменной x равенством подстановки. В связи с этим границы изменения переменной u, т. е. пределы интегрирования по переменной u, будут другие. Они находятся из формулы подстановки заменой аргумента x его значениями 2 и 3. Для вычисления нижнего предела интегрирования подставляем в эту формулу значение старого нижнего предела $x=2$, получаем $u_н=2\cdot 2-1=3$. Для вычисления верхнего предела интегрирования подставляем в формулу $2x-1=u$ значение старого верхнего предела $x=3$, получим $u_в=2\cdot 3-1=5$.

Заменив в данном интеграле $2x-1$ и dx их выражениями через новую переменную u и du и соответственно заменив старые пределы интегрирования новыми, получим

$$\int\limits_{2}^{3} (2x-1)^3 dx=\frac{1}{2}\int\limits_{3}^{5} u^3 du=\frac{1}{2}\cdot\frac{u^4}{4}\Big|_3^5=\frac{1}{8}(5^4-3^4)=68.$$

Пример 14.9. Вычислить $\int\limits_{3\pi/2}^{2\pi} \sqrt{1-\cos x}\sin x\,dx$.

Решение. Положим $1-\cos x=u$, тогда $\sin x\,dx=du$. Вычисляем новые пределы интегрирования: $u_н=1-\cos\frac{3\pi}{2}=1$, $u_в=1-\cos 2\pi=0$. Находим интеграл

$$\int\limits_{3\pi/2}^{2\pi} \sqrt{1-\cos x}\sin x\,dx=\int\limits_{1}^{0}\sqrt{u}\,du=\int\limits_{1}^{0} u^{1/2}du=$$
$$=\frac{2}{3}u^{3/2}\Big|_1^0=\frac{2}{3}(0-1)=-\frac{2}{3}.$$

Пример 14.10. Вычислить $\int\limits_{0}^{\pi/2}\frac{\cos x\,dx}{2+\sin x}$.

Решение. Положим $2+\sin x=u$, откуда $\cos x\,dx=du$, $u_н=2+\sin 0=2$, $u_в=2+\sin\frac{\pi}{2}=3$. Находим интеграл

$$\int\limits_0^{\pi/2}\frac{\cos x\,dx}{2+\sin x}=\int\limits_2^3\frac{du}{u}=\ln u\Big|_2^3=\ln 3-\ln 2=\ln\frac{3}{2}\approx 0{,}4055.$$

Пример 14.12. Вычислить $\int\limits_0^1 e^{x^2}x\,dx$.

Решение. Положим $x^2=u$, откуда $2x\,dx=du$, $x\,dx=\frac{1}{2}du$, $u_н=0^2=0$, $u_в=1^2=1$. Находим интеграл

$$\int\limits_0^1 e^{x^2}x\,dx=\frac{1}{2}\int\limits_0^1 e^u\,du=\frac{1}{2}e^u\Big|_0^1=\frac{1}{2}(e^1-e^0)=\frac{1}{2}(e-1).$$

Пример 14.12. Вычислить $\int\limits_{\pi/18}^{\pi/12}\cos 3x\,dx$.

Решение. Положим $3x=u$, откуда $3dx=du$, $dx=\frac{1}{3}du$, $u_н=3\cdot\frac{\pi}{18}=\frac{\pi}{6}$, $u_в=3\cdot\frac{\pi}{12}=\frac{\pi}{4}$. Находим интеграл

$$\int\limits_{\pi/18}^{\pi/12}\cos 3x\,dx=\frac{1}{3}\int\limits_{\pi/6}^{\pi/4}\cos u\,du=\frac{1}{3}\sin u\Big|_{\pi/6}^{\pi/4}=\frac{1}{3}\left(\sin\frac{\pi}{4}-\sin\frac{\pi}{6}\right)=$$
$$=\frac{1}{3}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}-\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{6}(\sqrt{2}-1).$$

Пример 14.13. Вычислить $\int\limits_0^{\pi/12}\frac{dx}{\sin^2\left(\frac{\pi}{6}+x\right)}$.

Решение. Положим $\frac{\pi}{6}+x=u$, $dx=du$, $u_н=\frac{\pi}{6}+0=\frac{\pi}{6}$, $u_в=\frac{\pi}{6}+\frac{\pi}{12}=\frac{\pi}{4}$. Находим интеграл

$$\int\limits_0^{\pi/12}\frac{dx}{\sin^2\left(\frac{\pi}{6}+x\right)}=\int\limits_{\pi/6}^{\pi/4}\frac{du}{\sin^2 u}=-\operatorname{ctg}u\Big|_{\pi/6}^{\pi/4}=-\left(\operatorname{ctg}\frac{\pi}{4}-\operatorname{ctg}\frac{\pi}{6}\right)=$$
$$=-(1-\sqrt{3})=\sqrt{3}-1.$$

Пример 14.14. Вычислить $\int\limits_{\sqrt{3}/3}^{2\sqrt{3}/3}\frac{dx}{\sqrt{4-3x^2}}$.

Решение. $\int\limits_{\sqrt{3}/3}^{2\sqrt{3}/3} \frac{dx}{\sqrt{4-3x^2}} = \frac{1}{2} \int\limits_{\sqrt{3}/3}^{2\sqrt{3}/3} \frac{dx}{\sqrt{1-\left(\frac{\sqrt{3}x}{2}\right)^2}}$.

Положим $\frac{\sqrt{3}x}{2} = u$, тогда $dx = \frac{2}{\sqrt{3}} du$, $u_н = \frac{\sqrt{3}}{3} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{1}{2}$, $u_в = \frac{2\sqrt{3}}{3} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = 1$. Находим интеграл

$$\int\limits_{\sqrt{3}/3}^{2\sqrt{3}/3} \frac{dx}{\sqrt{4-3x^2}} = \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{\sqrt{3}} \int\limits_{1/2}^{1} \frac{du}{\sqrt{1-u^2}} = \frac{1}{\sqrt{3}} \arcsin u \Big|_{1/2}^{1} =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{3}} \left(\arcsin 1 - \arcsin \frac{1}{2}\right) = \frac{1}{\sqrt{3}} \left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{6}\right) = \frac{\pi\sqrt{3}}{9}.$$

Пример 14.15. Вычислить $\int\limits_{1/2}^{3/2} \frac{dx}{3+4x^2}$.

Решение. $\int\limits_{1/2}^{3/2} \frac{dx}{3+4x^2} = \frac{1}{3} \int\limits_{1/2}^{3/2} \frac{dx}{1+\left(\frac{2x}{\sqrt{3}}\right)^2}$. Положим $\frac{2x}{\sqrt{3}} = u$, тогда $dx = \frac{\sqrt{3}}{2} du$, $u_н = \frac{2}{\sqrt{3}} \cdot \frac{1}{2} = \frac{\sqrt{3}}{3}$, $u_в = \frac{2}{\sqrt{3}} \cdot \frac{3}{2} = \sqrt{3}$. Находим интеграл:

$$\int\limits_{1/2}^{3/2} \frac{dx}{3+4x^2} = \frac{1}{3} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \int\limits_{\sqrt{3}/3}^{\sqrt{3}} \frac{du}{1+u^2} = \frac{\sqrt{3}}{6} \operatorname{arctg} u \Big|_{\sqrt{3}/3}^{\sqrt{3}} =$$

$$= \frac{\sqrt{3}}{6} \left(\operatorname{arctg} \sqrt{3} - \operatorname{arcctg} \frac{\sqrt{3}}{3}\right) = \frac{\sqrt{3}}{6} \left(\frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{6}\right) = \frac{\pi\sqrt{3}}{36}.$$

14.4.3. Интегрирование по частям. В предыдущей главе нами была выведена для неопределенных интегралов формула «интегрирования по частям»:

$$\int u(x)\,dv(x) = u(x)\,v(x) - \int v(x)\,du(x).$$

Сейчас мы получим ее аналог для определенных интегралов. Пусть $u(x)$, $v(x)$, $u'(x)$ и $v'(x)$ непрерывны на $[a, b]$. Так как $u(x) \cdot v(x)$ является одной из первообразных для функции $u(x)v'(x) + v(x)u'(x)$, то по формуле

Ньютона — Лейбница имеем

$$\int_a^b [u(x)\,v'(x) + v(x)\,u'(x)]\,dx = u(x)\,v(x)\Big|_a^b.$$

Применяя к интегралу, стоящему в левой части, свойство 1 (см. формулу (14.4)) и перенося второй из полученных интегралов в правую часть, будем иметь

$$\int_a^b u(x)\,v'(x)\,dx = u(x)\,v(x)\Big|_a^b - \int_a^b v(x)\,u'(x)\,dx. \quad (14.19)$$

Учитывая, что $v'(x)\,dx = dv(x)$ и $u'(x)\,dx = du(x)$, эту формулу обычно записывают так:

$$\int_a^b u(x)\,dv(x) = u(x)v(x)\Big|_a^b - \int_a^b v(x)\,du(x). \quad (14.20)$$

Ее называют *формулой интегрирования по частям для определенного интеграла.*

Пример 14.16. Вычислить $\int_2^e x \ln x\,dx$.

Решение. Положим $u = \ln x$, $dv = x\,dx$, тогда $du = dx/x$ $v = x^2/2$. Следовательно,

$$\int_2^e x \ln x\,dx = \frac{x^2}{2} \ln x \Big|_2^e - \frac{1}{2} \int_2^e x^2 \cdot \frac{dx}{x} =$$

$$= \frac{e^2}{2} - 2 \ln 2 - \frac{1}{2} \cdot \frac{x^2}{2}\Big|_2^e = \frac{e^2}{2} - 2 \ln 2 - \frac{1}{4}(e^2 - 4) =$$

$$= \frac{e^2}{2} - 2 \ln 2 - \frac{e^2}{4} + 1 = \frac{1}{4} e^2 - 2 \ln 2 + 1.$$

14.4.4. Приближенные методы вычисления определенных интегралов. В практике вычислений часто приходится иметь дело с интегралами от функций, первообразные от которых не являются элементарными функциями, т. е. не могут быть выражены в конечном виде, а также с интегралами от функций, заданных табличным или графическим способами. В этих случаях формула Ньютона — Лейбница не может быть применена и интеграл вычисляется с помощью приближенных методов.

В связи с все развивающимся применением вычислительных машин приближенные методы вычисления определенных интегралов получили широкое применение.

Приближенным методом вычислений отдается предпочтение и в тех случаях, когда функция имеет элементарную первообразную, но вычисление ее по формуле Ньютона—Лейбница является громоздким и требует большой вычислительной работы.

Наиболее универсальными методами приближенных вычислений определенных интегралов являются методы численного интегрирования, которые удобны и при использовании вычислительных машин.

При помощи формул численного интегрирования находят приближенное значение определенного интеграла по известным значениям функции в некоторых точках промежутка интегрирования.

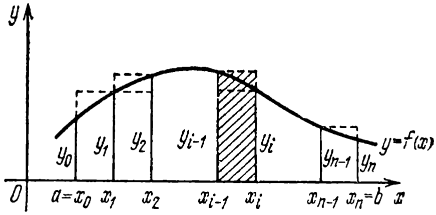


Рис. 14.5.

Для геометрической интерпретации некоторых наиболее употребительных формул такого рода будем считать подынтегральную функцию $f(x)$ неотрицательной на промежутке интегрирования $[a, b]$.

Пусть требуется вычислить $\int\limits_a^b f(x)\,dx$. Разобьем промежуток интегрирования $[a, b]$ на n равных частей точками деления

$$a = x_0 < x_1 < x_2 < \ldots < x_{n-1} < x_n = b.$$

Обозначим значения функции $f(x)$ в точках деления x_i через y_i:

$$y_i = f(x_i) \qquad (0 \leqslant i \leqslant n).$$

Величина $\frac{b-a}{n}$, равная длине частных промежутков $[x_{i-1}, x_i]$, называется *шагом интегрирования*.

Способ прямоугольников. В каждом из промежутков $[x_{i-1}, x_i]$ будем считать функцию $f(x)$ постоянной и равной ее значению либо на левом конце промежутка y_{i-1}, либо на правом конце y_i (рис. 14.5).

Через точки x_i $(1 \leqslant i \leqslant n)$ проведем ординаты $y_i = f(x_i)$ и разобьем криволинейную трапецию на полосы. Каждую полосу заменим прямоугольником с высотой y_{i-1} (или y_i) и с основанием (x_{i-1}, x_i). Сумма площадей таких прямоугольников приближенно равна площади криволинейной трапеции.

Приняв за высоту каждого прямоугольника левую ординату, получим

$$P \approx \sum_{i=1}^{n} y_{i-1}[x_i - x_{i-1}]$$

или

$$P \approx \frac{b-a}{n} \sum_{i=1}^{n} y_{i-1}.$$

Таким образом,

$$\int_a^b f(x)\,dx \approx \frac{b-a}{n} \sum_{i=1}^{n} y_{i-1} = \frac{b-a}{n}(y_0 + y_1 + \ldots + y_{n-1}). \quad (14.21)$$

Если за высоту каждого прямоугольника примем правую ординату, то формула примет вид

$$\int_a^b f(x)\,dx \approx \frac{b-a}{n} \sum_{i=1}^{n} y_i = \frac{b-a}{n}(y_1 + y_2 + \ldots + y_n). \quad (14.22)$$

Полученные формулы называют *формулами прямоугольников*.

С геометрической точки зрения при вычислении интеграла по формулам прямоугольников график функции $y = f(x)$ заменяется приближенно одной из ступенчатых ломаных и величина площади криволинейной трапеции, ограниченной кривой $y = f(x)$, приближенно принимается равной площади, ограниченной этой ломаной, т. е. равной сумме площадей этих прямоугольников. При увеличении числа делений n правая часть каждой из формул приближается к точному значению интеграла и в пределе при $n \to \infty$ равна ему.

Дадим оценку погрешности формулы прямоугольников. Пусть m_i — наименьшее значение функции $f(x)$, а M_i — наибольшее значение функции $f(x)$ в промежутке $[x_{i-1}, x_i]$ $(1 \leqslant i \leqslant n)$. Тогда площадь i-го прямоугольника заключена между числами $m_i \frac{b-a}{n}$ и $M_i \frac{b-a}{n}$. Погрешность S при замене криволинейной трапеции фигурой, состоящей из прямоугольников, будет удовлетворять условию

$$S<\sum_{i=1}^{n}(M_i-m_i)\frac{b-a}{n}=\frac{b-a}{n}\sum_{i=1}^{n}(M_i-m_i). \quad (14.23)$$

Предположим дополнительно, что на $[a, b]$ существует $f'(x)$ и что на этом промежутке $|f'(x)|\leqslant M$, тогда $M_i-m_i\leqslant M\cdot\Delta x_i=M\cdot\frac{b-a}{n}$ и формула (14.23) дает оценку

$$S\leqslant\frac{b-a}{n}\sum_{i=1}^{n}M\cdot\frac{b-a}{n}=\frac{(b-a)^2}{n}M. \quad (14.24)$$

Способ трапеций. Заменим полосы, на которые разделена криволинейная трапеция, не прямоугольниками, как в способе прямоугольников, а прямоугольными трапециями (рис. 14.6). Приняв за приближенное значение

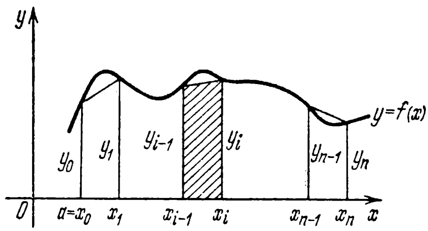


Рис. 14.6.

интеграла среднее арифметическое правых частей приближенных формул (14.21) и (14.22), полученных в способе прямоугольников, будем иметь

$$\int f(x)\,dx\approx\frac{b-a}{n}\left(\frac{y_0-y_n}{2}+y_1+y_2+\ldots+y_{n-1}\right). \quad (14.25)$$

Левая часть формулы (14.25) выражает площадь криволинейной трапеции, ограниченной сверху кривой $y=f(x)$. Правая часть этой формулы, которую можно записать и так:

$$\frac{b-a}{n}\left(\frac{y_0+y_1}{2}+\frac{y_1+y_2}{2}+\ldots+\frac{y_{n-1}+y_n}{2}\right), \quad (14.26)$$

представляет собой сумму площадей прямолинейных трапеций с основаниями y_{i-1} и y_i $(1\leqslant i\leqslant n)$ и высотой $\frac{b-a}{n}$.

В этом случае мы заменили площадь криволинейной трапеции приближенно площадью фигуры, состоящей из прямолинейных трапеций. При $n \to \infty$ правая часть формулы трапеций имеет своим пределом точное значение интеграла.

При одном и том же значении n формула трапеций обычно дает лучшее приближение, чем формулы прямоугольников.

Предположив дополнительно, что $f''(x)$ существует на $[a, b]$ и удовлетворяет неравенству $|f''(x)| \leqslant M$, можно доказать, что

$$S \leqslant \frac{(b-a)^2}{12n^2} \cdot M. \tag{14.27}$$

Мы здесь не будем проводить это доказательство.

Способ парабол (формула Симпсона). Выведем предварительно формулу для площади криволинейной трапеции, образованной осью Ox, параболой $y = ax^2 + bx + c$ и двумя ординатами, проведенными в точках 0 и h (при этом мы будем считать, что $ax^2 + bx + c \geqslant 0$ на $[0, h]$). Обозначим ординаты точек параболы $y = ax^2 + bx + c$, проведенных из начала, середины и конца отрезка $[0, h]$, через y_0, $y_{1/2}$, y_1 и соответствующие им абсциссы через x_0, $x_{1/2}$ и x_1.

Вычислим точное значение площади P этой трапеции:

$$P = \int_0^h (ax^2 + bx + c)\,dx = \left(\frac{ax^3}{3} + \frac{bx^2}{2} + cx\right)\Big|_0^h =$$

$$= \frac{h}{6}[2ah^2 + 3bh + 6c]. \tag{14.28}$$

Выразим площадь P через значения ординат y_0, $y_{1/2}$, y_1, учитывая, что $x_0 = 0$, $x_{1/2} = \frac{1}{2}h$, $x_1 = h$. Тогда

$$y_0 = c, \quad y_{1/2} = a \cdot \frac{h^2}{4} + b\frac{h}{2} + c, \quad y_1 = ah^2 + bh + c.$$

Сложим все три равенства, предварительно умножив второе равенство на 4:

$$y_0 + 4y_{1/2} + y_1 = c + ah^2 + 2bh + 4c + ah^2 + bh + c,$$

или

$$y_0 + 4y_{1/2} + y_1 = 2ah^2 + 3bh + 6c. \tag{14.29}$$

Сравнивая формулы (14.28) и (14.29), получим

$$P=\frac{h}{6}\left[y_0+4y_{1/2}+y_1\right]. \qquad (14.30)$$

Эта формула называется *малой формулой Симпсона.*

Так как в формуле (14.30) участвуют только значения y в начальной, средней и конечной точках промежутка, то она оказывается справедливой и для любого отрезка $[x_0, x_0+h]$. Действительно, сделав в интеграле

$$\int\limits_{x_0}^{x_0+h}(ax^2+bx+c)\,dx$$

замену переменной по формуле $t=x-x_0$, мы получим

$$\int\limits_0^h(at^2+b't+c')\,dt,$$

где $b'=b+2ax_0$, $c'=c+bx_0+ax_0^2$. Значения же функции $z=at^2+b't+c'$ в точках $t=0$, $t=h/2$ и $t=h$ будут совпадать со значениями функции $y=ax^2+bx+c$ в точках $x=x_0$, $x=x_0+\frac{h}{2}$ и $x=x_0+h$.

Воспользуемся полученным выводом для вычисления площади криволинейной трапеции. Разобьем промежуток $[a, b]$ на четное число равных частей ($n=2m$) и построим ординаты $y_i=f(x_i)$ в точках деления. Обозначим на данной кривой $y=f(x)$ точку с координатами $(x_i; y_i)$ через M_i (рис. 14.7). Заменим кривую $y=f(x)$ параболами, проведенными через каждые три соседние точки этой кривой. Длину каждой пары участков обозначим через h, $h=\frac{b-a}{m}$. На каждом участке длины h мы получили площадь «параболической трапеции» вместо площади исходной криволинейной трапеции. Складывая выражения для этих площадей, получаем

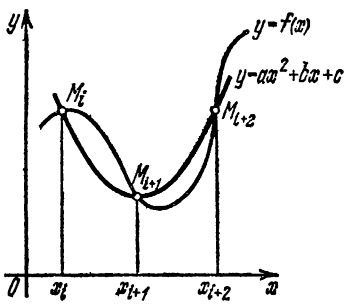


Рис. 14.7.

$$P\approx\frac{b-a}{m}\cdot\frac{1}{6}\left[(y_0+4y_1+y_2)+(y_2+4y_3+y_4)+\ldots\right.$$
$$\left.\ldots+(y_{n-2}+4y_{n-1}+y_n)\right]. \qquad (14.31)$$

Вспоминая, что $n=2m$ $(m=n/2)$, и сгруппировав слагаемые, получим формулу для приближенного вычисления площади криволинейной трапеции

$$P \approx \frac{b-a}{3n}[y_0+y_n+4(y_1+y_3+\ldots+y_{n-1})+ \\ +2(y_2+y_4+\ldots+y_{n-2})]. \quad (14.32)$$

Эта формула называется *формулой парабол* (*большой формулой Симпсона*).

Без доказательства отметим, что в предположении, что $f^{(IV)}(x)$ существует на $[a, b]$ и что $|f^{(IV)}(x)| \leqslant M$, где M — наибольшее значение $y^{IV}=f^{IV}(x)$ в промежутке $[a, b]$, погрешность S этой формулы оценивается из неравенства

$$S < \frac{(b-a)^5}{180n^4} M. \quad (14.33)$$

Заметим, что обычно при одном и том же выборе n формула парабол дает более точный результат, чем формулы прямоугольников и трапеций.

Отметим наконец, что условие $f(x) \geqslant 0$ отнюдь не является обязательным для применимости выведенных формул. Все эти формулы остаются в силе и в тех случаях, когда $f(x)$ в некоторых или даже во всех точках $[a, b]$ оказывается отрицательной. Мы здесь примем это утверждение без доказательства.

Пример 14.17. Вычислить точное и приближенное (по формулам прямоугольников, трапеций и параболической формуле) значение интеграла

$$\int_0^4 (3x^2+2x+4)\,dx.$$

Решение. Находим точное значение интеграла по формуле Ньютона — Лейбница

$$I=\int_0^4 (3x^2+2x+4)\,dx = x^3+x^2+4x \Big|_0^4 = 96.$$

Разделим отрезок на четыре равные части; тогда

$$h=\frac{b-a}{n}=\frac{4-0}{4}=1.$$

Точки деления: $x_0=a=0$, $x_1=a+h=1$, $x_2=a+2h=2$, $x_3=a+3h=3$ и $x_4=a+4h=4$.

Находим соответствующие значения функции

$$y_0 = 3\cdot 0^2 + 2\cdot 0 + 4 = 4,$$
$$y_1 = 3\cdot 1^2 + 2\cdot 1 + 4 = 9,$$
$$y_2 = 3\cdot 2^2 + 2\cdot 2 + 4 = 20,$$
$$y_3 = 3\cdot 3^2 + 2\cdot 3 + 4 = 37,$$
$$y_4 = 3\cdot 4^2 + 2\cdot 4 + 4 = 60.$$

Вычислим приближенное значение интеграла по формулам прямоугольников:

$$\int_a^b f(x)\,dx \approx \frac{b-a}{n}(y_0 + y_1 + y_2 + \ldots + y_{n-1})$$ (в данном случае с недостатком),

$$\int_a^b f(x)\,dx \approx \frac{b-a}{n}(y_1 + y_2 + \ldots + y_n)$$ (в данном случае с избытком),

$$I = \int_0^4 (3x^2 + 2x + 4)\,dx \approx 1\cdot(4 + 9 + 20 + 37) = 70$$ (с недостатком),

$$I = \int_0^4 (3x^2 + 2x + 4)\,dx \approx 1\cdot(9 + 20 + 37 + 60) = 126$$ (с избытком).

В каждом из вычислений допущена большая относительная погрешность:

$$S = \frac{I_{\text{точн}} - I_{\text{приб}}}{I_{\text{точн}}}\cdot 100\% = \frac{96-70}{96}\cdot 100\% \approx 27\%,$$

$$S = \frac{I_{\text{приб}} - I_{\text{точн}}}{I_{\text{точн}}}\cdot 100\% = \frac{126-96}{96}\cdot 100\% \approx 31\%.$$

Чтобы повысить точность вычисления, надо промежуток $[a, b]$ разделить на большее число точек деления.

Вычислим приближенное значение интеграла по формуле трапеций:

$$\int_a^b f(x)\,dx \approx \frac{b-a}{n}\left(\frac{y_0 + y_n}{2} + y_1 + y_2 + \ldots + y_{n-1}\right),$$

$$I = \int_0^4 (3x^2 + 2x + 4)\,dx \approx 1\cdot\left(\frac{4+60}{2} + 9 + 20 + 37\right) = 98.$$

При вычислении допущена погрешность:

$$S = \frac{98-96}{96}\cdot 100\% \approx 2\%.$$

Вычислим приближенное значение интеграла по параболической формуле:

$$\int_a^b f(x)\,dx \approx$$

$$\approx \frac{b-a}{3n}\left[y_0+y_n+4(y_1+y_3+\ldots+y_{n-1})+2(y_2+y_4+\ldots+y_{n-2})\right],$$

$$I=\int_0^4 (3x^2+2x+4)\,dx \approx \frac{4-0}{3\cdot 4}\left[4+60+4(9+37)+2\cdot 20\right]=\frac{1}{3}\cdot 288=96.$$

Приближенное значение здесь совпадает с точным (график подынтегральной функции — парабола).

§ 14.5. Несобственные интегралы

В определении определенного интеграла $\int_a^b f(x)\,dx$ пределы интегрирования считались конечными и подынтегральная функция принималась ограниченной в промежутке $[a, b]$. Если не будет выполняться хотя бы одно из указанных условий (т. е. когда промежуток интегрирования бесконечен или подынтегральная функция не ограничена в промежутке интегрирования), то приведенное ранее определение интеграла теряет смысл. Однако, исходя из теоретических и практических соображений, необходимо обобщить понятие определенного интеграла на случай, когда эти ограничения не выполняются.

Такие интегралы, в противоположность рассмотренным (*собственным*) интегралам, называются *несобственными*. Рассматриваются два основных типа несобственных интегралов: интегралы от непрерывных функций по бесконечному промежутку и интегралы от неограниченных функций по конечному промежутку. Мы рассмотрим только несобственный интеграл первого рода — несобственный интеграл с бесконечными пределами.

Пусть функция $f(x)$ задана в промежутке $[a, +\infty)$, и интегрируема в любой его части $[a, A]$, т. е. существует определенный интеграл $\int_a^A f(x)\,dx$ при любом $A > a$. Тогда, если существует конечный предел

$$\lim_{A\to\infty}\int_a^A f(x)\,dx = I,$$

то его называют *несобственным интегралом первого рода* или *несобственным интегралом функции* $f(x)$ *в промежутке* $[a, +\infty)$ и обозначают символом

$$I=\int_{a}^{+\infty} f(x)\,dx. \qquad (14.34)$$

В этом случае говорят, что несобственный интеграл *существует* или *сходится*. Если же предел не существует, то говорят, что несобственный интеграл (14.34) *не существует* или *расходится*.

Аналогично определяется несобственный интеграл от функции $f(x)$ по промежутку $(-\infty, a]$:

$$\int_{-\infty}^{a} f(x)\,dx=\lim_{A\to-\infty}\int_{A}^{a} f(x)\,dx. \qquad (14.35)$$

Несобственный интеграл от функции $f(x)$ по промежутку $(-\infty, +\infty)$ определяется так:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx=\int_{-\infty}^{a} f(x)\,dx+\int_{a}^{+\infty} f(x)\,dx, \qquad (14.36)$$

где a — произвольное число.

Интеграл (14.36) в левой части считается *сходящимся*, если сходятся оба интеграла в правой части; если какой-либо из них расходится, то *расходится* и интеграл в левой части. Сходимость интеграла и его числовое значение не зависят от выбора числа a.

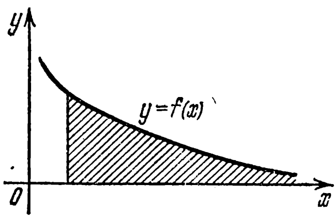


Рис. 14.8.

Геометрически несобственный интеграл $\int_{a}^{+\infty} f(x)\,dx$ от непрерывной неотрицательной функции $f(x)$ есть площадь криволинейной трапеции, ограниченной графиком функции, осью абсцисс и прямой $x=a$ и простирающейся в бесконечность (рис. 14.8). Если интеграл сходится, то эта трапеция имеет конечную площадь, если расходится, то площадь бесконечна.

Для вычисления несобственных интегралов применяется формула Ньютона—Лейбница. Если $F(x)$

первообразная для $f(x)$ на промежутке $[a, +\infty)$, то

$$\int_a^{+\infty} f(x)\,dx = \lim_{A\to+\infty}\int_a^A f(x)\,dx = \lim_{A\to+\infty}[F(A)-F(a)] =$$
$$= F(+\infty)-F(a) = F(x)\Big|_a^{+\infty}, \quad (14.37)$$

где

$$F(+\infty) = \lim_{A\to+\infty} F(A).$$

В этом случае «значение» $F(+\infty)$ показывает, сходится или расходится данный интеграл.

Пример 14.18.

$$\int_1^{+\infty}\frac{dx}{1+x^2} = \operatorname{arctg} x\Big|_1^{+\infty} = \lim_{x\to+\infty}\operatorname{arctg} x - \operatorname{arctg} 1 = \frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{4}.$$

Интеграл сходится и равен $\pi/4$.

Пример. 14.19.

$$\int_1^{+\infty}\frac{x\,dx}{1+x^2} = \lim_{A\to+\infty}\int_1^A\frac{x\,dx}{1+x^2} = \lim_{A\to+\infty}\left[\frac{1}{2}\ln(1+x^2)\right]\Big|_1^A =$$
$$= \frac{1}{2}\lim_{A\to+\infty}[\ln(1+A^2)-\ln 2] = +\infty.$$

Интеграл расходится.

§ 14.6. Вычисление площадей с помощью определенного интеграла

14.6.1. Две схемы применения определенного интеграла к вычислению различных величин. Определенный интеграл широко применяется при вычислениях различных геометрических и физических величин. Существуют две схемы для вычисления некоторой величины u, соответствующей некоторому промежутку $[a, b]$ изменения независимой переменной x.

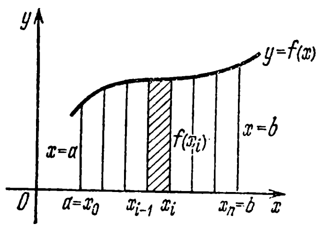


Рис. 14.9.

Схема I. Представим величину u в виде площади, ограниченной осью Ox, кривой $y=f(x)$, которая может быть задана или найдена из условия задачи, и прямыми $x=a$ и $x=b\,(a\leqslant x\leqslant b)$ (рис. 14.9).

Вычисление u с помощью определенного интеграла выполняется по следующей схеме (схема I):

1) Разбиваем величину u на большое число n малых слагаемых Δu_i:

$$u = \Delta u_1 + \Delta u_2 + \ldots + \Delta u_n = \sum_{i=1}^{n} \Delta u_i.$$

2) Выражаем приближенно каждое слагаемое Δu_i произведением $\Delta u_i = f(x_i)\,\Delta x$, где $\Delta x = \frac{b-a}{n}$.

3) Представляем приближенное значение u интегральной суммой

$$u = \sum_{i=1}^{n} f(x_i)\,\Delta x_i.$$

Если из условия задачи следует, что погрешность этого приближенного равенства стремится к нулю при $n \to \infty$, то искомая величина u будет выражаться определенным интегралом

$$u = \lim_{\Delta x \to 0} \sum_{a}^{b} f(x)\,\Delta x = \int_a^b f(x)\,dx.$$

Схема II. Приведенная выше схема I может быть заменена другой, более удобной для практического применения (схема II).

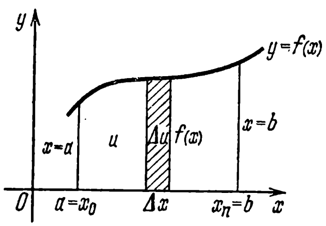


Рис. 14.10.

1) Пусть величина u получает приращение $\Delta u \approx f(x)\,\Delta x$, соответствующее изменению x на малую величину Δx; $f(x)$ рассматривается как данная или определяемая из условия задачи функция от x (рис. 14.10).

2) Заменим приращение Δu дифференциалом du (главная часть приращения Δu) и Δx дифференциалом dx $(\Delta x = dx)$, получим

$$du = f(x)\,dx.$$

3) Интегрируя это равенство в пределах от $x = a$ до $x = b$, получим

$$u = \int_a^b f(x)\,dx.$$

Заметим, что схему I иногда называют *методом интегральных сумм*, а схему II — *методом дифференциала.*

14.6.2. Площади плоских фигур. Пусть требуется вычислить площадь фигуры, ограниченной кривыми $y=\varphi_1(x)$ и $y=\varphi_2(x)$, и прямыми $x=a$ и $x=b$, где $a<b$ и $\varphi_1(x)\leqslant\varphi_2(x)$ на $[a, b]$ (рис. 14.11).

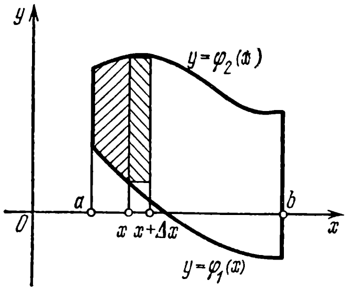


Рис. 14.11.

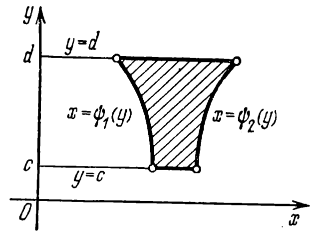


Рис. 14.12.

Пусть $S(x)$ — та часть искомой площади, которая отвечает отрезку $[a, x]$. Придав x приращение dx и приближенно рассматривая соответствующее приращение $S(x)$ как площадь прямоугольника с основанием dx и высотой $\varphi_2(x)-\varphi_1(x)$, получаем

$$dS(x)=[\varphi_2(x)-\varphi_1(x)]\,dx.$$

Интегрируя это равенство по промежутку от a до b, мы приходим к формуле

$$S=\int\limits_a^b[\varphi_2(x)-\varphi_1(x)]\,dx. \qquad (14.38)$$

Меняя ролями x и y, мы получим формулу

$$S=\int\limits_c^d[\psi_2(y)-\psi_1(y)]\,dy \qquad (14.39)$$

для площади фигуры, ограниченной кривыми $x=\psi_1(y)$ и $x=\psi_2(y)$ и прямыми $y=c$ и $y=d$, где $c<d$ и $\psi_1(v)\leqslant\leqslant\psi_2(y)$ на $[c, d]$ (рис. 14.12).

Если $\varphi_1(x) \equiv 0$, $\varphi_2(x) = f(x)$ (рис. 14.13), то из (14.38) мы получаем уже знакомую нам формулу

$$S = \int_a^b f(x)\,dx. \tag{14.40}$$

Если $\varphi_1(x) = f(x)$, $\varphi_2(x) \equiv 0$ (рис. 14.14), то

$$S = -\int_a^b f(x)\,dx. \tag{14.41}$$

Аналогично для фигур такого вида, как на рис. 14.15 и 14.16, мы получаем соответственно

$$S = \int_c^d g(y)\,dy, \tag{14.42}$$

$$S = -\int_c^d g(y)\,dy. \tag{14.43}$$

В большинстве встречающихся на практике случаев при решении задачи о нахождении площади данную фигуру удается разбить на конечное множество таких частей, к каждой из которых применима какая-нибудь из формул (14.38)—(14.43).

В простейших случаях оказывается возможным сразу применить одну из этих формул.

Пример 14.20. Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями

$$y = x^2 + 1, \qquad y = 0, \qquad x = -1 \quad \text{и} \quad x = 3.$$

Решение. Из условия задачи следует, что $f(x) = x^2 + 1$, $a = -1$, $b = 3$ (рис. 14.17). Тогда

$$S = \int_{-1}^{3} (x^2 + 1)\,dx = \left(\frac{x^3}{3} + x\right)\Bigg|_{-1}^{3} = 13\frac{1}{3} \text{ (кв. ед)}.$$

Пример 14.21. Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями $y = \sin x$, $y = 0$, $x = 0$ и $x = \pi$.

Решение. Искомая площадь ограничена полуволной синусоиды и осью Ox (рис. 14.18). Следовательно, $f(x) = \sin x$, $a = 0$, $b = \pi$, тогда

$$S = \int_0^{\pi} \sin x\,dx = -\cos x\,\Big|_0^{\pi} = -\cos\pi + \cos 0 = 2 \text{ (кв. ед.)}.$$

Пример 14.22. Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями $y = -x^2$, $y = 0$, $x = -1$ и $x = 3$ (рис. 14.19).

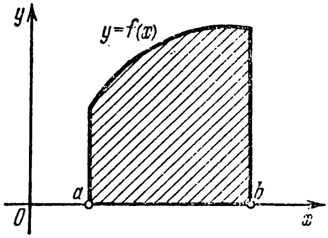


Рис. 14.13.

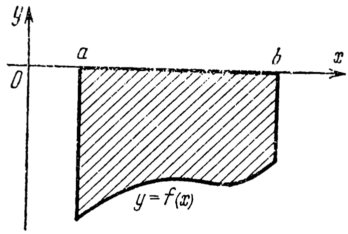


Рис. 14.14.

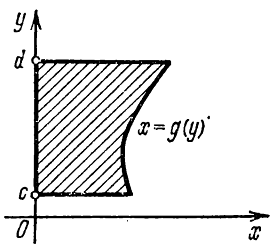


Рис. 14.15.

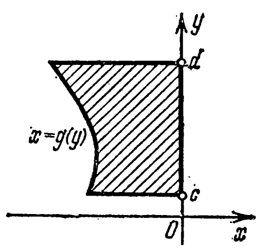


Рис. 14.16.

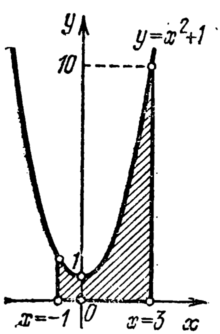


Рис. 14.17.

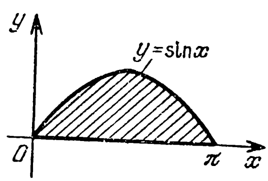


Рис. 14.18.

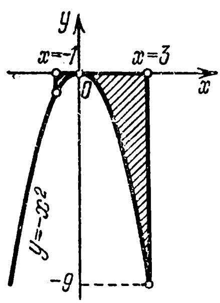


Рис. 14.19.

Решение. По формуле (14.41) имеем

$$S=-\int_{-1}^{3}-x^2\,dx=9\frac{1}{3}\text{ (кв. ед.)}.$$

Пример 14.23. Вычислить площадь круга $x^2+y^2=r^2$.

Решение. Дан круг радиуса r. Из уравнения окружности имеем $y=\sqrt{r^2-x^2}$ или $y=-\sqrt{r^2-x^2}$.

Найдем одну четвертую часть площади круга, расположенную в первом квадрате, тогда $x\geqslant 0$, $y\geqslant 0$, пределы интегрирования (в этом случае) $a=0$, $b=r$:

$$\frac{1}{4}S=\int_{0}^{r}\sqrt{r^2-x^2}\,dx.$$

Применим подстановку $x=r\sin u$, откуда $dx=r\cos u\,du$. Вычислим новые пределы интегрирования

$0=r\sin u_н$, $\sin u_н=0$, $u_н=0$, $\quad r=r\sin u_в$, $\sin u_в=1$, $u_в=\pi/2$,

следовательно,

$$\int_{0}^{r}\sqrt{r^2-x^2}\,dx=\int_{0}^{\pi/2}\sqrt{r^2-r^2\sin^2 u}\;r\cos u\,du=$$

$$=\int_{0}^{\pi/2}\sqrt{r^2\cos^2 u}\cdot r\cos u\,du=r^2\int_{0}^{\pi/2}\cos^2 u\,du=r^2\int_{0}^{\pi/2}\frac{1+\cos 2u}{2}\,du=$$

$$=\frac{r^2}{2}\left(u+\frac{1}{2}\sin 2u\right)\Big|_{0}^{\pi/2}=\frac{r^2}{2}\left(\frac{\pi}{2}+\frac{1}{2}\sin\pi\right)=\frac{\pi r^2}{4},$$

тогда

$$S=4\cdot\frac{\pi r^2}{4}=\pi r^2.$$

Пример 14.24. Вычислить площадь эллипса $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$.

Решение. $y^2=\frac{b^2(a^2-x^2)}{a^2}$, $y=+\frac{b}{a}\sqrt{a^2-x^2}$ или $y=-\frac{b}{a}\sqrt{a^2-x^2}$. Вычислим четвертую часть площади эллипса, расположенную в первом квадранте, тогда $x\geqslant 0$, $y\geqslant 0$, пределы интегрирования равны 0 и a. Следовательно,

$$\frac{1}{4}S=\frac{b}{a}\int_{0}^{a}\sqrt{a^2-x^2}\,dx.$$

Производя вычисления, аналогичные вычислениям примера 14.23, получим $\frac{1}{4}S=\frac{b}{a}\cdot\frac{\pi a^2}{4}=\frac{ab\pi}{4}$, откуда

$$S=\pi ab\text{ (кв. ед.)}.$$

Пример 14.25. Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями $y=x^2-2x+3$ и $y=3x-1$.

Решение. Для нахождения точек пересечения этих линий решим систему

$$y=x^2-2x+3, \quad y=3x-1,$$

откуда $x_1=1$, $y_1=2$ и $x_2=4$, $y_2=11$ (рис. 14.20). Находим теперь искомую площадь S (см. формулу (14.38)).

$$S=\int_1^4 [(3x-1)-(x^2-2x+3)]\,dx=$$

$$=\int_1^4 (-x^2+5x-4)\,dx=$$

$$=\left(-\frac{x^3}{3}+\frac{5x^2}{2}-4x\right)\Bigg|_1^4=4{,}5 \text{ (кв. ед.)}.$$

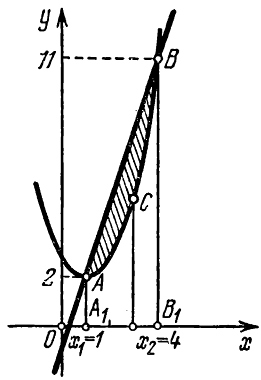


Рис. 14.20.

§ 14.7. Вычисление объемов

14.7.1. Понятие объема, его основные свойства. Нам известно, что окружающие нас тела занимают различные по величине части пространства. Поэтому величину части пространства, занимаемого некоторым геометрическим телом, можно характеризовать числом. Очевидно, что каждому рассматриваемому телу можно поставить в соответствие единственное положительное число. Это число будем называть *объемом тела.*

Основные свойства измерения объемов тел.

1. *Конгруэнтные тела имеют равные объемы.*

2. *Если тело разбить на части, то объем тела равен сумме объемов всех его частей.*

3. *Объем куба, длина ребра которого равна единице, равен единице.*

Объем тела будем обозначать буквой V.

На множестве всех многогранников существует функция $V(T)$, для которой можно указать соответствие каждого многогранника числу V такое, что будут выполняться свойства измерения объемов 1—3.

Следствие 14.2. *Если тело T_1 содержится внутри тела T, то $V(T_1)\leqslant V(T)$.*

Следствие 14.3. *Объем куба, ребро которого содержит a единиц (a—целое), равен a^3 (ед.^{3}). Объем куба с ребром p/q (p и q—целые), равен $(p/q)^3$ (ед.^{3}).*

Тела, имеющие равные объемы, называются *равновеликими. Если два тела равносоставлены, то они равновелики.*

На рис. 14.21 изображен куб и равновеликая ему треугольная призма, составленная из двух частей куба. Равновеликость этих тел следует из свойств 1 и 2. Из этого примера видно, что из равновеликости тел не следует их конгруэнтность.

За основную единицу объема в метрической системе мер принимают кубический метр (м^3)—объем куба, длина ребра которого равна 1 м.

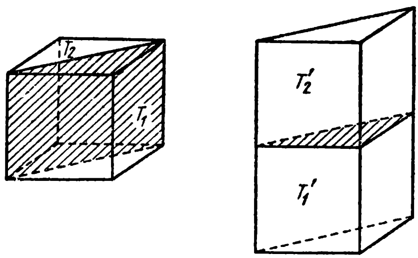


Рис. 14.21.

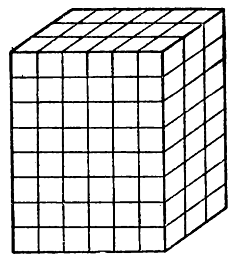


Рис. 14.22.

14.7.2. Объем прямоугольного и прямого параллелепипеда, прямой призмы и цилиндра. Теорема 14.1. *Объем прямоугольного параллелепипеда равен произведению трех его измерений.*

Доказательство. Рассмотрим три случая.

1. Измерениями прямоугольного параллелепипеда являются целые числа a, b, c. Разобъем параллелепипед на единичные кубы. Для этого проведем плоскости, параллельные граням (как это показано на рис. 14.22). В одном слое таких кубов будет ab, всех слоев будет c. По свойствам 2 и 3 всех единичных кубов будет abc.

2. Измерениями являются рациональные числа $a = p_1/q_1$, $b = p_2/q_2$ и $c = p_3/q_3$. Приведем дроби к общему знаменателю $q_1q_2q_3$:

$$\frac{p_1}{q_1} = \frac{p_1q_2q_3}{q_1q_2q_3}, \quad \frac{p_2}{q_2} = \frac{p_2q_1q_3}{q_1q_2q_3}, \quad \frac{p_3}{q_3} = \frac{p_3q_1q_2}{q_1q_2q_3}.$$

Мы получили новую единицу измерения, равную $\frac{1}{q_1q_2q_3}$ части прежней. Тогда в каждом ребре единичного первоначального куба будет содержаться $q_1q_2q_3$ новых линейных единиц и объем этого единичного куба будет равен на основании доказанного в первом пункте

$$(q_1q_2q_3)(q_1q_2q_3)(q_1q_2q_3) = (q_1q_2q_3)^3.$$

Измерения параллелепипеда в новых линейных единицах будут целыми числами $p_1q_2q_3$, $p_2q_1q_3$ и $p_3q_1q_2$. Тогда (см. случай 1) объем параллелепипеда будет равен произведению новых линейных единиц

$$(p_1q_2q_3)(p_2q_1q_3)(p_3q_1q_2).$$

Первоначальных кубических единиц будет в $(q_1q_2q_3)^3$ раз меньше, т. е. объем параллелепипеда, измеренный в первоначальных единицах, будет

$$V = \frac{(p_1q_2q_3)(p_2q_1q_3)(p_3q_1q_2)}{(q_1q_2q_3)^3} = \frac{p_1}{q_1} \cdot \frac{p_2}{q_2} \cdot \frac{p_3}{q_3} = abc.$$

3. Среди измерений a, b, c пусть хотя бы одно из них число иррациональное. В этом случае никакая доля единичного отрезка не уложится в соответствующем отрезке целое число раз. Каждое измерение представим в виде бесконечной десятичной дроби.

Пусть приближенные значения чисел a, b, c по недостатку с точностью до $1/10^n$ будут: $\bar{a}_n$, $\bar{b}_n$, $\bar{c}_n$ и соответственно по избытку $\overset{+}{a}_n$, $\overset{+}{b}_n$, $\overset{+}{c}_n$, тогда по следствию 14.2 имеем

$$\bar{V}_n < V < \overset{+}{V}_n, \tag{14.44}$$

где

$$\bar{V}_n = \bar{a}_n\bar{b}_n\bar{c}_n \quad \text{и} \quad \overset{+}{V}_n = \overset{+}{a}_n\overset{+}{b}_n\overset{+}{c}_n.$$

Тогда неравенство (14.44) запишем в виде

$$\bar{a}_n\bar{b}_n\bar{c}_n < V < \overset{+}{a}_n\overset{+}{b}_n\overset{+}{c}_n. \tag{14.45}$$

По определению произведения положительных вещественных чисел имеем

$$\bar{a}_n\bar{b}_n\bar{c}_n < abc < \overset{+}{a}_n\overset{+}{b}_n\overset{+}{c}_n. \tag{14.46}$$

Из неравенств (14.45) и (14.46) следует, что приближенные значения чисел V и abc, взятые с любой степенью точности, равны, следовательно,

$$V = abc. \tag{14.47}$$

Следствие 14.4. *Объем прямоугольного параллелепипеда равен произведению площади его основания на высоту.*

Пусть $ab = Q$ есть площадь основания параллелепипеда и $c = H$ — его высота. Тогда

$$V = abc = QH. \tag{14.48}$$

Объем прямого параллелепипеда. Теорема 14.2. *Объем прямого параллелепипеда равен произведению площади его основания на высоту.*

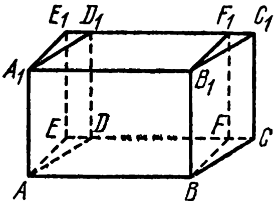


Рис. 14.23.

Доказательство. Пусть дан прямой параллелепипед AC_1 (рис. 14.23), основанием которого служит параллелограмм $ABCD$. Проведем через ребра AA_1 и BB_1 плоскости AEE_1A_1 и BFF_1B_1, перпендикулярные CD; тогда получим прямоугольный параллелепипед AF_1. Прямоугольник $AEFB$ равновелик параллелограмму $ADCB$. Докажем, что прямоугольный параллелепипед AF_1 равновелик данному прямому параллелепипеду AC_1. Прямые треугольные призмы $AEDA_1E_1D_1$ и $BFCB_1F_1C_1$ конгруэнтны, так как вектор $\overrightarrow{AB}$ отображает первую призму на вторую. Следовательно, данный и построенный параллелепипеды равносоставлены, но тогда они равновелики. Объем прямоугольного параллелепипеда равен $S_{AEFB}H$, тогда и объем прямого параллелепипеда равен $S_{AEFB}H = S_{ADCB}H = QH$.

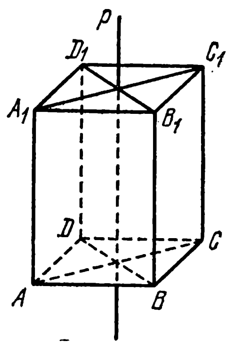


Рис. 14.24.

Объем прямой треугольной призмы. Теорема 14.3. *Объем прямой треугольной призмы равен произведению площади ее основания на высоту.*

Доказательство. Дана прямая треугольная призма $ABCA_1B_1C_1$ (рис. 14.24). Через середину стороны основания AC и A_1C_1 проведем ось p ($p \perp (ABC)$). Относительно оси p прямая призма $ABCA_1B_1C_1$ отображается на прямую призму $ADCA_1D_1C_1$. Объединение этих призм есть прямой параллелепипед $ABCDA_1B_1C_1D_1$. Симметричные призмы конгруэнтны, а конгруэнтные многогранники имеют равные объемы, поэтому объем V призмы $ABCA_1B_1C_1$ равен половине объема параллелепипеда $ABCDA_1B_1C_1D_1$, т. е.

$$V = \frac{1}{2} S_{ABCD} H = S_{ABC} H = QH. \qquad (14.49)$$

Объем многоугольной прямой призмы. Теорема 14.4. *Объем многоугольной прямой призмы равен произведению площади ее основания на высоту.*

Доказательство. Дана n-угольная прямая призма с высотой H (рис. 14.25). Через одно из боковых ребер призмы (AA_1) проведем диагональные плоскости, тогда призма разобьется на $n-2$ треугольных прямых призм с той же высотой H, площади оснований которых обозначим через $Q_1, Q_2, \ldots, Q_{n-2}$.

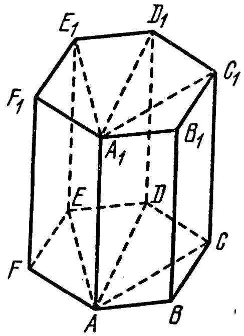


Рис. 14.25.

Объем данной прямой призмы V равен сумме объемов всех прямых треугольных призм, т. е.

$$V = Q_1H + Q_2H + \ldots + Q_{n-2}H = \\ = (Q_1 + Q_2 + \ldots + Q_{n-2}) H = QH,$$

где

$$Q_1 + Q_2 + \ldots + Q_{n-2} = Q.$$

Итак, объем прямой многоугольной призмы равен

$$V = QH. \qquad (14.50)$$

Объем цилиндра. Теорема 14.5. *Объем цилиндра равен произведению площади его основания на высоту.*

Пусть радиус основания цилиндра R, высота H. Впишем в цилиндр и опишем около него правильные призмы, объемы которых пусть соответственно равны $\overset{-}{V}_n$ и $\overset{+}{V}_n$. Цилиндр содержит вписанную призму и сам содержится в описанной призме, поэтому имеем

$$\overset{-}{V}_n < V < \overset{+}{V}_n,$$

но

$$\overset{-}{V}_n = \overset{-}{S}_n H \quad \text{и} \quad \overset{+}{V}_n = \overset{+}{S}_n H,$$

тогда

$$\overset{-}{S}_n H < V < \overset{+}{S}_n H,$$

где $\bar{S}_n$ — площадь правильного вписанного в основание цилиндра n-угольника, а $\overset{+}{S}_n$ — площадь правильного описанного около основания цилиндра n-угольника. Но, как известно,

$$\lim_{n\to\infty} \bar{S}_n = \pi R^2 \quad \text{и} \quad \lim_{n\to\infty} \overset{+}{S}_n = \pi R^2.$$

Следовательно, обе части двойного неравенства имеют один и тот же предел $\pi R^2 H$, а это означает, что объем цилиндра

$$V = \pi R^2 H. \tag{14.51}$$

14.7.3. Объем тела с заданными площадями поперечных сечений. Рассуждения, на которых было основано вычисление площади криволинейной трапеции, можно применить и при вычислении объемов геометрических тел. Пусть геометрическое тело T заключено между двумя параллельными плоскостями α и β (так, что эти плоскости будут «зажимать» рассматриваемое тело T с двух сторон). Выберем ось Ox так, чтобы она была перпендикулярна к плоскостям α и β. Обозначим абсциссы точек пересечения плоскостей α и β с осью Ox соответственно через a и b $(a < b)$ (рис. 14.26). Пусть плоскость γ перпендикулярна к оси Ox и пересекает ось в некоторой точке с абсциссой x $(a \leqslant x \leqslant b)$.

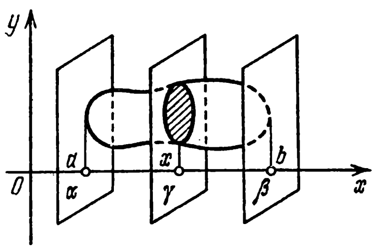


Рис. 14.26.

Предположим, что в сечении тела плоскостью γ получена фигура, которую будем называть *поперечным сечением*, площадь которой обозначим через $q(x)$. Площадь поперечного сечения $q(x)$ или нам известна, или мы можем ее вычислить при любом значении x в промежутке $[a, b]$. Следовательно, любому значению x из $[a, b]$ соответствует вполне определенная площадь поперечного сечения $q(x)$, т. е. $q(x)$ есть функция переменной x. Предположим, что $q(x)$ непрерывна на $[a, b]$.

Приступим к вычислению объема данного тела T. Для решения этой задачи разделим промежуток $[a, b]$ на n равных или неравных частей. Пусть абсциссы точек деления $a=x_0, x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}, x_n=b$ удовлетворяют неравенствам

$$a=x_0<x_1<x_2<\ldots<x_{n-1}<x_n=b.$$

В каждом из промежутков $[x_{i-1}, x_i]$ $(1 \leqslant i \leqslant n)$ выберем произвольно по точке с абсциссой ξ_i, которая будет удовлетворять условию $x_{i-1} \leqslant \xi_i \leqslant x_i$. Проведем через каждую точку ξ_i плоскость, перпендикулярную к оси Ox до пересечения с телом T. Получим поперечное сечение, площадь которого равна $q(\xi_i)$. Между плоскостями α и β построим n цилиндров (или призм, в зависимости от формы тела T), имеющих высоту, равную $x_i - x_{i-1} = \Delta x_i$ $(1 \leqslant i \leqslant n)$, и площадь основания, равную $q(\xi_i)$. Объем такого цилиндра (призмы) будет равен $q(\xi_i)\Delta x_i$. Объем тела, составленного из n цилиндров (призм), будет выражаться интегральной суммой

$$\sum_{i=1}^{n} q(\xi_i)\Delta x_i = q(\xi_1)\Delta x_1 + q(\xi_2)\Delta x_2 + \ldots + q(\xi_n)\Delta x_n.$$

Это тело из n цилиндров (призм) отличается от тела T тем меньше, чем мельче промежутки $[x_{i-1}, x_i]$ $(1 \leqslant i \leqslant n)$. Предел интегральной суммы, который обозначим через V, когда части, на которые мы разбиваем промежуток $[a, b]$, становятся сколь угодно малыми,

$$V = \lim_{\max \Delta x \to 0} \sum_{i=1}^{n} q(\xi_i)\Delta x_i$$

будем называть *объемом тела* T.

Предел интегральной суммы при $\max \Delta x$, стремящемся к нулю, обозначается символом

$$\int_a^b q(x)\,dx;$$

тогда

$$V = \int_a^b q(x)\,dx. \qquad (14.52)$$

Эта формула позволяет вычислять объем тела по площади его поперечного сечения $q(x)$.

Для тел призматических и цилиндрических (если за ось x взять прямую, перпендикулярную к основанию) функция $q(x)$ будет величиной постоянной, равной площади основания тела; для других тел (например, конических) $q(x)$ будет изменяться в зависимости от расстояния сечения от основания. Поэтому для вычисления объема тела по формуле (14.52) нужно прежде всего найти закон зависимости величины площади сечения $q(x)$ от расстояния его x до одного из параллельных оснований тела, причем основание тела может быть в частном случае линией или точкой (в шаре).

14.7.4. Объем наклонной призмы (наклонного цилиндра). В случае наклонной призмы (цилиндра), площадь основания которой Q и высота H, имеем $q(x) = Q$ (площадь сечения равна площади основания). Тогда, пользуясь выведенной формулой, имеем

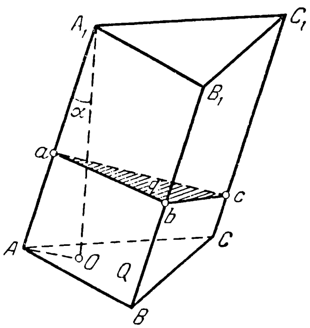


Рис. 14.27.

$$V_{\text{накл. призмы}} = \int_0^H Q\,dx = Qx\Big|_0^H = QH, \quad (14.53)$$

т. е. *объем наклонной призмы (наклонного цилиндра) равен произведению площади его основания на высоту.*

Необходимо отдельно рассмотреть другую теорему об объеме наклонной призмы, полезную при решении ряда задач.

Теорема 14.6. *Объем наклонной призмы равен произведению площади перпендикулярного сечения на боковое ребро.*

Дано: $ABCA_1B_1C_1$ — наклонная призма (рис. 14.27), $A_1A = l$ — боковое ребро, q — площадь перпендикулярного сечения (abc).

Требуется доказать: $V = ql$.

Доказательство. Объем наклонной призмы выражается формулой

$$V = QH, \quad (14.54)$$

где Q — площадь основания призмы, H — ее высота. Пусть высота призмы A_1O образует с боковым ребром A_1A угол α, тогда угол между плоскостями (ABC) и (abc) также будет равен α.

Из треугольника AA_1O имеем

$$H = l\cos\alpha. \quad (14.55)$$

По теореме о площади проекции многоугольника на плоскость получим $q = Q\cos\alpha$, откуда

$$Q = \frac{q}{\cos\alpha}. \qquad (14.56)$$

Подставив в (14.54) H и Q из (14.55) и (14.56), получим

$$V = \frac{q}{\cos\alpha}\, l\cos\alpha = ql,$$

т. е.

$$V = ql, \qquad (14.57)$$

где q — площадь перпендикулярного сечения, l — боковое ребро.

14.7.5. Объем пирамиды и усеченной пирамиды. Объем пирамиды. Теорема 14.7. *Объем пирамиды равен одной трети произведения площади ее основания на высоту.*

В пирамиде площади параллельных сечений и основания относятся как квадраты их расстояний от вершины (за ось x принимаем прямую, перпендикулярную к основанию, кроме того, будем считать $a = 0$, $b = H$), т. е. имеет место соотношение

$$\frac{q(x)}{Q} = \frac{x^2}{H^2},$$

откуда

$$q(x) = \frac{Q}{H^2}x^2,$$

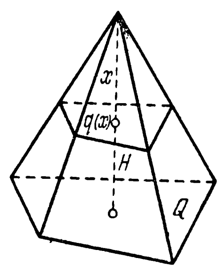


Рис. 14.28.

т. е. площадь сечения есть функция квадрата расстояния сечения от вершины пирамиды (рис. 14.28). Тогда объем пирамиды

$$V = \int_0^H q(x)\,dx = \frac{Q}{H^2}\int_0^H x^2dx = \frac{Q}{H^2}\,\frac{x^3}{3}\Big|_0^H = \frac{1}{3}QH,$$

таким образом,

$$V = \frac{1}{3}QH. \qquad (14.58)$$

Объем усеченной пирамиды. Теорема 14.8. *Объем усеченной пирамиды равен сумме объемов трех пирамид, имеющих высоту, равную высоте усеченной пирамиды, а основаниями: одна — нижнее основание усеченной пирамиды, другая — верхнее основание усеченной пирамиды и третья — среднее пропорциональное обоих оснований усеченной пирамиды, т. е.*

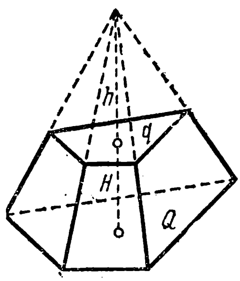


Рис. 14.29.

$$V=\frac{H}{3}(Q+q+\sqrt{Qq}). \quad (14.59)$$

Дана усеченная пирамида, площадь нижнего основания которой равна Q, верхнего основания q и высота H (рис. 14.29). Объем усеченной пирамиды равен разности между объемом полной пирамиды и объемом пирамиды, дополняющей усеченную пирамиду до полной,

$$V=\frac{1}{3}Q(H+h)-\frac{1}{3}qh, \quad (14.60)$$

где h — высота дополнительной пирамиды. Применяя свойство параллельных сечений в пирамиде, выразим h через q, Q и H:

$$\frac{Q}{q}=\frac{(H+h)^2}{h^2} \quad \text{или} \quad \frac{\sqrt{Q}}{\sqrt{q}}=\frac{H+h}{h}.$$

Применив свойство производной пропорции, получим

$$\frac{\sqrt{Q}-\sqrt{q}}{\sqrt{q}}=\frac{H}{h}, \quad \text{откуда} \quad h=\frac{H\sqrt{q}}{\sqrt{Q}-\sqrt{q}}.$$

Подставив значение h в равенство (14.60) и упростив, получим

$$V=\frac{H}{3}(Q+q+\sqrt{Qq}).$$

14.7.6. Объем тела вращения. Пусть фигура, ограниченная линиями $y=f(x)$, $x=a$, $x=b$, $y=0$, вращается вокруг оси Ox (рис. 14.30). Найдем объем V полученного тела вращения T.

Для получения формулы объема тела вращения используем формулу для вычисления объема тела по площади его поперечного сечения

$$V=\int_a^b q(x)\,dx.$$

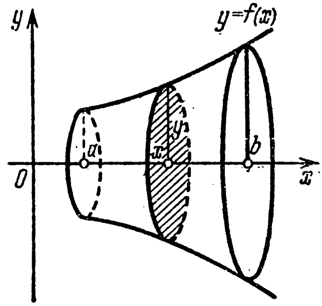


Рис. 14.30.

Сечение тела T плоскостью, перпендикулярной к оси Ox в точке x, есть круг радиуса y ($y=f(x)$), т. е. $q(x)=\pi y^2$. Тогда

$$V=\pi\int_a^b y^2dx. \qquad (14.61)$$

Пример 14.26. Вычислить объем тела, образованного вращением вокруг оси Ox фигуры, ограниченной осью Ox и полуволной синусоиды $y=\sin x$ $(0\leqslant x\leqslant\pi)$.

Решение. По формуле (14.61) получим

$$V=\pi\int_0^\pi \sin^2 x\,dx=\pi\int_0^\pi \frac{1-\cos 2x}{2}\,dx=\frac{\pi}{2}\left[x-\frac{\sin 2x}{2}\right]_0^\pi=\frac{\pi^2}{2} \text{ (куб. ед.).}$$

Пример 14.27. Вычислить объем тела, образованного вращением вокруг оси Ox фигуры, ограниченной линиями $y^2=2x$, $x=0$, $x=2$ и $y=0$ (рис. 14.31).

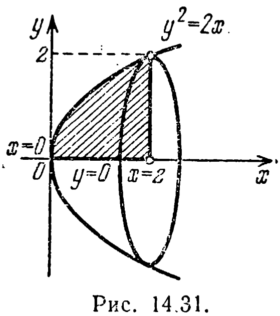


Рис. 14.31.

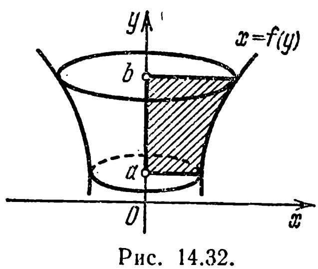


Рис. 14.32.

Решение. По формуле (14.61) получим

$$V=\pi\int_0^2 2x\,dx=\pi x^2\Big|_0^2=4\pi \text{ (куб. ед.).}$$

Полученное тело называется *параболоидом вращения*.

Если фигура, ограниченная линиями $x=f(y)$, $y=a$, $y=b$ и $x=0$ (рис. 14.32), вращается вокруг оси Oy, то объем V полученного тела вращения находится по формуле

$$V = \pi \int_a^b x^2 dy. \tag{14.62}$$

Пример 14.28. Вычислить объем тела, образованного вращением вокруг оси Oy фигуры, ограниченной линиями $y = x^2/2$, $y = 2$, $y = 4$ и $x = 0$ (рис. 14.33).

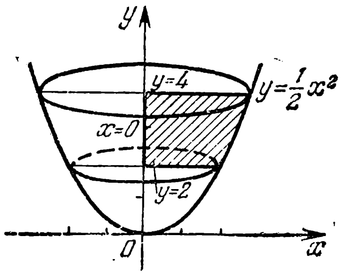


Рис. 14.33.

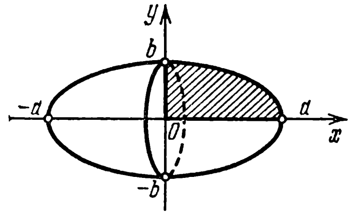


Рис. 14.34.

Решение. По формуле (14.62) получим

$$V = \pi \int_2^4 2y\,dy = \pi y^2 \Big|_2^4 = 12\pi \text{ (куб. ед.).}$$

Пример 14.29. Вычислить объем тела, образованного вращением вокруг оси Ox площадки, ограниченной эллипсом $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ (рис. 14.34).

Решение. Тело вращения—*эллипсоид*. Эллипс пересекает ось Ox в точках $x_1 = -a$ и $x_2 = a$. Из уравнения эллипса имеем $y^2 = \frac{b^2}{a^2}(a^2 - x^2)$. Эллипс симметричен относительно оси Oy, поэтому пределы интегрирования можно взять от 0 до a:

$$V_1 = \pi \int_0^a \frac{b^2}{a^2}(a^2 - x^2)\,dx = \pi\left(b^2 x - \frac{b^2 x^3}{3a^2}\right)\Big|_0^a = \frac{2}{3}\pi a b^2,$$

и полученный результат удвоить, т. е.

$$V = 2V_1 = 2 \cdot \frac{2}{3}\pi a b^2 = \frac{4}{3}\pi a b^2 \text{ (куб. ед.).}$$

Пример 14.30. Вычислить объем тела, образованного вращением вокруг оси Ox площадки, ограниченной гиперболой $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ и прямыми $y = 0$, $x = a$, $x = 2a$.

Решение. Тело вращения — *гиперболоид*. Из уравнения гиперболы имеем $y^2=\frac{b^2}{a^2}(x^2-a^2)$ (рис. 14.35). Тогда

$$V=\pi\int_a^{2a}\left(\frac{b^2x^2}{a^2}-b^2\right)dx=\pi\left(\frac{b^2x^3}{3a^2}-b^2x\right)\Big|_a^{2a}=$$

$$=\pi\left[\left(\frac{8ab^2}{3}-2ab^2\right)-\left(\frac{ab^2}{3}-ab^2\right)\right]=\frac{4\pi ab^2}{3} \text{ (куб. ед.).}$$

Пример 14.31. Вычислить объем тела, образованного вращением вокруг оси Ox площадки, ограниченной линиями $y^2=4x$ и $y=x$ (рис. 14.36).

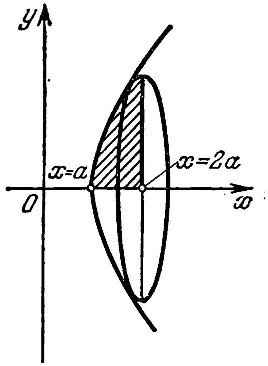


Рис. 14.35.

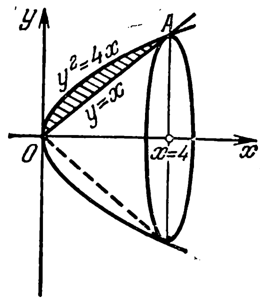


Рис. 14.36.

Решение. Решив систему $y^2=4x$ и $y=x$, находим точки пересечения параболы и прямой: $O(0;\ 0)$ и $A(4;\ 4)$. Следовательно, пределы интегрирования $a=0$ и $b=4$. Объем тела вращения представляет собой разность объемов параболоида, образованного вращением кривой $y^2=4x\,(V_1)$, и конуса, образованного вращением прямой $y=x\,(V_2)$. Тогда

$$V_1=\pi\int_0^4 4x\,dx=\pi\cdot 2x^2\Big|_0^4=32\pi,$$

$$V_2=\pi\int_0^4 x^2dx=\pi\frac{x^3}{3}\Big|_0^4=\frac{64\pi}{3},$$

откуда

$$V=V_1-V_2=32\pi-\frac{64}{3}\pi=\frac{32}{3}\pi \text{ (куб. ед.).}$$

14.7.7. Объем конуса и усеченного конуса. Объем конуса. Теорема 14.9. *Объем конуса равен одной трети произведения площади его основания на высоту:*

$$V=\frac{1}{3}\pi R^2H. \tag{14.63}$$

Дан конус с высотой H и радиусом основания R. Пусть конус получен от вращения прямоугольного треугольника OAB вокруг оси Ox (рис. 14.37). Составим уравнение образующей OA:

$$y = kx = x \operatorname{tg} \alpha = \frac{R}{H} x.$$

Применив формулу (14.61), получим

$$V = \pi \int_0^H \frac{R^2}{H^2} x^2 dx = \frac{\pi R^2}{H^2} \frac{x^3}{3} \Bigg|_0^H = \frac{\pi R^2}{H^2} \frac{H^3}{3} = \frac{1}{3} \pi R^2 H,$$

т. е. *объем конуса*

$$V = \frac{1}{3} \pi R^2 H.$$

Объем усеченного конуса. Теорема 14.10. *Объем усеченного конуса равен сумме объемов трех конусов, имеющих высоту, равную высоте усеченного конуса, а основаниями: один — нижнее основание усеченного конуса,*

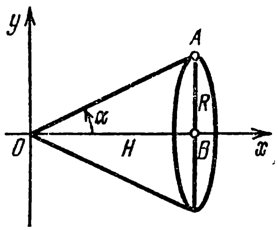


Рис. 14.37.

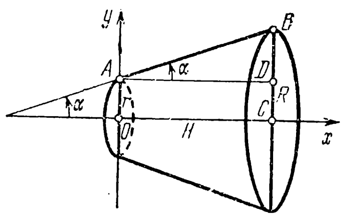


Рис. 14.38.

другой — верхнее основание усеченного конуса и третий — среднее пропорциональное обоих оснований усеченного конуса, т. е.

$$V = \frac{\pi H}{3} (R^2 + r^2 + Rr). \qquad (14.64)$$

Дан усеченный конус с высотой H и с радиусами оснований R и r. Пусть конус получен от вращения прямоугольной трапеции $OABC$ вокруг оси Ox (рис. 14.38).

Уравнение образующей усеченного конуса AB имеет вид $y = kx + b$, причем k и b соответственно равны

$$k = \operatorname{tg} \alpha = \frac{BD}{AD} = \frac{R - r}{H}, \qquad b = r.$$

Тогда искомое уравнение образующей будет

$$y=\frac{R-r}{H}x+r.$$

По формуле (14.61) получим

$$V=\pi\int\limits_0^H\left(\frac{R-r}{H}x+r\right)^2dx.$$

Положим $\frac{R-r}{H}x+r=u$, тогда $\frac{R-r}{H}dx=du$, откуда $dx=$ $=\frac{H}{R-r}du$. Находим новые пределы интегрирования

$$u_н=\frac{R-r}{H}\cdot 0+r=r,\qquad u_в=\frac{R-r}{H}\cdot H+r=R.$$

Вычисляем интеграл с новыми пределами интегрирования

$$V=\pi\int\limits_r^R u^2\cdot\frac{H}{R-r}du=\frac{\pi H}{R-r}\cdot\frac{u^3}{3}\Big|_r^R=$$

$$=\frac{\pi H}{3(R-r)}(R^3-r^3)=\frac{\pi H}{3}(R^2+r^2+Rr),$$

т. е. *объем усеченного конуса*

$$V=\frac{\pi H}{3}(R^2+r^2+Rr).$$

14.7.8. Объем шара и его частей. Объем шара. *Шар*—тело вращения. Пусть образующей шара будет окружность с центром в начале координат $x^2+y^2=R^2$, тогда $y^2=R^2-x^2$ (рис. 14.39). По формуле (14.61) получим

$$V=\pi\int\limits_{-R}^R(R^2-x^2)\,dx=2\pi\int\limits_0^R(R^2-x^2)\,dx=2\pi\left(R^2x-\frac{x^3}{3}\right)\Big|_0^R=$$

$$=2\pi\left(R^3-\frac{R^3}{3}\right)=\frac{4}{3}\pi R^3,$$

т. е. *объем шара*

$$V=\frac{4}{3}\pi R^3. \qquad (14.65)$$

Заменив в формуле (14.65) $R=D/2$, получим формулу, выражающую объем шара через его диаметр,

$$V=\frac{1}{6}\pi D^3. \qquad (14.66)$$

Объем шарового сегмента. *Шаровой сегмент* мы получим, вращая половину кругового сегмента ABC вокруг оси Ox (рис. 14.40). Пусть высота шарового

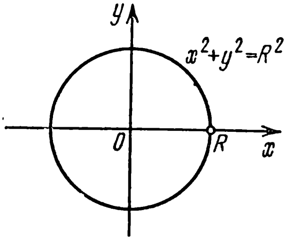


Рис. 14.39.

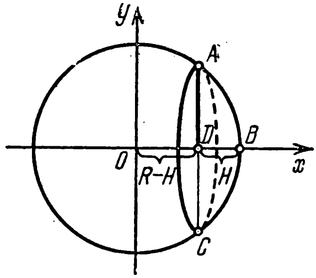


Рис. 14.40.

сегмента $BD=H$, а радиус шара R; тогда по формуле (14.61) получим

$$V=\pi\int_{R-H}^{R}(R^2-x^2)\,dx=\pi\left(R^2x-\frac{x^3}{3}\right)\Bigg|_{R-H}^{R}=$$
$$=\pi\left[\left(R^3-\frac{R^3}{3}\right)-\left(R^2(R-H)-\frac{(R-H)^3}{3}\right)\right]=$$
$$=\pi\left[R^3-\frac{R^3}{3}-R^3+R^2H+\frac{R^3}{3}-R^2H+RH^2-\frac{H^3}{3}\right]=$$
$$=\pi\left(RH^2-\frac{H^3}{3}\right)=\pi H^2\left(R-\frac{H}{3}\right),$$

т. е. *объем шарового сегмента*

$$V=\pi H^2\left(R-\frac{H}{3}\right). \qquad (14.67)$$

Итак, *объем шарового сегмента равен объему цилиндра, у которого радиус основания есть высота сегмента, а высота равна радиусу шара, уменьшенному на треть высоты сегмента.*

Объем шарового сектора. *Шаровой сектор* (сектор 1-го рода) можно получить от вращения кругового сектора OBC вокруг оси Ox (рис. 14.41). *Объем шарового сектора равен сумме объемов конуса OAC и шарового сегмента ABC.* Будем считать известными величинами радиус шара R и высоту шарового сегмента H.

Применив формулы (14.63) и (14.67), получим

$$V=\frac{1}{3}\pi\cdot DC^2\cdot OD+\pi DB^2\left(OB-\frac{DB}{3}\right).$$

Так как $OB = R$, $DB = H$, то $OD = R - H$. Из ΔODC имеем $DC^2 = R^2 - (R-H)^2 = R^2 - R^2 + 2RH - H^2 = 2RH - H^2$. Подставив эти значения в выражение объема шарового сектора, получим

$$V = \frac{1}{3}\pi(2RH - H^2)(R - H) + \pi H^2\left(R - \frac{H}{3}\right) =$$
$$= \frac{\pi}{3}\left[2R^2H - 2RH^2 - RH^2 + H^3 + 3RH^2 - H^3\right] =$$
$$= \frac{\pi}{3}2R^2H = \frac{2}{3}\pi R^2H,$$

т. е. *объем шарового сектора*

$$V = \frac{2}{3}\pi R^2H. \qquad (14.68)$$

Объем шарового слоя. *Шаровой слой* получаем от вращения фигуры $MABN$ вокруг оси Ox (рис. 14.42),

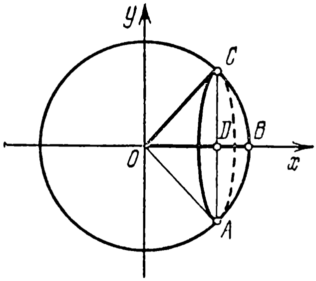


Рис. 14.41.

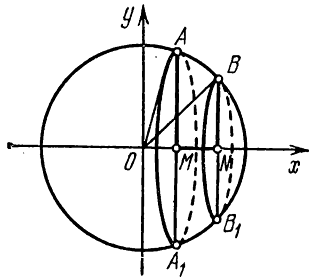


Рис. 14.42.

где AB — образующая шарового слоя — дуга окружности $x^2 + y^2 = R^2$ с радиусом R и центром в начале координат. Пусть $AM = r_1$, $BN = r_2$, $OM = h$ и $MN = H$. Будем считать известными величинами высоту шарового слоя H и радиусы оснований слоя r_1 и r_2. По формуле (14.61), учитывая, что $y^2 = R^2 - x^2$, получим

$$V = \pi\int_h^{H+h}(R^2 - x^2)dx = \pi\left(R^2x - \frac{x^3}{3}\right)\Bigg|_h^{H+h} =$$
$$= \pi\left[R^2(H+h) - \frac{(H+h)^3}{3} - R^2h + \frac{h^3}{3}\right] =$$
$$= \frac{\pi}{3}\left[3R^2H + 3R^2h - H^3 - 3H^2h - 3Hh^2 - h^3 - 3R^2h + h^3\right] =$$
$$= \frac{\pi}{3}\left[3R^2H - H^3 - 3H^2h - 3Hh^2\right] = \pi H\left[R^2 - h^2 - Hh - \frac{1}{3}H^2\right].$$

Исключим неизвестные величины R и h. Из $\triangle OAM$ имеем $R^2=h^2+r_1^2$, а из $\triangle OBN$ имеем $R^2=(H+h)^2+r_2$, тогда $h^2+r_1^2=(H+h)^2+r_2^2$, или $h^2+r_1^2=H^2+2Hh+h^2+r_2^2$, откуда

$$Hh=\frac{r_1^2-r_2^2-H^2}{2}.$$

Подставив значения R^2 и Hh в выражение объема шарового слоя, получим

$$V=\pi H\left(h^2+r_1^2-h^2-\frac{r_1^2-r_2^2-H^2}{2}-\frac{1}{3}H^2\right)=$$

$$=\frac{1}{6}\pi H(6r_1^2-3r_1^2+3r_2^2+3H^2-2H^2)=$$

$$=\frac{1}{6}\pi H(3r_1^2+3r_2^2+H^2),$$

т. е. *объем шарового слоя*

$$V=\frac{1}{6}\pi H(3r_1^2+3r_2^2+H^2). \qquad (14.69)$$

Представим формулу (14.69) в таком виде:

$$V=\frac{1}{2}(\pi r_1^2+\pi r_2^2)H+\frac{1}{6}\pi H^3. \qquad (14.70)$$

Объем шарового слоя равен произведению полусуммы площадей его оснований на высоту плюс объем шара, диаметр которого равен высоте слоя.

Следствие 14.5. *Положив в формуле* (14.69) $r_2=0$, *получим формулу для вычисления объема шарового сегмента*

$$V=\frac{1}{6}\pi H(3r_1^2+H^2), \qquad (14.71)$$

где r_1 *— радиус основания сегмента,* H *— высота сегмента.*

Следствие 14.6. *Если положим в формуле* (14.69) $r_1=0$, $r_2=0$, $H=2R$, *то шаровой слой обратится в полный шар, и мы получим формулу объема шара.*

В самом деле, *объем шара*

$$V=\frac{1}{6}\pi\cdot 2R(2R)^2=\frac{1}{3}\pi R\cdot 4R^2=\frac{4}{3}\pi R^3.$$

§ 14.8. Длина дуги и площадь поверхности вращения

14.8.1. Длина дуги кривой. Дифференциал дуги. Пусть плоская кривая AB (рис. 14.43) задана уравнением $y=f(x)$, $a\leqslant x\leqslant b$, где $f(x)$ и $f'(x)$ — непрерывные функции в промежутке $[a, b]$. Установим понятие длины дуги кривой

AB. Разобъем кривую AB на n произвольных частей точками

$$A = M_0,\ M_1,\ M_2, \ldots,\ M_{i-1},\ M_i, \ldots,\ M_n = B.$$

Соединив эти точки хордами, получим вписанную ломаную линию. Пусть периметр этой ломаной равен P_n.

Определение 14.1. *Если существует конечный предел l периметра P_n, вписанной в кривую ломаной, когда*

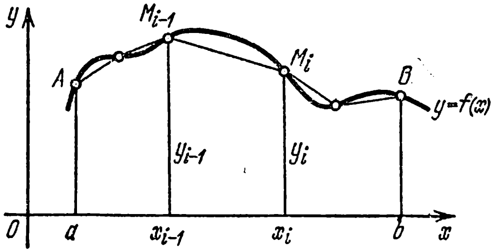


Рис. 14.43.

длина наибольшего из ее звеньев λ стремится к нулю, то этот предел называется длиной дуги AB:

$$l = \lim_{\lambda \to 0} P_n.$$

Кривую, длина которой существует, называют *спрямляемой*.

Вычислим длину дуги кривой между ее точками A и B, абсциссы которых соответственно равны a и b.

Пусть абсциссы точек кривой $A = M_0,\ M_1, \ldots,\ M_{i-1}$, $M_i, \ldots,\ M_n = B$ будут

$$a = x_0 < x_1 < \cdots < x_{i-1} < x_i < \ldots < x_n = b \text{ (рис. 14.43).}$$

Возьмем точки $M_{i-1}(x_{i-1};\ y_{i-1})$ и $M_i(x_i;\ y_i)$. Вычислим длину одного звена $l_i = M_{i-1}M_i$ по формуле расстояния между двумя точками

$$l_i = \sqrt{(x_i - x_{i-1})^2 + (y_i - y_{i-1})^2} \qquad (1 \leqslant i \leqslant n).$$

По формуле Лагранжа

$$f(x_i) - f(x_{i-1}) = f'(\xi_i)(x_i - x_{i-1}),$$

где

$$x_{i-1} \leqslant \xi_i \leqslant x_i, \qquad x_i - x_{i-1} = \Delta x_i.$$

Тогда

$$l_i = \sqrt{(\Delta x_i)^2 + [f'(\xi_i)]^2 (\Delta x_i)^2}.$$

Периметр всей ломаной линии AB равен

$$P_n = \sum_{i=1}^{n} l_i = \sum_{i=1}^{n} \sqrt{1+[f'(\xi_i)]^2}\, \Delta x_i.$$

Мы получили интегральную сумму для непрерывной функции $\sqrt{1+[f'(x)]^2}$ на промежутке $[a, b]$; предел этой суммы существует, когда $\lambda \to 0$, следовательно,

$$l = \lim_{\lambda\to 0} P_n = \lim_{\lambda\to 0} \sum_{i=1}^{n} \sqrt{1+[f'(\xi_i)]^2}\, \Delta x_i = \int_a^b \sqrt{1+[f'(x)]^2} dx,$$

т. е.

$$l = \int_a^b \sqrt{1+[f'(x)]^2}\, dx. \qquad (14.72)$$

Если кривая задана уравнением $x = f(y)$, то

$$l = \int_a^b \sqrt{1+[f'(y)]^2}\, dy. \qquad (14.73)$$

Пусть перемещающейся по кривой AB точке M соответствует переменная абсцисса x, где $x \in [a, b]$. Тогда длина дуги AM будет функцией от x. Заменив в формуле (14.72) верхний предел b определенного интеграла переменной x, получим для длины дуги AM формулу

$$l(x) = \int_a^x \sqrt{1+[f'(t)]^2}\, dt.$$

Подынтегральная функция непрерывна, тогда, дифференцируя интеграл по переменному верхнему пределу, получим

$$\frac{dl}{dx} = \sqrt{1+[f'(x)]^2}\,. \qquad (14.74)$$

Отсюда получим формулу для дифференциала дуги

$$dl = \sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}\, dx,$$

или

$$dl = \sqrt{dx^2 + dy^2}. \qquad (14.75)$$

Дадим геометрическое толкование дифференциала дуги (рис. 14.44). Дифференциал дуги dl численно равен длине отрезка MN касательной к кривой в точке M, т. е. является гипотенузой прямоугольного треугольника с катетами dx и dy.

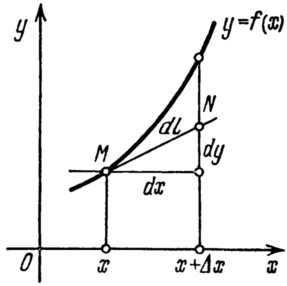


Рис. 14.44.

Пример 14.32. Найти длину окружности $x^2+y^2=R^2$.

Решение. Дифференцируя уравнение окружности, найдем

$$2x+2y\frac{dy}{dx}=0, \quad \text{т. е.} \quad \frac{dy}{dx}=-\frac{x}{y}.$$

По формуле (14.72) вычислим длину дуги четверти окружности, взяв пределы интегрирования от 0 до R

$$l=\int_0^R \sqrt{1+\left(-\frac{x}{y}\right)^2}dx=\int_0^R \sqrt{\frac{y^2+x^2}{y^2}}dx=\int_0^R \sqrt{\frac{R^2}{y^2}}\,dx=$$

$$=R\int_0^R \frac{dx}{\sqrt{R^2-x^2}}=R\arcsin\frac{x}{R}\Big|_0^R=R\,(\arcsin 1-\arcsin 0)=R\cdot\frac{\pi}{2},$$

откуда длина окружности

$$C=4l=4\cdot\frac{\pi R}{2}=2\pi R.$$

Пример 14.33. Вычислить длину дуги параболы $y^2=4x$ между точками $O\ (0;\ 0)$ и $A\ (5/4;\ \sqrt{5})$.

Решение. Для вычисления длины дуги применим формулу (14.73), т. е. за аргумент примем переменную y; тогда $x=y^2/4$, $\frac{dx}{dy}=\frac{1}{2}y$, следовательно,

$$l=\int_0^{\sqrt{5}} \sqrt{1+\left(\frac{1}{2}y\right)^2}dy=\frac{1}{2}\int_0^{\sqrt{5}} \sqrt{4+y^2}\,dy.$$

Для вычисления интеграла применим формулу из примера 13.56, положив в ней $m=a^2=4$,

$$\int\sqrt{x^2+a^2}\,dx=\frac{1}{2}x\sqrt{x^2+a^2}+\frac{a^2}{2}\ln(x+\sqrt{x^2+a^2})+C.$$

Следовательно,

$$l=\frac{1}{2}\left[\frac{1}{2}y\sqrt{y^2+4}+\frac{4}{2}\ln(y+\sqrt{y^2+4})\right]\Big|_0^{\sqrt{5}}=$$

$$=\frac{3}{4}\sqrt{5}+\ln\frac{3+\sqrt{5}}{2}\approx 2{,}095 \text{ (ед. дл.)}.$$

Пример 14.34. Найти длину цепной линии $y=\frac{a}{2}\left(e^{x/a}+e^{-x/a}\right)$ между точками $A\ (0;\ a)$ и $B\ (a;\ a\ (e^2+1)/2e)$.

Решение. Из уравнения цепной линии находим

$$\frac{dy}{dx}=\frac{1}{2}\left(e^{x/a}-e^{-x/a}\right).$$

По формуле (14.72) получаем

$$l=\int_0^a \sqrt{1+\left[\frac{1}{2}\left(e^{x/a}-e^{-x/a}\right)\right]^2}dx=\int_0^a \sqrt{\left(\frac{1}{2}e^{x/a}+\frac{1}{2}e^{-x/a}\right)^2}dx=$$

$$=\frac{1}{2}\int_0^a \left(e^{x/a}+e^{-x/a}\right)dx=\frac{1}{2}a\left(e^{x/a}-e^{-x/a}\right)\Big|_0^a=$$

$$=\frac{a}{2}\left(e-\frac{1}{e}\right)=\frac{a\ (e^2-1)}{2e}\ \text{(ед. дл.)}.$$

14.8.2. Площадь поверхности вращения. Пусть дуга AB кривой $y=f(x)$ вращается вокруг оси Ox, описывая поверхность, ограниченную с боков плоскостями $x=a$ и $x=b$ (рис. 14.45). Пусть функции $f(x)$ и $f'(x)$ непрерывны в промежутке $[a,\ b]$.

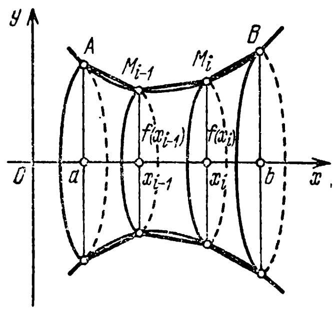


Рис. 14.45.

Разобьем отрезок $[a,\ b]$ на n частей точками

$$a=x_0<x_1<x_2<\ldots$$
$$\ldots<x_{i-1}<x_i<\ldots<x_n=b_n.$$

Проведем через точки деления плоскости, перпендикулярные к оси Ox. Эти плоскости пересекут кривую AB в точках $A=M_0$, M_1, M_2, $\ldots$, M_{i-1}, M_i, $\ldots$, $M_n=B$. На каждом участке кривой $[M_{i-1},\ M_i]$ $(1\leqslant i\leqslant n)$ заменим дугу отрезком $[M_{i-1},\ M_i]$ и рассмотрим поверхность, образованную при вращении ломаной $M_0M_1\ldots M_{n-1}M_n$ вокруг оси Ox. Эта поверхность состоит из усеченных конусов (или цилиндров), площадь боковой поверхности которых вычисляется по формуле

$$S=2\pi\frac{R_1+R_2}{2}l$$

(где R_1 и R_2 — радиусы оснований, а l — образующая).

Если число точек деления n будет неограниченно возрастать, и наибольший из $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$ будет стремиться к нулю (мы его снова обозначим λ), то каждое звено ломаной $[M_{i-1} M_i]$ будет уменьшаться и площадь поверхности, составленной из конусов, будет изменяться.

Определение 14.2. *Предел, к которому стремится площадь поверхности, образованной вращением ломаной $M_0 M_1 \ldots M_{n-1} M_n$, вписанной в дугу AB, при неограниченном увеличении числа ее звеньев (и при неограниченном уменьшении каждого ее звена), называется площадью поверхности, образованной вращением дуги AB.*

Вычислим площадь поверхности конуса, образованного вращением звена $[M_{i-1} M_i]$ $(1 \leqslant i \leqslant n)$,

$$S = 2\pi \frac{f(x_{i-1}) + f(x_i)}{2} |M_{i-1} M_i|,$$

где $|M_{i-1} M_i|$ — длина звена ломаной.

В п. 14.8.1 при вычислении длины дуги кривой мы установили, что

$$|M_{i-1} M_i| = \sqrt{1 + [f'(\xi_i)]^2} \, \Delta x_i, \qquad \text{где} \qquad x_{i-1} \leqslant \xi_i \leqslant x_i.$$

Запишем сумму длин звеньев ломаной $M_0 M_1 \ldots M_{n-1} M_n$

$$\sum_{i=1}^{n} 2\pi \frac{f(x_{i-1}) + f(x_i)}{2} \sqrt{1 + [f'(\xi_i)]^2} \, \Delta x_i. \qquad (14.76)$$

Разности $(\xi_i - x_{i-1})$, $(x_i - \xi_i)$ будем считать достаточно малыми и, учитывая, что $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a, b]$, заменим $f(x_{i-1})$, $f(x_i)$ числом $f(\xi_i)$. Тогда сумму (14.76) запишем так:

$$\sum_{i=1}^{n} 2\pi f(\xi_i) \sqrt{1 + [f'(\xi_i)]^2} \, \Delta x_i. \qquad (14.77)$$

Эта сумма является интегральной суммой для функции $2\pi f(x) \sqrt{1 + [f'(x)]^2}$ на отрезке $[a, b]$. Предел суммы (14.77) существует при $\lambda \to 0$, тогда площадь поверхности S будет

$$S = \lim_{\lambda \to 0} \sum_{i=1}^{n} 2\pi f(\xi_i) \sqrt{1 + [f'(\xi_i)]^2} \, \Delta x_i =$$

$$= \int_a^b 2\pi f(x) \sqrt{1 + [f'(x)]^2} \, dx,$$

т. е.

$$S=2\pi\int_a^b f(x)\sqrt{1+[f'(x)]^2}\,dx. \qquad (14.78)$$

При вращении дуги AB вокруг оси Oy имеем

$$S=2\pi\int_a^b f(y)\sqrt{1+[f'(y)]^2}\,dy. \qquad (14.79)$$

14.8.3. Площадь поверхности сферы, сферического пояса и сферического сегмента. Площадь поверхности сферы. Пусть поверхность сферы образована вращением окружности $x^2+y^2=R^2$ вокруг оси Ox. Дифференцируем уравнение окружности

$$2x+2y\frac{dy}{dx}=0, \qquad \frac{dy}{dx}=-\frac{x}{y}.$$

Найдем дифференциал дуги (здесь $y\geqslant 0$):

$$dl=\sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}\,dx=\sqrt{1+\left(-\frac{x}{y}\right)^2}\,dx=$$

$$=\sqrt{\frac{y^2+x^2}{y^2}}\,dx=\frac{R\,dx}{y}.$$

Подставив значение дифференциала в формулу (14.78) и взяв пределы интегрирования $a=-R$, $b=R$, получим

$$S=2\pi\int_{-R}^{R} y\frac{R\,dx}{y}=2\pi R\int_{-R}^{R} dx=2\pi Rx\Big|_{-R}^{R}=4\pi R^2,$$

т. е. *поверхность сферы*

$$S=4\pi R^2. \qquad (14.80)$$

Площадь поверхности сферического пояса. Пусть сферический пояс высоты H образован при вращении окружности $x^2+y^2=R^2$ вокруг оси Ox. Как и при вычислении поверхности сферы, имеем $dl=\frac{R\,dx}{y}$. Пределы интегрирования возьмем от a до $a+H$ (рис. 14.46). По формуле (14.78) получим

$$S=2\pi\int_a^{a+H} y\frac{R\,dx}{y}=2\pi R\int_a^{a+H} dx=2\pi Rx\Big|_a^{a+H}=$$

$$=2\pi R(a+H-a)=2\pi RH,$$

т. е. *площадь сферического пояса*

$$S = 2\pi RH. \qquad (14.81)$$

Площадь поверхности сферического сегмента. Пусть сферический сегмент высоты H образован при вращении окружности $x^2+y^2=R^2$ вокруг оси Ox. Как и в предыдущих вычислениях, имеем $dl=\frac{R\,dx}{y}$.

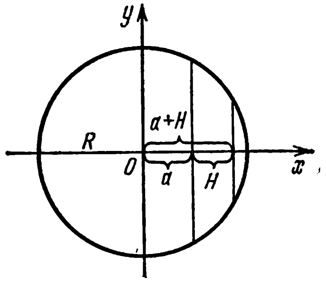


Рис. 14.46.

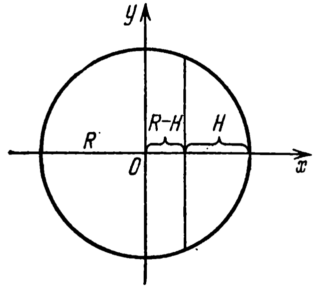


Рис. 14.47.

Пределы интегрирования возьмем от $R-H$ до R (рис. 14.47). По формуле (14.78) получим

$$S = 2\pi \int_{R-H}^{R} y\frac{R\,dx}{y} = 2\pi R \int_{R-H}^{R} dx = 2\pi Rx \Big|_{R-H}^{R} = 2\pi RH,$$

т. е. *площадь сферического сегмента*

$$S = 2\pi RH. \qquad (14.82)$$

Пример 14.35. Вычислить площадь поверхности, образованной вращением дуги параболы $y^2=4x$ вокруг оси Ox, ограниченной точками O (0; 0) и A (3; $2\sqrt{3}$).

Решение. Из уравнения $y^2=4x$ имеем $y=2x^{1/2}$. Продифференцировав, получим $\frac{dy}{dx}=x^{-1/2}$. По формуле (14.78) вычислим

$$S = 2\pi\int_0^3 2x^{1/2}\sqrt{1+(x^{-1/2})^2}\,dx.$$

Подведем $x^{1/2}$ под знак корня:

$$S = 4\pi\int_0^3 \sqrt{x+1}\,dx.$$

Положим $x+1=z$, тогда $dx=dz$, $z_н=1$, $z_в=4$, следовательно,

$$S=4\pi\int\limits_1^4 z^{1/2}\,dz=4\pi\cdot\frac{2}{3}z^{3/2}\Big|_1^4=\frac{56\pi}{3} \text{ (кв. ед.).}$$

§ 14.9. Другие приложения определенного интеграла

14.9.1. Путь, пройденный телом. В этой главе в п. 14.1.1 рассмотрена задача 14.2 о вычислении пройденного пути по его скорости. Мы нашли, что длина пути s, пройденного точкой, движущейся прямолинейно со скоростью $v=f(t)\geqslant 0$, сводится к задаче о вычислении предела суммы $\sum\limits_{i=1}^{n} f(T_i)\,\Delta t_i$ при $\max\Delta t_i\to 0$. Этот предел есть определенный интеграл $\int\limits_a^b f(t)\,dt$.

Следовательно, длина пути s, пройденного точкой, движущейся по прямой с переменной скоростью $v=f(t)\geqslant 0$ за промежуток времени $[a, b]$, вычисляется по формуле

$$s=\int\limits_a^b f(t)\,dt. \tag{14.83}$$

Пример 14.36. Скорость движения тела задана уравнением $v=(12t-3t^2)$ м/с. Найти путь, пройденный телом от начала его движения до остановки.

Решение. Скорость тела равна нулю в момент начала его движения и остановки. Найдем момент остановки тела, для этого приравняем скорость к нулю и решим уравнение относительно t:

$$12t-3t^2=0,\quad t(4-t)=0,\quad t_1=0,\quad t_2=4 \text{ с.}$$

По формуле (14.83) получим

$$s=\int\limits_0^4 (12t-3t^2)\,dt=(6t^2-t^3)\Big|_0^4=32 \text{ м.}$$

Пример 14.37. Скорость падающего тела в пустоте с начальной скоростью v_0 вычисляется по формуле $v=v_0+gt$. Вычислить длину пути s, пройденного этим телом за промежуток времени $[0, T]$.

Решение. По формуле (14.83) получим

$$s=\int\limits_0^T (v_0+gt)\,dt=\left(v_0t+\frac{gt^2}{2}\right)\Big|_0^T=v_0T+\frac{gT^2}{2}.$$

Следовательно, $s=v_0T+\frac{gT^2}{2}$.

14.9.2. Работа переменной силы. Если на тело M (рассматриваемое как материальная точка) действует постоянная сила F и оно перемещается по направлению этой силы, то работа A силы F на отрезке пути l будет

$$A = Fl, \tag{14.84}$$

где F выражается в ньютонах (Н), l — в метрах (м), A — в джоулях (Дж).

Пусть теперь тело M перемещается по оси Ox от точки $A(a)$ до точки $B(b)$ $(b > a)$ под действием переменной силы, направленной по оси Ox и являющейся функцией от x: $F = f(x)$, где $f(x)$ — функция, непрерывная на $[a, b]$.

Вычислим работу A, произведенную силой F при перемещении тела от точки $A(a)$ до точки $B(b)$.

Решение. Разобьем промежуток $[a, b]$ на n частей. Пусть абсциссы точек деления $a = x_0, x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}, x_n = b$ удовлетворяют условию

$$a = x_0 < x_1 < x_2 < \ldots < x_{n-1} < x_n = b.$$

В каждом из промежутков $[x_{i-1}, x_i]$ $(1 \leqslant i \leqslant n)$ выберем произвольным образом по точке с абсциссой ξ_i, причем каждая из них должна удовлетворять условию $x_{i-1} \leqslant \xi_i \leqslant x_i$. Функция $F = f(x)$, будучи непрерывной, почти не изменяется на промежутке $[x_{i-1}, x_i]$, длина которого $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$ достаточно мала. Поэтому силу F на промежутке $[x_{i-1}, x_i]$ можно считать приблизительно постоянной и равной $f(\xi_i)$. Работа, совершаемая постоянной силой $f(\xi_i)$, при перемещении тела M из точки x_{i-1} в точку x_i равна $f(\xi_i)\Delta x_i$. Работа A, совершенная силой $F = f(x)$ на промежутке $[a, b]$, приближенно выражается интегральной суммой

$$A \approx \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i = \\ = f(\xi_1)\Delta x_1 + f(\xi_2)\Delta x_2 + \ldots + f(\xi_n)\Delta x_n. \tag{14.85}$$

Так как функция $f(x)$ непрерывна на $[a, b]$, то предел суммы (14.85) существует и равен определенному интегралу при условии, что наибольший из промежутков λ $(\lambda = \max \Delta x_i)$ стремится к нулю:

$$A = \lim_{\lambda \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i = \int_a^b f(x)\,dx.$$

Следовательно, работа переменной силы $F=f(x)$ на промежутке $[a, b]$ вычисляется по формуле

$$A=\int_a^b f(x)\,dx. \tag{14.86}$$

Если направление силы F совпадает с направлением движения тела M по оси Ox, то работа, совершаемая силой F, имеет положительный знак, в противном случае — отрицательный.

Пример 14.38. Сжатие x винтовой пружины пропорционально приложенной силе F. Вычислить работу силы F при сжатии пружины на 0,04 м, если для сжатия ее на 0,01 м нужна сила 10 Н.

Решение. По закону Гука сила F пропорциональна растяжению или сжатию пружины, т. е. $F=kx$, где x — величина растяжения или сжатия ее, выраженная в м, а k — коэффициент пропорциональности. Чтобы найти значение k, подставим величины, данные в условии задачи, в формулу Гука: $10=k\cdot 0{,}01$, откуда $k=1000$. Подставив значение $k=1000$ (Н/м) в формулу Гука, получим $F=1000x$, т. е. $f(x)=1000x$. По формуле (14.86), взяв пределы интегрирования от 0 до 0,04, вычислим работу

$$A=\int_0^{0{,}004} 1000x\,dx=1000\frac{x^2}{2}\Big|_0^{0{,}04}=0{,}8 \text{ (Дж)}.$$

Пример 14.39. Силой в 80 Н пружина растягивается на 0,02 м. Первоначальная длина пружины 0,15 м. Какую работу нужно совершить, чтобы растянуть ее до 0,2 м?

Решение. По формуле $F=kx$ находим k: $80=k\cdot 0{,}02$, откуда $k=\frac{80}{0{,}02}=4000$ (Н/м). Подставив в формулу Гука значение k, получим $F=4000x$, т. е. $f(x)=4000x$. По формуле (14.86), взяв пределы интегрирования от 0 до 0,05, так как $0{,}2-0{,}15=0{,}05$ (м), получим

$$A=\int_0^{0{,}05} 4000x\,dx=4000\frac{x^2}{2}\Big|_0^{0{,}05}=5 \text{ (Дж)}.$$

Пример 14.40. Для растяжения пружины на 0,04 м необходимо совершить работу 20 Дж. На какую длину можно растянуть пружину, совершив работу в 80 Дж?

Решение. По длине растяжения пружины на 0,04 м и совершенной работе 20 Дж по формуле (14.86) находим k:

$$20=\int_0^{0{,}04} kx\,dx=k\frac{x^2}{2}\Big|_0^{0{,}04}=0{,}0008k,$$

откуда $k=\frac{20}{0{,}0008}=25\,000$ (Н/м). По k и A находим x_1:

$$A=\int\limits_0^{x_1} kx\,dx,$$

где x_1 — длина, на которую растянута пружина при совершенной работе в 80 Дж, т. е.

$$80=\int\limits_0^{x_1} 25\,000x\,dx=25\,000\,\frac{x^2}{2}\Big|_0^{x_1}=12\,500x_1^2,$$

откуда

$$x_1^2=\frac{80}{12\,500}=\frac{4}{625}, \quad \text{т. е.} \quad x_1=\frac{2}{25}=0{,}08 \text{ м.}$$

14.9.3. Работа, совершаемая при поднятии груза. Работа, совершаемая при поднятии груза на некоторую высоту, равна произведению силы тяжести, выраженной в ньютонах (Н), на высоту подъема, выраженную в метрах (м). Работа измеряется в джоулях (Дж).

Пример 14.41. Цилиндрическая цистерна с радиусом основания 0,5 м и высотой 2 м заполнена водой. Вычислить работу, которую необходимо совершить, чтобы выкачать воду из цистерны.

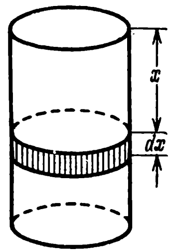


Рис. 14.48.

Решение (по схеме II). При вычислении работы, совершенной при выкачивании воды из цистерны, необходимо учесть, что вода поднимается не сразу вся, а частями, т. е. высота подъема воды будет переменной. На глубине x выделим горизонтальный слой высоты dx (рис. 14.48). Работа A, совершаемая на поднятие слоя воды весом P, зависит от высоты ее подъема x, т. е. $A=Px$. Изменение глубины x на малую величину dx вызовет изменение объема V на величину $dV=\pi r^2\,dx$ и изменение веса P на величину $dP=9807\cdot\pi r^2\,dx$, так как вес слоя воды dP в ньютонах в объеме dV (при плотности воды 1000 кг/м^3 вес воды в объеме 1 м^3 равен $9{,}807\cdot 1000=9807$ Н) будет $dP=9807\pi r^2\,dx$. При этом совершаемая работа A изменится на величину

$$dA=9807\pi r^2 x\,dx.$$

Проинтегрировав это равенство при изменении x от 0 до H, получим

$$A=\int\limits_0^H 9807\pi r^2 x\,dx=9807\pi r^2\,\frac{x^2}{2}\Big|_0^H=$$

$$=4903\pi r^2H^2=4903\pi\cdot 0{,}25\cdot 2^2=4903\pi \text{ (Дж).}$$

Пример 14.42. Вычислить работу, которую надо совершить, чтобы выкачать воду из резервуара конической формы с вершиной, обращенной книзу. Резервуар наполнен доверху водой. Радиус основания конуса $R=1$ м, высота конуса 2 м.

Решение (по схеме II). На глубине x выделим горизонтальный слой высоты dx (рис. 14.49). Работа A, совершаемая на поднятие слоя воды весом P, зависит от высоты его подъема x. Изменение глубины x на малую величину dx вызовет изменение объема V на величину

$$\Delta V = \pi r^2\, dx \tag{14.87}$$

(элементарный слой принимаем за цилиндр ввиду малости dx, r — радиус слоя). Выразим r через переменную x и постоянные R и H.

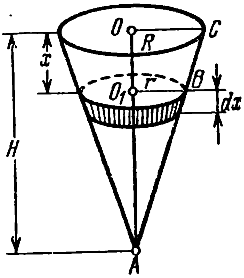


Рис. 14.49.

Из подобия треугольников AOC и AO_1B имеем

$$\frac{r}{R}=\frac{H-x}{H},$$

откуда

$$r=\frac{R}{H}(H-x)=R-\frac{R}{H}x.$$

Подставив значение r из полученного равенства в выражение (14.87), получим

$$\Delta V=\pi\left(R-\frac{R}{H}x\right)^2 dx.$$

Вес слоя воды ΔP в объеме ΔV (плотность воды 1000 кг/м^3) будет

$$\Delta P=9807\pi\left(R-\frac{R}{H}x\right)^2 dx.$$

При изменении P на величину ΔP совершаемая работа A изменится на величину

$$dA=9807\pi\left(R-\frac{R}{H}x\right)^2 x\,dx.$$

Проинтегрировав это равенство в пределах от 0 до H, получим

$$A=\int_0^H 9807\pi\left(R-\frac{R}{H}x\right)^2 x\,dx=\int_0^H 9807\pi R^2\left(x-\frac{2x^2}{H}+\frac{x^3}{H^2}\right)dx=$$

$$=9807\pi R^2\left(\frac{x^2}{2}-\frac{2x^3}{3H}+\frac{x^4}{4H^2}\right)\Big|_0^H=\frac{9807}{12}\pi R^2H^2.$$

Подставив числовые значения R и H, найдем

$$A=9807\pi\cdot 1^2\cdot\frac{2^2}{12}=3269\pi \text{ (Дж).}$$

14.9.4. Давление жидкости. Величина силы давления жидкости P на горизонтальную площадку зависит от глубины погружения x этой площадки, т. е. от расстояния площадки до поверхности жидкости.

Сила давления в ньютонах на горизонтальную площадку вычисляется по формуле

$$P = 9{,}807\rho S x, \tag{14.88}$$

где ρ — плотность жидкости в кг/м^3, S — площадь площадки в м^2, x — глубина погружения площадки в м.

Если площадка, испытывающая давление жидкости, не горизонтальна, то давление на нее будет различным на разных глубинах, следовательно, сила давления на площадку есть функция глубины ее погружения $P(x)$.

Допустим, что вертикальная площадка A_1ABB_1, имеющая форму криволинейной трапеции (рис. 14.50), погружена в жидкость так, что сторона A_1A этой площадки параллельна свободной поверхности жидкости, сторона A_1B_1 вертикальна, а сторона B_1B параллельна A_1A.

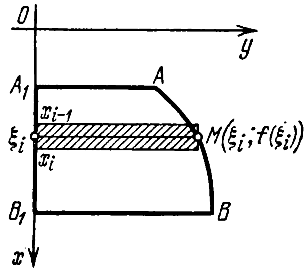


Рис. 14.50.

Систему координат выберем так, чтобы ось Ox совпадала со стороной A_1B_1 и ось Oy была расположена на свободной поверхности жидкости и была параллельна A_1A.

Пусть сторона AB площадки есть кривая $y = f(x)$ и точки A_1 и B_1 имеют соответственно абсциссы a и b ($a < b$). Вычислим силу давления жидкости на площадку A_1ABB_1.

Решение. Мы установили, что горизонтальная площадка испытывает давление жидкости $P = 9{,}807\rho S x$ и величина этого давления изменяется с изменением x.

По закону Паскаля давление в жидкости передается одинаково во всех направлениях, в том числе и на вертикальную площадку.

Разобьем промежуток $[a, b]$ на n частей точками деления $a = x_0,\ x_1,\ x_2,\ \ldots,\ x_{n-1},\ x_n = b$, которые удовлетворяют условию

$$a = x_0 < x_1 < x_2 < \ldots < x_{n-1} < x_n = b.$$

В каждом из промежутков $[x_{i-1}, x_i]$ $(1 \leqslant i \leqslant n)$ выберем произвольным образом по точке с абсциссой ξ_i, причем каждая из них должна удовлетворять условию $x_{i-1} \leqslant \xi_i \leqslant x_i$.

На кривой AB построим точки $(\xi_i;\ f(\xi_i))$ $(1 \leqslant i \leqslant n)$ и через эти точки проведем прямые, параллельные оси Ox.

Построим n прямоугольников соответственно с основанием $f(\xi_i)$, высотой $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$ и площадью, равной $f(\xi_i)\Delta x_i$.

На верхнюю сторону прямоугольника с измерениями $f(\xi_i)$, Δx_i $(1 \leqslant i \leqslant n)$ давление меньше, чем на его нижнюю сторону, но, учитывая, что величина всех Δx_i достаточно мала (при больших n), будем считать давление жидкости на этот прямоугольник по всей его поверхности постоянным.

Прямоугольник, площадь которого равна $f(\xi_i)\Delta x_i$, испытывает давление столба жидкости с высотой ξ_i, поэтому давление на этот прямоугольник будет равно $9{,}807\rho\xi_i f(\xi_i)\Delta x_i$ $(1 \leqslant i \leqslant n)$.

Сила давления жидкости на всю площадку A_1ABB_1 приближенно выражается интегральной суммой

$$P \approx \sum_{i=1}^{n} 9{,}807\rho\xi_i f(\xi_i)\Delta x_i = 9{,}807\rho\xi_1 f(\xi_1)\Delta x_1 + \\ + 9{,}807\xi_2 f(\xi_2)\Delta x_2 + \ldots + 9{,}807\xi_n f(\xi_n)\Delta x_n. \qquad (14.89)$$

Так как функция $9{,}807\rho x f(x)$ непрерывна на $[a, b]$, то предел суммы (14.89) существует и равен определенному интегралу

$$P = \int_a^b 9{,}807\rho x f(x)\,dx. \qquad (14.90)$$

Это и есть искомая сила давления жидкости P на вертикальную площадку.

Пример 14.43. Определить давление воды на стенку шлюза, длина которой 20 м и высота 5 м. (Считать шлюз доверху заполненным водой.)

Решение (по схеме II). На глубине x выделим горизонтальную полоску шириной dx (рис. 14.51). Сила давления воды P на стенку шлюза будет функцией от x. Изменение глубины x на малую величину dx вызовет изменение силы давления P на малую величину ΔP. Продифференцировав переменную P, найдем приближенное значение (главную часть) dP приращения ΔP. Приближенная величина силы давления воды на эту плоскость выразится формулой

$$\Delta P \approx dP = 9807 \cdot 20x\,dx.$$

Интегрируя dP при изменении x от 0 до 5, получим

$$P = 9807 \cdot 20 \int_0^5 x\,dx = 9807 \cdot 10x^2 \Big|_0^5 = 2{,}45 \text{ (МН)}.$$

Пример 14.44. Треугольная пластинка с основанием 0,2 м и высотой 0,4 м погружена вертикально в воду так, что вершина ее лежит на поверхности воды, а основание параллельно ей. Вычислить силу давления воды на пластинку.

Решение (по схеме II). На глубине x выделим горизонтальную полоску ширины dx (рис. 14.52). Изменение глубины x на малую

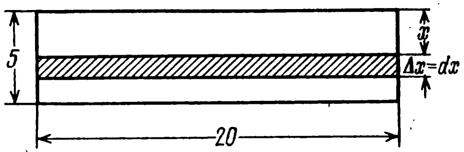


Рис. 14.51.

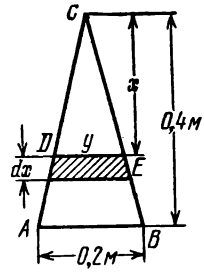


Рис. 14.52.

величину dx вызовет изменение силы давления P на малую величину dP. Вычислим площадь полоски $\Delta S = y\,dx$. Из подобия треугольников ABC и DEC имеем

$$\frac{y}{0,2} = \frac{x}{0,4}, \quad \text{откуда} \quad y = \frac{1}{2}x,$$

тогда

$$\Delta S = \frac{1}{2}x\,dx.$$

Элементарная сила давления в ньютонах будет

$$dP = 9,807\rho x \Delta S = 9807x \cdot \frac{1}{2}x\,dx = 4903,5x^2dx.$$

Интегрируя dP при изменении x от 0 до 0,4, получим

$$P = 4903,5\int_0^{0,4} x^2dx = 4903,5 \cdot \frac{x^3}{3}\Big|_0^{0,4} = 1634,5 \cdot (0,4)^3 \approx 104,6 \text{ (Н)}.$$

Пример 14.45. Цилиндрический стакан наполнен маслом. Вычислить силу давления масла на боковую поверхность стакана, если высота его $h = 0,08$ м и радиус основания $r = 0,04$ м. Плотность масла 900 кг/м³.

Решение (по схеме II). На глубине x выделим горизонтальную круговую полоску ширины dx. Изменение глубины x на малую величину dx вызовет изменение силы давления P на малую величину dP. Вычислим площадь круговой полоски ΔS:

$$\Delta S = 2\pi r\,dx = 2\pi \cdot 0,04dx = 0,08\pi\,dx.$$

Найдем элементарную силу давления в ньютонах на полоску ΔS:

$$\Delta P = 9,807 \cdot 900 \cdot 0,08\pi x\,dx \approx 2220x\,dx.$$

Интегрируя dP при изменении x от 0 до 0,08, получим

$$P = 2220 \int_0^{0,08} x\,dx = 1110x^2 \Big|_0^{0,08} = 1110 \cdot 0,0064 = 7,1 \text{ (Н)}.$$

14.9.5. Статические моменты и центр тяжести кривой.

Определение 14.3. *Статическим моментом M материальной точки $A(x;\ y)$, в которой сосредоточена масса m, относительно осей Ox и Oy* (рис. 14.53) *называется произведение массы m этой точки на соответствующую координату (расстояние точки до оси, относительно которой берется статический момент)*

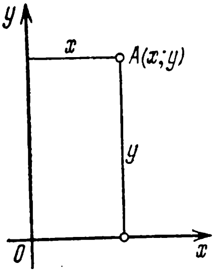


Рис. 14.53.

$$M_{Ox} = my \quad \text{и} \quad M_{Oy} = mx. \tag{14.91}$$

Если дана система n материальных точек $A_1(x_1;\ y_1)$, $A_2(x_2;\ y_2)$, ..., $A_n(x_n;\ y_n)$, в которых сосредоточены массы m_1, m_2, ..., m_n, то статическим моментом этой системы будет

$$M_x = m_1y_1 + m_2y_2 + \ldots + m_ny_n = \sum_{i=1}^{n} m_iy_i, \tag{14.92}$$

$$M_y = m_1x_1 + m_2x_2 + \ldots + m_nx_n = \sum_{i=1}^{n} m_ix_i. \tag{14.93}$$

Определение 14.4. *Центр тяжести есть точка, которая обладает тем свойством, что если всю массу системы сосредоточить в этой точке, то статический момент этой точки относительно любой оси будет равен статическому моменту всей системы относительно этой же оси.*

Обозначим центр тяжести через $C(x_C;\ y_C)$, массу системы n точек $\sum_{i=1}^{n} m_i = m$, тогда момент точки C относительно любой оси совпадет с моментом системы точек относительно этой оси. Из равенств

$$M_x = \sum_{i=1}^{n} m_iy_i = my_C, \tag{14.94}$$

$$M_y = \sum_{i=1}^{n} m_ix_i = mx_C \tag{14.95}$$

следует

$$x_C = \frac{M_y}{m}, \tag{14.96}$$

$$y_C = \frac{M_x}{m}. \tag{14.97}$$

Если мы имеем линию или плоскую фигуру, то для выражения их статических моментов и масс вместо сумм применяются интегралы.

Статические моменты и центры тяжести плоских кривых. Пусть уравнением $y = f(x)$ задана материальная кривая $AB = l$ на промежутке $[a, b]$. Кривую будем считать однородной, т. е. линейная плотность ρ распределения массы постоянна; положим $\rho = 1$. Тогда величина массы численно совпадает с длиной кривой. Если $\rho \neq 1$, то полученные результаты умножают на ρ. Пусть dl — элемент кривой, масса которого также выражается числом dl. Считая элемент dl за материальную точку, лежащую на расстоянии y от оси Ox, получим

$$dM_x = y\,dl, \qquad dm = dl.$$

Так как линия AB задана уравнением $y = f(x)$, где $a \leqslant x \leqslant b$, то

$$dl = \sqrt{1 + [f'(x)]^2}\,dx$$

и, следовательно,

$$dM_x = f(x)\sqrt{1 + [f'(x)]^2}\,dx,$$

$$dM_y = x\sqrt{1 + [f'(x)]^2}\,dx,$$

$$dm = \sqrt{1 + [f'(x)]^2}\,dx.$$

Отсюда, в свою очередь, мы получаем

$$M_x = \int_a^b f(x)\sqrt{1 + [f'(x)]^2}\,dx, \tag{14.98}$$

$$M_y = \int_a^b x\sqrt{1 + [f'(x)]^2}\,dx, \tag{14.99}$$

$$m = \int_a^b \sqrt{1 + [f'(x)]^2}\,dx. \tag{14.100}$$

Для нахождения x_C и y_C нам теперь достаточно воспользоваться формулами (14.96) и (14.97):

$$x_C=\frac{\int\limits_a^b x\sqrt{1+[f'(x)]^2}\,dx}{\int\limits_a^b \sqrt{1+[f'(x)]^2}\,dx}, \qquad (14.101)$$

$$y_C=\frac{\int\limits_a^b f(x)\sqrt{1+[f'(x)]^2}\,dx}{\int\limits_a^b \sqrt{1+[f'(x)]^2}\,dx}. \qquad (14.102)$$

Пример 14.46. Найти центр тяжести дуги окружности $x^2+y^2=a^2$, ограниченной точками $M(a;\ 0)$ и $N(0;\ a)$ (в I координатной четверти).

Решение. Пусть $(x;\ y)$ — координаты центра тяжести дуги dl (рис. 14.54). Известно, что дифференциал дуги выражается соотношением

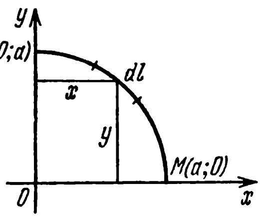


Рис. 14.54.

$$dl=\sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}\,dx.$$

Дифференцируя уравнение окружности, получим $2x+2y\frac{dy}{dx}=0$, откуда $\frac{dy}{dx}=-\frac{x}{y}$; тогда (так как $y\geqslant 0$)

$$dl=\sqrt{1+\left(-\frac{x}{y}\right)^2}\,dx=\sqrt{\frac{y^2+x^2}{y^2}}\,dx=\frac{a}{y}\,dx.$$

Статический момент относительно оси Ox найдем по формуле (14.98), взяв за пределы интегрирования 0 и a:

$$M_x=\int\limits_0^a y\frac{a}{y}\,dx=a\int\limits_a^b dx=ax\Big|_0^a=a^2.$$

Длина дуги равна четвертой части длины окружности, поэтому $l=\frac{1}{4}2\pi a=\frac{\pi a}{2}$, тогда по формуле (14.102) найдем

$$y_C=\frac{M_x}{l}=\frac{a^2}{\pi a/2}=\frac{2a}{\pi}.$$

Аналогично, в силу симметричности фигуры, получим

$$x_C=\frac{2a}{\pi}, \qquad C\left(\frac{2a}{\pi};\ \frac{2a}{\pi}\right).$$

14.9.6. Статические моменты и центры тяжести плоских фигур. Рассмотрим криволинейную трапецию, ограниченную линией $y=f(x)$ $(a \leqslant x \leqslant b)$, осью x и прямыми $x=a$, $x=b$, по площади которой F непрерывно распределена масса с постоянной поверхностной плотностью ρ. Можно принять $\rho=1$; тогда масса любой части криволинейной трапеции измеряется ее площадью.

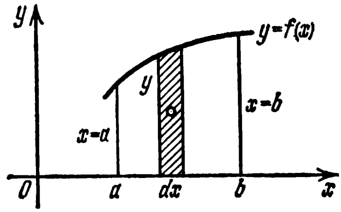


Рис. 14.55.

Для вычисления статических моментов M_x и M_y фигуры выделим элементарную площадку в виде узкой вертикальной полоски (рис. 14.55).

Масса этой полоски равна ее площади $dF=y\,dx$. Сосредоточим массу полоски в ее центре тяжести $(x;\ y/2)$; тогда

$$dM_x=y\,dx\cdot\frac{1}{2}y=\frac{1}{2}y^2dx,$$

$$dM_y=y\,dx\cdot x=xy\,dx.$$

Просуммировав эти элементарные статические моменты по всей площади F, получим

$$M_x=\int_a^b\frac{1}{2}y\,dF=\frac{1}{2}\int_a^b y^2dx, \tag{14.103}$$

$$M_y=\int_a^b x\,dF=\int_a^b xy\,dx. \tag{14.104}$$

По формулам (14.96) и (14.97), получим

$$x_C=\frac{M_y}{m}=\frac{M_y}{F}=\frac{\int_a^b xy\,dx}{\int_a^b y\,dx}, \tag{14.105}$$

$$y_C=\frac{M_x}{m}=\frac{M_x}{F}=\frac{\frac{1}{2}\int_a^b y^2dx}{\int_a^b y\,dx}. \tag{14.106}$$

Пример 14.47. Найти центр тяжести полукруга $x^2+y^2=a^2$, расположенного над осью Ox (т. е. $y\geqslant 0$).

Решение. Центр тяжести в силу симметричности фигуры лежит на оси Oy, следовательно, $x_C=0$ (рис. 14.56). Разделим полукруг на полоски, параллельные оси Oy. Элементарная площадь будет $dF=y\,dx$, где y — ордината точки окружности. Центр тяжести элементарной площади находится в точке $(x;\ y/2)$. Статический момент относительно оси Ox найдем по формуле (14.103)

$$M_x=\frac{1}{2}\int\limits_{-a}^{a} y^2\,dx=\frac{1}{2}\int\limits_{-a}^{a}(a^2-x^2)\,dx=\frac{1}{2}\left(a^2x-\frac{x^3}{3}\right)\Big|_{-a}^{a}=\frac{2}{3}a^3.$$

Площадь полукруга $F=\frac{1}{2}\pi a^2$. По формуле (14.106) найдем y_C:

$$y_C=\frac{M_x}{F}=\frac{\frac{2}{3}a^3}{\frac{1}{2}\pi a^2}=\frac{4a}{3\pi},\qquad C\left(0;\ \frac{4a}{3\pi}\right).$$

Эту же задачу можно решить, разбив площадь на полоски, параллельные оси Ox (рис. 14.57). Элементарная площадь dF будет

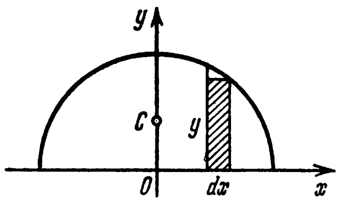


Рис. 14.56.

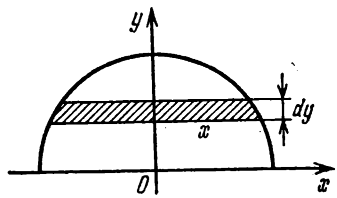


Рис. 14.57.

$dF=2x\,dy$, где x — абсцисса точки окружности. Найдем статический момент относительно оси Ox по формуле (14.103)

$$M_x=\int\limits_{0}^{a} y\cdot 2x\,dy=2\int\limits_{0}^{a}\sqrt{a^2-y^2}\,y\,dy.$$

Положим $a^2-y^2=z$, тогда $-2y\,dy=dz$, $y\,dy=-\frac{1}{2}dz$. Находим новые пределы интегрирования $z_н=a^2$, $z_в=0$. Следовательно,

$$M_x=-\int\limits_{a^2}^{0} z^{1/2}\,dz=\int\limits_{0}^{a^2} z^{1/2}\,dz=\frac{2}{3}z^{3/2}\Big|_{0}^{a^2}=\frac{2}{3}a^3.$$

Площадь полукруга $F=\frac{\pi a^2}{2}$. По формуле (14.106) найдем координаты центра тяжести

$$y_C = \frac{M_x}{F} = \frac{\frac{2}{3}a^3}{\frac{\pi a^2}{2}} = \frac{4a}{3\pi}, \qquad C\left(0;\ \frac{4a}{3\pi}\right).$$

Пример 14.48. Найти центр тяжести четверти площади эллипса $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$, расположенного в первой четверти.

Решение. Вычислим статические моменты четверти эллипса относительно осей Ox и Oy (рис. 14.58) по формулам (14.103) и (14.104)

$$M_x = \frac{ab^2}{3} \quad \text{и} \quad M_y = \frac{a^2b}{3}.$$

Площадь четвертой части эллипса равна $F = \frac{1}{4}\pi ab$. По формулам (14.105) и (14.106) найдем координаты центра тяжести

$$x_C = \frac{M_y}{F} = \frac{4a}{3\pi}, \quad y_C = \frac{M_x}{F} = \frac{4b}{3\pi},$$

$$C\left(\frac{4a}{3\pi},\ \frac{4b}{3\pi}\right).$$

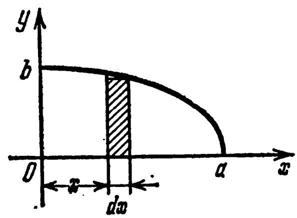


Рис. 14.58.

14.9.7. Моменты инерции. Определение 14.5. *Моментом инерции I материальной точки массы m относительно некоторой оси называется произведение массы на квадрат расстояния точки до оси:*

$$I = mr^2. \tag{14.107}$$

Момент инерции суммы n точек равен сумме моментов инерции этих точек:

$$I = \sum_{i=1}^{n} m_i r_i^2. \tag{14.108}$$

Будем считать, что масса равномерно распределена по соответствующей длине, площади, объему. Положим, что $\rho = 1$, т. е. на единицу длины, площади или объема будет приходиться единица массы. В этих случаях для выражения моментов инерции фигур вместо сумм применяют интегралы. Для этого выбирают элемент массы dm, находят его элементарный момент инерции $dI = r^2 dm$ и затем интегрированием вычисляют момент инерции всей массы

$$I = \int r^2 dm. \tag{14.109}$$

Пример 14.49. Найти момент инерции однородного прямолинейного стержня длины l относительно перпендикулярной оси, проходящей через его середину. Линейная плотность стержня (масса единицы длины) равна ρ.

Решение. Выберем систему осей координат так, чтобы стержень был расположен по оси Ox, а ось Oy проходила через его

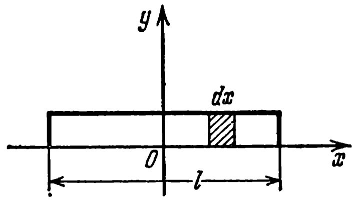


Рис. 14.59.

середину (рис. 14.59). Элемент длины dx на расстоянии x от начала координат имеет массу $\rho\,dx$. Момент инерции этого элемента $dI = x^2\rho\,dx$. Тогда момент инерции всего стержня

$$I = \rho \int\limits_{-l/2}^{l/2} x^2 dx = 2\rho \int\limits_{0}^{l/2} x^2 dx = 2\rho \frac{x^3}{3}\Big|_0^{l/2} = \frac{\rho l^3}{12} = \frac{ml^2}{12},$$

где $m = \rho l$ — масса стержня.

ВОПРОСЫ ДЛЯ ПОВТОРЕНИЯ К ГЛАВЕ 14

1. Составьте интегральную сумму для вычисления площади криволинейной трапеции.

2. Напишите суммы: 1) $\sum\limits_{i=1}^{4} x_i^2 \Delta x_i$, 2) $\sum\limits_{i=1}^{3} \frac{1}{x_i} \Delta x_i$ в развернутом виде.

3. Сформулируйте определение определенного интеграла.

4. Сформулируйте основные свойства определенного интеграла.

5. Чему равна производная от определенного интеграла с переменным верхним пределом?

6. Чему равна производная от переменной площади криволинейной трапеции?

7. Как вычисляется определенный интеграл по формуле Ньютона — Лейбница?

8. Вычислите по формуле Ньютона — Лейбница определенные интегралы:

$$1)\ \int\limits_{-2}^{2} (x-1)^3 dx, \quad 2)\ \int\limits_{-\pi/4}^{\pi/4} \operatorname{tg} x\, dx, \quad 3)\ \int\limits_{1}^{c} \frac{dx}{x}.$$

9. Объясните сущность метода интегральных сумм и метода дифференциала.

10. Сформулируйте основные свойства измерения объемов тел.

11. Как вычисляется объем тела с заданными площадями параллельных сечений?

12. Как вычисляется объем тела вращения?

13. Что такое дифференциал дуги? Дайте его геометрическое толкование.

14. Дайте определение площади поверхности тела вращения.

УПРАЖНЕНИЯ К ГЛАВЕ 14

Вычислите определенные интегралы:

1. $\int_1^2 \frac{2x^3+1}{x^2}\,dx$. **2.** $\int_0^1 \frac{dx}{x+2}$. **3.** $\int_0^1 \frac{\sqrt{x}+x}{x}\,dx$. **4.** $\int_1^2 e^{2x}\,dx$.

5. $\int_0^{\pi/4} \sin 4x\,dx$. **6.** $\int_0^{\pi} \cos\frac{x}{2}\,dx$. **7.** $\int_{\pi/4}^{\pi/3} \frac{dx}{\sin^2 x}$.

8. $\int_{\pi/6}^{\pi/3} \left(\frac{1}{\cos^2 x}-\frac{1}{\sin^2 x}\right)dx$. **9.** $\int_{-1}^{\sqrt{3}/2} \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$. **10.** $\int_{\sqrt{3}/3}^{1} \frac{dx}{1+x^2}$.

11. $\int_0^{\sqrt{3}} \frac{dx}{9+x^2}$. **12.** $\int_0^1 \frac{dx}{(3x+1)^4}$. **13.** $\int_1^2 \frac{5dx}{\sqrt{5x-1}}$.

14. $\int_1^5 \sqrt{(2x-1)^3}\,dx$. **15.** $\int_{\sqrt{5}}^{2\sqrt{2}} \frac{x\,dx}{\sqrt{3x^2+1}}$.

16. $\int_0^{\pi/2} 9\sqrt{3\sin x+1}\cos x\,dx$. **17.** $\int_0^{\pi/3} \frac{\sin x\,dx}{3-\cos x}$.

18. $\int_0^{\pi/6} e^{\sin x}\cos x\,dx$. **19.** $\int_1^2 \frac{3x^2\,dx}{1+x^3}$. **20.** $\int_{\pi/4}^{\pi/2} \sin\left(2x-\frac{\pi}{2}\right)dx$.

21. $\int_{2\pi/3}^{4\pi/3} \cos\frac{x}{4}\,dx$. **22.** $\int_0^{\pi/12} \frac{dx}{\cos^2 3x}$. **23.** $\int_{\pi/2}^{\pi} \frac{dx}{\sin^2\frac{x}{3}}$.

24. $\int_2^4 \frac{dx}{\sqrt{16-x^2}}$. **25.** $\int_{3/2}^{3\sqrt{2}/2} \frac{\sqrt{2}\,dx}{\sqrt{9-2x^2}}$. **26.** $\int_{3/4}^{3\sqrt{3}/4} \frac{4\,dx}{3+16x^2}$.

27. $\int_0^{\sqrt{2}/3} \frac{dx}{2+9x^2}$.

28. Вычислите среднее значение функции $y=\frac{1}{1+x^2}$ на отрезке $[-1, 1]$.

Вычислите определенные интегралы методом замены переменной:

29. $\int\limits_0^6 \sqrt{36-x^2}\,dx$. 30. $\int\limits_4^9 \frac{dx}{1+\sqrt{x}}$. 31. $\int\limits_0^{\pi/2} \sin x \cos^2 x\,dx$.

Вычислите определенные интегралы, применяя метод интегрирования по частям:

32. $\int\limits_0^1 xe^x\,dx$. 33. $\int\limits_0^1 \arcsin x\,dx$.

34. $\int\limits_0^1 x \operatorname{arctg} x\,dx$. 35. $\int\limits_0^{\pi/2} x^2 \sin x\,dx$.

36. Вычислите $\int\limits_0^4 x^2\,dx$ по формуле прямоугольников при $n=10$ с точностью до 0,001.

37. Вычислите $\int\limits_0^{1/2} \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$ по формуле трапеций при $n=5$ с точностью до 0,001.

38. Вычислите $\int\limits_0^{4/5} \cos x\,dx$ по формуле парабол при $2n=10$.

Вычислите несобственные интегралы:

39. $\int\limits_2^{+\infty} \frac{x\,dx}{\sqrt{(x^2-3)^3}}$. 40. $\int\limits_0^{+\infty} \sin x\,dx$. 41. $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{1+x^2}$.

Вычислите площади плоских фигур, ограниченных линиями:

42. $y=x^2-8x+16$ и $x+y-6=0$.
43. $y=-x^2+6x-5$ и $y=0$.
44. $y=4-x^2$ и $y=0$.
45. $y^2=x+2$ и $x=0$.

Вычислите объемы тел вращения, образованных вращением вокруг оси Ox площадей, ограниченных линиями:

46. $y^2-4x=0$, $x-2=0$, $x-4=0$ и $y=0$.
47. $y^2-x+1=0$, $x-2=0$ и $y=0$.
48. $y=-x^2+2x$ и $y=0$.
49. $y^2=2x$, $x-2=0$ и $y=0$.

Вычислите длину дуги плоской кривой, ограниченной данными точками:

50. $y=\frac{1}{2}(e^x+e^{-x})$, $A(0;\ 1)$ и $B\left(\frac{1}{2};\ \frac{e^{1/2}+e^{-1/2}}{2}\right)$.

51. $9y^2=4x^3$, $O(0,\ 0)$ и $A(3;\ 2\sqrt{3})$.

52. Вычислите площадь поверхности шарового пояса, образованного вращением окружности $x^2+y^2=25$ вокруг оси Ox и заключенного между точками $A(-3;\ 4)$ и $B(4;\ 3)$.

53. Найдите путь, пройденный точкой за четвертую секунду, зная скорость ее прямолинейного движения $v=3t^2-2t-3$ (v в м/с).

54. Найдите путь, пройденный точкой от начала движения до ее остановки, зная скорость ее прямолинейного движения $v=18t-6t^2$.

55. Вычислите работу, совершенную при сжатии пружины на 0,1 м, если для сжатия ее на 0,04 м нужна сила $F=20$ Н.

56. Вычислите работу, совершенную при сжатии пружины на 0,08 м, если для сжатия ее на 0,04 м была затрачена работа $A=32$ Дж.

57. Вычислите работу, затраченную на выкачивание воды из наполненного доверху котла, имеющего форму параболоида вращения (с вершиной вниз). Глубина котла 2 м, радиус основания $R=\sqrt{3}$ м (вес воды в объеме 1 м$^3 \approx 9807$ Н).

58. Вычислите силу давления воды на вертикальную площадку, имеющую форму полукруга с диаметром 4 м. Диаметр полукруга находится на поверхности воды.

59. Вычислите силу давления воды на вертикальную площадку, имеющую форму равнобедренной трапеции с основаниями 1 м и 7 м и высотой 2 м. Меньшее основание находится на поверхности воды.

ОТВЕТЫ, УКАЗАНИЯ И РЕШЕНИЯ К ГЛАВЕ 14

1. 3,5. **2.** $\ln 1{,}5 \approx 0{,}4055$. **3.** 3. **4.** $(e^6-e^2)/2$. **5.** 0,5. **6.** 2. **7.** $(3-\sqrt{3})/3$. **8.** 0. **9.** $5\pi/6$. **10.** $\pi/12$. **11.** $\pi/18$. **12.** 7/64. **13.** 2. **14.** 48,4. **15.** 1/3. **16.** 14. **17.** $\ln 1{,}25 \approx 0{,}2231$. **18.** $\sqrt{e}-1 \approx 0{,}6487$. **19.** $\ln 4{,}5 \approx 1{,}5041$. **20.** 0,5. **21.** $2\cdot(\sqrt{3}-1)$. **22.** 1/3. **23.** $2\sqrt{3}$. **24.** $\pi/3$. **25.** $\pi/4$. **26.** $\pi/36$. **27.** $\pi\sqrt{2}/24$.

29. Удобна подстановка $x=6\sin u$. **30.** Удобна подстановка $\sqrt{x}=u$. **31.** Удобна подстановка $\cos x=u$. **39.** 1. **40.** Интеграл расходится. **41.** π. **42.** Находим точки пересечения данных линий, делаем чертеж. Ответ. $S=4{,}5$.

43. 32/3. **44.** 32/3. **45.** $8\sqrt{2}/3$. **46.** 24π. **47.** $\pi/2$. **48.** $16\pi/15$. **49.** 4π. **50.** $\frac{1}{2}(e^{1/2}-e^{-1/2})$. **51.** 14/3. **52.** 70π. **53.** 27 м. **54.** 27 м. **55.** 2,5 Дж. **56.** 128 Дж. **57.** 19614 Дж. **59.** 98070 Н.

ГЛАВА 15

ПОНЯТИЕ О ВЕКТОРНОЗНАЧНЫХ ФУНКЦИЯХ И ФУНКЦИЯХ НЕСКОЛЬКИХ ПЕРЕМЕННЫХ

§ 15.1. Обобщение понятия функции

15.1.1. Вводные замечания. Рассмотренное в главе 3 понятие функции одной переменной обеспечило нас удобным языком и аппаратом для описания и изучения средствами математики зависимостей между двумя, как говорят, скалярными величинами, т. е. такими, «значения» которых представляют собой вещественные числа. Нередко, однако, приходится сталкиваться и с таким положением дел, когда в одном и том же процессе оказываются связанными между собой не две, а большее число (скалярных) величин. Так, например, мы знаем, что зависимость между объемом V, давлением p и температурой T газа может быть выражена формулой $pV = CT$; при изучении того или иного закона движения материальной точки в пространстве нам приходится иметь дело с четырьмя взаимосвязанными величинами: временем t и тремя координатами x, y и z этой точки. В ситуациях подобного рода обычное понятие функции одной переменной (скажем здесь: численнозначной функции числовой переменной) оказывается уже недостаточным, и мы встаем перед необходимостью расширить понятие функции.

15.1.2. Основное определение. Определение 15.1. *Пусть U и W — два множества (состоящие каждое из элементов произвольной природы). Если тем или иным способом каждому элементу $u \in U$ поставлен в соответствие один (и только один) определенный элемент $w = f(u) \in W$, то говорят, что на множестве U задана функция f со значениями в множестве W.*

При этом U называется областью определения (или областью задания) функции, элемент $f(u)$ — значением функции, отвечающим элементу u, а множество, состоящее из всевозможных значений функции (оно обозначается обычно $f(U)$), — множеством значений функции.

Кроме того (уже хорошо нам знакомого) случая, когда как U, так и W суть числовые множества, наиболее часто встречаются такие, когда одно из этих множеств по-прежнему числовое, а второе состоит из векторов[1]). Если элементами U являются числа, а элементами W — векторы, то говорят о *векторнозначной функции числового (скалярного) аргумента*. Если же, наоборот, U состоит из векторов, а W — из чисел, то мы получаем *численнозначную (скалярную) функцию векторного аргумента*. Исторически за этой последней закрепилось другое название: *функция нескольких переменных (численнозначная функция нескольких числовых переменных)*. Под этими «несколькими переменными» подразумевается, естественно, совокупность координат вектора-аргумента. Именно эти два важных случая мы и рассмотрим вкратце в настоящей главе.

§ 15.2. Векторнозначные функции скалярного аргумента

15.2.1. Вектор-функция, ее график и годограф. (Для удобства интерпретации мы здесь будем использовать другие буквы по сравнению с обозначениями предыдущего пункта.) Пусть под действием некоторых сил материальная точка M движется в некоторой плоскости, на которой мы будем предполагать наличие декартовой координатной системы xOy. Закон движения этой точки можно считать для промежутка времени $T=[t_1, t_2]$ полностью известным, если для каждого момента времени $t\in[t_1, t_2]$ мы можем определенным образом указать соответствующее ему положение на плоскости точки M. Иными словами, каждому значению $t\in[t_1, t_2]$ мы должны поставить в соответствие упорядоченную пару чисел (координат соответствующей точки плоскости) $x(t)$ и $y(t)$, т. е. вектор $\boldsymbol{r}(t)=(x(t); y(t))$, где $x(t)$ и $y(t)$ — известные скалярные функции от t.

Изображая геометрически эту зависимость в системе координат «пространство-время» (так как M движется в

---

[1]) Всюду в этой главе под *(m-мерным) вектором V* мы понимаем упорядоченный набор m чисел $(v_1, v_2, \ldots, v_m)$, называемых *координатами вектора* (см. также гл. 9).

плоскости, то эта система координат будет трехмерной), мы получим (рис. 15.1) некоторую пространственную линию, а именно,— множество тех и только тех точек (t, x, y), координаты которых удовлетворяют соотношениям

$$\begin{cases} x = x(t), \\ y = y(t). \end{cases} \tag{15.1}$$

Эта линия (на рис. 15.1 она обозначена I) представляет собой график вектор-функции $\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}(t)$, а ее проекция на плоскость xOy называется *годографом* этой функции (на рис. 15.1 — линия II).

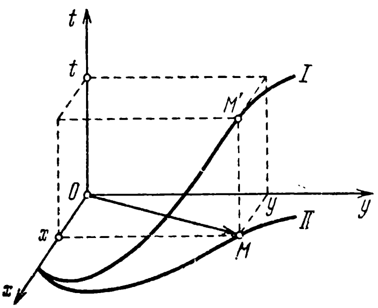


Рис. 15.1.

В нашей интерпретации годограф представляет собой траекторию точки M и, разумеется, содержит в себе уже не всю информацию о соответствующем законе движения. Имея дело только с годографом, мы не можем указать, как именно проходило движение на том или ином участке траектории (моменты начала и конца движения по этому участку, средняя скорость на нем и т. п. не могут быть восстановлены по годографу).

Изучая движение точки в трехмерном пространстве, мы приходим к трехмерной вектор-функции $\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}(t)$:

$$\boldsymbol{r}(t) = (x(t),\ y(t),\ z(t)).$$

Ее график представляет собой «линию» в четырехмерном пространстве и обычными способами наглядно изображен быть не может. *Годограф* же будет представлять собой обычную линию в трехмерном пространстве переменных x, y и z.

Понятие годографа в случае произвольной векторнозначной функции остается тем же самым (независимо от того, интерпретируется ли она как закон движения некоторой материальной точки или нет).

Определение 15.2. *Пусть $\boldsymbol{r}$ — заданная на числовом множестве T вектор-функция со значениями в векторном множестве W. Годографом вектор-функции $\boldsymbol{r}$ называется множество всех ее значений $\boldsymbol{r}(T)$.*

При некоторых ограничениях (не очень обременительных с точки зрения практических приложений) годограф вектор-функции представляет собой линию в обычном смысле этого слова. Тогда соотношения

$$\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}(t) \tag{15.2}$$

и (мы берем для определенности трехмерный случай)

$$\begin{cases} x=x(t), \\ y=y(t), \\ z=z(t) \end{cases} \tag{15.3}$$

называют, соответственно, *векторным или скалярными уравнениями* этой линии. В главе 11 мы уже сталкивались с простейшими типами таких уравнений (для случая прямой линии).

15.2.2. Предел и непрерывность вектор-функции. Ее дифференцирование и интегрирование. Понятия предела, непрерывности, производной дифференциала и интеграла для вектор-функции вводятся способом, аналогичным тому, который мы использовали для скалярных функций одной переменной, с той лишь разницей, что вместо абсолютной величины разности $f(x)-A$ в определении предела здесь надо брать длину вектора-разности $\boldsymbol{r}(t)-\boldsymbol{V}$.

Отметим (без доказательства), что *все операции перехода к пределу, дифференцирования и интегрирования могут быть выполнены покоординатно*; именно, если $\boldsymbol{r}(t)=(x(t);\ y(t))$, то

$$\lim_{t\to t_0}\boldsymbol{r}(t)=\left(\lim_{t\to t_0}x(t);\ \lim_{t\to t_0}y(t)\right), \tag{15.4}$$

$$\frac{d}{dt}\boldsymbol{r}(t)=\left(\frac{d}{dt}x(t);\ \frac{d}{dt}y(t)\right), \tag{15.5}$$

$$d\boldsymbol{r}(t)=(dx(t);\ dy(t)), \tag{15.6}$$

$$\int_{t'}^{t''}\boldsymbol{r}(t)\,dt=\left(\int_{t'}^{t''}x(t)\,dt;\ \int_{t'}^{t''}y(t)\,dt\right). \tag{15.7}$$

Нередко (имея в виду геометрическую интерпретацию значений вектор-функции в декартовой системе координат) вместо записи $\boldsymbol{r}(t)=(x(t);\ y(t))$ пишут

$$\boldsymbol{r}(t)=\boldsymbol{i}\,x(t)+\boldsymbol{j}\,y(t) \tag{15.8}$$

(где под $\boldsymbol{i}$ и $\boldsymbol{j}$ понимаются, как обычно, орты координатных осей). Для такого способа записи формулы (15.4) —

(15.7) принимают вид

$$\lim_{t\to t_0} \boldsymbol{r}(t) = \boldsymbol{i} \lim_{t\to t_0} x(t) + \boldsymbol{j} \lim_{t\to t_0} y(t), \tag{15.4'}$$

$$\frac{d}{dt}\boldsymbol{r}(t) = \boldsymbol{i}\frac{dx(t)}{dt} + \boldsymbol{j}\frac{dy(t)}{dt}, \tag{15.5'}$$

$$d\boldsymbol{r}(t) = \boldsymbol{i}\,dx(t) + \boldsymbol{j}\,dy(t), \tag{15.6'}$$

$$\int_{t'}^{t''} \boldsymbol{r}(t)\,dt = \boldsymbol{i}\int_{t'}^{t''} x(t)\,dt + \boldsymbol{j}\int_{t'}^{t''} y(t)\,dt. \tag{15.7'}$$

Физический смысл производной от вектор-функции состоит в том, что если $\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}(t)$ описывает (в том смысле, как это сделано в начале пункта), закон движения некоторой материальной точки, то вектор $\frac{d}{dt}\boldsymbol{r}(t)$ в каждый момент времени представляет собой вектор мгновенной скорости $\left(\text{в частности, } \frac{d}{dt}\boldsymbol{r}(t) \text{ направлен по касательной к годографу}\right)$.

Если $\boldsymbol{v} = \boldsymbol{v}(t)$ представляет собой мгновенную скорость (в момент времени t) движения, то вектор $\int_{t'}^{t''} \boldsymbol{v}(t)\,dt$ есть вектор-приращение пути $\boldsymbol{r}(t'') - \boldsymbol{r}(t')$ за время движения от t' до t'', а если $\boldsymbol{a} = \boldsymbol{a}(t)$ — ускорение, то $\int_{t'}^{t''} \boldsymbol{a}(t)\,dt$ есть соответствующее приращение вектора скорости $\boldsymbol{v}(t'') - \boldsymbol{v}(t')$.

Пример 15.1. Под действием некоторой системы сил аппарат перемещается в плоскости xOy. В начальный момент времени $t = 0$ радиус-вектор, определяющий его положение на этой плоскости, $\boldsymbol{r}_0 = (10;\ 30)$, скорость $\boldsymbol{v}_0 = (4;\ 5)$. Установленные приборы позволили зарегистрировать полученные аппаратом ускорения на промежутке времени $0 \leqslant t \leqslant 10$. Определить положение и скорость аппарата к концу этого промежутка времени, зная, что $\boldsymbol{a}(t) = (4;\ 6t)$.

Решение. Найдем сначала вектор скорости как функцию от времени

$$\boldsymbol{v}(t) = \boldsymbol{v}_0 + \int_0^t \boldsymbol{a}(t)\,dt = (4;\ 5) + \int_0^t (4;\ 6t)\,dt = (4;\ 5) +$$

$$+ \left(\int_0^t 4\,dt;\ \int_0^t 6t\,dt\right) = (4;\ 5) + (4t;\ 3t^2) = (4 + 4t;\ 5 + 3t^2).$$

В частности, при $t = 10$ будет $\boldsymbol{v}(10) = (44;\ 305)$.

Интегрируя теперь $\boldsymbol{v}(t)$ по промежутку $0 \leqslant t \leqslant 10$, мы получим вектор-приращение пути

$$\Delta \boldsymbol{r} = \int\limits_0^{10} (4+4t;\ 5+3t^2)\,dt = \left(2(1+t)^2\Big|_0^{10};\ (5t+t^3)\Big|_0^{10}\right) = (240;\ 1050).$$

Значит,

$$\boldsymbol{r}(10) = \boldsymbol{r}_0 + \Delta\boldsymbol{r} = (10;\ 30) + (240;\ 1050) = (250;\ 1080).$$

§ 15.3. Функции нескольких переменных

15.3.1. Функция двух переменных. Ее график. Частные производные. Если (см. определение 15.1) область определения функции представляет собой множество, элементами которого служат двухмерные векторы $\boldsymbol{U} = \{(x;\ y)\}$, а ее значения $f(x, y)$ суть вещественные числа, то такую функцию обычно называют *функцией двух переменных.*

Чаще всего приходится иметь дело с такими функциями двух переменных, область определения которых геометрически может быть представлена множеством точек декартовой координатной плоскости, ограниченным одной или несколькими кусочно-гладкими линиями (совокупность этих линий называют *границей области*).

Ставя в соответствие каждой точке $(x;\ y)$ области определения функции точку $(x;\ y;\ f(x, y))$ в декартовом трехмерном пространстве, и объединяя все эти вновь полученные точки, мы получаем множество $\Gamma = \{(x;\ y;\ f(x, y))\}$, которое называется *графиком нашей функции.* Имея в виду такие функции, которые обычно встречаются на практике, можно сказать, что *график функции двух переменных x и y представляет собой поверхность, проекция которой на плоскость xOy есть область определения функции, и такую, что аппликата каждой ее точки равна соответствующему значению функции.*

Определения предела и непрерывности для функции двух переменных даются так же, как и в одномерном случае, с той лишь разницей, что вместо абсолютной величины разности $x - x_0$ здесь надо брать расстояние между точками $M(x;\ y)$ и $M_0(x_0;\ y_0)$ (т. е. длину вектора $|\overrightarrow{M_0M}| = \sqrt{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2}$).

Определение 15.3. *Пусть точки $(x_0;\ y_0)$ и $(x_0;\ y_0 + \Delta y)$ обе принадлежат области определения функции $f(x, y)$.*

Разность $\Delta_y f(x_0, y_0) = f(x_0, y_0 + \Delta y) - f(x_0, y_0)$ *называется частным приращением этой функции по аргументу* y *в точке* $(x_0; y_0)$.

Если существует конечный предел

$$\lim_{\Delta y \to 0} \frac{\Delta_y f(x_0, y_0)}{\Delta y} = \lim_{\Delta y \to 0} \frac{f(x_0, y_0 + \Delta y) - f(x_0, y_0)}{\Delta y},$$

то он называется частной производной от функции $f(x, y)$ *по ее аргументу* y *и обозначается*

$$\frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial y} \quad \text{или} \quad f'_y(x_0, y_0).$$

Частное приращение и частная производная по аргументу x *определяются аналогично.*

Разность $\Delta f(x_0, y_0) = f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) - f(x_0, y_0)$ *называется полным приращением функции* $f(x, y)$ *в точке* $(x_0; y_0)$.

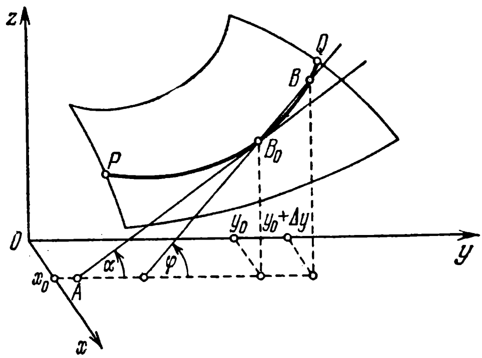


Рис. 15.2.

Нетрудно понять, что «закрепляя» (или, как еще говорят, «фиксируя») значение одного из аргументов функции двух переменных, мы тем самым приходим к ее сужению до функции одной переменной. Отношение $\frac{\Delta_y f(x, y)}{\Delta y}$ (см. рис. 15.2) представляет собой тангенс угла наклона к оси Oy секущей B_0B, проведенной через точки $B_0(x_0; y_0; f(x_0, y_0))$ и $B(x_0; y_0 + \Delta y; f(x_0, y_0 + \Delta y))$. Предельным положением этой секущей при $\Delta y \to 0$ является касательная AB_0, проведенная в точке B_0 к линии PB_0BQ пересечения графика функции с плоскостью $x = x_0$. Следовательно, $f'_y(x_0, y_0)$ представляет собой тангенс угла наклона этой касательной к оси Oy.

Если $f(x, y)$ задана «конечным» (т. е. не включающим в себя явным или неявным образом операции предельного перехода) арифметическим выражением относительно элементарных функций, то для вычисления ее частных производных можно пользоваться теми же приемами и формулами, что и в одномерном случае.

Пример 15.2. Пусть $f(x) = x^y + \operatorname{arctg}\frac{x}{y}$. Найти $\frac{\partial f(x, y)}{\partial x}$ и $\frac{\partial f(x, y)}{\partial y}$.

Вычисляя частную производную по x, мы обращаемся с y так, как если бы она была величиной постоянной (говорят еще, что y фиксируется на время взятия производной по x):

$$\frac{\partial f(x, y)}{\partial x} = y \cdot x^{y-1} + \frac{1}{1+\left(\frac{x}{y}\right)^2} \cdot \frac{1}{y} = y \cdot x^{y-1} + \frac{y}{x^2+y^2}.$$

Аналогично

$$\frac{\partial f(x, y)}{\partial y} = x^y \cdot \ln x + \frac{1}{1+\left(\frac{x}{y}\right)^2}\left(-\frac{x}{y^2}\right) = x^y \cdot \ln x - \frac{x}{x^2+y^2}.$$

Производная от функции двух переменных сама представляет собой функцию этих же переменных и в свою очередь тоже может иметь частные производные. По отношению к исходной функции эти производные от производных называются *частными производными второго порядка*:

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right) = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}$$

— частная производная второго порядка, взятая дважды по аргументу x;

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right) = \frac{\partial^2 f}{\partial x\, \partial y}$$

— «смешаная» частная производная второго порядка, взятая сначала по аргументу x, а затем — по аргументу y и т. д.

Для этих же производных употребляются и обозначения вида $f''_{x^2}(x, y)$, $f''_{xy}(x, y)$, и т. п.

Производные от частных производных второго порядка называются частными *производными третьего порядка*.

Аналогично определяется понятие частных производных любого порядка.

Отметим (без доказательства), что *две непрерывные частные производные одного и того же порядка, отличающиеся друг от друга лишь порядком выполнения операций дифференцирования, но не количеством этих операций для каждого из аргументов, будут равны между собой.* Например,

$$\frac{\partial^3 f}{\partial x\,\partial y\,\partial x}=\frac{\partial^3 f}{\partial x^2\,\partial y}=\frac{\partial^3 f}{\partial y\,\partial x^2}.$$

15.3.2. Полный дифференциал функции двух переменных. Можно доказать, что если $f'_x(x, y)$ и $f'_y(x, y)$ обе непрерывны, то *полное приращение функции* $f(x, y)$ можно представить в виде

$$\Delta f(x, y)=f(x+\Delta y;\ y+\Delta y)-f(x;\ y)=$$
$$=f'_x(x, y)\cdot\Delta x+f'_y(x, y)\cdot\Delta y+\gamma\cdot\sqrt{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2}, \quad (15.9)$$

где $\gamma\longrightarrow 0$ при Δx, $\Delta y\longrightarrow 0$.

Если $f'_x(x, y)$, $f'_y(x, y)\neq 0$, то при Δx, $\Delta y\longrightarrow 0$ «дополнительный член» формулы (15.9) $\gamma\cdot\sqrt{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2}$ будет представлять собой бесконечно малую высшего порядка малости по сравнению с $f'_x(x, y)\cdot\Delta x+f'_y(x, y)\cdot\Delta y$, т. е. при достаточно малых величинах приращений Δx и Δy не только абсолютная, но и относительная погрешность приближенного равенства

$$\Delta f(x, y)\approx f'_x(x, y)\,\Delta x+f'_y(x, y)\,\Delta y \quad (15.10)$$

будет сколь угодно мала.

Замечание 15.1. Формулу (15.9) можно также записать в виде

$$\Delta f(x, y)=f'_x(x, y)\,\Delta x+f'_y(x, y)\,\Delta y+\alpha_1\,\Delta x+\alpha_2\,\Delta y, \quad (15.9')$$

где α_1 и $\alpha_2\longrightarrow 0$ при одновременном стремлении к нулю Δx и Δy. Иногда именно такой способ записи оказывается более удобным. Выражение, стоящее в правой части (15.10), называют (при условии непрерывности $f'_x(x, y)$ и $f'_y(x, y)$) *полным дифференциалом функции* $f(x, y)$ и обозначают $df(x, y)$. При $f'_x(x, y)\neq 0$, $f'_y(x, y)\neq 0$ *и* Δx, $\Delta y\longrightarrow 0$ *полный дифференциал представляет собой главную часть полного приращения функции, линейную относительно* Δx *и* Δy.

Аналогично тому, как это делается для функций одной переменной, вместо Δx и Δy в выражении для $df(x, y)$ пишут обычно dx и dy:

$$df(x, y) = f'_x(x, y)\,dx + f'_y(x, y)\,dy. \qquad (15.11)$$

Пример 15.3. Вычислить приближенно при помощи дифференциала $\sqrt{3{,}04^2+3{,}98^2}$, рассматривая это число как значение функции $f(x, y)=\sqrt{x^2+y^2}$.

Решение. Пусть $x_0=3$, $y_0=4$. Тогда из $x_0+\Delta x=3{,}04$, $y_0+\Delta y=3{,}98$ мы получаем $\Delta x=0{,}04$, $\Delta y=-0{,}02$.

Вычисляем $f'_x(x, y)$, $f'_y(x, y)$ и их значения в точке (3; 4):

$$f'_x(x, y)=\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}, \qquad f'_x(3, 4)=\frac{3}{\sqrt{3^2+4^2}}=0{,}6,$$

$$f'_y(x, y)=\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}, \qquad f'_y(3, 4)=\frac{4}{\sqrt{3^2+4^2}}=0{,}8.$$

Далее

$$df(3, 4)=f'_x(3, 4)\cdot\Delta x+f'_y(3, 4)\cdot\Delta y=0{,}6\cdot 0{,}04+0{,}8\cdot(-0{,}02)=0{,}008,$$

откуда

$$\sqrt{3{,}04^2+3{,}98^2}=f(3{,}04;\ 3{,}98)=f(3, 4)+\Delta f(3, 4)\approx f(3, 4)+df(3, 4)=$$
$$=\sqrt{3^2+4^2}+0{,}008=5{,}008.$$

15.3.3. Обобщения на случай большего числа переменных. Понятие функции трех и большего числа переменных вводится таким же образом, как это сделано нами для случая двух переменных. Разумеется, даже в случае трех аргументов график функции мы нарисовать уже не сможем, ибо он будет представлять собой множество точек четырехмерного пространства:

$$\Gamma=\{(x;\ y;\ z;\ f(x, y, z))\}.$$

Определения предела, непрерывности, частных производных даются в общем случае так же, как и для функции двух переменных. Если все частные производные первого порядка непрерывны, то *полное приращение функции*

$$\Delta f(x, y, \ldots, t)=$$
$$=\left[\frac{\partial f}{\partial x}\Delta x+\frac{\partial f}{\partial y}\Delta y+\ldots+\frac{\partial f}{\partial t}\Delta t\right]+$$
$$+\gamma\sqrt{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2+\ldots+(\Delta t)^2}, \qquad (15.12)$$

где $\gamma\to 0$, при $\Delta x, \Delta y, \ldots, \Delta t\to 0$.

Выражение, стоящее в квадратных скобках (при условии непрерывности частных производных) называется *полным дифференциалом.* Как и в случае двух переменных, абсолютная погрешность приближенного равенства $\Delta f(x, y, \ldots, t) \approx df(x, y, \ldots, t)$ при условии $\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \ldots$ $\ldots, \frac{\partial f}{\partial t} \neq 0$ и при $\Delta x, \Delta y, \ldots, \Delta t \to 0$ есть бесконечно малая высшего порядка малости по сравнению с $\sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2 + \ldots + (\Delta t)^2}$. Как и для случая двух переменных, полное приращение функции (15.12) можно записать и так:

$$\Delta f(x, y, \ldots, t) =$$
$$= \frac{\partial f}{\partial x} \Delta x + \frac{\partial f}{\partial y} \Delta y + \ldots + \frac{\partial f}{\partial t} \Delta t + \alpha_x \Delta x + \alpha_y \Delta y + \ldots + \alpha_t \Delta t, \tag{15.12'}$$

где $\alpha_x, \alpha_y, \ldots, \alpha_t \to 0$ при стремлении к 0 всех приращений $\Delta x, \Delta y, \ldots, \Delta t$.

15.3.4. Производная сложной функции. Пусть

$$z = f(x, y), \tag{15.13'}$$

а x и y в свою очередь являются функциями от одной или нескольких других переменных. Для определенности будем считать, что

$$x = x(t, s), \quad y = y(t, s). \tag{15.13''}$$

Формулы (15.13') и (15.13'') задают z как функцию от переменных t и s. Функцию, заданную подобным образом, называют обычно *сложной функцией* или еще *суперпозицией функции $f(x, y)$ и функций $x(t, s)$ и $y(t, s)$.*

Допустим, что как функция $f(x, y)$, так и функции $x(t, s)$ и $y(t, s)$ имеют непрерывные частные производные по каждому из своих аргументов. Пусть

$$x_0 = x(t_0, s_0), \quad y_0 = y(t_0, s_0),$$
$$\Delta_t x = x(t_0 + \Delta t, s_0) - x(t_0, s_0),$$
$$\Delta_t y = y(t_0 + \Delta t, s_0) - y_0(t_0, s_0).$$

Обозначим через $\Delta_t z$ приращение величины z, отвечающее изменению t от t_0 до $t_0 + \Delta t$ (при фиксированном значении $s = s_0$). Тогда по формуле (15.9')

$$\Delta_t z = f(x_0 + \Delta_t x, \; y_0 + \Delta_t y) - f(x_0, y_0) =$$
$$= f'_x(x_0, y_0) \Delta_t x + f'_y(x_0, y_0) \Delta_t y + \alpha_1 \Delta_t x + \alpha_2 \Delta_t y. \tag{15.14}$$

Поскольку при $\Delta t \to 0$ будут стремиться к 0 и $\Delta_t x$ и $\Delta_t y$ (а стало быть, и α_1 и α_2) и так как при этом же условии

$$\frac{\Delta_t x}{\Delta t} \to \frac{\partial x(t_0, s_0)}{\partial t}, \qquad \frac{\Delta_t y}{\Delta t} \to \frac{\partial y(t_0, s_0)}{\partial t},$$

то, разделив обе части (15.14) на Δt и устремив затем Δt к 0, получим

$$\frac{\partial z(t_0, s_0)}{\partial t} = \frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial x} \frac{\partial x(t_0, s_0)}{\partial t} + \frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial y} \frac{\partial y(t_0, s_0)}{\partial t}. \qquad (15.15')$$

Аналогично для производной $\frac{\partial z}{\partial s}$ можно получить

$$\frac{\partial z}{\partial s} = \frac{\partial f}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial s} + \frac{\partial f}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial s}. \qquad (15.15'')$$

Формулы вида (15.15′) и (15.15″) называются *формулами для производных сложной функции.* Существует много разновидностей этих формул, соответствующих различным комбинациям промежуточных аргументов и независимых переменных. Например, если

$$z = f(x, y), \quad \text{где } x = x(t), \ y = y(t), \qquad (15.16)$$

то таким же образом, как (15.15′), получаем

$$\frac{dz}{dt} = \frac{\partial f}{\partial x} \frac{dx}{dt} + \frac{\partial f}{\partial y} \frac{dy}{dt}. \qquad (15.17)$$

В частности, если $x \equiv t$, т. е. если

$$z = f(x, y), \quad \text{где } y = y(x), \qquad (15.18)$$

то формула (15.17) дает

$$\frac{dz}{dx} = \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y} \frac{dy}{dx}. \qquad (15.19)$$

Эта последняя формула часто называется *формулой для полной производной.*

15.3.5. Дифференцирование неявных функций. В заключение этого параграфа мы коротко рассмотрим круг вопросов, связанных с понятием неявной функции (говорят еще,— функции, заданной неявным образом).

Пусть дано соотношение

$$F(x, y) = 0. \qquad (15.20)$$

При фиксированном значении x (15.20) превращается в уравнение относительно y. Допустим, что для каждого x

из некоторого множества X это уравнение имеет (свое для каждого x) единственное решение y_x. Тогда, ставя в соответствие каждому $x \in X$ именно это значение y_x, мы получаем некоторую функцию $y = y(x)$. Про эту функцию говорят, что она *задается* (*неявным образом*) *соотношением* (15.20).

Иногда для обеспечения единственности y_x к соотношению (15.20) добавляют еще одно или несколько ограничений. Так, например, соотношение $x^2 + y^2 = R^2$ каждому $x \in (-R, R)$ ставит в соответствие два различных значения y:

$$y_{1,x} = \sqrt{R^2 - x^2} \quad \text{и} \quad y_{2,x} = -\sqrt{R^2 - x^2}.$$

Присоединив к этому соотношению дополнительное условие $y \geqslant 0$, получаем

$$\{x^2 + y^2 = R^2;\ y \geqslant 0\} \Longleftrightarrow y = \sqrt{R^2 - x^2}.$$

Пусть $F(x, y)$ такова, что (15.20) определяет некоторую непрерывную функцию $y = y(x)$, имеющую непрерывную же производную y'_x, и пусть $\frac{\partial F}{\partial x}$ и $\frac{\partial F}{\partial y}$ непрерывны (как функции двух переменных). Положим $z = F(x, y(x))$. Тогда, с одной стороны, по формуле (15.19)

$$\frac{dz}{dx} = \frac{\partial F}{dx} + \frac{\partial F}{dy}\frac{dy}{dx}. \tag{15.21}$$

С другой стороны, так как $z(x) \equiv 0$, то $\frac{dz}{dx} \equiv 0$. Отсюда и из (15.21) получаем

$$\frac{\partial F}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial y}\frac{dy}{dx} \equiv 0,$$

откуда в свою очередь при $\frac{\partial F}{\partial y} \neq 0$ вытекает формула для производной неявной функции

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{\frac{\partial F}{\partial x}}{\frac{\partial F}{\partial y}}. \tag{15.22}$$

Пример 15.4. Пусть y как функция от x задается соотношением $e^{2x+3y} = 5xy + 1$. Найдите $\frac{dy}{dx}$.

Переносся все члены в левую часть, получаем

$$e^{2x+3y} - 5xy - 1 = 0.$$

Так как для $F(x, y)=e^{2x+3y}-5xy-1$ имеем

$$\frac{\partial F}{\partial x}=2e^{2x+3y}-5y, \qquad \frac{\partial F}{\partial y}=3e^{2x+3y}-5x,$$

то

$$\frac{dy}{dx}=-\frac{2e^{2x+3y}-5y}{3e^{2x+3y}-5x}.$$

Полученный результат можно еще упростить, заменяя в нем e^{2x+3y} на тождественно ему равное выражение $5xy+1$:

$$\frac{dy}{dx}=\frac{10xy-5y+2}{15xy-5x+3}.$$

§ 15.4. Кратные интегралы

15.4.1. Основные понятия. Допустим, что некоторая область D координатной плоскости xOy накрыта материальной пластинкой, поверхностная плотность которой в каждой точке может быть описана функцией $\mu=f(x, y)$. Разобьем область D на достаточно мелкие частичные области D_i и выберем в каждой из таких частичных областей произвольно по одной точке $(x_i; y_i)$. Считая (поверхностную) плотность в пределах каждой из частичных областей D_i приближенно равной плотности в отмеченной точке $(x_i; y_i)$, мы получаем для массы всей пластинки приближенную формулу

$$M\approx\sum_i f(x_i, y_i)\,\Delta D_i, \tag{15.23}$$

где через ΔD_i обозначена площадь частичной области D_i.

Можно было бы строго доказать то интуитивно ясное положение, что в случае непрерывной функции $f(x, y)$, в пределе при неограниченном «размельчении» дробления, формула (15.23) из приближенной сделается точной

$$M=\lim_{\lambda\to 0}\sum_i f(x_i, y_i)\,\Delta D_i. \tag{15.24}$$

(Под λ мы здесь принимаем так называемый «ранг (или *уровень*) *дробления*» области D, т. е. наименьший из диаметров таких кругов, каждым из которых еще может быть покрыта любая частичная область.)

Вне зависимости от того, будем ли мы интерпретировать $f(x, y)$ как плотность или нет, сумма, стоящая в правой части (15.23), называется *интегральной суммой* для функции $f(x, y)$ по области D, а ее предел при $\lambda\to 0$ —

двойным интегралом от $f(x, y)$ по D:

$$\iint_D f(x, y)\,dx\,dy = \lim_{\lambda \to 0} \sum_i f(x_i, y_i)\,\Delta D_i. \qquad (15.25)$$

Аналогично вводится и понятие тройного интеграла

$$\iiint_V f(x, y, z)\,dx\,dy\,dz = \lim_{\lambda \to 0} \sum_i f(x_i, y_i, z_i)\,\Delta V_i. \quad (15.26)$$

Здесь, разумеется, V представляет собой уже область в трехмерном декартовом пространстве. Если $f(x, y, z)$ — плотность тела, занимающего область V (на этот раз уже не поверхностная, а «объемная»), то интеграл (15.26) представляет собой массу этого тела.

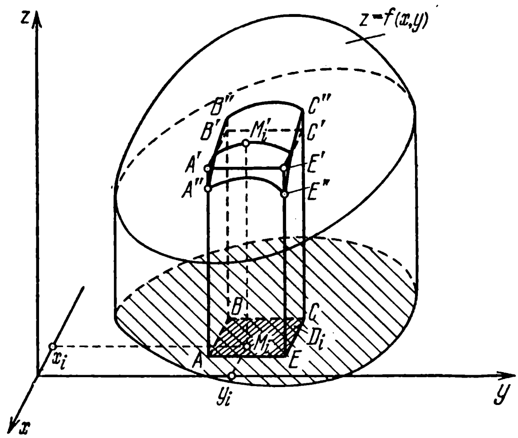


Рис. 15.3.

Возвращаясь к двойному интегралу, отметим еще одну его возможную интерпретацию, на этот раз геометрическую. Если $f(x, y)$, заданная в области D, неотрицательная непрерывная функция, то $\iint_D f(x, y)\,dx\,dy$ представляет собой объем тела, ограниченного снизу областью D, сверху графиком функции $f(x, y) \geqslant 0$, а сбоку цилиндрической поверхностью, образующая которой параллельна оси аппликат, а направляющей служит граница области D.

Действительно (рис. 15.3), каждое слагаемое $f(x_i, y_i)\,\Delta D_i$ интегральной суммы представляет собой объем «цилиндрического столбика» (на рис. 15.3 $ABCEA'B'C'E'$)

с основанием D_i и высотой, равной значению функции в точке $(x_i; y_i)$. Поэтому для объема всего тела будет иметь место приближенная формула

$$V \approx \sum_i f(x_i, y_i)\,\Delta D_i. \tag{15.27}$$

Как и для случая нахождения массы пластинки, здесь можно доказать, что в пределе при неограниченном размельчении дробления приближенное равенство (15.27) переходит в точное равенство. Учитывая, что предел правой части этого равенства есть двойной интеграл от $f(x, y)$ по области D, получаем

$$V = \iint\limits_D f(x, y)\,dx\,dy. \tag{15.28}$$

15.4.2. Формула для вычисления двойного интеграла. Если область D ограничена слева и справа прямыми $x=a$ и $x=b$, а сверху и снизу — графиками функций

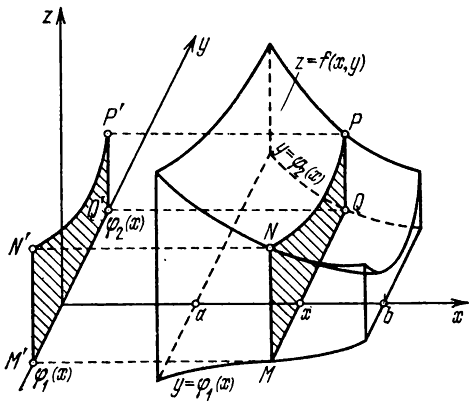


Рис. 15.4.

$y=\varphi_2(x)$ и $y=\varphi_1(x)$ соответственно (рис. 15.4), то для вычисления двойного интеграла можно воспользоваться формулой

$$\iint\limits_D f(x, y)\,dx\,dy = \int\limits_a^b \left[\int\limits_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x, y)\,dy\right] dx. \tag{15.29}$$

На рис. 15.4 фигура $MNPQ$ — сечение тела плоскостью, перпендикулярной к оси Ox; $M'N'P'Q'$ — проекция этого сечения на плоскость yOz; $N'P'$ в этой плоскости представляет собой график функции $z = g_x(y) = f(x, y)$ при фиксированном x.

Мы не будем здесь приводить строго доказательства формулы (15.29) и ограничимся лишь тем случаем, когда $f(x, y)$ непрерывна и неотрицательна в D, а форма тела, заключенного между областью D и графиком $f(x, y)$, удовлетворяет условиям теоремы о вычислении объема тела по площадям его поперечных сечений (см. гл. 14).

При каждом фиксированном значении x для площади соответствующего поперечного сечения, как нетрудно сообразить, мы будем иметь

$$S(x) = \int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x, y)\, dy.$$

Теперь для получения (15.29) остается лишь применить формулу, выражающую объем тела через площади его поперечных сечений.

Заметим, что формулу (15.29) пишут обычно в виде

$$\iint_D f(x, y)\, dx\, dy = \int_a^b dx \int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x, y)\, dy, \qquad (15.29')$$

вкладывая, разумеется, в запись правой ее части тот же смысл, что и в (15.29). Правую часть (15.29') называют *повторным интегралом*, а саму эту формулу — *формулой, выражающей двойной интеграл через повторный*.

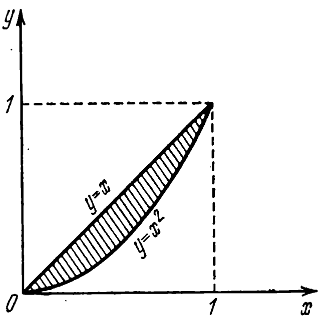


Рис. 15.5.

Пример 15.5. Вычислить $\iint_D (x+2y)\, dx\, dy$, где D ограничена параболой $y = x^2$ и прямой $y = x$ (рис. 15.5).

Решение. Изобразив область D на чертеже, мы убеждаемся в применимости формулы (15.29'):

$$\iint_D (x+2y)\, dx\, dy = \int_0^1 dx \int_{x^2}^{x} (y+2y)\, dy. \qquad (15.30)$$

Вычислим сначала «внутренний» интеграл

$$\int_{x^2}^{x} (x+2y)\, dy = (xy+y^2)\Big|_{y=x^2}^{y=x} = x^2 + x^2 - (x^3 + x^4) = 2x^2 - x^3 - x^4.$$

Подставляя это выражение в (15.30), получаем

$$\iint\limits_D (x+2y)\,dx\,dy=\int\limits_0^1 (2x^2-x^3-x^4)\,dx=\left(\frac{2}{3}x^3-\frac{x^4}{4}-\frac{x^5}{5}\right)\Big|_0^1=$$

$$=\frac{2}{3}-\frac{1}{4}-\frac{1}{5}=\frac{13}{60}.$$

15.4.3. Вычисление тройного интеграла. Если область V трехмерного декартова координатного пространства ограничена сверху и снизу поверхностями $z=\psi_2(x, y)$ и $z=\psi_1(x, y)$, а сбоку — цилиндрической поверхностью, образующая которой параллельна Oz, то для вычисления тройного интеграла можно воспользоваться формулой (рис. 15.6)

$$\iiint\limits_V f(x, y, z)\,dx\,dy\,dz=$$

$$=\iint\limits_D\left[\int\limits_{\psi_1(x, y)}^{\psi_2(x, y)} f(x, y, z)\,dz\right]dx\,dy, \tag{15.31}$$

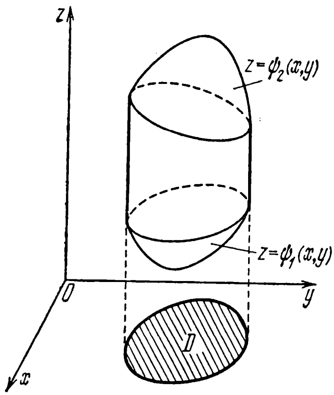


Рис. 15.6.

где D представляет собой проекцию V на плоскость xOy.

Аналогично тому, как это делается в двухмерном случае, формулу (15.30) обычно записывают в виде

$$\iiint\limits_V f(x, y, z)\,dx\,dy\,dz=\iint\limits_D dx\,dy\int\limits_{\psi_1(x, y)}^{\psi_2(x, y)} f(x, y, z)\,dz. \tag{15.31'}$$

После вычисления «внутреннего интеграла» мы получаем в правой части (15.31) двойной интеграл от некоторой функции аргументов x и y. Этот двойной интеграл в свою очередь может быть вычислен по формуле (15.29) (если, разумеется, область D такова, что допускает применение этой формулы).

ВОПРОСЫ ДЛЯ ПОВТОРЕНИЯ К ГЛАВЕ 15

1. Пусть U и W — два множества произвольной природы. Дайте определение функции, заданной на множестве U, со значениями в множестве W.

2. Что называется векторнозначной функцией скалярного аргумента? Что представляет собой график такой функции? Ее годограф?

3. Как выполняется операция перехода к пределу для вектор-функции? Операции дифференцирования и интегрирования таких функций?

4. Какую механическую интерпретацию можно дать вектор-функции, ее производной и интегралу?

5. Что называется функцией двух переменных? Что представляет собой ее график?

6. Дайте определения частных производных от функции двух переменных. Каков у них геометрический смысл? Как вычисляются такие производные, если функция задана конечным выражением относительно элементарных функций?

7. Что такое полное приращение и полный дифференциал функции двух переменных? В чем состоит связь между ними?

8. Как при помощи полного дифференциала можно находить приближенные значения функции двух переменных?

9. Как обобщаются понятия частных производных и полного дифференциала на случай функции трех и большего числа переменных?

10. Запишите и объясните формулы для производной сложной функции и для полной производной. Приведите примеры.

11. Что такое функция, заданная неявным образом? Напишите и объясните формулу для вычисления ее производной. Приведите пример.

12. Что такое двойной интеграл? Приведите определение и дайте механическую и геометрическую интерпретацию этого понятия.

13. Дайте определение тройного интеграла. Какую механическую интерпретацию можно дать этому понятию?

14. Запишите и объясните формулу для вычисления двойного интеграла. Приведите пример.

15. Приведите формулу для вычисления тройного интеграла и объясните ее.

УПРАЖНЕНИЯ К ГЛАВЕ 15

В примерах 1—6 требуется построить график и годограф заданной вектор-функции. Найдите и изобразите производную этой вектор-функции при заданном значении t_0.

1. $\boldsymbol{r}(t)=(1-t)\,\boldsymbol{i}+t^2\boldsymbol{j},\ 0\leqslant t\leqslant 1,\ t_0=0{,}5.$

2. $\boldsymbol{r}(t)=\boldsymbol{i}\ 2\cos\frac{\pi t}{2}+\boldsymbol{j}\sin\frac{\pi t}{2},\ 0\leqslant t\leqslant 4,\ t_0=0{,}5.$

3. $\boldsymbol{r}(t)=\boldsymbol{i}\ 2\cos\frac{\pi t}{6}+\boldsymbol{j}\sin\frac{\pi t}{6},\ 0\leqslant t\leqslant 12,\ t_0=1{,}5.$

4. $\boldsymbol{r}(t)=(1-\ln t;\ t),\ 1\leqslant t\leqslant e,\ t_0=1.$

5. $\boldsymbol{r}(t)=(t;\ e^{1-t}),\ 0\leqslant t\leqslant 1,\ t_0=1.$

6. $\boldsymbol{r}(t)=(\cos^3 t;\ \sin^3 t),\ 0\leqslant t\leqslant\frac{\pi}{2},\ t_0=\frac{\pi}{4}.$

В примерах 7—10 нужно найти интеграл от вектор-функции и изобразить его геометрически, взяв в качестве начала этого вектора данную точку $(x_0;\ y_0)$:

7. $\int\limits_0^2 (\boldsymbol{i}+2t\boldsymbol{j})\,dt, \qquad x_0=y_0=1.$

8. $\int\limits_0^{\pi/2} (\boldsymbol{i}\,2\cos t+\boldsymbol{j}\,3\sin t)\,dt, \qquad x_0=2,\ y_0=1.$

9. $\int\limits_1^2 (3t^2;\ 4t)\,dt, \qquad x_0=y_0=0.$

10. $\int\limits_0^1 (1-t;\ e^t)\,dt, \qquad x_0=2,\ y_0=1.$

В задачах 11—12 дается закон движения на плоскости материальной точки единичной массы. Требуется построить ее траекторию, найти вектор скорости $\boldsymbol{v}(t)$ и равнодействующую сил $\boldsymbol{F}(t)$, действующих на эту точку, после чего изобразить на том же чертеже $\boldsymbol{v}(t_0)$ и $\boldsymbol{F}(t_0)$. (Здесь t представляет собой время.)

11. $\boldsymbol{r}(t)=2\boldsymbol{i}\,t^2+\boldsymbol{j}\,\dfrac{t^3}{3},\ 0\leqslant t\leqslant 4,\ t_0=3.$

12. $\boldsymbol{r}(t)=\left(\cos\dfrac{t}{2};\ 2\sin\dfrac{t}{2}\right),\ 0\leqslant t\leqslant 4\pi,\ t_0=\pi.$

В задачах 13—14 дается зависимость ускорения движущейся на плоскости материальной точки от времени t, ее положение и скорость в момент времени $t=0$. Требуется найти зависимость от t скорости этой точки и построить ее траекторию для промежутка $0\leqslant t\leqslant t_0$:

13. $\boldsymbol{a}(t)=2\boldsymbol{i}+6t\boldsymbol{j},\quad \boldsymbol{r}(0)=2\boldsymbol{i}+\boldsymbol{j},\quad \boldsymbol{v}(0)=2\boldsymbol{i},\quad t_0=2.$

14. $\boldsymbol{a}(t)=(3t;\ -1),\ \boldsymbol{r}(0)=(0;\ 2),\ \boldsymbol{v}(0)=(0;\ 0),\ t_0=1.$

В примерах 15—18 требуется найти частные производные от заданных функций по каждой из независимых переменных и выражение для полного дифференциала:

15. $f(x,\ y)=x^2\ln(1-x^3y^5).$

16. $f(x,\ y)=\sqrt{x^2-y^2}+\arcsin\dfrac{y}{x}.$

17. $f(x,\ y)=a^{2x+3y}+(2x-y)^3+y^{3x}.$

18. $f(x,\ y,\ z)=\sqrt{1-x^2-3y^2-5z^2}.$

В примерах 19—20 найдите все частные производные второго порядка:

19. $f(x,\ y)=\sqrt{x^2+y^2}.$

20. $f(x,\ y)=x\ln(x+y).$

21. $f(x,\ y,\ z)=x^3y^5z^7+(1+x^2)^y\operatorname{arctg} xy;\ \dfrac{\partial^3 f}{\partial x\,\partial y\,\partial z}=?$

22. Покажите, что функция $z=\sqrt{y^2-x^2}$ удовлетворяет соотношению $x\frac{\partial z}{\partial x}+y\frac{\partial z}{\partial y}=z$.

23. $z=(1+3x^2)^y$, где $y=\operatorname{tg} x$. Найдите $\frac{dz}{dx}$.

24. $z=(2+\cos y)^{-x^2}$, где $y=\sqrt{x}$. Найдите $\frac{dz}{dx}$.

В примерах 25 и 26 y представляет собой функцию от x, заданную неявным образом. Требуется найти y'_x.

25. $\ln(x+y+1)=xy$.

26. $x \operatorname{arctg} y=x^2+y^2$.

В примерах 27 и 28 требуется составить уравнение касательной к данной линии в точке $(x_0;\ y_0)$.

27. $x^3+y^3=3(xy+1)$, $x_0=1$, $y_0=2$.

28. $e^{x-y}=xy$, $x_0=y_0=1$.

29. Найдите полный дифференциал функции $f(x, y)=\sqrt{x/y}$ и с его помощью вычислите приближенно $\sqrt{16{,}02/3{,}95}$.

30. Найдите полный дифференциал функции $f(x, y)=\operatorname{arctg}(x/y)$ и с его помощью вычислите приближенно $\operatorname{arctg}(0{,}99/1{,}03)$.

В примерах 31 и 32 требуется вычислить двойные интегралы по заданной области.

31. $\iint\limits_D xy\,dx\,dy$, где область D ограничена прямой $x-y+2=0$ и параболой $y=x^2$.

32. $\iint\limits_D (x-2y)\,dx\,dy$, где область D ограничена прямыми $2x-y-1=0$, $x-2y+1=0$ и $x=2$.

33. Найдите объем тела, ограниченного поверхностями $y=x$, $x+y-2=0$, $x=0$, $z=0$ и $z=x^2+y^2$.

34. Найдите объем тела, ограниченного поверхностями $x=0$, $y=0$, $x+y=1$, $z=0$ и $z=2-x^2-y^2$.

ОТВЕТЫ, УКАЗАНИЯ И РЕШЕНИЯ К ГЛАВЕ 15

1. Для построения графика заданной вектор-функции составим таблицу (см. табл. 15.1), в которой рядом со значениями независимой переменной t будем записывать значения $x(t)$ и $y(t)$ проекций вектора $\boldsymbol{r}(t)$ на оси Ox и Oy (соответственно):

ТАБЛИЦА 15.1

t	0	0,25	0,50	0,75	1
$x(t)$	1	0,75	0,50	0,25	0
$y(t)$	0	0,0625	0,2500	0,5625	1

Построим теперь в системе координат $Oxyt$ полученные точки и соединим их (в порядке возрастания t) плавной линией. Эта линия $M_1M_2'M_3'M_4'M_5'$ (рис. 15.7) и будет представлять собой график $\boldsymbol{r}(t)$. Для получения годографа (линия $M_1M_2M_3M_4M_5$ на рис. 15.7) $\boldsymbol{r}(t)$ нам надо построить проекцию этого графика на плоскость xOy. Для

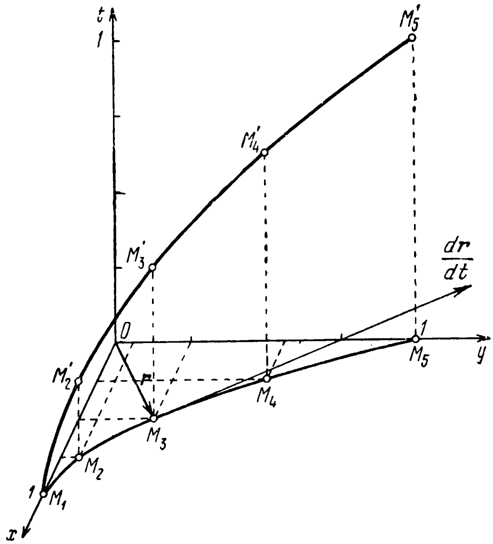


Рис. 15.7.

этого мы можем воспользоваться той же табл. 15.1, взяв из нее соответствующие друг другу значения $x(t)$ и $y(t)$. Вычисляем производную $\frac{d}{dr}\boldsymbol{r}(t)$:

$$\frac{d}{dr}\boldsymbol{r}(t)=\boldsymbol{i}\frac{d}{dt}(1-t)+\boldsymbol{j}\frac{d}{dt}(t^2)=-\boldsymbol{i}+2t\boldsymbol{j}.$$

Подставляя теперь данное значение $t=t_0$, получаем

$$\frac{d\boldsymbol{r}(0,5)}{dt}=-\boldsymbol{i}+\boldsymbol{j},$$

после чего строим этот вектор, помещая его начало в точку M_3: $\boldsymbol{r}(0,5)=0,5\boldsymbol{i}+0,25\boldsymbol{j}$.

2. $\frac{d\boldsymbol{r}(0,5)}{dt}=-\frac{\pi\sqrt{2}}{2}\boldsymbol{i}+\frac{\pi\sqrt{2}}{4}\boldsymbol{j}$ [1]).

3. $\frac{d\boldsymbol{r}(1,5)}{dt}=-\frac{\pi\sqrt{2}}{6}\boldsymbol{i}+\frac{\pi\sqrt{2}}{12}\boldsymbol{j}$ [1]).

[1]) Обратите внимание, что годографы различных вектор-функций из примеров 2 и 3, а также из примеров 4 и 5 совпадают. Это еще раз должно напомнить нам о том, что годограф несет в себе лишь часть информации о вектор-функции!

4. $\frac{d\boldsymbol{r}(1)}{dt}=(-1;\ 1)$. (Запись $\boldsymbol{r}(t)=(1-\ln t;\ t)$ эквивалентна записи $\boldsymbol{r}(t)=\boldsymbol{i}(1-\ln t)+\boldsymbol{j}t$.)

5. $\frac{d\boldsymbol{r}(1)}{dt}=(1;\ -1)$.

6. $\frac{d\boldsymbol{r}(\pi/4)}{dt}=\left(-\frac{3\sqrt{2}}{4};\ \frac{3\sqrt{2}}{4}\right)$.

7. $\int\limits_0^2(\boldsymbol{i}+2t\boldsymbol{j})\,dt=\boldsymbol{i}\int\limits_0^2 dt+2\boldsymbol{j}\int\limits_0^2 t\,dt=2\boldsymbol{i}+4\boldsymbol{j}$.

8. $\int\limits_0^{\pi/2}(2\boldsymbol{i}\cos t+3\boldsymbol{j}\sin t)\,dt=2\boldsymbol{i}+3\boldsymbol{j}$.

9. $\int\limits_1^2(3t^2;\ 4t)\,dt=(7;\ 6)$.

10. $\int\limits_0^1(1-t;\ e^t)\,dt=(0{,}5;\ e-1)$.

11. Вектор скорости $\boldsymbol{v}(t)$ находим, как производную от радиус-вектора движущейся точки: $\boldsymbol{v}(t)=\frac{d}{dt}\boldsymbol{r}(t)=4t\boldsymbol{i}+t^2\boldsymbol{j}$. Подставляя в это выражение значение $t=3$, получим $\boldsymbol{v}(3)=12\boldsymbol{i}+9\boldsymbol{j}$. При построении этого вектора мы поместим его начало в конец радиус-вектора $\boldsymbol{r}(3)=18\boldsymbol{i}+9\boldsymbol{j}$ (т. е. в точку (18; 9)).

Дифференцируя $\boldsymbol{v}(t)$, мы получаем вектор ускорения $\boldsymbol{a}(t)$, который в нашем случае ($m=1$) численно совпадает с вектором $\boldsymbol{F}(t)$, $\boldsymbol{F}(t)=\boldsymbol{a}(t)=4\boldsymbol{i}+2t\boldsymbol{j}$. При $t=3$ получаем $\boldsymbol{F}(3)=4\boldsymbol{i}+6\boldsymbol{j}$. При построении этого вектора мы также помещаем его начало в ту же самую (соответствующую $t=3$) точку (18; 9) годографа функции $\boldsymbol{r}(t)$.

12. $\boldsymbol{v}(t)=\left(-\frac{1}{2}\sin\frac{t}{2};\ \cos\frac{t}{2}\right)$, $\boldsymbol{v}(\pi)=\left(-\frac{1}{2};\ 0\right)$,

$\boldsymbol{F}(t)=\left(-\frac{1}{4}\cos\frac{t}{2};\ -\frac{1}{2}\sin\frac{t}{2}\right)$, $\boldsymbol{F}(\pi)=\left(0;\ -\frac{1}{2}\right)$.

При построении векторов $\boldsymbol{v}(\pi)$ и $\boldsymbol{F}(\pi)$ начало каждого из них надо поместить в соответствующую значению $t=\pi$ точку (0; 2) годографа $\boldsymbol{r}(t)$.

13. $$\boldsymbol{v}(t)=\boldsymbol{v}(0)+\int\limits_0^t\boldsymbol{a}(t)\,dt=2\boldsymbol{i}+\int\limits_0^t(2\boldsymbol{i}+6t\boldsymbol{j})\,dt=$$
$$=2\boldsymbol{i}+2t\boldsymbol{i}+3t^2\boldsymbol{j}=2(1+t)\,\boldsymbol{i}+3t^2\boldsymbol{j}.$$
$$\boldsymbol{r}(t)=\boldsymbol{r}(0)+\int\limits_0^t\boldsymbol{v}(t)\,dt=2\boldsymbol{i}+\boldsymbol{j}+\int\limits_0^t[2(1+t)\,\boldsymbol{i}+3t^2\boldsymbol{j}]\,dt=$$
$$=2\boldsymbol{i}+\boldsymbol{j}+[(1+t)^2-1]\,\boldsymbol{i}+t^3\boldsymbol{j}=(2+2t+t^2)\,\boldsymbol{i}+(1+t^3)\,\boldsymbol{j}.$$

(См. также разобранный в тексте главы 15 пример 15.1.)

14. $\boldsymbol{v}(t)=\left(\frac{3}{2}t^2;\ -t\right),\quad \boldsymbol{r}(t)=\left(\frac{t^3}{2};\ 2-\frac{t^2}{2}\right).$

15. $\frac{\partial f}{\partial x}=2x\ln(1-x^3y^5)-\frac{3x^4y^5}{1-x^3y^5},\ \frac{\partial f}{\partial y}=-\frac{5x^5y^4}{1-x^3y^5}.$

(См. также пример 15.2 в тексте главы 15.)

16. $\frac{\partial f}{\partial x}=\frac{1}{\sqrt{x^2-y^2}}\left(x-\frac{y}{|x|}\right),\ \frac{\partial f}{\partial y}=\frac{1}{\sqrt{x^2-y^2}}\left(\frac{|x|}{x}-y\right).$

17. $f'_x(x,\ y)=2a^{2x+3y}\ln a+6(2x-y)^2+3y^{3x}\ln y,$

$f'_y(x,\ y)=3a^{2x+3y}\ln a-3(2x-y)^2+3xy^{3x-1}.$

18. $f'_x(x,\ y,\ z)=-\frac{x}{\sqrt{1-x^2-3y^2-5z^2}},$

$f'_y(x,\ y,\ z)=-\frac{3y}{\sqrt{1-x^2-3y^2-5z^2}},$

$f'_z(x,\ y,\ z)=-\frac{5z}{\sqrt{1-x^2-3y^2-5z^2}}.$

19. $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}=\frac{y^2}{(x^2+y^2)^{3/2}},\ \frac{\partial^2 f}{\partial x\,\partial y}=-\frac{xy}{(x^2+y^2)^{3/2}},\ \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}=\frac{x^2}{(x^2+y^2)^{3/2}}.$

20. $f''_{x^2}(x,\ y)=\frac{x+2y}{(x+y)^2},\ f''_{xy}(x,\ y)=\frac{y}{(x+y)^2},\ f''_{y^2}(x,\ y)=-\frac{x}{(x+y)^2}.$

21. $\frac{\partial^3 f}{\partial x\,\partial y\,\partial z}=105x^2y^4z^6$. На первом шаге удобно вычислить $\frac{\partial f}{\partial z}$. (Напомним, что для непрерывных смешанных производных порядок выполнения операций дифференцирования не влияет на окончательный результат.)

22. При подстановке найденных выражений для $\frac{\partial z}{\partial x}$ и $\frac{\partial z}{\partial y}$ данное соотношение превращается в тождество.

23. Пусть $f(x,\ y)=(1+3x^2)^y$. Тогда (см. формулу (15.19))

$$\frac{dz}{dx}=\frac{\partial f}{\partial x}+\frac{\partial f}{\partial y}\frac{dy}{dx}=6xy(1+3x^2)^{y-1}+(1+3x^2)^y\ln(1+3x^2)\frac{1}{\cos^2 x}=$$
$$=(1+3x^2)^y\left[\frac{6xy}{1+3x^2}+\frac{\ln(1+3x^2)}{\cos^2 x}\right]=$$
$$=(1+3x^2)^{\operatorname{tg} x}\left[\frac{6x\operatorname{tg} x}{1+3x^2}+\frac{\ln(1+3x^2)}{\cos^2 x}\right].$$

24. $$\frac{dz}{dx}=(2+\cos y)^{-x^2}\left[-2x\ln(2+\cos y)+\frac{x\sqrt{x}\sin y}{2+\cos y}\right]=$$
$$=(2+\cos\sqrt{x})^{-x^2}\left[-2x\ln(2+\cos\sqrt{x})+\frac{x\sqrt{x}\sin\sqrt{x}}{2+\cos\sqrt{x}}\right].$$

25. Приводим данное соотношение к виду $F(x, y) \equiv \ln(x+y+1)-$ $-xy=0$ и вычисляем $\frac{\partial F}{\partial x}$ и $\frac{\partial F}{\partial y}$:

$$\frac{\partial F}{\partial x}=\frac{1-xy-y^2-y}{x+y+1}, \qquad \frac{\partial F}{\partial y}=\frac{1-x^2-xy-x}{x+y+1},$$

после чего применяем формулу (15.22):

$$\frac{dy}{dx}=-\frac{\frac{\partial F}{\partial x}}{\frac{\partial F}{\partial y}}=\frac{1-xy-y^2-y}{x^2+xy+x-1}.$$

26. $\frac{dy}{dx}=-\frac{(y^2-x^2)\cdot(1+y^2)}{x(x-2y-2y^3)}$. $\Big($После вычисления $\frac{\partial F}{\partial x}$ удобно заменить в ее выражении $\operatorname{arctg} y$ через $(x^2+y^2)/x.\Big)$

27. Находим сначала $\frac{dy}{dx}$, а затем, вычисляем ее значение в точке (x_0, y_0), т. е. получаем значение углового коэффициента искомой касательной $\frac{dy}{dx}=\frac{x^2-y}{x-y^2}$, $k_{\text{кас}}=\frac{1-2}{1-4}=\frac{1}{3}$. Теперь остается составить уравнение касательной как прямой, проходящей через точку (x_0, y_0) с найденным угловым коэффициентом: $y-2=\frac{1}{3}(x-1)$, или, после преобразований, $x-3y+5=0$.

28. $k_{\text{кас}}=0$. Уравнение касательной: $y=1$.

29. $df(x, y) = f'_x(x, y)\,dx+f'_y(x, y)\,dy = \frac{1}{2\sqrt{xy}}\,dx-\frac{dy}{2y}\sqrt{\frac{x}{y}}$.

Нам требуется вычислить значение $f(x, y)=\sqrt{x/y}$ в точке $x=16{,}02$; $y=3{,}95$. Ближайшей к ней точкой, в которой значение $f(x, y)$ удобно вычислять, является точка $x_0=16$; $y_0=4$. Тогда $f(16; 4)=\sqrt{16/4}=2$. Полагая $\Delta x=x-x_0=0{,}02$, $\Delta y=y-y_0=-0{,}05$, получаем

$$\Delta f(x_0, y_0) \approx df(x_0, y_0)=\frac{1}{2\sqrt{x_0y_0}}\,dx-\frac{\sqrt{x_0}}{2y_0\sqrt{y_0}}\,dy=$$

$$=\frac{1}{2\sqrt{16\cdot 4}}\,0{,}02-\frac{\sqrt{16}}{2\cdot 4\cdot\sqrt{4}}(-0{,}05)=0{,}0137,$$

откуда в свою очередь

$$\sqrt{16{,}02/3{,}95}=f(x, y)=f(x_0, y_0)+\Delta f(x_0, y_0) \approx 2+0{,}0137=2{,}0137.$$

30. $\operatorname{arctg}\frac{0{,}99}{1{,}03} \approx \operatorname{arctg} 1-0{,}02=\frac{\pi}{4}-0{,}02 \approx 0{,}765$.

31. Изобразим область D на чертеже (рис. 15.8). (Перед построением кривых удобно найти координаты их точек пересечения. Решая систему

$$\begin{cases} x-y+2=0, \\ y=x^2, \end{cases}$$

получаем точки $A(-1;\ 1)$ и $B(2;\ 4)$.) Видно, что область D допускает применение формулы (15.29). Для этого надо лишь записать уравнение прямой AB в виде, разрешенном относительно y: $y=x+2$. Теперь мы можем записать, что

$$\iint_D xy\,dx\,dy=\int_{-1}^{2} dx \int_{x^2}^{x+2} xy\,dy.$$

Вычисляем сначала внутренний интеграл:

$$\int_{x^2}^{x+2} xy\,dy = \frac{1}{2}xy^2\Big|_{y=x^2}^{y=x+2}=\frac{x^3}{2}+2x^2+2x-\frac{x^5}{2},$$

а тогда

$$\iint_D xy\,dx\,dy=\int_{-1}^{2}\left(\frac{x^3}{2}+2x^2+2x-\frac{x^5}{2}\right)dx=$$

$$=\left(\frac{x^4}{8}+\frac{2x^3}{3}+x^2-\frac{x^6}{12}\right)\Big|_{-1}^{2}=5{,}625.$$

32. $\iint_D (x-2y)\,dx\,dy=\int_1^2 dx\int_{\frac{x+1}{2}}^{2x-1}(x-2y)\,dy=-1{,}5.$

33. Плоскости $y=x$, $x+y-2=0$ и $x=0$ образуют в пространстве цилиндрическую поверхность, образующая которой параллельна оси Oz

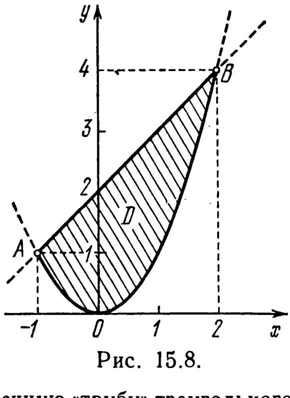


Рис. 15.8.

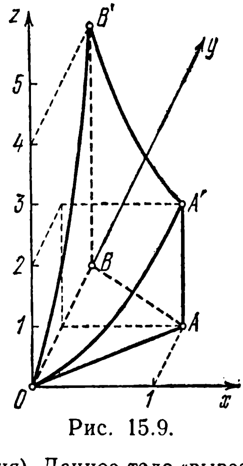


Рис. 15.9.

(бесконечную «трубу» треугольного сечения). Данное тело «вырезается» из внутренности этой трубы плоскостью $z=0$ и параболоидом вращения $z=x^2+y^2$ (рис. 15.9). Формула (15.28) дает $V=\iint_D (x^2+y^2)\,dx\,dy.$

Сводя этот интеграл к повторному, получим $V=\int_0^1 dx\int_x^{2-x}(x^2+y^2)\,dy.$

Вычислив его, найдем, что $V=4/3$.

34. $V=5/6$.

ГЛАВА 16

ЭКСТРЕМАЛЬНЫЕ ЗАДАЧИ ДЛЯ ФУНКЦИЙ НЕСКОЛЬКИХ ПЕРЕМЕННЫХ

§ 16.1. Линии и поверхности уровня. Производная по направлению и градиент

16.1.1. Линии уровня функций двух переменных. Пусть $f(x, y)$ — функция двух переменных, а Γ — ее график в декартовом координатном пространстве $Oxyz$. Пересечем этот график плоскостью $z=C$ и спроектируем линию пересечения на плоскость xOy (рис. 16.1). Эта проекция L на плоскости xOy имеет уравнение $f(x, y)=C$ и представляет собой множество всех тех (и только тех) точек области определения функции, для которых соответствующее им значение функции равно C. Такие линии называются *линиями уровня* функции $f(x, y)$. Проведя на плоскости xOy несколько линий уровня, отвечающих различным значениям C, мы получим чертеж, позволяющий (с определенной степенью точности, разумеется) представить себе вид поверхности Γ. На рис. 16.2 и 16.3 для двух различных функций даны их графики (слева) и семейства линий уровня (справа). (Заметим, что подобный способ плоского изображения поверхностей не является для нас чем-то принципиально новым; достаточно вспомнить «линии высот и глубин» на географических и топографических картах.)

16.1.2. Производная по направлению. В главе 15 мы ввели понятие частной производной от функции двух переменных. Так как отношение

$$\frac{\Delta_y f(x_0, y_0)}{\Delta y}$$

представляет собой среднюю скорость возрастания функции $f(x, y)$ (по отношению к ее аргументу y) на отрезке от

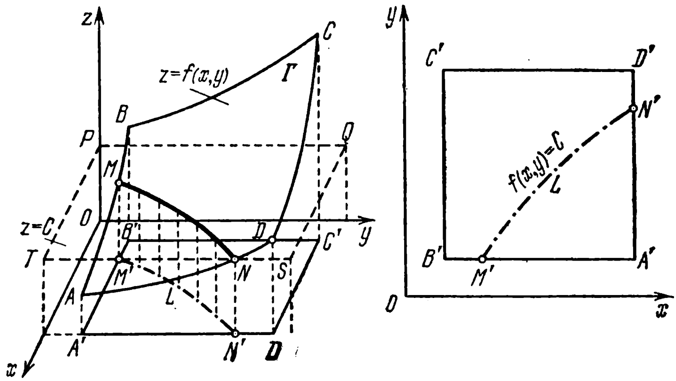


Рис. 16.1.

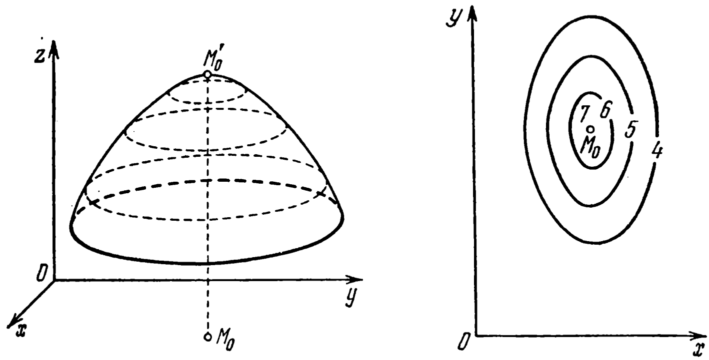


Рис. 16.2.

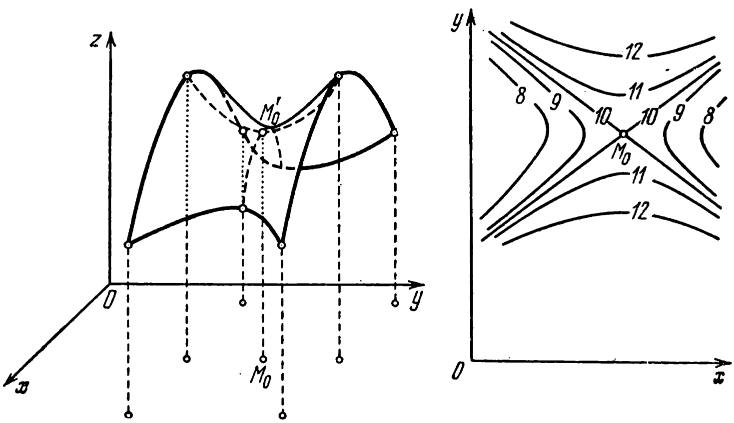


Рис. 16.3.

$(x_0; y_0)$ до $(x_0; y_0+\Delta y)$, то можно сказать, что $\frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial y}$ как предел этого отношения, представляет собой скорость возрастания функции в направлении оси Oy, вычисленную в точке $(x_0; y_0)$. Аналогично, $\frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial x}$ есть скорость возрастания функции в направлении оси Ox. Во многих случаях оказывается желательным иметь возможность находить скорость возрастания функции в различных направлениях, не обязательно совпадающих с направлением одной из координатных осей. Для этого мы и обратимся сейчас к понятию производной по направлению.

Определение 16.1. *Пусть* $\boldsymbol{l}$ *— некоторая ось на плоскости* xOy, *проходящая через точку* $(x_0; y_0)$, $\Delta\boldsymbol{l} = \Delta x\,\boldsymbol{i} + \Delta y\,\boldsymbol{j}$ *— такой вектор, что точка* $(x_0+\Delta x; y_0+\Delta y) \in \boldsymbol{l}$, *а* Δl *— величина проекции* $\Delta\boldsymbol{l}$ *на* $\boldsymbol{l}$. *Тогда разность* $\Delta_l f(x_0, y_0) = f(x_0+\Delta x, y_0+\Delta y) - f(x_0, y_0)$ *называется приращением функции* $f(x, y)$ *в направлении* $\boldsymbol{l}$, *а предел отношения* $\Delta_l f(x_0, y_0)$ *к* Δl *при* $\Delta l \to 0$ *называется производной от функции* $f(x, y)$ *в направлении* $\boldsymbol{l}$:

$$\lim_{\Delta l \to 0} \frac{\Delta_l f(x_0, y_0)}{\Delta l} = \frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial l}. \qquad (16.1)$$

Так как отношение $\frac{\Delta_l f(x_0, y_0)}{\Delta l}$ есть средняя скорость возрастания функции на отрезке от точки $(x_0; y_0)$ до точки $(x_0+\Delta x; y_0+\Delta y)$, то $\frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial l}$, как предел этого отношения при стремлении второй из этих точек к первой, и представляет собой скорость возрастания $f(x, y)$ в направлении $\boldsymbol{l}$ в точке $(x_0; y_0)$.

Направление $\boldsymbol{l}$ можно задать, указав углы α и β, образованные этой осью с осями координат Ox и Oy. Тогда, очевидно,

$$\Delta x = \Delta l \cos\alpha, \quad \Delta y = \Delta l \cos\beta, \quad |\Delta l| = \sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2}, \qquad (16.2)$$

а единичный вектор $\boldsymbol{l}_0$ оси $\boldsymbol{l}$ можно записать так:

$$\boldsymbol{l}_0 = (\cos\alpha; \cos\beta), \quad \text{или:} \quad \boldsymbol{l}_0 = \boldsymbol{i}\cos\alpha + \boldsymbol{j}\cos\beta. \qquad (16.3)$$

Выведем формулу, позволяющую находить $\frac{\partial f}{\partial l}$, зная величины углов α и β и частные производные $\frac{\partial f}{\partial x}$ и $\frac{\partial f}{\partial y}$.

По формуле (15.9′) с учетом (16.2) получаем

$$\Delta_l f(x_0, y_0) = \frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial x}\Delta l\cos\alpha + \frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial y}\Delta l\cos\beta + \\ + \alpha_1\Delta l\cos\alpha + \alpha_2\Delta l\cos\beta.$$

Разделив обе части на Δl и переходя к пределу при $\Delta l \to 0$, получаем (с учетом того, что α_1, $\alpha_2 \to 0$)

$$\frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial l} = \frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial x}\cos\alpha + \frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial y}\cos\beta. \qquad (16.4)$$

Из рис. 16.4 можно усмотреть, что геометрически $\frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial l}$ представляет собой (с точностью до знака) тангенс угла

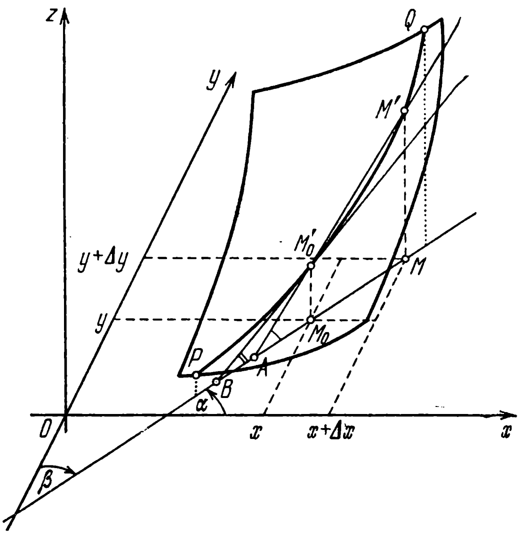


Рис. 16.4.

наклона к плоскости xOy касательной к сечению графика функции вертикальной плоскостью, проведенной через ось $\boldsymbol{l}$.

16.1.3. Градиент функции двух переменных. Правую часть (16.4) иногда бывает удобно представлять в виде скалярного произведения двух векторов: уже знакомого нам единичного вектора $\boldsymbol{l}_0 = \boldsymbol{i}\cos\alpha + \boldsymbol{j}\cos\beta$ и так называемого *градиента* функции $f(x, y)$:

$$\operatorname{grad} f(x, y) = \frac{\partial f(x, y)}{\partial x}\boldsymbol{i} + \frac{\partial f(x, y)}{\partial y}\boldsymbol{j}. \qquad (16.5)$$

(Формула (16.5) и служит определением этого понятия.) Тогда (16.4) можно переписать в виде

$$\frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial l} = \boldsymbol{l}_0 \cdot \operatorname{grad} f(x_0, y_0). \tag{16.6}$$

Так как при любом направлении $\boldsymbol{l}$ первый сомножитель в (16.6) имеет единичную длину, а второй от этого направления не зависит, то очевидно, что (для данной точки $(x_0; y_0)$) производная $\frac{\partial f}{\partial l}$ будет наибольшей, если направление оси $\boldsymbol{l}$ совпадает с направлением вектора $\operatorname{grad} f(x_0, y_0)$. Для такого направления $\boldsymbol{l}^*$ будет

$$\frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial l^*} = |\operatorname{grad} f(x_0, y_0)|. \tag{16.7}$$

Таким образом, градиент указывает направление, в котором скорость возрастания функции (для данной точки) является наибольшей, а длина градиента оказывается равной этой наибольшей из скоростей роста.

Формула (15.22) позволяет нам найти угловой коэффициент касательной к линии уровня $f(x, y) = C$:

$$k = -\frac{\dfrac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial x}}{\dfrac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial y}}.$$

Отсюда вытекает, что вектор

$$\boldsymbol{m} = \frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial y}\boldsymbol{i} - \frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial x}\boldsymbol{j}$$

коллинеарен этой касательной. А так как скалярное произведение векторов $\boldsymbol{m}$ и $\operatorname{grad} f$ равно нулю:

$$\boldsymbol{m} \cdot \operatorname{grad} f = \frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial f}{\partial y} + \left(-\frac{\partial f}{\partial x}\right)\frac{\partial f}{\partial y} = 0,$$

то тем самым показано, что $\operatorname{grad} f(x, y)$ для любой точки $(x; y)$ направлен по нормали к линии уровня, проходящей через эту точку.

16.1.4. Замечания для случая трех и большего числа переменных. Для функции трех переменных $f(x, y, z)$ уравнения вида $f(x, y, z) = C$ задают нам уже не линии, а *поверхности уровня. Градиент функции* трех переменных определяется формулой

$$\operatorname{grad} f(x, y, z)=\frac{\partial f}{\partial x} \boldsymbol{i}+\frac{\partial f}{\partial y} \boldsymbol{j}+\frac{\partial f}{\partial z} \boldsymbol{k}. \qquad (16.5')$$

Аналогичная терминология сохраняется и для тех случаев, когда число аргументов у функции больше трех.

§ 16.2. Экстремумы функций нескольких переменных. Классический подход к решению экстремальных задач

16.2.1. Основные понятия. Множество $V(M_0, \varepsilon)$, состоящее из всех тех (и только тех) точек M, расстояние которых до точки M_0 строго меньше заданного положительного числа ε, называют обычно *ε-окрестностью* точки M_0 (или просто *окрестностью*). Для случая двух переменных ε-окрестность представляет собой внутренность круга с центром в точке M_0 и с радиусом ε, для трех переменных — внутренность сферы. Если точка M_0 входит в множество D вместе с некоторой своей окрестностью, то M_0 называют *внутренней точкой* этого множества.

Определение 16.2. *Если точку $M_0(x_0; y_0)$ можно окружить такой окрестностью $V(M_0, \varepsilon)$, что значение $f(x_0, y_0)$ будет наибольшим из всех тех значений функции, которые отвечают точкам ее области определения D, попадающим в эту окрестность ($f(x_0, y_0) \geqslant f(x, y)$ для любой $(x; y) \in V(M_0, \varepsilon) \cap D$), то говорят, что в точке M_0 функция $f(x, y)$ имеет локальный максимум.*

Если, кроме того, точка M_0 является внутренней по отношению к D, то говорят, что в этой точке функция имеет внутренний локальный максимум.

Если значение $f(x_0, y_0)$ является наибольшим среди всех вообще значений $f(x, y)$ в области ее определения D, то говорят, что $f(x, y)$ имеет в точке $(x_0; y_0)$ абсолютный максимум. (Точка $(x_0; y_0)$ при этом может лежать как на границе, так и внутри области D.)

Аналогично определяются понятия *локального*, *внутреннего локального* и *абсолютного минимума*. Для максимумов и минимумов употребляется, так же как и в случае функций одной переменной, объединяющий их термин *экстремум*.

Рис. 16.5 иллюстрирует эти понятия. Функция $z = f(x, y)$, заданная в области $D = ABCD$, представлена своими линиями уровня. В точке A $f(x, y)$ имеет абсолютный минимум, в точке F — внутренний локальный минимум, в точках K и H (граничные) локальные минимумы. В каждой из точек C, G, L—(граничные) локальные максимумы, в точке E—абсолютный максимум.

16.2.2. Условия существования внутреннего экстремума для функции двух переменных. Теорема 16.1 (необходимые условия внутреннего экстремума). *Если функция $f(x, y)$ во внутренней (по отношению к своей*

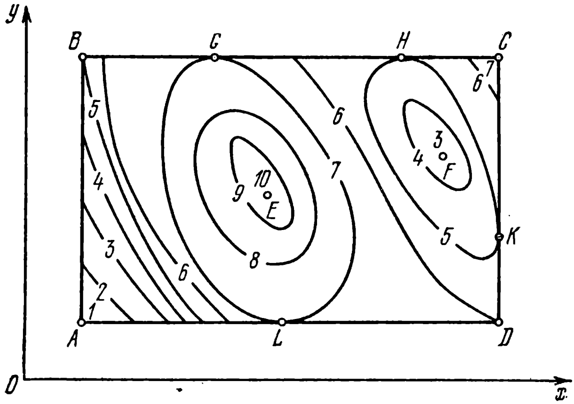


Рис. 16.5

области определения D) точке $M_0(x_0; y_0)$ имеет локальный экстремум и если в этой же точке существуют частные производные $\frac{\partial f}{\partial x}$ и $\frac{\partial f}{\partial y}$, то

$$\frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial x} = 0, \qquad \frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial y} = 0. \qquad (16.8)$$

Доказательство. Пусть в точке $M_0(x_0; y_0)$ функция имеет максимум. Из определения внутреннего локального экстремума следует, что существует такая целиком содержащаяся в области D окрестность $V(M_0, \varepsilon)$ точка $M_0(x_0; y_0)$, что для любой точки $M(x; y)$ из этой окрестности будет $f(x_0, y_0) \geqslant f(x, y)$. В частности,

$$f(x_0, y_0) \geqslant f(x, y_0) \qquad (16.9)$$

для каждой точки $M'(x; y_0) \in V$. Но (16.9) означает, что функция одной переменной $\varphi(x) = f(x, y_0)$ имеет в точке x_0 внутренний максимум. Следовательно (см. гл. 5), $\varphi'(x_0) = 0$.

А так как $\varphi'(x)=\frac{\partial f(x, y_0)}{\partial x}$, то и $\frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial x}=0$. Точно таким же образом доказывается и второе из равенств (16.8). Случай, когда в точке $M_0(x_0; y_0)$ функция имеет минимум, рассматривается аналогично.

Замечание 16.1. Условия (16.8) отнюдь не являются достаточными. Так, для функции, график которой изображен на рис. 16.3, в точке M_0 обе ее частные производные обращаются в нуль, однако в этой точке нет ни максимума, ни минимума.

Отметим без доказательства, что если в точке $M_0(x_0; y_0)$ существуют и непрерывны все частные производные второго порядка и если в этой точке, кроме (16.8), выполняется еще и неравенство

$$\Delta=\frac{\partial^2 f(x_0, y_0)}{\partial x^2}\cdot\frac{\partial^2 f(x_0, y_0)}{\partial y^2}-\left[\frac{\partial^2 f(x_0, y_0)}{\partial x\,\partial y}\right]^2>0, \quad (16.10)$$

то в этой точке $f(x, y)$ имеет экстремум (минимум, если $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}$ и $\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}$ положительны, и максимум, если они обе отрицательны). Если $\Delta<0$, то экстремума в точке $M_0(x_0; y_0)$ нет, а если $\Delta=0$, то вопрос о наличии экстремума остается открытым.

16.2.3. Классический способ отыскания экстремумов. В общем случае, независимо от наличия или отсутствия локальных экстремумов, функция двух переменных не обязательно имеет абсолютные минимум и максимум. Так, функция $z=x^2+y^2$ (рассматриваемая на всей плоскости xOy) имеет абсолютный минимум $z=0$ в точке $(0; 0)$, но, будучи неограниченной сверху, не имеет абсолютного максимума. Функция $z=\operatorname{arctg}(xy)$ хотя и ограничена сверху и снизу числами $+\pi/2$ и $-\pi/2$ (соответственно), тем не менее не имеет ни абсолютного минимума, ни абсолютного максимума. Однако при выполнении некоторых дополнительных условий существование абсолютных экстремумов удается все же гарантировать. Одну из теорем такого рода мы здесь приведем, определив предварительно необходимые для ее формулировки понятия.

Определение 16.3. *Множество D, состоящее из точек декартовой координатной плоскости, называется ограниченным, если его можно целиком заключить в некоторый круг с центром в начале координат.*

Определение 16.4. *Множество D точек координатной плоскости, ограниченное одной или несколькими кусоч-*

но-гладкими линиями и включающее в себя все эти линии, мы будем называть замкнутой областью [1]).

Теорема 16.2 (Вейерштрасс). *Если функция $f(x, y)$ непрерывна в ограниченной и замкнутой области D, то она имеет в этой области как абсолютный максимум, так и абсолютный минимум.*

Мы примем эту теорему без доказательства.

Если функция $f(x, y)$ удовлетворяет условиям теоремы Вейерштрасса и имеет всюду в этой области частные производные $\frac{\partial f}{\partial x}$ и $\frac{\partial f}{\partial y}$, то одним из способов отыскания ее абсолютных экстремумов является следующий.

Решаем систему уравнений

$$\frac{\partial f}{\partial x}=0, \qquad \frac{\partial f}{\partial y}=0. \tag{16.11}$$

Ее решения дают нам все те внутренние точки $(x_1; y_1)$, $(x_2; y_2), \ldots$, которые являются, образно говоря, «подозрительными на экстремум» [2]). (Согласно теореме 16.1 в других внутренних точках локального, а тем более абсолютного экстремума быть не может.) Вычисляя значение функции в каждой из этих точек, мы оставляем из них те, которые дают для $f(x, y)$ наибольшее $f(x^*, y^*)$ (из этих рассмотренных) и наименьшее $f(x_*, y_*)$ значение

$$f(x_*, y_*) \leqslant f(x_i, y_i) \leqslant f(x^*, y^*).$$

После этого, используя уравнения ограничивающих D линий, мы выражаем одну из переменных через другую и, подставляя полученные выражения в выражение для $f(x, y)$, исследуем на экстремум получающиеся функции теперь уже одной переменной. Из полученных для каждого участка границы экстремальных значений отбирают наибольшее и наименьшее и сравнивают их с отобранными на первом этапе значениями $f(x_*, y_*)$ и $f(x^*, y^*)$. Наибольшее из этих сравниваемых значений и дает нам абсолютный максимум, а наименьшее — абсолютный минимум функции $f(x, y)$.

---

[1]) В более обстоятельных курсах понятие замкнутой области трактуется обычно шире, чем мы здесь его определили, однако для наших целей достаточно приведенного определения.

[2]) Мы ограничиваемся здесь тем случаем, когда множество решений (16.11) может быть записано в виде такой последовательности. Если эта последовательность бесконечна, то мы дополнительно предполагаем, что среди чисел $f(x_1, y_1)$, $f(x_2, y_2), \ldots$ есть наибольшее и наименьшее.

Этот способ отыскания абсолютных экстремумов мы здесь будем называть «классическим», имея в виду, что он восходит к начальному периоду становления дифференциального и интегрального исчисления. Проиллюстрируем его следующим примером.

Пример 16.1. Найти абсолютные экстремумы для функции $f(x, y)=x^3+y^3-3xy$, заданной в замкнутой области D, ограниченной осями координат и прямой $x+y=3$.

Решение. Изобразим сначала область D на чертеже (рис. 16.6). Находим $\frac{\partial f}{\partial x}$ и $\frac{\partial f}{\partial y}$ и приравниваем каждую из них к нулю

$$\begin{cases} 3x^2-3y=0, \\ 3y^2-3x=0. \end{cases} \qquad (16.12)$$

Решая (16.12), получаем две точки: $M_1(0;\ 0)$ и $M_2(1;\ 1)$. Первая из них не является внутренней для D, поэтому мы ее на данном этапе исключаем из рассмотрения. Для второй же точки вычисляем

$$f(1,\ 1)=1^3+1^3-3\cdot 1\cdot 1=-1. \qquad (16.13)$$

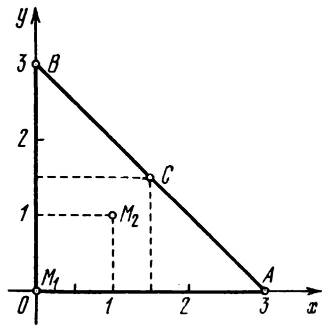


Рис. 16.6.

Переходим теперь к исследованию $f(x, y)$ на границе области. На отрезке OA имеем $y\equiv 0$, поэтому

$$\varphi_1(x)=f(x,\ 0)=x^3.$$

Очевидно, что наименьшее значение $\varphi_1(x)$, равное нулю, принимается функцией в точке $O(0;\ 0)$, а наибольшее, равное 27, — в точке $A(3;\ 0)$. Отрезок OB имеет уравнение $x\equiv 0$. Для него мы имеем

$$\varphi_2(y)=f(0,\ y)=y^3;$$

наибольшее значение, равное 27, эта функция принимает в точке $B(0;\ 3)$, наименьшее, равное нулю, — в точке $O(0;\ 0)$. Наконец, из уравнения отрезка $AB: x+y=3$ получаем $y=3-x$. Подставляя $y=3-x$ в выражение для $f(x, y)$, получаем

$$\varphi_3(x)=f(x,\ 3-x)=x^3+(3-x)^3-3x(3-x)=12x^2-36x+27.$$

Точка $(x,\ 3-x)$ пробегает отрезок AB при изменении x от 0 до 3. Имеем

$$\varphi_3(0)=\varphi_3(3)=27$$

(эти результаты относятся к точкам A и B). Далее находим $\varphi_3'(x)$ и приравниваем ее к нулю:

$$\varphi_3'(x)=24x-36=0,$$

откуда $x=1{,}5$. Вычисляем $\varphi_3(1{,}5)=f(1{,}5;\ 1{,}5)$:

$$\varphi_3(1{,}5)=12\cdot 1{,}5^2-36\cdot 1{,}5+27=0.$$

Сравнивая полученные результаты, заключаем, что абсолютный минимум $f(x, y)$ равен -1 и достигается функцией в точке (1; 1), а абсолютный максимум равен 27 и достигается в точках A (3; 0) и B (0; 3).

16.2.4. Случай трех и большего числа переменных. Определение 16.2 и теорема 16.1 почти без изменений переносятся на случай функции большего чем два числа переменных. Однако с ростом числа переменных классический способ отыскания абсолютных экстремумов становится все более и более неудобным. И дело здесь не только (и чаще всего не столько) в том, что число уравнений и неизвестных в системе, описывающей необходимые условия внутреннего экстремума для $f(x, y, \ldots, t)$,

$$\frac{\partial f}{\partial x}=0, \quad \frac{\partial f}{\partial y}=0, \quad \ldots, \quad \frac{\partial f}{\partial t}=0 \qquad (16.8')$$

растет вместе с числом аргументов этой функции, а и в том, что нам приходится последовательно решать множество задач на отыскание внутренних экстремальных точек как для самой функции, так и для различных ее сужений на те или иные участки границы ее области определения. Так, для функции трех переменных, заданной в области, ограниченной координатными плоскостями и плоскостью $x+y+z=a$ (рис. 16.7), нам пришлось бы сначала рассмотреть нашу функцию внутри пирамиды $OABC$, затем — ее сужения на каждый из четырех треугольников OAB, OAC, OBC и ABC, затем — на каждую из границ каждого из этих треугольников.

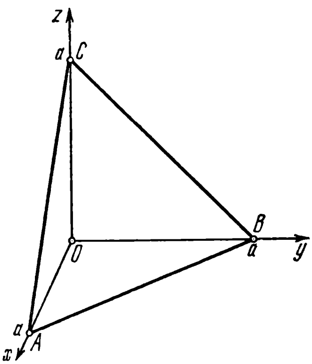


Рис. 16.7.

Даже в таком сравнительно простом еще случае, когда областью определения функции является n-мерный «прямоугольный параллелепипед»:

$$a_1 \leqslant x_1 \leqslant b_1, \quad a_2 \leqslant x_2 \leqslant b_2, \quad \ldots, \quad a_n \leqslant x_n \leqslant b_n$$

(вместо $x, y, \ldots, t$ мы обозначаем здесь аргументы функции через $x_1, x_2, \ldots, x_n$), нам потребовалось бы:

— один раз искать «подозрительные на внутренний экстремум» точки для функции n переменных;

— $2n$ раз (по числу «граней» нашего «параллелепипеда») решать такую же задачу для функций, каждая из которых зависит от $(n-1)$ переменной;

— $2n \cdot (2n-2)$ раз — для функций от $n-2$ переменных; и т. д., т. е. всего

$$1+2n+2^2 n \cdot (n-1)+2^3 \cdot n \cdot (n-1) \cdot (n-2)+\ldots+2^n \cdot n!$$

задач! Даже при некоторой модификации этого способа решения (где каждая из общих границ рассматривается только один раз) количество отдельных задач остается громадным даже при сравнительно небольших значениях n. Даже в тех случаях, когда общее число необходимых для решения элементарных операций само по себе позволяло бы рассчитывать на своевременное получение результата с помощью быстродействующих ЭВМ, мы чаще всего не сможем воспользоваться их услугами по той причине, что классический метод решения экстремальных задач плохо поддается программированию (программы получаются очень громоздкими и их подготовка требует большого количества времени). Единого пригодного «на все случаи жизни» способа решения экстремальных задач для функций от большого числа переменных не существует. Однако для многих важных частных классов таких задач удобные для их решения методы разработаны достаточно полно. О некоторых из этих методов и идет речь в следующих пунктах этой главы.

§ 16.3. Линейное программирование

16.3.1. Предварительные примеры. Нам здесь будет удобно обозначать аргументы тех функций, которые мы здесь собираемся рассматривать, одной и той же буквой, снабженной индексами, т. е. вместо обозначений вида $x, y, z, \ldots, t$ будем писать $x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n$.

Определение 16.5. *Линейной функцией переменных $x_1, x_2, \ldots, x_n$ называется всякая функция вида*

$$f(x_1, x_2, \ldots, x_n)=\lambda_0+\lambda_1 x_1+\lambda_2 x_2+\ldots+\lambda_n x_n.$$

Линейными называются уравнения и неравенства вида

$$f_1(x_1, x_2, \ldots, x_n)=f_2(x_1, x_2, \ldots, x_n),$$
$$f_1(x_1, x_2, \ldots, x_n) \leqslant f_2(x_1, x_2, \ldots, x_n)$$

и т. п., где $f_1(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ и $f_2(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ — линейные функции.

Задачи, состоящие в отыскании абсолютного экстремума линейной функции в области, которая задается посредством системы линейных же уравнений и неравенств, и называются задачами линейного программирования.

Мы начнем изучение этих задач с рассмотрения следующих примеров.

Пример 16.2. Найти абсолютный минимум функции

$$w = 7 - x_1 - x_2 \tag{16.14}$$

в области D, заданной системой неравенств

$$\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 \leqslant 15, \\ x_1 + 3x_2 \leqslant 12, \\ x_1 \geqslant 0, \\ x_2 \geqslant 0. \end{cases} \tag{16.15}$$

Решение. Известно, что прямая $ax + by + c = 0$ делит координатную плоскость xOy на две части, в одной из которых выражение $ax + by + c$ положительно, в другой — отрицательно. Поэтому для

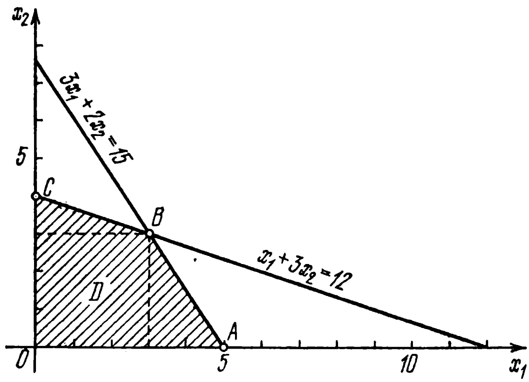


Рис. 16.8.

построения области D мы поступим следующим образом (рис. 16.8). Построим сначала прямую $3x_1 + 2x_2 = 15$. Затем в одной из полуплоскостей, на которые эта прямая делит плоскость x_1Ox_2, выберем «пробную точку». В качестве таковой удобно взять точку (0; 0). В этой точке будет $3x_1 + 2x_2 < 15$. Значит, это же неравенство будет справедливо и для всех тех точек, которые лежат по одну сторону с точкой (0; 0) от прямой $3x_1 + 2x_2 = 15$. Аналогичным образом мы находим ту полуплоскость, которая определяется неравенством $x_1 + 3x_2 \leqslant 12$. Неравенство $x_1 \geqslant 0$ выполняется, очевидно, в полуплоскости, лежащей вправо от оси Ox_2, а неравенство $x_2 \geqslant 0$ — в полуплоскости, лежащей выше оси Ox_1. Мы видим, что каждое из неравенств (16.15) (взятое в отдельности) определяет собой некоторую полуплоскость. Значит, решением этой системы неравенств будет общая часть (теоретико-множественное пересечение) этих полуплоскостей.

Построим теперь в декартовой координатной системе Ox_1x_2w график нашей функции (16.14), т. е. множество Γ точек вида $(x_1; x_2; w)$, где $(x_1; x_2) \in D$, а $w = 7 - x_1 - x_2$. Этот график будет представлять собой лежащую над областью D часть плоскости, определяемой уравнением (16.14). На рис. 16.9 $OABC$ — область D, $O^*A^*B^*C^*$ — часть графика $w = 7 - x_1 - x_2$, отвечающая этой области. Плоскость $H^*E^*F^*$ имеет уравнение $w = 5$, плоскость $R^*K^*L^*$: $w = 3{,}5$; EF и KL — соответствующие им линии уровня. Пусть C — некоторая постоянная. Пересекая Γ плоскостью $w = C$ и проектируя линию пересечения на плоскость x_1Ox_2 мы получим линию уровня функции w, т. е. множество всех тех (и только тех) точек области D, в которых значение функции

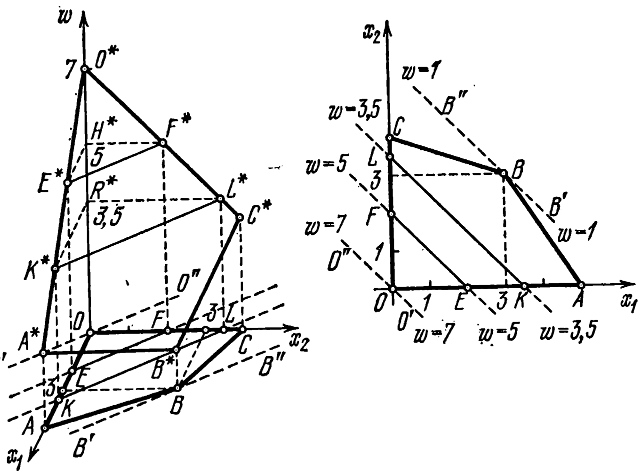


Рис. 16.9.

w равно C. Очевидно, что все такие линии уровня параллельны между собой (это видно хотя бы из того, что их уравнения имеют вид $7 - x_1 - x_2 = C$) и что значения уровня C убывают по мере удаления от точки (0; 0) (вдоль любого луча, исходящего из этой точки и лежащего в первой координатной четверти). Самое низкое значение уровня, следовательно, будет соответствовать точке B (3; 3). Значит, именно в этой точке наша функция и достигает своего абсолютного минимума. Нам остается только подсчитать это значение

$$w_{\min} = w(3;\ 3) = 7 - 3 - 3 = 1.$$

Прямые $O'O''$ и $B'B''$ представляют собой так называемые *опорные прямые*, т. е. «крайние» из числа тех прямых семейства $\{7 - x_1 - x_2 = C\}$, которые имеют общие точки с D. Одна из этих прямых соответствует наибольшему, а другая — наименьшему из значений, принимаемых w в области D (наибольшему и наименьшему из достигаемых значений уровня).

Пример 16.3. Оставив неизменной минимизируемую функцию (16.4), выберем другую (по сравнению с предыдущим примером) область D', а именно:

$$\begin{cases} x_1-2x_2 \leqslant 2, \\ -2x_1+x_2 \leqslant 2, \\ x_1 \geqslant 0, \\ x_2 \geqslant 0. \end{cases} \tag{16.16}$$

Построив область D' (рис. 16.10), мы видим, что она в данном случае оказывается неограниченной. Опорной прямой, которая отвечала бы наименьшему значению уровня, не существует. В области D' функция оказывается неограниченной снизу, следовательно, тем

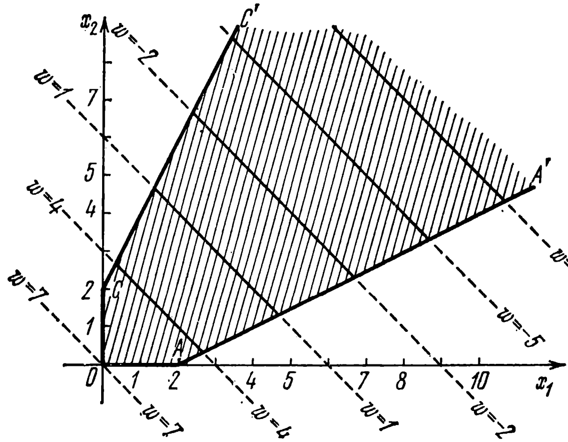


Рис. 16.10.

самым не существует ее абсолютного минимума в этой области. (В то же время абсолютный максимум, равный 7, достигается в точке (0; 0), так что неограниченность области сама по себе еще не означает автоматически отсутствия искомого абсолютного экстремума. Так, функция $w^* = -7+x_1+x_2 = -w$, как легко сообразить, в той же точке (0; 0) имеет по отношению к области D' абсолютный минимум.)

16.3.2. Задачи линейного программирования с ограничениями — неравенствами (случай двух переменных). Рассмотренные в примерах 16.2 и 16.3 задачи являются частными представителями следующего класса задач.

Найти абсолютный минимум (максимум) функции

$$w = c_0 + c_1x_1 + c_2x_2 \tag{16.17}$$

в области D, представляющей собой решение системы, составленной из неравенств

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 \leqslant b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 \leqslant b_2, \\ \dots\dots\dots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 \leqslant b_m, \end{cases} \tag{16.18}$$

$$\begin{cases} x_1 \geqslant 0, \\ x_2 \geqslant 0 \end{cases} \tag{16.19}$$

(мы могли бы, конечно, включить неравенства (16.19) в систему (16.18). Однако оказывается удобным выделять их в отдельную подсистему. Это связано с тем, что эти неравенства в процессе решения задачи играют несколько иную роль по сравнению с неравенствами из (16.18)).

Каждое из неравенств (16.18) и (16.19) определяет собой некоторую полуплоскость, а область D есть общая часть (теоретико-множественное пересечение) этих полуплоскостей. Поэтому для каждой конкретной задачи из этого класса соответствующая ей область может представлять собой какое-нибудь из следующих множеств:

а) пустое множество,

б) точку,

в) многоугольник,

г) неограниченную область, расположенную в 1-й координатной четверти, граница которой состоит из отрезков прямых и из лучей. (Мы будем называть такую область *неограниченным многоугольником*.)

Ясно, что в случаях в) и г) мы всегда будем иметь дело с выпуклыми многоугольниками, т. е. с такими, которые целиком лежат по одну сторону от прямой, проходящей через любую из «сторон» этого многоугольника.

В случае а) наша задача, разумеется, вообще не имеет решения, ибо нет ни одной точки, которая удовлетворяла бы системе ограничений (16.18), (16.19) (в этом случае иногда говорят еще, что система ограничений противоречива).

Единственной точке, из которой состоит область в случае б) соответствует, естественно, одно определенное значение функции w, которое, следовательно, будет одновременно и минимальным и максимальным.

В случае в), каковы бы ни были коэффициенты в выражении для функции w (16.17), семейство прямых уровня

$$c_0 + c_1x_1 + c_2x_2 = \mathrm{const} \tag{16.20}$$

обязательно будет содержать в себе две опорные по отношению к D прямые. В точках, общих для области D и этих опорных прямых функция w и будет достигать своих минимума и максимума. Опорная прямая может иметь либо только одну общую точку с D (такой точкой всегда будет одна из вершин этого многоугольника), либо бесконечное множество таких точек, представляющее собой одну из сторон D. В этом последнем случае все значения функции w на этой стороне будут равны между собой, и, значит, каждое из них будет минимальным (максимальным) для области D.

В случае г) искомый экстремум может и не существовать, но если он все же существует, то обязательно достигается опять-таки на границе области D либо только в одной из ее вершин, либо во всех точках одной из сторон. При этом экстремум не будет существовать тогда и только тогда, когда функция w с соответствующей стороны не ограничена (например, минимум w не существует тогда и только тогда, когда в области D функция w не ограничена снизу). Для задач такого класса, как эта, наличие всего двух переменных x_1 и x_2 позволяет применить следующий геометрический способ их решения. Начертив сначала на плоскости область D, намечают затем направление семейства линий уровня (16.20) функции w (для этого достаточно, придав произвольной постоянной в правой части (16.20) любое значение, построить одну из прямых этого семейства). После этого оказывается возможным провести опорные прямые (или убедиться в отсутствии одной или обеих из них). Точки, общие для D и опорных прямых, и будут давать нам искомое положение экстремумов. Однако для задач с большим числом переменных такой способ применить уже не удается. Поэтому мы в следующем пункте рассмотрим другой, аналитический метод решения подобных задач, который может быть легко перенесен на случай любого числа переменных.

§ 16.4. Симплекс-метод решения задач линейного программирования

16.4.1. Основная идея симплекс-метода и его геометрическая интерпретация. Прежде чем приступить к изложению этого метода, отметим, что из изложенного в § 16.3 следует, в частности, что если для задачи типа (16.17) — (16.19) экстремум существует, то он достигается по крайней мере в одной из вершин многоугольника D. Может показаться поэтому, что наиболее удобный способ решения таких задач — это вычисление значений функции w в каждой из вершин D и выбор той из этих вершин, значение в которой оказывается наименьшим (наибольшим). Однако в общем случае, если количество переменных и ограничений сколько-нибудь велико, то этот способ оказывается неприемлемым из-за того, что общее число «вершин» D становится столь большим, что их полный перебор оказывается невозможным даже при использовании самых совершенных ЭВМ. Поэтому приходится обращаться к так называемым методам *направленного* перебора, позволяющим резко сократить число рассматриваемых вершин. Один из таких методов мы здесь и рассмотрим. Его сущность заключается в том, что, выбрав одну какую-нибудь из вершин D, мы переходим из нее в такую из смежных с ней, чтобы значение w при этом переходе изменилось в нужном нам направлении (уменьшилось, если мы ищем минимум, увеличилось, если ищем максимум). Для случая двух переменных интуитивно ясно (строгого доказательства этому мы здесь давать не будем), что если значение w в какой-либо из вершин B многоугольника D не является минимальным (максимальным), то хотя бы в одной из смежных с B вершин функция w принимает значение, меньшее (большее), чем в B. Отсюда следует, что последовательный переход из одной вершины в другую, смежную с ней, в направлении убывания (возрастания) w действительно должен в конце концов привести нас в точку ее абсолютного минимума (максимума). Нам остается лишь показать, каким образом такой переход может быть осуществлен аналитическими методами. Рассмотрим сначала этот метод на уже знакомой нам задаче из примера 16.2. Нам придется переписать эту задачу в другой (равносильной исходной) форме.

Пример 16.4. Найти абсолютный минимум функции

$$w = 7 - x_1 - x_2 \tag{16.14}$$

в области D, определяемой системой ограничений, состоящей из системы уравнений

$$\begin{cases} x_3 = 15 - 3x_1 - 2x_2, \\ x_4 = 12 - x_1 - 3x_2, \end{cases} \tag{16.21}$$

и системы неравенств

$$x_1 \geqslant 0, \quad x_2 \geqslant 0, \quad x_3 \geqslant 0, \quad x_4 \geqslant 0. \tag{16.22}$$

Мы видим, что по сравнению с примером 16.2 здесь появились новые неотрицательные переменные x_3 и x_4, а первые два неравенства системы (16.15) оказались замененными системой уравнений (16.21). Однако значения этих новых переменных полностью определяются значениями переменных x_1 и x_2 по формулам (16.21), и, следовательно, присоединяя к (16.21) условия (16.22), мы приходим к системе (16.15).

Каждой точке плоскости x_1Ox_2 оказывается теперь поставленным в соответствие упорядоченный набор из четырех чисел $\{x_1, x_2, x_3, x_4\}$, связанных между собой соотношениями (16.21). В области D каждое из этих чисел неотрицательно, вне ее — хотя бы одно является отрицательным. На каждой из сторон многоугольника D одна из этих переменных обращается в нуль (на OA это x_2, на AB это x_3 и т. д.), каждая из вершин D характеризуется нулевыми значениями двух переменных (рис. 16.11).

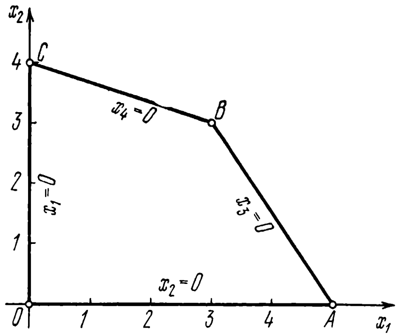


Рис. 16.11.

Сейчас у нас как минимизируемая функция, так и вновь введенные переменные x_3 и x_4 все выражены через переменные x_1 и x_2. Эти последние мы будем называть *свободными переменными*, а те, которые оказались выраженными через них, — *базисными*.

Положим сначала свободные переменные равными нулю. Геометрически это будет означать (рис. 16.11), что мы находимся в точке O. При этом w примет значение 7, а x_3 и x_4 — значения 15 и 12 соответственно. Из выражения (16.14) для w видно, что если мы теперь будем увеличивать значения какой-либо одной из переменных, то значение w будет уменьшаться (это как раз нам и требуется).

Остановим для определенности свой выбор на переменной x_1, сохраняя пока для x_2 нулевое значение. Увеличивая x_1, мы будем тем самым, разумеется, не только уменьшать w, но и изменять значения переменных x_3 и x_4. Имея в виду условия (16.22), мы должны следить, чтобы x_3 и x_4 не сделались отрицательными. Из уравнения (16.21) видно (напомним, что x_2 мы оставляем равным нулю), что, желая сохранить x_3 неотрицательным, мы не можем увеличивать x_1 более чем до 5, а для неотрицательности x_4 надо, чтобы было $x_1 \leqslant 12$. Следовательно, мы имеем возможность увеличить x_1 до значения, равного 5. При этом сделается равной нулю переменная x_3. Геометрически такое изменение x_1 (при $x_2=0$) означает переход из точки O в точку A.

Попробуем теперь «поменять ролями» переменные x_1 и x_3 (ту, которая раньше равнялась нулю и затем была увеличена, и ту, которая в результате этого увеличения оказалась равной нулю). Для этого нам нужно из того уравнения системы (16.21), которое связывает обе эти переменные, выразить x_1 через x_3 и x_2, а затем, используя этот результат, преобразовать и выражение для w, и систему (16.21) так, чтобы w, x_1 и x_4 были выражены через x_3 и x_2.

Имеем

$$x_1 = 5 - \frac{1}{3}x_3 - \frac{2}{3}x_2. \tag{16.23}$$

Подставляя (16.23) в (16.14) и во второе из уравнений (16.21) мы после упрощений получим (условия (16.22), конечно, останутся неизменными)

$$w = 2 + \frac{1}{3}x_3 - \frac{1}{3}x_2, \tag{16.24}$$

$$\begin{cases} x_1 = 5 - \frac{1}{3}x_3 - \frac{2}{3}x_2, \\ x_4 = 7 + \frac{1}{3}x_3 - \frac{7}{3}x_2. \end{cases} \tag{16.25}$$

В такой записи у нас уже переменные x_3 и x_2 оказываются свободными (через них выражены и остальные переменные и функция w), а x_1 и x_4 — базисными.

Снова положим равными нулю свободные переменные. При этом w будет равно 2, а x_1 и x_4 получат значения 5 и 7. Увеличение переменной x_3 для нас теперь невыгодно, ибо при этом w будет возрастать (см. (16.24)). Увеличение же x_2 приведет к уменьшению w. Как и на предыдущем шаге, мы должны из соотношений (16.25) (оставляя x_3 равным нулю) определить границу возможного увеличения x_2. Из первого уравнения видно, что для неотрицательности x_1 должно быть $x_2 \leqslant 7{,}5$, а из второго,— что для неотрицательности x_4 требуется $x_2 \leqslant 3$. Следовательно, максимально возможное увеличение x_2,— это придание ему значения 3. При этом x_4 обратится в нуль. Из рис. 16.11 видно, что мы при этом сделали переход из точки A в точку B.

Таким же способом, как и выше, «поменяем ролями» x_4 и x_2 (сделаем x_4 свободной, а x_2 — базисной). После всех упрощений мы получим

$$w = 1 + \frac{2}{7}x_3 + \frac{1}{7}x_4, \tag{16.26}$$

$$\begin{cases} x_1 = 3 - \frac{3}{7}x_3 + \frac{2}{7}x_4, \\ x_2 = 3 + \frac{1}{7}x_3 - \frac{3}{7}x_4. \end{cases} \tag{16.27}$$

В выражении (16.26) оба коэффициента при переменных x_3 и x_4 положительны. При $x_3 = x_4 = 0$ будет $w = 1$. Увеличение любой из этих переменных будет приводить только к увеличению w. Так, как увеличение x_3 (при $x_4 = 0$) означает движение из точки B по BA, а увеличение x_4 (при $x_3 = 0$) движение по BC, то мы видим, что значение, достигнутое w в этой точке, является абсолютным минимумом. Итак, $w_{\min} = 1$ и достигается при $x_3 = x_4 = 0$, $x_1 = 3$, $x_2 = 3$.

Отметим, что к рис. 16.11 мы обращались только лишь для обоснования и иллюстрации предложенного способа решения. Сами выкладки мы могли бы проделать, и не обращаясь к чертежу.

16.4.2. Алгоритм симплекс-метода. Сформулируем сейчас общие правила, по которым мы проводили эти вычисления, имея в виду теперь уже общий вид задачи (см. (16.17) — (16.19)). Дополнительно мы будем предполагать, что каждое из чисел b_1, b_2, ..., b_m неотрицательно. Для определенности будем считать, что ищется минимум w.

Подготовительный этап. Вводя дополнительные неотрицательные переменные x_3, x_4, ..., x_{2+m}, преобразуем нашу задачу к виду

$$w = c_0 + c_1 x_1 + c_2 x_2, \tag{16.17}$$

$$\left\{\begin{array}{l} x_3 = b_1 - a_{11}x_1 - a_{12}x_2, \\ x_4 = b_2 - a_{21}x_1 - a_{22}x_2, \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ x_{m+2} = b_m - a_{m1}x_1 - a_{m2}x_2, \end{array}\right. \tag{16.28}$$

$$x_1 \geqslant 0, \quad x_2 \geqslant 0, \quad x_3 \geqslant 0, \quad \ldots, \quad x_{m+2} \geqslant 0. \tag{16.29}$$

Если коэффициенты c_1 и c_2 оба неотрицательны, то минимум $w = c_0$ достигается при $x_1 = x_2 = 0$. Если же хотя бы один из этих коэффициентов отрицателен, то мы делаем первый шаг симплекс-алгоритма. Прежде всего мы выбираем из числа свободных переменных (сейчас таковыми являются x_1 и x_2) такую, коэффициент при которой в (16.17) отрицателен. Для определенности предположим, что такой будет переменная x_2. Дальнейшее содержание этого первого шага будет тогда следующим. По каждому из уравнений (16.28) рассчитываем максимально возможную величину приращения для x_2, при которой соответствующая (стоящая в левой части) этому уравнению базисная переменная остается еще неотрицательной. Очевидно, что если в уравнении

$$x_{k+2} = b_k - a_{k1}x_1 - a_{k2}x_2 \tag{16.30}$$

$a_{k2} \leqslant 0$, то при любом увеличении x_2 переменная x_{k+2} остается неотрицательной, если же $a_{k2} > 0$, то должно быть

$$x_2 \leqslant \frac{b_k}{a_{k2}}. \tag{16.31}$$

Выбирая из неравенств (16.31) наиболее сильное, мы и получаем искомую величину приращения для x_2. Если таким наиболее сильным неравенством оказалось то, которое получилось из уравнения с номером k_0, то, полагая $x_2 = b_{k_0}/a_{k_0 2}$, мы получим $x_{k_0+2} = 0$, а все остальные переменные останутся неотрицательными. (Если все $a_{k2} \leqslant 0$, то x_2 можно увеличивать неограничено. При этом будет $w \longrightarrow -\infty$, т. е. $\min w$ не существует.)

Далее мы должны будем «обменять ролями» переменные x_2 и x_{k_0+2}, т. е. перевести x_2 в число базисных, а x_{k_0+2} — в число свободных. Для этого потребуется выразить x_2 через x_1 и x_{k_0+2} из уравнения

$$x_{k_0+2}=b_{k_0}-a_{k_01}x_1-a_{k_02}x_2 \qquad (16.30')$$

и затем полученный результат подставить в остальные уравнения (16.28) и в выражение (16.17) для w.

Если во вновь полученном для w выражении оба коэффициента (при x_1 и при x_{k_0+2}) окажутся неотрицательными, то минимум w будет достигнут при $x_1=x_{k_0+2}=0$ (соответствующие значения остальных переменных найдутся из преобразованной системы (16.28)). Если же среди этих коэффициентов окажется хоть один отрицательный, то мы проделаем второй шаг симплекс-алгоритма, отличающийся от первого только тем, что вместо набора свободных переменных x_1 и x_2 мы будем иметь дело с набором x_1 и x_{k_0+2}.

Подобные шаги мы будем продолжать до тех пор, пока не столкнемся с одним из следующих двух случаев.

Случай 1. После перехода к новой паре свободных переменных оба коэффициента при этих переменных в выражении для w неотрицательны. Это означает, что минимум w достигается при равенстве нулю каждой из этих переменных.

Случай 2. На каком-то шаге мы не будем иметь ни одного из неравенств типа (16.31) потому, что в (преобразованной) системе ограничений все коэффициенты при выбранной свободной переменной неотрицательны. Этот случай свидетельствует о том, что функция w — не ограничена снизу и, следовательно, минимума не имеет.

16.4.3. Симплекс-таблицы и их использование. Так как выполняемые при каждом очередном шаге преобразования носят ярко выраженный алгоритмический характер, то при «ручном» способе расчета их оказывается удобным выполнять посредством заполнения специальных расчетных таблиц (так называемые *симплекс-таблицы*).

Проиллюстрируем один из вариантов такого расчета на материале уже решенной нами задачи из примера 16.4.

Сначала мы занесем в начальную табл. 16.1 исходные данные: систему (16.21) и выражение для функции w (16.14).

ТАБЛИЦА 16.1

Базисные переменные	Свободные переменные			
	Свободные члены	x_1	x_2	Ограничения
x_3	15	—3	—2	
x_4	12	—1	—3	
w	7	—1	—1	

Далее мы выбираем из столбцов, отвечающих свободным переменным какой-нибудь такой, где в строке для w стоит отрицательный коэффициент. Этот столбец (мы здесь выбрали тот, который отвечает x_1) будем называть *разрешающим*. Теперь мы начинаем заполнять столбец «ограничения». «Механизм» этого заполнения таков: если в строке, отвечающей какой-то из базисных переменных, коэффициент из разрешающего столбца отрицателен, то в соответствующей клетке столбца «ограничения» мы записываем взятое с противоположным знаком отношение свободного члена из обрабатываемой строки к упомянутому коэффициенту из разрешающего столбца. Если же этот коэффициент неотрицателен, то в клетке столбца «ограничения» мы делаем прочерк. После того как все клетки этого столбца, отвечающие базисным переменным, будут заполнены, мы выбираем в таблице ту из строк, которой отвечает наименьшее число в столбце «ограничения». Эта строка называется *разрешающей*, а элемент, стоящий на пересечении разрешающих строки и столбца,— *разрешающим элементом*. Результаты всех этих операций показаны в табл. 16.2.

Записываем теперь в правом нижнем углу клетки с разрешающим элементом число, ему обратное, а в правых нижних углах остальных клеток разрешающей строки — взятые с противоположным знаком произведения этого обратного разрешающему элементу числа на числа из левых верхних углов заполняемых клеток. Получен-

ТАБЛИЦА 16.2

Базисные переменные	Свободные переменные			
	Свободные члены	x_1	x_2	Ограничения
x_3	15	$-\underline{\underline{3}}$	−2	5
x_4	12	−1	−3	12
w	7	−1	−1	

ные вновь в разрешающей строке числа мы «закрепляем». (В табл. 16.3 это «закрепление» показано квадратиками).

Если мы теперь мысленно поменяем местами в табл. 16.3 обозначения x_1 и x_3, то эти «закрепленные» числа будут давать нам не что иное, как соотношение (16.23).

ТАБЛИЦА 16.3

Базисные переменные	Свободные переменные			
	Свободные члены	x_1	x_2	Ограничения
x_3	15 $\boxed{5}$	$-\underline{\underline{3}}$ $\boxed{-\frac{1}{3}}$	−2 $\boxed{-\frac{2}{3}}$	5
x_4	12	−1	−3	12
w	7	−1	−1	

Приступим к заполнению правых нижних углов в остальных строках таблицы, включая строку для w. Туда мы будем записывать произведения соответствующих «закрепленных» чисел из разрешающей строки на число, стоящее на пересечении обрабатываемой строки и разрешающего столбца. После этого мы сперва «закрепим» вновь полученные числа во всех клетках разрешающего столбца, а затем во всех тех клетках, где еще нет закрепленных чисел, сложим числа, стоящие в левом верхнем и правом нижнем углах, и «закрепим» полученную сумму. После этого поменяем местами обозначения переменных, отвечающих разрешающим строке и столбцу (см. табл. 16.4).

ТАБЛИЦА 16.4

Базисные переменные	Свободные переменные			
	Свободные члены	x_3	x_2	Ограничения
x_1	15 $\boxed{5}$	-3^{*} $\boxed{-\frac{1}{3}}$	-2 $\boxed{-\frac{2}{3}}$	5
x_4	12 $\boxed{7}$ -5	-1 $\boxed{\frac{1}{3}}$	-3 $\boxed{-\frac{7}{3}}$ $\frac{2}{3}$	12
w	7 $\boxed{2}$ -5	-1 $\boxed{\frac{1}{3}}$	-1 $\boxed{-\frac{1}{3}}$ $\frac{2}{3}$	

Эти операции, как нетрудно сообразить, отражают собой подстановку (16.23) в (16.21) и (16.14). Полученная табл. 16.4 соответствует нашей задаче, приведенной к виду (16.24), (16.25).

Для продолжения решения мы составляем новую таблицу, оставляя на своих местах обозначения переменных (с учетом уже сделанной перестановки x_1 и x_3) и выписывая «закрепленные» в предыдущей таблице числа в левых верхних углах новой (см. табл. 16.5).

ТАБЛИЦА 16.5

Базисные переменные	Свободные переменные			
	Свободные члены	x_3	x_2	Ограничения
x_1	5	$-\frac{1}{3}$	$-\frac{2}{3}$	
x_4	7	$\frac{1}{3}$	$-\frac{7}{3}$	
w	2	$\frac{1}{3}$	$-\frac{1}{3}$	

Далее с этой таблицей повторяется такой же цикл преобразований до тех пор, пока либо в строке для w не окажется отрицательных коэффициентов при свободных переменных (это будет означать, что достигнут минимум), либо при заполнении столбца ограничений в него будут занесены только прочерки (в этом случае w будет неограниченной снизу, и тем самым $\min w$ существовать не будет).

§ 16.5. Случай трех и большего числа переменных. Понятие о нелинейных экстремальных задачах

16.5.1. Задачи линейного программирования с произвольным количеством переменных. Здесь мы вместо задачи (16.17)—(16.19) (см. § 16.3) рассмотрим задачу с тремя переменными.

Найти абсолютный минимум (максимум) функции

$$w = c_0 + c_1x_1 + c_2x_2 + c_3x_3 \tag{16.17'}$$

в области D, определяемой системой, составленной из неравенств

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 \leqslant b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 \leqslant b_2, \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + a_{m3}x_3 \leqslant b_m, \end{cases} \qquad (16.18')$$

$$x_1 \geqslant 0, \quad x_2 \geqslant 0, \quad x_3 \geqslant 0. \qquad (16.19')$$

В этом случае все сказанное выше останется справедливым, с той лишь разницей, что область D будет уже не многоугольником, а многогранником, а вместо прямых линий уровня и опорных прямых появятся плоскости уровня и опорные плоскости. Можно было бы показать, что и в этом случае экстремум, если он существует, достигается в одной из вершин многогранника D.

Если число независимых переменных в подобных задачах сделать большим трех, то, разумеется, наглядной геометрической интерпретации мы уже дать не сможем. Однако рассмотренный в § 16.4 симплекс-метод останется применимым. Этот метод (с определенными модификациями, существо которых мы здесь рассматривать не будем) служит основой для ряда стандартных программ, позволяющих решать на электронно-вычислительных машинах задачи, содержащие сотни переменных и ограничений.

Существуют специальные частные разновидности задач линейного программирования, для которых оказывается более удобным применять специально для них разработанные методы. Мы здесь не будем касаться этого круга вопросов.

16.5.2. Заключительные замечания об экстремальных задачах. Следующим по возрастанию сложности за задачами линейного программирования идут задачи так называемого квадратичного программирования. Область D, в которой требуется отыскать экстремум, задается здесь так же, как и в линейном программировании, а сама функция представляет собой полином второй степени от переменных $x_1, x_2, \ldots, x_m$ (требуется еще, чтобы коэффициенты этого полинома удовлетворяли некоторым не очень жестким требованиям).

Общих методов, позволяющих решать экстремальные задачи произвольного вида, не существует, но для большого числа отдельных типов таких задач соответствующие методы разработаны достаточно хорошо.

Задачи на нахождение экстремумов функций многих переменных в настоящее время весьма актуальны. Особенно часто их приходится решать, занимаясь вопросами планирования и управления народным хозяйством, отраслями и предприятиями, разрабатывая и реализуя новые способы производства, эксплуатируя автоматизированные системы управления. Как правило, эти задачи требуют большого (порой — очень большого) количества вычислений, и чаще всего их решают с помощью ЭВМ. Однако и это решение с помощью ЭВМ оказалось бы невозможным, если бы для этих задач не были разработаны достаточно «быстрые» методы их решения. Большой вклад в разработку таких методов внесли советские математики. Так, еще в довоенные годы академик Л. В. Канторович разрабатывал методы линейного программирования и применял их к решению экономических задач. За рубежом эти методы появились значительно позже, в конце сороковых годов.

Отметим еще ту терминологию, которая все чаще и чаще употребляется для экстремальных задач со многими переменными. Функцию w, чей экстремум разыскивается, называют *целевой функцией* или еще *критерием*. Если ищут минимум w, то ее называют также *функцией потерь*, а если максимум, то — *функцией выгоды*. Уравнения и неравенства, посредством которых задается область D, называются обычно *ограничениями*. В экономических задачах набор значений переменных $\{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$ называют обычно *планом* (имея в виду, что переменные эти представляют собой величины тех или иных материальных или трудовых ресурсов, значения которых и надлежит наилучшим образом спланировать). В приложениях экстремальные задачи называют часто *оптимизационными*, а процесс их решения — *оптимизацией*.

ВОПРОСЫ ДЛЯ ПОВТОРЕНИЯ К ГЛАВЕ 16

1. Что такое линии уровня функции двух переменных? Поверхности уровня функции трех переменных?

2. Что такое производная по направлению? В чем состоит ее геометрический смысл для функции двух переменных?

3. Что называется градиентом функции двух переменных? трех переменных? Как с помощью градиента можно вычислять производную по направлению? Как расположен градиент относительно линий (поверхностей) уровня?

4. Дайте определения локального и абсолютного экстремума функции нескольких переменных. В каком случае экстремум

называется внутренним? Проиллюстрируйте эти понятия на чертеже.

5. В чем состоят необходимые условия внутреннего экстремума функции двух переменных? достаточные условия? Приведите пример.

6. В чем состоит классический способ отыскания абсолютных экстремумов? Дайте его обоснование для случая функции двух переменных. Что можно сказать о применимости этого метода в случае большого числа переменных?

7. Сформулируйте в общем виде задачу линейного программирования с ограничениями — неравенствами для случая двух переменных. Дайте геометрическую интерпретацию системы ограничений.

8. В чем заключается геометрический способ решения задач линейного программирования?

9. Дайте геометрическую интерпретацию основной идеи симплекс-метода решения задач линейного программирования.

10. Опишите алгоритм симплекс-метода. Для определенности будем считать, что в задаче требуется найти минимум целевой функции w. Какой вывод можно сделать, если после некоторого шага все коэффициенты в выражении w через свободные переменные окажутся неотрицательными? Если какая-нибудь из свободных переменных, входящая в выражение для w с отрицательным коэффициентом, в каждом из ограничений имеет неотрицательный коэффициент? Как геометрически интерпретируется каждый из этих случаев?

11. Как провести решение задачи линейного программирования симплекс-методом с использованием таблиц? Проиллюстрируйте примером один шаг симплекс-алгоритма.

УПРАЖНЕНИЯ К ГЛАВЕ 16

В задачах 1—4 требуется:

а) Построить линии уровня данной функции (в соответствии с указанными значениями уровня).

б) Найти и построить градиент этой функции в заданных точках.

в) Через каждую из этих точек провести ось в заданном направлении и в каждой из них найти производную функции по этому направлению. Проиллюстрировать полученный результат геометрически.

1. $f(x, y) = 12 - x^2 - 2y^2$, $M_1(2;\ 2)$, $M_2(0;\ 0)$; $l_0 = \frac{1}{\sqrt{2}}(i + j)$. Значения уровня: 0; 3; 6; 10; 11; 12.

2. $f(x, y) = xy - 2(x + y) + 4$, $M_1(4;\ 3)$, $M_2(2;\ 2)$, $\alpha = \frac{\pi}{3}$, $\beta = \frac{\pi}{6}$. Значения уровня: 0; ± 1; ± 2; ± 3.

3. $f(x, y) = y^2 - 4(x + y)$, $M_1(2;\ 3)$, $M_2(4;\ 2)$, $l_0 = \frac{i + 2j}{\sqrt{5}}$. Значения уровня: —20; —11; —8; —4; 0.

4. $f(x, y) = 3x + 4y$, $M_1(1;\ 2)$, $M_2(3;\ 1)$, $\alpha = \frac{\pi}{6}$, $\beta = \frac{\pi}{3}$. Значения уровня: 0; 6; 11; 12; 13; 18; 24.

В задачах 5—8 надо найти (аналитическим способом) абсолютные экстремумы функции в заданной области D.

5. $f(x, y) = 12 - x^2 - 2y^2$. Область D задается системой неравенств $x \leqslant 2$, $y \leqslant 2$, $x + y + 2 \geqslant 0$.

6. $f(x, y) = xy - 2(x + y) + 4$. Область D — прямоугольник $0 \leqslant x \leqslant 4$, $0 \leqslant y \leqslant 3$.

7. $f(x, y) = y^2 - 4(x + y)$. Область D ограничена осями координат и прямой $x + y = 6$.

8. $f(x, y) = 3x + 4y$. Область D задается системой неравенств $0 \leqslant x \leqslant 3$, $0 \leqslant y \leqslant 3$, $x + y \leqslant 5$, $x - 2y \leqslant 1$.

В каждом из упражнений 9—16 дается задача линейного программирования. Требуется:

а) Решить эту задачу геометрическим методом.

б) Провести решение задачи симплекс-методом и проиллюстрировать ход решения на чертеже.

9. $w = 3x_1 + 4x_2 \longrightarrow \max$,

$$\begin{cases} x_1 \leqslant 3, \\ x_2 \leqslant 3, \\ x_1 + x_2 \leqslant 5, \\ x_1 - 2x_2 \leqslant 1, \end{cases} \qquad x_1 \geqslant 0, \qquad x_2 \geqslant 0.$$

10. $w = 20 - x_1 - x_2 \longrightarrow \min$,

$$\begin{cases} x_2 \leqslant 6, \\ x_1 + 3x_2 \leqslant 20, \\ 5x_1 + x_2 \leqslant 30, \end{cases} \qquad x_1 \geqslant 0, \quad x_2 \geqslant 0.$$

11. $w = 30 - x_1 - 4x_2 \longrightarrow \min$,

$$\begin{cases} x_2 \leqslant 6, \\ x_1 + 3x_2 \leqslant 20, \\ 5x_1 + x_2 \leqslant 30, \end{cases} \qquad x_1 \geqslant 0, \qquad x_2 \geqslant 0.$$

12. $w = x_2 - x_1 \longrightarrow \min$,

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 \leqslant 7, \\ x_1 - 2x_2 \leqslant 2, \\ -3x_1 + x_2 \leqslant 3, \end{cases} \qquad x_1 \geqslant 0, \qquad x_2 \geqslant 0.$$

13. $w = 10 - x_1 - x_2 \longrightarrow \min$,

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 \leqslant 7, \\ x_1 - 2x_2 \leqslant 2, \\ -3x_1 + x_2 \leqslant 3, \end{cases} \qquad x_1 \geqslant 0, \qquad x_2 \geqslant 0.$$

14. $w = x_1 + x_2 \longrightarrow \max$,

$$\begin{cases} x_1 + 4x_2 \leqslant 16, \\ 3x_1 + x_2 \leqslant 15, \end{cases} \qquad x_1 \geqslant 0, \qquad x_2 \geqslant 0.$$

15. $w = 10 - x_1 - x_2 \longrightarrow \min$,

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 \leqslant 10, \\ x_1 + x_2 \leqslant 6, \\ 3x_1 + x_2 \leqslant 12, \end{cases} \qquad x_1 \geqslant 0, \qquad x_2 \geqslant 0.$$

16. $w = 2x_1 + x_2 \longrightarrow \max$,

$$\begin{cases} x_1 - x_2 \leqslant 2, \\ x_1 - 2x_2 \leqslant 1, \\ -x_1 + x_2 \leqslant 2, \\ -2x_1 + x_2 \leqslant 1, \end{cases} \qquad x_1 \geqslant 0, \qquad x_2 \geqslant 0.$$

17. Решите симплекс-методом следующую задачу линейного программирования: $w = 12 - 3x_1 - 2x_2 - x_3 \longrightarrow \min$,

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 \leq 3, \\ x_1 \qquad\quad \leq 1, \qquad x_1 \geq 0, \qquad x_2 \geq 0, \qquad x_3 \geq 0. \\ \quad x_2 \qquad \leq 1, \end{cases}$$

Постройте многогранник, определяемый системами ограничений и проиллюстрируйте геометрически ход решения.

18. Найдите абсолютный минимум функции $w = 60 - 3x_1 - 2x_2 - 2x_3 - x_4$ в области D, заданной следующей системой ограничений:

$$\begin{cases} 2x_1 + 2x_2 - 3x_3 + x_4 \leq 6, \\ -x_1 + x_2 + 2x_3 \qquad \leq 5, \qquad x_1, \quad x_2, \quad x_3, \quad x_4 \geq 0. \\ x_1 \qquad - x_3 + x_4 \leq 2, \end{cases}$$

ОТВЕТЫ, УКАЗАНИЯ И РЕШЕНИЯ К ГЛАВЕ 16

1. Полагая в формуле $12 - x^2 - 2y^2 = C$ значение уровня C равным 0, мы получаем отвечающую этому значению линию уровня $x^2 + 2y^2 = 12$. Как видно, она представляет собой эллипс, каноническим образом расположенный относительно координатных осей.

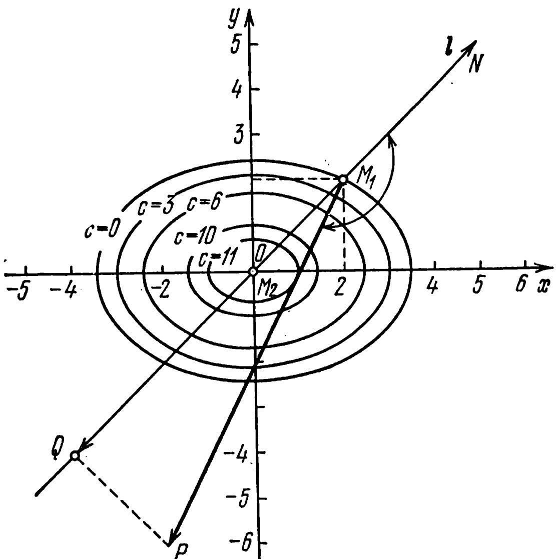


Рис. 16.12.

Длины полуосей этого эллипса равны соответственно $2\sqrt{3} \approx 3{,}46$ и $\sqrt{6} \approx 2{,}45$. Таким образом мы находим и остальные линии уровня (из числа требуемых по условию задачи). Построив их (рис. 16.12), мы видим, что в нашем случае линии уровня образуют семейство концентрических подобных друг другу эллипсов, причем большему значению уровня отвечает эллипс, расположенный ближе к их общему центру.

Находим общее выражение для градиента:

$$\operatorname{grad} f(x, y) = \frac{\partial f}{\partial x} \boldsymbol{i} + \frac{\partial f}{\partial y} \boldsymbol{j} = -2x\boldsymbol{i} - 4y\boldsymbol{j},$$

а затем — его значения в точках M_1 и M_2:

$$\operatorname{grad} f(x, y)\Big|_{M_1} = -4\boldsymbol{i} - 8\boldsymbol{j}, \quad \operatorname{grad} f(x, y)\Big|_{M_2} = 0.$$

Второй из этих векторов оказался нулевым, первый же мы строим, помещая его начало в точку M_1.

Проводим через точки M_1 и M_2 оси в направлении вектора $\boldsymbol{l}_0$. Для вычисления производной по этому направлению мы можем воспользоваться как формулой

$$\frac{\partial f}{\partial l} = \frac{\partial f}{\partial x} \cos\alpha + \frac{\partial f}{\partial y} \cos\beta,$$

где α и β — углы, составленные осью $\boldsymbol{l}$ с координатными осями, так и формулой

$$\frac{\partial f}{\partial l} = \boldsymbol{l}_0 \cdot \operatorname{grad} f,$$

где $\boldsymbol{l}_0$ — единичный вектор направления $\boldsymbol{l}$.

В нашем случае несколько более удобным оказывается второй способ:

$$\frac{\partial f}{\partial l}\Big|_{M_1} = \left(\frac{1}{\sqrt{2}} \boldsymbol{i} + \frac{1}{\sqrt{2}} \boldsymbol{j}\right) \cdot (-4\boldsymbol{i} - 8\boldsymbol{j}) = -\frac{4}{\sqrt{2}} - \frac{8}{\sqrt{2}} =$$
$$= -6\sqrt{2} \approx -8{,}49,$$

$$\frac{\partial f}{\partial l}\Big|_{M_2} = \left(\frac{1}{\sqrt{2}} \boldsymbol{i} + \frac{1}{\sqrt{2}} \boldsymbol{j}\right) \cdot 0 = 0.$$

Геометрически каждое из найденных значений представляет собой величину проекции соответствующего (векторного!) значения градиента на ось l. На рис. 16.12 вектор $\overrightarrow{M_1P}$ представляет собой значение $\operatorname{grad} f$ в точке M_1; $\overrightarrow{M_1Q}$ — его проекция на ось $\boldsymbol{l}$. (Так как угол PM_1N тупой, то величина этой проекции отрицательна).

2. Выражение для $f(x, y)$ удобно записать в виде

$$f(x, y) = (x-2)(y-2).$$

Линии уровня представляют собой равнобочные гиперболы, асимптотами которых служат прямые $x=2$ и $y=2$ (совокупность этих двух прямых тоже является линией уровня для значения $f(x, y)=0$).

В точке $M_1(4;\ 3)$: $\operatorname{grad} f = \boldsymbol{i} + 2\boldsymbol{j}$, $\dfrac{\partial f}{\partial l} = \dfrac{1}{2} + \sqrt{3} \approx 2{,}23$.

В точке $M_2(2;\ 2)$: $\operatorname{grad} f = 0$; $\dfrac{\partial f}{\partial l} = 0$.

3. Семейство линий уровня состоит из конгруэнтных друг другу парабол с осью $y=2$ и значением параметра $p=2$.

В точке $M_1(2;\ 3)$: $\operatorname{grad} f = -4\mathbf{i}+2\mathbf{j}$, $\dfrac{\partial f}{\partial l}=0$.

В точке $M_2(4;\ 2)$: $\operatorname{grad} f = 4\mathbf{i}$, $\dfrac{\partial f}{\partial l}=-\dfrac{4}{\sqrt{5}}\approx -1{,}79$.

4. Линии уровня образуют семейство параллельных друг другу прямых.

В точках $M_1(1;\ 2)$ и $M_2(3;\ 1)$ (как и в любой другой точке): $\operatorname{grad} f = 3\mathbf{i}+4\mathbf{j}$, $\dfrac{\partial f}{\partial l}=\dfrac{3\sqrt{3}}{2}+2\approx 4{,}60$.

5. Ищем сначала все те точки области D, в которых градиент $f(x,\ y)$ обращается в 0. Для этого нам надо решить систему уравнений

$$\frac{\partial f(x,\ y)}{\partial x}=0, \qquad \frac{\partial f(x,\ y)}{\partial y}=0.$$

Подставляя сюда выражения для частных производных, мы видим, что единственным решением этой системы является пара чисел $x=0$, $y=0$. Соответствующая точка лежит внутри области D. Вычисляя значение $f(x,\ y)$ в этой точке, мы получаем $f(0,\ 0)=12$ (рис. 16.13).

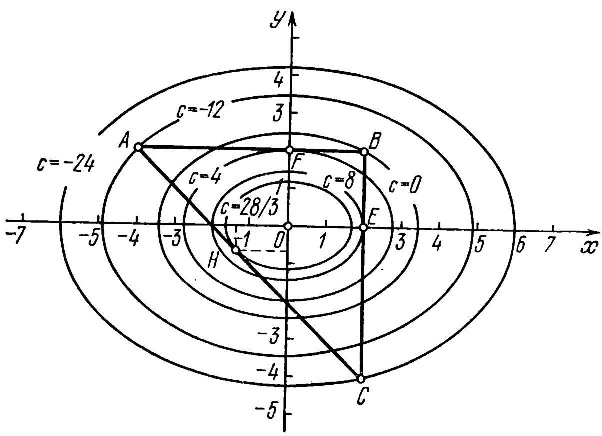


Рис. 16.13.

Исследуем теперь нашу функцию на границе области D. Отрезок AB имеет уравнение $y=2$. Поэтому $\varphi_1(x)=f(x,\ 2)=4-x^2$. Отрезку AB отвечает промежуток изменения x от -4 до 2. Исследуя на этом промежутке функцию $\varphi_1(x)$, мы находим, что она имеет максимум при $x=0$: $\varphi_1(0)=f(0,\ 2)=4$. Для точек A и B получаем

$$f(x,\ y)\Big|_A=\varphi_1(-4)=-12, \quad f(x,\ y)\Big|_B=\varphi_1(2)=0.$$

На отрезке BC, который имеет уравнение $x=2$, получаем

$$\varphi_2(y)=f(x,\ y)\Big|_{BC}=f(2,\ y)=8-2y^2.$$

Отрезку BC отвечает промежуток изменения y от -4 до 2.

Функция $\varphi_2(y)$ имеет максимум при $y=0$: $\varphi_2(0)=f(2;\ 0)=8$. Вычисляем значения $f(x,\ y)$ на концах отрезка BC:

$$f(x,\ y)\Big|_B=\varphi_2(2)=0,\quad f(x,\ y)\Big|_C=\varphi_2(-4)=-24.$$

Записав уравнение AC в виде $y=-(x+2)$, мы получаем

$$\varphi_3(x)=f(x,\ y)\Big|_{AC}=f(x,\ -(x+2))=4-8x-3x^2.$$

Точка $(x;\ -(x+2))$ пробегает AC при изменении x от -4 до 2. Рассматривая $\varphi_3(x)$ на этом промежутке, мы находим, что она имеет максимум при $x=-4/3$: $\varphi_3(-4/3)=f(-4/3,\ -2/3)=28/3$. Значения же $\varphi_3(x)$, отвечающие концам отрезка AC, у нас уже вычислены: $\varphi_3(-4)=f(-4,\ 2)=-12$, $\varphi_3(2)=f(2,\ -4)=-24$. Сравнивая между собой все найденные значения, мы приходим к выводу, что функция $f(x,\ y)$ (относительно области D) достигает абсолютного максимума в точке $O(0,\ 0)$, а абсолютного минимума — в точке $C(2;\ -4)$: $\max\limits_D f(x,\ y)=f(0,\ 0)=12$, $\min\limits_D f(x,\ y)=f(2,\ -4)=-24$.

Полученные результаты хорошо иллюстрируются рис. 16.13. По изображенным линиям уровня видно, что $f(A)=-12$, $f(B)=0$, $f(C)=-24$, $f(E)=8$, $f(F)=4$, $f(H)=28/3$.

6. $\max\limits_D f(x,\ y)=f(0,\ 0)=4$, $\min\limits_D f(x,\ y)=f(4,\ 0)=-4$.

7. $\max\limits_D f(x,\ y)=f(0,\ 6)=12$, $\min\limits_D f(x,\ y)=f(6,\ 0)=-24$.

8. $\max\limits_D f(x,\ y)=f(2,\ 3)=18$, $\min\limits_D f(x,\ y)=f(0,\ 0)=0$.

9. В отличие от рассмотренных в главе 16 примеров 16.2 и 16.4 (см. также п. 16.4.3), мы здесь ищем не минимум, а максимум функции. Поэтому выбор разрешающего столбца нам нужно будет производить, ориентируясь уже не на отрицательные, а на положительные коэффициенты в этой строке симплекс-таблицы, которая отвечает w. Все остальные операции с этими таблицами проводятся так же, как и при отыскании минимума. Ниже приводится подробное решение примера.

Строим область D, определяемую данными системами неравенств («ограничениями — неравенствами»),— см. рис. 16.14, где область D представляет собой многоугольник $OABCEF$. Прямая $F'F''$ — одна из линий уровня функции w, $E'E''$ и $O'O''$ — опорные прямые.

Задавшись произвольно выбранным значением C, строим одну из линий уровня функции w: $3x+4y=C$. (На рис. 16.14 построена прямая $3x+4y=12$.)

Параллельно этой линии проводим опорные к области D прямые. Одна из них будет проходить через точку $O(0;\ 0)$, другая — через точку $E(2;\ 3)$. В этих точках w и достигает своих абсолютного максимума и абсолютного минимума: $w_{\max}=w(2,\ 3)=18$, $w_{\min}=w(0,\ 0)=0$.

Для решения задачи симплекс-методом мы, прежде всего, преобразуем ее к виду

$$w = 3x_1 + 4x_2 \longrightarrow \max,$$

$$\begin{cases} x_3 = 3 - x_1, \\ x_4 = 3 \qquad - x_2, \\ x_5 = 5 - x_1 - x_2, \\ x_6 = 1 - x_1 + 2x_2, \qquad x_i \geqslant 0 \quad (i = 1, 2, \ldots, 6). \end{cases}$$

В такой записи переменные x_1 и x_2 являются свободными, а x_3, x_4, x_5 и x_6 — базисными. Положив эти свободные переменные x_1 и x_2

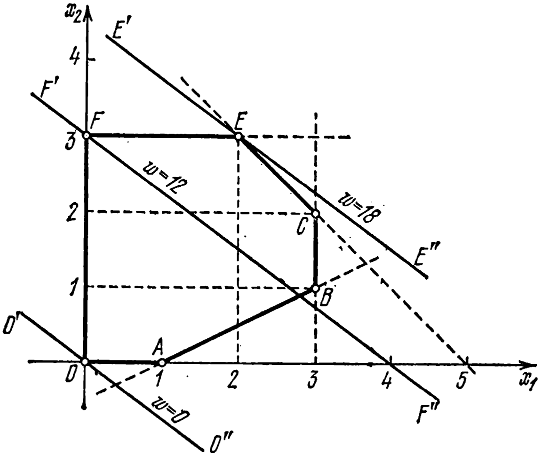


Рис. 16.14.

равными нулю, мы попадаем в точку O (0; 0). (На рис. 16.15 стрелками показаны переходы из точки O ($x_1 = x_2 = 0$) в точку F ($x_1 = x_4 = 0$) и из точки F в точку E ($x_4 = x_5 = 0$). Около каждой стороны многоугольника $OABCEF$ указано, какая из переменных обращается в 0 на этой стороне.) Составляем теперь исходную симплекс-таблицу, записывая в левых верхних углах коэффициенты исходной системы ограничений и выражения для w (табл. 16.6).

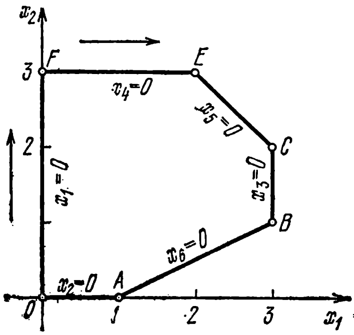


Рис. 16.15.

Просматривая нижнюю строку этой таблицы, мы выбираем в качестве «разрешающего» такой столбец, которому отвечает положительный коэффициент при свободной переменной в выражении для w. В нашем случае можно выбрать любой из столбцов, соответствующих переменным x_1 и x_2. Для определенности остановим свой выбор на том, который связан с x_2. Выбрав разрешающий столбец, мы приступаем к заполнению столбца «ограничения». Коэффициент, стоящий

ТАБЛИЦА 16.6

Базисные переменные	Свободные переменные				
	Свободные члены	x_1	x_2	Ограничения	
x_3	3 $\boxed{3}$ 0	-1 $\boxed{-1}$ 0	0 $\boxed{0}$	—	
x_4	3 $\boxed{3}$	0 $\boxed{0}$	$\underline{\underline{-1}}$ $\boxed{-1}$	3	$\Leftarrow \boxed{p}$
x_5	5 $\boxed{2}$ -3	-1 $\boxed{-1}$ 0	-1 $\boxed{1}$	5	
x_6	1 $\boxed{7}$ 6	-1 $\boxed{-1}$ 0	2 $\boxed{-2}$	—	
w	0 $\boxed{12}$ 12	3 $\boxed{3}$ 0	4 $\boxed{-4}$		
			$\Uparrow \boxed{p}$		

на пересечении разрешающего столбца со строкой для x_3, равен 0. Так как это число не является отрицательным, то в соответствующей клетке столбца «ограничения» мы делаем прочерк. Спускаясь по разрешающему столбцу строчкой ниже, мы видим, что стоящий здесь коэффициент отрицателен. Деля свободный член строки для x_4 на этот коэффициент и изменяя знак результата на противоположный, мы получаем число для записи в столбец «ограничения»: $-\frac{3}{-1}=3$. Точно таким же образом мы получаем в строке для x_5 значение «ограничения», равное 5, а в строке для x_6 ставим в столбце «ограничения» прочерк (коэффициент 2 в этой строке неотрицателен). Строка для w в этом процессе не используется. Наименьшее из чисел, полученных в столбце «ограничения», указывает, какую из строк мы должны принять в качестве разрешающей. У нас такой строкой оказывается строка для x_4. Элемент, стоящий на пересечении разрешающих строки и столбца, называется *разрешающим* (в табл. 16.6 он отмечен подчеркиванием.)

После этого мы начинаем пересчет таблицы. Он начинается с заполнения правых нижних углов в разрешающей строке. Прежде всего мы записываем в клетке для разрешающего элемента число, ему обратное, а в остальных клетках этой строки — взятые с противоположным знаком произведения стоящих там чисел на это обратное разрешающему элементу число. Все вновь полученные в разрешающей строке числа мы «закрепляем» (в табл. 16.6 это «закрепление»

ТАБЛИЦА 16.7

Базисные переменные	Свободные переменные			
	Свободные члены	x_1	x_4	Ограничения
x_3	3 $\boxed{1}$ -2	-1 $\boxed{1}$	0 $\boxed{-1}$ -1	3
x_2	3 $\boxed{3}$ 0	0 $\boxed{0}$	-1 $\boxed{-1}$ 0	—
x_5	2 $\boxed{2}$	$\underline{\underline{-1}}$ $\boxed{-1}$	1 $\boxed{1}$	2 $\Leftarrow \boxed{p}$
x_6	7 $\boxed{5}$ -2	-1 $\boxed{1}$	-2 $\boxed{-3}$ -1	7
w	12 $\boxed{18}$ 6	3 $\boxed{-3}$	-4 $\boxed{-1}$ 3	
		$\Uparrow$ $\boxed{p}$		

показано квадратиками). Далее в правых нижних углах клеток всех остальных строк мы записываем произведения элемента, стоящего на пересечении обрабатываемой строки и разрешающего столбца, на соответствующее «закрепленное» число из разрешающей строки. После того, как эти расчеты для всех строк будут закончены, мы сначала закрепим все вновь рассчитанные числа в разрешающем столбце, а затем в тех клетках таблицы, где еще не окажется закрепленных чисел, сложим стоящие там два числа и закрепим их сумму. Этим завершаются расчеты для первой из наших таблиц.

Составляем теперь следующую таблицу (табл. 16.7), которая будет отличаться от исходной тем, что обозначения переменных x_2 и x_4, отвечающих разрешающим столбцу и строке, меняются местами, а в левых верхних углах ее ставятся те числа, которые оказались в предыдущей таблице «закрепленными». С этой новой таблицей мы производим такие же расчеты, как и с первой. Заметим, что здесь уже в качестве «разрешающего» может быть выбран только столбец, отвечающий x_1, ибо в другом столбце (для x_4) коэффициент в строке для w отрицательный.

ТАБЛИЦА 16.8

Базисные переменные	Свободные переменные			
	Свободные члены	x_5	x_4	Ограничения
x_3	1	1	—1	
x_2	3	0	—1	
x_1	2	—1	1	
x_6	5	1	—3	
w	18	—3	—1	

Закончив эти расчеты и перейдя к очередной таблице (табл. 16.8), мы видим, что в ней выбор разрешающего столбца невозможен, ибо в строке для w оба коэффициента как при x_5, так и при x_4 отрицательны. Это служит признаком того, что искомый максимум достигнут. Положив свободные (свободные — на этом последнем шаге) переменные равными 0, мы получаем $w_{\max} = 18$ при $x_4 = x_5 = 0$,

$x_3=1$, $x_2=3$, $x_1=2$ и $x_6=5$. Переход от табл. 16.6 к табл. 16.7 геометрически соответствует переходу из точки O (0; 0), отвечающей нулевым значениям свободных переменных x_1 и x_2, вдоль отрезка OF в точку F (0; 3), которая отвечает нулевым значениям нового набора свободных переменных x_1 и x_4 (двигаясь по OF, мы сохранили x_1 равной 0, а значение x_2 увеличивали до значения 3 (оно стоит у нас в столбце «ограничения» на его пересечении со строкой для x_4) (см. рис. 16.15). Переход от табл. 16.7, к табл. 16.8 геометрически соответствует движению по отрезку FE из точки F в точку E (при этом x_4 сохраняется равным 0, а x_1 увеличивается до значения 2, которое стоит у нас в табл. 16.7 на пересечении столбца «ограничения» со строкой для x_5). Точка E отвечает нулевым значениям ставших на этом шаге свободными переменных x_4 и x_5. Так как по табл. 16.8 мы убедились в невозможности дальнейшего увеличения w, то следует заключить, что эта точка E и доставляет функции w искомый максимум. (Если бы мы на первом шаге выбрали в качестве разрешающего столбец для x_1, то наш путь к максимуму проходил бы через точки A, B и C, и нам потребовалось бы проводить пересчет таблиц четыре раза. Попробуйте решить задачу также и этим путем.)

10. $w_{\min}=10$ при $x_1=x_2=5$.

11. $w_{\min}=4$ при $x_1=2$, $x_2=6$.

12. Хотя область D и неограничена, искомый минимум существует и достигается в точке (4; 1): $w_{\min}=-3$ при $x_1=4$, $x_2=1$. (При использовании симплекс-таблиц мы здесь и «не почувствуем» неограниченности D.)

13. w не ограничена снизу, следовательно, искомый минимум не существует (нет нужной нам опорной прямой). Решение при помощи симплекс-таблиц заканчивается на том шаге, когда в столбце «ограничения» во всех клетках будет поставлен прочерк (это и есть признак неограниченности w в направлении поиска).

14. $w_{\max}=7$ или $x_1=4$, $x_2=3$. (В этом примере, как и в примере 9, мы имеем дело с поиском максимума. Поэтому разрешающий столбец в симплекс-таблицах мы должны искать, ориентируясь на положительные коэффициенты при свободных переменных в строке для w.)

15. $w_{\min}=4$. Это значение w принимает в каждой точке отрезка, соединяющего точки (2; 4) и (3, 3). Решение симплекс-методом закончится по достижении какой-либо одной из этих точек. (При этом один из коэффициентов в строке w будет равен 0, а остальные — неотрицательны.)

16. w не ограничена сверху. Искомого максимума не существует.

17. $w_{\min}=6$ при $x_1=x_2=x_3=1$.

18. $w_{\min}=19$ при $x_2=x_4=0$, $x_1=9$, $x_3=7$.

ГЛАВА 17

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ

§ 17.1. Введение

17.1.1. Понятие о дифференциальном уравнении. Задачи, приводящие к дифференциальным уравнениям. Функция от совокупности переменных и их производных является *дифференциальным выражением*, а уравнение, содержащее дифференциальное выражение, называется *дифференциальным уравнением*.

Переменные, по которым дифференцируют, называются *независимыми переменными*; те, от которых взяты производные,— их *функциями* или *зависимыми переменными*.

Соотношение вида

$$F(x, y, y', y'', \ldots, y^{(n)}) = 0, \qquad (17.1)$$

где F — известная функция своих аргументов, заданная в некоторой фиксированной области, x — независимая переменная, y — зависимая переменная, т. е. функция переменной x, подлежащая определению, $y', y'', \ldots, y^{(n)}$ — ее производные, называется *обыкновенным дифференциальным уравнением*.

В приложениях математики к техническим и физическим наукам дифференциальные уравнения встречаются часто, так как многие физические законы проще всего выражаются при помощи дифференциальных символов. Рассмотрим некоторые задачи, сводящиеся к дифференциальным уравнениям.

Задача 17.1. Найти уравнение, описывающее химическую реакцию, подчиненную «закону действия масс», который утверждает, что скорость, с которой вещества превращаются в соединения, пропорциональна произведению количеств тех веществ, которые еще не соединились.

Решение. Химические реакции не происходят моментально после того, как реагенты приведены в соприкосновение. Пройдет некоторое время прежде, чем вся масса одного вещества вступит в реакцию с остальными веществами. Скорость образования соединения, однако, не постоянна, а изменяется вместе с количеством веществ, которые способны вступить в соединение. Во многих простых процессах скорость реакции подчиняется закону, известному под названием «закон действия масс».

Пусть x есть число молекул соединения, образовавшихся к моменту времени t, и пусть каждая молекула соединения содержит n молекул одного вещества и m молекул другого. Допустим, наконец, что в начале процесса было N молекул первого вещества и M второго. Тогда число не соединившихся молекул каждого вещества равно соответственно $N-nx$ и $M-mx$. Закон действия масс утверждает, что скорость образования новых молекул соединения, т. е. $\frac{dx}{dt}$, пропорциональна произведению двух последних величин. Таким образом, получаем дифференциальное уравнение

$$\frac{dx}{dt}=k(N-nx)(M-mx).$$

Задача 17.2. Предположим, что материальная точка движется по прямой. Пусть направление движения совпадает с положительным направлением оси Ox; при этом в момент времени t точка занимает положение x. Пусть непрерывная при всех рассматриваемых t функция времени $f(t)$ определяет скорость движения точки. Найти функциональную зависимость x от t, если известно, что в некоторый момент времени t_0 точка занимает положение x_0.

Решение. Поскольку скорость движения рассматриваемой точки в момент времени t равна производной от x по t, то, очевидно, имеем

$$\frac{dx}{dt}=f(t). \tag{17.2}$$

Равенство (17.2) есть дифференциальное уравнение движения рассматриваемой точки. Это равенство определяет закон движения в дифференциальной форме. Интегрируя уравнение (17.2), найдем интересующий нас закон в явном виде, т. е. в виде

$$x=x(t).$$

Процесс интегрирования (17.2) состоит в нахождении всех первообразных для функции $f(t)$

$$x=\int_{t_0}^{t} f(t)\,dt+C. \tag{17.3}$$

Выделим из (17.3) интересующее нас движение (решение), в котором

$$x=x_0 \quad \text{при} \quad t=t_0. \tag{17.4}$$

Имеем

$$x_0=\int_{t_0}^{t_0} f(t)\,dt+C,$$

откуда $C=x_0$, и, следовательно, искомым движением (решением) будет

$$x=\int_{t_0}^{t} f(t)\,dt+x_0. \tag{17.5}$$

Формула (17.5) дает искомый закон движения материальной точки Других движений, определяемых дифференциальным уравнением (17.2) и условием (17.4), нет.

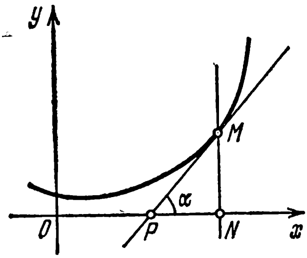


Рис. 17.1.

В заключение пункта рассмотрим геометрическую задачу, приводящую к построению дифференциального уравнения.

Задача 17.3. Найти кривую (рис. 17.1), длина подкасательной к которой постоянна. (*Подкасательной* к плоской кривой в точке $M(x, y)$ называется направленный отрезок, заключенный между точкой пересечения касательной к кривой в точке M с осью Ox, и проекцией точки M на ось Ox.)

Решение. Длина подкасательной

$$PN=MN\cdot\operatorname{ctg}\alpha=y\frac{dx}{dy}.$$

Следовательно,

$$y\frac{dx}{dy}=k, \tag{17.6}$$

или

$$dx=k\frac{dy}{y},$$

откуда (интегрируя обе части равенства)

$$x+C=k\ln y.$$

Если произвольную постоянную C положить равной $k\ln a$, получим

$$y=ae^{x/k}.$$

17.1.2. Основные понятия: порядок дифференциального уравнения, начальные условия, общее и частное решения, граничные условия. *Порядком* дифференциального уравнения называется порядок старшей производной, входящий в него. Так, порядок уравнения

$$y''+p(x)y'+q(x)y=f(x) \tag{17.7}$$

равен двум. Порядок уравнений (17.2) и (17.6) равен единице. Уравнение n-го порядка всегда можно записать в виде (17.1).

Наряду с уравнением (17.1) будем рассматривать дифференциальное уравнение вида

$$y^{(n)}=f(x, y, y', \ldots, y^{(n-1)}), \tag{17.1'}$$

т. е. дифференциальное уравнение n-го порядка, разрешенное относительно старшей производной. Это уравнение называется *дифференциальным уравнением n-го порядка в нормальной форме.*

Всякая функция, связывающая переменные и обращающая дифференциальное уравнение в верное равенство, называется *решением* дифференциального уравнения.

Например, дифференциальное уравнение

$$\frac{dy}{dx}-ax^{a-1}y=0 \tag{17.8}$$

имеет решение

$$y=e^{x^a}. \tag{17.9}$$

Действительно, подставляя (17.9) в (17.8), получим тождество

$$ax^{a-1}e^{x^a}-ax^{a-1}e^{x^a}\equiv 0.$$

Функция (17.9) дает решение уравнения (17.8) в виде, разрешенном относительно y, т. е. y есть явная функция от x. Кроме того, в этом случае y составлено из известных элементарных функций аргумента x. Такая форма решения не является необходимой. Действительно, выражение

$$\frac{\ln y}{x}-x^{a-1}=0 \tag{17.10}$$

точно так же представляет решение уравнения (17.8), хотя оно не разрешено относительно y и представляет y как неявную функцию x. Далее, очевидно, нельзя требовать, чтобы y выражалось через элементарные функции аргумента. Последнее может быть выяснено на следующем примере.

Уравнение

$$x\frac{dy}{dx}-\sin x=0 \qquad (x\neq 0) \tag{17.11}$$

равносильно следующему:

$$\frac{dy}{dx}=\frac{\sin x}{x}.$$

Откуда следует, что интеграл от $\frac{\sin x}{x}$ есть решение, и хотя это решение и может быть записано в виде, разрешенном относительно y:

$$y = \int \frac{\sin x}{x} dx,$$

однако оно не может быть выражено в элементарных функциях.

График решения дифференциального уравнения называется *интегральной кривой* этого уравнения.

Процесс нахождения решений данного дифференциального уравнения называется *интегрированием* этого уравнения. Если все решения, например (17.2), (17.6), удается выразить в элементарных функциях, то говорят, что уравнение проинтегрировано в элементарных функциях. Если уравнение, не интегрируется в элементарных функциях, например (17.11), но его решения выражаются через определенный или неопределенный интеграл от элементарных функций, то говорят, что уравнение проинтегрировано в квадратурах. Если удается проинтегрировать дифференциальное уравнение в элементарных функциях или квадратурах, то говорят, что уравнение интегрируемо в конечном виде.

Основная задача теории дифференциальных уравнений состоит в нахождении всех решений данного уравнения и изучении свойств этих решений.

В задаче 17.2 требовалось найти решение дифференциального уравнения, принимающее заданное значение при заданном значении независимой переменной. Такая задача называется *начальной задачей* или *задачей Коши*.

В общем случае для уравнения первого порядка вида

$$y' = f(x, y) \tag{17.12}$$

начальная задача ставится так: требуется найти решение

$$y = y(x) \tag{17.13}$$

уравнения (17.2), удовлетворяющее начальному условию

$$y = y_0 \quad \text{при} \quad x = x_0. \tag{17.14}$$

При этом предполагаем, что правая часть дифференциального уравнения (17.12) определена в некоторой окрестности точки (x_0, y_0).

Таким образом, мы определяем начальную задачу как совокупность уравнения и начального условия. Решение задачи (17.12), (17.14) будем записывать в виде

$$y = y(x, x_0, y_0). \tag{17.15}$$

Для дифференциального уравнения n-го порядка начальная задача ставится аналогично: найти решение (17.13) дифференциального уравнения (17.1), удовлетворяющее условиям

$$y = y_0, \quad y' = y'_0, \quad \ldots, \quad y^{(n-1)} = y_0^{(n-1)} \quad \text{при} \quad x = x_0\,[1]. \tag{17.16}$$

При этом решение задачи (17.1), (17.16) будем записывать в виде

$$y = y(x, x_0, y_0, y'_0, \ldots, y_0^{(n-1)}). \tag{17.17}$$

Определив начальную задачу (17.1), (17.16), естественно поставить вопрос об ее единственности.

Будем говорить, что задача (17.1), (17.16) имеет *единственное решение*, если существует такая окрестность точки x_0,

$$|x - x_0| < h, \tag{17.18}$$

в которой определено решение (17.17) и не существует решения

$$y = y_1(x, x_0, y_0, \ldots, y_0^{(n-1)}),$$

определенного в той же окрестности (17.18), значения которого не совпадают со значениями решения (17.17) хотя бы в одной точке окрестности (17.18), отличной от точки x_0.

Рассмотрим некоторую область D изменения переменных x, y, y', $\ldots$, $y^{(n-1)}$.

Предположим, что в каждой точке области D имеет место существование и единственность решения начальной задачи.

Функция

$$y = \varphi(x, C_1, \ldots, C_n), \tag{17.19}$$

определенная в некоторой области изменения переменных x, C_1, $\ldots$, C_n и имеющая непрерывные частные

---

[1]) В этой записи y_0, y'_0, $\ldots$, $y_0^{(n-1)}$ — данные вещественные числа.

производные по x до порядка n включительно, называется *общим решением* уравнения (17.1′) в области D, если

1) Система уравнений

$$\left.\begin{aligned} y &= \varphi(x, C_1, \ldots, C_n), \\ y' &= \varphi'(x, C_1, \ldots, C_n), \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ y^{(n-1)} &= \varphi^{(n-1)}(x, C_1, \ldots, C_n) \end{aligned}\right\} \qquad (17.20)$$

разрешима в области D относительно произвольных постоянных $C_1, \ldots, C_n$:

$$C_i = \psi_i(x, y, y', \ldots, y^{(n-1)}) \qquad (i = 1, \ldots, n). \quad (17.21)$$

2) Функция (17.19) является решением уравнения (17.1′) при всех значениях произвольных постоянных $C_1, \ldots$ $\ldots, C_n$, доставляемых формулами (17.21), когда точка $(x, y, y', \ldots, y^{(n-1)})$ пробегает область D.

Общее решение, заданное неявно уравнением

$$F(x, y, C_1, \ldots, C_n) = 0,$$

называется *общим интегралом*.

Общее решение (17.19) содержит в себе в с е решения уравнения (17.1′) с начальными данными из области D: каждое из этих решений получается из формулы (17.19) при соответствующих значениях произвольных постоянных. В силу этого мы можем рассматривать обратную задачу — задачу построения дифференциального уравнения по известному общему решению.

Пусть дано n-параметрическое семейство (17.19), удовлетворяющее условию 1) определения общего решения. Чтобы восстановить дифференциальное уравнение этого семейства, достаточно продифференцировать n раз уравнение (17.19) по x и заменить в полученном уравнении C_i, используя формулу (17.21). Из сказанного выше мы можем заметить, что количество *произвольных* постоянных равно порядку построенного дифференциального уравнения. Так, однопараметрическое семейство есть общее решение дифференциального уравнения первого порядка и т. д. Восстановление дифференциального уравнения, порождающего заданное семейство, используется при решении некоторых практических задач. Рассмотрим задачу о нахождении ортогональных траекторий.

Задача 17.4. Найти ортогональные траектории семейства гипербол

$$y = C/x. \tag{17.22}$$

Решение. *Ортогональной* траекторией семейства кривых называется кривая, перпендикулярная всем кривым данного семейства[1]). Чтобы найти ортогональные траектории семейства кривых, надо восстановить дифференциальное уравнение, порождающее это семейство. Для этого дифференцируем (17.22) по x: $y' = -C/x^2$ и исключаем параметр C, используя уравнение (17.22) в виде $C = yx$. Получим

$$y' = -y/x. \tag{17.23}$$

Возьмем на одной из кривых семейства (17.22), порождаемого дифференциальным уравнением (17.23), произвольную точку $M(x; y)$. Угловой коэффициент касательной в этой точке $k_1 = y'$, следовательно, угловой коэффициент прямой, проходящей через эту же точку, но перпендикулярно касательной $k_2 = -1/k_1 = -1/y'$. Заменяя в левой части уравнения (17.23) y' на $-1/y'$, мы и получим дифференциальное уравнение семейства ортогональных кривых

$$-\frac{1}{y'} = -\frac{y}{x}$$

или

$$x\,dx = y\,dy. \tag{17.23'}$$

Интегрируя это уравнение, мы найдем, что уравнение семейства ортогональных семейству (17.22) кривых будет иметь вид (рис. 17.2)

$$x^2 - y^2 = C_1$$

(на рис. 17.2 произвольные постоянные C и C_1 положительны).

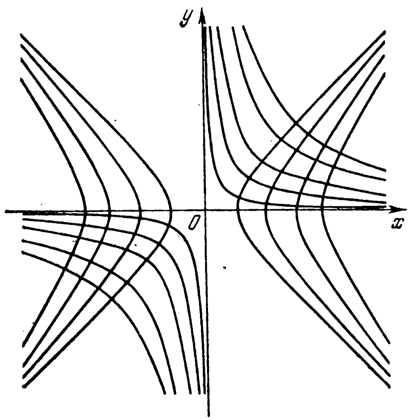


Рис. 17.2.

Решение $y = y(x)$, в каждой точке которого *сохраняется единственность решения начальной задачи*, называется *частным* решением. Решение, содержащееся в формуле общего решения (17.19), т. е. получающееся из нее при фиксированном числовом значении произвольной постоянной (включая $\pm\infty$), является частным решением.

Наряду с начальной задачей рассматриваются так называемые *граничные* (*краевые*) *задачи*, в которых условия задаются не в одной точке, как это имеет место в начальной задаче, а на концах некоторого интервала $[a, b]$ и разыскивается решение, определенное внутри этого интер-

---

[1]) *Угол* между кривыми измеряется углом между касательными, проведенными к этим кривым в точке их пересечения.

вала. Условия, задаваемые на концах интервала, называются *граничными* (*краевыми*) *условиями*.

Необходимо отметить, что постановка граничной задачи имеет смысл только для уравнений порядка выше первого; при этом указанная задача не всегда имеет решение, а если имеет, то чаще всего не единственное.

Пример 17.1. Найти решение уравнения

$$y'' = 6x, \tag{17.24}$$

удовлетворяющее:

1) начальным условиям

$$y = 0, \quad y' = 1 \quad \text{при} \quad x = 0; \tag{17.25}$$

2) граничным (краевым) условиям

$$\begin{aligned} y &= 0 \quad \text{при} \quad x = 0, \\ y &= 1 \quad \text{при} \quad x = 1. \end{aligned} \tag{17.26}$$

Решение. Интегрируя последовательно уравнение (17.24), имеем

$$\begin{aligned} y' &= 3x^2 + C_1, \\ y &= x^3 + C_1 x + C_2. \end{aligned} \tag{17.27}$$

Подставляя в (17.27) начальные условия (17.25), будем иметь

$$1 = 3 \cdot 0 + C_1,$$
$$0 = 0 + C_1 \cdot 0 + C_2,$$

откуда

$$C_1 = 1, \qquad C_2 = 0,$$

так, что искомым решением будет

$$y = x^3 + x.$$

Найдем частное решение, удовлетворяющее граничным условиям (17.26). Имеем

$$0 = 0 + C_1 \cdot 0 + C_2,$$
$$1 = 1 + C_1 \cdot 1 + C_2.$$

Тогда $C_1 = 0$, $C_2 = 0$, и, следовательно, искомое частное решение будет иметь вид

$$y = x^3.$$

§ 17.2. Дифференциальные уравнения первого порядка

17.2.1. Геометрическая интерпретация дифференциального уравнения первого порядка. Известно, что всякое уравнение вида $y = f(x)$ может быть графически изображено при помощи кривой линии на плоскости xOy. При этом по заданному значению x это уравнение определяет одно значение y, т. е. мы получаем одну точку на кривой. Придавая x другие значения, мы получаем другие точки кривой. Иными словами, уравнение $y = f(x)$ определяет кривую на плоскости xOy, связывая друг с другом координаты ее точек.

Дифференциальное же уравнение не связывает непосредственно x с y. Процесс в этом случае совершенно другой.

Рассмотрим уравнение первого порядка (17.12)

$$y' = f(x, y).$$

Подстановка некоторого определенного значения x в это уравнение не приводит к значению y; зато когда x и y оба получают заданные значения, определяется значение y', т. е. для выбранной точки $(x; y)$ уравнение (17.12) определяет направление, в котором должна проходить интегральная кривая через точку $(x; y)$, если она вообще проходит через эту точку.

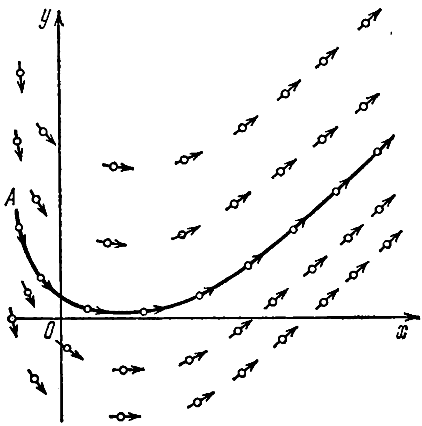


Рис. 17.3.

Предположим, что мы определили направления, соответствующие большому числу точек и отметили эти направления стрелками (рис. 17.3).

Посмотрев на рисунок, мы видим, что каждая стрелка направлена к стрелке, расположенной над ней таким образом, что стрелки собираются в группы. Начиная с некоторой точки A и связывая стрелки такой группы вместе, мы получим кривую, имеющую в точках, отмеченных стрелками, тангенс угла наклона касательной, задаваемой уравнением (17.12). Увеличивая неограниченно число стрелок, мы приближаемся к предельной кривой, координаты и наклон касательной которой удовлетворяют дифференциальному уравнению уже в каждой точке. Эта предельная кривая или, точнее, соотношение между y и x, которое она графически изображает, есть решение уравнения (17.12).

Таким образом, дифференциальное уравнение определяет кривую, *указывая направление, в котором эта кривая проходит в каждой ее точке.*

Эта геометрическая картина дает графический метод решения дифференциального уравнения. Практически этот метод дает не очень точные результаты, но тем не менее иногда применяется, когда более точные методы оказываются слишком сложными.

17.2.2. Простейшие типы дифференциальных уравнений первого порядка: уравнения с разделяющими переменными, линейные уравнения. Рассмотрим дифференциальное уравнение первого порядка, представленное в виде (17.12),

$$\frac{dy}{dx}=f(x, y).$$

Если $f(x, y)$ оказывается произведением функции переменной x на функцию переменной y, то она может быть записана в виде

$$f(x, y)=f_1(x)f_2(y).$$

В этом случае уравнение (17.12) принимает вид

$$\frac{dy}{dx}=f_1(x)f_2(y) \tag{17.28}$$

и называется *уравнением с разделяющимися переменными*. Предположим, что $f_2(y)$ не обращается в нуль при рассматриваемых значениях y. Разделив обе части уравнения (17.28) на $f_2(y)$ и умножив их на dx, будем иметь

$$\frac{dy}{f_2(y)}=f_1(x)\,dx.$$

Интегрируя полученное уравнение, найдем *общий интеграл* уравнения (17.28)

$$\int\frac{dy}{f_2(y)}=\int f_1(x)\,dx+C.$$

Описанный процесс известен как «решение дифференциального уравнения при помощи разделения переменных».

Пример 17.2. Найти решения уравнения

$$\frac{dy}{dx}=x(1+y^2).$$

Разделяя переменные, получим

$$\frac{dy}{1+y^2}=x\,dx.$$

Интегрируя, найдем

$$\operatorname{arctg} y=\frac{x^2}{2}+C,$$

откуда общее решение будет иметь вид

$$y=\operatorname{tg}\left(\frac{x^2}{2}+C\right).$$

Если $f_2(y)$ обращается в нуль при $y=b$, то прямая $y=b$ является решением уравнения (17.28). Это решение может не содержаться в общем интеграле (см., например, упражнение 19).

Рассмотрим *линейное* дифференциальное уравнение первого порядка

$$\frac{dy}{dx}+p(x)\,y=q(x). \tag{17.29}$$

Сделав в уравнении (17.29) замену искомой функции y по формуле

$$z=u(x)\,y,$$

где $u(x)$ — пока неопределенная функция от x, получим

$$\frac{dz}{dx}+\left(p(x)-\frac{1}{u}\frac{du}{dx}\right)z=q(x)\,u(x). \tag{17.30}$$

Выберем функцию $u(x)$ так, чтобы коэффициент при z в уравнении (17.30) обратился в нуль

$$p(x)-\frac{1}{u}\frac{du}{dx}=0 \Rightarrow u(x)=e^{\int p(x)\,dx}.$$

Тогда уравнение (17.30) примет вид

$$\frac{dz}{dx}=q(x)\,e^{\int p(x)\,dx},$$

откуда

$$z=\int q(x)\,e^{\int p(x)\,dx}\,dx+C.$$

Возвращаясь к искомой функции y, получим *общее решение* уравнения (17.29) в виде

$$y=e^{-\int p(x)\,dx}\left(C+\int q(x)\,e^{\int p(x)\,dx}\,dx\right). \tag{17.31}$$

Пример 17.3. Найти общее решение уравнения

$$\frac{dy}{dx}+xy=x. \tag{17.32}$$

Здесь

$$p(x)=x, \qquad q(x)=x.$$

Поэтому

$$e^{-\int p(x)\,dx}=e^{-\int x\,dx}=e^{-x^2/2},$$

$$\int q(x)\,e^{\int p(x)\,dx}\,dx=\int xe^{x^2/2}\,dx=e^{x^2/2}$$

(произвольные постоянные интегрирования опускаются). Подстановка в формулу (17.31) дает

$$y=e^{-x^2/2}\,(C+e^{x^2/2}),$$

или

$$y=1+Ce^{-x^2/2}.$$

§ 17.3. Дифференциальные уравнения порядка выше первого

17.3.1. Линейные дифференциальные уравнения второго порядка с постоянными коэффициентами. Рассмотрим уравнение второго порядка

$$y''+py'+qy=0, \tag{17.33}$$

где p и q — вещественные числа.

Наша задача состоит в том, чтобы найти вещественные решения уравнения (17.33). Однако для нахождения последних иногда используются комплексные решения. Под *комплексным решением* уравнения (17.33) мы будем понимать комплексную функцию вещественной переменной x вида

$$y=u(x)+iv(x) \tag{17.34}$$

($u(x)$ и $v(x)$ — вещественные функции), обращающую уравнение (17.33) в тождество. При этом производные от функции (17.34) определяются так:

$$y'=u'(x)+iv'(x),$$
$$y''=u''(x)+iv''(x).$$

Нетрудно убедиться, что вещественная и мнимая части комплексного решения (17.34), т. е. функции $u(x)$ и $v(x)$ являются решениями уравнения (17.33), так что имеют место тождества

$$u''(x)+pu'(x)+qu(x)=0,$$
$$v''(x)+pv'(x)+qv(x)=0.$$

Будем разыскивать частное решение уравнения (17.33) в виде

$$y=e^{\lambda x}, \tag{17.35}$$

где λ — неизвестное число. Согласно определению решения функция (17.35) будет решением, если она обращает уравнение (17.33) в тождество, т. е., подставив (17.35) в (17.33), мы должны получить

$$\lambda^2 e^{\lambda x} + p\lambda e^{\lambda x} + q e^{\lambda x} \equiv 0,$$

или

$$P(\lambda) e^{\lambda x} \equiv 0, \qquad (17.36)$$

где

$$P(\lambda) \equiv \lambda^2 + p\lambda + q.$$

Из (17.36) следует, что интересующее нас тождество будет выполнено тогда и только тогда, когда $P(\lambda) = 0$, т. е. λ является корнем уравнения

$$\lambda^2 + p\lambda + q = 0. \qquad (17.37)$$

Это уравнение называется *характеристическим уравнением*, а его корни — *характеристическими числами* уравнения (17.33).

Заметим, что характеристическое уравнение (17.37) может быть составлено по данному дифференциальному уравнению (17.33) заменой y'', y' и y на λ^2, λ и 1 соответственно, т. е. степень λ совпадает с порядком производной, если условиться считать, что производная нулевого порядка от функции есть сама функция.

Структура общего решения уравнения (17.33), очевидно, зависит от вида корней характеристического уравнения (17.37).

Рассмотрим сначала случай, когда корни различны. Предположим, что они вещественные. Обозначим их через λ_1 и λ_2. Тогда, подставляя в формулу (17.35) вместо λ числа λ_1 и λ_2, получим два частных решения уравнения (17.33)

$$y_1 = e^{\lambda_1 x}, \qquad y_2 = e^{\lambda_2 x}. \qquad (17.38)$$

Общее решение уравнения (17.33) в этом случае будет иметь вид

$$y = C_1 e^{\lambda_1 x} + C_2 e^{\lambda_2 x}. \qquad (17.39)$$

Действительно, функция (17.39) удовлетворяет требованиям, налагаемым на общее решение, указанным в п. 17.1.2, так как система

$$\left.\begin{aligned} y &= C_1 e^{\lambda_1 x} + C_2 e^{\lambda_2 x}, \\ y' &= C_1 \lambda_1 e^{\lambda_1 x} + C_2 \lambda_2 e^{\lambda_2 x} \end{aligned}\right\}$$

разрешима относительно C_1 и C_2 (ибо $\lambda_1 \neq \lambda_2$) и функция (17.39) является решением уравнения (17.33) при всех C_1 и C_2.

Пример 17.4. Пусть дано уравнение

$$y'' - k^2 y = 0.$$

Имеем

$$\lambda^2 - k^2 = 0 \Longrightarrow \lambda_1 = k, \ \lambda_2 = -k \Longrightarrow y_1 = e^{kx}, \ y_2 = e^{-kx}.$$

Общим решением будет

$$y = C_1 e^{kx} + C_2 e^{-kx}.$$

Предположим теперь, что корни характеристического уравнения комплексны. Так как коэффициенты этого уравнения вещественны, то его комплексные корни являются сопряженными: $\lambda_1 = a + ib$, $\lambda_2 = a - ib$.

Подставляя корень $\lambda_1 = a + ib$ в формулу (17.35), получим комплексное решение

$$y = e^{(a+ib)x}. \tag{17.40}$$

Но

$$e^{(a+ib)x} = e^{ax} e^{ibx} = e^{ax} (\cos bx + i \sin bx),$$

поэтому решение (17.39) можно записать так:

$$y = e^{ax} \cos bx + i e^{ax} \sin bx. \tag{17.40'}$$

Отделяя в комплексном решении (17.40′) вещественную и мнимую части, получим два вещественных частных решения

$$y_1 = e^{ax} \cos bx, \qquad y_2 = e^{ax} \sin bx. \tag{17.41}$$

Общее решение уравнения (17.34) в этом случае будет иметь вид

$$y = e^{ax} (C_1 \cos bx + C_2 \sin bx). \tag{17.42}$$

Если корни λ_1 и λ_2 чисто мнимые, т. е. $\lambda_1 = ib$, $\lambda_2 = -ib \ (b \neq 0)$, то им соответствуют частные решения вида

$$y_1 = \cos bx, \qquad y_2 = \sin bx.$$

Следовательно, общее решение будет иметь вид

$$y = C_1 \cos bx + C_2 \sin bx. \tag{17.43}$$

Пример 17.5. Решить уравнение

$$y'' + k^2 y = 0.$$

Характеристическое уравнение

$$\lambda^2 + k^2 = 0$$

имеет чисто мнимые корни $\lambda_{1,2}=\pm ik$. Поэтому, согласно формуле (17.43), общее решение будет иметь вид

$$y=C_1\cos kx+C_2\sin kx.$$

Предположим теперь, что характеристическое уравнение (17.37) имеет равные корни $\lambda_1=\lambda_2=m$. Тогда общее решение уравнения (17.33) будет иметь вид

$$y=e^{mx}(C_1+C_2x). \tag{17.44}$$

Пример 17.6. Решить уравнение

$$y''+2y'+y=0$$

и найти частное решение, удовлетворяющее начальным условиям $y=2$, $y'=-3$ при $x=0$.

Решение. Характеристическое уравнение

$$\lambda^2+2\lambda+1=0$$

имеет равные корни $\lambda_1=\lambda_2=-1$. Поэтому, согласно (17.44), общее решение будет иметь вид

$$y=e^{-x}(C_1+C_2x). \tag{17.45}$$

Выделим из общего решения искомое частное. Для этого подставим начальные данные в формулу общего решения

$$2=1\cdot(C_1+C_2\cdot 0),$$

откуда

$$C_1=2.$$

Дифференцируя (17.45), получим

$$y'=-e^{-x}(C_1+C_2x)+e^{-x}\cdot C_2=e^{-x}(C_2-C_1-C_2x).$$

Теперь, подставляя начальные данные в полученное выражение, найдем, что

$$-3=C_2-C_1 \Rightarrow C_2=-1.$$

Таким образом, искомое частное решение будет иметь вид

$$y=e^{-x}(2-x).$$

17.3.2. Примеры решения дифференциальных уравнений высших порядков. Рассмотрим простейшее дифференциальное уравнение n-го порядка, разрешенное относительно старшей производной:

$$y^{(n)}=f(x). \tag{17.46}$$

Интегрируя последовательно уравнение (17.46), получим

$$y=\underbrace{\int\int\ldots\int}_{n\text{ раз}} f(x)\,dx\,dx\ldots dx+C_1x^{n-1}+\ldots+C_{n-1}x+C_n. \tag{17.47}$$

Это и есть *общее решение* уравнения (17.46).

Пример 17.7. Найти общее решение уравнения

$$y''' = xe^x \qquad (17.48)$$

и выделить частное решение, удовлетворяющее начальным условиям

$$y=1, \quad y'=0, \quad y''=0 \quad \text{при} \quad x=0. \qquad (17.49)$$

Решение. Интегрируя последовательно уравнение (17.48), получим

$$\begin{aligned} y'' &= e^x(x-1) + C_1, \\ y' &= e^x(x-2) + C_1x + C_2, \\ y &= e^x(x-3) + \frac{1}{2}C_1x^2 + C_2x + C_3. \end{aligned} \qquad (17.50)$$

Найдем решение, удовлетворяющее поставленным начальным условиям. Подставляя (17.49) в (17.50), имеем

$$\begin{aligned} 0 &= -1 + C_1, \\ 0 &= -2 + C_2, \\ 1 &= -3 + C_3, \end{aligned}$$

откуда $C_1 = 1$, $C_2 = 2$, $C_3 = 4$, так что искомым частным решением будет

$$y = e^x(x-3) + \frac{1}{2}x^2 + 2x + 4.$$

Рассмотрим **дифференциальное уравнение n-го порядка, не разрешенное относительно производной, вида**

$$f(x, y^{(n)}) = 0. \qquad (17.51)$$

Если это уравнение можно разрешить в элементарных функциях относительно $y^{(n)}$, то мы получим одно или несколько уравнений рассмотренного выше вида.

Пусть уравнение (17.51) неразрешимо относительно $y^{(n)}$, но допускает параметрическое представление

$$x = \varphi(t), \qquad y^{(n)} = \psi(t).$$

В этом случае удается найти *общее решение в параметрической форме*

$$x = \varphi(t), \qquad y = \psi_n(t, C_1, C_2, \ldots, C_n).$$

Пример 17.8. Проинтегрировать уравнение

$$x - e^{y''} + y''^2 = 0. \qquad (17.52)$$

Это уравнение неразрешимо относительно y''. Зато оно разрешимо относительно x,

$$x = e^{y''} - y''^2,$$

и поэтому, приняв y'' за t, получим параметрическое представление уравнения (17.52) в виде

$$x = e^t - t^2, \qquad y'' = t.$$

Далее

$$dy' = y''\,dx, \qquad dy' = t\,(e^t - 2t)\,dt,$$

$$y' = \int t\,(e^t - 2t)\,dt + C_1 = e^t\,(t-1) - \frac{2}{3}\,t^3 + C_1,$$

$$dy = y'\,dx = \left(e^t\,(t-1) - \frac{2}{3}\,t^3 + C_1\right)(e^t - 2t)\,dt.$$

Поэтому

$$y = \left(\frac{t}{2} - \frac{3}{4}\right)e^{2t} - \left(\frac{2}{3}\,t^3 - 2t + 2 - C_1\right)e^t + \frac{4}{15}\,t^5 - C_1 t^2 + C_2.$$

Присоединяя сюда равенство $x = e^t - t^2$, получаем общее решение дифференциального уравнения (17.52) в параметрической форме.

Рассмотрим далее уравнение, не содержащее независимой переменной.

Уравнение вида

$$f\,(y,\ y',\ \ldots,\ y^{(n)}) = 0 \tag{17.53}$$

допускает понижение порядка на единицу, если вместо y ввести новую искомую функцию z по формуле

$$y' = z$$

и принять y за новую независимую переменную, $z = z\,(y)$.

Пример 17.9. Проинтегрировать уравнение

$$2yy'' = y'^2 + y^2. \tag{17.54}$$

Решение. Полагая $y' = z$ и принимая y за новую независимую переменную, получим

$$y'' = \frac{dy'}{dx} = \frac{dz}{dx} = \frac{dz}{dy}\frac{dy}{dx} = \frac{dz}{dy}\,z.$$

Уравнение (17.54) примет вид

$$2y\frac{dz}{dy}\,z = z^2 + y^2.$$

Полагаем $z^2 = u$, тогда

$$y\,\frac{du}{dy} = u + y^2.$$

Разделим обе части этого уравнения на y; при этом отметим, что мы можем потерять решение $y = 0$. Итак, имеем

$$\frac{du}{dy} = \frac{1}{y}\,u + y \qquad (y \neq 0?).$$

Интегрируя это выражение, получим

$$u = C_1 y + y^2.$$

Следовательно,

$$z^2 = C_1 y + y^2, \qquad y'^2 = C_1 y + y^2,$$

откуда

$$\frac{dy}{\sqrt{C_1 y + y^2}} = \pm\, dx.$$

Интегрируя, получим *общий интеграл* уравнения (17.54)

$$\ln\left|y + \frac{C_1}{2} + \sqrt{C_1 y + y^2}\right| = \pm\, x + C_2. \qquad (17.55)$$

Он содержит две произвольные постоянные. Разрешив (17.55) относительно y, мы получим общее решение дифференциального уравнения (17.54). Легко видеть, что функция $y=0$ не будет входить в формулу общего решения. Непосредственной подстановкой убеждаемся, что $y=0$ — решение уравнения (17.54).

Таким образом, общим решением дифференциального уравнения (17.54) будет система, состоящая из разрешенного относительно y выражения (17.55) и частного решения $y=0$.

Уравнение

$$F(x,\ y,\ y',\ \ldots,\ y^{(n)}) = 0 \qquad (17.56)$$

однородное относительно $y,\ y',\ \ldots,\ y^{(n)}$[1], допускает понижение порядка на единицу, если положить

$$y' = yz, \qquad (17.57)$$

где z — новая неизвестная функция, $z = z(x)$.

Пример 17.10. Найти общее решение дифференциального уравнения

$$xyy'' - xy'^2 - yy' = 0 \qquad (17.58)$$

и выделить частное решение, удовлетворяющее граничным (краевым) условиям

$$\left.\begin{array}{lll} y=e & \text{при} & x=-1, \\ y=1 & \text{при} & x=0. \end{array}\right\} \qquad (17.59)$$

Решение. Полагая $y' = yz$, имеем $y'' = y(z^2 + z')$. Подставляя выражение для y' и y'' в уравнение (17.58) и сокращая на y^2, получим

$$x(z^2 + z') - xz^2 - z = 0$$

или

$$xz' - z = 0.$$

Интегрируем последнее уравнение

$$z = C_1 x.$$

Заменим z на y'/y:

$$\frac{y'}{y} = C_1 x.$$

---

[1]) Дифференциальное уравнение вида (17.56) называется *однородным*, если его левая часть удовлетворяет условию

$$F(x,\ ky,\ ky',\ \ldots,\ ky^{(n)}) = k^m F(x,\ y,\ y',\ \ldots,\ y^{(n)}).$$

Интегрируя еще раз, получим общее решение уравнения (17.58)

$$y=C_2e^{C_1x^2/2}.$$

Выделим из найденного общего решения частное решение, удовлетворяющее граничным условиям (17.59). Подставляя (17.59) в формулу общего решения, найдем, что

$$\left.\begin{array}{l} e=C_2e^{C_1/2}, \\ 1=C_2\cdot 1, \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} C_2=1, \\ C_1=2. \end{array}\right\}$$

Следовательно, искомым частным решением будет

$$y=e^{x^2}.$$

§ 17.4. Метод Эйлера численного интегрирования дифференциального уравнения первого порядка и его геометрическая интерпретация.

Рассмотрим дифференциальное уравнение (17.12)

$$\frac{dy}{dx}=f(x, y).$$

Пусть поставлено начальное условие (17.14)

$$y=y_0 \quad \text{при} \quad x=x_0.$$

Предположим, что функция $f(x, y)$ и начальные данные x_0, y_0 таковы, что уравнение (17.12) имеет единственное решение (17.13)

$$y=y(x),$$

удовлетворяющее начальному условию (17.14). Вопрос в том, как найти это решение.

Если уравнение (17.12) удается проинтегрировать в конечном виде, то обычно решение начальной задачи (17.12), (17.14) ищут при помощи формулы общего решения, выбирая соответствующее значение произвольной постоянной. В случаях, когда уравнение (17.12) не интегрируется в конечном виде или полученное общее решение слишком сложно, применяют приближенные методы.

Приближенное решение ищется на замкнутом интервале $[x_0, X]$, который обязательно должен содержаться в интервале существования точного решения $y=y(x)$.

Рассмотрим численное приближенное решение начальной задачи (17.12), (17.14).

Численным приближенным решением задачи (17.12), (17.14) называется функция, заданная таблицей чисел (табл. 17.1) при условии, что мы рассматриваем y_k как приближенное значение точного решения $y=y(x)$ при $x=x_k$.

ТАБЛИЦА 17.1

x_0	x_1	x_2	...	x_k	...	$x_n=X$
y_0	y_1	y_2	...	y_k	...	y_n

Табл. 17.1 строится обычно так, что числа $x_0, x_1, \ldots, x_k, x_{k+1}, \ldots, x_n$ отстоят друг от друга одинаково. При этом число h определяется формулой

$$h=\frac{X-x_0}{n}$$

и называется *шагом интегрирования*. Численные методы различаются способом вычисления последовательных значений $y_1, y_2, \ldots, y_k, \ldots, y_n$. Отметим, что численные методы в последнее время получили широкое применение в связи с внедрением в практику быстродействующих вычислительных машин.

Рассмотрим один из приближенных численных методов — метод Эйлера.

Пусть требуется найти решение начальной задачи (17.12), (17.14) на замкнутом интервале $[x_0, X]$. Разделим этот интервал на n равных частей точками $x_0, x_1, \ldots, x_{k-1}, x_k, \ldots, x_n$, причем

$$x_0<x_1<x_2<\ldots<x_{k-1}<x_k<\ldots<x_{n-1}<x_n=X.$$

Проведем через начальную точку $M_0(x_0;\ y_0)$ прямую (рис. 17.4) с угловым коэффициентом $f(x_0, y_0)$, равным тангенсу угла наклона касательной к решению в этой точке. На этой прямой возьмем точку $M_1(x_1;\ y_1)$ и через нее проведем прямую с угловым коэффициентом, равным $f(x_1, y_1)$. На последней прямой возьмем точку $M_2(x_2;\ y_2)$ и проведем через нее прямую с угловым коэффициентом $f(x_2, y_2)$ и т. д. В результате получим ломаную $M_0M_1M_2\ldots M_{k-1}M_k\ldots M_n$, причем

$$y_k=y_{k-1}+f(x_{k-1}, y_{k-1})\cdot(x_k-x_{k-1}) \qquad (k=1, \ldots, n),$$

или

$$y_k=y_{k-1}+f(x_{k-1}, y_{k-1})\cdot h \qquad (k=1, \ldots, n). \quad (17.60)$$

Функцию, заданную табл. 17.1, в которой y_k определяется формулой (17.60), будем называть *приближенным* *решением начальной задачи* (17.12), (17.14) *по методу Эйлера.*

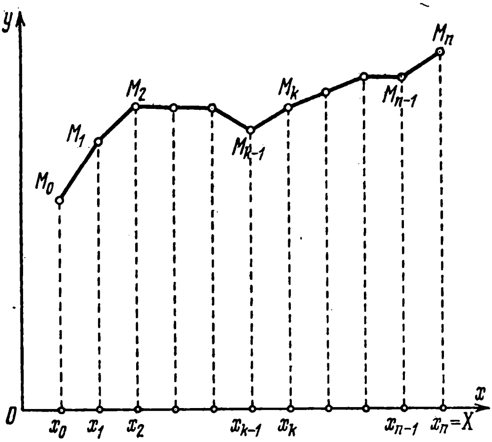


Рис. 17.4.

Пример 17.11. Найти приближенное решение уравнения $y'=y$, удовлетворяющее начальному условию $y=1$ при $x=0$.

Решение. Будем искать приближенно решение на замкнутом интервале [0; 0,1]. Возьмем $n=10$, так что имеем

$$x_0=0, \qquad y_0=1, \qquad h=0{,}01.$$

Для вычисления y_k воспользуемся формулой (17.60), где

$$f(x_{k-1},\ y_{k-1})=y_{k-1},$$

так что

$$y_k=y_{k-1}+y_{k-1}h,$$

или

$$y_k=1{,}01\cdot y_{k-1}.$$

В результате получим искомое приближенное решение в виде табл. 17.2.

ТАБЛИЦА 17.2

x_k	y_k	x_k	y_k
$x_0=0{,}00$	$y_0=1{,}000$	$x_6=0{,}06$	$y_6=1{,}0615$
$x_1=0{,}01$	$y_1=1{,}0100$	$x_7=0{,}07$	$y_7=1{,}0721$
$x_2=0{,}02$	$y_2=1{,}0201$	$x_8=0{,}08$	$y_8=1{,}0828$
$x_3=0{,}03$	$y_3=1{,}0303$	$x_9=0{,}09$	$y_9=1{,}0936$
$x_4=0{,}04$	$y_4=1{,}0406$	$x_{10}=0{,}10$	$y_{10}=1{,}1045$
$x_5=0{,}05$	$y_5=1{,}0510$		

ВОПРОСЫ ДЛЯ ПОВТОРЕНИЯ К ГЛАВЕ 17

1. Что называется дифференциальным уравнением?

2. Что такое порядок дифференциального уравнения?

3. Что называется решением дифференциального уравнения?

4. В каком случае говорят, что дифференциальное уравнение интегрируемо в конечном виде?

5. Как ставится начальная задача для уравнения первого порядка? для уравнения n-го порядка?

6. Какой геометрический смысл имеет начальная задача для уравнения первого порядка?

7. Что такое общее решение? Как решается начальная задача при помощи формулы общего решения?

8. Какой вид имеет линейное дифференциальное уравнение первого порядка и каково его общее решение?

9. Какое решение называется частным?

10. Что такое граничная (краевая) задача? Чем она отличается от начальной задачи?

11. Как понижается порядок уравнения, не содержащего независимой переменной?

12. Какой подстановкой понижается порядок уравнения, однородного относительно искомой функции и ее производных?

13. Что называется численным приближенным решением начальной задачи?

УПРАЖНЕНИЯ К ГЛАВЕ 17

Составьте дифференциальное уравнение семейства кривых.

1. $y=\sqrt{x}+C$. **2.** $y=(x+C)^2$, $x\geqslant -C$.

3. $y=\ln x+C$. **4.** $y=-\dfrac{1}{x+C}$.

Найдите ортогональные траектории семейства кривых. Сделайте рисунок.

5. $y=Cx^2$. **6.** $(y-1)^2+(x-1)^2=C^2$.

Найдите общее решение дифференциального уравнения.

7. $y'=\sin^3 x$. **8.** $y'=x^{-1}\ln x$. **9.** $y'=\dfrac{1}{1+\sqrt{x}}$. **10.** $y'=x^2e^x$.

11. $y'=1+y^2$. **12.** $y'=\sqrt{1-y^2}$. **13.** $y'=y$. **14.** $y'=2\sqrt{y}$.

Проинтегрируйте уравнение и выделите интегральную кривую, проходящую через заданную точку $M(x_0;\ y_0)$.

15. $y'=3x^2$, $M(1;\ 2)$.

16. $y'=-\dfrac{1}{x^2}$, $M(1;\ 1)$, $M(-1;\ -1)$, $M(1;\ 0)$,

17. $y'=\dfrac{x}{\sqrt{1-x^2}}$, $M(0;\ 1)$, $M(0;\ -1)$, $M(1;\ 0)$.

18. $y'=1+y^2$, $M(0;\ 0)$.

19. $y'=2\sqrt{y}$, $M(-1;\ 1)$, $M(0;\ 0)$.

20. $y'=2^{-y}$, $M(0;\ 0)$, $M(0;\ 1)$.

21. Найдите кривые, у которых тангенс угла между касательной и положительным направлением оси Ox обратно пропорционален абсциссе точки касания (коэффициент пропорциональности равен единице).

22. Найдите кривые, у которых тангенс угла между касательной и положительным направлением оси Ox равен квадрату ординаты точки касания. Выделите кривую, проходящую через точку $M(0;\ 1)$.

23. Найдите кривые, у которых тангенс угла α между касательной и положительным направлением оси Ox равен абсциссе точки касания. Выделите интегральную кривую, проходящую через начало координат.

24. Найдите кривые, у которых тангенс угла между касательной и положительным направлением оси Ox прямо пропорционален ординате точки касания.

Найдите общий интеграл дифференциального уравнения первого порядка с разделяющимися переменными.

25. $(xy-x)\,dx+(xy+x-y-1)\,dy=0$.

26. $y'=\operatorname{tg} x\cdot\operatorname{tg} y$. 27. $x+y'(y+xy)=0$.

28. $y'=\dfrac{\cos y-\sin y-1}{\cos x-\sin x+1}$.

Найдите общее решение дифференциального уравнения первого порядка с разделяющимися переменными.

29. $y'=-2xy$. 30. $y'=\dfrac{y-1}{x+1}$.

31. $(1-x)\,dy-y\,dx=0$. 32*. $y'x\operatorname{tg} y+\ln\cos y=0$.

Найдите частное решение дифференциального уравнения первого порядка с разделяющимися переменными, удовлетворяющее начальному условию $y=y_0$ при $x=x_0$.

33. $(1+x^2)\,dy+y\,dx=0$, $y=1$ при $x=1$.

34. $x\,dy-y\,dx=0$, $y=2$ при $x=1$.

35. $y'\sqrt{1-x^2}=1$, $y=\pi/2$ при $x=1$.

36. $y'=y\cos x$, $y=1$ при $x=0$.

Найдите частное решение линейного дифференциального уравнения первого порядка, удовлетворяющее начальному условию $y=y_0$ при $x=x_0$.

37. $y'+\dfrac{1}{x}y=3x$, $y=1$ при $x=1$.

38. $xy'=x+y$ $y=-1$ при $x=1$.

39. $y'\cos^2 x+y=\operatorname{tg} x$ $y=0$ при $x=0$.

40. $y'-\dfrac{y}{x\ln x}=x\ln x$ $y=\dfrac{1}{2}e^2$ при $x=e$.

Найдите частное решение линейного дифференциального уравнения второго порядка, удовлетворяющее начальным условиям $y=y_0$, $y'=y'_0$ при $x=x_0$.

41. $y''-y'-2y=0$, $y=0$, $y'=3$ при $x=0$.

42. $y''-10y'+25y=0$, $y=0$, $y'=1$ при $x=0$.

43. $y''-2y'+10y=0$, $y=0$, $y'=e^{\pi/6}$ при $x=\pi/6$.

44. $9y''+y=0$, $y=2$, $y'=0$ при $x=3\pi/2$.

45. $y''+3y'=0$, $y=1$, $y'=2$ при $x=0$.

Найдите частное решение линейного дифференциального уравнения второго порядка, удовлетворяющее краевым условиям.

46. $y''-2y'=0$, $y=0$ при $x=0$, $y'=-2$ при $x=\ln 2$.

47. $y''+9y=0$, $y=0$ при $x=0$, $y=1$ при $x=\pi/4$.

48. $y''+y=0$, $y'=1$ при $x=0$, $y'=0$ при $x=\pi/3$.

49. $y''+y=0$, $y=1$ при $x=0$, $y=1$ при $x=\pi$.

50. $y''+y=0$, $y=1$ при $x=0$, $y'=1$ при $x=\pi$.

Найдите частное решение дифференциального уравнения, удовлетворяющее начальным условиям.

51. $y''=-6x$, $y=0$, $y'=0$ при $x=0$.

52. $y'''=e^{-x}$, $y=0$, $y'=0$, $y''=0$ при $x=0$.

53. $y^{\mathrm{IV}}=\cos^2 x$, $y=1/32$, $y'=0$, $y''=1/8$, $y'''=0$ при $x=0$.

54. Найдите общее решение уравнения $y'''\sin^2 x=\sin 2x$.

Проинтегрируйте уравнения.

55. $y''y^3=1$. 56. $y''+2y(y')^3=0$. 57. $y''\operatorname{tg} y=2(y')^2$.

58. $y''(2y+3)-2y'^2=0$. 59. $yy''-y'^2=y^2\ln y$.

Найдите общий интеграл дифференциальных уравнений:

60. $3y'^2=4yy''+y^2$. 61. $x^2yy''=(y-xy')^2$.

62. $yy''-y'^2=\dfrac{yy'}{\sqrt{1+x^2}}$. 63. $y'^2+yy''=yy'$.

64. $yy''-y'^2=0$.

Проинтегрируйте уравнение, определив его порядок, вид и метод интегрирования.

65. $\sin^3 x+y''=2\sin x\cos^2 x$. 66. $y''(1+y)=y'^2+y'$.

67. $y'+\cos(x+2y)=\cos(x-2y)$. 68. $(1+x^2)y'+y=\operatorname{arctg} x$.

ОТВЕТЫ, УКАЗАНИЯ И РЕШЕНИЯ К ГЛАВЕ 17

1. Решение. Дифференцируя обе части по x, получаем $\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{1}{2\sqrt{x}}$. Это и есть дифференциальное уравнение семейства.

2. Решение. Дифференцируя обе части по x, получаем $y'=2(x+C)$. Исключим произвольную постоянную C при помощи заданного уравнения кривых $y=(x+C)^2$, $x\geqslant -C$. Имеем $x+C=\sqrt{y}$. Подставляя найденное значение $x+C$, получаем искомое дифференциальное уравнение. Ответ. $y'=2\sqrt{y}$.

3. Ответ. $y'=1/x$. 4. Ответ. $y'=y^2$.

5. См. задачу 17.4. Ответ. $\dfrac{x^2}{2}+y^2=C$.

6. См. задачу 17.4. Ответ. $y-1=C(x-1)$.

7. Решение. Интегрируем уравнение (см. п. 17.3.2)

$$y=\int \sin^3 x\,dx=\int \sin^2 x \sin x\,dx.$$

Неопределенный интеграл правой части берется при помощи подстановки $\cos x=t$. Имеем

$$y=-\int (1-t^2)\,dt=-t+\frac{1}{3}t^3+C,$$

откуда $y=-\cos x+\frac{1}{3}\cos^3 x+C$ есть общее решение дифференциального уравнения. Ответ. $y=-\cos x+\frac{1}{3}\cos^3 x+C$.

8. Ответ. $y=\frac{1}{2}\ln^2 x+C$.

9. Ответ. $y=2\left[\sqrt{x}-\ln(\sqrt{x}+1)\right]+C$.

10. Вычислить неопределенный интеграл, применив формулу интегрирования по частям. Ответ. $y=e^x(x^2-2x+2)$.

11. Решение. Наряду с дифференциальным уравнением вида

$$\frac{dy}{dx}=f(x, y) \qquad (17.61)$$

мы можем рассматривать уравнение

$$\frac{dx}{dy}=\frac{1}{f(x, y)}, \qquad (17.62)$$

причем общий интеграл уравнения (17.62) является общим интегралом уравнения (17.61) и наоборот. Таким образом, при решении дифференциальных уравнений вида $y'=f(y)$ имеет смысл рассматривать уравнение, *общим интегралом* которого будет

$$x=\int \frac{1}{f(y)}\,dy+C. \qquad (17.63)$$

Разрешив уравнение (17.63) относительно y, мы получим формулу общего решения дифференциального уравнения (17.61).

Таким образом, чтобы проинтегрировать уравнение $\frac{dy}{dx}=1+y^2$, рассмотрим уравнение $\frac{dx}{dy}=\frac{1}{1+y^2}$. Интегрируя, получим $x=$ $=\operatorname{arctg} y+C_1$. Разрешим полученное соотношение относительно y. Имеем $y=\operatorname{tg}(x+C)$ $(C_1=-C)$. Ответ. $y=\operatorname{tg}(x+C)$.

12. Ответ. $y=\sin(x+C)$. 13. Ответ. $y=Ce^x$.

14. Ответ. $y=(x+C)^2$, $x\geqslant -C$.

15. Решение. Интегрируя дифференциальное уравнение, получим $y=x^3+C$. Подставляем в формулу общего решения начальные значения: $2=1+C$, откуда $C=1$. Следовательно, частное решение, удовлетворяющее поставленным начальным условиям, имеет вид $y=x^3+1$. Ответ. $y=x^3+C$, $y=x^3+1$.

16. Ответ. $y=\frac{1}{x}+C$, $y=\frac{1}{x}$, $y=\frac{1}{x}$, $y=\frac{1}{x}-1$.

17. Ответ. $y=-\sqrt{1-x^2}+C$, $y=-\sqrt{1-x^2}+2$, $y=-\sqrt{1-x^2}$, $y=-\sqrt{1-x^2}$.

18. Решение. Общим решением рассматриваемого дифференциального уравнения будет (см. упражнение 11) $y=\operatorname{tg}(x+C)$. Подставляя начальные значения, получим, что $C=0$. Следовательно, частное решение, удовлетворяющее поставленным начальным условиям, имеет вид $y=\operatorname{tg} x$. Ответ. $y=\operatorname{tg} x$.

19. Ответ. $y=(x+C)^2$ $(x \geqslant -C)$, $y=0$; $y=(x+2)^2$ $(x \geqslant -2)$, $y=x^2$ $(x \geqslant 0)$.

20. При решении этого упражнения можно ограничиться нахождением общего и частного решений

Ответ. $2^y=x\ln 2+C$, $2^y=x\ln 2+1$, $2^y=x\ln 2+2$.

21. Ответ. $y'=1/x$, $y=\ln|x|+C$.

22. Ответ. $y'=y^2$, $y=-1/(x+C)$, $y=0$, $y=1/(1-x)$.

23. Ответ. $y'=x$, $y=\dfrac{x^2}{2}+C$, $y=\dfrac{x^2}{2}$.

24. Ответ. $y'=ky$, $y=Ce^{kx}$.

25. Решение. Разложив коэффициенты на множители, получим $x(y-1)\,dx+(x-1)(y+1)\,dy=0$. Общим интегралом такого уравнения (см. п. 17.2.2) будет $\displaystyle\int\frac{y+1}{y-1}\,dy=-\int\frac{x}{-1+x}\,dx+C$, откуда

$$\int dy+2\int\frac{dy}{y-1}=-\int dx-\int\frac{dx}{x-1}+C.$$

Таким образом общий интеграл уравнения имеет вид

$$x+\ln|x-1|+y+2\ln|y-1|=C.$$

Ответ. $x+y+\ln[\,|x-1|\,(y-1)^2]=C$.

26. Решение. Полагая $y'=\dfrac{dy}{dx}$ и разделяя переменные, приходим к уравнению $\operatorname{ctg} y\,dy=\operatorname{tg} x\,dx$. Интегрируем $\displaystyle\int\operatorname{ctg} y\,dy=\int\operatorname{tg} x\,dx+C_1$ или $\ln|\sin y|=-\ln|\cos x|+\ln|C|$ (здесь постоянную интегрирования удобнее обозначать через $\ln|C|=C_1$). Отсюда находим $\sin y=\dfrac{C}{\cos x}$, или $\sin y\cos x=C$ (общий интеграл). Ответ. $\sin y\cos x=C$. 27. Ответ. $x+\dfrac{y^2}{2}=\ln[C\,|x+1|\,]$.

28. Преобразовать в произведения числитель и знаменатель дроби правой части.

Ответ. $\operatorname{tg}\dfrac{y}{2}=C\left(\operatorname{tg}\dfrac{y}{2}+1\right)\left(1-\operatorname{tg}\dfrac{x}{2}\right)$.

29. Решение. Разделяя переменные, получаем $\dfrac{dy}{y}=-2x\,dx$ Отсюда $\ln|y|=-x^2+\ln|C|$, или, так как $-x^2=\ln e^{-x^2}$, $|y|=|C|\,e^{-x^2}$, $y=\pm Ce^{-x^2}$; заменяя $\pm C$ на C, получим общее решение в виде $y=Ce^{-x^2}$. Ответ. $y=Ce^{-x^2}$.

30. Ответ. $y=1+C(x+1)$. 31. Ответ. $y=C/(x-1)$.

32. Ответ. $y=\arccos(e^{Cx})$.

33. Решение. Преобразуем данное уравнение к виду $\frac{dy}{y}=-\frac{dx}{1+x^2}$. Интегрируя, получим $\int\frac{dy}{y}=-\int\frac{dx}{1+x^2}+C$ или $\ln|y|=-\operatorname{arctg}x+C$. Это и есть общий интеграл данного уравнения. Подставим теперь начальные условия и найдем произвольную постоянную $\ln 1=-\operatorname{arctg}1+C$, т. е. $C=\pi/4$. Следовательно, частный интеграл дифференциального уравнения, удовлетворяющий начальному условию $x=1$, $y=1$, имеет вид $\ln y=-\operatorname{arctg}x+\frac{\pi}{4}$. Разрешая это уравнение относительно y, получаем искомое частное решение. Ответ. $y=e^{C-\operatorname{arctg}x}$, $y=e^{\frac{\pi}{4}-\operatorname{arctg}x}$

34. Ответ. $y=Cx$, $y=2x$.

35. Ответ. $y=\arcsin x+C$, $y=\arcsin x$.

36. Ответ. $y=Ce^{\sin x}$, $y=e^{\sin x}$.

37. Решение. Согласно формуле (17.31) общее решение данного уравнения имеет вид $y=e^{-\int\frac{dx}{x}}\left[C+3\int xe^{\int\frac{dx}{x}}dx\right]$, т. е. $y=\frac{C}{x}+x^2$. Подставляем начальные условия $x=1$, $y=1$: $1=\frac{C}{1}+1$, т. е. $C=0$. Искомое частное решение имеет вид $y=x^2$. Ответ. $y=\frac{C}{x}+x^2$, $y=x^2$.

38. Указание. Привести данное уравнение к виду (17.29). Ответ. $y=-x+x\ln|x|$.

39. Ответ. $y=\operatorname{tg}x-1+e^{-\operatorname{tg}x}$.

40. Ответ. $y=\frac{1}{2}x^2\ln x$.

41. Решение. Характеристическое уравнение имеет вид (см. (17.37)) $\lambda^2-\lambda-2=0$, его корни $\lambda_1=2$, $\lambda_2=-1$. Следовательно, общее решение $y=C_1e^{2x}+C_2e^{-x}$. Подставляя начальные условия в общее решение и его производную, получим систему уравнений относительно C_1 и C_2:

$$\begin{cases} 0=C_1+C_2, \\ 3=2C_1-C_2, \end{cases}$$

откуда $C_1=1$, $C_2=-1$. Следовательно, решением, удовлетворяющим поставленным начальным условиям, будет $y=e^{2t}-e^{-t}$. Ответ. $y=e^{2t}-e^{-t}$.

42. Ответ. $y=xe^{5x}$. 43. Ответ. $y=-\frac{1}{3}e^x\cos 3x$.

44. Ответ. $y=2\sin\frac{x}{3}$. 45. Ответ. $y=\frac{1}{3}(5-2e^{-3x})$.

46. Решение. Характеристическое уравнение данного уравнения имеет вид $\lambda^2-2\lambda=0$, его корни $\lambda_1=0$, $\lambda_2=2$. Следовательно, общее решение имеет вид $y=C_1+C_2e^{2x}$. Производная общего решения $y'=2C_2e^{2x}$. Подставляя граничные условия в найденное общее решение и его производную, получим систему двух уравнений с двумя

неизвестными C_1 и C_2:

$$\begin{cases} C_1+C_2=0, \\ 2C_2e^{2\ln 2}=-2, \end{cases}$$

откуда $C_2=-1/4$, $C_1=1/4$. Искомое частное решение, удовлетворяющее заданным условиям, имеет вид $y=\frac{1}{4}(1-e^{2x})$. Ответ. $y=$ $=(1-e^{2x})/4$.

47. Ответ. $y=\sqrt{2}\sin 3x$. **48.** Ответ. $y=\sin x+\frac{1}{\sqrt{3}}\cos x$.

49. Ответ. Решения нет. **50.** Ответ. $y=\cos x-\sin x$.

51. Ответ. $y=-x^3$. **52.** Ответ. $y=-e^{-x}+\frac{x^2}{2}-x+1$.

53. Ответ. $y=\frac{1}{48}x^4+\frac{1}{8}x^2+\frac{1}{32}\cos 2x$.

54. Ответ. $y=\ln|\sin x|+\frac{1}{2}C_1x^2+C_2x+C_3$.

55. См. пример 17.9. Ответ. $C_1y^2=1+(C_1x+C_2)^2$.

56. Ответ. $y^3+C_1y+C_2=3x$. **57.** Ответ. $\operatorname{ctg} y=C_2+C_1x$.

58. Ответ. $\frac{1}{2}\ln(2y+3)=C_1x+C_2$.

59. Ответ. $\ln y=C_1e^x+C_2e^{-x}$.

60. Решение. Разделим обе части уравнения на y^2: $3\left(\frac{y'}{y}\right)^2-$ $-4\left(\frac{y''}{y}\right)=1$. Введем замену $\frac{y'}{y}=z$, откуда $\frac{y''}{y}-\frac{y'^2}{y^2}=z'$, или $\frac{y''}{y}=$ $=z'+z^2$. Получим уравнение первого порядка с разделяющимися переменными $3z^2-4z^2-4z'=1$, $-4z'=1+z^2$ или $\frac{dz}{1+z^2}=-\frac{1}{4}dx$. Отсюда, интегрируя, находим $\operatorname{arcctg} z=C_1-\frac{1}{4}x$, или $z=\operatorname{tg}\left(C_1-\frac{x}{4}\right)$. Возвращаясь к переменной y, получаем $\frac{y'}{y}=\operatorname{tg}\left(C_1-\frac{x}{4}\right)$. Интегрируя последнее уравнение, находим $\ln|y|=4\ln\left|\cos\left(C_1-\frac{x}{4}\right)\right|+$ $+\ln|C_2|$, или $y=C_2\cos^4\left(C_1-\frac{x}{4}\right)$. Ответ. $y=C_2\cos^4\left(C_1-\frac{x}{4}\right)$.

61. Ответ. $y=C_2xe^{-C_1/x}$.

62. Ответ. $\ln|y|=C_1\left[x^2+x\sqrt{1+x^2}+\ln\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)\right]+C_2$.

63. Ответ. $y^2=C_1e^x+C_2$. **64.** Ответ. $y=C_2e^{C_1x}$.

65. Дифференциальное уравнение второго порядка вида (17.46). Ответ. $y=\frac{1}{3}\sin^3 x+C_1x+C_2$.

66. Дифференциальное уравнение первого порядка с разделяющимися переменными (п. 17.2.2). Ответ. $\ln|\operatorname{tg} y|=4(C-\cos x)$.

67. Дифференциальное уравнение второго порядка вида (17.53). Ответ. $\ln|C_1(y+1)-1|=C_1(x+C_2)$.

68. Линейное неоднородное дифференциальное уравнение первого порядка вида (17.29). Ответ. $y=\operatorname{arctg} x-1+Ce^{-\operatorname{arctg} x}$.

ГЛАВА 18

ЧИСЛОВЫЕ И СТЕПЕННЫЕ РЯДЫ

§ 18.1. Числовые ряды

18.1.1. Числовой ряд и его сумма. При изучении темы «предел и непрерывность функции» мы уже познакомились с вводными понятиями теории числовых рядов. Здесь мы продолжим рассмотрение этого круга вопросов.

Прежде всего напомним основные определения. *Числовым рядом* мы называем бесконечную последовательность чисел, соединенных между собой символами $+$:

$$a_1+a_2+\ldots+a_n+\ldots \tag{18.1}$$

Условимся считать эквивалентными записи (18.1) и записи такого вида:

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n, \quad \sum_{k=0}^{\infty} a_{k+1}, \quad \sum_{i=3}^{\infty} a_{i-2} \quad \text{и т. п.} \tag{18.2}$$

Читается, например, первая из них так: «сумма по n от единицы до бесконечности чисел a_n». Знак $\sum$ (видоизмененная прописная греческая буква «сигма») называют *знаком суммы*, символы n, k, i называют *индексами*, по которым проводится суммирование, или, короче, *индексами суммирования.* Числа $a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots$ называются *членами ряда*, а числа

$$\begin{aligned} &S_1=a_1, \\ &S_2=S_1+a_2=a_1+a_2, \\ &S_3=S_2+a_3=a_1+a_2+a_3, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ &S_n=S_{n-1}+a_n=a_1+a_2+\ldots+a_n \end{aligned} \tag{18.3}$$

— *частичными суммами ряда.* Последовательность, составленная из чисел $S_1, S_2, \ldots, S_n, \ldots$ может (как и вообще произвольная числовая последовательность) быть сходящейся или расходящейся. В тех случаях, когда последовательность частичных сумм ряда имеет конечный предел, мы условились называть этот предел *суммой ряда*, а сам ряд—*сходящимся*. Если последовательность S_1, S_2, ..., S_n, ... не имеет предела, то соответствующий ряд мы называем *расходящимся*. Для обозначения суммы сходящегося ряда используются те же выражения (18.1) и (18.2). Для каждой конкретной записи по контексту всегда ясно, о чем идет речь: собственно о числовом ряде или о его сумме.

Напомним сделанное нами в свое время замечание о том, что логически неправомерно было бы пытаться определить понятие суммы числового ряда как «сумму всех его членов». Ведь обычное понятие суммы имеет смысл лишь для конечного множества слагаемых. Определяя суммы ряда как предел последовательности S_1, S_2, ..., S_n, ..., мы тем самым обобщаем понятие суммы и на некоторые (но не все!) случаи бесконечного множества слагаемых. При этом, как можно было бы показать, далеко не всегда сохраняют силу свойства, имеющие место для «конечных выражений». Так, например, в некоторых случаях сумма ряда может измениться в результате перестановки его членов.

В дальнейшем мы специально остановимся на подобного рода «опасных моментах», сейчас же мы этими предварительными замечаниями хотим лишь подчеркнуть необходимость как построения соответствующей теории, так и «логической аккуратности» при ее изучении. Мы имеем дело с новым понятием, и его созвучие и определенная смысловая общность с другим, ранее известным, не должна вводить нас в заблуждение!

18.1.2. Примеры сходящихся и расходящихся рядов. Рассмотрим несколько примеров.

Пример 18.1. Хорошо известное нам понятие бесконечно убывающей геометрической прогрессии представляет собой, как теперь можно видеть, частный случай понятия числового ряда.

Члены этого ряда определяются формулой $a_n = aq^{n-1}$, где $|q| < 1$, его частичные суммы с помощью формулы для суммы членов конечной геометрической прогрессии, могут представлены в виде

$$S_n = a + aq + aq^2 + \ldots + aq^{n-1} = \frac{a - aq^n}{1-q}. \qquad (18.4)$$

Учитывая, что при $|q|<1$ выражение aq^n стремится к 0 при неограниченном возрастании n, мы, совершая в (18.4) предельный переход, получаем

$$S=\lim_{n\to\infty}\frac{a-aq^n}{1-q}=\frac{a}{1-q}. \tag{18.5}$$

Напомним, что именно как $\lim\limits_{n\to\infty} S_n$ и определялось в свое время понятие «суммы членов» бесконечно убывающей геометрической прогрессии. (Мы видим, что этого специального определения можно бы и не давать, если бы мы могли сразу рассматривать эти прогрессии как одни из разновидностей числовых рядов.)

Пример 18.2. Рассмотрим ряд

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(n+1)(n+2)}. \tag{18.6}$$

Прежде всего запишем его в «развернутом виде». Для этого в выражение $\frac{1}{(n+1)(n+2)}$ (его называют еще *выражением для общего члена ряда*) будем последовательно подставлять вместо n числа 0, 1, 2, ..., и получаемые результаты записывать, соединяя их знаками $+$:

$$\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 4}+\ldots+\frac{1}{(n+1)(n+2)}+\ldots$$

(начальное значение $n=0$ указано в (18.6) под знаком суммы; заметим, что член $\frac{1}{(n+1)(n+2)}$ является по порядку $(n+1)$-м членом ряда!).

Выпишем теперь частичные суммы этого ряда и преобразуем их:

$$\begin{aligned}
&S_1=\frac{1}{1\cdot 2}=1-\frac{1}{2},\\
&S_2=S_1+\frac{1}{2\cdot 3}=\left(1-\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)=1-\frac{1}{3},\\
&S_3=S_2+\frac{1}{3\cdot 4}=\left(1-\frac{1}{3}\right)+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{4}\right)=1-\frac{1}{4},\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots
\end{aligned} \tag{18.7}$$

Нетрудно сообразить, что в общем случае мы будем иметь

$$S_n=1-\frac{1}{n+1}. \tag{18.8}$$

Действительно, как видно из (18.7), при $n=1$ формула (18.8) верна. Допустим же ее справедливость при всех (натуральных) n' меньших некоторого n, мы получаем

$$S_n=S_{n-1}+\frac{1}{n(n+1)}=\left(1-\frac{1}{n}\right)+\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right)=1-\frac{1}{n+1}.$$

Так как

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{n+1}\right)=1,$$

то мы видим, что данный ряд сходится и что его сумма равна 1.

Пример 18.3. Составим последовательность частичных сумм для ряда

$$\sum_{n=1}^{\infty} \ln\frac{n+1}{n}. \tag{18.9}$$

Это будет:

$$S_1=\ln\frac{2}{1}=\ln 2,$$

$$S_2=S_1+\ln\frac{3}{2}=\ln 2+\ln\frac{3}{2}=\ln 3,$$

$$S_3=S_2+\ln\frac{4}{3}=\ln 3+\ln\frac{4}{3}=\ln 4,$$

. . . .

Легко сообразить, что здесь

$$S_n=\ln(n+1).$$

Так как

$$\lim_{n\to\infty} S_n=\lim_{n\to\infty}\ln(n+1)=+\infty,$$

то ряд (18.9) расходится.

Пример 18.4. Для ряда

$$\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n=1-1+1-1+\dots \tag{18.10}$$

каждая его частичная сумма с четным номером равна 0, в то время как частичные суммы с нечетными номерами равны (каждая) 1:

$$S_{2m}=0,\qquad S_{2m+1}=1.$$

Нетрудно видеть, что последовательность этих частичных сумм

$$\{S_1,\ S_2,\ S_3,\ \dots\}=\{1,\ 0,\ 1,\ 0,\ 1,\ \dots\}$$

не имеет предела. Значит, ряд (18.10) тоже расходится.

18.1.3. Простейшие свойства сходящихся рядов. Докажем теперь некоторые простейшие свойства сходящихся рядов.

Теорема 18.1. *Если ряды*

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \tag{18.11}$$

и

$$\sum_{n=1}^{\infty} b_n \tag{18.12}$$

сходятся, то сходится и ряд, образованный почленным их сложением, т. е. ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} (a_n + b_n), \tag{18.13}$$

причем его сумма равна сумме сумм «слагаемых» рядов

$$\sum_{n=1}^{\infty} (a_n + b_n) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n + \sum_{n=1}^{\infty} b_n. \tag{18.14}$$

Доказательство. Обозначим частичные суммы рядов (18.11), (18.12) и (18.13) через S'_n, S''_n и S_n соответственно, сумму ряда (18.11) через S' и сумму ряда (18.12) через S''. Тогда по определению суммы ряда, примененному к (18.11) и (18.12), имеем

$$\lim_{n\to\infty} S'_n = S', \qquad \lim_{n\to\infty} S''_n = S''.$$

С другой стороны, частичные суммы наших рядов связаны соотношением

$$\begin{aligned} S_n &= (a_1 + b_1) + (a_2 + b_2) + \ldots + (a_n + b_n) = \\ &= (a_1 + a_2 + \ldots + a_n) + (b_1 + b_2 + \ldots + b_n) = S'_n + S''_n. \end{aligned} \tag{18.15}$$

(Здесь речь идет о конечных суммах, поэтому перегруппировка слагаемых в выражении $S_n = (a_1 + b_1) + (a_2 + b_2) + \ldots$ $\ldots + (a_n + b_n)$ безусловно законна.) Переходя в (18.15) к пределу при $n \longrightarrow \infty$, мы получим

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty} S'_n + \lim_{n\to\infty} S''_n = S' + S'',$$

чем и завершается доказательство теоремы. (Мы доказали как существование $\lim\limits_{n\to\infty} S_n$, так и его равенство сумме $S' + S''$.)

Теорема 18.2. *Если ряд*

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \tag{18.16}$$

сходится, а λ — некоторое вещественное число, то сходится и ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \lambda a_n, \tag{18.17}$$

причем

$$\sum_{n=1}^{\infty} \lambda a_n = \lambda \sum_{n=1}^{\infty} a_n. \qquad (18.18)$$

Доказательство. Обозначим частичные суммы рядов (18.16) и (18.17) соответственно через S_n и S'_n, а сумму ряда (18.16) — через S'. Тогда имеем

$$S_n = \lambda a_1 + \lambda a_2 + \ldots + \lambda a_n = \lambda (a_1 + a_2 + \ldots + a_n) = \lambda S'_n.$$

Переходя в этом равенстве к пределу при $n \to \infty$, мы и получаем требуемое

$$\lim_{n \to \infty} S_n = \lim_{n \to \infty} \lambda S'_n = \lambda \lim_{n \to \infty} S'_n = \lambda S'.$$

Следствие 18.1. *Если ряд* (18.16) *расходится, то при* $\lambda \neq 0$ *расходится и ряд* (18.17).

Следствие 18.2. *Если*

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \quad \textit{и} \quad \sum_{n=1}^{\infty} b_n$$

— сходящиеся ряды, а λ *и* μ *— вещественные числа, то ряд*

$$\sum_{n=1}^{\infty} (\lambda a_n + \mu b_n)$$

тоже сходится и суммы этих рядов связаны соотношением

$$\sum_{n=1}^{\infty} (\lambda a_n + \mu b_n) = \lambda \sum_{n=1}^{\infty} a_n + \mu \sum_{n=1}^{\infty} b_n. \qquad (18.19)$$

Определение 18.1. *Ряд*

$$\sum_{k=p+1}^{\infty} a_k, \qquad (18.20)$$

полученный из ряда

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \qquad (18.21)$$

отбрасыванием некоторого числа p первых его членов, называется остаточным рядом по отношению к последнему.

Теорема 18.3. *Числовой ряд и любой из его остаточных рядов сходятся или расходятся одновременно.*

Доказательство. Обозначая частичные суммы ряда (18.21) через S_n, а ряда (18.20) — через σ_n, мы при любом $n > p+1$ имеем

$$S_n = a_1 + a_2 + \ldots + a_p + a_{p+1} + \ldots + a_n =$$
$$= (a_1 + a_2 + \ldots + a_p) + (a_{p+1} + a_{p+2} + \ldots + a_{p+(n-p)}) =$$
$$= S_p + \sigma_{n-p}. \qquad (18.22)$$

Заметим, что в (18.22) значение p фиксировано. Допустим сначала, что сходится ряд (18.20), и обозначим его сумму через σ. Тогда из (18.22) предельным переходом при $n \to \infty$ получаем

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty} (S_p + \sigma_{n-p}) = S_p + \lim_{n\to\infty} \sigma_{n-p} = S_p + \sigma.$$

Мы видим, что $\lim\limits_{n\to\infty} S_n$ существует, значит, ряд (18.21) тоже сходится. Пусть теперь сходится ряд (18.21). Пусть его сумма равна S. Обозначим в (18.22) $n-p$ через m:

$$S_{p+m} = S_p + \sigma_m. \qquad (18.22')$$

Перенося S_p в другую часть этого равенства и переходя к пределу при $m \to \infty$, мы получим

$$\lim_{m\to\infty} \sigma_m = \lim_{m\to\infty} (S_{p+m} - S_p) = \lim_{m\to\infty} S_{p+m} - S_p = S - S_p.$$

Отсюда, в частности, видно, что $\lim\limits_{m\to\infty} \sigma_m$ существует, т. е. что ряд (18.20) сходится. Формула

$$S = S_p + \sigma, \qquad (18.23)$$

связывающая выражения для сумм этих рядов, нам еще потребуется в дальнейшем.

Допуская расходимость одного из этих рядов, мы (рассуждая от противного) сразу же приходим и к расходимости второго ряда.

§ 18.2. Признаки сходимости числовых рядов

Во многих случаях оказывается необходимым установить только, сходится или расходится тот или иной ряд, не находя при этом точного значения его суммы. Для решения такого рода вопросов существуют так называемые «признаки сходимости», важнейшие из которых мы сейчас и рассмотрим.

18.2.1. Необходимый признак сходимости. Теорема 18.4 (необходимый признак сходимости). *Если ряд* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *сходится, то при неограниченном возрастании* n *его общий член стремится к* 0. (*Итак, условие* $\lim_{n \to \infty} a_n = 0$ *является необходимым для сходимости ряда. Если оно не выполнено, то ряд наверняка расходится.*)

Доказательство. Обозначим через S сумму ряда. Тогда, имея в виду, что как частичная сумма с номером n, так и частичная сумма с номером $n-1$ при неограниченном возрастании n стремятся к S:

$$\lim_{n \to \infty} S_n = \lim_{n \to \infty} S_{n-1} = S,$$

мы, переходя к пределу в равенстве $a_n = S_n - S_{n-1}$, получаем

$$\lim_{n \to \infty} a_n = S - S = 0.$$

Теорема доказана.

Замечание 18.1. Отметим, что обратное заключение (для теоремы 18.4) неверно. Из стремления к 0 общего члена ряда отнюдь еще не следует сходимость последнего! Так, ряд (18.9) из примера 18.3 расходится, и в то же время его общий член стремится к 0:

$$\lim_{n \to \infty} \ln \frac{n+1}{n} = \lim_{n \to \infty} \ln \left(1 + \frac{1}{n}\right) = \ln 1 = 0.$$

18.2.2. Признак сравнения и его следствия. Абсолютная сходимость. Нам в дальнейшем нередко будет удобно рассматривать отдельно такие ряды, все члены которых неотрицательны. Условимся называть такие ряды *положительными рядами.*

Следующая теорема как раз и относится именно к таким рядам.

Теорема 18.5 (признак сравнения для положительных рядов). *Пусть*

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \tag{18.24}$$

и

$$\sum_{n=1}^{\infty} b_n \tag{18.25}$$

— два положительных ряда. Пусть при каждом натуральном n имеет место неравенство

$$a_n \leqslant b_n. \tag{18.26}$$

Тогда, если ряд (18.25) *сходится, то сходится и ряд* (18.24), *причем*

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \leqslant \sum_{n=1}^{\infty} b_n, \tag{18.27}$$

если же ряд (18.24) *расходится, то расходится и ряд* (18.25).

Доказательство. Будем обозначать частичные суммы ряда (18.24) через S'_n, а ряда (18.25) — через S''_n. Так как оба эти ряда положительные, то каждая из последовательностей их частичных сумм будет возрастающей (хотя бы в широком смысле слова) последовательностью. Из (18.26) следует, что при любом n

$$S'_n \leqslant S''_n. \tag{18.28}$$

Мы знаем (см. гл. 3, теорема 3.2), что для существования предела у возрастающей последовательности необходимо и достаточно, чтобы эта последовательность была ограничена сверху. Сейчас мы и используем это свойство для завершения доказательства.

Предположим сначала, что ряд (18.25) сходится. По определению это означает, что сходится последовательность $\{S''_n\}$, а тогда она будет и ограниченной сверху, т. е. найдется такое число M, что

$$S''_n \leqslant M \qquad (n = 1, 2, 3, \ldots).$$

Тем более тогда при каждом n будет

$$S'_n \leqslant M,$$

а это и означает ограниченность сверху последовательности $\{S'_n\}$. Так как она, кроме того, является возрастающей, то отсюда и следует ее сходимость (т. е. сходимость ряда (18.24)). Для доказательства же неравенства (18.27) нам достаточно теперь перейти к пределу в неравенстве (18.28).

Пусть теперь ряд (18.24) расходится. Допустив, что ряд (18.25) сходится, мы немедленно пришли бы к противоречию, ибо, по только что доказанному, из его сходимости вытекала бы и сходимость ряда (18.24). Теорема доказана.

З а м е ч а н и е 18.2. Если выполнение неравенства (18.26) можно гарантировать лишь для всех n, больших некоторого n_0, то все равно из сходимости ряда (18.25) будет следовать сходимость ряда (18.24), а из расходимости (18.24) — расходимость (18.25). Действительно, из сходимости (18.25) следует, по теореме 18.3, сходимость его остаточного ряда

$$\sum_{n=n_0+1}^{\infty} b_n. \tag{18.25'}$$

Из его сходимости, в свою очередь, по только что доказанной теореме 18.5 вытекает и сходимость ряда

$$\sum_{n=n_0+1}^{\infty} a_n. \tag{18.24'}$$

Но ряд (18.24′) является остаточным для (18.24), и, стало быть, этот последний тоже сходится. Разумеется, неравенство (18.27) здесь может и не иметь места. Ведь (18.28) теперь не обязано выполняться!

Т е о р е м а 18.6. *Если сходится ряд*

$$\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|, \tag{18.29}$$

составленный из абсолютных величин членов ряда

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n, \tag{18.30}$$

то сходится и сам этот ряд (18.30), *причем*

$$\left|\sum_{n=1}^{\infty} a_n\right| = |a_1 + a_2 + \ldots + a_n + \ldots| \leqslant$$

$$\leqslant |a_1| + |a_2| + \ldots + |a_n| + \ldots = \sum_{n=1}^{\infty} |a_n|. \tag{18.31}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Положив

$$b_n = \begin{cases} a_n, & \text{если } a_n \geqslant 0, \\ 0, & \text{если } a_n < 0, \end{cases} \qquad c_n = \begin{cases} 0, & \text{если } a_n \geqslant 0, \\ -a_n, & \text{если } a_n < 0, \end{cases}$$

получим два положительных ряда

$$\sum_{n=1}^{\infty} b_n \quad \text{и} \quad \sum_{n=1}^{\infty} c_n, \tag{18.32}$$

члены которых не превосходят соответствующих им по номерам членов ряда (18.29)

$$b_n \leqslant |a_n|, \quad c_n \leqslant |a_n|.$$

Следовательно, по теореме 18.5 каждый из этих рядов сходится. Но тогда согласно следствию 18.2 ряд (18.30) тоже сходится, ибо он представляет собой разность рядов (18.32)

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \sum_{n=1}^{\infty} b_n - \sum_{n=1}^{\infty} c_n.$$

Действительно, если $a_n \geqslant 0$, то $b_n = a_n$, $c_n = 0$, а если $a_n < 0$, то $b_n = 0$, $c_n = -a_n$, т. е. в любом случае

$$a_n = b_n - c_n.$$

По свойству абсолютных величин

$$|a_1 + a_2 + \ldots + a_n| \leqslant |a_1| + |a_2| + \ldots + |a_n|.$$

Переходя в этом неравенстве к пределу при $n \to \infty$, мы получаем (18.31). Теорема доказана.

В дальнейшем мы покажем, что обратное по отношению к этой теореме заключение неверно. Из сходимости ряда (18.30) еще не следует сходимость «ряда из абсолютных величин» (18.29).

Определение 18.2. *Ряд* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *называют абсолютно сходящимся, если сходится ряд* $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$, *составленный из абсолютных величин его членов.*

18.2.3. Признак Даламбера. Лемма 18.1 (Даламбера). *Пусть*

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \tag{18.33}$$

— положительный ряд. Тогда

I. *Если при всех натуральных n справедливо неравенство*

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} \leqslant q < 1 \tag{18.34}$$

(*где q — некоторая постоянная*), *то ряд* (18.33) *сходится и*

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \leqslant \frac{a_1}{1-q}. \tag{18.35}$$

II. *Если же при всех n будет*

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} \geqslant 1, \tag{18.36}$$

то ряд (18.33) *расходится и, более того, его общий член не стремится к* 0 *при* $n \to \infty$.

Доказательство. Пусть сначала при всех n выполняется (18.34). Тогда, как нетрудно видеть,

$$a_{n+1} \leqslant a_1 q^n. \tag{18.37}$$

Действительно, при $n = 1$ это неравенство непосредственно получается из

$$\frac{a_2}{a_1} \leqslant q,$$

а, допустив справедливость (18.37) для всех $n' \leqslant n$, мы сразу же убеждаемся в его справедливости и для $n' = n+1$. Для этого достаточно сопоставить неравенства

$$a_n \leqslant a_1 q^{n-1} \quad \text{и} \quad a_{n+1} \leqslant a_n q.$$

В правой части (18.37) стоит $(n+1)$-й член ряда

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_1 q^{n-1},$$

представляющего собой бесконечно убывающую геометрическую прогрессию с суммой $a_1/(1-q)$. Нам остается лишь сослаться на теорему 18.5 с тем, чтобы сделать заключение как о сходимости ряда (18.33), так и о справедливости неравенства (18.35).

Пусть теперь при всех n выполняется (18.36). Тогда при всех n будет верно и неравенство

$$a_n \geqslant a_1,$$

а так как $a_1 > 0$, то отсюда вытекает, что a_n не стремится к 0 при $n \to \infty$. Лемма доказана.

Теорема 18.7 (признак сходимости Даламбера). *Пусть для некоторого ряда* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ *существует*

$$\lim_{n \to \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = D, \tag{18.38}$$

тогда, если $D < 1$, *то данный ряд абсолютно сходится, если же* $D > 1$, *то ряд расходится, и, более того, его* *общий член не стремится к* 0 *при неограниченном возрастании* n.

Доказательство. Пусть сначала $D < 1$. Выберем число q так, чтобы было $D < q < 1$. Поскольку

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = D < q,$$

то для всех n, больших некоторого n_q, будет выполнено и неравенство

$$\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| < q.$$

Применяя лемму Даламбера к ряду

$$\sum_{n=n_q+1}^{\infty} |a_n|,$$

убеждаемся в его сходимости. Но тогда сходится и ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|,$$

а его сходимость и означает абсолютную сходимость данного ряда. Пусть теперь $D > 1$. Тогда для всех n, больших некоторого n_1, будет выполнено неравенство

$$\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| \geqslant 1.$$

Отсюда по лемме Даламбера следует, что $|a_n| \not\to 0$ [1]) при $n \to \infty$. Но тогда и $a_n \not\to 0$. Теорема доказана.

18.2.4. Признак Лейбница. Определение 18.3. *Ряд* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ *называют знакочередующимся, если любые два его соседних члена имеют противоположные знаки*

$$a_n a_{n+1} < 0 \qquad (n = 1, 2, 3, \ldots).$$

Теорема 18.8 (признак сходимости Лейбница). *Если*:

1) *ряд*

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \tag{18.39}$$

— *знакочередующийся*,

---

[1]) Запись вида $x_n \not\to a$ означает, что либо $\lim\limits_{n\to\infty} x_n$ не существует вообще, либо $\lim\limits_{n\to\infty} x_n$ существует, но не равен a.

2) *абсолютные величины его членов образуют убывающую последовательность*

$$|a_1| \geqslant |a_2| \geqslant |a_3| \geqslant \ldots, \qquad (18.40)$$

3) *общий его член стремится к* 0 *при неограниченном возрастании* n

$$\lim_{n \to \infty} a_n = 0, \qquad (18.41)$$

то этот ряд сходится, а его сумма имеет знак первого члена ряда и не превосходит его по абсолютной величине:

$$\operatorname{sign}\left(\sum_{n=1}^{\infty} a_n\right) = \operatorname{sign} a_1\,^{1)}, \quad \left|\sum_{n=1}^{\infty} a_n\right| \leqslant |a_1|. \qquad (18.42)$$

Доказательство. Ряд (18.39) может начинаться как с положительного, так и с отрицательного члена. Для определенности будем считать, что $a_1 > 0$. Обозначим $|a_n|$ через c_n. Тогда $c_n > 0$ и

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = c_1 - c_2 + c_3 - c_4 + \ldots$$

Рассмотрим сначала последовательность тех частичных сумм нашего ряда, которые имеют четные номера:

$$S_2, \quad S_4, \ldots, S_{2m}, \ldots \qquad (18.43)$$

Записывая S_{2m} в виде

$$S_{2m} = (c_1 - c_2) + (c_3 - c_4) + \ldots + (c_{2m-1} - c_{2m}),$$

мы получим, что

$$S_{2m} > 0, \qquad (18.44)$$

ибо выражение в каждой из круглых скобок положительно (согласно (18.40)). Далее, так как

$$S_{2(m+1)} - S_{2m} = c_{2m+1} - c_{2m+2} > 0,$$

то последовательность (18.43) возрастающая. С другой стороны, записав выражение для S_{2m} в виде

$$S_{2m} = c_1 - (c_2 - c_3) - \ldots - (c_{2m-2} - c_{2m-1}) - c_{2m},$$

---

[1]) $\operatorname{sign} x = \begin{cases} -1, & \text{если } x < 0, \\ 0, & \text{если } x = 0, \\ +1, & \text{если } x > 0. \end{cases}$

мы замечаем, что $\{S_{2m}\}$ ограничена сверху, действительно,

$$S_{2m} < c_1. \tag{18.45}$$

Будучи возрастающей и ограниченной сверху, последовательность (18.43) имеет предел, который мы обозначим через S,

$$\lim_{m \to \infty} S_{2m} = S. \tag{18.46}$$

Покажем теперь, что это же число S является пределом и для всей последовательности

$$S_1, \quad S_2, \quad S_3, \ \ldots, \ S_n, \ \ldots \tag{18.47}$$

частичных сумм ряда (18.39). Заметим, что из (18.46) следует, что

$$\gamma_m = S_{2m} - S \longrightarrow 0 \quad \text{при} \quad n \longrightarrow \infty. \tag{18.48}$$

Представив разность $S_n - S$ в виде

$$S_n - S = \begin{cases} \gamma_m, & \text{если } n = 2m, \\ \gamma_m + a_{2m+1}, & \text{если } n = 2m+1, \end{cases}$$

видим, что (в силу (18.41) и (18.48))

$$S_n - S \longrightarrow 0 \quad \text{при} \quad n \longrightarrow \infty,$$

а это и означает, что

$$\lim_{n \to \infty} S_n = S.$$

Неравенство же (18.42) получается из (18.45) предельным переходом при $m \longrightarrow \infty$. Теорема доказана.

18.2.5. Интегральный признак сходимости. Определение 18.4. *Функция $f(x)$, заданная на $[1; +\infty)$, называется производящей функцией для ряда*

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n,$$

если при каждом натуральном n справедливо

$$a_n = f(n).$$

Теорема 18.9 (интегральный признак сходимости положительных рядов). *Пусть*

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \tag{18.49}$$

— числовой ряд, $f(x)$ — его производящая функция, и пусть

1) $f(x) \geqslant 0$ *на* $[1; +\infty)$,

2) $f(x)$ *убывает на* $[1; +\infty)$.

Тогда ряд (18.49) *и несобственный интеграл*

$$\int_{1}^{+\infty} f(x)\,dx \tag{18.50}$$

сходятся или расходятся одновременно, причем в случае их сходимости

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \geqslant \int_{1}^{+\infty} f(x)\,dx \geqslant \sum_{n=2}^{\infty} a_n. \tag{18.51}$$

Доказательство. Так как $f(x)$ — убывающая, то для каждого x, заключенного между n и $n+1$, имеем

$$f(n) \geqslant f(x) \geqslant f(n+1),$$

что можно переписать и в виде

$$a_n \geqslant f(x) \geqslant a_{n+1}.$$

Интегрируя каждое такое неравенство по своему промежутку $[n; n+1]$ и учитывая, что

$$\int_{n}^{n+1} a_n\,dx = a_n, \qquad \int_{n}^{n+1} a_{n+1}\,dx = a_{n+1},$$

получаем

$$a_1 \geqslant \int_{1}^{2} f(x)\,dx \geqslant a_2,$$

$$a_2 \geqslant \int_{2}^{3} f(x)\,dx \geqslant a_3,$$

$$a_3 \geqslant \int_{3}^{4} f(x)\,dx \geqslant a_4,$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$

Сложим почленно первые n из этих неравенств:

$$S_n \geqslant \int_{1}^{n+1} f(x)\,dx \geqslant S_{n+1} - a_1. \tag{18.52}$$

(На рис. 18.1 дана геометрическая иллюстрация проведенных вычислений. На левом чертеже ступенчатая фигура, объемлющая криволинейную трапецию $ABCD$, составлена из прямоугольников, площади которых суть числа $a_1=f(1)$, $a_2=f(2)$, $\ldots$, $a_n=f(n)$. На правом чертеже вписанная в эту же криволинейную трапецию ступенчатая фигура составлена из прямоугольников с площадями $a_2=f(2)$, $a_3=f(3)$, $\ldots$, $a_{n+1}=f(n+1)$.)

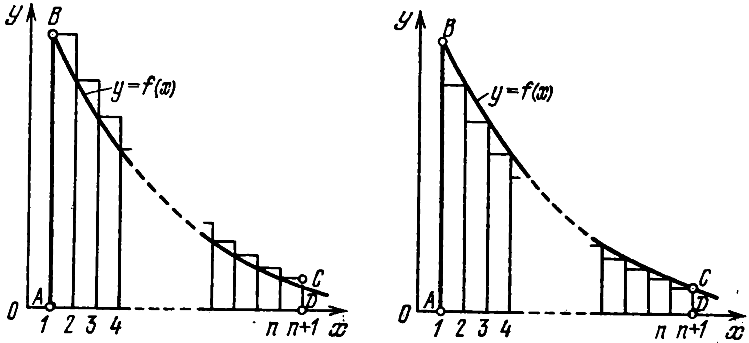


Рис. 18.1.

Допустим теперь, что несобственный интеграл (18.50) сходится, т. е.

$$\int_1^{+\infty} f(x)\,dx=\lim_{A\to+\infty}\int_1^A f(x)\,dx=B,$$

где B — некоторое число. А так как $f(x)\geqslant 0$, то при $A=n+1$ имеем

$$\int_1^{n+1} f(x)\,dx\leqslant\int_1^{+\infty} f(x)\,dx=B,$$

откуда в силу правого из неравенств (18.52) получаем

$$S_{n+1}-a_1\leqslant\int_1^{n+1} f(x)\,dx\leqslant B.$$

Отсюда для любого натурального n имеем $S_{n+1}\leqslant B+a_1$, т. е. частичные суммы S_1, S_2, $\ldots$, S_{n+1}, $\ldots$ образуют неубывающую ограниченную сверху последовательность. Следовательно, существует $\lim\limits_{n\to\infty} S_{n+1}=S$, т. е. ряд (18.49) сходится. При этом неравенство (18.51) получается из (18.52) переходом к пределу при $n\to\infty$.

Пусть теперь несобственный интеграл (18.50) расходится. В силу того, что $f(x) \geqslant 0$, это означает, что

$$\lim_{A \to +\infty} \int_1^A f(x)\,dx = +\infty. \tag{18.53}$$

Равенство (18.53) означает, что, каково бы ни было $M > 0$, найдется такое значение N, что для всех значений $A > N$ будем иметь

$$\int_1^A f(x)\,dx > M.$$

Возьмем $n+1 > N$; тогда

$$\int_1^{n+1} f(x)\,dx > M.$$

Согласно левому из неравенств (18.52) отсюда следует, что для любого натурального $n > N-1$

$$S_n > M,$$

т. е.

$$S_n \longrightarrow +\infty \quad \text{при} \quad n \longrightarrow +\infty.$$

Следовательно, ряд (18.49) тоже расходится. Теорема доказана.

Замечание 18.3. Из формулы (18.51) следует удобная для оценки суммы остаточного ряда формула

$$\int_{k+1}^{\infty} f(x)\,dx \leqslant \sum_{n=k+1}^{\infty} a_n \leqslant \int_k^{\infty} f(x)\,dx. \tag{18.51'}$$

Действительно, применяя (18.51) к рядам $\sum\limits_{n=k}^{\infty} a_n$ и $\sum\limits_{n=k+1}^{\infty} a_n$, получим

$$\sum_{n=k}^{\infty} a_n \geqslant \int_k^{\infty} f(x)\,dx \geqslant \sum_{n=k+1}^{\infty} a_n$$

и

$$\sum_{n=k+1}^{\infty} a_n \geqslant \int_{k+1}^{\infty} f(x)\,dx \geqslant \sum_{n=k+2}^{\infty} a_n,$$

откуда и следует (18.51′).

18.2.6. Примеры исследования рядов на сходимость. Оценки остаточных рядов. Проиллюстрируем несколькими примерами применение теорем предыдущего пункта.

Пример 18.5. Доказать сходимость ряда

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{2^n}.$$

Оценить разность между его суммой S и частной суммой S_{10}.

Решение. Попробуем применить признак Даламбера. У нас

$$a_n=\frac{n}{2^n}, \qquad a_{n+1}=\frac{n+1}{2^{n+1}}.$$

Следовательно,

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n}=\lim_{n\to\infty} \frac{n+1}{2n}=\frac{1}{2}.$$

Так как этот предел меньше 1, то данный ряд сходится ($a_n>0$, поэтому знаки абсолютной величины мы здесь опустили).

Для оценки разности $S-S_{10}$ воспользуемся формулой (18.23) при $p=10$

$$S=S_{10}+\sigma,$$

где σ означает сумму остаточного ряда

$$\sum_{n=11}^{\infty} a_n=a_{11}+a_{12}+a_{13}+\ldots$$

Применим к этому остаточному ряду лемму Даламбера. Так как здесь $n\geqslant 11$, то

$$\frac{a_{n+1}}{a_n}=\frac{n+1}{2n}=\frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{n}\right)\leqslant\frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{11}\right)=\frac{6}{11}.$$

Первый член остаточного ряда равен

$$a_{11}=\frac{11}{2^{11}},$$

значит, согласно лемме,

$$\sigma\leqslant\frac{11}{2^{11}}\cdot\frac{1}{1-\frac{6}{11}}=\frac{11}{2048}\cdot\frac{11}{5}=0{,}0118\ldots\approx 0{,}012.$$

Очевидно также, что $\sigma>0$. Итак,

$$0<S-S_{10}\leqslant 0{,}012.$$

Вычисляя S_{10}, получим

$$S_{10}=\frac{1}{2}+\frac{2}{4}+\frac{3}{8}+\frac{4}{16}+\frac{5}{32}+\frac{6}{64}+\frac{7}{128}+\frac{8}{256}+\frac{9}{512}+\frac{10}{1024}=1{,}9883.$$

Стало быть, с абсолютной погрешностью, не превосходящей 0,012,

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{2^n} \approx 1{,}9883.$$

(Ниже мы увидим, что точное значение суммы этого ряда равно 2. Можно было бы убедиться, что, взяв вместо S_{10} частную сумму S_{20}, мы получили бы уже значение S с погрешностью, меньшей 0,000022.)

Пример 18.6. Доказать сходимость ряда

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}.$$

Сколько членов этого ряда надо взять, чтобы вычислить его сумму с точностью до 0,001?

Решение. Производящей функцией для данного ряда служит

$$f(x) = \frac{1}{x^2}.$$

Применяя интегральный признак сходимости, мы получаем

$$\int_1^{+\infty} f(x)\,dx = \int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^2} = -\frac{1}{x}\Big|_1^{+\infty} = 1.$$

Интеграл $\int_0^{+\infty} f(x)\,dx$ сходится, значит, сходится и данный ряд. Оценим теперь сумму остаточного ряда

$$\sigma = \sum_{n=p+1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{1}{(p+1)^2} + \frac{1}{(p+2)^2} + \frac{1}{(p+3)^2} + \ldots$$

Согласно (18.51′)

$$\int_{p+1}^{\infty} \frac{dx}{x^2} \leqslant \sigma \leqslant \int_{p}^{\infty} \frac{dx}{x^2},$$

откуда

$$\frac{1}{p+1} \leqslant \sigma \leqslant \frac{1}{p}.$$

Мы видим, что $\sigma \leqslant 0{,}001$ тогда и только тогда, когда $p \geqslant 1000$. Следовательно, мы можем гарантировать достижение требуемой точности при вычислении S лишь при условии, что будет вычисляться сумма его первых 1000 членов (!). В таких случаях говорят, что ряд сходится очень медленно.

Пример 18.7. Будут ли сходящимися ряды

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \quad \textit{(гармонический ряд)} \qquad (18.54)$$

и

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n}? \qquad (18.55)$$

Решение. Применяя интегральный признак сходимости к ряду (18.54), получаем

$$\int_{1}^{+\infty}\frac{dx}{x}=\ln x\Big|_{1}^{+\infty}=+\infty.$$

Несобственный интеграл от производящей функции расходится, значит, расходится и сам ряд (18.54).

Ряд (18.55) удовлетворяет всем условиям теоремы 18.8 (признак сходимости Лейбница). Следовательно, этот ряд сходится. Заметим, что его сходимость тоже медленная. Действительно, записав остаточный ряд

$$\sum_{n=p+1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n}=\frac{(-1)^{p+1}}{p+1}+\frac{(-1)^{p+2}}{p+2}+\frac{(-1)^{p+3}}{p+3}+\ldots$$

и оценивая по формуле (18.42) его сумму, получаем

$$|\sigma|=\left|\sum_{n=p+1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n}\right|\leqslant\frac{1}{p+1}.$$

Так как ряд, составленный из абсолютных величин членов ряда (18.55), совпадает с рядом (18.54), который, как мы видели, расходится, то сходимость ряда (18.55) не является абсолютной (в смысле определения 18.2). В таких случаях, когда сам ряд сходится, а ряд из абсолютных величин его членов расходится, говорят, что *ряд сходится неабсолютно* (или: *ряд сходится условно*).

§ 18.3. Степенные ряды

18.3.1. Понятие о функциональных рядах. Во многих случаях оказывается удобным рассматривать ряды, члены которых представляют собой уже не числа, а функции. Дадим прежде всего соответствующее определение.

Определение 18.5. *Ряд*

$$\sum_{n=1}^{\infty}u_n(x) \qquad (18.56)$$

(члены которого суть функции одной и той же переменной x) называется функциональным рядом. Множество D^*, состоящее из всех тех x, при которых определен каждый из членов ряда (18.56), *называется его областью определения, а множество D, включающее в себя те и только те значения x, при которых этот ряд оказывается сходящимся, называется его областью сходимости.*

Пример 18.8. Рассмотрим ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \ln^n x. \tag{18.57}$$

Областью определения каждого из членов этого ряда служит промежуток $(0, +\infty)$, значит, и область определения самого ряда $D^* = (0, +\infty)$. При каждом $x \in D^*$ (10.57) превращается в числовой ряд, однако не при каждом таком x ряд будет сходиться. Заметив, что (разумеется, при условии: $x \in D^*$) ряд (18.57) представляет собой бесконечную геометрическую прогрессию со знаменателем $q = \ln x$, видим, что необходимым и достаточным условием его сходимости является выполнение неравенства

$$|\ln x| < 1,$$

откуда следует, что областью его сходимости является интервал

$$D = \left(\frac{1}{e}, e\right).$$

При каждом $x \in D$ по формуле для суммы бесконечно убывающей геометрической прогрессии найнем

$$\sum_{n=1}^{\infty} \ln^n x = \frac{\ln x}{1 - \ln x}.$$

18.3.2. Степенные ряды. Структура их областей сходимости. В этом и следующих пунктах настоящей главы мы будем рассматривать так называемые степенные ряды, представляющие собой важную частную разновидность функциональных рядов.

Определение 18.6. *Степенным рядом называется ряд вида*

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n (x-a)^n, \tag{18.58}$$

где a и c_n $(n = 0, 1, 2, \ldots)$ — постоянные.

Учитывая, что линейной заменой переменных $z = x - a$ ряд (18.58) может быть приведен к виду

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n, \tag{18.59}$$

и наоборот, мы сначала будем рассматривать именно такие ряды, как этот последний. Степенные ряды обладают целым рядом присущих только им важных свойств, к изучению которых мы сейчас и приступаем.

Лемма 18.2 (Абеля). *Если степенной ряд*

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n \tag{18.60}$$

сходится при некотором $x = x_1 \neq 0$, *то он абсолютно сходится при всяком таком* $x = x_2$, *для которого*

$$|x_2| < |x_1|.$$

Доказательство. Пусть ряд

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n x_1^n$$

сходится. Тогда его общий член $c_n x_1^n$ стремится к 0 при $n \to \infty$ (согласно необходимому признаку сходимости). Отсюда следует, что последовательность

$$c_0 x_1^0, \quad c_1 x_1^1, \quad c_2 x_1^2, \; \ldots, \; c_n x_1^n, \; \ldots$$

ограничена, т. е. существует такое число M, что при всех целых $n \geqslant 0$ будет

$$|c_n x_1^n| \leqslant M.$$

Для общего члена ряда

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n x_2^n \tag{18.61}$$

запишем

$$|c_n x_2^n| = |c_n x_1^n| \left|\frac{x_2}{x_1}\right|^n \leqslant M \left|\frac{x_2}{x_1}\right|^n. \tag{18.62}$$

Так как ряд

$$\sum_{n=0}^{\infty} M \left|\frac{x_2}{x_1}\right|^n \tag{18.63}$$

сходится $\left(\text{как бесконечно убывающая геометрическая прогрессия со знаменателем } q = \left|\frac{x_2}{x_1}\right| < 1\right)$, то в силу неравенства (18.62) мы можем сделать заключение и об абсолютной сходимости ряда (18.61). Лемма доказана.

З а м е ч а н и е 18.4 (к лемме Абеля). Так как сумма ряда (18.63) равна

$$\frac{M}{1-q}=\frac{M}{1-|x_2/x_1|}, \tag{18.64}$$

то, согласно теореме сравнения, для суммы ряда (18.61) получаем

$$\left|\sum_{n=0}^{\infty} c_n x_2^n\right| \leqslant \frac{M}{1-|x_2/x_1|}. \tag{18.65}$$

С л е д с т в и е 18.3 (об о б л а с т и с х о д и м о с т и с т е п е н н о г о р я д а). *Если ряд вида* (18.60) *сходится не при всех значениях* $x \in (-\infty; +\infty)$, *то существует такое число* R, *что*:

а) *при всех* x, *для которых* $|x| < R$, *этот ряд абсолютно сходится*;

б) *при всех* x, *для которых* $|x| > R$, *этот ряд расходится.*

Действительно, как нетрудно видеть, таким числом R служит точная верхняя граница множества всех тех x, при которых ряд (18.60) сходится.

Это число R называют *радиусом сходимости* степенного ряда. Если же ряд сходится при всех $x \in (-\infty; +\infty)$, то говорят, что его радиус сходимости равен бесконечности.

Заметим, что в следствии 18.3 ничего не говорится о сходимости или расходимости ряда при тех x, для которых $|x| = R$. Как мы увидим ниже, при этих значениях x ряд может оказаться как сходящимся, так и расходящимся. Если R — радиус сходимости ряда (18.60), то его область сходимости является одним из промежутков вида

$$(-R;\ R),\quad [-R;\ R],\quad (-R;\ R] \quad \text{или} \quad [-R;\ R).$$

Независимо от того, какой именно из этих четырех случаев имеет место, интервал $(-R,\ R)$ называют *интервалом сходимости ряда.* (Таким образом, область сходимости степенного ряда либо совпадает с его интервалом сходимости, либо получается из этого интервала добавлением к нему его одной или обеих граничных точек.)

18.3.3. Простейшие свойства степенных рядов. Даже если все члены функционального ряда и являются непрерывными функциями в его области сходимости, его сумма тем не менее может оказаться функцией разрывной.

Например, как легко проверить,

$$\sum_{n=0}^{\infty} x(1-x)^n = \begin{cases} 1, & \text{если} \quad 0<x<2, \\ 0, & \text{если} \quad x=0. \end{cases}$$

Почленное интегрирование и почленное дифференцирование функциональных рядов, т. е. справедливость формул

$$\int_a^b \left(\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x) \right) dx = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\int_a^b u_n(x)\,dx \right) \qquad (18.66)$$

и

$$\left(\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x) \right)'_x = \sum_{n=1}^{\infty} (u_n(x))'_x \qquad (18.67)$$

тоже далеко не всегда можно гарантировать, хотя бы все необходимые производные и интегралы в отдельности и существовали! (это не должно казаться удивительным, если мы вспомним, что сумма ряда не является суммой в обычном, «конечном» смысле этого слова!). Тем более примечательно, что степенные ряды всеми только что упомянутыми свойствами обладают. А именно, справедлива

Теорема 18.10. *Сумма степенного ряда представляет собой функцию, непрерывную в его области сходимости.*

Степенной ряд можно почленно интегрировать по любому промежутку, целиком входящему (вместе со своими концами) в область сходимости

$$\int_a^b \left(\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n \right) dx = \sum_{n=0}^{\infty} c_n \int_a^b x^n\,dx \qquad (18.66')$$

и почленно дифференцировать в любой точке его интервала сходимости

$$\left(\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n \right)'_x = \sum_{n=0}^{\infty} (c_n x^n)' = \sum_{n=1}^{\infty} n c_n x^{n-1}. \qquad (18.67')$$

Мы примем эту теорему без доказательства.

18.3.4. Разложение в степенной ряд $\ln x$ и $\operatorname{arctg} x$. Выведем теперь несколько полезных формул.

Суммируя (при $|t|<1$) бесконечно убывающую геометрическую прогрессию $1-t+t^2-t^3+\ldots$, получим

$$1-t+t^2-t^3+\ldots = \frac{1}{1+t}.$$

Интегрируя почленно по промежутку $[0, x]$, мы последовательно будем иметь

$$\int_0^x 1\,dt - \int_0^x t\,dt + \int_0^x t^2\,dt - \int_0^x t^3\,dt + \ldots = \int_0^x \frac{dt}{1+t},$$

или

$$x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \ldots = \ln(1+x) \qquad (18.68)$$

для каждого $x \in (-1, 1)$. При $x = 1$ в левой части мы получаем сходящийся ряд

$$1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \ldots + (-1)^n \cdot \frac{1}{n+1} + \ldots$$

(см. пример 18.7). Значит, согласно теореме 18.10, левая часть (18.68) непрерывна в точке $x = 1$. Так как правая часть этого равенства тоже непрерывна, то (18.68) тем самым оказывается справедливым и при $x = 1$. Мы получили, таким образом, разложение функции $\ln(1+x)$ в ряд по степеням x. Полученную формулу можно было бы использовать для вычисления натуральных логарифмов, однако, наличие ограничения $-1 < x \leqslant 1$ позволяет это сделать не всегда. Поэтому мы сейчас выведем еще одну формулу, с помощью которой эти логарифмы обычно и вычисляются. Прежде всего, заменяя в (18.68) x на $-x$, получим

$$-x - \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} - \ldots - \frac{x^{n+1}}{n+1} - \ldots = \ln(1-x). \qquad (18.69)$$

Для $x \in (-1; 1)$ справедлива каждая из формул (18.68) и (18.69). Вычитая почленно (18.69) из (18.68), получим (при $|x| < 1$)

$$2\left(x + \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + \ldots + \frac{x^{2m+1}}{2m+1} + \ldots\right) = \ln\frac{1+x}{1-x}. \qquad (18.70)$$

Казалось бы, мы ничего не выиграли по сравнению с (18.68). Однако здесь для любого положительного A решение уравнения

$$\frac{1+x}{1-x} = A$$

дает заключенное строго между -1 и $+1$ значение x:

$$x = 1 - \frac{2}{A+1}. \qquad (18.71)$$

Пример 18.9. Попробуем вычислить $\ln 2$ сначала с помощью формулы (18.68), а затем—формулы (18.70), каждый раз ограничиваясь четырьмя членами.

Подставляя в (18.68) $x=1$, получаем

$$\ln 2 = 1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\frac{1}{5}-\ldots \tag{18.72}$$

Ряд в правой части знакочередующийся, поэтому, согласно теореме Лейбница, после отбрасывания всех членов, начиная с пятого, мы получаем приближенное равенство

$$\ln 2 \approx 1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}=0{,}583\ldots, \tag{18.72'}$$

абсолютная погрешность которого оценивается величиной первого отброшенного члена, т. е. величиной $1/5=0{,}2$.

Для вычисления по формуле (18.70) мы полагаем $x=1-\frac{2}{2+1}=\frac{1}{3}$ (см. (18.71)). Подставляя это значение в (18.70), имеем

$$\ln 2 = 2\left[\frac{1}{3}+\frac{1}{3}\left(\frac{1}{3}\right)^3+\frac{1}{5}\left(\frac{1}{3}\right)^5+\frac{1}{7}\left(\frac{1}{3}\right)^7+\frac{1}{9}\left(\frac{1}{3}\right)^9+\ldots\right]=$$
$$=2\left[\frac{1}{3}+\frac{1}{3}\left(\frac{1}{3}\right)^3+\frac{1}{5}\left(\frac{1}{3}\right)^5+\frac{1}{7}\left(\frac{1}{3}\right)^7\right]+$$
$$+\frac{2}{9}\left(\frac{1}{3}\right)^9+\frac{2}{11}\left(\frac{1}{3}\right)^{11}+\ldots+\frac{2}{2n+1}\left(\frac{1}{3}\right)^{2n+1}+\ldots \tag{18.73}$$

Полагая

$$\ln 2 \approx 2\left[\frac{1}{3}+\frac{1}{3}\left(\frac{1}{3}\right)^3+\frac{1}{5}\left(\frac{1}{3}\right)^5+\frac{1}{7}\left(\frac{1}{3}\right)^7\right]=0{,}6931347\ldots, \tag{18.73'}$$

мы допускаем погрешность, равную сумме остаточного ряда

$$\frac{2}{9}\left(\frac{1}{3}\right)^9+\frac{2}{11}\left(\frac{1}{3}\right)^{11}+\ldots+\frac{2}{2n+1}\left(\frac{1}{3}\right)^{2n+1}+\ldots$$

Для этого ряда

$$a_n=\frac{2}{2n+1}\left(\frac{1}{3}\right)^{2n+1}, \qquad a_{n+1}=\frac{2}{2n+3}\left(\frac{1}{3}\right)^{2n+3},$$
$$\frac{a_{n+1}}{a_n}=\frac{2n+1}{2n+3}\left(\frac{1}{3}\right)^2<\frac{1}{9},$$

поэтому (см. лемму 18.1 (Даламбера))

$$\frac{2}{9}\left(\frac{1}{3}\right)^9+\frac{2}{11}\left(\frac{1}{3}\right)^{11}+\ldots+\frac{2}{2n+1}\left(\frac{1}{3}\right)^{2n+1}\leqslant$$
$$\leqslant\frac{2}{9}\left(\frac{1}{3}\right)^9\frac{1}{1-\frac{1}{9}}=\frac{1}{4\cdot 3^9}=\frac{1}{78\,732}=0{,}0000127\ldots$$

Формула (18.73') дает более чем в 10 000 раз лучшую точность, чем (18.72') (точное значение $\ln 2=0{,}69314718\ldots$). (Ряд (18.73) сходится гораздо быстрее ряда (18.72), хотя сумма у этих рядов одна и та же: $\ln 2$.)

Действуя точно так же, как и при выводе формулы (18.68), отправляясь от формулы

$$1-t^2+t^4-\ldots+(-1)^n\cdot t^{2n}+\ldots=\frac{1}{1+t^2}$$

и интегрируя ее по промежутку $[0,\ x]$ (где $|x|<1$), получим формулу

$$\operatorname{arctg} x=x-\frac{x^3}{3}+\frac{x^5}{5}-\ldots+(-1)^{n-1}\frac{x^{2n-1}}{2n-1}+\ldots, \qquad (18.74)$$

справедливую и при $x=\pm 1$.

Пример 18.10. Допустим, что нам требуется вычислить по этой формуле $\operatorname{arctg} 0{,}5$ с точностью до 0,001. Замечая, что ряд (18.74) удовлетворяет всем условиям теоремы 18.9 (признак Лейбница), мы заключаем, что погрешность, которая получится при отбрасывании в (18.74) всех членов, начиная с

$$(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{2n+1},$$

не будет превосходить абсолютной величины этого члена. Вычисляя его значения при $x=0{,}5$, получаем

$$\text{при } n=1 \qquad \frac{0{,}5^3}{3}=\frac{1}{24},$$

$$\text{при } n=2 \qquad \frac{0{,}5^5}{5}=\frac{1}{160},$$

$$\text{при } n=3 \qquad \frac{0{,}5^7}{7}=\frac{1}{896},$$

$$\text{при } n=4 \qquad \frac{0{,}5^9}{9}=\frac{1}{4608}.$$

Последнее из полученных значений меньше 0,0005, поэтому мы можем отбросить в формуле (18.74) все члены, начиная с $x^9/9$. Тогда получим

$$\operatorname{arctg} 0{,}5=0{,}5-\frac{0{,}5^3}{3}+\frac{0{,}5^5}{5}-\frac{0{,}5^7}{7}=0{,}495.$$

§ 18.4. Ряды Тейлора

18.4.1. Единственность разложения функции в степенной ряд. Мы уже видели (см. примеры 18.9 и 18.10), что представление той или иной функции в виде суммы степенного ряда (как говорят еще: разложение функции в степенной ряд) может оказаться полезным хотя бы с точки зрения вычисления значений этой функции. Мы, однако, пока еще не владеем сколько-нибудь общим методом получения подобных разложений. Ведь формулы (18.68) и (18.74) были выведены посредством весьма частного приема! В этом пункте мы и займемся изучением вопроса о возможности и способах разложения произвольной функции в степенной ряд.

Теорема 18.11. *Пусть на некотором промежутке* (a, b) *таком, что* $a < 0 < b$, *справедливо равенство*

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n. \tag{18.75}$$

Тогда

$$c_0 = f(0), \quad c_1 = \frac{1}{1!} f'(0), \quad c_2 = \frac{1}{2!} f''(0), \quad \ldots$$
$$\ldots, \quad c_n = \frac{1}{n!} f^{(n)}(0), \ldots \tag{18.76}$$

Можно сказать, что эта теорема дает необходимые условия разложимости функции в степенной ряд. Действительно, ее можно было бы сформулировать и так: если функция вообще может быть представлена в виде суммы некоторого степенного ряда (18.75), то коэффициенты этого ряда не могут быть иными, чем это дается формулами (18.76).

Доказательство. Положив в (18.75) $x = 0$, мы сразу получаем, что $f(0) = c_0$. Продифференцируем теперь почленно равенство (18.75) (согласно теореме 18.10 такая операция законна)

$$f'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} n c_n x^{n-1} = c_1 + 2c_2 x + 3c_3 x^2 + \ldots + nc_n x^{n-1} + \ldots$$

Подставляя в полученное равенство $x = 0$, получаем

$$f'(0) = c_1.$$

Двукратное дифференцирование (18.75) даст нам

$$f''(x) = \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1) c_n \cdot x^{n-2} = 2c_2 + 3 \cdot 2c_3 x + 4 \cdot 3c_4 x^2 + \ldots$$
$$\ldots + n(n-1) c_n x^{n-2} + \ldots$$

Подставляя сюда $x = 0$, получаем

$$f''(0) = 2c_2.$$

После трехкратного дифференцирования (18.75) будем иметь

$$f'''(x)=\sum_{n=3}^{\infty} n(n-1)(n-2)c_n x^{n-3}=3\cdot 2c_3+4\cdot 3\cdot 2c_4x+$$
$$+5\cdot 4\cdot 3c_5x^2+\ldots+n(n-1)(n-2)c_nx^{n-3}+\ldots$$

и при $x=0$

$$f'''(0)=3\cdot 2c_3.$$

Продифференцировав (18.75) последовательно k раз, получим

$$f^{(k)}(x)=\sum_{n=k}^{\infty} n(n-1)(n-2)\ldots(n-k+1)c_nx^{n-k}=$$
$$=k(k-1)(k-2)\ldots 1c_k+(k+1)k(k-1)\ldots 2c_{k+1}x+\ldots$$
$$\ldots+n(n-1)(n-2)\ldots(n-k+1)c_nx^{n-k}+\ldots,$$

откуда при $x=0$ будем иметь

$$f^{(k)}(0)=k!\cdot c_k.$$

Теорема доказана.

18.4.2. Ряд Тейлора. Достаточные условия разложимости. Если бы относительно какой-либо функции $f(x)$ нам было только известно, что ее можно представить в виде суммы какого-то степенного ряда (на некотором промежутке, содержащем внутри себя точку 0), то сам ряд мы могли бы теперь составить, используя для этого лишь значения самой функции и ее производных в точке 0. Разумеется, разложить в степенной ряд можно далеко не всякую функцию. Прежде всего, очевидно, что для этого необходимо существование у разлагаемой функции производных всех порядков. Можно было бы на конкретных примерах показать, что и это условие отнюдь еще не является достаточным, но мы здесь не будем этого делать. Примем без доказательства следующую теорему.

Теорема 18.12. *Пусть на промежутке* $(a-h,\ a+h)$ *функция имеет производные всех порядков. Тогда, если существует такое число* M, *что для любого* $x\in(a-h,\ a+h)$ *и для любого* $n\geqslant 0$ *справедливо неравенство*

$$|f^{(n)}(x)|\leqslant M,$$

то на $(a-h,\ a+h)$ *имеет место разложение*

$$f(x)=f(a)+\frac{f'(a)}{1!}(x-a)+\frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2+\ldots$$
$$\ldots+\frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n+\ldots \qquad (18.77)$$

Ряд, стоящий в правой части этой формулы, называется *рядом Тейлора* для функции $f(x)$ по степеням разности $x-a$ (или еще: рядом Тейлора в окрестности точки $x=a$). В частном случае при $a=0$ получаем

$$f(x)=f(0)+\frac{f'(0)}{1!}x+\frac{f''(0)}{2!}x^2+\ldots+\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n+\ldots \qquad (18.78)$$

Этот ряд называют обычно *рядом Тейлора — Маклорена*.

18.4.3. Ряды для $\sin x$, $\cos x$ и e^x. Получим теперь формулы для разложения в ряд Тейлора — Маклорена функций $\sin x$, $\cos x$ и e^x.

I. $f(x)=\sin x$. Находим производные и вычисляем их значения при $x=0$:

$$f(x)=\sin x, \qquad f(0)=0,$$

$$f'(x)=\sin\left(x+\frac{\pi}{2}\right), \qquad f'(0)=\sin\frac{\pi}{2}=1,$$

$$f''(x)=\sin\left(x+2\frac{\pi}{2}\right), \qquad f''(0)=\sin\pi=0,$$

$$f'''(x)=\sin\left(x+3\frac{\pi}{2}\right), \qquad f'''(0)=\sin\frac{3\pi}{2}=-1,$$

$$f^{\mathrm{IV}}(x)=\sin\left(x+4\frac{\pi}{2}\right), \qquad f^{\mathrm{IV}}(0)=\sin 2\pi=0,$$

. . . .

Нетрудно убедиться, что любая из производных четного порядка от нашей функции при $x=0$ сама обращается в 0

$$f^{(2m)}(x)=\sin\left(x+2m\frac{\pi}{2}\right), \quad f^{(2m)}(0)=\sin m\pi=0,$$

для производных же нечетного порядка имеем

$$f^{(4k+1)}(x)=\sin\left[x+(4k+1)\frac{\pi}{2}\right],$$

$$f^{(4k+1)}(0)=\sin\frac{(4k+1)\pi}{2}=1,$$

$$f^{(4k+3)}(x)=\sin\left[x+(4k+3)\frac{\pi}{2}\right],$$

$$f^{(4k+3)}(0)=\sin\frac{(4k+3)\pi}{2}=-1,$$

или, окончательно, $f^{(2m+1)}(0)=(-1)^m$.

Так как $|f^{(n)}(x)| \leqslant 1$ при любых n и x, то теорема 18.12 применима. Следовательно,

$$\sin x = 0 + \frac{1}{1!}x + 0\cdot x^2 - \frac{1}{3!}x^3 + 0\cdot x^4 + \frac{1}{5!}x^5 + \ldots$$
$$\ldots + 0\cdot x^{2m} + \frac{(-1)^m}{(2m+1)!}x^{2m+1} + \ldots$$

Отбросив члены, тождественно равные 0, получаем

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \ldots + \frac{(-1)^m}{(2m+1)!}x^{2m+1} + \ldots \qquad (18.79)$$

или, в «свернутом виде»

$$\sin x = \sum_{m=0}^{\infty} (-1)^m \frac{x^{2m+1}}{(2m+1)!}. \qquad (18.79')$$

Эти формулы справедливы для всех $x \in (-\infty, +\infty)$.

II. $f(x) = \cos x$. Проделав выкладки и рассуждения, аналогичные приведенным в разделе I, получим, что для любого вещественного x

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \ldots + (-1)^m \frac{x^{2m}}{(2m)!} + \ldots =$$
$$= \sum_{m=0}^{\infty} (-1)^m \frac{x^{2m}}{(2m)!}. \qquad (18.80)$$

III. $f(x) = e^x$. Здесь и сама функция и все ее производные при $x = 0$ принимают значение 1. Кроме того, какое бы x^* мы ни выбрали, мы всегда можем найти включающий это x^* промежуток $(-h, h)$. Для всех точек этого промежутка

$$|f(x)| = e^x \leqslant e^h,$$

откуда следует разложимость нашей функции в ряд Тейлора—Маклорена на $(-h, h)$, тем самым и в точке $x = x^*$. Значит, разложение будет справедливым для любого вещественного x. Сама же формула имеет вид

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \ldots + \frac{x^n}{n!} + \ldots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}. \qquad (18.81)$$

Еще одним примером проиллюстрируем возможные применения формул, дающих разложения функций в степенные ряды.

Пример 18.11. Мы знаем, что функция e^{-x^2} не может быть «в конечном виде» проинтегрирована $\left(\text{т. е. что } \int e^{-x^2}\,dx \text{ — «неберущийся» интеграл}\right)$. Покажем, что функция

$$F(x) = \int_0^x e^{-t^2}\,dt$$

тем не менее может быть представлена достаточно удобным с вычислительной точки зрения рядом. Действительно, полагая в (18.81) $x = -t^2$, получаем

$$e^{-t^2} = 1 - t^2 + \frac{t^4}{2!} - \ldots + (-1)^n \frac{t^{2n}}{n!} + \ldots$$

Интегрируя почленно по промежутку $[0, x]$, будем иметь

$$\int_0^x e^{-t^2}\,dt = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5\cdot 2!} - \frac{x^7}{7\cdot 3!} + \ldots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)\cdot n!} + \ldots \quad (18.82)$$

Вычисляя теперь, например, $\int_0^{0,5} e^{-t^2}\,dt$ и полагая это значение приближенно равным сумме первых трех членов ряда, получим

$$\int_0^{0,5} e^{-t^2}\,dt \approx 0,5 - \frac{0,5^3}{3} + \frac{0,5^5}{5\cdot 2!} = 0,4614\ldots$$

Оценим погрешность этого результата, равную сумме остаточного ряда

$$\Delta = -\frac{0,5^7}{7\cdot 3!} + \frac{0,5^9}{9\cdot 4!} - \frac{0,5^{11}}{11\cdot 5!} + \ldots$$

Так как этот ряд — знакочередующийся и удовлетворяет всем условиям теоремы Лейбница, то

$$|\Delta| < \frac{0,5^7}{7\cdot 3!} \approx 0,0002$$

(взяв для вычислений не три, а пять первых членов, получили бы уже результат с точностью до 0,0000004. Ряд (18.82) сходится быстро!).

18.4.4. Решение дифференциальных уравнений с помощью степенных рядов. В этом небольшом пункте мы покажем, как степенные ряды могут быть использованы для решения дифференциальных уравнений.

Пусть сначала нам требуется решить задачу Коши, т. е. найти решение дифференциального уравнения

$$y' = f(x, y), \quad (18.83)$$

удовлетворяющее начальному условию

$$y(0)=y_0. \tag{18.84}$$

Пусть также из каких-либо соображений вытекает, что искомое решение может быть представлено в виде суммы степенного ряда. (В более обстоятельных, чем наш, курсах рассматриваются специальные признаки, позволяющие установить разложимость решения в степенной ряд по виду самого уравнения.) Очевидно, что тогда искомое решение имеет вид

$$y(x)=y(0)+\frac{y'(0)}{1!}x+\frac{y''(0)}{2!}x^2+\ldots+\frac{y^{(n)}(0)}{n!}x^n+\ldots \tag{18.85}$$

Начальное условие (18.84) сразу дает нам значение первого из коэффициентов, а подставляя в (18.83) значения $x=0$ и $y=y_0$, мы находим и $y'(0)$:

$$y'(0)=f(0,\ y_0).$$

Продифференцируем теперь (18.83) по x, считая что y означает как раз искомое решение,

$$y''(x)=f'_x(x,\ y)+f'_y(x,\ y)\,y'_x. \tag{18.86}$$

Подставляя сюда $x=0$, $y=y_0$, и найденное значение $y'(0)=f(0,\ y_0)$, находим $y''(0)$

$$y''(0)=f'_x(0,\ y_0)+f'_y(0,\ y_0)\,f(0,\ y_0).$$

Продолжая подобным же образом, мы найдем $y'''(0)$, $y^{\mathrm{IV}}(0)$ и т. д., т. е. окажемся в состоянии получить любой начальный отрезок ряда (18.85).

Пример 18.12. Пусть требуется найти пять первых членов разложения в ряд Тейлора—Маклорена решения дифференциального уравнения $y'=x^2+y^2$, удовлетворяющего начальному условию $y(0)=1$.

Имеем

$$\begin{aligned}
y'&=x^2+y^2, & y'(0)&=0+1=1,\\
y''&=2x+2yy', & y''(0)&=0+2=2,\\
y'''&=2+2(y'^2+yy''), & y'''(0)&=2+2(1+2)=8,\\
y^{\mathrm{IV}}&=2(3y'y''+yy'''), & y^{\mathrm{IV}}(0)&=2(6+8)=28.
\end{aligned}$$

Следовательно,

$$y=1+x+\frac{2}{2!}x^2+\frac{8}{3!}x^3+\frac{28}{4!}x^4+\ldots=1+x+x^2+\frac{4}{3}x^3+\frac{7}{6}x^4+\ldots$$

Если вместо условия (18.84) дано условие

$$y(x_0)=y_0, \tag{18.84'}$$

то решение мы должны будем искать в виде отрезка его ряда Тейлора по степеням $x-x_0$:

$$y(x)=y(x_0)+\frac{y'(x_0)}{1!}(x-x_0)+\frac{y''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2+\ldots$$

$$\ldots+\frac{y^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n+\ldots \quad (18.85')$$

ВОПРОСЫ ДЛЯ ПОВТОРЕНИЯ К ГЛАВЕ 18

1. Что такое числовой ряд, его члены, частичные суммы?

2. Какие числовые ряды называются сходящимися, а какие — расходящимися? Что называется суммой числового ряда? Всякий ли числовой ряд имеет сумму? Проиллюстрируйте свой ответ примерами.

3. Сформулируйте теорему о почленном сложении сходящихся рядов и о почленном умножении сходящегося ряда на число.

4. Что такое остаточный ряд? Как связана его сходимость со сходимостью исходного ряда?

5. В чем состоит необходимый признак сходимости ряда? Какие из приведенных ниже утверждений справедливы, а какие — нет? Дайте обоснование своим ответам.

а) Если ряд сходится, то его общий член стремится к 0.

б) Если общий член ряда стремится к 0, то ряд сходится.

в) Если ряд расходится, то его общий член не стремится к 0.

г) Если общий член ряда не стремится к 0, то ряд расходится.

6. В чем состоит признак сравнения для положительных рядов?

7. Какой ряд называют абсолютно сходящимся? Следует ли сходимость ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ из сходимости ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |a_n|$? Следует ли сходимость ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |a_n|$ из сходимости ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$?

8. Сформулируйте лемму Даламбера. Какого числа не превосходит сумма ряда, первый член которого равен 1, если при всех n справедливо неравенство $\frac{a_{n+1}}{a_n}\leqslant\frac{2}{3}$?

9. В чем состоит признак сходимости Даламбера?

10. Какой ряд называется знакочередующимся? В чем состоит признак Лейбница для установления сходимости таких рядов?

11. В чем состоит интегральный признак сходимости для положительных рядов?

12. Что такое функциональный ряд? Его область определения? Область сходимости?

13. Какой ряд называется степенным? Что такое интервал и радиус сходимости степенного ряда? Что представляет собой его область сходимости?

14. Сформулируйте теорему о непрерывности суммы степенного ряда, его почленном дифференцировании и интегрировании.

15. Сформулируйте теорему о единственности разложения функции в степенной ряд. Всякая ли функция может быть представлена в виде суммы степенного ряда? Сформулируйте условия, достаточные

для существования такого представления. Дайте определение ряда Тейлора.

16. Напишите формулы для разложения в степенные ряды функций $\ln(1+x)$, $\operatorname{arctg} x$, $\sin x$, $\cos x$ и e^x. При каких значениях x справедливы эти формулы?

17. Объясните, как ряды Тейлора могут быть использованы при решении задачи Коши для дифференциального уравнения $y' = f(x, y)$.

УПРАЖНЕНИЯ К ГЛАВЕ 18

В примерах 1—4 для каждого из данных рядов требуется найти выражение для S_n и с его помощью найти сумму ряда (или установить, что ряд расходится).

1. $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{1+2^n}{5^n}$. **2.** $\ln\frac{3}{4}+\ln\frac{8}{9}+\ln\frac{15}{16}+\ldots+\ln\frac{n^2-1}{n^2}+\ldots$

3. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (\sqrt{n}-\sqrt{n-1})$. **4.** $\frac{1}{2^2-1}+\frac{1}{3^2-1}+\frac{1}{4^2-1}+\frac{1}{5^2-1}+\ldots$

В примерах 5—20 требуется исследовать данные ряды на сходимость.

5. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n+1}{1000n+1}$. **6.** $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{\sin^2 \frac{n\pi}{2n+1}}{2^n}$. **7.** $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{\sqrt{n+1}}{3^n}$.

8. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} 0{,}7^n \left(2-\cos\frac{\pi}{2n}\right)$. **9.** $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{2^n(n+1)}$. **10.** $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{10^n \cdot n^{10}}$.

11. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{n^5}{5^n}$. **12.** $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{5^n}{n^5}$. **13.** $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(n+1)^4}$.

14. $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(n+1)^4}$. **15.** $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n+1}}$. **16.** $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n+1}}$.

17. $\sum\limits_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n \cdot \ln n}$. **18.** $\sum\limits_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n \cdot \ln n}$.

19. $\sum\limits_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n \ln^2 n}$. **20.** $\sum\limits_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n \ln^2 n}$.

В примерах 21—28 требуется оценить разность между суммой ряда и суммой его первых десяти членов.

21. $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(n+1)\cdot 2^n}$. **22.** $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(n+1)\cdot 2^n}$. **23.** $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!}$.

24. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n!}$. 25. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^3}$. 26. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^3}$.

27. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{(n+5)^3}}$. 28. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{\sqrt{(n+5)^3}}$.

В примерах 29—38 нужно найти область сходимости степенного ряда.

29. $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{3^n(n+1)}$. 30. $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{n^2+1}{2^n}x^n$. 31. $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{(2n+1)^2}$.

32. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{2^n x^n}{\sqrt{n}}$. 33. $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{x^n 10^n}{n!}$. 34. $\sum\limits_{n=0}^{\infty}x^n n!$

35. $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{(x-3)^n}{2^n\sqrt{n+2}}$. 36. $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{(x+1)^n}{(n^2+1)7^n}$.

37. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{x^{2n}}{9^n\sqrt{n}}$. 38. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{x^{3n}}{8^n n}$.

Для функций из упражнений 39—42 требуется найти три первых отличных от нуля члена их ряда Тейлора—Маклорена.

39. $y=\cos\left(x+\frac{\pi}{3}\right)$. 40. $y=\operatorname{tg} x$. 41. $y=e^{-x^2/2}$. 42. $y=\arcsin x$.

Каждую из данных в упражнениях 43—48 величин требуется вычислить приближенно, используя три первых ненулевых члена разложения в степенной ряд, и оценить погрешность полученного результата.

43. $\sin 0{,}5$. 44. $e^{0,1}$. 45. $\ln 3$. 46. $\operatorname{arctg} 0{,}2$.

47. $\int\limits_0^{0,5} e^{-x^2/2}\,dx$. 48. $\int\limits_0^{0,1}\frac{\ln(1+x)}{x}\,dx$.

В каждом из упражнений 49 и 50 дается некоторая задача Коши. Требуется:

а) Найти три первых члена разложения решения этой задачи в ряд Тейлора.

б) Найти точное решение данной задачи.

в) Построить (по точкам) на одном чертеже графики полученных точного и приближенного решений.

49. $y'=2xy,\ y(1)=1$. 50. $y'=-\frac{y}{x},\ y(2)=2$.

ОТВЕТЫ, УКАЗАНИЯ И РЕШЕНИЯ К ГЛАВЕ 18

1. $S_n=\frac{1+1}{1}+\frac{1+2}{5}+\frac{1+2^2}{5^2}+\ldots+\frac{1+2^{n-1}}{5^{n-1}}=$

$$=\left(\frac{1}{1}+\frac{1}{5}+\frac{1}{5^2}+\ldots+\frac{1}{5^{n-1}}\right)+\left(\frac{1}{1}+\frac{2}{5}+\frac{2^2}{5^2}+\ldots+\frac{2^{n-1}}{5^{n-1}}\right)=$$

$$=\frac{1-(1/5)^n}{1-\frac{1}{5}}+\frac{1-(2/5)^n}{1-\frac{2}{5}}.$$

Так как $(1/5)^n$ и $(2/5)^n$ стремятся к 0 при $n\to\infty$, то

$$\lim_{n\to\infty} S_n=\frac{1}{1-\frac{1}{5}}+\frac{1}{1-\frac{2}{5}}=\frac{35}{12}.$$

Следовательно, данный ряд сходится и сумма его равна 35/12.

2. $S_{n-1}=\ln\frac{n+1}{2n}$. Ряд сходится. Его сумма равна $-\ln 2$.

3. $S_n=\sqrt{n}\to\infty$ при $n\to\infty$. Ряд расходится.

4. Удобно воспользоваться формулой

$$\frac{1}{x^2-1}=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{x-1}-\frac{1}{x+1}\right).$$

$S_n=\frac{1}{2}\left(\frac{3}{2}-\frac{2n+1}{n(n+1)}\right)\to\frac{3}{4}$ при $n\to\infty$. Ряд сходится.

5. $\lim\limits_{n\to\infty} a_n=0{,}001\neq 0$, следовательно, ряд расходится.

6. Члены данного ряда не превосходят соответствующих членов сходящегося ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^n}$. Значит, данный ряд тоже сходится.

7. $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=\frac{1}{3}<1$. Значит, данный ряд сходится.

8. Ряд сходится. (Удобно применить признак сравнения.)
9. Ряд сходится. (Воспользоваться признаком Даламбера.)
10. Ряд расходится.
11. Ряд абсолютно сходится.
12. Ряд расходится.
13. Ряд сходится. (Воспользоваться интегральным признаком)
14. Ряд абсолютно сходится.
15. Ряд расходится.
16. Ряд сходится, но не абсолютно (условно сходится).
17. Ряд расходится.
18. Ряд сходится, но не абсолютно.
19. Ряд сходится.
20. Ряд абсолютно сходится.
21. Остаточный (за вычетом первых десяти членов) ряд имеет вид $\sum\limits_{n=10}^{\infty}\frac{1}{(n+1)2^n}$. Его первый член равен $\frac{1}{11\cdot 2^{10}}$, отношение же его $(n+1)$-го члена к n-му $\frac{a_{n+1}}{a_n}=\frac{n+1}{2(n+2)}<\frac{1}{2}$. Следовательно, по

лемме Даламбера

$$S-S_{10}=\sum_{n=10}^{\infty}\frac{1}{(n+1)\cdot 2^n}<\frac{1}{11\cdot 2^{10}}\cdot\frac{1}{1-\frac{1}{2}}<0{,}0002.$$

22. Так как остаточный ряд — знакочередующийся и члены его по абсолютной величине убывают, то его сумма имеет знак своего первого члена и не превосходит его по абсолютной величине $0<S-S_{10}<\frac{1}{11\cdot 2^{10}}<0{,}0001$.

23. $S-S_{10}<\frac{1}{11!}\cdot\frac{1}{1-\frac{1}{12}}\approx 2{,}73\cdot 10^{-8}$. (Удобно применить лемму Даламбера.)

24. $0>S-S_{10}>-\frac{1}{11!}\approx -2{,}51\cdot 10^{-8}$. (Оценивать удобно с помощью теоремы Лейбница.)

25. $$S-S_{10}=\sum_{n=11}^{\infty}\frac{1}{n^3}<\frac{1}{11^3}+\int_{11}^{+\infty}\frac{dx}{x^3}=\frac{1}{11^3}+\frac{1}{2\cdot 11^2}\approx 0{,}0049.$$

$\left(\text{К ряду } \sum_{n=11}^{\infty}\frac{1}{n^3}=\sum_{m=1}^{\infty}\frac{1}{(m+10)^3}\right.$ мы применили формулу

$\left.\tilde{S}<\tilde{a}_1+\int_1^{\infty}\frac{dt}{(t+10)^3}=a_{11}+\int_{11}^{\infty}\frac{dx}{x^3}, \text{ см. (18.51).}\right)$

Другой способ:

$$\sum_{n=11}^{\infty}\frac{1}{n^3}<\int_{10}^{+\infty}\frac{dx}{x^3}=\frac{1}{2\cdot 10^2}=0{,}005.$$

$$\left(\sum_{n=11}^{\infty}\frac{1}{n^3}=\sum_{k=2}^{\infty}\frac{1}{(k+9)^3}<\int_1^{\infty}\frac{dz}{(z+9)^3}=\int_{10}^{\infty}\frac{dx}{x^3}\right).$$

26. $0>S-S_{10}>-\frac{1}{11^3}\approx -0{,}00075$.

27. $S-S_{10}=\sum_{n=11}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{(n+5)^3}}<\frac{1}{\sqrt{16^3}}+\int_{11}^{+\infty}\frac{dx}{\sqrt{(x+5)^3}}=\frac{1}{64}+\frac{1}{2}\approx$ $\approx 0{,}52$, или

$$S-S_{10}<\int_{10}^{+\infty}\frac{dx}{\sqrt{(x+5)^3}}=\frac{2}{\sqrt{15}}\approx 0{,}52.$$

28. $0>S-S_{10}>-\frac{1}{\sqrt{(11+5)^3}}=-\frac{1}{64}\approx -0{,}016$.

29. Применяем к данному ряду признак Даламбера

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{u_{n+1}(x)}{u_n(x)}\right|=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{x(n+1)}{3(n+2)}\right|=\frac{|x|}{3}.$$

Мы видим, что если $|x|/3<1$, то ряд сходится, если $|x|/3>1$, то — расходится. При $x=\pm 3$ признак Даламбера не дает возможности судить о сходимости или расходимости ряда, поэтому для этих значений x требуется дополнительное исследование. При $x=3$ ряд принимает вид $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n+1}=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\ldots$ Мы видели (см. пример 18.7), что этот ряд расходится. При $x=-3$ мы получаем ряд $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n+1}$. Этот ряд удовлетворяет всем условиям теоремы Лейбница и, стало быть, сходится.

Окончательно получаем, что область сходимости нашего ряда представляет собой промежуток $[-3, 3)$.

30. Ряд сходится, если $-2<x<2$.

31. Область сходимости $[-1, 1]$.

32. Область сходимости $[-1/2, 1/2)$.

33. Ряд сходится при всех x.

34. Ряд сходится только при $x=0$.

35. Область сходимости $[1, 5)$.

36. Область сходимости $[-8, 6]$.

37. Область сходимости $(-3, 3)$.

38. Область сходимости $[-2, 2)$.

39. 1-й способ. Рассчитываем последовательно значения данной функции и ее производных при $x=0$, после чего составляем требуемый отрезок ряда Тейлора — Маклорена:

$$y=\cos\left(x+\frac{\pi}{4}\right),\qquad y(0)=\cos\frac{\pi}{4}=\frac{\sqrt{2}}{2},$$

$$y'=-\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right),\qquad y'(0)=-\sin\frac{\pi}{4}=-\frac{\sqrt{2}}{2},$$

$$y''=-\cos\left(x+\frac{\pi}{4}\right),\qquad y''(0)=-\cos\frac{\pi}{4}=-\frac{\sqrt{2}}{2},$$

. . . .

$$\left(y=y(0)+\frac{y'(0)}{1!}x+\frac{y''(0)}{2!}x^2+\ldots=\frac{\sqrt{2}}{2}\left(1-x-\frac{x^2}{2}+\ldots\right)\right).$$

2-й способ. Разлагаем $\cos\left(x+\frac{\pi}{4}\right)$ по формуле косинуса суммы и используем готовые формулы разложения в ряд для $\sin x$ и $\cos x$

$$\cos\left(x+\frac{\pi}{4}\right)=\cos\frac{\pi}{4}\cos x-\sin\frac{\pi}{4}\sin x=\frac{\sqrt{2}}{2}\cos x-\frac{\sqrt{2}}{2}\sin x=$$

$$=\frac{\sqrt{2}}{2}\left(1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}-\ldots\right)-\frac{\sqrt{2}}{2}\left(x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}-\ldots\right)=$$

$$=\frac{\sqrt{2}}{2}\left(1-x-\frac{x^2}{2!}+\ldots\right).$$

40. $y=x+\frac{x^3}{3}+\frac{2}{15}x^5+\ldots$

41. $y=1-\frac{x^2}{2}+\frac{x^4}{8}+\ldots$

42. $y=x+\frac{1}{6}x^3+\frac{3}{40}x^5+\ldots$

43. $\sin 0{,}5=0{,}5-\frac{0{,}5^3}{3!}+\frac{0{,}5^5}{5!}-\frac{0{,}5^7}{7!}+\ldots$ Сохраняя три первых члена, получаем $\sin 0{,}5\approx 0{,}479427$. Так как отброшенный здесь остаточный ряд — знакочередующийся и первый из отброшенных членов $-\frac{0{,}5^7}{7!}\cong -0{,}00000155$, то полученное нами для $\sin 0{,}5$ значение является его значением с избытком, а погрешность этого результата не превосходит 0,0000016.

44. $e^{0{,}1}=1{,}1050$ (с недостатком), $\Delta<\frac{0{,}1^3}{3!}\frac{1}{1-\frac{1}{40}}\approx 0{,}00017$.

45. $\ln 3=\ln\frac{1+0{,}5}{1-0{,}5}=2\left[0{,}5+\frac{0{,}5^3}{3}+\frac{0{,}5^5}{5}+\frac{0{,}5^7}{7}+\ldots\right]$, откуда, сохраняя три первых члена, получаем $\ln 3\approx 1{,}0958$ (с недостатком), а оценка погрешности дает $\Delta<2\frac{0{,}5^7}{7}\frac{1}{1-0{,}25}\approx 0{,}003$.

46. $\operatorname{arctg} 0{,}2\approx 0{,}197397$ (с избытком); $\Delta<0{,}000002$.

47. Раскладывая $e^{-x^2/2}$ в ряд и интегрируя почленно, получим

$$\int_0^{0,5} e^{-x^2/2}dx=\int_0^{0,5}\left(1-\frac{x^2}{2}+\frac{x^4}{2!\cdot 2^2}-\frac{x^6}{3!\cdot 2^3}+\ldots\right)dx=$$

$$=\left(x-\frac{x^3}{3\cdot 2}+\frac{x^5}{5\cdot 2!\cdot 2^2}-\frac{x^7}{7\cdot 3!2^3}+\ldots\right)\Big|_0^{0,5}=$$

$$=0{,}5-\frac{0{,}5^3}{3\cdot 2}+\frac{0{,}5^5}{5\cdot 2!\cdot 2^2}-\frac{0{,}5^7}{7\cdot 3!2^3}+\ldots,$$

откуда, сохраняя три первых члена, $\int_0^{0,5} e^{-x^2/2}\,dx\approx 0{,}47995$ (с избытком), $\Delta<0{,}00003$.

48. $\int_0^{0,1}\frac{\ln(1+x)}{x}dx\approx 0{,}097611$ (с избытком), $\Delta<0{,}000007$.

49. Приближенное решение $y=1+2(x-1)+3(x-1)^2$. Точное решение $y=e^{x^2-1}$.

50. Приближенное решение $y=2-(x-2)+\frac{1}{2}(x-2)^2$. Точное решение $y=4/x$.

ГЛАВА 19

РЯДЫ ФУРЬЕ

§ 19.1. Обобщенные полиномы и приближение функций «в среднем»

19.1.1. Различные способы оценки «близости» двух функций. Мы начнем эту главу с нескольких замечаний общего характера, относящихся к вопросам приближения, или, как еще говорят, аппроксимации одних функций другими, более «удобными» (с той или иной точки зрения) в данной ситуации.

Рассмотренные в предыдущей главе ряды Тейлора доставляют нам аппарат для приближения (бесконечно дифференцируемых) функций многочленами. Именно, в качестве такого аппроксимирующего многочлена мы брали каждый раз некоторую частичную сумму ряда Тейлора, порожденного приближаемой функцией; иными словами, мы полагали

$$f(x) \approx S_n(x), \tag{19.1}$$

где

$$S_n(x) = f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \ldots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n$$

— многочлен n-й степени.

Как правило, при фиксированном значении n точность приближенного равенства (19.1) тем выше, чем ближе точка x к центру сходимости a. Так, например, для функции e^x и частичной суммы ее ряда Тейлора — Маклорена $S_2(x) = 1 + x + \frac{x^2}{2}$, при $x = 0{,}01$, $x = 0{,}1$, $x = 0{,}5$ и $x = 1$ мы соответственно получаем (на рис. 19.1 кривая

I — график функции $y=e^x$, кривая II — график функции $y=1+x+\frac{x^2}{2}$)

$$e^{0,01}-S_2(0,01)=0,00000017,$$
$$e^{0,1}-S_2(0,1)=0,00017,$$
$$e^{0,5}-S_2(0,5)=0,024,$$
$$e^1-S_2(1)=0,22.$$

Имея в виду именно это резкое улучшение качества аппроксимации при переходе к точкам, близким к a,

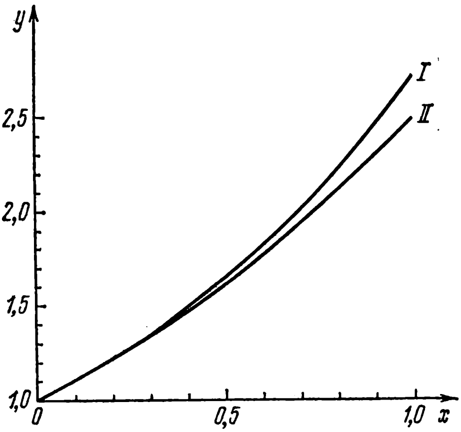


Рис. 19.1.

говорят, что частичные суммы рядов Тейлора представляют собой так называемый аппарат локального приближения.

$S_2(x)$ не является, конечно, единственным из многочленов 2-й степени, который может быть использован для аппроксимации e^x. Так, для приближенного представления e^x на промежутке $[0, 1]$ нередко пользуются и многочленом $P_2(x)=\frac{1}{113}(114+96x+86x^2)$. По сравнению с $S_2(x)$ многочлен $P_2(x)$ совершенно иначе приближает e^x. При значениях x, близких к 0, $S_2(x)$ оказывается гораздо ближе к e^x, нежели $P_2(x)$, однако для других значений x наблюдается обратная картина. Так, при тех же значениях x, что и выше, для разности $e^x - P_2(x)$ получим

$$e^{0,01} - P_2(0,01) = -0,0074,$$
$$e^{0,1} - P_2(0,01) = +0,0029,$$
$$e^{0,5} - P_2(0,5) = 0,0027,$$
$$e^1 - P_2(1) = 0,0103.$$

Приближение e^x посредством многочлена $P_2(x)$ для различных участков отрезка $[0, 1]$ дает, как говорят, величины погрешностей одного порядка. В масштабе рис. 19.1 графики e^x и $P_2(x)$ были бы (над отрезком $[0, 1]$) неразличимы. Максимальная («наихудшая») величина модуля разности $e^x - P_2(x)$ в двадцать с лишним раз меньше, чем такой же максимум для e^x и $S_2(x)$. В подобных случаях говорят, что $P_2(x)$ дает лучшее качество равномерного приближения по сравнению с $S_2(x)$.

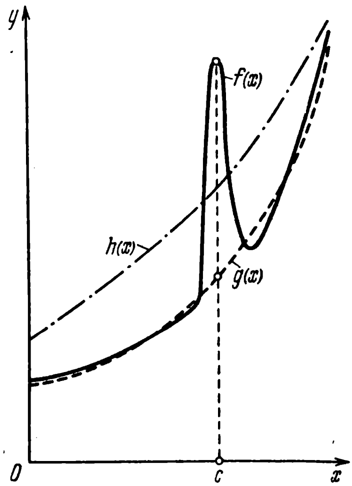


Рис. 19.2.

Рассмотрим еще один пример. На рис. 19.2 дан график функции $f(x)$ и двух ее аппроксимаций $g(x)$ и $h(x)$. Как видно из этого рисунка, почти на всем отрезке $[a, b]$ $g(x)$ гораздо ближе к $f(x)$, чем $h(x)$, однако из-за «пика» $f(x)$ в окрестности точки c $\max|f(x) - g(x)|$ оказывается больше, чем $\max|f(x) - h(x)|$. В таких случаях говорят, что $g(x)$ лучше, чем $h(x)$ приближает $f(x)$ «в среднем» (в то время как лучшее равномерное приближение дает $h(x)$).

Любой из упомянутых способов аппроксимации имеет свои достоинства и недостатки, и в зависимости от решаемых задач в одних случаях нам приходится искать хорошее локальное приближение, в других случаях — равномерное, в третьих — приближение «в среднем». В этой главе у нас пойдет речь об отыскании «наилучших» (в определенном смысле, который мы уточним ниже) приближений функции «в среднем». Мы будем выбирать эту «наилучшую аппроксимацию» из числа так называемых обобщенных полиномов, т. е. функций вида

$$Q_n(x) = \lambda_1\varphi_1(x) + \lambda_2\varphi_2(x) + \ldots + \lambda_n\varphi_n(x), \qquad (19.2)$$

где $\{\varphi_1(x), \varphi_2(x), \ldots, \varphi_n(x), \ldots\}$ — некоторая, заранее заданная система функций. (В частности, если $\varphi_1(x) = 1$, $\varphi_2(x) = x$, $\varphi_3(x) = x^2, \ldots, \varphi_n(x) = x^{n-1}$, то $Q_n(x)$ будет представлять собой обычный полином $(n-1)$-й степени; если $\varphi_1(x) = 1$, $\varphi_2(x) = \sin\omega x$, $\varphi_3(x) = \cos\omega x, \ldots, \varphi_{2n}(x) = \sin n\omega x$, $\varphi_{2n+1}(x) = \cos n\omega x, \ldots$, то $Q_{2n+1}(x)$ будет так называемым *тригонометрическим полиномом* n-й степени).

Определение 19.1. *Пусть $f(x)$ — некоторая функция, а $Q_n(x) = \lambda_1\varphi_1(x) + \ldots + \lambda_n\varphi_n(x)$ — обобщенный полином, построенный по заданной системе функций $\{\varphi_1(x), \varphi_2(x), \ldots, \varphi_n(x), \ldots\}$. Величину*

$$\Delta(f, Q_n) = \sqrt{\frac{1}{b-a}\int_a^b [f(x) - Q_n(x)]^2\,dx} \qquad (19.3)$$

мы будем называть средним квадратическим отклонением полинома $Q_n(x)$ от функции $f(x)$ на отрезке $[a, b]$.

Замечание 19.1. Здесь и далее в этой главе мы не будем специально оговаривать условий, обеспечивающих существование рассматриваемых интегралов. Все эти интегралы наверняка существуют, например, если функции $\varphi_k(x)$ непрерывны, а $f(x)$ имеет на $[a, b]$ разве лишь конечное множество точек разрыва типа скачка (такие функции называют часто «кусочно-непрерывными»). Тот из обобщенных полиномов степени не выше n, для которого величина $\Delta(f, Q_n)$ является наименьшей, мы будем называть *обобщенным полиномом, наименее уклоняющимся в среднем от $f(x)$ на отрезке* $[a, b]$ (среди всех обобщенных полиномов степени не выше n). Этот полином называют также *полиномом наилучшего (в среднем) приближения к $f(x)$*.

19.1.2. Ортогональные и ортонормированные системы функций. Чаще всего в качестве «базы» для построения обобщенных полиномов рассматривают такие системы функций $\{\varphi_1(x), \varphi_2(x), \ldots, \varphi_n(x), \ldots\}$, которые на заданном отрезке $[a, b]$ обладают так называемым *свойством ортогональности*, а именно такие, что для любых, отличных друг от друга функций $\varphi_m(x)$ и $\varphi_k(x)$

$$\int_a^b \varphi_m(x)\,\varphi_k(x)\,dx = 0. \qquad (19.4)$$

Если, кроме того, для каждой $\varphi_m(x)$

$$\int_a^b \varphi_m^2(x)\,dx = 1, \tag{19.5}$$

то такую систему называют *ортонормированной*.

Пример 19.1. Рассмотрим так называемую тригонометрическую систему

$$\{1,\ \sin\omega x,\ \cos\omega x,\ \sin 2\omega x,\ \cos 2\omega x, \ldots$$
$$\ldots,\ \sin n\omega x,\ \cos n\omega x,\ \ldots\}.$$

Наименьшим общим периодом для всех функций этой системы является число $T=2\pi/\omega$. Поэтому обычно ее рассматривают либо на промежутке $[-T/2,\ T/2]$, либо на любом другом промежутке длины T. Покажем, что эта система является ортогональной. Для этого нам надо проверить, что равен 0 каждый из интегралов

$$\int_{-T/2}^{T/2} 1\cdot\sin k\omega x\,dx,\quad \int_{-T/2}^{T/2} 1\cdot\cos k\omega x\,dx,\quad \int_{-T/2}^{T/2} \sin k\omega x\cos m\omega x\,dx$$

и при $m \neq k$

$$\int_{-T/2}^{T/2} \sin k\omega x\sin m\omega x\,dx \quad \text{и} \quad \int_{-T/2}^{T/2} \cos k\omega x\cos m\omega x\,dx.$$

Убедиться в этом можно прямым вычислением каждого из перечисленных интегралов. Действительно, например,

$$\int_{-T/2}^{T/2} \sin k\omega x\sin m\omega x\,dx = \frac{1}{2}\int_{-T/2}^{T/2}\cos(k-m)\,\omega x\,dx -$$
$$-\frac{1}{2}\int_{-T/2}^{T/2}\cos(k+m)\,\omega x\,dx = \frac{1}{2(k-m)\,\omega}\sin(k-m)\,\omega x\Big|_{-T/2}^{T/2} -$$
$$-\frac{1}{2(k+m)\,\omega}\sin(k+m)\,\omega x\Big|_{-T/2}^{T/2} = 0,$$

ибо после выполнения двойной подстановки под знаком синуса получим (с учетом равенства $T=2\pi/\omega$) целые кратные π: $\pm(k-m)\,\pi$ и $\pm(k+m)\,\pi$.

Эта система, однако, не является ортонормальной, ибо

$$\int_{-T/2}^{T/2} 1\cdot dx = T,\quad \int_{-T/2}^{T/2} \sin^2 k\omega x\,dx = \frac{T}{2},\quad \int_{-T/2}^{T/2} \cos^2 k\omega x\,dx = \frac{T}{2}.$$

Поэтому, если мы обязательно хотим иметь дело с ортонормированной системой, нам надо каждую из составляющих ее функций умножить на так называемый *нормирующий множитель*. Полученная после этого система

$$\left\{\frac{1}{\sqrt{T}},\ \sqrt{\frac{2}{T}}\sin\omega x,\ \sqrt{\frac{2}{T}}\cos\omega x,\right.$$

$$\left.\sqrt{\frac{2}{T}}\sin 2\omega x,\ \sqrt{\frac{2}{T}}\cos 2\omega x,\ \ldots\right\} \qquad (19.6)$$

будет уже и ортонормированной. В общем случае вместо множителей $1/\sqrt{T}$ и $\sqrt{2/T}$ нужно будет брать

$$1\Big/\sqrt{\int\limits_a^b \varphi_k^2(x)\,dx}.$$

19.1.3. Обобщенные полиномы наилучшего приближения. Пусть $\{\varphi_1(x),\ \varphi_2(x),\ \ldots,\ \varphi_n(x),\ \ldots\}$ — ортонормированная на $[a, b]$ система; $Q_n(x) = \lambda_1\varphi_1(x) + \ldots + \lambda_n\varphi_n(x)$ — обобщенный полином, а $f(x)$ — заданная на $[a, b]$ функция. Займемся изучением стоящей под знаком радикала в формуле (19.3) величины

$$\int\limits_a^b [f(x) - Q_n(x)]^2\,dx. \qquad (19.7)$$

Прежде всего заметим, что

$$[f(x) - Q_n(x)]^2 = \left[f(x) - \sum_{k=1}^{n} \lambda_k\varphi_k(x)\right]^2 =$$

$$= f^2(x) - 2\sum_{k=1}^{n} \lambda_k f(x)\,\varphi_k(x) + \sum_{k=1}^{n}\sum_{i=1}^{n} \lambda_i\lambda_k\varphi_i(x)\,\varphi_k(x).$$

Проинтегрируем теперь полученное равенство почленно, учитывая при этом соотношения (19.4) и (19.5):

$$\int\limits_a^b [f(x) - Q_n(x)]^2\,dx =$$

$$= \int\limits_a^b f^2(x)\,dx - 2\sum_{k=1}^{n} \lambda_k \int\limits_a^b f(x)\,\varphi_k(x)\,dx + \sum_{k=1}^{n} \lambda_k^2. \qquad (19.8)$$

Для удобства дальнейших выкладок введем обозначение

$$c_k = \int\limits_a^b f(x)\,\varphi_k(x)\,dx. \qquad (19.9)$$

В правой части (19.8) добавим и вычтем выражение $\sum_{k=1}^{n} c_k^2$; тогда получим

$$\int_a^b [f(x)-Q_n(x)]^2\,dx = \int_a^b f^2(x)\,dx - \sum_{k=1}^{n} c_k^2 + \sum_{k=1}^{n} c_k^2 -$$

$$-2\sum_{k=1}^{n} \lambda_k c_k + \sum_{k=1}^{n} \lambda_k^2 = \int_a^b f^2(x) - \sum_{k=1}^{n} c_k^2 + \sum_{k=1}^{n} (c_k-\lambda_k)^2.$$

Отсюда видно, что при фиксированном n наименьшее значение интегралу (19.7), а значит, и величине $\Delta(f,\ Q_n)$ (см. (19.3)) доставляет обобщенный полином

$$Q_n^*(x) = c_1\varphi_1(x) + c_2\varphi_2(x) + \ldots + c_n\varphi_n(x), \qquad (19.10)$$

где $c_1,\ c_2,\ \ldots,\ c_n$ определяются по формуле (19.9). При этом

$$\int_a^b [f(x)-Q_n^*(x)]^2\,dx = \int_a^b f^2(x)\,dx - \sum_{k=1}^{n} c_k^2, \qquad (19.11)$$

$$\Delta(f,\ Q_n^*) = \sqrt{\frac{1}{b-a}\left[\int_a^b f^2(x)\,dx - \sum_{k=1}^{n} c_k^2\right]}. \qquad (19.11')$$

Определение 19.2. *Числа c_k, задаваемые формулами* (19.9), *называются обобщенными коэффициентами Фурье для функции $f(x)$ относительно системы функций $\{\varphi_1(x),\ \varphi_2(x),\ \ldots\}$, а обобщенный полином $Q_n^*(x) = c_1\varphi_1(x) + \ldots + c_n\varphi_n(x)$ — обобщенным полиномом Фурье для $f(x)$ относительно этой же системы функций. Если система $\{\varphi_1(x),\ \varphi_2(x),\ \ldots\}$ бесконечна, то ряд $\sum_{k=1}^{\infty} c_k\varphi_k(x)$ (независимо от того, сходится он или нет и совпадает ли в случае сходимости его сумма с порождающей функцией $f(x)$) называется обобщенным рядом Фурье для $f(x)$.*

19.1.4. Обобщенные ряды Фурье. Пусть система $\{\varphi_1(x),\ \varphi_2(x),\ \ldots\}$ бесконечна. Тогда мы можем составить для нашей функции $f(x)$ ее обобщенный ряд Фурье

$$f(x) \sim \sum_{k=1}^{\infty} c_k\varphi_k(x). \qquad (19.12)$$

Знак $\sim$ мы ставим здесь потому, что в общем случае мы не можем гарантировать не только равенства между левой и правой частью (19.12), но даже и сходимости ряда в обычном смысле этого слова.

Заметим, что частичные суммы этого ряда суть не что иное, как полиномы $Q_n^*(x)$ наилучшего (в среднем) приближения к $f(x)$. Из формул (19.11) и (19.11′) видно, что при увеличении n величина $\Delta(f,\ Q_n^*)$ убывает (оставаясь при этом неотрицательной).

Определение 19.3. *Если*

$$\lim_{n\to\infty} \Delta(f,\ Q_n^*) = 0, \tag{19.13}$$

то говорят, что обобщенный ряд Фурье для $f(x)$ сходится в среднем к порождающей его функции.

Из формулы (19.11) следует, что необходимым и достаточным условием такой сходимости в среднем является справедливость равенства

$$\int_a^b f(x)\,dx = \sum_{k=1}^{\infty} c_k^2. \tag{19.14}$$

(Это равенство называют равенством *Парсеваля* или еще — *уравнением замкнутости.*)

Обычно рассматривают такие ортонормальные системы функций $\{\varphi_1(x),\ \varphi_2(x),\ \ldots\}$, что равенство (19.14) имеет место для каждой кусочно-непрерывной, т. е. имеющей не более чем конечное множество разрывов типа скачка, на $[a,\ b]$ функции $f(x)$. Тогда для каждой такой функции будет иметь место сходимость к ней в среднем порожденного ей ряда Фурье. Примером такой системы может служить тригонометрическая система (19.6).

Заметим, что из сходимости в среднем никоим образом не следует сходимость в обычном смысле. Для обычной сходимости, как правило, требуется выполнение еще некоторых дополнительных условий (применительно к рядам по тригонометрической системе мы ниже сформулируем такие условия). Однако ряды Фурье (и их частичные суммы — полиномы Фурье) с точки зрения инженерно-технических приложений как раз и представляют собой ценность, прежде всего, как аппарат для приближения функций «в среднем»!

§ 19.2. Тригонометрические ряды Фурье

19.2.1. Разложение в тригонометрический ряд Фурье функции, заданной на конечном промежутке. Рассмотрим уже встречавшуюся нам ортонормированную тригонометрическую систему (19.6). Общая формула (19.9) для коэффициентов Фурье применительно к этой системе дает

$$c_1 = \int_{-T/2}^{T/2} f(x)\frac{1}{\sqrt{T}}\cdot 1\cdot dx = \frac{1}{\sqrt{T}}\int_{-T/2}^{T/2} f(x)\,dx,$$

$$c_{2k} = \int_{-T/2}^{T/2} f(x)\sqrt{\frac{2}{T}}\sin k\omega x\,dx = \sqrt{\frac{2}{T}}\int_{-T/2}^{T/2} f(x)\sin k\omega x\,dx,$$

$$c_{2k+1} = \int_{-T/2}^{T/2} f(x)\sqrt{\frac{2}{T}}\cos k\omega x\,dx = \sqrt{\frac{2}{T}}\int_{-T/2}^{T/2} f(x)\cos k\omega x\,dx.$$

Оказывается удобным ввести здесь вспомогательные обозначения

$$a_0 = \frac{2}{\sqrt{T}}c_1,\quad b_k = \sqrt{\frac{2}{T}}c_{2k},\quad a_k = \sqrt{\frac{2}{T}}c_{2k+1}. \qquad (19.15)$$

С учетом этих формул ряд Фурье по тригонометрической системе запишется следующим образом:

$$f(x) \sim c_1\frac{1}{\sqrt{T}} + \sum_{k=1}^{\infty}\left[c_{2k}\left(\sqrt{\frac{2}{T}}\sin k\omega x\right) + c_{2k+1}\left(\sqrt{\frac{2}{T}}\cos k\omega x\right)\right] = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty}(b_k \sin k\omega x + a_k\cos k\omega x), \qquad (19.16)$$

где

$$a_0 = \frac{2}{T}\int_{-T/2}^{T/2} f(x)\,dx,\qquad a_k = \frac{2}{T}\int_{-T/2}^{T/2} f(x)\cos k\omega x\,dx,$$
$$b_k = \frac{2}{T}\int_{-T/2}^{T/2} f(x)\sin k\omega x\,dx. \qquad (19.17)$$

Заметим, что первую из этих формул мы можем рассматривать как частный случай второй (при $k=0$). Именно поэтому в (19.16) свободный член и был записан в виде $a_0/2$.

Как мы уже отмечали, рассматривая общий случай, ряд (19.16), будучи всегда сходящимся к $f(x)$ в среднем, вовсе не обязан сходиться к этой функции в обычном смысле. Однако *если $f(x)$ кусочно-дифференцируема, т. е. если как $f(x)$, так и $f'(x)$ обе кусочно-непрерывны на $[-T/2,\ T/2]$, то в каждой такой внутренней точке этого промежутка, где $f(x)$ непрерывна, ее ряд Фурье будет в обычном смысле сходиться к значению этой функции, а в точках ее разрыва и на концах промежутка сумма ряда будет соответственно равна*

$$\frac{1}{2}[f(x-0)+f(x+0)] \quad \textit{и} \quad \frac{1}{2}\left[f\left(-\frac{T}{2}+0\right)+f\left(\frac{T}{2}+0\right)\right].$$

(Мы здесь примем это утверждение без доказательства.)

19.2.2. Разложение периодических функций. Так как все функции тригонометрической системы (19.6) имеют число T своим периодом, то и сумма тригонометрического ряда Фурье (в том случае, разумеется, когда ряд сходится) тоже будет T-периодичной, хотя бы сам ряд и был построен для функции, заданной только на $[-T/2,\ T/2]$. Пусть теперь функция $f(x)$ определена на всей числовой оси и тоже является T-периодичной. Предположим, что «сужение» этой функции на промежуток $[-T/2,\ T/2]$ представляет собой функцию кусочно-дифференцируемую. Разложив его в (сходящийся, как мы теперь знаем, в обычном смысле этого слова) ряд Фурье, мы тем самым получим формулу

$$f(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{k=1}^{\infty}(b_k \sin k\omega x+a_k \cos k\omega x), \tag{19.18}$$

справедливую не только на $[-T/2,\ T/2]$, но и для каждой такой точки числовой оси, где $f(x)$ непрерывна. Если $f(x)$ задана на промежутке $[a,\ a+T]$, то, продолжая ее на всю числовую ось так, чтобы она оказалась там T-периодической, и разлагая эту «расширенную» функцию в ряд Фурье по системе (19.6), мы тем самым получаем и (действующее на $[a,\ a+T]$) разложение нашей исходной функции.

Отметим еще, что для T-периодической функции в формулах (19.17) интегрирование можно проводить по любому промежутку длиной T. Из-за T-периодичности подынтегральных функций величины этих интегралов не будут зависеть от выбора начальной точки промежутка интегрирования. Если же $f(x)$ первоначально задана на $[a, a+T]$, то для получения ее коэффициентов Фурье мы можем, не прибегая ни к каким T-периодическим продолжениям, сразу проводить интегрирование (в (19.17)) по этому промежутку.

Если T-периодическая функция $f(x)$ является на каком-либо (а тем самым — и на любом) промежутке длиной T кусочно-дифференцируемой, то, как мы знаем, ее ряд Фурье является сходящимся в обычном смысле (или, как еще говорят, «поточечно» сходящимся). Однако эта сходимость может быть весьма медленной. Оказывается (мы здесь примем соответствующие утверждения без доказательства), что скорость этой «поточечной» сходимости зависит от дифференциальных свойств или, как еще говорят, от степени гладкости разлагаемой функции. А именно, *если T-периодическая функция $f(x)$ непрерывна и имеет непрерывные же производные до $(m-1)$-го порядка включительно, а $f^{(m)}(x)$ кусочно-непрерывна на всяком промежутке длиной T, то разность между $f(x)$ и n-й частичной суммой ее ряда Фурье при $n \to \infty$ убывает быстрее, чем $C_\varepsilon \frac{1}{n^{m-\varepsilon}}$, где ε — сколь угодно малое положительное число, а C_ε — некоторая постоянная*

$$|f(x) - Q_n^*(x)| \leqslant \frac{C_\varepsilon}{n^{m-\varepsilon}}.$$

В заключение этого пункта заметим, что формулы (19.17) могут быть формальным образом получены из равенства (19.18) его почленным умножением соответственно на 1, $\cos k\omega x$ и $\sin k\omega x$ с последующим интегрированием по промежутку $[-T/2, T/2]$. Однако это замечание здесь следует рассматривать лишь как возможный прием для уяснения формальной стороны дела, ибо такое почленное интегрирование далеко не всегда является «законной» математической операцией. Кроме того, при таком подходе мы прошли бы мимо важнейшего свойства отрезков ряда Фурье — быть тригонометрическими полиномами наилучшего приближения в среднем!

19.2.3. Разложение в ряды только по синусам и только по косинусам. Если T-периодическая или заданная на $[-T/2, T/2]$ функция $f(x)$ является нечетной: $f(-x) =$

$= -f(x)$, то $f(x)\cos k\omega x$ представляет собой снова нечетную функцию, а $f(x)\sin k\omega x$ — четную

$$f(-x)\cos k\omega(-x) = -f(x)\cos k\omega x,$$
$$f(-x)\sin k\omega(-x) = f(x)\sin k\omega x.$$

Учитывая, что интеграл, взятый от нечетной функции по симметричному относительно начала координат промежутку, равен 0, а для такого же интеграла от четной функции справедливо равенство

$$\int_{-a}^{a}\psi(x)\,dx = 2\int_{0}^{a}\psi(x)\,dx,$$

мы можем переписать для этого случая формулы (19.17) следующим образом:

$$a_0 = a_k = 0, \quad b_k = \frac{4}{T}\int_{0}^{T/2} f(x)\sin k\omega x\,dx. \qquad (19.17')$$

Аналогично для коэффициентов Фурье T-периодической или заданной на $[-T/2, T/2]$ четной функции имеем

$$a_0 = \frac{4}{T}\int_{0}^{T/2} f(x)\,dx, \quad a_k = \frac{4}{T}\int_{0}^{T/2} f(x)\cos k\omega x\,dx, \quad b_k = 0. \qquad (19.17'')$$

Таким образом, если T-периодическая или заданная на $[-T/2, T/2]$ функция $f(x)$ является нечетной, то ее ряд Фурье будет содержать только члены с $\sin k\omega x$, а если $f(x)$ — четная, то этот ряд, кроме свободного члена, будет включать в себя только члены с косинусами.

Пусть теперь $f(x)$ задана только на промежутке $(0, T/2]$. Доопределяя ее на $[-T/2, 0]$ по формуле $f_н(x) = -f(-x)$ и полагая $f_н(0) = 0$, мы получим нечетную функцию $f_н(x)$. Построим теперь для $f_н(x)$ тригонометрический ряд Фурье. Он, очевидно, будет содержать только члены с синусами. Если на $[-T/2, T/2]$ будет

$$f_н(x) = \sum_{k=1}^{\infty} b_k \sin k\omega x,$$

то, очевидно, на $(0, T/2)$, где $f_н(x) \equiv f(x)$, получим и

$$f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} b_k \sin k\omega x, \qquad (19.19')$$

т. е. $f(x)$ окажется разложенной в ряд только по синусам. Если же доопределим $f(x)$ на $[-T/2, 0)$ «четным образом»: $f_ч(x)=f(-x)$, то таким же образом придем к разложению

$$f(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos k\omega x. \qquad (19.19'')$$

Так как коэффициенты рядов из (19.19′) и (19.19″) могут быть рассчитаны по формулам (19.17′) и (19.17″), а в этих последних фигурируют интегралы только по промежутку $[0, T/2]$, то безразлично, будем ли мы здесь использовать «продолженные» функции $f_н(x)$ и $f_ч(x)$, или же — непосредственно исходную функцию $f(x)$. Ведь на $(0, T/2]$ все эти функции совпадают друг с другом!

Можно было бы и по-другому подойти к вопросу о разложении функций, заданных на $[0, T/2]$, в ряды только по синусам и только по косинусам. А именно, система функций $\{\sin\omega x, \sin 2\omega x, \sin 3\omega x, \ldots\}$ является ортогональной на $[0, T/2]$, Действительно, при $k \neq m$

$$\int_0^{T/2} \sin k\omega x \sin m\omega x\, dx =$$

$$= \frac{1}{2}\int_0^{T/2} [\cos(k-m)\omega x - \cos(k+m)\omega x]\, dx =$$

$$= \left[\frac{1}{2(k-m)\omega}\sin(k-m)\omega x - \frac{1}{2(k+m)\omega}\sin(k+m)\omega x\right]\Bigg|_0^{T/2} = 0,$$

ибо при выполнении двойной подстановки (с учетом равенства $T=2\pi/\omega$) мы получаем под знаками синусов целые кратные π. В связи с тем, что интегрирование здесь проводится по промежутку $[0, T/2]$, нормирующий множитель здесь, в отличие от полной тригонометрической системы, будет равен $2/\sqrt{T}$. Действительно,

$$\int_0^{T/2} \sin^2 k\omega x\, dx = \frac{1}{2}\int_0^{T/2} (1-\cos 2k\omega x)\, dx = \frac{T}{4}.$$

Получающаяся ортонормированная система

$$\left\{\frac{2}{\sqrt{T}}\sin\omega x, \ \frac{2}{\sqrt{T}}\sin 2\omega x, \ \frac{2}{\sqrt{T}}\sin 3\omega x, \ \ldots\right\} \qquad (19.20')$$

также обладает тем свойством, что уравнение замкнутости (19.14) оказывается выполненным для любой кусочно-непрерывной на $[0, T/2]$ функции. Следовательно, и здесь, независимо от того, имеет или нет место «поточечная сходимость», ряд обязательно будет сходиться в среднем к порождающей его функции.

Аналогичным образом обстоит дело и с разложениями в ряды по функциям системы

$$\left\{ \sqrt{\frac{2}{T}},\ \frac{2}{\sqrt{T}}\cos\omega x,\ \frac{2}{\sqrt{T}}\cos 2\omega x,\ \ldots \right\}. \quad (19.20'')$$

19.2.4. Примеры разложения функций в тригонометрические ряды Фурье.

Пример 19.2. Пусть функция $f(x)$ такова, как это показано на рис. 19.3. Разложить ее в ряд Фурье.

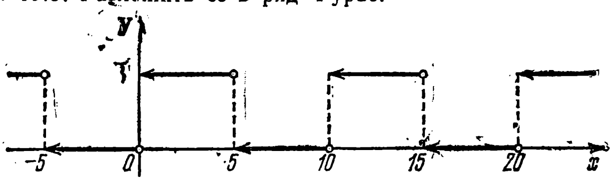


Рис. 19.3.

Поскольку период ее равен 10, то для вычисления коэффициентов Фурье достаточно будет выписать ее аналитическое выражение на каком-либо промежутке длины 10. Имеем $T=10$, $\omega=2\pi/10=$ $=\pi/5$,

$$f(x)=\begin{cases} 0, & \text{если } x\in(-5,\ 0], \\ 1, & \text{если } x\in(0,\ 5], \end{cases}$$

тогда (мы применяем формулы (19.17))

$$a_0=\frac{2}{10}\int_{-5}^{5} f(x)\,dx=\frac{1}{5}\int_{-5}^{0} 0\cdot dx+\frac{1}{5}\int_{0}^{5} 1\cdot dx=1,$$

$$a_k=\frac{2}{10}\int_{-5}^{5} f(x)\cos\left(k\frac{\pi}{5}x\right)dx=\frac{1}{5}\int_{-5}^{0} 0\cdot\cos\left(k\frac{\pi}{5}x\right)dx+$$

$$+\frac{1}{5}\int_{0}^{5} 1\cdot\cos\left(k\frac{\pi}{5}x\right)dx=\frac{1}{\pi k}\sin\frac{k\pi x}{5}\Bigg|_0^5=0,$$

$$b_k=\frac{2}{10}\int_{-5}^{5} f(x)\sin\left(k\frac{\pi}{5}x\right)dx=\frac{1}{5}\int_{-5}^{0} 0\cdot\sin\left(k\frac{\pi}{5}x\right)dx+$$

$$+\frac{1}{5}\int_{0}^{5} 1\cdot\sin\left(k\frac{\pi}{5}x\right)dx=-\frac{1}{\pi k}\cos\frac{k\pi x}{5}\Bigg|_0^5=\frac{1}{\pi k}\left[1-(-1)^k\right].$$

Мы видим, что b_k с четными номерами все равны 0, а для b_k с нечетными номерами будет $b_k = 2/\pi k$. Поэтому

$$f(x) = \frac{1}{2} + \frac{2}{\pi} \sin \frac{\pi x}{5} + \frac{2}{3\pi} \sin \frac{3\pi x}{5} + \frac{2}{5\pi} \sin \frac{5\pi x}{5} + \ldots =$$

$$= \frac{1}{2} + \frac{2}{\pi} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{2m-1} \sin \frac{(2m-1)\pi x}{5}.$$

(Знак равенства между функцией и ее рядом Фурье мы здесь имеем право поставить потому, что наша функция является кусочно-дифференцируемой на $[-5, 5]$. Это равенство будет иметь место везде, кроме точек вида $x = 5l$, где l — целое.)

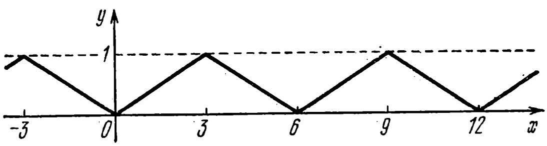


Рис. 19.4.

Пример 19.3. Построим ряд Фурье для функции, изображенной на рис. 19.4.

Ее период T равен 6, следовательно, $\omega = 2\pi/6 = \pi/3$. Кроме того, эта функция является четной, следовательно, ее ряд Фурье будет содержать только свободный член и члены с косинусами, и коэффициенты a_k мы можем искать по формулам (19.17″). На промежутке $[0, 3]$ имеем $f(x) = x/3$, следовательно,

$$a_0 = \frac{4}{6} \int_0^3 \frac{x}{3}\, dx = \frac{2}{9} \frac{x^2}{2} \Big|_0^3 = 1,$$

$$a_k = \frac{4}{6} \int_0^3 \frac{x}{3} \cos \frac{k\pi x}{3}\, dx = \frac{2}{9} \int_0^3 x\, d\left(\frac{3}{k\pi} \sin \frac{k\pi x}{3} \right) = \frac{2}{9} x \frac{3}{k\pi} \sin \frac{k\pi x}{3} \Big|_0^3 -$$

$$- \frac{2}{3k\pi} \int_0^3 \sin \frac{k\pi x}{3}\, dx = \frac{2}{3k\pi} \frac{3}{k\pi} \cos \frac{k\pi x}{3} \Big|_0^3 = \frac{2}{(k\pi)^2} [(-1)^k - 1].$$

Если $k = 2m$, то $a_k = 0$, а при $k = 2m-1$ будет $a_k = -4/(k\pi)^2$. Поэтому

$$f(x) = \frac{1}{2} - \frac{4}{\pi^2} \left(\cos \frac{\pi x}{3} + \frac{1}{9} \cos \frac{3\pi x}{3} + \frac{1}{25} \cos \frac{5\pi x}{3} + \ldots \right) =$$

$$= \frac{1}{2} - \frac{4}{\pi^2} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{(2m-1)^2} \cos \frac{(2m-1)\pi x}{3}.$$

(И здесь в силу кусочной дифференцируемости $f(x)$ вместо знака соответствия ($\sim$) мы можем писать знак равенства. Так как $f(x)$ всюду непрерывна, то это равенство будет справедливо при всех x.)

ВОПРОСЫ ДЛЯ ПОВТОРЕНИЯ К ГЛАВЕ 19

1. Охарактеризуйте известные вам различные подходы к оценке «меры близости» двух функций. Поясните свой ответ примерами.

2. Что называется обобщенным полиномом, построенным по заданной системе функций $\{\varphi_1(x), \varphi_2(x), \varphi_3(x), \ldots\}$?

3. В каком случае систему функций $\{\varphi_1(x), \varphi_2(x), \varphi_3(x), \ldots\}$ называют ортогональной на отрезке $[a, b]$? ортонормированной на этом отрезке? Приведите примеры.

4. Что такое обобщенный полином, наименее уклоняющийся в среднем от заданной функции (на данном отрезке $[a, b]$)? Как еще называют такие полиномы?

5. Что такое обобщенные коэффициенты Фурье, обобщенный полином Фурье, обобщенный ряд Фурье для заданной функции? В чем состоит характеристическое свойство обобщенных полиномов Фурье?

6. Что значит, что обобщенный ряд Фурье сходится в среднем к порождающей его функции? В чем состоит необходимое и достаточное условие такой сходимости? Следует ли из сходимости в среднем обычная («поточечная») сходимость при каждом значении x?

7. Запишите в общем виде тригонометрический ряд Фурье. По каким формулам можно вычислять его коэффициенты? Приведите пример.

8. По каким формулам можно находить коэффициенты Фурье периодической функции и функции, заданной на промежутке $[a, a+T]$?

9. При каких условиях тригонометрический ряд Фурье будет сходиться в обычном смысле при каждом значении x? Чему при этом будет равна его сумма:

а) в такой точке из $(-T/2, T/2)$, где порождающая ряд функция непрерывна? б) в точке разрыва порождающей функции, если эта точка лежит внутри промежутка $(-T/2, T/2)$? в) в точках $\pm T/2$?

10. Как зависит скорость «поточечной сходимости» тригонометрического ряда Фурье от степени гладкости порождающей его функции?

11. Какие особенности имеют ряды Фурье для четных и нечетных функций?

12. Каким образом осуществляется разложение функций в ряды только по синусам и только по косинусам? Приведите примеры.

УПРАЖНЕНИЯ К ГЛАВЕ 19

В примерах 1—4 требуется проверить, будут ли данные функции ортогональными друг другу на указанном отрезке.

1. $\varphi_1(x) = x+1, \quad \varphi_2(x) = x^2 - x$ на отрезке $[-1, 1]$.

2. $\varphi_1(x) = x+1, \quad \varphi_2(x) = x^2 - x$ на отрезке $[0, 1]$.

3. $\varphi_1(x) = \dfrac{e^x - e^{-x}}{2}, \quad \varphi_2(x) = \dfrac{e^x + e^{-x}}{2}$ на отрезке $[-1, 1]$.

4. $\varphi_1(x) = \sin x, \quad \varphi_2(x) = \sin 2x$ на отрезке $[-\pi, \pi]$.

5. Одним из примеров ортогональной на промежутке $[-1, 1]$ системы является *система полиномов Лежандра* $\{P_n(x)\}$ $(n = 0, 1, 2, 3, \ldots)$, где $P_n(x) = \dfrac{1}{2^n n!} \dfrac{d^n}{dx^n}[(x^2 - 1)^n]$. Найдите по этой формуле $P_0(x)$, $P_1(x)$ и $P_2(x)$ и непосредственным вычислением интегралов убедитесь в их ортогональности. Покажите также, что эта система не будет ортонормированной.

6. Покажите, что система функций 1, $\cos x$, $\cos 2x$, $\cos 3x$, ... будет ортогональной как на отрезке $[0, \pi]$, так и на отрезке $[-\pi, \pi]$. Подберите для этих функций множители μ'_k и μ''_k так, чтобы система μ'_0, $\mu'_1 \cos x$, $\mu'_2 \cos 2x$, $\mu'_3 \cos 3x$, ... оказалась ортонормированной на $[0, \pi]$, а система μ''_0, $\mu''_1 \cos x$, $\mu''_2 \cos 2x$, $\mu''_3 \cos 3x$, ... на $[-\pi, \pi]$.

7. Разложите в тригонометрический ряд Фурье функцию, представленную на рис. 19.5.

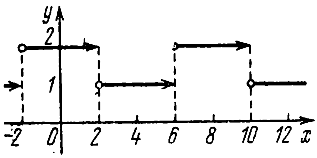


Рис. 19.5.

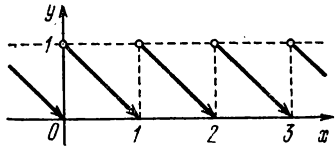


Рис. 19.6.

8. Разложите в тригонометрический ряд Фурье функцию, чей график дан на рис. 19.6.

Каждую из функций, задаваемых в упражнениях 9—12, требуется разложить в ряд Фурье на указанном промежутке. Построить графики данных функций и сумм их рядов Фурье.

9. $f(x) = 2 - x$ на $[-2, 2]$. 10. $f(x) = 2 - x$ на $[0, 2]$.

11. $f(x) = \begin{cases} 10, & \text{если } -10 \leqslant x < 0, \\ 10 - x, & \text{если } 0 \leqslant x \leqslant 10, \end{cases}$ на $[-10, 10]$.

12. $f(x) = |x|$ на $[-\pi, \pi]$.

В каждом из упражнений 13—15 дается функция и промежуток вида $[0, a]$. Требуется:

а) разложить данную функцию в ряд только по синусам;

б) разложить данную функцию в ряд только по косинусам;

в) разложить данную функцию в ряд Фурье с периодом $T = a$.

13. $f(x) = 5$ на $[0, 5]$. 14. $f(x) = x$ на $[0, \pi]$. 15. $f(x) = 4 - x$ на $[0, 4]$.

ОТВЕТЫ, УКАЗАНИЯ И РЕШЕНИЯ К ГЛАВЕ 19

1. Вычисляя $\int\limits_{-1}^{1} \varphi_1(x) \varphi_2(x)\, dx$, мы убеждаемся, что он равен 0.

Значит, $\varphi_1(x)$ и $\varphi_2(x)$ ортогональны на отрезке $[-1, 1]$.

2. На отрезке $[0, 1]$ данные функции не ортогональны.

3. Функции ортогональны.

4. Функции ортогональны.

5. $P_0(x) = \frac{1}{2^0 \cdot 0!}(x^2 - 1)^0 = 1$ (напомним, что 0! полагают равным 1),

$P_1(x) = \frac{1}{2^1 \cdot 1!} \frac{d}{dx}[(x^2 - 1)^1] = x$, $P_2(x) = \frac{1}{2^2 \cdot 2!} \frac{d^2}{dx^2}[(x^2 - 1)^2] = \frac{1}{2}(3x^2 - 1)$.

Вычисляя $\int\limits_{-1}^{1} P_0(x) P_1(x)\,dx$, $\int\limits_{-1}^{1} P_0(x) P_2(x)\,dx$ и $\int\limits_{-1}^{1} P_1(x) P_2(x)\,dx$, убеждаемся, что функции $P_0(x)$, $P_1(x)$ и $P_2(x)$ попарно ортогональны, а каждый из $\int\limits_{-1}^{1} P_0^2(x)\,dx$, $\int\limits_{-1}^{1} P_1^2(x)\,dx$ и $\int\limits_{-1}^{1} P_2^2(x)\,dx$ отличен от 1. Это означает, что данная система не является ортонормированной.

6. Для доказательства ортогональности системы на отрезке $[0, \pi]$ надо показать, что равен нулю каждый из интегралов

$$\int\limits_{0}^{\pi} 1\cdot\cos mx\,dx, \quad \int\limits_{0}^{\pi} \cos mx \cos nx\,dx \qquad (m,\ n=1,\ 2,\ 3,\ \ldots;\ m\neq n).$$

Аналогично для отрезка $[-\pi, \pi]$ вычисления дают

$$\mu_0'=\frac{1}{\sqrt{\pi}},\quad \mu_1'=\mu_2'=\ldots=\sqrt{\frac{2}{\pi}},\quad \mu_0''=\frac{1}{\sqrt{2\pi}},\quad \mu_1''=\mu_2''=\ldots=\frac{1}{\sqrt{\pi}}.$$

7. Как это легко усматривается из чертежа, данная функция имеет период $T=8$. Поэтому при нахождении коэффициентов a_n и b_n мы можем проводить интегрирование по любому промежутку, длина которого равна 8. В качестве такого промежутка здесь удобно взять отрезок $[-2, 6]$. Так как $T=8$, то $\omega=\pi/4$. Запишем аналитическое выражение для данной функции на этом промежутке

$$f(x)=\begin{cases} 2, & \text{если} \quad -2\leqslant x<2, \\ 1, & \text{если} \quad 2\leqslant x<6, \end{cases}$$

после чего вычислим коэффициенты разложения

$$a_0=\frac{2}{8}\int\limits_{-2}^{6} f(x)\,dx=\frac{1}{4}\int\limits_{-2}^{2} 2\,dx+\frac{1}{4}\int\limits_{2}^{6} 1\,dx=3,$$

$$a_k=\frac{2}{8}\int\limits_{-2}^{6} f(x)\cos\frac{k\pi x}{4}\,dx=\frac{1}{4}\int\limits_{-2}^{2} 2\cos\frac{k\pi x}{4}\,dx+\frac{1}{4}\int\limits_{2}^{6} 1\cos\frac{k\pi x}{4}\,dx=$$

$$=\frac{4}{k\pi}\sin\frac{k\pi}{2}+\frac{1}{k\pi}\left(\sin\frac{3k\pi}{2}-\sin\frac{k\pi}{2}\right)=$$

$$=\begin{cases} 0, & \text{если} \quad k=2m, \\ \dfrac{2}{(2m-1)\pi}(-1)^{m-1}, & \text{если} \quad k=2m-1, \end{cases}$$

$$b_k=\frac{2}{8}\int\limits_{-2}^{6} f(x)\sin\frac{k\pi x}{4}\,dx=\frac{1}{4}\int\limits_{-2}^{2} 2\sin\frac{k\pi x}{4}\,dx+\frac{1}{4}\int\limits_{2}^{6} 1\sin\frac{k\pi x}{4}\,dx=0.$$

Так как данная функция является кусочно-дифференцируемой, то мы можем поставить знак равенства между $f(x)$ и суммой ее ряда Фурье

$$f(x)=\frac{3}{2}+\frac{2}{\pi}\sum_{m=1}^{\infty}\frac{(-1)^{m-1}}{2m-1}\cos\frac{(2m-1)\pi x}{4}.$$

При $x=2+4l$ $(l=0, \pm 1, \pm 2, \ldots)$ сумма ряда равна 3/2.

8. $f(x)=\frac{1}{2}+\frac{1}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k}\sin 2k\pi x$. (При $x=0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \ldots$ сумма ряда равна 1/2.)

9. $f(x)=2+\frac{4}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^k}{k}\sin\frac{k\pi x}{2}$. (При $x=\pm 2, \pm 6, \pm 10, \pm 14, \ldots$ сумма ряда равна 2.)

10. $f(x)=1+\frac{2}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k}\sin k\pi x$. (При $x=0, \pm 2, \pm 4, \pm 6, \ldots$ сумма ряда равна 1.)

11. $f(x)=\frac{15}{2}+\frac{10}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty}\left\{\frac{[1-(-1)^k]}{\pi k^2}\cos\frac{k\pi x}{10}+\frac{(-1)^k}{k}\sin\frac{k\pi x}{10}\right\}$.

(При $x=\pm 10, \pm 30, \pm 50, \pm 70, \ldots$ сумма ряда равна 5.)

12. $f(x)=\frac{\pi}{2}-\frac{4}{\pi}\sum_{m=1}^{\infty}\frac{1}{(2m-1)^2}\cos(2m-1)x$. При нахождении разложения следует использовать четность функции $f(x)$.

13. а) $f(x)=\frac{10}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1-(-1)^k}{k}\sin\frac{k\pi x}{5}=\frac{20}{\pi}\sum_{m=1}^{\infty}\frac{1}{2m-1}\sin\frac{(2m-1)\pi x}{5}$.

(При $x=0, \pm 5, \pm 10, \pm 15, \ldots$ сумма ряда равна 0.) б) $f(x)=5$ (все остальные коэффициенты равны 0). в) $f(x)=5$.

14. а) $f(x)=2\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^{k+1}}{k}\sin kx$. (При $x=\pm\pi, \pm 3\pi, \pm 5\pi, \pm 7\pi, \ldots$ сумма ряда равна 0.) б) $f(x)=\frac{\pi}{2}+\frac{2}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^k-1}{k^2}\cos kx=$

$=\frac{\pi}{2}-\frac{4}{\pi}\sum_{m=1}^{\infty}\frac{1}{(2m-1)^2}\cos(2m-1)x$. в) $f(x)=\frac{\pi}{2}-\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k}\sin 2kx$.

15. а) $f(x)=\frac{8}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k}\sin\frac{k\pi x}{4}$.

б) $f(x)=2+\frac{16}{\pi^2}\sum_{m=1}^{\infty}\frac{1}{(2m-1)^2}\cos\frac{(2m-1)\pi x}{4}$.

в) $f(x)=2+\frac{4}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k}\sin\frac{k\pi x}{2}$.

ГЛАВА 20

ЭЛЕМЕНТЫ КОМБИНАТОРИКИ

§ 20.1. Упорядоченные выборки. Перестановки и сочетания

20.1.1. Вводные замечания. При решении многих прикладных задач приходится сталкиваться с проблемами, относящимися к совершению тех или иных операций, установлению соотношений, группировке и т. п. над элементами тех или иных конечных множеств. Примерами здесь могут служить планирование очередности выполнения отдельных работ из некоторого их комплекса, рациональный выбор компонент и структуры той или иной системы, определение оптимальной последовательности поверочных (тестовых) испытаний для сложных технических объектов и т. д. Несмотря на то, что объект исследования здесь конечен, многие из возникающих проблем и способов их решения отнюдь не являются элементарными. Ветвь математики, занимающуюся этим кругом вопросов, называют часто конечной математикой. Одним из разделов этой ветви является комбинаторика, с начальными понятиями которой мы и познакомимся в этой главе. Поскольку здесь нам довольно часто придется указывать количество элементов того или иного множества, мы условимся употреблять термин n-множество для обозначения множества, состоящего ровно из n элементов. Такие же обороты мы будем употреблять и в тех случаях, когда речь будет идти о подмножествах, конечных последовательностях и т. п. В этом же смысле мы будем употреблять выражения типа: «объем множества равен n». Эти соглашения помогут нам избежать громоздких оборотов речи.

20.1.2. Упорядоченные выборки и перестановки. Определение 20.1. *Пусть Q — некоторое n-множество, а $W = \{q_1, q_2, \ldots, q_m\}$ — m-последовательность,* *составленная из элементов Q (не обязательно различных). Тогда W называется упорядоченной m-выборкой из n-множества Q.*

Если некоторый элемент $q \in Q$ встречается в качестве члена выборки W ровно k раз, то говорят, что кратность q относительно W равна k.

Множество Q_W, состоящее из тех (и только тех) элементов Q, кратность которых относительно W не меньше 1, будем называть элементной базой W.

Если кратность каждого из элементов Q_W в точности равна 1, то выборка W называется m-перестановкой из элементов Q.

Поясним только что введенные понятия на следующем примере.

Пример 20.1. Пусть Q состоит из десятичных цифр 0, 1, 2,..., 9. Так как общее число элементов Q равно 10, то мы можем назвать Q 10-множеством или сказать, что объем Q равен 10.

Примерами 7-выборок из Q могут служить последовательности $W_1=\{2, 7, 1, 1, 2, 9, 2\}$, $W_2=\{3, 5, 8, 4, 0, 1, 7\}$. Цифра 7 по отношению к каждой из этих выборок имеет кратность 1 (в каждой из них она встречается ровно один раз), кратность цифры 6 и в том и в другом случае равна нулю (эта цифра не встречается ни в W_1, ни в W_2). Цифра 2 по отношению к W_1 имеет кратность 3, а по отношению к W_2 ее кратность равна 0.

Элементная база W_1 состоит из цифр 1, 2, 7, 9 ($Q_{W_1}=\{1, 2, 7, 9\}$), элементная база W_2 — из цифр 0, 1, 3, 4, 5, 7, 8 ($Q_{W_2}=\{0, 1, 3, 4, 5, 7, 8\}$). Так как кратность относительно W_2 каждого из элементов, составляющих Q_{W_2}, равна 1, то W_2 мы вправе назвать 7-перестановкой из элементов Q. Выборка W_1 не является перестановкой, так как Q_{W_1} содержит элементы, кратность которых по отношению к W_1 больше 1.

Во многих случаях оказывается необходимым умение найти общее число различных между собой выборок того или иного типа, которые могут быть составлены из элементов данного множества. Ответ на некоторые из таких вопросов дает следующая.

Теорема 20.1. *Количество различных упорядоченных m-выборок из n-множества Q равно n^m. Количество различных m-перестановок из элементов такого множества равно $n(n-1)(n-2)\ \ldots\ (n-m+1)$.*

Доказательство. Пусть Q — n-множество. Будем обозначать множество всевозможных k-выборок из Q через S_k, а объем S_k — через $V(n, k)$. Очевидно, что

$$V(n, 1)=n. \tag{20.1}$$

Допустим, что формула

$$V(n, k)=n^k \tag{20.2}$$

справедлива для каждого натурального k, строго меньшего, чем m, и покажем, что тогда она справедлива и для $k=m$.

Действительно, разобьем S_m на классы, относя в каждый из них такие выборки $\{q_1, q_2, \ldots, q_{m-1}, q_m\}$, которые отличаются друг от друга только своим последним членом. Очевидно, что таких классов будет столько же, сколько элементов в S_{m-1}, т. е. $V(n, m-1)$. В то же время каждый из этих классов будет состоять ровно из n элементов, ибо ровно столько различных значений может принимать q_m. Так как, кроме того, одна и та же выборка из S_m не может входить в два разных класса, то общее число всех таких выборок будет равно $V(n, m-1)\cdot n$. Отсюда, учитывая, что по индуктивному предположению $V(n, m-1)=n^{m-1}$, мы и получаем $V(n, m)=n^{m-1}n=n^m$. Согласно принципу математической индукции мы заключаем, что формула (20.2) верна для любого натурального k.

Докажем теперь второе из утверждений теоремы. Заметим предварительно, что здесь нам достаточно рассмотреть те случаи, когда $m\leqslant n$, ибо для $m>n$ это утверждение очевидно. (На самом деле, если $m>n$, то m-перестановок из элементов n-множества составить нельзя, но в этом же случае обращается в 0 и произведение $n(n-1)\ldots(n-m+1)$, ибо один из его сомножителей есть 0.) Пусть T_k — множество всех k-перестановок из элементов n-множества Q. Обозначим объем T_k через $P(n, k)$. Формула

$$P(n, k)=n(n-1)\ldots(n-k+1) \tag{20.3}$$

при $k=1$, как нетрудно видеть, верна. Предположим, что она справедлива при всех $k<m$, и покажем, что из этого предположения следует ее справедливость и для $k=m$.

Так же, как и при доказательстве первой части теоремы, разобьем T_m на классы, объединяя в каждом из них все перестановки $\{q_1, q_2, \ldots, q_{m-1}, q_m\}$, отличающиеся друг от друга только последним членом. Таких классов будет ровно столько, сколько существует различных $(m-1)$-перестановок, т. е. $P(n, m-1)$. В каждом из этих классов будет теперь уже $(n-m+1)$ элементов, ибо в качестве члена q_m могут фигурировать только те из элементов Q, которые еще не использованы в качестве «значений» для $q_1, q_2, \ldots, q_{m-1}$. Так как каждая из перестановок входит в один и только один класс, то общее их число представляет собой произведение количества классов на объем каждого из этих классов:

$$P(n, m) = P(n, m-1)(n-m+1).$$

Так как, согласно индуктивному предположению,

$$P(n, m-1) = n(n-1)\ldots[n-(m-1)+1] = \\ = n(n-1)\ldots(n-m+2),$$

то

$$P(n, m) = n(n-1)\ldots(n-m+2)(n-m+1).$$

Справедливость формулы (20.3) доказана.

Отметим еще, что, умножая и деля правую ее часть (при $k \leqslant n$) на $(n-k)(n-k-1)\ldots 2\cdot 1 = (n-k)!$, мы можем записать ее и в виде

$$P(n, k) = \frac{n!}{(n-k)!}. \tag{20.4}$$

Если $n = k$, то формула (20.3) принимает вид

$$P(n, n) = n! \tag{20.5}$$

Заметим, что в силу известного нам соглашения: считать 0! равным 1, формула (20.4) остается справедливой и при $k = n$.

20.1.3. Сочетания. Существует определенный круг вопросов, где порядок следования членов выборки не играет роли. В этих случаях естественно не делать различия между двумя такими упорядоченными выборками, каждая из которых может быть получена из другой посредством перестановки ее членов. Очевидно, что для этого необходимо и достаточно, чтобы у этих двух выборок не только совпала элементная база, но и чтобы кратность каждого из ее элементов относительно той и другой выборки была одинаковой. Отождествляя упорядоченные выборки между собой по этому признаку, мы приходим к понятию неупорядоченной выборки. Мы дальше будем рассматривать только такие неупорядоченные выборки, что кратность любого из составляющих их элементов равна 1. Такие выборки называются *сочетаниями*. Очевидно, что всякое сочетание полностью определяется его элементной базой. Поэтому понятие сочетания из элементов множества Q по существу не отличается от понятия подмножества множества Q.

Пример 20.2. Пусть Q состоит из всех букв латинского алфавита, и пусть $W_1=\{a, b, a\}$, $W_2=\{a, a, b\}$, $W_3=\{a, b, b\}$. Рассматривая эти выборки с учетом порядка следования их элементов, мы заключаем, что все они различны. Если же мы не будем учитывать порядок, то W_1 и W_2 сделаются тождественными друг другу, однако будут отличаться от W_3, хотя все они имеют одинаковую элементную базу. Ни одна из этих выборок не представляет собой сочетания, ибо в каждом случае у нас здесь оказывается элемент, кратность которого больше 1.

Примерами сочетаний могут служить $W_4=\{a, b, c\}$, $W_5=\{b, c, a\}$, $W_6=\{a, b, d\}$, причем, если эти выборки рассматриваются как неупорядоченные, то $W_4=W_5$.

Теорема 20.2. *При $0\leqslant m\leqslant n$ число различных m-сочетаний из элементов n-множества равно* $\frac{n!}{m!\,(n-m)!}$.

Доказательство. Пусть Q — некоторое n-множество. Обозначим через M_m множество всех его m-подмножеств, а через $C(n, m)$ — объем M_m. Составляя для каждого из этих m-подмножеств всевозможные m-перестановки из его элементов, мы получим тем самым множество всех m-перестановок из элементов Q. Так как число различных m-перестановок из элементов любого m-множества $Q'\in M_m$, согласно формуле (20.5), равно $m!$, то для общего числа различных m-перестановок получаем

$$P(n, m)=C(n, m)\,m!.$$

Сопоставляя эту формулу с формулой (20.4), получаем

$$C(n, m)=\frac{n!}{m!\,(n-m)!}. \qquad (20.6)$$

Сокращая правую часть (20.6) на $(n-m)!$, получим

$$C(n, 0)=1, \quad C(n, m)=\frac{n(n-1)\dots(n-m+1)}{m!} \quad (0<m\leqslant n). \qquad (20.7)$$

Аналогично, сокращая на $m!$, приходим к формуле

$$C(n, n)=1, \quad C(n, m)=\frac{n(n-1)\dots(m+1)}{(n-m)!} \quad (0\leqslant m<n). \qquad (20.8)$$

Замечание об обозначениях и терминологии. При самостоятельной работе с литературой надо иметь в виду, что иногда приходится встречаться с обозначениями и терминами, несколько отличными от тех, которые мы здесь употребляем. Так, m-перестановки из элементов n-множества называют при $m<n$ *размещениями*

из n элементов по m, а при $m=n$ — *перестановками из n элементов*. В других случаях упорядоченные и неупорядоченные выборки, содержащие элементы с кратностью, большей 1, называют соответственно *перестановками* и *сочетаниями с повторениями*. Вместо использованного нами обозначения $P(n, m)$ очень часто пишут A_n^m, а для обозначения числа различных m-сочетаний из элементов n-множества, наряду с обозначением $C(n, m)$, более часто употребляют символы C_n^m и $\binom{n}{m}$.

§ 20.2. Бином Ньютона. Треугольник Паскаля

20.2.1. Формула разложения в сумму степени бинома. Выведем сначала одно вспомогательное соотношение. Пусть $1 \leqslant m \leqslant n$, тогда

$$C(n, m-1)+C(n, m)=C(n+1, m). \tag{20.9}$$

Действительно, согласно (20.6)

$$C(n, m-1)+C(n, m)=\frac{n!}{(m-1)!(n-m+1)!}+\frac{n!}{m!(n-m)!}=$$
$$=\frac{n!m}{m!(n-m+1)!}+\frac{n!\,(n-m+1)}{m!\,(n-m+1)!}=\frac{n!}{m!\,(n-m+1)!}[m+(n-m+1)]=$$
$$=\frac{n!\,(n+1)}{m!\,(n+1-m)!}=\frac{(n+1)!}{m!\,[(n+1)-m]!}=C(n+1, m).$$

Теорема 20.3. *При любом натуральном n и любых вещественных или комплексных a и b справедлива формула*

$$(a+b)^n=C(n, 0)a^nb^0+C(n, 1)a^{n-1}b^1+$$
$$+C(n, 2)a^{n-2}b^2+\ldots+C(n, n-1)a^1b^{n-1}+C(n, n)a^0b^n=$$
$$=\sum_{n=0}^{n}C(n, m)\,a^{n-m}b^m. \tag{20.10}$$

Доказательство. Отметим прежде всего, что при $n=1$ формула (20.10) верна. Действительно, так как $C(1, 0)=C(1, 1)=1$, то при $n=1$ (20.10) принимает вид

$$(a+b)^1=1\cdot a^1b^0+1\cdot a^0b^1.$$

Предположим теперь, что (20.10) справедлива для всех натуральных показателей, не превосходящих n, и докажем, что из этого предположения следует ее справедливость и для показателя, равного $n+1$. Умножим обе части (20.10) на $(a+b)$. После приведения подобных членов получим

$$(a+b)^{n+1}=C(n,\ 0)a^{n+1}b^0+$$
$$+[C(n,\ 0)+C(n,\ 1)]a^nb^1+[C(n,\ 1)+C(n,\ 2)]a^{n-1}b^2+\ldots$$
$$\ldots+[C(n,\ m-1)+C(n,\ m)]a^{n-m+1}b^m+\ldots$$
$$\ldots+[C(n,\ n-1)+C(n,\ n)]a^1b^n+C(n,\ n)a^0b^{n+1}.$$

Преобразуя теперь каждую из квадратных скобок по формуле (20.9) и учитывая, что

$C(n,\ 0)=C(n+1,\ \ 0)=1,\ C(n,\ n)=C(n+1,\ \ n+1)=1,$

получаем

$$(a+b)^{n+1}=C(n+1,\ 0)\,a^{n+1}b^0+$$
$$+C(n+1,\ 1)\,a^{(n+1)-1}b^1+\ldots+C(n+1,\ m)\,a^{(n+1)-m}b^m+\ldots$$
$$\ldots+C(n+1,\ n)\,a^1b^n+C(n+1,\ n+1)\,a^0b^{n+1}. \quad (20.11)$$

Согласно принципу математической индукции теорема доказана. Отметим, что формулу (20.10) обычно называют формулой *бинома Ньютона*, а числа $C(n,\ m)$ — *биномиальными коэффициентами*.

Полагая в (20.10) $a=b=1$, получаем

$$2^n=C(n,\ 0)+C(n,\ 1)+\ldots+C(n,\ m)+\ldots$$
$$\ldots+C(n,\ n-1)+C(n,\ n). \quad (20.12)$$

В правой части этой формулы каждое из слагаемых $C(n,\ m)$ представляет собой число m-подмножеств n-множества. Следовательно, общее число всех подмножеств n-множества (включая само это множество и его пустое подмножество) равно 2^n.

20.2.2. Треугольник Паскаля. Иногда оказывается удобным для нахождения биномиальных коэффициентов использовать следующее построение, именуемое обычно *треугольником Паскаля*:

$$\begin{array}{c}
1\\
1\quad 1\\
1\quad 2\quad 1\\
1\quad 3\quad 3\quad 1\\
1\quad 4\quad 6\quad 4\quad 1\\
1\quad 5\quad 10\quad 10\quad 5\quad 1\\
1\quad 6\quad 15\quad 20\quad 15\quad 6\quad 1\\
1\quad 7\quad 21\quad 35\quad 35\quad 21\quad 7\quad 1\\
1\quad 8\quad 28\quad 56\quad 70\quad 56\quad 28\quad 8\quad 1\\
1\quad 9\quad 36\quad 84\quad 126\quad 126\quad 84\quad 36\quad 9\quad 1\\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots
\end{array} \quad (20.13)$$

Здесь первое и последнее из чисел каждой строки равно 1, а остальные представляют собой сумму двух стоящих над ними чисел предшествующей строки (так, например, число 6 в пятой строке есть сумма $3+3$ стоящих над ним слева и справа чисел четвертой строки). Числа, составляющие $(n+1)$-ю строку представляют собой набор биномиальных коэффициентов $C(n, 0)$, $C(n, 1), \ldots$ $\ldots, C(n, m), \ldots, C(n, n-1)$, $C(n, n)$. Действительно, для второй строки это видно непосредственно, а способ получения каждой из последующих строк полностью совпадает с тем, который дается формулой (20.9).

ВОПРОСЫ ДЛЯ ПОВТОРЕНИЯ К ГЛАВЕ 20

1. Что называется упорядоченной m-выборкой из n-множества? Что такое кратность элемента относительно выборки? Что называется элементной базой выборки? Приведите примеры.

2. Что называется m-перестановкой из элементов n-множества? Приведите примеры.

3. Напишите формулы для вычисления количества различных упорядоченных m-выборок из n-множества и количества различных m-перестановок из элементов n-множества.

4. Что такое m-сочетание из элементов n-множества?

5. По каким формулам можно вычислять количество различных m-сочетаний из элементов n-множества?

6. Запишите в общем виде формулу «бинома Ньютона» и проиллюстрируйте ее конкретным примером.

7. Что представляет собой треугольник Паскаля? На каких соотношениях основано правило его построения?

8. Чему равно число всех подмножеств некоторого n-множества?

УПРАЖНЕНИЯ К ГЛАВЕ 20

В упражнениях 1—4 даны значения n и m. Требуется найти:

а) Число $V(n, m)$ различных упорядоченных m-выборок из n-множества.

б) Число $P(n, m)$ различных m-перестановок из элементов n-множества.

в) Число $C(n, m) = C_n^m$ различных m-сочетаний из элементов n-множества.

1. $n=10$, $m=3$. **2.** $n=8$, $m=8$.

3. $n=5$, $m=7$. **4.** $n=10$, $m=7$.

5. Сколько различных трехзначных чисел можно записать цифрами 1, 3, 5, 7 и 9? Сколько среди этих чисел будет таких, у которых все три составляющие их цифры различны между собой?

6. Из группы в 20 учащихся надо отобрать по одному человеку для участия в одновременно проходящих соревнованиях по плаванию, легкой атлетике и стрельбе. Сколькими способами можно это сделать?

Из этой же группы надо направить по одному человеку на проходящие в разное время олимпиады по математике, физике и электротехнике. Сколько здесь существует различных способов?

7. Из 10 рабочих надо отобрать четырех для выполнения срочной работы. Сколькими способами можно сделать такой отбор?

Из тех же 10 человек надо отобрать по одному для выполнения каждого из четырех различных заказов. Сколько здесь существует различных способов?

8. На девяти карточках записаны цифры от 1 до 9. Сколько различных четырехзначных чисел можно сложить из этих карточек?

Сколько различных комплектов по 4 карточки можно здесь составить?

В примерах 9 и 10 требуется разложить степень бинома по формуле Ньютона.

9. $(2-a)^7$. **10.** $(x-2y)^{10}$.

11. В разложении бинома $\left(\frac{2}{x}+x^2\right)^9$ найдите член, не содержащий x.

12. Найдите те члены разложения бинома $(\sqrt{2}-\sqrt[3]{3})^9$, которые не содержат радикалов.

ОТВЕТЫ, УКАЗАНИЯ И РЕШЕНИЯ К ГЛАВЕ 20

1. $V(10, 3)=1000$, $P(10, 3)=720$; $C(10, 3)=120$.

2. $V(8, 8)=16777216$, $P(8, 8)=40320$, $C(8, 8)=1$.

3. $V(5, 7)=78125$, $P(5, 7)=C(5, 7)=0$.

4. $V(10, 7)=10000000$, $P(10, 7)=604800$, $C(10, 7)=120$.

5. Различных трехзначных чисел здесь можно записать $V(5, 3)=5^3=125$. Таких из них, у которых все цифры различны, будет $P(5, 3)=60$.

6. Так как (по условию) один учащийся не может участвовать больше, чем в одном соревновании, то здесь число способов равно $P(20, 3)=6840$.

В олимпиадах по двум или даже трем разным предметам может принять участие один и тот же учащийся. Поэтому здесь число способов равно $V(20, 3)=8000$.

7. В первом случае число способов равно 210, во втором — 5040.

8. Различных чисел можно составить $P(9, 4)=3024$. Количество различных комплектов равно $C(9, 4)=126$.

9. $(2-a)^7=128-448a+672a^2-560a^3+280a^4-84a^5+14a^6-a^7$.

10. $(x-2y)^{10}=x^{10}-20x^9y+180x^8y^2-960x^7y^3+3360x^6x^4-$
$-8064x^5y^5+13440x^4y^6-15360x^3y^7+11520x^2y^8-5120xy^9+1024y^{10}$.

11. Общий член разложения бинома имеет вид $C(9, m)\cdot 2^{9-m}x^{3m-9}$. При $m=3$ показатель степени у x обращается в нуль. Искомый член равен $C(9, 3)\cdot 2^6=5376$.

12. $C(9, 3)(\sqrt{2})^6(\sqrt[3]{3})^3=2016$, $C(9, 9)(\sqrt[3]{3})^9=27$.

ГЛАВА 21

ЭЛЕМЕНТЫ ТЕОРИИ ВЕРОЯТНОСТЕЙ И МАТЕМАТИЧЕСКОЙ СТАТИСТИКИ

§ 21.1. События, вероятности и действия над ними

21.1.1. Введение. Все явления и процессы окружающего нас мира находятся между собой в более или менее тесной взаимосвязи. Не имея возможности учесть при их изучении это практически бесконечное число связей, мы всегда вынуждены ограничивать себя, оставляя в поле зрения лишь некоторое (как правило, небольшое) число тех связей, которые нам представляются основными. При этом, однако, возможны принципиально различные ситуации, которые мы сейчас вкратце охарактеризуем.

В одних случаях выделенная для рассмотрения структура позволяет практически с полной определенностью выносить суждения о «поведении» тех или иных ее составных частей в зависимости от состояния и способов взаимодействия остальных. Так, например, мы уверенно можем сказать, что, включив исправный радиоприемник и настроив его на нужную волну, мы услышим интересующую нас станцию. Отпуская поднятый на определенную высоту предмет, мы знаем, что он упадет вниз, точно так же, как придет в действие сложный механизм после того, как будет проделана необходимая для этого последовательность операций. В каждом из приведенных примеров осуществление определенного комплекса условий влекло за собой вполне определенное следствие.

В других ситуациях, однако, подобная однозначность уже не имеет места. Проделывая раз за разом одну и ту же последовательность действий при обработке однотипных деталей на станке, мы тем не менее наблюдаем определенный (пусть даже и малый) разброс в их размерах;

эксплуатируя одним и тем же способом два одинаковых прибора, мы убеждаемся, что один из них выходит из строя заметно раньше другого; стреляя в цель, мы один раз поражаем ее, а в другой раз — промахиваемся. Конечно, было бы неправильно считать эту неоднозначность возможного исхода беспричинной. Так, например, отклонения в размерах деталей обусловливаются мелкими различиями в структуре материала заготовок и времени обработки, незначительными колебаниями скорости движения инструмента и т. д., и т. п. Все дело в том, что все эти причины в данной ситуации оказываются такими, которые мы не в состоянии контролировать, а тем самым и предсказать, к какому исходу приведет их совместное проявление.

События, состоящие в реализации того или иного из возможных (при осуществлении данного комплекса условий) исходов, мы будем называть *случайными событиями*. Для удобства речи мы вместо слов «осуществление комплекса условий» будем здесь обычно говорить о «проведении испытания», «опыта». (Не следует поэтому стараться здесь истолковывать эти термины буквально!)

Будучи не в состоянии однозначно предсказать, какие именно события осуществятся в результате данного конкретного «испытания», мы тем не менее нередко можем дать определенную количественную характеристику «степени возможности» осуществления тех или иных из этих событий. Этой количественной характеристикой служит так называемая *вероятность события*.

Прежде чем начать изложение строгой математической теории, рассмотрим это понятие на интуитивном уровне. Итак, что же такое представляет собой вероятность события? Предположим, что мы изучаем процесс сборки некоторых приборов. Пусть при этом иногда оказывается, что определенная деталь при ее установке выходит из строя и тем самым возникает потребность в ее замене. Обозначим это событие буквой A.

Допустим, что, проводя наблюдения за выполнением этого процесса сборки в различные периоды разными рабочими, мы получили такие результаты (буквой m обозначается общее количество наблюдений в серии, m_A — число тех из них, в которых имело место событие A, ν_A — отношение m_A к m; m_A называют *абсолютной частотой события* A в данной серии наблюдений, ν_A — его *относительной частотой*).

1-я серия: $m=300$, $m_A=57$, $\nu_A=0{,}190$,
2-я серия: $m=500$, $m_A=104$, $\tau_A=0{,}208$,
3-я серия: $m=300$, $m_A=65$, $\nu_A=0{,}217$,
4-я серия: $m=400$, $m_A=76$, $\nu_A=0{,}190$,
5-я серия: $m=500$, $m_A=98$, $\nu_A=0{,}196$.

Всего по всем сериям: $m=2000$, $m_A=400$, $\nu_A=0{,}200$.

Мы видим, что относительные частоты ν_A, вычисленные по отдельным сериям, незначительно отличаются друг от друга и от относительной частоты, вычисленной по всей совокупности наблюдений. В таких случаях говорят, что изучаемое событие обладает *свойством устойчивости относительных частот*. Предполагая, что это устойчивость сохранится и в дальнейшем, мы можем приближенно оценить количество появлений события A при проведении, скажем, 30 000 таких сборочных операций. Именно, принимая его относительную частоту приближенно равной 0,2, получим $m_A \approx 0{,}2 \cdot 30\,000 = 6000$.

Число 0,2, которое мы использовали в этом расчете в качестве приближенного значения неизвестной нам заранее относительной частоты, и выступает здесь как раз в роли вероятности события A. В данном случае мы вероятность события приняли равной его относительной частоте, вычисленной по результатам всех наших наблюдений.

Проведение большой серии предварительных испытаний, конечно, далеко не всегда является необходимым. Пусть, например, нам известно, что в партии из 10 изделий содержится 8 годных и 2 бракованных. Тогда мы говорим, что вероятность при произвольном («случайном») выборе одного изделия из этой партии получить годное изделие равно $8/10=0{,}8$[1]). Здесь мы вообще не проводили никаких испытаний, а *вероятность события определили как отношение числа «шансов», благоприятствующих его осуществлению* (8), *к общему числу всех шансов* (10).

Нетрудно понять, что если бы мы искусственным путем организовали многократное повторение подобной ситуации и каждый раз регистрировали бы ее исход, то относительная частота нашего события оказалась бы близкой к этому числу 0,8. (Иными словами, *в среднем* из каждых 10 испытаний 8 давали бы интересующий нас

[1]) Обычно это записывают так: $P(A)=0{,}8$, буква P ведет свое происхождение от слова «probability», что означает «вероятность».

исход.) Точно так же, зная, например, что в лотерее на каждый миллион билетов приходится 50000 выигрышей, мы оцениваем вероятность выигрыша на 1 билет в 0,05 $\left(0{,}05=\frac{50000}{1000000}\right)$. Подбрасывая игральную кость (кубик, на гранях которого отмечено от одного до шести очков), мы говорим, что вероятность получить при однократном бросании не менее 5 очков равна 2/6, имея в виду, что из общего числа возможных «элементарных» исходов, равного 6, ровно 2 («выпало 5 очков» и «выпало 6 очков») влекут за собой осуществление нашего события.

В отличие от «частотного подхода», здесь мы интерпретировали вероятность как отношение числа «шансов», влекущих за собой рассматриваемое событие, к общему числу возможных «шансов». Эти «шансы» (их называют также *элементарными исходами* или *элементарными событиями*) предполагаются, во-первых, взаимоисключающими и, во-вторых, «равновозможными» между собой.

Если (!) выделенная нами система «элементарных исходов» действительно обладает такими свойствами, что при многократном повторении испытаний мы убеждаемся в том, что относительная частота появления нашего события будет приблизительно равна соответствующему «отношению шансов», т. е. определение вероятностей через отношение шансов не противоречит «частотному подходу» к их определению.

Заметим, наконец, что иногда вместо отношения «шансов» в буквальном смысле слова за вероятность события принимается близкое ему по смыслу отношение. Например, если в сосуд емкостью 10 литров попала ровно одна болезнетворная бактерия, то вероятность зачерпнуть ее при наборе из этого сосуда стакана воды (200 см^3) мы оценим в 0,02 $\left(0{,}02=\frac{200\text{ см}^3}{10000\text{ см}^2}\right)$.

21.1.2. События и операции над ними. В предыдущем пункте мы на интуитивном уровне познакомились с понятием вероятности. Мы увидели, что (нестрого говоря) вероятность события представляет собой не что иное, как «идеализированную» относительную частоту его появления в гипотетических сериях «испытаний». Такого истолкования понятия «вероятность» мы придерживаемся независимо от того, на основе каких соображений эта вероятность была приписана данному событию: по результатам ли простейшего статистического эксперимента или же на базе логического анализа возможностей его осуществления (посредством выделения системы «шансов» и т. п.) Конечно, решать сколько-нибудь сложные задачи, оставаясь на уровне интуитивных представлений, невозможно, поэтому сейчас мы приступаем к построению строгой математической теории. При этом построении вероятность у нас, естественно, будет выступать уже в роли абстрактного математического понятия. Однако, имея в виду, что эту теорию мы строим не ради ее самой, а собираемся использовать ее в интересах практики, очень важно во время ее изучения не забывать о том, как именно мы будем при этом интерпретировать (абстрактный!) термин «вероятность», каким конкретным содержанием мы будем его наполнять.

В этом и следующем пункте мы рассмотрим так называемый «классический подход» к построению этой теории, а в последующих — обобщим его.

В основе этого «классического подхода» лежит прежде всего понятие так называемой *полной системы попарно несовместных элементарных событий*. В п. 21.1.1 мы, по существу, сталкивались с прообразами таких систем. Так, говоря о «шансах» в примере с извлечением изделия из партии, состоящей из 8 годных и 2 бракованных изделий, мы, собственно, и имели в виду те элементарные события, которые заключаются в выборе того или иного конкретного изделия. В примере с подбрасыванием игральной кости такая система условно может быть записана следующим образом:

$$\mathrm{E} = \{\langle 1\rangle, \langle 2\rangle, \langle 3\rangle, \langle 4\rangle, \langle 5\rangle, \langle 6\rangle\}, \qquad (21.1)$$

где, например, $\langle 4\rangle$ означает (элементарное) событие, состоящее в том, что при бросании кубика выпадает именно 4 очка.

Выделяя систему элементарных событий Е, мы должны выбрать ее такой, чтобы, во-первых, она была *полна* (т. е. чтобы в результате проведения испытания обязательно осуществилось какое-нибудь из составляющих Е событий) и, во-вторых, чтобы составляющие Е события были *попарно несовместны* (т. е. чтобы осуществление сразу двух или нескольких из этих элементарных событий было невозможным).

После того как система Е оказывается выделенной, мы оставляем в поле нашего дальнейшего рассмотрения только такие события, каждому из которых можно определенным образом поставить в соответствие то или иное подмножество E′ системы E. Именно, событию A мы ставим в соответствие такое подмножество E_A, что A происходит тогда и только тогда, когда осуществляется один из «элементарных исходов», составляющих E_A.

Например, если для примера с подбрасыванием игральной кости нами выделена такая система элементарных исходов, как (21.1), то мы можем относительно этой системы рассматривать, скажем, событие, состоящее в том, что выпавшее число очков четно (или кратно трем), событие, состоящее в том, что выпавшее число очков меньше 5, и т. п., но такое событие, как падение кубика на левую или правую часть стола, мы здесь брать не вправе. Для таких событий, как это последнее, надо было бы совсем по-другому выбирать систему E.

Отметим, наконец, что в классическом подходе эта система предполагается конечной.

Условимся для всякого («допустимого» относительно E) события A через m_A обозначать количество различных элементарных событий в E_A (т. е. число всех тех элементарных исходов, осуществление которых влечет за собой осуществление A). Через m будем обозначать общее число составляющих E элементарных событий.

Определение 21.1. *Если $m_A = 0$ (т.е. если E_A — «пустое» множество), то событие A мы будем называть невозможным. (Какой бы из элементарных исходов ни осуществился в результате испытания, событие A при этом не произойдет.) Условимся обозначать невозможное событие символом* **0**.

Определение 21.2. *Событие A такое, что $m_A = m$ (т. е. $E_A = E$), мы будем называть достоверным. (Какой бы из элементарных исходов ни осуществился, событие A обязательно произойдет.) Будем обозначать достоверное событие символом* **1**.

Определение 21.3. *Мы будем говорить, что событие A влечет за собой событие B, если E_A целиком содержится в E_B. (Здесь в каждом из тех испытаний, в которых осуществляется A, будет осуществляться и B. Может быть, B будет осуществляться и в некоторых из тех случаев, когда A не будет происходить.) Будем в этом же смысле употреблять выражения: «A есть часть B», «B включает в себя A», и записывать это отношение так: $A \prec B$.*

Определение 21.4. *Событием, противоположным событию A, будем называть такое событие $\overline{A}$, что множество $E_{\overline{A}}$, отвечающее событию $\overline{A}$, получается удалением из* E *множества* E_A. (*При любом исходе испытания осуществляется одно и только одно из событий A и $\overline{A}$. Нетрудно сообразить, что событием, противоположным событию $\overline{A}$, будет исходное событие A.*)

Определение 21.5. *События A и B мы будем называть несовместными, если множества E_A и E_B не имеют общих элементов* (*как говорят, «пересечение E_A и E_B пусто»*). *Каков бы ни был исход испытания, события A и B одновременно осуществиться не могут.* (*В некоторых случаях будет происходить A, в других B, в третьих — ни A, ни B не осуществятся.*)

Определение 21.6. *Если каждые два события A_i и A_k $(i \neq k)$ из системы $\{A_1, A_2, \ldots, A_n\}$ несовместны, то события $A_1, A_2, \ldots, A_n$ называют попарно несовместными.*

Если же про эту систему можно лишь утверждать, что нет ни одного такого элемента, который входил бы в каждое из множеств $E_{A_1}, E_{A_2}, \ldots, E_{A_n}$ (*иными словами, если пересечение всех этих множеств пусто*), *то события A_1, $A_2, \ldots, A_n$ называют несовместными в совокупности.* (*Несовместность в совокупности означает невозможность осуществления в одном и том же испытании сразу всех событий $A_1, A_2, \ldots, A_n$*).

Определение 21.7. *Суммой двух событий A и B мы будем называть такое событие $A+B$, которому отвечает множество E_{A+B}, представляющее собой объединение множеств* (*теоретико-множественную сумму*) E_A *и* E_B: $E_{A+B} = E_A \cup E_B$. (*Событие $A+B$ будет происходить тогда и только тогда, когда произойдет хотя бы одно из событий A и B.*)

Определение 21.8. *Произведением событий A и B называется такое событие $A \cdot B$, что отвечающее ему множество $E_{A \cdot B}$ представляет собой пересечение множеств E_A и E_B.* (*Иными словами, $E_{A \cdot B}$ состоит из тех и только тех элементарных исходов, каждый из которых входит как в E_A, так и в E_B*); *событие $A \cdot B$ произойдет тогда и только тогда, когда произойдет каждое из событий A и B.*

Определение 21.9. *Множество Ω всех порождаемых системой* E *событий, в котором отношения между составляющими его элементами и результаты операций над ними задаются определениями 21.1.—21.8, будем называть* *алгеброй событий, построенной на системе* E *(или еще — порожденной системой* E*)*.

Поясним примерами только что введенные понятия. Пусть сначала речь идет опять об однократном бросании игральной кости, и пусть при этом в качестве исходной системы E взята система (21.1). Невозможным в порождаемой системой E алгебре событий будет событие, состоящее в том, что при бросании кости не выпала ни одна из граней $\langle 1\rangle — \langle 6\rangle$. Достоверным является событие, состоящее в том, что при бросании выпадает какая-нибудь из этих граней. Пусть событие A состоит в том, что выпавшее число очков четно, а событие B — в том, что выпавшее число очков кратно трем:

$$A \leftrightarrow \{\langle 2\rangle,\ \langle 4\rangle,\ \langle 6\rangle\}, \qquad B \leftrightarrow \{\langle 3\rangle,\ \langle 6\rangle\}.$$

Тогда противоположное A событие $\overline{A}$ состоит в нечетности выпавшего числа очков, а событие $\overline{B}$, противоположное B, заключается в выпадении какой-нибудь одной из граней $\langle 1\rangle$, $\langle 2\rangle$, $\langle 4\rangle$, $\langle 5\rangle$:

$$\overline{A} \leftrightarrow \{\langle 1\rangle,\ \langle 3\rangle,\ \langle 5\rangle\}, \qquad \overline{B} \leftrightarrow \{\langle 1\rangle,\ \langle 2\rangle,\ \langle 4\rangle,\ \langle 5\rangle\}.$$

События A и B несравнимы друг с другом (т. е. ни одно из них не является частью другого).

Это события совместны. Действительно, если при бросании выпадет $\langle 6\rangle$, то тем самым осуществляется и событие A, и событие B.

Суммой событий A и B является событие $A+B$, состоящее в выпадении одной из граней $\langle 2\rangle$, $\langle 3\rangle$, $\langle 4\rangle$, $\langle 6\rangle$, их произведением — событие, состоящее в выпадении $\langle 6\rangle$:

$$A+B \leftrightarrow \{\langle 2\rangle,\ \langle 3\rangle,\ \langle 4\rangle,\ \langle 6\rangle\}, \qquad A\cdot B \leftrightarrow \{\langle 6\rangle\}.$$

Пусть событие C состоит в выпадении какой-либо из граней $\langle 2\rangle$ или $\langle 4\rangle$

$$C \leftrightarrow \{\langle 2\rangle,\ \langle 4\rangle\}.$$

Тогда событие C будет являться по отношению к A его частью: $C \prec A$, а события B и C будут несовместны.

Теорема 21.1. а) *Для любого события A из алгебры, порожденной* E, *справедливо*

$$A+\mathbf{0}=A, \qquad A\cdot\mathbf{0}=\mathbf{0}.$$

б) *Для любого события A*

$$A+\mathbf{1}=\mathbf{1}, \qquad A\cdot\mathbf{1}=A.$$

в) *Для того чтобы A являлось частью B, необходимо и достаточно выполнения любого из соотношений*

$$A+B=B$$

или

$$A \cdot B=A.$$

г) *A и B противоположны ($B=\overline{A}$, $A=\overline{B}$) тогда и только тогда, когда выполняется каждое из соотношений*

$$A+B=\mathbf{1}, \qquad A \cdot B=\mathbf{0}.$$

д) *A и B несовместны тогда и только тогда, когда*

$$A \cdot B=\mathbf{0}.$$

Доказательства всех этих утверждений достаточно очевидны (основаны они, разумеется, на определениях 21.1—21.8), поэтому мы не будем здесь на них останавливаться.

Отметим еще некоторые важные свойства операций сложения и умножения событий и перехода к противоположному событию.

Теорема 21.2. *Операции сложения и умножения обладают свойствами:*

а) *коммутативности*

$$A+B=B+A, \qquad A \cdot B=B \cdot A;$$

б) *ассоциативности*

$$(A+B)+C=A+(B+C),$$

$$(A \cdot B) \cdot C=A \cdot(B \cdot C);$$

в) *дистрибутивности*

$$(A+B) \cdot C=A \cdot C+B \cdot C;$$

г) *идемпотентности*

$$A+A=A, \qquad A \cdot A=A.$$

Кроме того,

д) *событие, противоположное сумме некоторых событий, может быть представлено как произведение событий, противоположных слагаемым*

$$\overline{(A_1+A_2+\ldots+A_n)}=\overline{A}_1 \cdot \overline{A}_2 \cdot \ldots \cdot \overline{A}_n;$$

е) *событие, противоположное произведению некоторых событий, может быть представлено как сумма событий,* *противоположных сомножителям*

$$\overline{(A_1 \cdot A_2 \cdot \ldots \cdot A_n)} = \overline{A}_1 + \overline{A}_2 + \ldots + \overline{A}_n.$$

Мы приведем здесь только доказательство утверждения д). Обозначим $A_1 + A_2 + \ldots + A_n$ через B, а $\overline{A}_1 \cdot \overline{A}_2 \cdot \ldots \cdot \overline{A}_n$ — через C. Нам, следовательно, надо доказать, что $\overline{B} = C$, или, что то же самое, что $\mathrm{E}_{\overline{B}} = \mathrm{E}_C$.

Пусть некоторый элементарный исход $e \in \mathrm{E}_{\overline{B}}$, тогда (по определению противоположного события) $e \notin \mathrm{E}_B$. Но $\mathrm{E}_B = \mathrm{E}_{A_1} \cup \mathrm{E}_{A_2} \cup \ldots \cup \mathrm{E}_{A_n}$, значит, $e \notin \mathrm{E}_{A_i}$ для каждого i от 1 до n. Тем самым для каждого такого i, $e \in \mathrm{E}_{\overline{A}_i}$, а следовательно, и $e \in \mathrm{E}_{\overline{A}_1} \cap \mathrm{E}_{\overline{A}_2} \cap \ldots \cap \mathrm{E}_{\overline{A}_n} = \mathrm{E}_C$. Мы видим, что всякое e, входящее в $\mathrm{E}_{\overline{B}}$, входит и в E_C, т. е. $\mathrm{E}_{\overline{B}} \subseteq \mathrm{E}_C$.

Покажем теперь, что справедливо и обратное включение $\mathrm{E}_C \subseteq \mathrm{E}_{\overline{B}}$, откуда и будет следовать, что $\mathrm{E}_{\overline{B}} = \mathrm{E}_C$.

Пусть $e \in \mathrm{E}_C$. Так как $\mathrm{E}_C = \mathrm{E}_{\overline{A}_1} \cap \mathrm{E}_{\overline{A}_2} \cap \ldots \cap \mathrm{E}_{\overline{A}_n}$, то $e \in \mathrm{E}_{\overline{A}_i}$ для каждого i от 1 до n, значит, для каждого такого i $e \notin \mathrm{E}_{A_i}$. Но тогда $e \notin \mathrm{E}_{A_1} \cup \mathrm{E}_{A_2} \cup \ldots \cup \mathrm{E}_{A_n} = \mathrm{E}_B$, следовательно, $e \in \mathrm{E}_{\overline{B}}$.

Можно было бы провести рассуждения и другим способом, а именно, событие $A_1 + A_2 + \ldots + A_n$ состоит в том, что происходит хотя бы одно из событий A_i $(i = 1, 2, \ldots n)$. Значит, $\overline{(A_1 + A_2 + \ldots + A_n)}$ заключается в том, что ни одно из A_i не осуществляется, или, что то же самое, в том, что осуществляется каждое из $\overline{A}_i$. Но это последнее как раз и означает, что происходит событие $\overline{A}_1 \cdot \overline{A}_2 \cdot \ldots \cdot \overline{A}_n$.

21.1.3. Классическое определение вероятности. Пусть E — некоторая полная система попарно несовместных элементарных событий, а Ω — множество всех событий, допустимых относительно E. В этом пункте мы будем считать все эти элементарные события равновозможными по отношению друг к другу.

Определение 21.10. *Вероятностью события $A \in \Omega$ называется число*

$$\mathbf{P}(A) = \frac{m_A}{m},$$

где m — общее число элементарных событий («исходов»), составляющих E, *а m_A — количество элементарных событий в* E_A.

(Напомним, что под E_A мы понимаем подмножество множества E, составленное из таких и только таких элементарных событий, что осуществление любого из них влечет за собой осуществление A). Само это определение называют обычно *классическим определением вероятности.*

Мы видим, что по своей сути это определение выдержано в том же духе, что и рассмотренный нами в п. 21.1.1 интуитивный подход к определению вероятностей через отношение «шансов». Однако сейчас мы вводим это определение в рамках строгой математической теории, что позволит нам получить более глубокие результаты по сравнению с теми, которые были возможны на интуитивном уровне.

Теорема 21.3. *Вероятности событий, заданные посредством классического определения, обладают следующими свойствами:*

а) $\mathbf{P}(\mathbf{0})=0$, $\mathbf{P}(\mathbf{1})=1$;

б) *Если* $A \prec B$, *то* $\mathbf{P}(A) \leqslant \mathbf{P}(B)$;

в) $\mathbf{P}(\bar{A})=1-\mathbf{P}(A)$;

г) $\mathbf{P}(A+B)=\mathbf{P}(A)+\mathbf{P}(B)-\mathbf{P}(A \cdot B)$.

Мы приведем здесь доказательство утверждения г). Пусть, как обычно, E_A, E_B, E_{A+B}, $E_{A \cdot B}$ суть подмножества E, отвечающие соответственно событиям A, B, $A+B$ и $A \cdot B$, а m_A, m_B, m_{A+B} и $m_{A \cdot B}$ — количества элементов в этих подмножествах. Тогда, как нетрудно видеть,

$$m_{A+B}=m_A+m_B-m_{A \cdot B}.$$

Разделив обе части этого равенства на m (общее число элементарных событий в E), получим

$$\frac{m_{A+B}}{m}=\frac{m_A}{m}+\frac{m_B}{m}-\frac{m_{A \cdot B}}{m},$$

что, с учетом определения 21.10, и дает

$$\mathbf{P}(A+B)=\mathbf{P}(A)+\mathbf{P}(B)-\mathbf{P}(A \cdot B).$$

Следствие 21.1. *Если A и B несовместны, то*

$$\mathbf{P}(A+B)=\mathbf{P}(A)+\mathbf{P}(B).$$

Действительно, в этом случае $A \cdot B=\mathbf{0}$, а тогда и $\mathbf{P}(A\ B)=0$.

Замечание 21.1. Для любого набора $\{A_1, A_2, \ldots, A_n\}$ попарно несовместных событий

$$\mathbf{P}\left(\sum_{i=1}^{n} A_i\right)=\sum_{i=1}^{n} \mathbf{P}(A_i).$$

Вернемся к рассмотренному в п. 21.1.2 примеру с однократным бросанием игральной кости. Напомним, что в качестве исходной системы E мы брали там $\mathrm{E} = \{\langle 1\rangle, \langle 2\rangle, \langle 3\rangle, \langle 4\rangle, \langle 5\rangle, \langle 6\rangle\}$ и рассматривали события $A \leftrightarrow \{\langle 2\rangle, \langle 4\rangle, \langle 6\rangle\}$, $B \leftrightarrow \{\langle 3\rangle, \langle 6\rangle\}$ и «сконструированные» из A и B события. Поскольку $m=6$, $m_A=3$ и $m_B=2$, то

$$\mathbf{P}(A) = \frac{m_A}{m} = \frac{1}{2}, \quad \mathbf{P}(B) = \frac{m_B}{m} = \frac{1}{3}.$$

Вероятность события $\overline{B}$ мы теперь можем вычислить двумя путями. Во-первых, зная, что множество $\mathrm{E}_{\overline{B}} = \{\langle 1\rangle, \langle 2\rangle, \langle 4\rangle, \langle 5\rangle\}$, мы определяем $m_{\overline{B}}$: $m_{\overline{B}}=4$, после чего, применяя определение 21.10, получим

$$\mathbf{P}(\overline{B}) = \frac{m_{\overline{B}}}{m} = \frac{2}{3}.$$

Во-вторых, зная вероятность $\mathbf{P}(B)$, мы можем воспользоваться формулой в) теоремы 21.3

$$\mathbf{P}(\overline{B}) = 1 - \mathbf{P}(B) = 1 - \frac{1}{3} = \frac{2}{3}.$$

Мы пока еще не умеем выражать вероятность произведения событий через вероятности перемножаемых событий (об этом речь пойдет дальше). Поэтому сейчас для нахождения, скажем, вероятности $\mathbf{P}(A \cdot B)$ мы можем воспользоваться только определением, для чего нам, конечно, надо знать $m_{A \cdot B}$. Мы видели, что $\mathrm{E}_{A \cdot B}$ состоит только из одного «элементарного исхода» $\langle 6\rangle$, значит, $m_{A \cdot B}=1$ и

$$\mathbf{P}(A \cdot B) = \frac{m_{A \cdot B}}{m} = \frac{1}{6}.$$

Вероятность $\mathbf{P}(A+B)$ мы тоже можем найти двумя способами. Так как $\mathrm{E}_{A+B} = \{\langle 2\rangle, \langle 3\rangle, \langle 4\rangle, \langle 6\rangle\}$, то $m_{A+B}=4$, и непосредственное применение определения 21.10 дает

$$\mathbf{P}(A+B) = \frac{m_{A+B}}{m} = \frac{2}{3}.$$

Второй способ состоит в применении формулы г) теоремы 21.3

$$\mathbf{P}(A+B) = \mathbf{P}(A) + \mathbf{P}(B) - \mathbf{P}(A \cdot B) = \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{6} = \frac{2}{3}.$$

При решении практических задач, разумеется, нет необходимости вычислять вероятность одного и того же события несколькими различными путями (как это было нами только что сделано). Однако нередко нахождение вероятности непосредственно по определению 21.10 бывает затруднительным, тогда-то и оказывается полезной теорема 21.3, позволяющая вычислять вероятности одних событий по известным уже вероятностям других.

21.1.4. Условная вероятность. Формула полной вероятности и формула Байеса. Теперь мы перейдем к изучению понятия условной вероятности. Это — важное, но в то же время и трудное для первого восприятия понятие. Поэтому (для того чтобы облегчить процесс его усвоения) мы ненадолго отойдем от строгого изложения теории и сначала рассмотрим соответствующий круг вопросов на интуитивном уровне.

Образно выражаясь, до сих пор мы рассматривали вероятности тех или иных событий «в замороженном виде», как бы раз и навсегда отнесенные к определенной «точке отсчета» — до поступления каких-либо (!) сведений об исходе «эксперимента»[1]). Однако в нашей практической деятельности, кроме этой «точки отсчета» и ей полярной, т. е. такой, когда исход эксперимента стал уже полностью известен, нередко представляют интерес и различные «промежуточные» моменты, а именно такие, когда мы обладаем лишь частичной информацией относительно этого исхода.

Пусть при подбрасывании игральной кости нас интересует событие D, состоящее в том, что выпадает грань с шестью очками: $D \leftrightarrow \{\langle 6 \rangle\}$. Очевидно, что до получения каких-либо сведений о результатах бросания мы в состоянии лишь оценить меру возможности осуществления D его вероятностью $P(D) = 1/6$, а после того как эти результаты будут нам сообщены, мы будем точно знать, осуществилось D или нет.

Допустим теперь, что этот эксперимент организован таким образом, что мы не сразу получаем полную информацию о его исходе. Пусть, например, на некоторой промежуточной стадии нам удается лишь установить, что выпавшее число очков является четным. Условимся это последнее событие обозначать буквой A: $A \leftrightarrow \{\langle 2 \rangle, \langle 4 \rangle, \langle 6 \rangle\}$.

Получение сведений о том, что A произошло, еще не позволяет нам с полной определенностью заключить,

[1]) Мы понимаем здесь слово «эксперимент» в широком смысле: как реализацию того или иного определенного комплекса условий, в результате которого может произойти интересующее нас событие.

произошло D или нет, однако служит основанием для переоценки меры возможности его осуществления. Действительно, из шести возможных до начала эксперимента элементарных исходов три ($\langle 1\rangle$, $\langle 3\rangle$ и $\langle 5\rangle$) оказались заведомо не осуществившимися в проведенном испытании. Из оставшихся трех исходов ($\langle 2\rangle$, $\langle 4\rangle$ и $\langle 6\rangle$) по-прежнему в точности один отвечает интересующему нас событию D. Поэтому естественно после получения сообщения о том, что A произошло, принять вероятность D равной уже не 1/6, как раньше, а 1/3. Эта вновь рассчитанная вероятность и называется *условной вероятностью* D относительно A. Для того чтобы было удобно такие вероятности отличать друг от друга и от исходной «безусловной» вероятности), для них вводится специальное обозначение. Так, рассчитанная нами условная вероятность будет обозначаться $\mathbf{P}_A(D)$[1]. До начала эксперимента (точнее — до получения каких-либо сведений об его исходе) мы оцениваем вероятность D как отношение m_D/m числа m_D элементарных исходов, влекущих за собой осуществление D, т. е. количества элементов в E_D, к общему числу m всевозможных исходов, которое представляет собой количество элементов в E. Получение сведений о том, что в результате эксперимента осуществилось событие A, заставляет нас исключить из E все те элементы, которые не входят в E_A («сузить» E до E_A). Очевидно, что при этом могут оказаться исключенными и некоторые элементы из E_D, останутся лишь те из них, которые одновременно входят в E_A (E_D «сузится» до $\mathrm{E}_D \cap \mathrm{E}_A = \mathrm{E}_{A\cdot D}$). Итак, при «переоценке» вероятности D, или, выражаясь строже, при вычислении условной вероятности D относительно A мы, по сравнению с предыдущим, заменяем E на E_A и E_D — на $\mathrm{E}_{A\cdot D}$. Этим и оправдано следующее

Определение 21.11. *Пусть $m_A \neq 0$. Тогда условной вероятностью события D относительно события A называется число*

$$\mathbf{P}_A(D) = \frac{m_{A\cdot D}}{m_A}. \tag{21.2}$$

Теорема 21.4. *Справедлива формула*

$$\mathbf{P}_A(D) = \frac{\mathbf{P}(A\cdot D)}{\mathbf{P}(A)}. \tag{21.3}$$

---

[1]) Иногда вместо $\mathbf{P}_A(D)$ пишут $\mathbf{P}(D/A)$. При самостоятельной работе с литературой это надо учитывать!

Доказательство. Разделив в правой части (21.2) числитель и знаменатель на m, получим

$$\mathbf{P}_A(D)=\frac{m_{A\cdot D}/m}{m_A/m}=\frac{\mathbf{P}(A\cdot D)}{\mathbf{P}(A)},$$

что и требовалось доказать.

Формулу (21.3) называют обычно *формулой условной вероятности*.

В некоторых случаях может оказаться, что условная вероятность равна «безусловной» $\mathbf{P}_A(D)=\mathbf{P}(D)$. Пусть, скажем, в том же примере с бросанием игральной кости событие B состоит в том, что выпавшее число очков кратно трем: $B\leftrightarrow\{\langle 3\rangle,\ \langle 6\rangle\}$. Тогда, очевидно,

$$\mathbf{P}(B)=\frac{m_B}{m}=\frac{2}{6}=\frac{1}{3}.$$

Подсчитаем теперь условную вероятность B относительно A:

$$\mathbf{P}_A(B)=\frac{m_{A\cdot B}}{m_A}=\frac{1}{3}=P(B).$$

Оказывается, что если в этих случаях «поменять ролями» события, то и при этой перестановке условная вероятность опять окажется равной «безусловной». А именно, справедлива.

Теорема 21.5. *Пусть* $\mathbf{P}(A)\neq 0$, $\mathbf{P}(B)\neq 0$. *Если* $\mathbf{P}_A(B)=\mathbf{P}(B)$, *то и* $\mathbf{P}_B(A)=\mathbf{P}(A)$.

Доказательство. Заменяя в формуле условной вероятности

$$\mathbf{P}_A(B)=\frac{\mathbf{P}(A\cdot B)}{\mathbf{P}(A)}$$

условную вероятность $\mathbf{P}_A(B)$ равной ей «безусловной» вероятностью $\mathbf{P}(B)$ и умножая обе части на $\mathbf{P}(A)$, получим

$$\mathbf{P}(A)\,\mathbf{P}(B)=\mathbf{P}(A\cdot B).$$

Разделим теперь обе части на $\mathbf{P}(B)$:

$$\mathbf{P}(A)=\frac{\mathbf{P}(A\cdot B)}{\mathbf{P}(B)}.$$

С другой стороны, по формуле (21.3)

$$\mathbf{P}_B(A)=\frac{\mathbf{P}(A\cdot B)}{\mathbf{P}(B)}.$$

Сравнивая два последних равенства, мы и получаем требуемое.

Определение 21.12. *Если* $\mathbf{P}_A(B) = \mathbf{P}(B)$, *то событие* B *называют независимым*[1]) *от события* A.

Замечание 21.2. Если B независимо от A и, кроме того, $\mathbf{P}(B) \neq 0$, то, согласно теореме 21.5, и A будет независимым от B. В этом случае A и B называют *взаимно независимыми*.

Из формулы (21.3) очевидным образом следует

$$\mathbf{P}(A \cdot D) = \mathbf{P}(A)\,\mathbf{P}_A(D). \tag{21.4}$$

Эту формулу называют *общей формулой умножения*.

Если D не зависит от A, то эта формула принимает более простой вид:

$$\mathbf{P}(A \cdot D) = \mathbf{P}(A)\,\mathbf{P}(D). \tag{21.5}$$

Формулу (21.5) называют *формулой умножения для независимых событий*.

Важным следствием теоремы 21.4 является

Теорема 21.6. *Если* $B \prec A_1 + A_2 + \ldots + A_n$ *и если* $A_1, A_2, \ldots, A_n$ *попарно несовместны, то*

$$\mathbf{P}(B) = \mathbf{P}(A_1)\,\mathbf{P}_{A_1}(B) + \mathbf{P}(A_2)\,\mathbf{P}_{A_2}(B) + \ldots + \mathbf{P}(A_n)\,\mathbf{P}_{A_n}(B) \tag{21.6}$$

и (*если еще* $\mathbf{P}(B) \neq 0$) *для любого* k $(1 \leqslant k \leqslant n)$

$$\mathbf{P}_B(A_k) = \\ = \frac{\mathbf{P}(A_k)\,\mathbf{P}_{A_k}(B)}{\mathbf{P}(A_1)\,\mathbf{P}_{A_1}(B) + \mathbf{P}(A_2)\,\mathbf{P}_{A_2}(B) + \ldots + \mathbf{P}(A_n)\,\mathbf{P}_{A_n}(B)}. \tag{21.7}$$

Первая из этих формул называется *формулой полной вероятности*, а вторая — *формулой Байеса* (ее называют еще *формулой обратной вероятности*).

Доказательство. Напомним, что попарная несовместность событий $A_1, A_2, \ldots, A_n$ означает, что $A_i \cdot A_k = \mathbf{0}$ для любой пары A_i, A_k такой, что $i \neq k$. Но тогда, если $i \neq k$, будет и

$$(A_i \cdot B)(A_k \cdot B) = (A_i \cdot A_k)(B \cdot B) = \mathbf{0} \cdot B = \mathbf{0},$$

т. е. события $A_1 \cdot B$, $A_2 \cdot B$, $\ldots$, $A_n \cdot B$ также попарно несовместны.

---

[1]) «Независимыми» — в том (и только в том) смысле, как указано в этом определении, т. е. подразумевая под этим, что условная вероятность B относительно A равна безусловной вероятности B!

С другой стороны, условие $B \prec A_1 + A_2 + \ldots + A_n$ означает, что $B = (A_1 + A_2 + \ldots + A_n) B$, откуда, раскрывая скобки, получим $B = A_1 \cdot B + A_2 \cdot B + \ldots + A_n \cdot B$. Так как слагаемые в правой части попарно несовместны, то

$$\mathbf{P}(B) = \mathbf{P}(A_1 \cdot B) + \mathbf{P}(A_2 \cdot B) + \ldots + \mathbf{P}(A_n \cdot B).$$

Применяя теперь к каждому из слагаемых формулу (21.4), мы и приходим к первой из доказываемых формул (21.6).

Для доказательства же второй формулы достаточно подставить в правую часть равенства

$$\mathbf{P}_B(A_k) = \frac{\mathbf{P}(A_k \cdot B)}{\mathbf{P}(B)}$$

(см. формулу (21.3)) вместо $\mathbf{P}(A_k \cdot B)$ равное ей выражение $\mathbf{P}(A_k)\,\mathbf{P}_{A_k}(B)$, а вместо $\mathbf{P}(B)$ — ее выражение из только что доказанной формулы (21.6).

Проиллюстрируем на примере применение формул полной вероятности и обратной вероятности.

В нашем распоряжении имеются 3 одинаковых по внешнему виду непрозрачных сосуда, в первом из которых находится 5 белых и 5 черных шаров, во втором — 7 белых и 3 черных, в третьем — 9 белых и 1 черный. Случайным образом выбирается один из этих трех сосудов, после чего из него (также случайным образом) извлекается шар. Требуется определить вероятность того, что этот шар окажется белым.

Будем считать сосуды занумерованными и обозначим через A_i $(i = 1, 2, 3)$ событие, состоящее в том, что выбран сосуд с номером i. Через B обозначим событие, состоящее в том, что извлеченный шар белый. Тогда, как нетрудно видеть, $\mathbf{P}(A_1) = \mathbf{P}(A_2) = \mathbf{P}(A_3) = 1/3$, $\mathbf{P}_{A_1}(B) = 0{,}5$, $\mathbf{P}_{A_2}(B) = 0{,}7$, $\mathbf{P}_{A_3}(B) = 0{,}9$, откуда по формуле (21.6)

$$\mathbf{P}(B) = \mathbf{P}(A_1)\,\mathbf{P}_{A_1}(B) + \mathbf{P}(A_2)\,\mathbf{P}_{A_2}(B) + \mathbf{P}(A_3)\,\mathbf{P}_{A_3}(B) = \\ = \frac{1}{3} \cdot 0{,}5 + \frac{1}{3} \cdot 0{,}7 + \frac{1}{3} \cdot 0{,}9 = 0{,}7.$$

Пусть теперь в результате подобного эксперимента оказался извлеченным именно белый шар, и мы хотим определить вероятность того, что он был взят из первого сосуда. Для вычисления этой вероятности мы должны применить формулу Байеса

$$\mathbf{P}_B(A_1)=\frac{\mathbf{P}(A_1)\,\mathbf{P}_{A_1}(B)}{\mathbf{P}(A_1)\,\mathbf{P}_{A_1}(B)+\mathbf{P}(A_2)\,\mathbf{P}_{A_2}(B)+\mathbf{P}(A_3)\,\mathbf{P}_{A_3}(B)}=$$

$$=\frac{\frac{1}{3}\cdot 0,5}{\frac{1}{3}\cdot 0,5+\frac{1}{3}\cdot 0,7+\frac{1}{3}\cdot 0,9}=\frac{5}{21}\approx 0,238.$$

21.1.5. Общее определение вероятностной функции на конечной алгебре событий. В пп. 21.1.2 и 21.1.3 мы рассматривали конечные алгебры событий с вероятностями, заданными на них посредством формулы

$$\mathbf{P}(A)=\frac{m_A}{m}$$

(см. определение 21.10), ознакомились с основными понятиями теории, простейшими свойствами и способами вычисления вероятностей. Однако далеко не всякую реальную ситуацию, явление или процесс можно удовлетворительно описать посредством такой классической модели. Вернемся к уже знакомому нам примеру с подбрасыванием игральной кости. Допустим теперь, что с этой костью был проведен эксперимент, состоявший в выполнении 1000 бросаний, и что результаты этого эксперимента таковы (см. табл. 21.1).

ТАБЛИЦА 21.1.

Количество очков	Сколько раз наблюдалось	Относительная частота	Количество очков	Сколько раз наблюдалось	Относительная частота
1	99	0,099	4	150	0,150
2	148	0,148	5	149	0,149
3	152	0,152	6	302	0,302

Интуитивно чувствуется, что столь резкое отличие друг от друга относительных частот вряд ли можно считать случайным. Скорее всего причина этому лежит либо в неправильности формы кости, либо в смещенном относительно геометрического центра положении центра тяжести и т. п. Результаты эксперимента достаточно убедительно свидетельствуют о том, что в данном случае вряд ли стоит считать равновозможными между собой события, состоящие каждое в выпадении той или иной грани. Но тогда, отказавшись от предположения о равновозможности этих событий, мы оказываемся уже не вправе использовать здесь ту классическую модель, которую применяли ранее. Система

$$\mathrm{E} = \{\langle 1\rangle, \langle 2\rangle, \langle 3\rangle, \langle 4\rangle, \langle 5\rangle, \langle 6\rangle\}$$

по-прежнему, разумеется, будет полной, события, ее составляющие, останутся элементарными и попарно несовместными, однако они уже не будут равновозможными по отношению друг к другу. Именно это отсутствие равновозможности и не дает нам оснований для вычисления вероятностей через отношения типа m_A/m, заставляет искать другие пути для построения модели. Пусть нас, как и раньше, интересует вероятность события A, состоящего в том, что выпавшее число очков является четным. Обозначим через E_k событие, состоящее в выпадении грани достоинством в k очков ($k = 1, 2, \ldots, 6$); тогда $A = E_2 + E_4 + E_6$, причем слагаемые, стоящие в правой части, попарно несовместны. Естественно, по аналогии с классическим случаем, положить здесь $\mathbf{P}(A) = \mathbf{P}(E_2) + \mathbf{P}(E_4) + \mathbf{P}(E_6)$, ибо при любых результатах наблюдений относительная частота появления события A будет равна сумме относительных частот событий E_2, E_4 и E_6. Видно, что подобным же образом можно вероятность любого события из алгебры, порожденной системой E, выразить через вероятности событий $E_1 - E_6$.

Остается решить вопрос о том, какие же значения приписать этим вероятностям $\mathbf{P}(E_1)$, $\mathbf{P}(E_2)$, $\ldots$, $\mathbf{P}(E_6)$, после чего окажется предопределенной вероятность любого события из этой алгебры.

Это «назначение» вероятностей событиям, составляющим систему E, вообще говоря, может быть проведено по-разному: как модель, в которой эти вероятности принимаются в точности равными их относительным частотам, данным в табл. 21.1, так и модель, где эти вероятности таковы, как указано в табл. 21.2, а также и другие «близкие» к ним модели — все они в достаточной степени являются допустимыми, и лишь в результате дальнейшего глубокого изучения процесса, постановки новых экспериментов и т. п. сможет выявиться преимущество той или иной модели. С учетом этого замечания мы здесь зададим вероятности событий, округлив до сотых долей значения соответствующих относительных частот (см. табл. 21.2).

ТАБЛИЦА 21.2

Событие	E_1	E_2	E_3	E_4	E_5	E_6
Вероятность	0,10	0,15	0,15	0,15	0,15	0,30

Теперь мы можем вычислить вероятность любого события из алгебры, порожденной системой E. Так, например, $P(A) = P(E_2) + P(E_4) + P(E_6) = 0,15 + 0,15 + 0,30 = 0,60$.

В рассмотренном нами примере мы задали алгебру событий как множество всех тех событий, которые могут быть представлены в виде суммы элементов исходной системе E (мы добавили лишь к этому множеству еще «невозможное событие» **0**), после чего вероятности всех входящих в алгебру событий определили через вероятности событий, составляющих E. Разумеется, этот пример мы можем рассматривать лишь как иллюстрацию более общего, нежели классический, подхода к построению вероятностных моделей. Этот более общий способ задания вероятностной функции на конечной алгебре событий Ω состоит в том, что каждому событию e из числа составляющих порождающую Ω полную систему попарно несовместных элементарных событий мы ставим в соответствие его вероятность $\mathbf{P}(e)$ так, чтобы сумма всех этих вероятностей оказалась равной 1:

$$\sum_{e \in \mathrm{E}} \mathbf{P}(e) = 1,$$

после чего вероятность любого события A из Ω определяется по формуле

$$\mathbf{P}(A) = \sum_{e \in \mathrm{E}_A} \mathbf{P}(e),$$

т. е. представляет собой сумму вероятностей всех тех (и только тех) элементарных исходов, которые составляют E_A. Само это «назначение вероятностей» элементарным событиям формально должно лишь удовлетворять условию

$$\sum_{e \in \mathrm{E}} \mathbf{P}(e) = 1.$$

Однако если мы хотим, чтобы построенная модель была пригодна для изучения той или иной реальной ситуации, мы должны при этом «назначении вероятностей» учесть всю имеющуюся у нас информацию об изучаемом объекте, будь то относительные частоты, полученные в результате наблюдений, те или иные соображения о равновозможности каких-нибудь событий и т. п.

Отметим (не приводя соответствующего доказательства), что и при таком подходе сохраняются основные свойства вероятностей, приведенные в тексте теоремы 21.3.

Условной вероятностью события B относительно события A в общем случае называется число.

$$\mathbf{P}_A(B)=\frac{\mathbf{P}(A\cdot B)}{\mathbf{P}(A)}.$$

(Нетрудно заметить, что мы использовали здесь формулу (21.3). Естественно, и тут предполагается, что $\mathbf{P}(A)\neq 0$.) Понятия независимости и взаимной независимости событий определяются так же, как и в классическом случае. Сохраняют силу в общем случае и утверждения теорем 21.5 и 21.6. (Более того, даже их доказательства дословно переносятся на этот общий случай.)

Рассмотрим наконец, имеющий большое практическое значение один из вопросов, связанных с понятием независимости. По определению (ср. с определением 21.12) *событие B называется независимым от события A, если* $\mathbf{P}_A(B)=\mathbf{P}(B)$.

Допустим теперь, что нам нужно вычислить вероятность события $A\cdot B$ и что мы хотим удостовериться в возможности использовать для этого вместо общей формулы умножения $\mathbf{P}(A\cdot B)=\mathbf{P}(A)\,\mathbf{P}_A(B)$ формулу $\mathbf{P}(A\cdot B)=$ $=\mathbf{P}(A)\,\mathbf{P}(B)$, справедливую только в том случае, когда B не зависит от A. Казалось бы, мы попадаем здесь в порочный круг: для проверки независимости B от A нам надо найти $\mathbf{P}(B)$ и $\mathbf{P}_A(B)$, а эта последняя для своего вычисления по формуле (21.3) требует предварительного определения вероятности $\mathbf{P}(A\cdot B)$! Оказывается, однако (и в этом еще одно преимущество общего подхода), что при построении вероятностной модели мы в необходимых случаях можем «заложить» в нее независимость тех или иных событий, коль скоро эта независимость действительно вытекает из рассмотрения той конкретной ситуации, для описания которой мы создаем модель. Например, если речь идет о подбрасывании игральной кости два раза подряд, и если у нас имеются достаточные основания считать, что результат, полученный при первом бросании, никак не влияет на исход второго, то соответствующую модель мы можем построить, составив алгебру событий на базе всевозможных произведений вида $D=D'\cdot D''$, где D' — события, относящиеся к первому подбрасыванию, а D'' — ко второму, и положив (!) для каждого такого события D: $\mathbf{P}(D)=\mathbf{P}(D')\,\mathbf{P}(D'')$.

Пусть, скажем, нам требуется по такой модели рассчитать вероятность выпадения в сумме количества очков, равного 10. Обозначая это событие через H, через E'_k и E''_i — события, состоящие соответственно в выпадении при первом бросании k очков и при втором бросании i очков, мы можем записать

$$H=E'_6\cdot E''_4+E'_5\cdot E''_5+E'_4\cdot E''_6.$$

Отсюда, учитывая что слагаемые, стоящие в правой части, попарно несовместны, получаем

$$\mathbf{P}(H)=\mathbf{P}(E'_6\cdot E''_4)+\mathbf{P}(E'_5\cdot E''_5)+\mathbf{P}(E'_4\cdot E''_6).$$

Так как мы условились, что в нашей модели любые два события, относящиеся соответственно к первому и ко второму бросаниям, независимы, то для вычисления каждой из вероятностей $\mathbf{P}(E'_6\cdot E''_4)$, $\mathbf{P}(E'_5\cdot E''_5)$ и $\mathbf{P}(E''_4\cdot E'_6)$ мы можем воспользоваться формулой (21.5)

$$\mathbf{P}(E'_6\cdot E''_4)=\mathbf{P}(E'_6)\,\mathbf{P}(E''_4)=0{,}30\cdot 0{,}15=0{,}0450,$$
$$\mathbf{P}(E'_5\cdot E''_5)=\mathbf{P}(E'_5)\,\mathbf{P}(E''_5)=0{,}15\cdot 0{,}15=0{,}0225,$$
$$\mathbf{P}(E'_4\cdot E''_6)=\mathbf{P}(E'_4)\,\mathbf{P}(E''_6)=0{,}15\cdot 0{,}30=0{,}0450.$$

Окончательно

$$P(H)=0{,}0450+0{,}0225+0{,}0450=0{,}1125.$$

(Здесь мы приняли вероятности событий E'_k и E''_i такими, как в табл. 21.2.)

§ 21.2. Случайные величины и функции распределения

21.2.1. Дискретные случайные величины. Во многих случаях с каждым из элементарных событий системы E, составляющей основу той или иной вероятностной модели, оказывается связанным определенное число, представляющее собой ту или иную характеристику этого элементарного события. При этом, как правило, именно сами эти числа и представляют для нас основной интерес.

Иметь дело с числами и с числовыми множествами во многих отношениях удобнее, чем с событиями произвольного вида. Такие возможности представляет использование понятий случайной величины и ее закона распределения, изучение которых мы и начинаем в этом пункте. Прежде чем давать строгое определение этих понятий, мы познакомимся с ними на конкретном примере.

Пусть некоторый эксперимент состоит в двукратном подбрасывании игральной кости. Будем сначала считать, что (как для первого, так и для второго бросания) элементарные события, состоящие каждое в выпадении той или иной грани, равновозможны между собой, и что результаты второго бросания не зависят от того, какой именно исход имел место при первом подбрасывании. Нетрудно сообразить, что в этих условиях мы приходим к классической алгебре событий Ω, порождаемой полной системой E попарно несовместных и равновозможных по отношению друг к другу событий

$$\mathrm{E}=\{(\langle 1\rangle,\ \langle 1\rangle),\ (\langle 1\rangle,\ \langle 2\rangle),\ \ldots,\ (\langle 6\rangle,\ \langle 5\rangle),\ (\langle 6\rangle,\ \langle 6\rangle)\}.$$

Здесь $(\langle k\rangle,\ \langle l\rangle)$ означает событие, состоящее в том, что при первом бросании выпало k очков, а при втором — l очков $(1\leqslant k\leqslant 6;\ 1\leqslant l\leqslant 6)$.

С каждым из событий, составляющих систему E, свяжем число $\xi=k+l$ — сумму очков, выпавших при первом и втором бросаниях. Событию $(\langle 3\rangle,\ \langle 5\rangle)$, например, будет соответствовать число 8, каждому из событий $(\langle 1\rangle,\ \langle 6\rangle)$ и $(\langle 4\rangle,\ \langle 3\rangle)$ — число 7 и т. д. Допустим теперь, что нас интересует лишь полученное в результате эксперимента число ξ, что нам безразлично, осуществление, какого именно из событий, составляющих E, приводит к тому, что ξ принимает то или иное определенное значение. В нашем примере возможные значения ξ суть: 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12. Для каждого такого значения x мы можем вычислить вероятность того, что в результате испытания ξ окажется равной именно этому значению (иными словами, — вероятность выполнения равенства $\xi=x$).

Действительно, например, исходя из того, что $\xi=2$ тогда и только тогда, когда осуществляется элементарное событие $(\langle 1\rangle,\ \langle 1\rangle)$, мы получаем

$$\mathbf{P}(\xi=2)=\mathbf{P}(\langle 1\rangle,\ \langle 1\rangle)=1/36.$$

Равенство $\xi=3$ выполняется тогда и только тогда, когда осуществляется какое-нибудь из событий $(\langle 2\rangle, \langle 1\rangle)$ или $(\langle 1\rangle, \langle 2\rangle)$. Учитывая еще, что эти события несовместны, получаем

$$\mathbf{P}(\xi=3)=\mathbf{P}[(\langle 2\rangle, \langle 1\rangle)+(\langle 1\rangle, \langle 2\rangle)]=$$
$$=\mathbf{P}(\langle 2\rangle, \langle 1\rangle)+\mathbf{P}(\langle 1\rangle, \langle 2\rangle)=\frac{1}{36}+\frac{1}{36}=\frac{1}{18}.$$

Аналогично

$$\mathbf{P}(\xi=4)=\mathbf{P}(\langle 3\rangle, \langle 1\rangle)+\mathbf{P}(\langle 2\rangle, \langle 2\rangle)+\mathbf{P}(\langle 1\rangle, \langle 3\rangle)=$$
$$=\frac{1}{36}\cdot 3=\frac{1}{12} \quad \text{и т. д.}$$

Результаты всех этих расчетов сведем в таблицу (см. табл. 21.3). Эта таблица представляет собой пример

ТАБЛИЦА 21.3

x	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
$\mathbf{P}(\xi=x)$	1/36	1/18	1/12	1/9	5/36	1/6	5/36	1/9	1/12	1/18	1/36

таблицы распределения вероятностей случайной величины ξ по ее возможным значениям.

Составив эту таблицу, мы пришли к новой, более удобной в нашем случае, вероятностной конструкции. А именно, мы получили новую алгебру событий Ω', которая порождается уже новой полной системой попарно несовместных событий E':

$$E'=\{(\xi=2), (\xi=3), \ldots, (\xi=11), (\xi=12)\}.$$

(Как видно из табл. 21.3, эти элементарные события не являются равновозможными, так что эта наша модель более общая, чем классическая. Зато общее количество элементарных событий в E' много меньше, чем в E.)

Вероятность любого такого события, которое можно представить как «попадание» в некоторое заранее заданное числовое множество X', можно теперь вычислить, не обращаясь к исходной модели. Например, учитывая, что событие $(\xi\leqslant 4)$ представляет собой сумму попарно несовместных событий ($\xi=2$), ($\xi=3$) и ($\xi=4$), мы получаем

$$\mathbf{P}(\xi\leqslant 4)=\mathbf{P}(\xi=2)+\mathbf{P}(\xi=3)+\mathbf{P}(\xi=4)=$$
$$=\frac{1}{36}+\frac{1}{18}+\frac{1}{12}=\frac{1}{6}.$$

Попробуем коротко подытожить сделанное. Отправной точкой для наших рассуждений явилась алгебра событий Ω, заданная посредством порождающей ее системы E. Каждому из элементарных событий e, составляющих E, мы поставили в соответствие некоторое число $\xi=f(e)$, в результате чего нам удалось построить новую алгебру событий Ω', которое порождается уже системой E′, состоящей из событий вида ($\xi=x$). Рассчитав вероятности этих событий, мы записали полученные результаты в виде таблицы распределения вероятностей. Тем самым на алгебре Ω' оказалась заданной своя вероятностная функция. Для решения целого ряда задач использование алгебры Ω' оказывается гораздо более удобным по сравнению с обращением к исходной алгебре Ω. Дадим теперь строгое определение.

Определение 21.13. *Пусть Ω—некоторая алгебра событий,* E*—порождающая ее (конечная) полная система попарно несовместных элементарных событий, вероятности которых мы считаем заданными. Пусть также каждому из элементарных событий e, составляющих* E*, поставлено в соответствие некоторое число $\xi=f(e)$, иными словами, пусть на* E *задана некоторая «функция» $\xi=f(e)$. Эта функция называется дискретной случайной величиной, а закон, сопоставляющий каждому из возможных значений x этой функции вероятность события ($\xi=x$), называется законом распределения вероятностей по возможным значениям случайной величины ξ.*

Использованный в этом определении термин «дискретная» указывает на то обстоятельство, что набор возможных значений случайной величины в нашем случае состоит из «изолированных» друг от друга чисел, таких, что каждое из них можно окружить такой окрестностью ($x-h$, $x+h$), в которой не будет содержаться ни одного изостальных возможных значений. Это замечание потребуется нам в дальнейшем при рассмотрении случайных величин более общего вида.

Закон распределения вероятностей дискретной случайной величины геометрически можно проиллюстрировать при помощи так называемой *гистограммы* (другое название — *многоугольник вероятностей*). Эта гистограмма представляет собой фигуру, составленную из прямоугольников, нижние основания которых располагаются на оси абсцисс. Каждому из возможных значений случайной величины отвечает свой прямоугольник. Он строится так, чтобы его площадь оказалась численно равной соответствующей вероятности. В простейших случаях эти возможные значения служат центрами нижних оснований

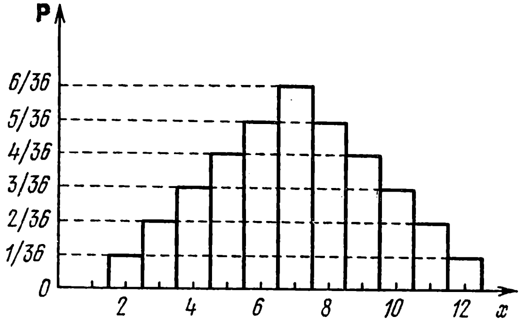


Рис. 21.1.

«своих» прямоугольников. Обычно прямоугольники строят примыкающими друг к другу. Во всяком случае взаимное налегание этих прямоугольников друг на друга не допускается. На рис. 21.1 дана гистограмма для случайной величины, рассмотренной в начале этого пункта (см. табл. 21.3). Заметим еще, что в случае необходимости допускается выбор разных масштабов на координатных осях.

Во многих случаях наряду с таблицами такого типа, как табл. 21.3, оказывается удобным иметь таблицы несколько иного рода, сопоставляющие каждому из возможных значений x случайной величины ξ вероятность события $(\xi \leqslant x)$. Так, для того же примера с двукратным подбрасыванием игральной кости мы получаем следующую таблицу.

ТАБЛИЦА 21.4

x	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
$\mathbf{P}(\xi \leqslant x)$	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{5}{18}$	$\frac{5}{12}$	$\frac{7}{12}$	$\frac{13}{18}$	$\frac{5}{6}$	$\frac{11}{12}$	$\frac{35}{36}$	1

Пользуясь такой таблицей, мы можем находить вероятности событий вида $(a < \xi \leqslant b)$ просто как разности стоящих в ней чисел. Действительно, так как (при $a < b$)

$$(\xi \leqslant a) + (a < \xi \leqslant b) = (\xi \leqslant b),$$

и так как события, стоящие в левой части этой формулы, несовместны, то

$$\mathbf{P}(\xi \leqslant a) + \mathbf{P}(a < \xi \leqslant b) = \mathbf{P}(\xi \leqslant b),$$

откуда

$$\mathbf{P}(a < \xi \leqslant b) = \mathbf{P}(\xi \leqslant b) - \mathbf{P}(\xi \leqslant a). \tag{21.8}$$

Заметим, что здесь совсем не обязательно, чтобы a и b представляли собой какие-то из возможных значений случайной величины.

Определение 21.14. *Пусть ξ — некоторая случайная величина. Функция, определенная на $(-\infty, +\infty)$ формулой*

$$F(x) = \mathbf{P}(\xi \leqslant x), \tag{21.9}$$

называется кумулятивной функцией распределения случайной величины ξ (ее называют также функцией накопленных вероятностей, интегральной функцией распределения, иногда — просто функцией распределения).

Для рассмотренной в качестве последнего примера случайной величины функция накопленных вероятностей (см. табл. 21.4) $F(x)$ будет равна 0 для всех значений x, меньших 2; для всех x, удовлетворяющих неравенству $2 \leqslant x < 3$, она будет равна $1/36$; для x, удовлетворяющих неравенству $3 \leqslant x < 4$, будет $F(x) = 1/12$ и т. д. Наконец, для каждого x, большего или равного 12, будет $F(x) = 1$. График этой функции дан на рис. 21.2.

Для таких случайных величин, у которых множество возможных значений конечно[1]), кумулятивная функция распределения представляет собой кусочно-постоянную («ступенчатую») функцию. Она остается постоянной в промежутке между любыми двумя соседними возможными значениями случайной величины, и изменяется (скачком) лишь при переходе через точки, отвечающие этим возможным значениям.

[1]) А только такие случайные величины мы пока и рассматривали.

Отметим, наконец, что, используя понятие функции накопленных вероятностей, мы можем переписать (21.8) в виде

$$P(a < \xi \leqslant b) = F(b) - F(a). \qquad (21.10)$$

Именно в этом виде она обычно и используется, если мы имеем в своем распоряжении функцию $F(x)$.

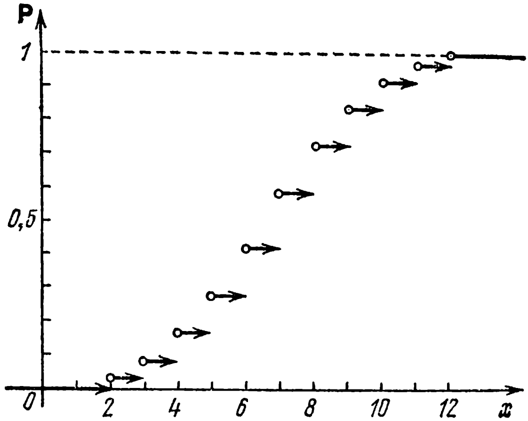


Рис. 21.2.

21.2.2. Биномиальный закон распределения. Множество всевозможных законов распределения исключительно разнообразно. Оказывается удобным выделить из него и изучить более обстоятельно некоторые типы таких законов, которые чаще всего встречаются при решении практических задач. В этом пункте мы рассмотрим один из таких типов — так называемые «биномиальные распределения». Начнем это рассмотрение с конкретного примера.

Пусть в непрозрачном сосуде находится десять одинаковых наощупь шаров, среди которых 7 белых и 3 черных. Естественно положить вероятность события, состоящего в том, что извлеченный наугад шар окажется белым, равной 0,7.

Предположим теперь, что мы повторяем такое извлечение четыре раза подряд, причем перед каждым последующим извлечением мы возвращаем вынутый шар обратно в сосуд и тщательно перемешиваем шары.

Выпишем все возможные при этом комбинации цветов с учетом того порядка, в котором эти цвета были получены:

ч ч ч ч	ч ч ч б	ч ч б б	ч б б б	б б б б
	ч ч б ч	ч б ч б	б ч б б	
	ч б ч ч	ч б б ч	б б ч б	
	б ч ч ч	б ч ч б	б б б ч	
		б ч б ч		
		б б ч ч		

Учитывая, что условия нашего эксперимента практически обеспечивают независимость исхода очередного извлечения от результатов, имевших место при предыдущих извлечениях, мы можем вычислить вероятности осуществления каждой из перечисленных комбинаций. Для удобства записи условимся обозначать через A_i ($i = 1, 2, 3, 4$) событие, состоящее в том, что при i-м извлечении окажется вынутым белый шар. (Тогда $\bar{A}_i$ означает, что при i-м извлечении будет вынут черный шар). Очевидно, что $\mathbf{P}(A_i) = 0{,}7$, $\mathbf{P}(\bar{A}_i) = 0{,}3$. Вероятность осуществления первой из перечисленных комбинаций (ч ч ч ч) равна

$$\mathbf{P}(\text{ч ч ч ч}) = P(\bar{A}_1 \cdot \bar{A}_2 \cdot \bar{A}_3 \cdot \bar{A}_4) = \\ = P(\bar{A}_1)\, P(\bar{A}_2)\, P(\bar{A}_3)\, P(\bar{A}_4) = 0{,}3^4 = 0{,}0081.$$

Вероятность осуществления каждой из комбинаций, стоящих во втором столбце, равна $0{,}3^3 \cdot 0{,}7 = 0{,}0189$. Действительно,

$$\mathbf{P}(\text{ч ч ч б}) = \mathbf{P}(\bar{A}_1)\, \mathbf{P}(\bar{A}_2)\, \mathbf{P}(\bar{A}_3)\, \mathbf{P}(A_4) = 0{,}3^3 \cdot 0{,}7 = 0{,}0189,$$
$$\mathbf{P}(\text{ч ч б ч}) = \mathbf{P}(\bar{A}_1)\, \mathbf{P}(\bar{A}_2)\, \mathbf{P}(A_3)\, \mathbf{P}(\bar{A}_4) = 0{,}3^2 \cdot 0{,}7 \cdot 0{,}3 = \\ = 0{,}0189,$$

и т. д. Таким же образом мы получаем для вероятности осуществления каждой из комбинаций третьего столбца значение $0{,}3^2 \cdot 0{,}7^2 = 0{,}0441$, для вероятности осуществления каждой комбинации четвертого столбца $0{,}3 \cdot 0{,}7^3 = 0{,}1029$ и, наконец, находим, что $P(\text{б б б б}) = 0{,}7^4 = 0{,}2401$.

Допустим теперь, что нас интересует случайная величина ξ, представляющая собой количество белых шаров в полученной нами комбинации. (Тем самым порядок, в котором наблюдались цвета извлекаемых шаров, нас сам по себе не интересует.) Событие ($\xi = 0$) происходит тогда и только тогда, когда осуществляется комбинация ч ч ч ч. Поэтому

$$\mathbf{P}(\xi=0)=\mathbf{P}(\text{ч ч ч ч})=0{,}0081.$$

Событие $(\xi=1)$ осуществляется тогда и только тогда, когда будет извлечена одна из комбинаций, перечисленных во втором столбце: ч ч ч б, ч ч б ч, ч б ч ч или б ч ч ч. Так как эти последние события попарно несовместны, то

$$\mathbf{P}(\xi=1)=\mathbf{P}(\text{ч ч ч б})+\mathbf{P}(\text{ч ч б ч})+$$
$$+\mathbf{P}(\text{ч б ч ч})+\mathbf{P}(\text{б ч ч ч})=4\cdot 0{,}0189=0{,}0756.$$

Аналогично рассуждая, мы получаем

$$\mathbf{P}(\xi=2)=6\cdot(0{,}7^2\cdot 0{,}3^2)=0{,}2646,$$
$$\mathbf{P}(\xi=3)=4\cdot(0{,}7^3\cdot 0{,}3)=0{,}4116,$$
$$\mathbf{P}(\xi=4)=0{,}7^4=0{,}2401.$$

Итак мы рассчитали для нашей случайной величины вероятности всевозможных событий вида $\xi=x$. Запишем таблицу распределения вероятностей так (см. табл. 21.5).

ТАБЛИЦА 21.5

x	0	1	2	3	4
$\mathbf{P}(\xi=x)$	$0{,}3^4$	$4\cdot 0{,}7^1\cdot 0{,}3^3$	$6\cdot 0{,}7^2\cdot 0{,}3^2$	$4\cdot 0{,}7^3\cdot 0{,}3^1$	$0{,}7^4$

Рассмотрим теперь гораздо более общую ситуацию. Пусть при единичном проведении некоторого испытания событию A соответствует вероятность p. Предположим, что производится серия, состоящая из n таких испытаний, причем исходы любого из испытаний не зависят от результатов, имеющих место в других испытаниях. Пусть нас опять-таки интересует лишь общее количество ξ таких из наших n испытаний, в которых событие осуществится. Пусть $0\leqslant x\leqslant n$ (x — целое). Тогда для любой такой комбинации исходов испытаний нашей серии, в которой ровно x раз произошло событие A (и, значит, ровно $(n-x)$ раз не произошло), вероятность ее осуществления будет равна $p^x\cdot(1-p)^{n-x}$. Так как общее число таких комбинаций равно числу различных сочетаний из n по x, то

$$\mathbf{P}(\xi = x) = C_n^x p^x (1-p)^{n-x}. \qquad (21.11)$$

Этой же формулой могут быть описаны и многие другие случайные величины.

Определение 21.15. *Всякий такой закон распределения вероятностей по возможным значениям случайной величины, который может быть описан формулой типа* (21.11) *называется биномиальным законом распределения. Про саму случайную величину говорят тогда, что она «подчиняется биномиальному распределению»* (*иногда говорят: «распределена по биномиальному закону»*).

21.2.3. Случайные величины (общий случай). До сих пор мы рассматривали только конечные алгебры событий. Во многих случаях оказывается удобным использовать вероятностные конструкции более общего вида, опирающиеся на алгебры, состоящие из бесконечного множества событий. Не углубляясь сколько-нибудь далеко в соответствующую теорию, отметим лишь, что в «бесконечном случае» алгебра событий должна быть, как говорят, «замкнутой» относительно операций сложения и умножения как любого конечного множества событий, так и бесконечной последовательности таких событий, а также — относительно операции перехода к противоположному событию[1]). Заданная на такой алгебре вероятностная функция, кроме уже привычных для нас свойств, должна еще обладать так называемой счетной аддитивностью, а именно, если события, составляющие бесконечную последовательность $A_1, A_2, A_3, \ldots$, попарно несовместны, то должно быть

$$\mathbf{P}\left(\sum_{i=1}^{\infty} A_i\right) = \sum_{i=1}^{\infty} \mathbf{P}(A_i).$$

Весь этот круг вопросов будет интересовать нас в основном в приложении к случайным величинам. К их рассмотрению в общем виде мы сейчас и перейдем.

Напомним, что в «конечном» случае мы вводили понятие случайной величины как функции $\xi = f(e)$, заданной на множестве всех элементарных событий некоторой алгебры Ω (см. определение 21.13), после чего, используя заданную на Ω вероятностную функцию, строили новую

---

[1]) То есть результаты всех этих операций, произведенных над элементами алгебры Ω, сами должны быть элементами Ω.

алгебру событий Ω', принимая в качестве элементарных события вида $(\xi = x)$. С того момента, как Ω' оказывалась построенной, а вероятностная функция на ней определена, мы уже не обращались к исходной алгебре Ω, а рассматривали вновь построенную конструкцию: случайную величину ξ и ее закон распределения вероятностей.

Если не считать некоторых в данный момент для нас несущественных оговорок, то можно сказать, что общее определение случайной величины дается в основном так же, как это было сделано в конечном случае. Что же касается задания закона распределения вероятностей, то сделать это оказывается всегда возможным, указав вероятности событий вида $(\xi \leqslant x)$, иными словами, задав функцию накопленных вероятностей $F(x) = \mathbf{P}(\xi \leqslant x)$.

Вообще говоря, функция $F(x)$ может оказаться весьма сложно «устроенной». Однако основной практический интерес представляют два (в некотором смысле слова «крайних») класса случайных величин: величины, у которых функция накопленных вероятностей $F(x)$ «кусочно-постоянна» [1]), и величины, у которых $F(x)$ непрерывна на всей числовой оси и всюду (за исключением, быть может, некоторого множества изолированных друг от друга точек) имеет непрерывную производную $\frac{d}{dx} F(x)$. Величины первого из этих классов называются *дискретными случайными величинами*, второго — *непрерывными*. Только такие случайные величины мы здесь и будем рассматривать.

Нетрудно показать, что возможными значениями дискретной случайной величины являются те и только те значения x, которые представляют собой точки разрыва функции $F(x)$, причем значения вероятностей $\mathbf{P}(\xi = x)$ равны величинам скачков кумулятивной функции распределения в соответствующих точках. Ничего существенно нового по сравнению с тем, что мы видели ранее, переход от конечного к бесконечному множеству возможных значений нам здесь не дает.

В качестве иллюстрации понятия дискретной случайной величины с бесконечным множеством возможных значений рассмотрим следующий пример.

---

[1]) При этом $F(x)$ обязательно окажется «непрерывной справа», т. е. везде, в том числе и в точках ее разрыва будет $\lim\limits_{h \to +0} F(x+h) = F(x)$.

Пусть, так же как и в примере из п. 21.2.2, мы последовательно проводим испытания, в каждом из которых вероятность появления некоторого события A остается равной некоторому постоянному значению p, независимо от того, какими именно исходами завершились испытания, предшествующие текущему. Однако, в отличие от того, как это делалось в упомянутом примере, здесь мы будем продолжать нашу серию испытаний только до первого осуществления события A, а в качестве случайной величины ξ возьмем общее количество проведенных испытаний. Очевидно, что множество возможных значений ξ совпадает с множеством всех натуральных чисел. Рассчитываем вероятности событий $(\xi=k)$ и $(\xi \leqslant k)$, где $k=1$, 2, 3, ... Как и раньше, условимся через A_i обозначить событие, состоящее в том, что в i-м испытании осуществилось событие A. Тогда событие $(\xi=1)$ мы можем записать, как A_1, событие $(\xi=2)$ — как $\bar{A}_1 \cdot A_2$ и вообще событие $(\xi=k)$ — как $\bar{A}_1 \cdot \bar{A}_2 \cdot \ldots \cdot \bar{A}_{k-1} \cdot A_k$. Следовательно,

$$\mathbf{P}(\xi=1)=\mathbf{P}(A_1)=p,$$

$$\mathbf{P}(\xi=2)=\mathbf{P}(\bar{A}_1 \cdot A_2)=\mathbf{P}(\bar{A}_1)\,\mathbf{P}(A_2)=(1-p)\cdot p,$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\mathbf{P}(\xi=k)=\mathbf{P}(\bar{A}_1 \cdot \bar{A}_2 \cdot \ldots \cdot \bar{A}_{k-1} A_k)= \\ =\mathbf{P}(\bar{A}_1)\,\mathbf{P}(\bar{A}_2) \cdot \ldots \cdot \mathbf{P}(\bar{A}_{k-1})\,\mathbf{P}(A_k)=(1-p)^{k-1}\,p.$$

Из этих формул уже нетрудно получить и выражение для вероятности событий вида $(\xi \leqslant k)$

$$\mathbf{P}(\xi \leqslant k)=\mathbf{P}(\xi=1)+\mathbf{P}(\xi=2)+\ldots+\mathbf{P}(\xi=k-1)+ \\ +\mathbf{P}(\xi=k)=p+(1-p)\,p+\ldots+(1-p)^{k-2}\,p+ \\ +(1-p)^{k-1}\,p=p\,\frac{1-(1-p)^k}{1-(1-p)}=1-(1-p)^k.$$

Если x — произвольное вещественное число, не меньшее 1, то, заключив его между двумя соседними натуральными числами k и $k+1$ так, чтобы выполнялось неравенство $k \leqslant x < k+1$, и учитывая, что ξ не может принимать дробных значений, получим

$$\mathbf{P}(\xi \leqslant x)=\mathbf{P}(\xi \leqslant k)=1-(1-p)^k.$$

Обозначая через $[x]$ целую часть числа x, это последнее равенство можно переписать в виде

$$\mathbf{P}(\xi \leqslant x)=1-(1-p)^{[x]}.$$

Очевидно, что для $x<1$ вероятность $\mathbf{P}(\xi \leqslant x)=0$.

Определение 21.16. *Геометрическим законом распределения*[1] *(законом распределения типа геометрической прогрессии) называется закон распределения всякой такой случайной величины, для которой множество ее возможных значений совпадает с множеством всех натуральных чисел, а вероятности для этих значений задаются формулой*

$$\mathbf{P}(\xi = k) = p(1-p)^{k-1}. \qquad (21.12)$$

Кумулятивная функция распределения этой случайной величины

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{если } x < 1, \\ 1-(1-p)^{[x]}, & \text{если } x \geqslant 1. \end{cases} \qquad (21.13)$$

Гораздо больше новых моментов появляется у нас при изучении непрерывных случайных величин. Прежде чем перейти к рассмотрению конкретных примеров, мы введем для таких величин одно новое понятие.

Определение 21.17. *Пусть $F(x)$ — кумулятивная функция распределения случайной величины ξ. Функцией плотности вероятностей этой случайной величины называется функция*

$$f(x) = \frac{d}{dx} F(x). \qquad (21.14)$$

Так как $F(x)$, согласно этому определению, представляет собой первообразную для $f(x)$, то для любых a и b

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a). \qquad (21.15)$$

Сопоставляя эту формулу с формулой (21.10), мы получаем

$$\mathbf{P}(a < \xi \leqslant b) = \int_a^b f(x)\,dx \qquad (21.16)$$[2].

(Напомним, что интеграл, стоящий в правой части (21.16),

---

[1]) Употребление здесь термина «геометрический» связано с тем, что правая часть формулы (21.12) представляет собой общий член геометрической прогрессии со знаменателем, равным $(1-p)$.

[2]) Так как для непрерывной случайной величины вероятности событий вида $(\xi = x)$ равны нулю, то левую часть (21.16) можно записать в виде $\mathbf{P}(a \leqslant \xi < b)$, $\mathbf{P}(a < \xi < b)$, $\mathbf{P}(a \leqslant \xi \leqslant b)$. Справедливость формулы при этом не нарушится. Так же (для непрерывной случайной величины!) можно трансформировать и формулу (21.10).

геометрически изображается площадью фигуры, заключенной между осью Ox, графиком $f(x)$ и ординатами, проведенными в точках $x=a$ и $x=b$. См. также рис. 21.3, на котором площадь заштрихованной фигуры численно равна вероятности $\mathbf{P}(a<\xi\leqslant b)$.

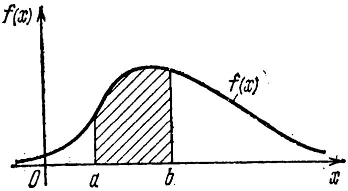


Рис. 21.3.

Перепишем (21.15) в виде

$$F(x)-F(x')=\int_{x'}^{x} f(t)\,dt,$$

и устремим x' к $-\infty$. Так как при этом $F(x')=\mathbf{P}(\xi\leqslant x')\to 0$, то

$$F(x)=\int_{-\infty}^{x} f(t)\,dt. \qquad (21.17)$$

Сопоставление формул (21.14) и (21.17) позволяет нам заключить, что закон распределения вероятностей для непрерывной случайной величины мы можем описать как при помощи ее кумулятивной функции распределения $F(x)$, так и посредством функции плотности вероятностей $f(x)$. (Любая из этих функций полностью определяет другую.)

Рассмотрим теперь несколько примеров непрерывных случайных величин. Пусть относительно некоторой случайной величины ξ известно, что все ее возможные значения заключены между числами a и b и что для всякого промежутка $[\alpha, \beta]$, целиком содержащегося в $[a, b]$, вероятность $\mathbf{P}(\alpha\leqslant\xi\leqslant\beta)$ пропорциональна длине этого промежутка (и тем самым не зависит от положения, занимаемого $[\alpha, \beta]$ на $[a, b]$):

$$\mathbf{P}(\alpha\leqslant\xi\leqslant\beta)=\lambda(\beta-\alpha). \qquad (21.18)$$

Полагая в (21.18) $\alpha=a$ и $\beta=b$ и учитывая, что по условию $\mathbf{P}(a\leqslant\xi\leqslant\beta)=1$, мы получаем, что $\lambda=1/(b-a)$. Найдем теперь кумулятивную функцию распределения. Ясно, что если $x<a$, то $F(x)=0$, а если $x>b$, то $F(x)=1$. Рассмотрим случай, когда $a\leqslant x\leqslant b$. Так как для каждого такого x событие $(\xi\leqslant x)$ можно представить в виде суммы несовместных событий $(\xi<a)$ и $(a\leqslant\xi\leqslant x)$, то

$$F(x)=\mathbf{P}(\xi\leqslant x)=\mathbf{P}(\xi<a)+\mathbf{P}(a\leqslant\xi\leqslant x).$$

Но $\mathbf{P}(\xi<a)=0$, а $\mathbf{P}(a\leqslant\xi\leqslant x)=(x-a)/(b-a)$ (согласно

(21.18). Поэтому окончательно получаем

$$F(x)=\begin{cases} 0, & \text{если} \quad x<a, \\ \dfrac{1}{b-a}(x-a), & \text{если} \quad a\leqslant x\leqslant b, \\ 1, & \text{если} \quad x>b. \end{cases} \tag{21.19}$$

Дифференцируя (21.19), мы получаем для нашей

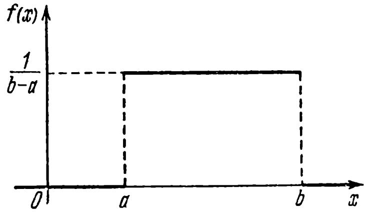


Рис. 21.4.

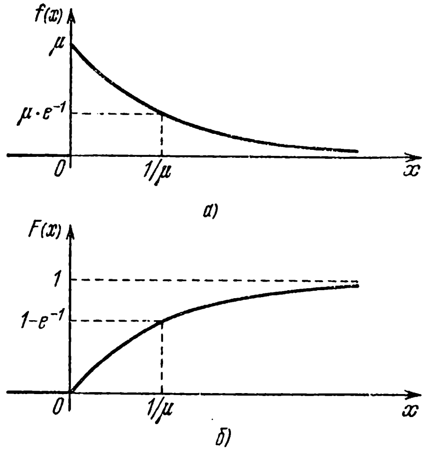


Рис. 21.5.

случайной величины функцию плотности вероятностей

$$f(x)=\begin{cases} \dfrac{1}{b-a}, & \text{если} \quad a<x<b, \\ 0, & \text{если} \quad x<a \text{ или } x>b \end{cases} \tag{21.20}$$

(рис. 21.4).

Определение 21.18. *Если функция плотности вероятностей случайной величины ξ определяется формулой*

(21.20), *то говорят, что* ξ *подчиняется равномерному закону распределения (закону равномерной плотности).*

Кроме равномерного закона распределения, мы здесь укажем еще два очень часто встречающихся в приложениях типовых закона: показательный и нормальный (см. определения 21.19 и 21.20).

Определение 21.19. *Говорят, что случайная величина подчиняется показательному закону распределения, если ее функция плотности вероятностей имеет вид* (рис. 21.5, *а*))

$$f(x) = \begin{cases} 0, & \text{если} \quad x < 0, \\ \mu e^{-\mu x}, & \text{если} \quad x > 0. \end{cases} \tag{21.21}$$

Используя формулу (21.17), мы можем получить и выражение для кумулятивной функции показательного распределения:

$$F(x) = \begin{cases} 0, & \text{если} \quad x < 0, \\ 1 - e^{-\mu x}, & \text{если} \quad x \geqslant 0. \end{cases} \tag{21.22}$$

(рис. 21.5, *б*)).

Определение 21.20. *Говорят, что случайная величина подчиняется нормальному закону распределения (с*

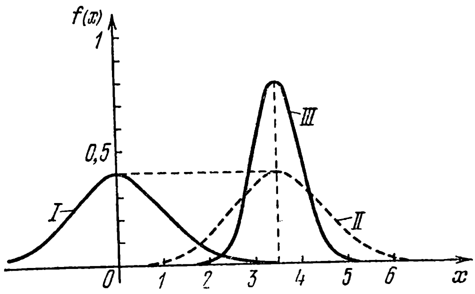


Рис. 21.6.

параметрами а и σ), если функция плотности вероятностей этой случайной величины имеет вид

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}}. \tag{21.23}$$

На рис. 21.6 даны графики функций при различных значениях параметров a и σ: для кривой I $a = 0$, $\sigma = 1$, для кривой II $a = 3{,}5$, $\sigma = 1$, для кривой III $a = 3{,}5$, $\sigma = 0{,}5$.

Кумулятивная функция нормального распределения

$$F(x)=\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\int\limits_{-\infty}^{x} e^{-\frac{(t-a)^2}{2\sigma^2}}dt \qquad (21.24)$$

в конечном виде не выражается через элементарные функции. Для нахождения ее значений используются различного рода таблицы. Мы здесь будем применять таблицу функции $\Phi_0(z)$ (см. приложение на стр. 366—367):

$$\Phi_0(z)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_{0}^{z} e^{-u^2/2}\,du. \qquad (21.25)$$

Произведя в интеграле из (21.24) замену переменной по формуле $u=(t-a)/\sigma$, получим

$$F(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_{-\infty}^{(x-a)/\sigma} e^{-u^2/2}\,du.$$

Разобьем получившийся интеграл на два

$$F(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_{-\infty}^{0} e^{-u^2/2}du+\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_{0}^{(x-a)/\sigma} e^{-u^2/2}du. \qquad (21.26)$$

Второй из этих интегралов, согласно (21.25), равен $\Phi_0\left(\frac{x-a}{\sigma}\right)$ и может быть вычислен по таблице. Что же касается первого, то, заметив, что

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{-u^2/2}\,du=1$$

(ибо этот интеграл представляет собой вероятность достоверного события—попадания в промежуток $(-\infty, +\infty)$ случайной величины, подчиняющейся нормальному закону распределения с параметрами $a=0$ и $\sigma=1$), и что подынтегральная функция четная, мы приходим к выводу, что

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_{-\infty}^{0} e^{-u^2/2}\,du=0{,}5.$$

Теперь мы можем переписать (21.26) так:

$$F(x)=0{,}5+\Phi_0\left(\frac{x-a}{\sigma}\right). \qquad (21.27)$$

Эта формула дает возможность вычислять значения $F(x)$ для любого нормального распределения (с известными a и σ) с помощью таблицы функции $\Phi_0(z)$.

Можно показать, что при любых значениях параметров a и σ для нормального распределения справедливы формулы

$$\begin{gathered} \mathbf{P}(a-\sigma \leqslant \xi \leqslant a+\sigma)=0{,}6827, \\ \mathbf{P}(a-2\sigma \leqslant \xi \leqslant a+2\sigma)=0{,}9545, \\ \mathbf{P}(a-3\sigma \leqslant \xi \leqslant a+3\sigma)=0{,}9973. \end{gathered} \tag{21.28}$$

Несколько огрубляя существо дела, можно сказать, что при большом числе наблюдений над реализациями случайной величины, подчиняющейся нормальному закону распределения, примерно 68% от общего числа результатов окажутся удаленными от точки a не более чем на σ, примерно 95% — не более чем на 2σ и только около 0,3% результатов выйдут за пределы так называемого «трехсигмового» интервала $(a-3\sigma,\ a+3\sigma)$. Во многих практических задачах вероятностью выхождения σ за пределы промежутка $(a-3\sigma,\ a+3\sigma)$, равной 0,0027, можно пренебречь и тем самым считать событие $(|\xi-a|<3\sigma)$ практически достоверным, а противоположное ему событие $(|\xi-a|\geqslant 3\sigma)$ — практически невозможным[1]).

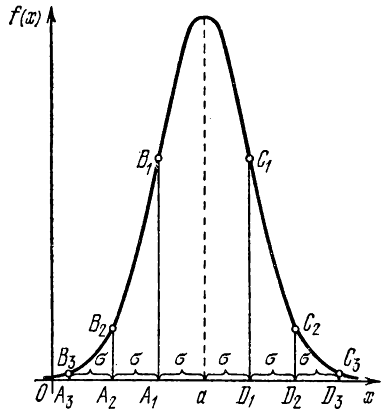


Рис. 21.7.

Рис. 21.7 иллюстрирует формулы (21.28) (на рис. 21.7 площадь $A_1B_1C_1D_1=0{,}6827$, площадь $A_2B_2C_2D_2=0{,}9545$, площадь $A_3B_3C_3D_3=0{,}9973$).

Решение многих практических задач приводит к необходимости по заданному значению вероятности p находить такое значение x_p, чтобы для него было

$$P(\xi \leqslant x_p)=p$$

[1]) Такой подход называют часто «практическим правилом трех сигм».

или, что то же самое,

$$F(x_p)=p. \tag{21.29}$$

В связи с этим оказывается удобным понятие *(p)-квантиля распределения.* Мы здесь дадим соответствующее определение для непрерывных случайных величин.

Определение 21.21. *Пусть ξ — непрерывная случайная величина, $F(x)$ — ее кумулятивная функция распределения, а p — некоторое число, заключенное между* 0 *и* 1; *(p)-квантилем распределения ξ называется число x_p, определяемое формулой* (21.29).

Для многих типовых законов распределения, кроме таблиц, задающих их функции распределения, разработаны еще и таблицы квантилей.

§ 21.3. Сводные числовые характеристики. Аппроксимация распределений

21.3.1. Сводные числовые характеристики выборочных и теоретических распределений. Предположим, что в результате проведения серии из n «испытаний» мы зарегистрировали последовательность

$$x_1,\ x_2,\ \ldots,\ x_n \tag{21.30}$$

значений некоторой изучаемой нами величины ξ. Если мы имеем в виду для описания ξ использовать аппарат случайных величин и их законов распределения[1]), то эти полученные значения будем называть *реализациями случайной величины* ξ, а весь ряд чисел (21.30) — *одномерной выборкой*, составленной из этих реализаций. Число n называется *объемом* этой *выборки*.

Располагая числа x_i в порядке их возрастания, получаем так называемый *ранжированный ряд*

$$x'_1 \leqslant x'_2 \leqslant x'_3 \leqslant \ldots \leqslant x'_n. \tag{21.31}$$

В ранжированном ряде может оказаться немало повторяющихся чисел. Записывая каждое из различных значений, встречающихся в (21.31) только один раз, и указывая рядом с ним количество его появлений в этом ряду, мы приходим к следующей таблице (см. табл. 21.6),

---

[1]) То есть если мы априори полагаем, что ξ может быть описана с помощью такого рода моделей. (Говорят еще: если ξ подчиняется некоторому, пусть и неизвестному нам, закону распределения.)

называемой обычно *рядом абсолютных частот* (точнее: *дискретным рядом абсолютных частот*; смысл этого замечания станет нам ясен ниже).

ТАБЛИЦА 21.6

Значения ξ	$\hat{x}_1$	$\hat{x}_2$	...	$\hat{x}_{m-1}$	$\hat{x}_m$
Абсолютные частоты	n_1	n_2	...	n_{m-1}	n_m

Заменяя в табл. 21.6 абсолютные частоты n_j на относительные частоты $\nu_j = n_j/n$, мы получаем *ряд относительных частот* (см. табл. 21.7).

ТАБЛИЦА 21.7

Значения ξ	$\hat{x}_1$	$\hat{x}_2$	...	$\hat{x}_{m-1}$	$\hat{x}_m$
Относительные частоты	ν_1	ν_2	...	ν_{m-1}	ν_m

Наконец, указывая рядом с каждым из значений $\hat{x}_j$ сумму относительных частот, соответствующих всем не превосходящим $\hat{x}_j$ значениям: $Q_j = \nu_1 + \nu_2 + \ldots + \nu_j$ (см. табл. 21.8), мы приходим к ряду *накопленных относительных частот* (*кумулятивному ряду относительных частот*).

ТАБЛИЦА 21.8

Значения ξ	$\hat{x}_1$	$\hat{x}_2$	...	$\hat{x}_{m-1}$	$\hat{x}_m$
Накопленные относительные частоты	Q_1	Q_2	...	Q_{m-1}	Q_m

Очевидна аналогия между рядами относительных и накопленных относительных частот, с одной стороны, и таблицами распределения вероятностей и накопленных вероятностей для дискретной случайной величины — с другой. Способы геометрического изображения этих рядов такие же, как и для их теоретико-вероятностных аналогов, с той лишь разницей, что вместо вероятностей здесь фигурируют относительные частоты.

Нередко оказывается целесообразным вместо дискретных рядов выборочных распределений строить интервальные ряды. В этих случаях мы, отправляясь от некоторого промежутка $(a, b]$, целиком содержащего в себе выборку (21.30), дробим его на частичные промежутки $(\tilde{x}_{j-1}, \tilde{x}_j]$ и сопоставляем каждому из них число $\tilde{n}_j$ тех членов ряда (21.30), которые попадают в этот промежуток ($\tilde{n}_j$ тоже называется *абсолютной частотой*). Такой интервальный ряд абсолютных частот представлен табл. 21.9.

ТАБЛИЦА 21.9

Интегралы	$(\tilde{x}_0, \tilde{x}_1]$	$(\tilde{x}_1, \tilde{x}_2]$	...	$(\tilde{x}_{m-2}, \tilde{x}_{m-1}]$	$(\tilde{x}_{m-1}, \tilde{x}_m]$
Абсолютные частоты	$\tilde{n}_1$	$\tilde{n}_2$	...	$\tilde{n}_{m-1}$	$\tilde{n}_m$

Аналогично записываются интервальные ряды относительных и накопленных относительных частот. (Заметим, что интервальные ряды можно записать и так, как это сделано в табл. 21.6—21.8, если под $\hat{x}_j$ понимать центр соответствующего частичного промежутка.)

Выборочные ряды распределения, особенно в тех случаях, когда выборка имеет большой объем, как правило, достаточно хорошо характеризуют изучаемую случайную величину. Иногда (пример тому мы видели в начале п. 21.1.5) мы получаем вероятностные модели непосредственно из выборочных рядов распределений, полагая вероятности равными соответствующим относительным частотам. Нередко, однако, возникает необходимость в описании результатов наблюдений более компактным образом, нежели тот, который дают нам таблицы типа 21.6—21.9. В этих случаях оказываются удобными так называемые сводные числовые характеристики выборки. Некоторые наиболее употребительные из таких характеристик мы сейчас рассмотрим.

Определение 21.22. *Выборочным средним, рассчитанным по выборке* (21.30), *называется среднее* *арифметическое членов этой выборки*

$$\bar{x}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}x_i. \tag{21.32}$$

Среднее арифметическое квадратов отклонений выборочных значений от $\bar{x}$ называется выборочной дисперсией:

$$D_B=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})^2. \tag{21.33}$$

Величина $\sigma_B=\sqrt{D_B}$ называется выборочным средним квадратическим отклонением.

Величина $\bar{x}$ представляет собой в определенном смысле центр выборочного распределения, а D_B и σ_B характеризуют собой степень «рассеяния» выборочных значений вокруг этого центра. (Целесообразность рассмотрения наряду с D_B еще и σ_B объясняется тем, что σ_B, в отличие от D_B, имеет ту же «физическую» размерность, что и изучаемая величина ξ.)

Очевидно, что, используя ряд абсолютных частот, мы получаем для $\bar{x}$ и D_B следующие выражения:

$$\bar{x}=\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{m}n_j\hat{x}_j, \tag{21.32'}$$

$$D_B=\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{m}n_j(\hat{x}_j-\bar{x})^2. \tag{21.33'}$$

Внося множитель $1/n$ под знак суммы и заменяя отношение n_j/n на ν_j, будем иметь

$$\bar{x}=\sum_{j=1}^{m}\nu_j\hat{x}_j, \tag{21.32''}$$

$$D_B=\sum_{j=1}^{m}\nu_j(\hat{x}_j-\bar{x})^2. \tag{21.33''}$$

Аналогичные характеристики оказываются удобными и для описания теоретических распределений. Дадим соответствующие определения сначала для дискретных, а затем для непрерывных случайных величин.

Определение 21.23. *Пусть ξ—дискретная случайная величина, x_1, x_2, $x_3, \ldots$—ее возможные значения,* *а* $p_1 = \mathbf{P}(\xi = x_1)$, $p_2 = \mathbf{P}(\xi = x_2)$, ... — *соответствующие этим значениям вероятности. Тогда величина*

$$\mathbf{M}(\xi) = \sum_i x_i p_i \tag{21.34}$$

называется математическим ожиданием случайной величины ξ, *а величины*

$$\mathbf{D}(\xi) = \sum_i (x_i - \mathbf{M}(\xi))^2 p_i \tag{21.35}$$

и

$$\sigma(\xi) = \sqrt{\mathbf{D}(\xi)} \tag{21.36}$$

соответственно — ее дисперсией и средним квадратическим отклонением.

Правые части формул (21.34) и (21.35) отличаются от правых частей формул (21.32″) и (21.33″) только тем, что вместо относительных частот здесь использованы вероятности, а вместо $\bar{x}$ взято $\mathbf{M}(\xi)$. Учитывая, что при достаточно большом количестве наблюдений относительные частоты, как правило, близки к соответствующим вероятностям: $\nu_i \cong p_i$, мы можем сказать, что математическое ожидание характеризует собой центр распределения случайной величины, а дисперсия и среднее квадратическое отклонение являются «мерами рассеяния» возможных значений случайной величины относительно ее центра распределения.

Естественно, что в тех случаях, когда вероятностная модель для описания какого-либо реального явления или процесса выбрана удачно, при достаточно большом числе наблюдений «выборочные» и «теоретические» характеристики будут близки друг к другу

$$\bar{x} \approx \mathbf{M}(\xi), \quad D_B \approx \mathbf{D}(\xi), \quad \sigma_B \approx \sigma(\xi). \tag{21.37}$$

Определение 21.24. *Пусть* ξ — *непрерывная случайная величина, а* $f(x)$ — *ее функция плотности вероятностей. Тогда математическим ожиданием* ξ *называется число*

$$\mathbf{M}(\xi) = \int_{-\infty}^{+\infty} x f(x)\, dx, \tag{21.38}$$

дисперсией ξ — *число*

$$\mathbf{D}(\xi) = \int_{-\infty}^{+\infty} [x - M(\xi)]^2 f(x)\, dx, \tag{21.39}$$

а средним квадратическим отклонением — число $\sigma(\xi) = \sqrt{\mathbf{D}(\xi)}$.

Заменив приближенно несобственные интегралы по бесконечному промежутку интегралами, взятыми в пределах от $-A$ до A (где A — некоторое достаточно большое число), а эти последние — соответствующими им интегральными суммами, получим

$$\mathbf{M}(\xi) \approx \sum_i x_i f(x_i)\,\Delta x_i,$$

$$\mathbf{D}(\xi) \approx \sum_i [x_i - \mathbf{M}(\xi)]^2 f(x_i)\,\Delta x_i.$$

Учитывая, что произведение $f(x_i)\,\Delta x_i$ (опять-таки приближенно) представляет собой вероятность попадания случайной величины в i-й частичный промежуток, мы видим, что и в «непрерывном случае» математическое ожидание и дисперсия имеют смысл, аналогичный смыслу $\bar{x}$ и D_B.

Дадим (без вывода) сводку формул для математического ожидания и дисперсии известных нам типовых законов распределения (см. табл. 21.10).

ТАБЛИЦА 21.10

Наименование распределения	Формулы описывающие закон распределения	$\mathbf{M}(\xi)$	$\mathbf{D}(\xi)$
Геометрическое	$\mathbf{P}(\xi = x) = p(1-p)^{x-1}$, $x = 1, 2, 3, \ldots$	$\frac{1}{p}$	$\frac{1-p}{p^2}$
Биномиальное	$\mathbf{P}(\xi = x) = C_n^x p^x (1-p)^{n-x}$, $x = 0, 1, 2, \ldots, n$	np	$np(1-p)$
Равномерное	$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{b-a}, & \text{если } a < x < b, \\ 0, & \text{если } x < a \text{ или } x > b \end{cases}$	$\frac{a+b}{2}$	$\frac{(b-a)^2}{12}$
Показательное	$f(x) = \begin{cases} 0, & \text{если } x < 0, \\ \mu \cdot e^{-\mu x}, & \text{если } x > 0 \end{cases}$	$\frac{1}{\mu}$	$\frac{1}{\mu^2}$
Нормальное	$f(x) = \frac{1}{\sigma \cdot \sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}}$	a	σ^2

Формулы такого рода получены (их можно найти в справочниках) для большого числа типовых законов распределения. Это обстоятельство, наряду с наличием приближенных равенств (21.37), нередко используют при построении вероятностных моделей по результатам наблюдений. Вместо того чтобы полагать «теоретические вероятности» равными (точным или округленным) значениям относительных частот, в тех случаях, когда имеется определенная уверенность в применимости для исследуемого явления того или иного типового закона распределения, рассчитывают, пользуясь формулами (21.37), конкретные значения параметров этого закона.

Пусть, например, в результате наблюдений над некоторой случайной величиной ξ мы получили такой ряд абсолютных частот, как указано в табл. 21.11.

ТАБЛИЦА 21.11

Интервал	2—3	3—4	4—5	5—6	6—7	7—8	8—9	9—10
Центр интервала	2,5	3,5	4,5	5,5	6,5	7,5	8,5	9,5
Абсолютные частоты	2	4	7	16	28	21	12	10

Пусть также (по тем или иным основаниям) мы считаем, что эта величина подчиняется нормальному закону распределения с неизвестными заранее значениями параметров a и σ.

Рассчитывая по формулам (21.32′) и (21.33′) выборочное среднее $\bar{x}$ и выборочную дисперсию D_B, мы получаем (объем выборки в нашем примере равен 100):

$$\bar{x}=\frac{1}{100}(2,5\cdot 2+3,5\cdot 4+\ldots+8,5\cdot 12+9,5\cdot 10)=6,75,$$

$$D_B=\frac{1}{100}(2,5-6,75)^2\cdot 2+(3,5-6,75)^2\cdot 4+\ldots$$
$$\ldots+(9,5-6,75)^2\cdot 10=2,6475\approx 2,65.$$

С другой стороны, $\mathbf{M}(\xi)=a$, $\mathbf{D}(\xi)=\sigma^2$ (см. табл. 21.10). Приравнивая теперь (на основании 21.37) $\mathbf{M}(\xi)$ к $\bar{x}$, а $\mathbf{D}(\xi)$

к D_B, получаем

$$\begin{cases} a = 6{,}75, \\ \sigma^2 = 2{,}65, \end{cases}$$

откуда $\sigma = 1{,}63$. Следовательно, искомая вероятностная модель описывается функцией плотности вероятностей

$$f(x) = \frac{1}{1{,}63\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-6{,}75)^2}{2\cdot 1{,}63^2}}.$$

На рис. 21.8 приведены гистограмма данной выборки и график $f(x)$.

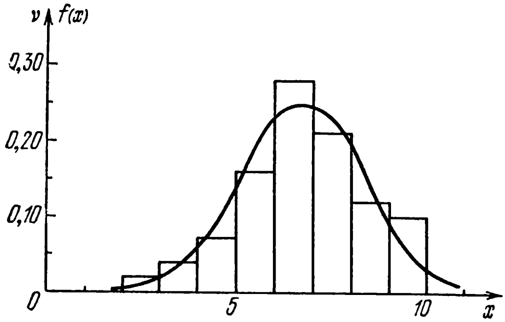


Рис. 21.8.

Такой подход к построению вероятностной модели называется *методом моментов*, ибо математическое ожидание и дисперсия представляют собой частные случаи так называемых *моментов распределения*. А именно, для дискретной случайной величины число

$$\alpha_k = \sum_i x_i^k p_i \tag{21.40}$$

называется *начальным моментом распределения порядка k*, а число

$$\mu_k = \sum_i [x_i - \mathbf{M}(\xi)]^k p_i, \tag{21.41}$$

— *центральным моментом k-го порядка.*

Для непрерывных случайных величин эти моменты определяются так

$$\alpha_k = \int_{-\infty}^{+\infty} x^k f(x)\,dx, \tag{21.42}$$

$$\mu_k = \int_{-\infty}^{+\infty} [x - \mathbf{M}(\xi)]^2 f(x)\,dx. \tag{21.43}$$

Видно, что $\mathbf{M}(\xi)$ представляет собой начальный момент первого порядка, а $\mathbf{D}(\xi)$ — центральный момент второго порядка.

Имеются формулы, позволяющие вычислять значения центральных моментов по известным значениям начальных и наоборот. В частности, нередко оказывается удобной следующая формула для дисперсии:

$$\mathbf{D}(\xi) = \alpha_2 - \alpha_1^2. \tag{21.44}$$

Выражения для выборочных моментов получаются из формул (21.40) и (21.41) заменой в них p_i на ν_i и $\mathbf{M}(\xi)$ на $\bar{x}$. Формулы типа (21.44) справедливы и в этом случае. Обычно начальные выборочные моменты обозначают через a_k, а центральные — через m_k.

21.3.2. Аппроксимация законов распределения. В процессе изучения этой темы мы уже касались вопроса о том, что для описания одного и того же реального явления или процесса с достаточной для практических целей точностью могут быть использованы различные вероятностные модели. В некоторых случаях оказывается целесообразным заменить уже построенную модель (адекватность которой, т. е. пригодность для описания соответствующей реальной ситуации, тем или иным способом уже установлена) другой моделью, более удобной с каких-либо точек зрения. Сам по себе процесс проверки той или иной модели на ее адекватность обычно достаточно сложен [1]), поэтому при переходе от одной уже проверенной модели к другой, желательно для этой второй модели максимально упростить соответствующую процедуру, использовав то обстоятельство, что для первой из моделей адекватность уже установлена.

---

[1]) Здесь мы не рассматриваем вопрос о том, как именно осуществляется такая проверка.

Если речь идет о моделях, сформулированных на языке случайных величин, то здесь во многих случаях оказывается полезным сравнение соответствующих функций распределения. Так, например, если мы собираемся решать задачу определения вероятности попадания случайной величины в тот или иной промежуток $[x', x'']$, и если для соответствующей области X изменения x справедливо неравенство $|F_2(x)-F_1(x)|<\varepsilon$ (здесь $F_1(x)$ и $F_2(x)$ кумулятивные функции распределения сравниваемых случайных величин), то для любых x' и x'' из X имеем[1])

$$\begin{aligned}
|\mathbf{P}_2(x'<\xi\leqslant x'')-\mathbf{P}_1(x'<\xi\leqslant x'')| &= \\
&=|(F_2(x'')-F_2(x'))-(F_1(x'')-F_1(x'))|= \\
&=|(F_2(x'')-F_1(x''))-(F_2(x')-F_1(x'))|\leqslant \\
&\leqslant|F_2(x'')-F_1(x'')|+|F_2(x')-F_1(x')|<2\varepsilon.
\end{aligned}$$

Иными словами, расхождение результатов, полученных при использовании одной и второй модели, будет меньше чем 2ε. Заметим, что понятие «близости» двух моделей отнюдь не является абсолютным. Здесь многое зависит как от требуемой точности вычислений, так и от особенностей тех задач, которые мы намереваемся решать.

Одним из наиболее часто встречающихся случаев такой замены моделей является аппроксимация биномиального закона нормальным распределением. При больших значениях n вычисление вероятностей по формуле (21.11) становится очень неудобным. Тем более неудобным оказывается вычисление вероятностей попадания ξ в тот или иной промежуток.

Оказывается (мы здесь не будем этого доказывать), что при достаточно больших n биномиальное распределение с параметрами n и p хорошо аппроксимируется нормальным законом распределения, если значения параметров последнего положить равными

$$a=np, \quad \sigma=\sqrt{np(1-p)}. \tag{21.45}$$

(Происхождение этих формул легко установить, сравнив между собой выражения для математического ожидания и дисперсии биномиального и нормального распределений, — см.табл. 21.10. Мы выбираем здесь параметры аппроксимирующего закона таким образом, чтобы его

---

[1]) Индексы в выражениях $\mathbf{P}_2(\cdot)$ и $\mathbf{P}_1(\cdot)$ указывают на то, какая именно модель используется для вычисления вероятностей.

математическое ожидание и дисперсия совпали с соответствующими характеристиками аппроксимируемого распределения.)

Мы не будем здесь давать какие-либо числовые оценки качества приближения и заметим лишь, что для большинства не требующих высокой точности практических задач такая аппроксимация считается допустимой, если параметры биномиального закона таковы, что $np(1-p)>9$ и $\frac{1}{n+1}<p<1-\frac{1}{1+n}$.

Обозначая через $F_б(x)$ кумулятивную функцию биномиального распределения, а через $F_н(x)$ — аппроксимирующего его нормального, получаем

$$\mathbf{P}(x_1<\xi\leqslant x_2)=F_б(x_2)-F_б(x_1)\approx F_н(x_2)-F_н(x_1). \tag{21.46}$$

Формула (21.37) с учетом соотношений (21.45) дает

$$F_н(x)=0{,}5+\Phi_0\left(\frac{x-np}{\sqrt{np(1-p)}}\right),$$

после чего (21.46) мы можем переписать в виде

$$\mathbf{P}(x_1<\xi\leqslant x_2)\approx\Phi_0\left(\frac{x_2-np}{\sqrt{np(1-p)}}\right)-\Phi_0\left(\frac{x_1-np}{\sqrt{np(1-p)}}\right), \tag{21.47}$$

которая оказывается удобной, если имеется в виду использование таблиц $\Phi_0(z)$. Эту формулу, согласно определению $\Phi_0(z)$ (см. (21.25)), можно записать и так:

$$\mathbf{P}(x_1<\xi\leqslant x_2)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{u_1}^{u_2}e^{-u^2/2}\,du, \tag{21.48}$$

где $u_1=\frac{x_1-np}{\sqrt{np(1-p)}}$ и $u_2=\frac{x_2-np}{\sqrt{np(1-p)}}$. Ее называют обычно *интегральной формулой Муавра—Лапласа.*

21.3.3. Понятие о законе больших чисел. Вернемся теперь к рассмотренной нами в п. 21.2.2 схеме повторения испытаний. Мы видели, что при проведении серии из n независимых испытаний, в каждом из которых с вероятностью p может произойти событие A, количество ξ появлений этого события представляет собой случайную величину, подчиняющуюся биномиальному закону распределения с параметрами n и p (см. также формулу (21.11)). Сейчас мы, выбрав произвольно положительное число ε, подсчитаем вероятность того, что абсолютная величина разности между относительной частотой ξ/n появления A и его вероятностью p окажется меньше ε. Неравенство

$$\left|\frac{\xi}{n}-p\right|<\varepsilon, \tag{21.49}$$

как нетрудно видеть, равносильно неравенству

$$-\varepsilon<\frac{\xi}{n}-p<\varepsilon,$$

а это последнее — неравенству

$$np-n\varepsilon<\xi<np+n\varepsilon. \tag{21.50}$$

Стало быть,

$$\mathbf{P}\left(\left|\frac{\xi}{n}-p\right|<\varepsilon\right)=\mathbf{P}\,(np-n\varepsilon<\xi<np+n\varepsilon).$$

Применим для вычисления этой вероятности интегральную формулу Муавра—Лапласа (21.48)

$$\mathbf{P}\,(np-n\varepsilon<\xi<np+n\varepsilon)\approx\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{u_1}^{u_2}e^{-u^2/2}\,du, \tag{21.51}$$

где

$$\begin{aligned} u_1&=\frac{(np-n\varepsilon)-np}{\sqrt{np(1-p)}}=-\frac{\varepsilon\sqrt{n}}{\sqrt{p(1-p)}},\\ u_2&=\frac{(np+n\varepsilon)-np}{\sqrt{np(1-p)}}=\frac{\varepsilon\sqrt{n}}{\sqrt{p(1-p)}}. \end{aligned} \tag{21.52}$$

Подставляя (21.52) в (21.51), и записывая ее левую часть в виде $\mathbf{P}\left(\left|\frac{\xi}{n}-p\right|<\varepsilon\right)$, получаем

$$\mathbf{P}\left(\left|\frac{\xi}{n}-p\right|<\varepsilon\right)\approx\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\frac{\varepsilon\sqrt{n}}{\sqrt{p(1-p)}}}^{\frac{\varepsilon\sqrt{n}}{\sqrt{p(1-p)}}}e^{-u^2/2}\,du. \tag{21.53}$$

Устремляя n к ∞ (при фиксированных p и ε) в правой части (21.53), получим интеграл

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-u^2/2}\,du$$

который равен 1, ибо он представляет собой вероятность достоверного события: попадания в интервал $(-\infty, +\infty)$ случайной величины η, подчиняющейся нормальному закону распределения с параметрами $a=0$ и $\sigma=1$ (см. определение 21.20). Следовательно,

$$\mathbf{P}\left(\left|\frac{\xi}{n}-p\right|<\varepsilon\right)\to 1 \quad \text{при} \quad n\to\infty. \tag{21.54}$$

Мы можем теперь сказать, что вероятность события (21.49) при достаточно большом числе испытаний может быть сделана сколь угодно близкой к 1. Следовательно, противоположное ему событие

$$\left|\frac{\xi}{n}-p\right|\geqslant\varepsilon$$

при больших значениях n можно считать практически невозможным (при условии, конечно, что испытания действительно независимы и вероятность осуществления A в каждом из них сохраняется равной p). Это утверждение называют обычно *законом больших чисел в форме Я. Бернулли.*

§ 21.4. Системы случайных величин

21.4.1. Совместные распределения случайных величин. Пусть Ω — алгебра событий (с заданной на ней вероятностной функцией), порожденная системой элементарных событий $\mathrm{E}=\{e\}$, и пусть на E заданы две случайные величины $\xi=f(e)$ и $\eta=g(e)$. Во многих случаях именно совместное изучение этих величин и представляет для нас интерес. Для этой цели мы можем, подобно тому как это было сделано при изучении одной случайной величины, рассмотреть новую алгебру событий Ω', построив ее на базе системы элементарных событий E', составленной на этот раз из событий вида $(\xi=x,\ \eta=y)$

$$\mathrm{E}'=\{(\xi=x,\ \eta=y)\}, \tag{21.55}$$

где пары чисел $(x,\ y)$ представляют собой возможные комбинации значений величин ξ и η. Вероятностная функция на алгебре Ω' может быть описана различными способами. В тех случаях, когда ξ и η являются дискретными случайными величинами, используют обычно таблицы или формулы, сопоставляющие событиям вида $(\xi=x,\ \eta=y)$ их вероятности. В общем случае вероятностная функция на Ω' полностью определяется указанием так называемой *кумулятивной функции совместного распределения*

$$F(x, y) = \mathbf{P}(\xi \leqslant x, \ \eta \leqslant y). \qquad (21.56)$$

Если $F(x, y)$ непрерывна и имеет непрерывную везде, за исключением, может быть, изолированных точек и линий, смешанную производную $f(x, y) = \frac{\partial^2 F}{\partial x\, \partial y}$, то эта последняя называется *функцией плотности вероятностей совместного распределения величин ξ и η*. (Совместное распределение, имеющее функцию плотности вероятностей, называют обычно *непрерывным*.) Если ξ и η дискретны, то распределение вероятностей по возможным комбинациям их значений геометрически может быть проиллюстрировано при помощи так называемой *призмограммы*. Призмограмма представляет собой тело, составленное из прямоугольных параллелепипедов, нижние основания которых располагаются на плоскости xOy так, чтобы их центры совпадали с возможными комбинациями значений ξ и η. Объемы же этих параллелепипедов численно равны соответствующим вероятностям. На рис. 21.9 в качестве примера приведена призмограмма совместного распределения, задаваемого табл. 21.12. Можно было бы показать, что в тех случаях, когда существует функция

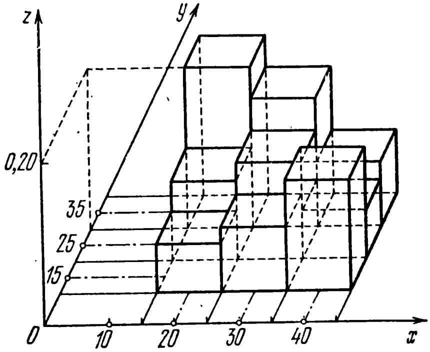


Рис. 21.9.

ТАБЛИЦА 21.12

x \ y	15	25	35
20	0,06	0,10	0,20
30	0,08	0,12	0,16
40	0,14	0,06	0,08

плотности вероятностей совместного распределения величин ξ и η, для любой области D на плоскости xOy справедлива формула

$$\mathbf{P}\,[(\xi,\ \eta) \in D] = \iint\limits_{D} f(x,\ y)\,dx\,dy. \qquad (21.57)$$

Интеграл в правой части этой формулы (21.57) геометрически представляет собой объем тела, ограниченного снизу областью D, сверху — графиком $f(x,\ y)$, а сбоку — цилиндрической поверхностью, образующая которой параллельна оси аппликат (рис. 21.10).

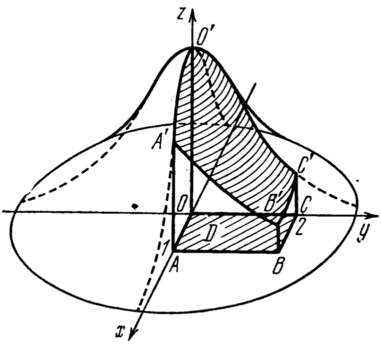


Рис. 21.10.

Отметим, что знание закона совместного распределения двух случайных величин позволяет, в частности, найти законы распределения каждой из них в отдельности. Действительно, так как событие $(\xi \leqslant x)$ мы можем записать в виде $(\xi \leqslant x;\ \eta < +\infty)$, то для кумулятивной функции распределения величины ξ справедливо

$$F_{\xi}(x) = \mathbf{P}\,(\xi \leqslant x) = \mathbf{P}\,(\xi \leqslant x,\ \eta < +\infty) = \lim_{y \to +\infty} F(x,\ y),$$

где $F(x,\ y)$ — кумулятивная функция совместного распределения ξ и η.

Если ξ и η дискретны, то значения вероятностей $\mathbf{P}\,(\xi = x)$ получаются суммированием соответствующих вероятностей $\mathbf{P}\,(\xi = x,\ \eta = y)$. Так, например, для совместного распределения, заданного табл. 21.12, мы получаем

$$\mathbf{P}\,(\xi = 20) = \mathbf{P}\,(\xi = 20,\ \eta = 15) + \mathbf{P}\,(\xi = 20,\ \eta = 25) + \\ + \mathbf{P}\,(\xi = 20,\ \eta = 35) = 0{,}06 + 0{,}10 + 0{,}20 = 0{,}36$$

Аналогично

$$\mathbf{P}\,(\xi = 30) = 0{,}08 + 0{,}12 + 0{,}16 = 0{,}36,$$

$$\mathbf{P}\,(\xi = 40) = 0{,}14 + 0{,}06 + 0{,}08 = 0{,}28.$$

Сведем эти результаты в табл. 21.13.

ТАБЛИЦА 21.13

x	20	30	40
$\mathbf{P}(\xi = x)$	0,36	0,36	0,28

Таким же образом может быть получено и распределение вероятностей для величины η (см. табл. 21.14).

ТАБЛИЦА 21.14

y	15	25	35
$\mathbf{P}(\eta = y)$	0,28	0,28	0,44

Если же для ξ и η существует функция плотности вероятностей их совместного распределения, то (ср. с формулой (21.57))

$$F_\xi(x) = \mathbf{P}(\xi \leqslant x) = \iint\limits_{D_x} f(x, y)\, dx\, dy, \qquad (21.58)$$

где D_x представляет собой часть плоскости xOy, лежащую влево от прямой, проведенной через точку x на оси Ox параллельно оси Oy (см. формулу (21.57)). Заменяя в (21.58) двойной интеграл повторным, получаем

$$F_\xi(x) = \int_{-\infty}^{x} dx \int_{-\infty}^{+\infty} f(x, y)\, dy,$$

откуда, дифференцируя по x, получаем для функции плотности вероятностей величины ξ

$$f_\xi(x) = \frac{d}{dx} F_\xi(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x, y)\, dy. \qquad (21.59)$$

Аналогично для плотности вероятностей величины η

$$f_\eta(y) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x, y)\, dx. \qquad (21.60)$$

Одной из основных задач, которые решаются при изучении совместно распределенных случайных величин, является отыскание законов распределения одной из них при условии, что вторая принимает то или иное фиксированное значение. Так, пользуясь формулой условной вероятности

$$\mathbf{P}_A(B) = \frac{\mathbf{P}(A \cdot B)}{\mathbf{P}(A)}$$

(см. п. 21.1.4) для совместного распределения, заданного табл. 21.12, получаем

$$\mathbf{P}_{\xi=20}(\eta=15) = \frac{\mathbf{P}(\xi=20,\ \eta=15)}{\mathbf{P}(\xi=20)} = \frac{0{,}06}{0{,}36} = \frac{1}{6} = 0{,}1666\ldots,$$

$$\mathbf{P}_{\xi=20}(\eta=25) = \frac{\mathbf{P}(\xi=20,\ \eta=25)}{\mathbf{P}(\xi=20)} = \frac{0{,}10}{0{,}36} = \frac{5}{18} = 0{,}2777\ldots,$$

$$\mathbf{P}_{\xi=20}(\eta=35) = \frac{\mathbf{P}(\xi=20,\ \eta=35)}{\mathbf{P}(\xi=20)} = \frac{0{,}20}{0{,}36} = \frac{5}{9} = 0{,}5555\ldots$$

Рассчитанные значения дают нам условное распределение η при $\xi=20$ (см. табл. 21.15).

ТАБЛИЦА 21.15

y	15	25	35
$\mathbf{P}_{\xi=20}(\eta=y)$	1/6	5/18	5/9

Аналогично могут быть рассчитаны и таблицы условных распределений η при $\xi=30$ и $\xi=40$ (см. табл. 21.16 и 21.17).

ТАБЛИЦА 21.16

y	15	25	35
$\mathbf{P}_{\xi=30}(\eta=y)$	2/9	1/3	4/9

ТАБЛИЦА 21.17

y	15	25	35
$\mathbf{P}_{\xi=40}(\eta=y)$	1/2	3/14	2/7

Заметим, что распределение одной из составляющих систему случайных величин, рассчитанное без каких-либо предположений относительно второй величины, часто называют *безусловным распределением.* (Так, например, можно сказать, что табл. 21.13 описывает безусловное распределение случайной величины ξ, а табл. 21.14 — величины η).

21.4.2. Регрессионные зависимости и сводные числовые характеристики совместных распределений. Задание безусловного закона распределения одной из составляющих систему случайных величин и отвечающих всем возможным ее значениям условных распределений второй величины позволяет в точности «восстановить» закон их совместного распределения. Действительно, согласно общей формуле умножения вероятностей

$$\mathbf{P}(A \cdot B) = \mathbf{P}(A)\, \mathbf{P}_A(B),$$

мы (в «дискретном случае») имеем

$$\mathbf{P}(\xi = x,\ \eta = y) = \mathbf{P}(\xi = x)\, \mathbf{P}_{\xi = x}(\eta = y), \tag{21.61}$$

где первый сомножитель правой части дается нам безусловным распределением ξ, а второй — условным распределением η при $\xi = x$. (Для «непрерывного случая», т. е. такого, когда совместное распределение может быть задано своей функцией плотности вероятностей, мы не будем приводить доказательства.) Образно выражаясь, можно сказать, что справедлива следующая «формула»:

Совместное распределение ξ и η	=	Безусловное распределение ξ	+	Всевозможные условные (при $\xi = x$) распределения η	.

(21.62)

Второе «слагаемое» правой части этой «формулы» часто оказывается очень громоздким. Действительно, ведь количество составляющих его условных распределений η равно количеству возможных значений случайной величины ξ. Заменив каждое из этих условных распределений некоторым набором его сводных числовых характеристик, например математическим ожиданием $\mathbf{M}_{\xi = x}(\eta)$ и средним квадратическим отклонением $\sigma_{\xi = x}(\eta)$, мы получим конструкцию

Безусловное распределение ξ	+	Совокупность $\{\mathbf{M}_{\xi = x}(\eta),\ \sigma_{\xi = x}(\eta)\}$ сводных числовых характеристик условных распределений η	, (21.63)

которая, хотя и не позволяет уже (вообще говоря) полностью восстановить совместное распределение ξ и η, но во многих случаях характеризует это совместное распределение с достаточной степенью точности.

Каждая из сводных числовых характеристик рассматриваемых условных распределений η представляет собой функцию от возможного значения x случайной величины ξ:

$$\mathbf{M}_{\xi=x}(\eta)=\varphi(x), \quad \sigma_{\xi=x}(\eta)=\psi(x). \tag{21.64}$$

Зависимости такого рода носят название *регрессионных*. Функция $\varphi(x)$ в первой из формул (21.64) называется *функцией регрессии условных математических ожиданий величины* η *на величину* ξ, а функция $\psi(x)$ из второй формулы — *функцией регрессии условных средних квадратических отклонений.*

Так, рассчитав[1]) для каждого из условных распределений, описанных табл. 21.15—21.17, математическое ожидание и среднее квадратическое отклонение и сведя эти результаты в одну таблицу (см. табл. 21.18), получим регрессионные зависимости сводных характеристик η от значений ξ для совместного распределения этих величин, заданного табл. 21.12. Если бы каждая из величин ξ и η

ТАБЛИЦА 21.18

x	20	30	40
$\mathbf{P}(\xi=x)$	0,36	0,36	0,28
$\mathbf{M}_{\xi=x}(\eta)$	28,89	27,22	22,86
$\sigma_{\xi=x}(\eta)$	7,55	7,86	8,59

могла принимать 100 различных значений, то таблица, аналогичная табл. 21.12, содержала бы 10 200 чисел, в то время как для таблицы типа 21.18 потребовалось бы всего 400 чисел. С увеличением количества возможных значений у ξ и η разница в объеме таких таблиц сдела-

[1]) Выкладки, ввиду их очевидности, мы здесь не приводим.

лась бы еще более ощутимой. Для «непрерывного случая» переход от «полной вероятностной модели» к модели регрессионной означает замену функции двух переменных, какими является функция плотности вероятностей или кумулятивная функция совместного распределения, несколькими функциями одной переменной.

Еще более компактным (но зато, вообще говоря, менее точным) способом приближенного описания совместных распределений является использование сводных числовых характеристик таких распределений. Наиболее употребительными из этих характеристик являются так называемые начальные и центральные моменты совместного распределения. Если ξ и η дискретны, то моменты их совместного распределения определяются формулами

$$\begin{gathered} \alpha_{hl} = \sum_{i,k} x_i^h y_k^l p_{ik}, \\ \mu_{h,l} = \sum_{i,k} (x_i - \mathbf{M}(\xi))^h (y_k - \mathbf{M}(\eta))^l p_{ik}. \end{gathered} \tag{21.65}$$

Здесь α_{hl} — начальный, а μ_{hl} — центральный момент порядка $h+l$, суммирование производится по всем возможным комбинациям (x_i, y_k) значений ξ и η, а p_{ik} означает вероятность $\mathbf{P}(\xi = x_i, \eta = y_k)$. В «непрерывном случае» вместо (21.65) действуют формулы

$$\begin{gathered} \alpha_{hl} = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} dx \int\limits_{-\infty}^{+\infty} x^h y^l f(x, y)\, dy, \\ \mu_{hl} = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} dx \int\limits_{-\infty}^{+\infty} [x - \mathbf{M}(\xi)]^h [y - \mathbf{M}(\eta)]^l f(x, y)\, dy, \end{gathered} \tag{21.66}$$

где $f(x, y)$ — плотность вероятностей совместного распределения ξ и η. Можно показать, что моменты α_{h0} и μ_{h0} суть не что иное, как моменты безусловного распределения величины ξ, а α_{0l} и μ_{0l} — являются моментами безусловного распределения η. В частности,

$$\begin{gathered} \alpha_{10} = \mathbf{M}(\xi), \qquad \alpha_{01} = \mathbf{M}(\eta), \\ \mu_{20} = \mathbf{D}(\xi), \qquad \mu_{02} = \mathbf{D}(\eta). \end{gathered} \tag{21.67}$$

Действительно, например,

$$\alpha_{10} = \sum_{i,k} x_i^1 y_k^0 p_{ik} = \sum_i \sum_k x_i \mathbf{P}(\xi = x_i;\ \eta = y_k) =$$
$$= \sum_i \Bigl(x_i \sum_k \mathbf{P}(\xi = x_i;\ \eta = y_k)\Bigr) = \sum_i x_i \mathbf{P}(\xi = x_i) = \mathbf{M}(\xi).$$

Эти моменты, стало быть, характеризуют «поведение» каждой из величин ξ и η в отдельности. Напротив, если ни один из индексов h и l не равен нулю, то такой момент представляет собой одну из «характеристик связи» между ξ и η. Из этих «характеристик связи» наиболее часто используется момент $\mu_{11} = K(\xi, \eta)$. Его называют *корреляционным моментом величин* ξ *и* η. Как именно с его помощью можно охарактеризовать связь между

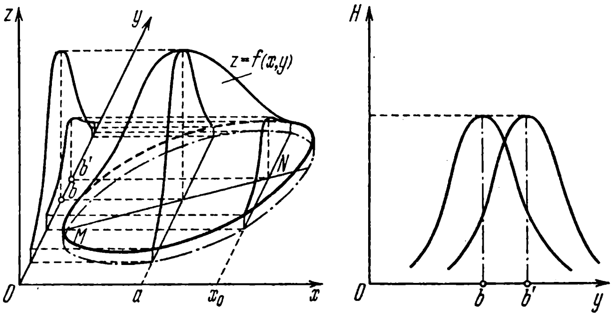


Рис. 21.11.

случайными величинами, мы скажем чуть позже. Отметим, что и для «двумерных» распределений центральные моменты могут быть выражены через начальные. В частности,

$$\begin{aligned} &\mu_{2\,0} = \alpha_{2\,0} - \alpha_{1\,0}^2, \quad \mu_{0\,2} = \alpha_{0\,2} - \alpha_{0\,1}^2, \\ &\mu_{1\,1} = \alpha_{1\,1} - \alpha_{1\,0}\alpha_{0\,1}. \end{aligned} \tag{21.68}$$

Среди различных типов законов совместного распределения двух случайных величин (как говорят, «двумерных законов распределения») центральное место занимает семейство так называемых нормальных распределений, а именно, распределений, функция плотности вероятности которых имеет вид

$$f(x, y) = \frac{1}{2\pi\sigma_x\sigma_y\sqrt{1-r^2}} e^{-\frac{A(x, y)}{2(1-r^2)}},$$

где

$$A(x, y) = \frac{(x-a)^2}{\sigma_x^2} - 2r\frac{(x-a)(y-b)}{\sigma_x\sigma_y} + \frac{(y-b)^2}{\sigma_y^2}.$$

На рис. 21.11 слева изображен график плотности вероятности двумерного нормального распределения, справа —

графики функций плотности условных распределений η при $\xi=a$ и $\xi=x_0$. Эти графики получаются из сечений, изображенных на левом рисунке, таким растяжением (сжатием) вдоль оси Oz, чтобы площадь под соответствующей кривой была равна 1. Если известно, что какое-либо совместное распределение относится к этому типу, то для его полного определения достаточно знания моментов $\alpha_{10}=\mathbf{M}(\xi)$, $\alpha_{01}=\mathbf{M}(\eta)$, $\mu_{20}=\mathbf{D}(\xi)$, $\mu_{02}=\mathbf{D}(\eta)$ и $\mu_{11}=$ $=K(\xi, \eta)$ потому, что через эти моменты могут быть выражены все параметры распределения (21.68)

$$\begin{gathered} a=\mathbf{M}(\xi), \qquad b=\mathbf{M}(\eta), \\ \sigma_x=\sqrt{\mathbf{D}(\xi)}, \qquad \sigma_y=\sqrt{\mathbf{D}(\eta)}, \\ r=\frac{K(\xi, \eta)}{\sqrt{\mathbf{D}(\xi)}\sqrt{\mathbf{D}(\eta)}}. \end{gathered} \tag{21.69}$$

(Мы принимаем эти формулы без доказательства.) Зависимость условных математических ожиданий $y=\mathbf{M}_{\xi=x}(\eta)$ от величины x дается для нормальных распределений формулой

$$\frac{y-b}{\sigma_y}=r\frac{x-a}{\sigma_x}. \tag{21.70}$$

(На рис. 21.11 эта зависимость изображается прямой MN). Величина r называется *коэффициентом корреляции случайных величин* ξ *и* η. Для нее всегда справедливо неравенство

$$|r| \leqslant 1.$$

$r=0$ тогда и только тогда, когда величины ξ и η независимы (все условные распределения каждой из них совпадают друг с другом и с соответствующим безусловным распределением). Чем теснее связь между ξ и η, тем ближе r к 1.

Величину r, определяемую последней из формул (21.69), используют часто в качестве характеристики «тесноты связи» между ξ и η и тогда, когда их совместное распределение не является нормальным (в таких случаях за r сохраняют название коэффициента корреляции). Однако здесь следует иметь в виду, что чем больше закон совместного распределения отличается от нормального, тем менее надежными являются выводы о степени «тесноты связи», полученные с помощью этой характеристики.

21.4.3. Совместные выборочные распределения и их сводные числовые характеристики. Пусть в результате каждого из n «испытаний» мы регистрируем по одному значению для изучаемых нами величин ξ и η. Если у нас имеются основания рассматривать ξ и η в качестве совместно распределенных случайных величин, то каждую из полученных пар значений x_i, y_i (i — номер «испытания») мы будем называть *совместной реализацией случайных величин* ξ *и* η, а составленную из таких пар таблицу

$$\begin{matrix} x_1, & x_2, & \ldots, & x_n, \\ y_1, & y_2, & \ldots, & y_n \end{matrix} \tag{21.71}$$

— *двумерной выборкой*. Разумеется, как среди чисел x_1, x_2, ..., x_n, так и среди чисел y_1, y_2, ..., y_n может оказаться много одинаковых. Пусть $\hat{x}_1 < \hat{x}_2 < \ldots < \hat{x}_m$ и $\hat{y}_1 < \hat{y}_2 < \ldots < \hat{y}_l$ — упорядоченные по возрастанию различные значения для первой и второй строк (21.71) соответственно. Табл. 21.19, в каждой из внутренних клеток которой указано число n_{jk}, равное количеству повторений (абсолютной частоте) пары $(\hat{x}_j, \hat{y}_k)$ в (21.71), называется *корреляционной таблицей абсолютных частот*.

ТАБЛИЦА 21.19

$x \backslash y$	$\hat{y}_1$	$\hat{y}_2$	.....	$\hat{y}_l$
$\hat{x}_1$	n_{11}	n_{12}	......	n_{1l}
$\hat{x}_2$	n_{21}	n_{22}	......	n_{2l}
...	...	...	....	...
$\hat{x}_m$	n_{m1}	n_{m2}	......	n_{ml}

Заменив здесь каждую из абсолютных частот n_{jk} соответствующей ей относительной частотой $\nu_{jk} = n_{jk}/n$ появления пары $(\hat{x}_j, \hat{y}_k)$ в (21.71), мы получим *корреляционную таблицу относительных частот*. Эта корреляционная таблица относительных частот представляет собой аналог «теоретического» закона совместного распределения (ср. с табл. 21.12). Если мы хотим по результатам наших наблюдений составить вероятностную модель для системы величин ξ и η, то мы можем использовать для этого (в качестве одного из способов) как раз корреляционную таблицу относительных частот, положив (точно или с округлением) значения вероятностей $\mathbf{P}(\xi=\hat{x}_j,\ \eta=\hat{y}_k)$ равным относительным частотам ν_{jk}.

Так, например, для двумерной выборки, представленной в табл. 21.20, корреляционные таблицы абсолютных и

ТАБЛИЦА 21.20

№ п/п	x	y	№ п/п	x	y	№ п/п	x	y	№ п/п	x	y	№ п/п	x	y
1	8	0,7	9	4	0,2	17	8	0,8	25	9	0,9	33	3	0,3
2	4	0,1	10	4	0,3	18	7	0,6	26	7	0,4	34	7	0,7
3	3	0,2	11	9	0,8	19	5	0,3	27	6	0,7	35	5	0,4
4	5	0,3	12	6	0,5	20	7	0,7	28	5	0,4	36	2	0,1
5	8	0,5	13	9	0,7	21	4	0,3	29	8	0,6	37	7	0,5
6	6	0,5	14	5	0,4	22	7	0,6	30	6	0,4	38	4	0,4
7	6	0,5	15	6	0,4	23	5	0,5	31	8	0,7	39	6	0,3
8	6	0,6	16	10	1,0	24	3	0,1	32	7	0,6	40	5	0,6

относительных частот будут выглядеть так, как это показано в табл. 21.21 и 21.22 (соответственно).

ТАБЛИЦА 21.21

y / x	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9	1,0
2	1	—	—	—	—	—	—	—	—	—
3	1	1	1	—	—	—	—	—	—	—
4	1	1	2	1	—	—	—	—	—	—
5	—	—	2	3	1	1	—	—	—	—
6	—	—	1	2	3	1	1	—	—	—
7	—	—	—	1	1	3	2	—	—	—
8	—	—	—	—	1	1	2	1	—	—
9	—	—	—	—	—	—	1	1	1	—
10	—	—	—	—	—	—	—	—	—	1

ТАБЛИЦА 21.22

$x \backslash y$	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9	1,0
2	$\frac{1}{40}$	—	—	—	—	—	—	—	—	—
3	$\frac{1}{40}$	$\frac{1}{40}$	$\frac{1}{40}$	—	—	—	—	—	—	—
4	$\frac{1}{40}$	$\frac{1}{40}$	$\frac{1}{20}$	$\frac{1}{40}$	—	—	—	—	—	—
5	—	—	$\frac{1}{20}$	$\frac{3}{40}$	$\frac{1}{40}$	$\frac{1}{40}$	—	—	—	—
6	—	—	$\frac{1}{40}$	$\frac{1}{20}$	$\frac{3}{40}$	$\frac{1}{40}$	$\frac{1}{40}$	—	—	—
7	—	—	—	$\frac{1}{40}$	$\frac{1}{40}$	$\frac{3}{40}$	$\frac{1}{20}$	—	—	—
8	—	—	—	—	$\frac{1}{40}$	$\frac{1}{40}$	$\frac{1}{20}$	$\frac{1}{40}$	—	—
9	—	—	—	—	—	—	$\frac{1}{40}$	$\frac{1}{40}$	$\frac{1}{40}$	—
10	—	—	—	—	—	—	—	—	—	$\frac{1}{40}$

Моменты совместного выборочного распределения определяются по формулам, аналогичным формулам (21.65), с той лишь разницей, что здесь вместо вероятностей p_{jk} надо брать относительные частоты ν_{jk}, вместо математических ожиданий $\mathbf{M}(\xi)$ и $\mathbf{M}(\eta)$ — выборочные средние $\overline{x}$ и $\overline{y}$ (для обозначения этих моментов обычно вместо α_{hl} используют a_{hl}, а вместо μ_{hl} используют m_{hl})

$$a_{hl}=\sum_{j,k}\hat{x}_j^h\hat{y}_k^l\nu_{jk}, \quad m_{hl}=\sum_{j,k}(\hat{x}_j-\overline{x})^h(\hat{y}_k-\overline{y})^l\,\nu_{jk}. \qquad (21.65')$$

Учитывая, что $\nu_{jk}=\frac{n_{jk}}{n}$, мы можем переписать эти формулы в виде

$$\begin{aligned} \alpha_{hl}&=\frac{1}{n}\sum_{j,k}\hat{x}_j^h\hat{y}_k^l n_{jk}, \\ m_{hl}&=\frac{1}{n}\sum_{j,k}(\hat{x}_j-\overline{x})^h(\hat{y}_k-\overline{y})^l\,n_{jk}. \end{aligned} \qquad (21.65'')$$

Нетрудно сообразить, что значения a_{hl} и m_{hl} можно рассчитать и непосредственно по исходной выборке, не обращаясь к корреляционным таблицам (этот способ нередко оказывается удобным при использовании ЭВМ, а также в тех случаях, когда объем выборки весьма мал)

$$a_{hl}=\frac{1}{n}\sum_i x_i^h y_i^h, \quad m_{hl}=\frac{1}{n}\sum_i (x_i-\bar{x})^h (y_i-\bar{y})^l. \quad (21.65''')$$

Формулы, позволяющие находить выборочные центральные моменты по известным значениям начальных, имеют такой же вид, как и для «теоретических» моментов (ср. (21.68)), например

$$m_{2\,0}=a_{2\,0}-a_{1\,0}^2, \quad m_{0\,2}=a_{0\,2}-a_{0\,1}^2,$$
$$m_{1\,1}=a_{1\,1}-a_{1\,0}a_{0\,1}. \quad (21.68')$$

Для выборки, данной в табл. 21.20, применение формул (21.65''') дает

$$\bar{x}=a_{1\,0}=\frac{1}{40}(8+4+3+5+\ldots+4+6+5)=6,$$

$$\bar{y}=a_{0\,1}=\frac{1}{40}(0{,}7+0{,}1+0{,}2+\ldots+0{,}4+0{,}3+0{,}6)=0{,}49,$$

$$a_{2\,0}=\frac{1}{40}(8^2+4^2+3^2+5^2+\ldots+4^2+6^2+5^2)=39{,}5,$$

$$a_{0\,2}=\frac{1}{40}(0{,}7^2+0{,}1^2+0{,}2^2+\ldots+0{,}4^2+0{,}3^2+0{,}6^2)=$$
$$=0{,}2865,$$

$$a_{1\,1}=\frac{1}{40}(8\cdot 0{,}7+4\cdot 0{,}1+3\cdot 0{,}2+\ldots+4\cdot 0{,}4+6\cdot 0{,}3+$$
$$+5\cdot 0{,}6)=3{,}295.$$

(Разумеется, те же результаты мы получили бы, проводя расчеты по формулам (21.65') или (21.65''). Рекомендуем учащемуся проделать эти выкладки самостоятельно.)

Применяя теперь формулы (21.68'), получаем

$$m_{2\,0}=39{,}5-6^2=3{,}5, \quad m_{0\,2}=0{,}2865-0{,}49^2=0{,}0464,$$
$$m_{1\,1}=3{,}295-6\cdot 0{,}49=0{,}355.$$

Если мы по тем или иным основаниям считаем, что совместное распределение ξ и η следует строить на базе того или иного типового закона (например, двумерного нормального), то рассчитать конкретные значения параметров этого закона мы можем таким же способом, как это делалось в п. 21.3.1, т. е. приравнивая выражения для «теоретических» моментов к рассчитанным по результатам наблюдений соответствующим выборочным моментам.

21.4.4. Отыскание регрессионных зависимостей методом наименьших квадратов. Нахождение регрессионных зависимостей мы тоже можем, разумеется, провести, обрабатывая выборочное распределение точно таким же образом, как и распределение «теоретическое». Однако в тех случаях, когда кроме выборки мы имеем еще дополнительную информацию о виде искомых регрессионных зависимостей, целесообразно применять другие методы, позволяющие учесть и эту информацию. В качестве важного примера мы рассмотрим здесь так называемый метод наименьших квадратов для отыскания (приближенного) уравнения регрессии условных математических ожиданий (или, как еще говорят, условных средних).

Пусть из тех или иных соображений вытекает, что для этих условных средних $y=\mathbf{M}_{\xi=x}(\eta)$ имеет место формула вида

$$y=ag(x)+bh(x), \tag{21.72}$$

где $g(x)$ и $h(x)$ — известные функции, а a и b — постоянные коэффициенты, чьи неизвестные значения и требуется определить так, чтобы эти значения «наилучшим образом согласовывались» с результатами наблюдений. В методе наименьших квадратов в качестве меры такого «согласования» принимается величина

$$W=\sum_{i=1}^{n}\{y_i-[ag(x_i)+bh(x_i)]\}^2, \tag{21.73}$$

представляющая собой сумму квадратов отклонений наблюдавшихся значений y_i величины η от рассчитанных по формуле (21.72) (приближенных) значений условных математических ожиданий η, отвечающих соответствующим значениям x_i величины ξ. Дело сводится, таким образом, к нахождению таких значений a и b, которые доставляли бы функции W абсолютный минимум.

Функция W определена при всех значениях своих аргументов a и b. Следовательно, все ее экстремумы являются внутренними. Так как $\frac{\partial W}{\partial a}$ и $\frac{\partial W}{\partial b}$ существуют везде, то все возможные точки экстремума будут содержаться среди решений системы уравнений

$$\frac{\partial W}{\partial a}=0, \qquad \frac{\partial W}{\partial b}=0. \tag{21.74}$$

Найдем выражения для этих частных производных

$$\left\{\begin{aligned}
&\frac{\partial W}{\partial a}=\sum_{i=1}^{n} 2\{y_i-[ag(x_i)+bh(x_i)]\}[-g(x_i)]=\\
&=-2\left\{\sum_{i=1}^{n} y_i g(x_i)-a\sum_{i=1}^{n} g^2(x_i)-b\sum_{i=1}^{n} g(x_i)h(x_i)\right\},\\
&\frac{\partial W}{\partial b}=\sum_{i=1}^{n} 2\{y_i-[ag(x_i)+bh(x_i)]\}[-h(x_i)]=\\
&=-2\left\{\sum_{i=1}^{n} y_i h(x_i)-a\sum_{i=1}^{n} g(x_i)h(x_i)-b\sum_{i=1}^{n} h^2(x_i)\right\}.
\end{aligned}\right. \tag{21.75}$$

Подставляя (21.75) в (21.74), мы после очевидных упрощений получим

$$\left\{\begin{aligned}
&a\sum_{i=1}^{n} g^2(x_i)+b\sum_{i=1}^{n} g(x_i)h(x_i)=\sum_{i=1}^{n} y_i g(x_i),\\
&a\sum_{i=1}^{n} g(x_i)h(x_i)+b\sum_{i=1}^{n} h^2(x_i)=\sum_{i=1}^{n} y_i h(x_i).
\end{aligned}\right. \tag{21.76}$$

Система (21.76) представляет собой систему линейных уравнений относительно неизвестных a и b. Определитель этой системы

$$\Delta=\left(\sum_{i=1}^{n} g^2(x_i)\right)\left(\sum_{i=1}^{n} h^2(x_i)\right)-\left(\sum_{i=1}^{n} g(x_i)h(x_i)\right)^2 \tag{21.77}$$

всегда неотрицателен и будет строго положительным во всех случаях, за исключением того, когда одна из последовательностей

$$\begin{aligned}
&g(x_1),\ g(x_2),\ \ldots,\ g(x_n),\\
&h(x_1),\ h(x_2),\ \ldots,\ h(x_n)
\end{aligned} \tag{21.78}$$

получается из другой умножением на некоторый постоянный множитель

$$g(x_i)=\lambda h(x_i) \text{ и (или) } h(x_i)=\mu g(x_i). \tag{21.79}$$

На практике, как правило, оказывается $\Delta>0$. Тогда система (21.76) имеет единственное решение

$$a=a^*,\quad b=b^*. \tag{21.80}$$

Вычисляя $\frac{\partial^2 W}{\partial a^2}\frac{\partial^2 W}{\partial b^2}-\left(\frac{\partial^2 W}{\partial a\,\partial b}\right)^2$, мы приходим к тому же самому выражению (21.77). Тогда (см. гл. 16), если $\Delta > 0$, то и $\frac{\partial^2 W}{\partial a^2} > 0$, а отсюда следует, что в точке (21.80) наша функция имеет минимум. Можно показать (здесь мы не будем этого делать), что этот минимум является абсолютным.

Таким образом, с практической точки зрения для определения «наилучших» коэффициентов в формуле (21.72) нам достаточно составить и решить систему (21.76).

Совершенно аналогично проводятся действия и в том случае, когда вместо (21.72) мы имеем формулу более общего вида

$$y = a_1 g_1(x) + a_2 g_2(x) + \ldots + a_s g_s(x). \qquad (21.81)$$

Величина (21.73) заменится здесь на

$$W = \sum_{i=1}^{n} \{y_i - [a_1 g_1(x_i) + \ldots + a_s g_s(x_i)]\}^2, \qquad (21.82)$$

а система типа (21.74) будет содержать уже не два, а s уравнений (по числу неизвестных коэффициентов). Отметим, что такие системы называют *системами нормальных уравнений*.

Пусть, например, нам требуется составить уравнение регрессии условных средних в виде

$$y = ax + b \qquad (21.83)$$

по результатам наблюдений, приведенным в табл. 21.20.

Формула (21.83) получается из (21.72) при $g(x) = x$ и $h(x) = 1$. Система нормальных уравнений (21.76) в этом случае запишется так:

$$\left\{\begin{aligned} a\sum_{i=1}^{40} x_i^2 + b\sum_{i=1}^{40} x_i &= \sum_{i=1}^{40} x_i y_i, \\ a\sum_{i=1}^{40} x_i + b\cdot 40 &= \sum_{i=1}^{40} y_i. \end{aligned}\right. \qquad (21.84)$$

Действительно, у нас $g^2(x_i) = x_i^2$, $g(x_i)\,h(x_i) = x_i$, $y_i g(x_i) = x_i y_i$, $h^2(x_i) = 1$, $y_i h(x_i) = y_i$. Заметим, что систему (21.84) мы могли бы получить и непосредственно, приравнивая к нулю частные производные от функции

$$W = \sum_{i=1}^{40} [y_i - (ax_i + b)]^2 \qquad (21.85)$$

по a и b. (Проделайте эти операции самостоятельно в качестве упражнения.)

Вычислим коэффициенты при неизвестных в системе (21.84) (используем данные из табл. 21.20):

$$\sum_{i=1}^{40} x_i = 8+4+3+5+\ldots+4+6+5=240,$$

$$\sum_{i=1}^{40} x_i^2 = 8^2+4^2+3^2+5^2+\ldots+4^2+6^2+5^2=1580,$$

$$\sum_{i=1}^{40} y_i = 0{,}7+0{,}1+0{,}2+\ldots+0{,}4+0{,}3+0{,}6= \qquad (21.86)$$
$$=19{,}6,$$

$$\sum_{i=1}^{40} x_i y_i = 8\cdot 0{,}7+4\cdot 0{,}1+3\cdot 0{,}2+\ldots+4\cdot 0{,}4+$$
$$+6\cdot 0{,}3+5\cdot 0{,}6=131{,}8.$$

Подставляя эти значения в (21.84), получаем

$$\begin{cases} 1580a+240b=131{,}8, \\ 240a+\ \ 40b=\ \ 19{,}6. \end{cases} \qquad (21.87)$$

Решая эту систему, находим

$$a=0{,}1014, \quad b=-0{,}1186.$$

Следовательно, искомая регрессионная зависимость имеет вид

$$y=0{,}1014\cdot x-0{,}1186. \qquad (21.88)$$

На рис. 21.12 изображена выборка, данная в табл. 21.20 (каждая пара x_i, y_i представлена кружочком на координатной плоскости xOy). Найденной нами зависимости (21.88) соответствует прямая AB, пунктирная линия соединяет точки с координатами $(\hat{x}_j, \overline{y}_j)$, где $\overline{y}_j$ — (выборочное) условное среднее значение y при $x=\hat{x}_j$ (эти точки отмечены крестиками).

Для некоторых наиболее часто встречающихся случаев в результате проведения выкладок в общем виде получены готовые формулы, позволяющие обойти этап составления и решения системы нормальных уравнений. Так, например, если требуется получить линейное уравнение регрессии, то мы можем использовать формулу

$$\frac{y-\overline{y}}{\sigma_в(y)}=r_в\frac{x-\overline{x}}{\sigma_в(x)}, \qquad (21.89)$$

где $\bar{x}$ и $\bar{y}$ — выборочные средние, $\sigma_в(x)$ и $\sigma_в(y)$ — выборочные средние квадратические отклонения, а $r_в$ — выборочный коэффициент корреляции

$$r_в = \frac{m_{11}}{\sqrt{m_{20}}\sqrt{m_{02}}} = \frac{a_{11} - a_{10}a_{01}}{\sqrt{a_{20} - a_{10}^2}\sqrt{a_{02} - a_{01}^2}}. \tag{21.90}$$

(Сравните эти формулы с (21.69) и (21.70).) Результат, который даст нам применение (21.89), будет совпадать с тем, который мы получили бы, отыскивая методом наименьших квадратов коэффициенты a и b в формуле $y = ax + b$.

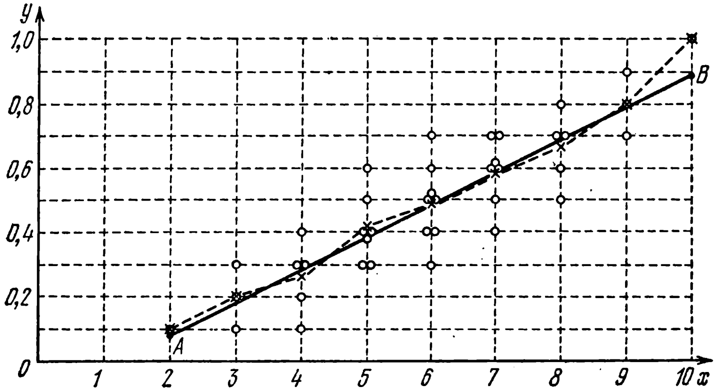


Рис. 21.12.

В конце п. 21.4.3 для нашей выборки мы получили

$$\bar{x} = 6, \qquad \bar{y} = 0{,}49,$$
$$m_{20} = 3{,}5, \qquad m_{02} = 0{,}0464,$$
$$m_{11} = 0{,}355.$$

Отсюда

$$\sigma_в(x) = \sqrt{3{,}5} = 1{,}8708, \qquad \sigma_в(y) = \sqrt{0{,}0464} = 0{,}2154,$$
$$r_в = \frac{0{,}355}{1{,}8708 \cdot 0{,}2154} = 0{,}8810.$$

Подставляя эти значения в (21.89), мы получаем

$$\frac{y - 0{,}49}{0{,}2154} = 0{,}8810 \cdot \frac{x - 6}{1{,}8708}.$$

Преобразовав это уравнение к виду $y = ax + b$, мы опять получим (21.88). (Проделайте выкладки самостоятельно.)

ВОПРОСЫ ДЛЯ ПОВТОРЕНИЯ К ГЛАВЕ 21

1. Опишите, как мы интерпретируем понятие «вероятность» применительно к реальным событиям. Приведите примеры.

2. Что такое полная система попарно несовместных элементарных событий? Каким образом на базе этой системы строится порождаемая ею алгебра событий? (Какие события составляют эту алгебру?). Проиллюстрируйте свой ответ примерами.

3. Что такое невозможное событие? достоверное событие? Что называется событием, противоположным данному? Приведите примеры.

4. Какие два события называются несовместными? Что означают термины «попарная несовместность» и «несовместность в совокупности» применительно к системе событий? Приведите примеры.

5. Что означает выражение «событие A влечет за собой событие B»? Проиллюстрируйте свой ответ примерами.

6. Что называется суммой и произведением событий? Какими свойствами обладают операции сложения и умножения событий? Приведите примеры.

7. Сформулируйте классическое определение вероятности. В чем состоят условия его применимости?

8. Какими свойствами обладают вероятности, введенные классическим определением? (Чему равна вероятность невозможного события? Достоверного события? По какой формуле можно вычислять вероятность противоположного события? Суммы двух событий? Вероятность суммы любого набора попарно несовместных событий?)

9. Что такое условная вероятность? По каким формулам ее можно вычислять? Приведите примеры.

10. Что значит, что событие B не зависит от события A? Какие события называют взаимно независимыми? Приведите примеры.

11. Напишите и проиллюстрируйте примерами общую формулу умножения и формулу умножения для независимых событий.

12. Запишите и объясните формулу полной вероятности и формулу Байеса. Проиллюстрируйте примерами их применение.

13. В чем состоит общий способ задания вероятностной функции на конечной алгебре событий? Приведите примеры.

14. Что такое случайная величина и ее закон распределения вероятностей? Что такое гистограмма распределения? Что называется кумулятивной функцией распределения случайной величины? Как с помощью этой функции можно вычислять вероятности выполнения неравенств вида $x_1 < \xi \leqslant x_2$ (здесь ξ — случайная величина, а x_1 и x_2 — некоторые числа)?

15. Что такое биноминальный закон распределения? Приведите примеры случайных величин, подчиняющихся этому закону.

16. Какие случайные величины называются дискретными, а какие — непрерывными? Что такое функция плотности вероятностей непрерывной случайной величины? Как с помощью этой функции можно вычислять вероятности выполнения неравенств вида $x_1 < \xi \leqslant x_2$ (и т. п.)?

17. Что такое геометрический закон распределения? Приведите примеры случайных величин, подчиняющихся этому закону.

18. Что такое закон равномерной плотности? показательный закон распределения? Нарисуйте графики соответствующих функций плотности вероятностей и кумулятивных функций распределения.

19. Что называется нормальным законом распределения? Как выглядят графики соответствующих функций плотности и кумулятивной функции распределения? Как можно вычислять значения этой кумулятивной функции распределения при помощи таблицы функции $\Phi_0(z)$? В чем состоит так называемое «правило трех сигм»?

20. Что называется квантилем распределения случайной величины? Приведите примеры.

21. Что такое одномерная выборка? ранжированный ряд? ряды абсолютных и относительных частот? кумулятивный ряд относительных частот? Как геометрически изображаются ряд относительных частот и кумулятивный ряд относительных частот? Что такое интервальные ряды выборочных распределений?

22. Что такое выборочное среднее, выборочная дисперсия, выборочное среднее квадратическое отклонение? Как можно вычислить эти сводные характеристики по ряду абсолютных частот? по ряду относительных частот? Приведите примеры.

23. Что называется математическим ожиданием, дисперсией, средним квадратическим отклонением дискретной случайной величины? непрерывной случайной величины? Какой смысл имеют эти сводные числовые характеристики?

24. Что такое моменты распределения случайной величины? В чем состоит метод моментов при построении закона распределения случайной величины по результатам наблюдений? Приведите пример.

25. Запишите и объясните интегральную формулу Муавра—Лапласа. Приведите пример.

26. В чем состоит закон больших чисел?

27. Какими способами можно описать закон совместного распределения вероятностей для системы двух случайных величин? Что такое кумулятивная функция совместного распределения? Что такое функция плотности совместного распределения? Всякое ли совместное распределение имеет функцию плотности?

28. Какими способами, зная закон совместного распределения двух случайных величин, можно найти законы распределения каждой из них в отдельности? Что такое условные законы распределения и как они могут быть получены, исходя из закона совместного распределения? Приведите примеры.

29. Какие зависимости носят названия регрессионных? Проиллюстрируйте свой ответ примерами.

30. Что такое моменты совместного распределения системы двух случайных величин? Какие из них совпадают с моментами «безусловных» распределений этих величин? Какой смысл имеют остальные моменты?

31. Что такое коэффициент корреляции двух случайных величин? Каков его смысл, если совместное распределение нормально? Каков его смысл в общем случае?

32. Что такое двумерная выборка? корреляционные таблицы абсолютных и относительных частот? моменты совместного выборочного распределения?

33. В чем состоит метод наименьших квадратов для отыскания уравнения выборочной регрессии условных средних?

34. Запишите формулу, позволяющую рассчитать линейное уравнение выборочной регрессии по известным величинам выборочных средних значений, средних квадратических отклонений и коэффициента корреляции. Будет ли приводить к тому же уравнению метод наименьших квадратов?

УПРАЖНЕНИЯ К ГЛАВЕ 21

1. При опытных стрельбах было проведено 400 выстрелов, 320 раз цель оказалась пораженной? Чему принять равной вероятность поражения цели одиночным выстрелом? Сколько попаданий в среднем следует ожидать от каждой серии в 20 выстрелов?

2. Для проверки на всхожесть было посеяно 200 семян, из которых 170 проросло. Чему принять равной вероятность прорастания отдельного семени из этой партии? Сколько в среднем семян взойдет из каждой тысячи посеянных?

3. Две грани кубика окрашены в желтый цвет, три — в красный и один — в синий. Чему принять равной вероятность того, что подброшенный кубик упадет желтой гранью вверх? Предположим, что подбрасывание кубика производится многократно сериями по 30 бросков. Какого числа выпадений желтой грани (в среднем) следует ожидать в каждой серии?

4. В центре круга укреплена свободно поворачивающаяся стрелка. Она раскручивается и вращается до полной остановки. Чему принять равной вероятность того, что стрелка остановится в пределах заранее отмеченного центрального угла величиной в 45°? Предположим, что такой эксперимент проводится многократно сериями по 40 повторений. Какого количества остановок стрелки в отмеченном секторе следует ожидать (в среднем) для каждой серии?

5. Вероятность того, что размеры детали, выпускаемой станком-автоматом, окажутся в пределах заданных допусков, равна 0,96. Какое количество годных деталей будет (в среднем) содержаться в каждой партии объемом в 500 штук?

6. Вероятность того, что электрическая лампочка из данной партии будет служить не менее 2000 часов, равна 0,9. Сколько лампочек из каждой группы в 50 штук выйдет (в среднем) из строя за меньший промежуток времени?

В каждом из упражнений 7—10 задаются события A, B и C. Требуется:

а) записать соответствующие A, B и C подмножества элементарных исходов;

б) для каждого из событий A, B и C найти ему противоположные;

в) проверить, влечет ли событие B событие A, событие C — событие A, событие C — событие B;

г) найти $A+B$, $A+C$; $A\cdot B$; $A\cdot C$; $A+B+C$; $A\cdot B\cdot C$ и события, им противоположные.

Предполагая равновозможность друг другу элементарных исходов, подсчитайте вероятности событий, перечисленных в пп. а), б) и г) непосредственно и с использованием теоремы 21.3.

В том же предположении найти условные вероятности $\mathbf{P}_A(B)$, $\mathbf{P}_A(C)$ и $\mathbf{P}_C(A)$, пользуясь определением 21.11. Те же условные вероятности найти по формуле (21.3).

7. На 10 карточках записаны числа от 1 до 10. Произвольным образом выбирается одна из этих карточек. Событие A состоит в том, что извлеченное число — четное, событие B — в том, что это число кратно трем, событие C — в том, что оно кратно четырем.

8. Три раза подряд производится подбрасывание монеты. Событие A состоит в том, что «решка» выпадает ровно один раз из трех,

событие B — в том, что все три раза выпадает «герб», событие C — в том, что «герб» выпадает не менее двух раз.

9. Две грани кубика окрашены в красный, две — в желтый и две — в синий цвет. Кубик бросают два раза. Событие A состоит в том, что оба раза выпадает желтая грань, событие B — в том, что в первый и во второй раз выпадают грани разных цветов, событие C — в том, что красная грань не выпадает ни разу.

10. В непрозрачном сосуде находится поровну одинаковых на ощупь черных и белых шаров. Три раза подряд производится извлечение шара. После очередного извлечения запоминается цвет вынутого шара, затем он возвращается в сосуд и шары перемешиваются. За появление белого шара при первом извлечении дается 4 очка, при втором — 2 очка, при третьем — 1 очко. За появление черного шара очки не начисляются. Событие A состоит в том, что набранная сумма очков окажется не меньше 3, событие B — в том, что будет набрано не более 5 очков, событие C — в том, что будет набрано ровно 6 очков.

По заданным в упражнениях 11—12 вероятностям требуется найти $\mathbf{P}(B)$, $\mathbf{P}_B(A_1)$, $\mathbf{P}_B(A_2)$, $\mathbf{P}_B(A_3)$, если известно, что $B \prec A_1 + A_2 + A_3$ и что A_1, A_2 и A_3 попарно несовместны.

11. $\mathbf{P}(A_1) = 0{,}2$, $\quad \mathbf{P}(A_2) = 0{,}3$, $\quad \mathbf{P}(A_3) = 0{,}2$,
$\mathbf{P}_{A_1}(B) = 0{,}1$, $\quad \mathbf{P}_{A_2}(B) = 0{,}2$, $\quad \mathbf{P}_{A_3}(B) = 0{,}1$.

12. $\mathbf{P}(A_1) = 0{,}1$, $\quad \mathbf{P}(A_2) = 0{,}2$, $\quad \mathbf{P}(A_3) = 0{,}3$,
$\mathbf{P}_{A_1}(B) = 0{,}4$, $\quad \mathbf{P}_{A_2}(B) = 0{,}2$, $\quad \mathbf{P}_{A_3}(B) = 0{,}4$.

13. Для контроля за ходом некоторого технологического процесса установлены два автоматических устройства, предназначенные для подачи сигнала в случае возникновения ситуации, требующей вмешательства оператора. Первое устройство срабатывает в 80% необходимых случаев, второе — в 90% случаев. Требуется определить вероятности следующих событий:

A — сработают оба устройства (здесь и дальше имеется в виду — при возникновении необходимой ситуации);

B — ни одно устройство не сработает;

C — сработает ровно одно устройство;

D — сработает хотя бы одно устройство;

E — хотя бы одно устройство не сработает.

14. В цехе работают три автоматические линии. Вероятность того, что в течение часа работы первая из них потребует подналадки, равна 0,4, для второй линии такая вероятность равна 0,5, для третьей — 0,8. Требуется определить вероятности следующих событий:

A — ни одна из линий в течение часа не потребует подналадки;

B — первая из линий потребует подналадки, а вторая и третья нет;

C — первая и вторая линии потребуют подналадки (здесь «поведение» третьей мы не учитываем);

D — первая и вторая линии потребуют подналадки, а третья нет;

E — ровно одна из линий потребует подналадки;

F — хотя бы одна из линий потребует подналадки.

15. На искусственном спутнике Земли установлено три различных прибора для измерения одной и той же величины. Для первого прибора вероятность его безотказной работы в течение месяца равна

0,9, для второго — 0,8, для третьего — 0,7. Требуется определить вероятности следующих событий:

A — все приборы выйдут из строя в течение месяца;

B — второй и третий приборы выйдут из строя, а первый нет;

C — первый и второй приборы не выйдут из строя (здесь «поведение» третьего прибора мы не учитываем);

D — третий прибор выйдет из строя, а первый и второй нет;

E — ровно два прибора выйдут из строя;

F — хотя бы один прибор не выйдет из строя.

16. Некоторое устройство состоит из трех основных узлов. Вероятность того, что после года работы первый из этих узлов потребует замены, равна 0,5, второй — 0,4, третий — 0,6. Требуется определить вероятности следующих событий:

A — ни один из узлов не потребует замены;

B — первый узел потребует замены, а второй и третий нет.

C — первый и второй узлы потребуют замены (здесь мы не учитываем третий узел);

D — первый и второй узлы потребуют замены, а третий нет;

E — ровно один узел потребует замены;

F — хотя бы один узел потребует замены.

17. Рабочий производит обработку деталей одновременно на трех станках. Вероятность того, что за определенный промежуток времени закончится обработка детали на первом станке, равна 0,2, на втором — 0,5, на третьем — 0,4. Требуется определить вероятности следующих событий:

A — в течение данного промежутка времени ни на одном из станков обработка очередной детали не будет закончена;

B — закончится обработка только на первом станке;

C — на первом и на втором станках обработка закончится (здесь мы не учитываем третий станок).

D — на первом и втором станках обработка закончится, на третьем нет;

E — обработка детали закончится ровно на одном из станков;

F — хотя бы на одном из станков закончится обработка очередной детали.

18. Цель, появившаяся в определенном секторе, может быть обнаружена 3 радиолокационными установками. Вероятность ее обнаружения за промежуток времени ΔT первой станцией равна 0,8, второй — 0,7, третьей — 0,5. Требуется определить вероятности следующих событий:

A — ни одна из установок за промежуток времени ΔT не обнаружит цели;

B — цель будет обнаружена только первой установкой;

C — первая и вторая установки обнаружат цель (здесь мы не учитываем третью установку);

D — первая и вторая установки обнаружат цель, а третья нет;

E — ровно одна из установок обнаружит цель;

F — хотя бы одна из установок обнаружит цель.

В каждом из упражнений 19—20 даны таблицы распределения вероятностей по возможным значениям случайной величины. Требуется построить гистограмму, вычислить вероятности событий

$$\text{а) } \xi=3, \quad \text{б) } \xi\leqslant 5, \quad \text{в) } \xi\leqslant 2, \quad \text{г) } 2<\xi\leqslant 5$$

и отметить каждую из этих вероятностей на чертеже.

19.

x	1	2	3	4	5	6	7	8
$P(\xi = x)$	0,10	0,15	0,22	0,18	0,12	0,10	0,08	0,05

20.

x	1	2	3	4	5	6	7	8
$P(\xi = x)$	0,05	0,08	0,10	0,12	0,14	0,16	0,17	0,18

В упражнениях 21—22 даны таблицы накопленных вероятностей. Требуется записать аналитическое выражение для кумулятивной функции распределения и с его помощью найти вероятности событий

$$\text{а) } 0{,}27 < \xi \leqslant 0{,}54, \qquad \text{б) } \xi > 0{,}63.$$

Построить график этой функции, отметить найденные вероятности на чертеже. «Восстановить» таблицу распределения вероятностей, построить гистограмму распределения и на ней тоже отметить эти вероятности.

21.

x	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8
$P(\xi \leqslant x)$	0,05	0,15	0,30	0,50	0,65	0,80	0,90	1,00

22.

x	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8
$P(\xi \leqslant x)$	0,10	0,25	0,45	0,60	0,75	0,85	0,95	1,00

23. Вероятность попадания в цель при каждом выстреле равна 0,2. Всего производится 5 выстрелов. Составить таблицу распределения вероятностей для случайной величины ξ, представляющей собой количество попаданий. Найти с помощью этой таблицы вероятности следующих событий:

A — ни одного попадания в цель;
B — ровно одно попадание;
C — хотя бы одно попадание;
D — число попаданий больше одного.

Построить гистограмму распределения и указать на ней найденные вероятности. То же—для графика кумулятивной функции распределения.

24. Вероятность того, что деталь, изготавливаемая станком-автоматом, будет иметь минусовый допуск, равна 0,5. Составить таблицу распределения вероятностей для случайной величины ξ, представляющей собой количество деталей с минусовым допуском из 6 отобранных случайным образом деталей. Найти с помощью этой таблицы вероятности следующих событий:

A—среди отобранных деталей не окажется ни одной с минусовым допуском;

B—таких деталей окажется ровно одна;

C—среди отобранных окажется хотя бы одна такая деталь;

D—деталей с минусовым допуском будет (среди отобранных) больше одной.

Указать эти вероятности на чертеже с гистограммой распределения и на чертеже с графиком кумулятивной функции распределения.

25. Работница обслуживает пять станков. Вероятность того, что на протяжении промежутка времени ΔT определенный станок потребует ее внимания, равна 0,3 (для каждого из станков). Составить таблицу распределения вероятностей для случайной величины ξ, представляющей собой количество станков, которые потребуют внимания работницы за данный промежуток времени. Найти с помощью этой таблицы вероятности следующих событий:

A—ни один из станков не потребовал внимания работницы;

B—ровно один станок потребовал внимания;

C—хотя бы один станок потребовал внимания;

D—количество станков, потребовавших внимания, больше одного.

26. Для повышения надежности контроля за ходом некоторого процесса, протекающего в сложных условиях, установлены пять однотипных датчиков. Каждый из этих датчиков независимо от остальных может выйти из строя с вероятностью 0,6. Составить таблицу распределения вероятностей для случайной величины ξ, представляющей собой количество не вышедших из строя датчиков. Найти с помощью этой таблицы вероятность следующих событий:

A—все датчики выйдут из строя;

B—ровно один из датчиков не выйдет из строя;

C—хотя бы один из датчиков не выйдет из строя;

D—количество датчиков, не вышедших из строя, больше одного.

27. Вероятность попадания в цель не меняется от выстрела к выстрелу и равна 0,3. Стрельба ведется до первого попадания. Найти вероятности следующих событий:

A—будет произведено ровно 4 выстрела;

B—число выстрелов не превзойдет 4;

C—число выстрелов будет больше 4.

28. В непрозрачном сосуде находится 10 одинаковых на ощупь шаров, из которых 9 белых и 1 черный. Производится последовательность извлечений до появления черного шара. После каждого извлечения шар возвращается обратно и шары перемешиваются. Найти вероятности следующих событий:

A—будет произведено ровно 4 извлечения;

B—число извлечений не превзойдет 4;

C—число извлечений будет больше 4.

29. Считая, что время безотказной работы некоторого устройства представляет собой случайную величину, подчиняющуюся показательному закону распределения с параметром $\mu=0{,}1$, найти вероятность того, что в конкретном испытании это время окажется не менее 3 ед. Проиллюстрировать полученный результат геометрически. Какую продолжительность работы можно гарантировать с вероятностью 0,99?

30. Считая, что диаметр деталей, изготавливаемых станком-автоматом, представляет собой случайную величину, распределенную по нормальному закону с параметрами $a=10$ и $\sigma=0{,}01$, найти вероятности следующих событий:

A — диаметр очередной детали будет отличаться от a не более чем на 0,025.

B — диаметр детали отличается от $b=10{,}02$ не более чем на 0,025.

Дать геометрическую иллюстрацию полученным результатам. Найти h такое, чтобы для отдельной детали вероятность того, что ее диаметр не выйдет за пределы промежутка $(a-h;\ a+h)$, была равной 0.98.

В упражнениях 31—32 даны результаты наблюдений над случайной величиной ξ в виде таблицы абсолютных частот и значения α и β. Для каждого из этих упражнений требуется:

а) рассчитать выборочное среднее, выборочную дисперсию и выборочное среднее квадратическое отклонение;

б) аппроксимировать данное выборочное распределение нормальным, определив значения параметров методом моментов;

в) вычислить вероятность выполнения неравенства $\alpha<\xi\leqslant\beta$ и сравнить ее с относительной частотой, отвечающей промежутку $(\alpha;\ \beta]$;

г) дать геометрическую иллюстрацию полученным в п. в) результатам.

(x_i означает центр i-го интервала группировки. Так, первый столбец таблицы из упражнения 31 отвечает интервалу (1,05; 1,15), второй столбец — интервалу (1,15; 1,25) и т. д.).

31. $\alpha=1{,}25,\quad \beta=1{,}65$

x_i	1,1	1,2	1,3	1,4	1,5	1,6	1,7	1,8	1,9	2,0
n_i	1	4	10	16	19	20	15	9	4	2

32. $\alpha=3{,}3\quad \beta=3{,}9.$

x_i	3,2	3,4	3,6	3,8	4,0	4,2	4,4	4,6	4,8	5,0
n_i	6	15	21	36	40	35	25	14	1	1

33. Для биномиального распределения с параметрами $n=100$ и $p=0{,}8$ найти приближенно, используя формулу Муавра — Лапласа, следующие вероятности:

$$\mathbf{P}(75<\xi\leqslant 82),\quad \mathbf{P}(74<\xi\leqslant 78),\quad \mathbf{P}(88<\xi\leqslant 98).$$

34. В процессе сборки некоторая деталь с вероятностью $p=0,2$ может быть повреждена и потребует своей замены. Используя аппроксимацию биномиального распределения нормальным, рассчитать приближенно вероятность того, что в результате 400 таких сборочных операций количество поврежденных деталей будет заключено в пределах от 70 до 100.

35. Результатом каждого из двух независимых испытаний является появление одного и только одного из чисел: 1, 2, 3 или 4; причем все эти исходы равновозможны между собой.

Случайная величина ξ представляет собой сумму появившихся чисел, а η — их произведение. Составить таблицу совместного распределения вероятностей для ξ и η. Найти их безусловные распределения и всевозможные условные распределения η (при условиях вида $\xi=x$). Найти условные математические ожидания $\mathbf{M}_{\xi=x}(\eta)$ и показать соответствующую регрессионную зависимость на чертеже. Найти коэффициент корреляции величин ξ и η.

36. Для двумерной выборки, данной в табл. 21.23, построить корреляционные таблицы абсолютных и относительных частот (значения ξ обозначены через x, значения η — через y). Найти двумя способами: по формуле (21.83) и методом наименьших квадратов приближенное уравнение регрессии условных средних η на ξ в виде $y=ax+b$. Рассчитать по этой формуле приближенные значения $\mathbf{M}_{\xi=x}(\eta)$ и сравнить их с теми, которые получаются прямым расчетом по условным распределениям. Дать геометрическую иллюстрацию.

ТАБЛИЦА 21.23

x	y	x	y	x	y	x	y	x	y
9	3	7	3	9	3	3	2	3	4
5	2	5	2	11	3	7	3	5	3
7	3	3	3	11	2	3	1	5	2
9	4	7	1	7	3	7	4	11	3
11	2	7	4	5	3	5	3	7	3
11	4	5	2	9	4	9	3	11	4
7	2	9	4	7	5	9	5	5	4
3	1	11	2	5	1	3	3	3	1
9	3	7	3	9	2	7	3	9	4
5	3	3	2	7	3	11	2	7	2

ОТВЕТЫ, УКАЗАНИЯ И РЕШЕНИЯ К ГЛАВЕ 21

1. Вероятность целесообразно принять равной относительной частоте $P=\frac{320}{400}=0,8$. Ожидаемое число попаданий в серии будет равно произведению объема серии на эту вероятность $m=20\cdot 0,8=16$.

2. $P=0,85$, $m=850$. 3. $P=1/3$, $m=10$. 4. $P=0,125$, $m=5$.
5. $m=480$. 6. $m=5$.

7. Элементарный исход, состоящий в том, что будет извлечена карточка с числом K, будем обозначать через «K». Подмножества элементарных исходов, соответствующие перечисленным в п.п. а), б) и г) событиям, указаны в табл. 21.24. Там же даны и вероятности этих событий.

ТАБЛИЦА 21.24

События	Элементарные исходы										Количества элементов в подмножестве	Вероятности
	«1»	«2»	«3»	«4»	«5»	«6»	«7»	«8»	«9»	«10»		
A		+		+		+		+		+	5	0,5
B			+			+			+		3	0,3
C				+				+			2	0,2
$\overline{A}$	+		+		+		+		+		5	0,5
$\overline{B}$	+	+		+	+		+	+		+	7	0,7
$\overline{C}$	+	+	+		+	+	+		+	+	8	0,8
$A+B$		+	+	+		+		+	+	+	7	0,7
$(\overline{A+B})$	+				+		+				3	0,3
$A+C$		+		+		+		+		+	5	0,5
$(\overline{A+C})$	+		+		+		+		+		5	0,5
$A \cdot B$						+					1	0,1
$\overline{A \cdot B}$	+	+	+	+	+		+	+	+	+	9	0,9
$A \cdot C$				+				+			2	0,2
$\overline{A \cdot C}$	+	+	+		+	+	+			+	8	0,8
$A+B+C$		+	+	+		+		+	+	+	7	0,7
$(\overline{A+B+C})$	+				+		+				3	0,3
$A \cdot B \cdot C$											0	0
$\overline{A \cdot B \cdot C}$	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	10	1

Событие C влечет событие A ($C \prec A$), события A и B, а также B и C несравнимы друг с другом (никакое из них не влечет другого).

Кроме формулы $\mathbf{P}(X) = \frac{m_X}{m}$ для нахождения вероятностей событий $\overline{A}$, $\overline{B}$, $\overline{C}$, $(\overline{A+B})$, $(\overline{A+C})$, $\overline{A \cdot B}$, $\overline{A \cdot C}$, $(\overline{A+B+C})$ и $(\overline{A \cdot B \cdot C})$ можно использовать формулу вероятности противоположного события: $\mathbf{P}(\overline{X}) = 1 - \mathbf{P}(X)$. Для нахождения вероятностей событий $A+B$ и $A+C$—формулу для вероятности суммы двух событий $\mathbf{P}(X+Y) =$

$=\mathbf{P}(X)+\mathbf{P}(Y)-\mathbf{P}(X\cdot Y)$. Кроме того, из соотношения $C \prec A$ следует, что $A+C=A$, $A+B+C=A+B$, $A\cdot C=C$, откуда $\mathbf{P}(A+C)=\mathbf{P}(A)$, $\mathbf{P}(A+B+C)=\mathbf{P}(A+B)$ и $\mathbf{P}(A\cdot C)=\mathbf{P}(C)$. $\mathbf{P}_A(B)=0{,}2$, $\mathbf{P}_A(C)=0{,}4$, $\mathbf{P}_C(A)=1$.

8. $\mathbf{P}(A)=3/8$, $\mathbf{P}(B)=1/8$, $\mathbf{P}(C)=1/2$, $\mathbf{P}(\overline{A})=5/8$, $\mathbf{P}(\overline{B})=7/8$, $\mathbf{P}(\overline{C})=1/2$, $\mathbf{P}(A+B)=1/2$, $\mathbf{P}(\overline{A+B})=1/2$, $\mathbf{P}(A+C)=1/2$, $\mathbf{P}(\overline{A+C})=1/2$, $\mathbf{P}(A\cdot B)=0$, $\mathbf{P}(\overline{A\cdot B})=1$, $\mathbf{P}(A\cdot C)=3/8$, $\mathbf{P}(\overline{AC})=5/8$, $\mathbf{P}(A+B+C)={}^1/_2$, $\mathbf{P}(\overline{A+B+C})=1/2$ $\mathbf{P}(A\cdot B\cdot C)=0$, $\mathbf{P}(\overline{A\cdot B\cdot C})=1$, $\mathbf{P}_A(B)=0$, $\mathbf{P}_A(C)=1$, $P_C(A)=3/4$.

9. $\mathbf{P}(A)=1/9$, $\mathbf{P}(B)=2/3$, $\mathbf{P}(C)=4/9$, $\mathbf{P}(\overline{A})=8/9$, $\mathbf{P}(\overline{B})=1/3$, $\mathbf{P}(\overline{C})=5/9$, $\mathbf{P}(A+B)=7/9$, $\mathbf{P}(\overline{A+B})=2/9$, $\mathbf{P}(\overline{A+C})=4/9$, $\mathbf{P}(\overline{A+C})=5/9$, $\mathbf{P}(A\cdot B)=0$, $\mathbf{P}(\overline{A\cdot B})=1$, $\mathbf{P}(A\cdot C)=1/9$, $\mathbf{P}(\overline{A\cdot C})=8/9$, $\mathbf{P}(A+B+C)=8/9$, $\mathbf{P}(\overline{A+B+C})=1/9$, $\mathbf{P}(A\cdot B\cdot C)=0$, $\mathbf{P}(\overline{A\cdot B\cdot C})=1$, $\mathbf{P}_A(B)=0$, $\mathbf{P}_A(C)=1$, $\mathbf{P}_C(A)=1/4$.

10. $\mathbf{P}(A)=5/8$, $\mathbf{P}(\overline{A})=3/8$, $\mathbf{P}(B)=3/4$, $\mathbf{P}(\overline{B})=1/4$, $\mathbf{P}(C)=1/8$, $\mathbf{P}(\overline{C})=7/8$, $\mathbf{P}(A+B)=1$, $\mathbf{P}(\overline{A+B})=0$, $\mathbf{P}(A+C)=5/8$, $\mathbf{P}(\overline{A+C})=3/8$, $\mathbf{P}(A\cdot B)=3/8$, $\mathbf{P}(\overline{A\cdot B})=5/8$, $\mathbf{P}(A\cdot C)=1/8$, $\mathbf{P}(\overline{A\cdot C})=7/8$, $\mathbf{P}(A+B+C)=1$, $\mathbf{P}(\overline{A+B+C})=0$, $\mathbf{P}(A\cdot B\cdot C)=0$, $\mathbf{P}(\overline{A\cdot B\cdot C})=1$, $\mathbf{P}_A(B)=3/5$, $\mathbf{P}_A(C)=1/5$, $\mathbf{P}_C(A)=1$.

11. $\mathbf{P}(B)=0{,}10$, $\mathbf{P}_B(A_1)=0{,}20$, $\mathbf{P}_B(A_2)=0{,}60$, $\mathbf{P}_B(A_3)=0{,}20$.

12. $\mathbf{P}(B)=0{,}20$, $\mathbf{P}_B(A_1)=0{,}20$, $\mathbf{P}_B(A_2)=0{,}20$, $\mathbf{P}_B(A_3)=0{,}60$.

13. Обозначая через H_1 событие, состоящее в том, что первое устройство сработает, а через H_2 — в том, что второе устройство сработает, приписываем (в соответствии с условием) им следующие значения вероятностей: $\mathbf{P}(H_1)=0{,}8$, $\mathbf{P}(H_2)=0{,}9$. Так как в условии не оговорено противное, будем считать H_1 и H_2 независимыми. Тогда из $A=H_1\cdot H_2$ следует, что $\mathbf{P}(A)=\mathbf{P}(H_1)\,\mathbf{P}(H_2)=0{,}8\cdot 0{,}9=0{,}72$. Из $B=\overline{H}_1\cdot\overline{H}_2$ следует, что $\mathbf{P}(B)=\mathbf{P}(\overline{H}_1)\,\mathbf{P}(\overline{H}_2)=0{,}2\cdot 0{,}1=0{,}02$. Так как $C=H_1\cdot\overline{H}_2+\overline{H}_1\cdot H_2$ и так как слагаемые здесь несовместны, то

$$\mathbf{P}(C)=\mathbf{P}(H_1\cdot\overline{H}_2)+\mathbf{P}(\overline{H}_1\cdot H_2)=\mathbf{P}(H_1)\,\mathbf{P}(\overline{H}_2)+\mathbf{P}(\overline{H}_1)\,\mathbf{P}(H_2)=$$
$$=0{,}8\cdot 0{,}1+0{,}2\cdot 0{,}9=0{,}26.$$

Вероятность $\mathbf{P}(C)$ можно было бы найти и другим способом, заметив, что $C=\overline{A+B}$, откуда

$$\mathbf{P}(C)=1-\mathbf{P}(A+B)=1-[\mathbf{P}(A)+\mathbf{P}(B)]=1-(0{,}72+0{,}02)=0{,}26.$$

Так как $D=\overline{B}$, то $\mathbf{P}(D)=1-\mathbf{P}(B)=1-0{,}02=0{,}98$. Аналогично из $E=\overline{A}$ следует, что $\mathbf{P}(E)=1-\mathbf{P}(A)=1-0{,}72=0{,}28$.

14. $\mathbf{P}(A)=0{,}06$, $\mathbf{P}(B)=0{,}04$, $\mathbf{P}(C)=0{,}20$, $\mathbf{P}(D)=0{,}04$, $\mathbf{P}(E)=0{,}34$, $\mathbf{P}(F)=0{,}94$.

15. $\mathbf{P}(A)=0{,}006$, $\mathbf{P}(B)=0{,}054$, $\mathbf{P}(C)=0{,}720$, $\mathbf{P}(D)=0{,}216$, $\mathbf{P}(E)=0{,}092$, $\mathbf{P}(F)=0{,}994$.

16. $\mathbf{P}(A)=0{,}12$, $\mathbf{P}(B)=0{,}12$, $\mathbf{P}(C)=0{,}20$, $\mathbf{P}(D)=0{,}08$, $\mathbf{P}(E)=0{,}38$, $\mathbf{P}(F)=0{,}88$.

17. $\mathbf{P}(A)=0{,}24$, $\mathbf{P}(B)=0{,}06$, $\mathbf{P}(C)=0{,}10$, $\mathbf{P}(D)=0{,}06$, $\mathbf{P}(E)=0{,}46$, $\mathbf{P}(F)=0{,}76$.

18. $\mathbf{P}(A)=0{,}03$, $\mathbf{P}(B)=0{,}12$, $\mathbf{P}(C)=0{,}56$, $\mathbf{P}(D)=0{,}28$, $\mathbf{P}(E)=0{,}235$, $\mathbf{P}(F)=0{,}97$.

19. $\mathbf{P}(\xi=3)=0{,}22$, $\mathbf{P}(\xi\leqslant 5)=0{,}77$, $\mathbf{P}(\xi\leqslant 2)=0{,}25$, $\mathbf{P}(2<\xi\leqslant 5)=0{,}52$.

20. $\mathbf{P}(\xi=3)=0{,}10$, $\mathbf{P}(\xi\leqslant 5)=0{,}49$, $\mathbf{P}(\xi\leqslant 2)=0{,}13$ $\mathbf{P}(2<\xi\leqslant 5)=0{,}36$.

21. $\mathbf{P}(0{,}27<\xi\leqslant 0{,}54)=0{,}50$, $\mathbf{P}(\xi>0{,}63)=0{,}20$.

22. $\mathbf{P}(0{,}27<\xi\leqslant 0{,}54)=0{,}50$, $\mathbf{P}(\xi>0{,}63)=0{,}15$.

23. Будем считать результаты каждого из выстрелов независимыми друг от друга. При этом условии ξ подчиняется биномиальному распределению с параметрами $n=5$ и $p=0{,}2$. Используя формулу $\mathbf{P}(\xi=k)=C(n,\ k)\,p^k(1-p)^{n-k}$, мы рассчитываем таблицу распределения (табл. 21.25).

ТАБЛИЦА 21.25

x	0	1	2	3	4	5
$\mathbf{P}(\xi=x)$	0,32768	0,40960	0,20480	0,05120	0,00640	0,00032

С помощью этой таблицы находим интересующие нас вероятности:

$$\mathbf{P}(A)=\mathbf{P}(\xi=0)=0{,}32768,\ \mathbf{P}(B)=\mathbf{P}(\xi=1)=0{,}40960,$$

$$\mathbf{P}(C)=1-\mathbf{P}(A)=0{,}67233,\ \mathbf{P}(D)=1-\mathbf{P}(A)-\mathbf{P}(B)=0{,}26272.$$

24. $\mathbf{P}(A)=0{,}015625$, $\mathbf{P}(B)=0{,}093750$, $\mathbf{P}(C)=0{,}984375$, $\mathbf{P}(D)=0{,}890625$.

25. $\mathbf{P}(A)=0{,}16807$, $\mathbf{P}(B)=0{,}36015$, $\mathbf{P}(C)=0{,}83193$, $\mathbf{P}(D)=0{,}47178$.

26. $\mathbf{P}(A)=0{,}07776$, $\mathbf{P}(B)=0{,}25920$, $\mathbf{P}(C)=0{,}92224$, $\mathbf{P}(D)=0{,}66304$.

27. Пусть ξ — количество произведенных выстрелов. Если считать результаты каждого из выстрелов не зависящими друг от друга, то ξ оказывается распределенной по геометрическому закону. Для составления таблицы распределения следует использовать формулу $\mathbf{P}(\xi=k)=p(1-p)^{k-1}$. В нашем случае $p=0{,}3$. $\mathbf{P}(A)=0{,}1029$, $\mathbf{P}(B)=0{,}7599$, $\mathbf{P}(C)=0{,}2401$.

28. $\mathbf{P}(A)=0{,}0729$, $\mathbf{P}(B)=0{,}3439$, $\mathbf{P}(C)=0{,}6561$.

29. $\mathbf{P}(\xi\geqslant 3)=1-\mathbf{P}(\xi<3)=1-\mathbf{P}(\xi\leqslant 3)=1-F(3)=$

$$=1-(1-e^{-0{,}1\cdot 3})=e^{-0{,}3}=0{,}7408.$$

Вероятность безотказной работы устройства на протяжении не менее чем x единиц времени равна $\mathbf{P}(\xi\geqslant x)=1-\mathbf{P}(\xi<x)=$ $=1-F(x)=e^{-0{,}1\cdot x}$. Полагая эту вероятность равной 0,99, находим значение x из уравнения $e^{-0{,}1\cdot x}=0{,}99$; $x=-10\ln 0{,}99=0{,}1005$ ед.

30. $\mathbf{P}(9{,}975\leqslant\xi\leqslant 10{,}025)=F(10{,}025)-F(9{,}975)=$

$$=\Phi_0\left(\frac{10{,}025-10}{0{,}01}\right)-\Phi_0\left(\frac{9{,}975-10}{0{,}01}\right)=2\Phi_0(2{,}5)=2\cdot 0{,}4938=0{,}9876.$$

(Значение Φ_0 (2,5) мы берем из таблицы, см. приложение.)

$$\mathbf{P}\,(9{,}995 \leqslant \xi \leqslant 10{,}045) = F\,(10{,}045) - F\,(9{,}995) =$$

$$= \Phi_0\left(\frac{10{,}045-10}{0{,}01}\right) - \Phi_0\left(\frac{9{,}995-10}{0{,}01}\right) = \Phi_0\,(4{,}5) + \Phi_0\,(0{,}5) =$$

$$= 0{,}5000 + 0{,}1915 = 0{,}6915$$

31. Рассчитываем выборочные начальные моменты первого и второго порядков:

$$\bar{x} = a_1 = \frac{1}{100}\cdot(1{,}1\cdot 1 + 1{,}2\cdot 4 + \ldots + 2{,}0\cdot 2) = 1{,}551,$$

$$a_2 = \frac{1}{100}(1{,}1^2\cdot 1 + 1{,}2^2\cdot 4 + \ldots + 2{,}0^2\cdot 2) = 2{,}4413.$$

Отсюда

$$D_{\text{в}} = m_2 = a_2 - a_1^2 = 2{,}4413 - 1{,}551^2 = 0{,}0357,\quad \sigma_{\text{в}} = \sqrt{0{,}0357}, = 0{,}189.$$

Приравнивая теперь параметры нормального распределения рассчитанным значениям $\bar{x}$ и $\sigma_{\text{в}}$, мы получаем следующую функцию плотности вероятностей:

$$f\,(x) = \frac{1}{0{,}189\sqrt{2\pi}}\, e^{-\frac{(x-1{,}551)^2}{2\cdot 0{,}189^2}}.$$

Вычисляем требуемую вероятность

$$\mathbf{P}\,(1{,}25 < \xi \leqslant 1{,}65) = \Phi_0\left(\frac{1{,}65-1{,}551}{0{,}189}\right) - \Phi_0\left(\frac{1{,}25-1{,}551}{0{,}189}\right) =$$

$$= \Phi_0\,(0{,}524) + \Phi_0\,(1{,}593) = 0{,}1999 + 0{,}4444 = 0{,}6443.$$

Соответствующая относительная частота получается суммированием абсолютных частот, отвечающих интервалам с 3-го по 6-й, и делением этой суммы на объем выборки:

$$\nu = \frac{10+16+19+20}{100} = 0{,}65.$$

В нашем случае сумма площадей прямоугольников гистограммы с 3-го по 6-й оказывается почти в точности равной площади той фигуры под графиком найденной выше функции плотности вероятностей, которая отсекается ординатами, проведенными в точках $x = 1{,}25$ и $x = 1{,}65$.

32. $\bar{x} = 3{,}9959$, $D_{\text{в}} = 0{,}1833$, $\sigma_{\text{в}} = 0{,}3360$,

$$f\,(x) = \frac{1}{0{,}3360\sqrt{2\pi}}\, e^{-\frac{(x-3{,}9959)^2}{2\cdot 0{,}3360^2}}.$$

$$\mathbf{P}\,(3{,}3 < \xi \leqslant 3{,}9) = 0{,}3686,\quad \nu = 0{,}366.$$

33. $$\mathbf{P}\,(75 < \xi \leqslant 82) \approx \Phi_0\left(\frac{82-100\cdot 0{,}8}{\sqrt{100\cdot 0{,}8\cdot 0{,}2}}\right) - \Phi_0\left(\frac{75-100\cdot 0{,}8}{\sqrt{100\cdot 0{,}8\cdot 0{,}2}}\right) =$$

$$= \Phi_0\,(0{,}5) + \Phi_0\,(1{,}25) = 0{,}1915 + 0{,}3944 = 0{,}5859.$$

Аналогично получаем

$$P(74 < \xi \leqslant 78) \approx 0{,}2417, \quad P(88 < \xi \leqslant 98) \approx 0{,}0228.$$

34. Используя формулу Муавра — Лапласа, получаем

$$P(70 < \xi \leqslant 100) \approx \Phi_0\left(\frac{100-400\cdot 0{,}2}{\sqrt{400\cdot 0{,}2\cdot 08}}\right) - \Phi_0\left(\frac{70-400\cdot 0{,}2}{\sqrt{400\cdot 0{,}2\cdot 0{,}8}}\right) =$$
$$= \Phi_0(2{,}5) + \Phi_0(1{,}25) = 0{,}8882.$$

35. Каждой из следующих пар: (2, 1) (4, 4), (6, 9) и (8, 16) соответствует вероятность, равная 1/16, а каждой из пар (3, 2), (4, 3), (5,4), (5, 6), (6, 8) и (7, 12) — вероятность, равная 1/8. Безусловные распределения ξ и η даются соответственно табл. 21.26 и 21.27.

ТАБЛИЦА 21.26

x	2	3	4	5	6	7	8
$P(\xi = x)$	$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{3}{16}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{3}{16}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{16}$

ТАБЛИЦА 21.27

y	1	2	3	4	6	8	9	12	16
$P(\eta = y)$	$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{3}{16}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{16}$

При $\xi=2$, $\xi=3$, $\xi=7$ и $\xi=8$ условные распределения η оказываются вырожденными (при $\xi=2$, например, с вероятностью, равной 1, будет $\eta=1$ и т. д.). Условное распределение η при $\xi=4$ дано в табл. 21.28.

ТАБЛИЦА 21.28

y	3	4
$P_{\xi=4}(\eta = y)$	2/3	1/3

(Условные распределения η при $\xi=5$ и при $\xi=6$ мы здесь не приводим.) Зависимость условных математических ожиданий $M_{\xi=x}(\eta)$ от x дана в табл. 21.29.

ТАБЛИЦА 21.29

x	2	3	4	5	6	7	8
$M_{\xi=x}(\eta)$	1	2	3,333	5	8,333	12	16

Коэффициент корреляции величин ξ и η мы вычисляем по формуле

$$r = \frac{\mu_{1\,1}}{\sqrt{\mu_{2\,0}\mu_{0\,2}}},$$

где $\mu_{1\,1}$, $\mu_{2\,0}$ и $\mu_{0\,2}$ — центральные моменты совместного распределения этих величин. $\mu_{2\,0}$ и $\mu_{0\,2}$ представляют собой также дисперсии безусловных распределений ξ и η (их можно найти по табл. 21.26 и 21.27). Момент μ_{11} удобно искать по формуле $\mu_{1\,1} = \alpha_{1\,1} - \alpha_{1\,0}\alpha_{0\,1}$. Здесь $\alpha_{1\,0}$ и $\alpha_{0\,1}$ суть не что иное, как безусловные математические ожидания величин ξ и η, а $\alpha_{1\,1} = \sum\limits_i x_i y_i \mathbf{P}\ (\xi = x_i;\ \eta = y_i)$. Проделав все выкладки, получаем

$$\mathbf{M}(\xi) = \alpha_{1\,0} = 5, \quad \mathbf{M}(\eta) = \alpha_{0\,1} = 6{,}25,$$
$$\mathbf{D}(\xi) = \mu_{2\,0} = 2{,}5, \quad \mathbf{D}(\eta) = \mu_{0\,2} = 17{,}1875,$$
$$\alpha_{1\,1} = 37{,}5,$$

откуда $\mu_{1\,1} = 6{,}25$ и $r = \frac{6{,}25}{\sqrt{2{,}5 \cdot 17{,}1875}} = 0{,}9534$. Сравнительно близкое к единице значение коэффициента корреляции указывает на достаточно тесную зависимость между ξ и η.

36. Здесь приводится только корреляционная таблица абсолютных частот (табл. 21.30).

ТАБЛИЦА 21.30

x \ y	1	2	3	4	5
3	3	2	2	1	0
5	1	4	4	1	0
7	1	2	8	2	1
9	0	1	4	4	1
11	0	4	2	2	0

Относительные частоты могут быть получены делением абсолютных частот на объем выборки, равный 50. Уравнение выборочной линейной регрессии имеет вид $y = 0{,}119x + 1{,}987$. Значения $y(x)$ и условных выборочных средних величины η даны в табл. 21.31.

ТАБЛИЦА 21.31

x	3	5	7	9	11
$y(x)$	2,34	2,58	2,82	3,06	3,30
Условные выборочные средние	2,12	2,50	3,00	3,50	2,75

П Р И Л О Ж Е Н И Е

Таблица значений функции $\Phi_0(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^z e^{-u^2/2} du$

z	$\Phi_0(z)$	z	$\Phi_0(z)$	z	$\Phi_0(z)$	z	$\Phi_0(z)$
0,00	0,0000	0,29	0,1141	0,58	0,2190	0,87	0,3078
0,01	0,0040	0,30	0,1179	0,59	0,2224	0,88	0,3106
0,02	0,0080	0,31	0,1217	0,60	0,2257	0,89	0,3133
0,03	0,0120	0,32	0,1255	0,61	0,2291	0,90	0,3159
0,04	0,0160	0,33	0,1293	0,62	0,2324	0,91	0,3186
0,05	0,0199	0,34	0,1331	0,63	0,2357	0,92	0,3212
0,06	0,0239	0,35	0,1368	0,64	0,2389	0,93	0,3238
0,07	0,0279	0,36	0,1406	0,65	0,2422	0,94	0,3264
0,08	0,0319	0,37	0,1443	0,66	0,2454	0,95	0,3289
0,09	0,0359	0,38	0,1480	0,67	0,2486	0,96	0,3315
0,10	0,0398	0,39	0,1517	0,68	0,2517	0,97	0,3340
0,11	0,0438	0,40	0,1554	0,69	0,2549	0,98	0,3365
0,12	0,0478	0,41	0,1591	0,70	0,2580	0,99	0,3389
0,13	0,0517	0,42	0,1628	0,71	0,2611	1,00	0,3413
0,14	0,0557	0,43	0,1664	0,72	0,2642	1,01	0,3438
0,15	0,0596	0,44	0,1700	0,73	0,2673	1,02	0,3461
0,16	0,0636	0,45	0,1736	0,74	0,2703	1,03	0,3485
0,17	0,0675	0,46	0,1772	0,75	0,2734	1,04	0,3508
0,18	0,0714	0,47	0,1808	0,76	0,2764	1,05	0,3531
0,19	0,0753	0,48	0,1844	0,77	0,2794	1,06	0,3554
0,20	0,0793	0,49	0,1879	0,78	0,2823	1,07	0,3577
0,21	0,0832	0,50	0,1915	0,79	0,2852	1,08	0,3599
0,22	0,0871	0,51	0,1950	0,80	0,2881	1,09	0,3621
0,23	0,0910	0,52	0,1985	0,81	0,2910	1,10	0,3643
0,24	0,0948	0,53	0,2019	0,82	0,2939	1,11	0,3665
0,25	0,0987	0,54	0,2054	0,83	0,2967	1,12	0,3686
0,26	0,1026	0,55	0,2088	0,84	0,2995	1,13	0,3708
0,27	0,1064	0,56	0,2123	0,85	0,3023	1,14	0,3729
0,28	0,1103	0,57	0,2157	0,86	0,3051	1,15	0,3749

z	$\Phi_0(z)$	z	$\Phi_0(z)$	z	$\Phi_0(z)$	z	$\Phi_0(z)$
1,16	0,3770	1,52	0,4357	1,88	0,4699	2,48	0,4934
1,17	0,3790	1,53	0,4370	1,89	0,4706	2,50	0,4938
1,18	0,3810	1,54	0,4382	1,90	0,4713	2,52	0,4941
1,19	0,3830	1,55	0,4394	1,91	0,4719	2,54	0,4945
1,20	0,3849	1,56	0,4406	1,92	0,4726	2,56	0,4948
1,21	0,3869	1,57	0,4418	1,93	0,4732	2,58	0,4951
1,22	0,3883	1,58	0,4429	1,94	0,4738	2,60	0,4953
1,23	0,3907	1,59	0,4441	1,95	0,4744	2,62	0,4956
1,24	0,3925	1,60	0,4452	1,96	0,4750	2,64	0,4959
1,25	0,3944	1,61	0,4463	1,97	0,4756	2,66	0,4961
1,26	0,3962	1,62	0,4474	1,98	0,4761	2,68	0,4963
1,27	0,3980	1,63	0,4484	1,99	0,4767	2,70	0,4965
1,28	0,3997	1,64	0,4495	2,00	0,4772	2,72	0,4967
1,29	0,4015	1,65	0,4505	2,02	0,4783	2,74	0,4969
1,30	0,4032	1,66	0,4515	2,04	0,4793	2,76	0,4971
1,31	0,4049	1,67	0,4525	2,06	0,4803	2,78	0,4973
1,32	0,4066	1,68	0,4535	2,08	0,4812	2,80	0,4974
1,33	0,4082	1,69	0,4545	2,10	0,4821	2,82	0,4976
1,34	0,4099	1,70	0,4554	2,12	0,4830	2,84	0,4977
1,35	0,4115	1,71	0,4564	2,14	0,4838	2,86	0,4979
1,36	0,4131	1,72	0,4573	2,16	0,4846	2,88	0,4980
1,37	0,4147	1,73	0,4582	2,18	0,4854	2,90	0,4981
1,38	0,4162	1,74	0,4591	2,20	0,4861	2,92	0,4982
1,39	0,4177	1,75	0,4599	2,22	0,4868	2,94	0,4984
1,40	0,4192	1,76	0,4608	2,24	0,4875	2,96	0,4985
1,41	0,4207	1,77	0,4616	2,26	0,4881	2,98	0,4986
1,42	0,4222	1,78	0,4625	2,28	0,4887	3,00	0,49865
1,43	0,4236	1,79	0,4633	2,30	0,4893	3,20	0,49931
1,44	0,4251	1,80	0,4641	2,32	0,4898	3,40	0,49966
1,45	0,4265	1,81	0,4649	2,34	0,4904	3,60	0,499841
1,46	0,4279	1,82	0,4656	2,36	0,4909	3,80	0,499928
1,47	0,4292	1,83	0,4664	2,38	0,4913	4,00	0,499968
1,48	0,4306	1,84	0,4671	2,40	0,4918	4,50	0,499997
1,49	0,4319	1,85	0,4678	2,42	0,4922	5,00	0,499997
1,50	0,4332	1,86	0,4686	2,44	0,4927		
1,51	0,4345	1,87	0,4693	2,46	0,4931		

Для $z < 0$ используется формула $\Phi_0(z) = -\Phi_0(-z)$

Виталий Николаевич Матвеев
Артур Александрович Матюшкин-Герке
Николай Васильевич Богомолов
Семен Моисеевич Козловский

КУРС МАТЕМАТИКИ
для техникумов, ч. II

М., 1976 г., 368 стр. с илл.

Редактор А. Ф. Лапко

Техн. редакторы С. Я. Шкляр, Е. В. Морозова

Корректор И. В. Хорошаева

Сдано в набор 08.06. 1976 г. Подписано к печати 12.10. 1976 г. Бумага $84 \times 108^1/_{32}$. Физ. печ. л. 11,5. Условн. печ. л. 19,32. Уч.-изд. л. 20,22. Тираж 400 000 экз. (2-й завод 100 001—400 000 экз.) Цена книги 65 коп. Заказ № 363

Издательство «Наука»
Главная редакция физико-математической литературы
117071, Москва, В-71, Ленинский проспект, 15

Ордена Октябрьской Революции
и ордена Трудового Красного Знамени
Первая Образцовая типография имени А. А. Жданова
Союзполиграфпрома при Государственном комитете
Совета Министров СССР по делам издательств,
полиграфии и книжной торговли
Москва, М-54, Валовая, 28

65 коп.