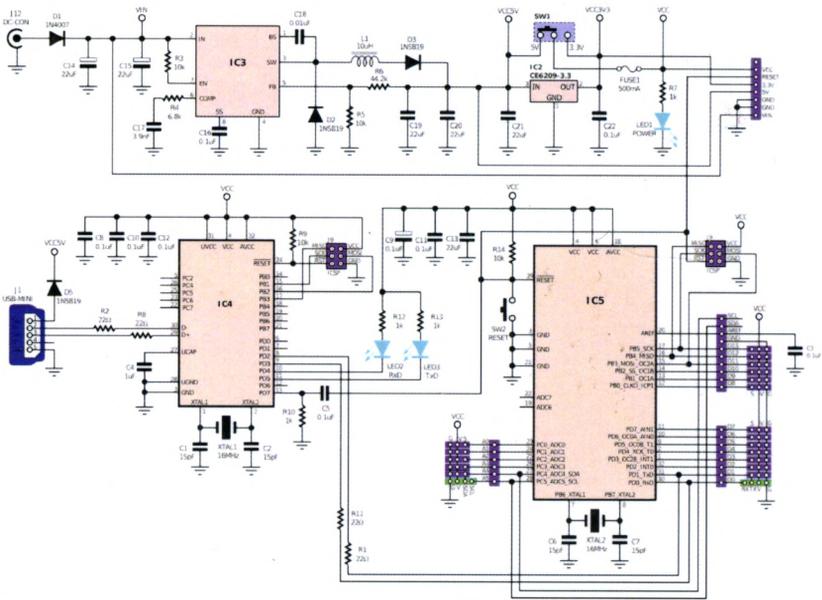


ТЕОРЕТИЧЕСКИЕ ОСНОВЫ ЭЛЕКТРОТЕХНИКИ

ПРАКТИКУМ

С.М. АПОЛЛОНСКИЙ
А.Л. ВИНОГРАДОВ

- Расчет стационарных процессов в линейных электрических цепях
- Расчет несинусоидальных и переходных процессов.
Расчет нелинейных цепей
- Расчет электромагнитных полей



С.М. Аполлонский
А.Л. Виноградов

ТЕОРЕТИЧЕСКИЕ ОСНОВЫ ЭЛЕКТРОТЕХНИКИ ПРАКТИКУМ

Рекомендовано

ФГБОУ ВО «Московский государственный технологический университет «СТАНКИН»
в качестве **учебного пособия** для студентов высших учебных заведений,
обучающихся по направлениям подготовки «Электроэнергетика и электротехника»,
«Электроника и микроэлектроника»

Министерство образования и науки Российской Федерации
ФГАУ «Федеральный институт развития образования»
Регистрационный номер рецензии № 081 от 07.03.2014

BOOK.ru

ЭЛЕКТРОННО-БИБЛИОТЕЧНАЯ СИСТЕМА

КНОРУС • МОСКВА • 2020

УДК 621.3(075.8)
ББК 31.2я73
А76

Рецензенты:

В.В. Фёдоров, проф. кафедры «Теоретические основы электротехники» Санкт-Петербургского государственного электротехнического университета (ЛЭТИ), д-р техн. наук, проф.,

М.А. Шакиров, проф. кафедры «Теоретические основы электротехники» Санкт-Петербургского государственного политехнического университета (ЛПИ), д-р техн. наук, проф.

Аполлонский, Станислав Михайлович.

А76 Теоретические основы электротехники. Практикум : учебное пособие / С.М. Аполлонский, А.Л. Виноградов. — Москва : КНОРУС, 2020. — 290 с. — (Бакалавриат).

ISBN 978-5-406-00078-6

Рассмотрены классы задач с решениями по теоретическим основам электротехники, а также лабораторный практикум по технологии Multisim. Учтены как общие требования к очному обучению студентов в высших учебных заведениях, так и особенности получения высшего образования в условиях обучения без отрыва от трудовой деятельности. Для пособия отобран минимум задач по разным разделам, но с подробными решениями, которые позволят студенту в дальнейшем успешнее осваивать специальные электротехнические дисциплины.

Соответствует ФГОС ВО последнего поколения.

Для студентов направлений «Электроэнергетика и электротехника» и «Электроника и нанoeлектроника». Может быть полезно для студентов других направлений, изучающих электротехнические дисциплины.

УДК 621.3(075.8)
ББК 31.2я73

Аполлонский Станислав Михайлович
Виноградов Александр Леонидович

ТЕОРЕТИЧЕСКИЕ ОСНОВЫ ЭЛЕКТРОТЕХНИКИ. ПРАКТИКУМ

Изд. № 523255. Формат 60×90/16. Гарнитура «NewtonС».

Усл. печ. л. 18,5. Уч.-изд. л. 8,0.

ООО «Издательство «КноРус».

117218, г. Москва, ул. Кедрова, д. 14, корп. 2.

Тел.: +7 (495) 741-46-28.

E-mail: welcome@knorus.ru www.knorus.ru

Отпечатано в АО «Т8 Издательские Технологии».

109316, г. Москва, Волгоградский проспект, д. 42, корп. 5.

Тел.: +7 (495) 221-89-80.

ISBN 978-5-406-00078-6

© Аполлонский С.М., Виноградов А.Л., 2020

© ООО «Издательство «КноРус», 2020

ОГЛАВЛЕНИЕ

Предисловие	6
-----------------------	---

ЧАСТЬ I.

РАСЧЕТ СТАЦИОНАРНЫХ ПРОЦЕССОВ В ЛИНЕЙНЫХ ЭЛЕКТРИЧЕСКИХ ЦЕПЯХ

Глава 1. Расчет линейных электрических цепей	8
1.1. Пассивные элементы	8
1.2. Источники электрической энергии.	9
Глава 2. Расчет линейных электрических цепей постоянного тока	12
2.1. Основные законы электрических цепей	12
2.2. Групповое соединение приемников.	12
2.3. Расчет простых цепей.	16
2.4. Методы расчета сложных цепей постоянного тока.	19
Глава 3. Однофазные электрические цепи синусоидального тока	28
3.1. Основные положения и соотношения	28
3.2. Символический метод расчета.	33
3.3. Резонанс в цепях синусоидального тока	36
3.4. Цепи с индуктивно связанными катушками	37
Глава 4. Трехфазные электрические цепи	45
4.1. Основные положения и соотношения	45
4.2. Расчет трехфазных цепей	47

ЧАСТЬ II.

РАСЧЕТ НЕСИНУСОИДАЛЬНЫХ И ПЕРЕХОДНЫХ ПРОЦЕССОВ. РАСЧЕТ НЕЛИНЕЙНЫХ ЦЕПЕЙ

Глава 5. Несинусоидальные периодические процессы в линейных цепях	64
5.1. Основные положения и соотношения	64
5.2. Расчет линейных цепей с несинусоидальными ЭДС.	68
Глава 6. Переходные процессы в электрических цепях.	74
6.1. Основные положения и соотношения	74
6.2. Классический метод расчета переходных процессов.	75
6.3. Операторный метод расчета переходных процессов	87
6.4. Расчет переходных процессов методом наложения (интеграл Дюамеля)	93

Глава 7. Нелинейные электрические и магнитные цепи при постоянном токе	97
7.1. Нелинейные электрические цепи при постоянном токе	97
7.2. Магнитные цепи при постоянном токе	102
Глава 8. Нелинейные цепи при переменном токе	107
8.1. Расчет установившихся процессов в нелинейных цепях при переменном токе	107
8.2. Электромагнитные процессы в катушке с ферромагнитным сердечником	110

ЧАСТЬ III.

РАСЧЕТ ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫХ ПОЛЕЙ

Введение. Общие сведения об электромагнитном поле	118
Глава 9. Расчет электростатических полей	121
9.1. Основные аналитические зависимости	121
9.2. Расчет симметричных полей	124
9.3. Расчет напряженностей полей наложением	134
9.4. Решение уравнений Лапласа и Пуассона	137
Глава 10. Расчет электрических полей от постоянных токов	144
10.1. Основные аналитические зависимости	144
10.2. Электрическое поле в проводящей среде	146
Глава 11. Расчет магнитных полей постоянных токов	158
11.1. Основные аналитические зависимости	158
11.2. Закон полного тока. Скалярный магнитный потенциал	160
11.3. Векторный магнитный потенциал	167
11.4. Метод наложения	172
11.5. Магнитное поле в присутствии ферромагнетиков	174
Глава 12. Квазистатическое электромагнитное поле	177
12.1. Основные аналитические зависимости	177
12.2. ЭДС, наводимые в телах и контурах	179
12.3. Особенности распространения электромагнитного поля в проводящей среде	188
Ответы на задачи	191
Тестовые задания по теории электромагнитного поля	192
Тесты к главе 9	192
Тесты к главе 10	196
Тесты к главе 11	201
Тесты к главе 12	206

Лабораторные работы на основе компьютерного моделирования (виртуальные лабораторные работы)	214
Общие указания	214
Работа 1. Исследование сложной электрической цепи постоянного тока	215
Работа 2. Исследование линейных элементов электрических цепей.	220
Работа 3. Исследование разветвленной цепи синусоидального тока с одним источником энергии	229
Работа 4. Исследование частотных свойств цепи с последовательным соединением активного сопротивления, индуктивности и емкости	238
Работа 5. Исследование трехфазных цепей, соединенных по схеме «звезда».	244
Работа 6. Исследование полупроводниковых диодов	250
Работа 7. Исследование переходных процессов в цепи с последовательным соединением активного сопротивления с катушкой индуктивности и активного сопротивления с конденсатором	257
Работа 8. Исследование переходных процессов в цепи с последовательным соединением активного сопротивления, катушки индуктивности и конденсатора.	268
Работа 9. Методика применения программы Multisim для выполнения лабораторных работ	275
Ответы на вопросы теста	289
Литература	290

ПРЕДИСЛОВИЕ

Предлагаемое читателям пособие является практическим руководством по дисциплине «Теоретические основы электротехники», содержащим набор задач с решениями, тесты по теории электромагнитного поля и лабораторный практикум, базирующийся на технологии Multisimе.

Данное пособие является практическим руководством к ранее написанному авторами учебному пособию по дисциплине «Теоретические основы электротехники», опубликованному в издательстве «КноРус».

На наш взгляд, это первое учебное пособие, которое охватывает все стороны учебной дисциплины ТОЭ с учетом особенностей подготовки студентов бакалавриата.

Авторы использовали ранее опубликованные источники (отмеченные в библиографии) и собственные разработки, которые были накоплены в течение длительного преподавания данной дисциплины в разных вузах России.

Содержание учебного пособия составлено с учетом Федерального государственного образовательного стандарта высшего профессионального образования по направлениям подготовки бакалавриата: 13.03.02 — электроэнергетика и электротехника; 11.03.04 — электроника и нанoeлектроника.

Пособие может быть полезно для магистров и технических работников, встречающихся в своей деятельности с расчетами электротехнических устройств. При разработке пособия учтены особенности получения образования без отрыва от трудовой деятельности и при ограниченном бюджете времени для очных форм занятий.

Отобранный для пособия учебный материал дает студенту возможность в дальнейшем успешно осваивать специальные электротехнические дисциплины. Каждая группа задач предваряется краткими теоретическими выкладками, которые упрощают, как полагают авторы, осмысление подходов к решению задач.

Авторы приносят глубокую благодарность д. т. н., профессору В.В. Фёдорову и д. т. н., профессору М.А. Шакирову за внимательное прочтение рукописи и ряд полезных замечаний, способствовавших ее улучшению.

Авторы будут благодарны всем замечаниям по настоящему пособию, так как авторы впервые взяли за написание пособия для бакалавров. Замечания можно направлять в адрес издательства, которое обязуется передать их авторам.

ЧАСТЬ I

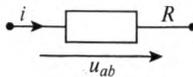
**РАСЧЕТ СТАЦИОНАРНЫХ
ПРОЦЕССОВ В ЛИНЕЙНЫХ
ЭЛЕКТРИЧЕСКИХ ЦЕПЯХ**

ГЛАВА 1

РАСЧЕТ ЛИНЕЙНЫХ ЭЛЕКТРИЧЕСКИХ ЦЕПЕЙ

1.1. Пассивные элементы

Электрическое сопротивление — R , Ом. Величина, обратная сопротивлению, есть проводимость — G , См.



Закон Ома

$$u = Ri$$

или

$$i = Gu. \quad (1.1)$$

Количество тепловой энергии W_T , выделяющееся в сопротивлении R при протекании тока i в течение времени t , определяется соотношением

$$W_T = \int_0^t i^2 R dt. \quad (1.2)$$

 Индуктивность L характеризует способность цепи накапливать энергию магнитного поля. Количество этой энергии W_M , накопленной в цепи, зависит от величины тока i :

$$W_M = \frac{Li^2}{2}. \quad (1.3)$$

Величина индуктивности определяется как отношение потокосцепления цепи Ψ к току i :

$$L = \frac{\Psi}{i}. \quad (1.4)$$

Потокосцеплением называется сумма магнитных потоков всех витков катушки. В простейшем случае для катушки на стальном сердечнике можно считать, что ее потокосцепление есть магнитный поток Φ , умноженный на число витков w : $\Psi = \Phi w$.

Соотношения между током и напряжением в индуктивном элементе

$$i = \frac{1}{L} \int u dt; \quad u = L \frac{di}{dt}. \quad (1.5)$$

—||— *Емкость* C характеризует способность цепи накапливать энергию электрического поля. Количество энергии электрического поля $W_{\text{Э}}$, накопленной в цепи с емкостью C , зависит от величины напряжения между проводниками:

$$W_{\text{Э}} = \frac{Cu^2}{2}. \quad (1.6)$$

Величина емкости C определяется как отношение электрического заряда q одного из проводов к напряжению u между ними:

$$C = \frac{q}{u}. \quad (1.7)$$

Соотношения между током и напряжением в индуктивном элементе

$$i = C \frac{du}{dt}; \quad u = \frac{1}{C} \int i dt. \quad (1.8)$$

1.2. Источники электрической энергии

Источники электрической энергии, называемые также генераторами, характеризуются определенным направлением действия, то есть направлением, в котором каждый источник стремится послать электрический ток в присоединенную к нему цепь. Это направление на электрических схемах указывают стрелкой.

Источник напряжения (идеальный) — напряжение U_{ab} не зависит от величины его тока и характеризуется электродвижущей силой E (ЭДС). Внутреннее сопротивление этого источника напряжения равно нулю.

Источник тока — ток J источника не зависит от величины приложенного к нему напряжения. Внутреннее сопротивление источника тока равно бесконечности.

Реальный источник ЭДС можно изобразить в виде последовательной схемы, содержащей внутреннее сопротивление $R_{\text{и}}$ и идеальный источник напряжения с ЭДС $E_{\text{и}}$, численно равной напряжению источника в режиме холостого хода (рис. 1.1, а), а также в виде параллельной схемы, содержащей проводимость генератора $G_{\text{и}}$ и идеальный источ-

ник тока J , численно равный току короткого замыкания источника ЭДС (рис. 1.1, б).

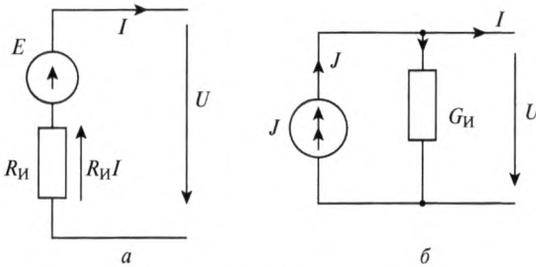


Рис. 1.1

Переход от схемы источника напряжения к источнику тока и обратно осуществляется по формулам:

$$J = E_{и}/R_{и}; \quad E_{и} = R_{и}J. \quad (1.9)$$

Для ветви, содержащей источник ЭДС и сопротивления, применяют обобщенный закон Ома

$$I = \frac{U + \sum E}{\sum R}, \quad (1.10)$$

где U — напряжение на концах ветви; $\sum E$ — алгебраическая сумма ЭДС источников, находящихся в данной ветви. Со знаком «+» берут ЭДС, направления которых совпадают с выбранным положительным направлением тока, и со знаком «-» — ЭДС с противоположными направлениями.

В задачах 1.1—1.10 укажите правильный ответ.

1.1. Дано: $C = 1000$ мкФ; $U = 100$ В. Определите заряд конденсатора q , Кл.

1. 0,1. 2. 0,2. 3. 0,3. 4. 0,4.

1.2. Дано: $L = 10$ мГн; $I = 100$ А. Определите потокосцепление катушки ψ , Вб.

1. 1. 2. 2. 3. 3. 4. 0,5.

1.3. Дано: $W_{\text{Э}} = 0,05$ Дж; $C = 10$ мкФ. Определите напряжение на конденсаторе, В.

1. 100. 2. 400. 3. 300. 4. 200.

1.4. Дано: $L = 2$ мГн; $I = 100$ А. Определите энергию магнитного поля катушки W_M , Дж.

1. 25. 2. 20. 3. 15. 4. 10.

1.5. Дано: $I = 100$ А; $\psi = 1$ Вб. Определите индуктивность катушки L , Гн.

1. 0,01. 2. 0,03. 3. 0,02. 4. 0,04.

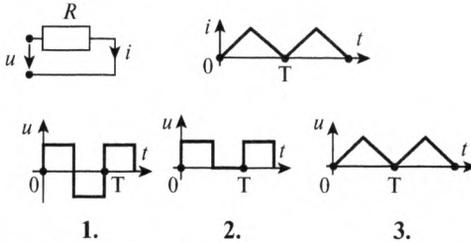
1.6. Дано: $W_M = 5$ Дж; $L = 0,1$ Гн. Определите ток в катушке индуктивности, А.

1. 10. 2. 20. 3. 15. 4. 25.

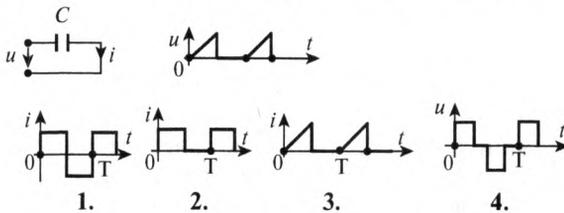
1.7. Дано: $W_M = 3$ Дж; $I = 10$ А. Определите индуктивность катушки L , Гн.

1. 0,06. 2. 0,04. 3. 0,03. 4. 0,02.

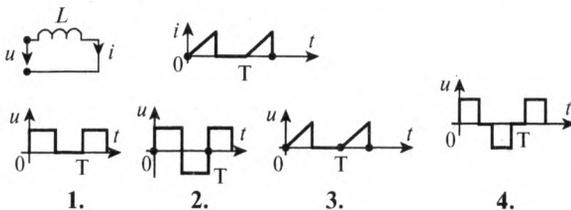
1.8. Дан график тока $i(t)$. Укажите график напряжения $u(t)$.



1.9. Дан график напряжения $u(t)$. Укажите график тока $i(t)$.



1.10. Дан график тока $i(t)$. Укажите график напряжения $u(t)$.



ГЛАВА 2

РАСЧЕТ ЛИНЕЙНЫХ ЭЛЕКТРИЧЕСКИХ ЦЕПЕЙ ПОСТОЯННОГО ТОКА

2.1. Основные законы электрических цепей

Законы Кирхгофа. 1-й закон Кирхгофа гласит, что для любого узла электрической цепи алгебраическая сумма токов в расходящихся из узла ветвях равна нулю:

$$\sum_{k=1}^N I_k = 0, \quad (2.1)$$

причем токи, направленные к узлу, в этой алгебраической сумме принято считать положительными, а токи, направленные от узла, — отрицательными.

2-й закон Кирхгофа утверждает, что в любом контуре электрической цепи алгебраическая сумма ЭДС равна алгебраической сумме напряжений на элементах, входящих в этот контур:

$$\sum_{k=1}^K E_k = \sum_{q=1}^Q I_q R_q, \quad (2.2)$$

причем напряжения и ЭДС, у которых направление совпадает с выбранным направлением обхода, принимаются положительными, а у которых противоположно — отрицательными.

Баланс мощностей. Алгебраическая сумма всех мощностей источников энергии равна сумме всех мощностей приемников энергии:

$$\sum_k E_k I_k = \sum_{n=1}^N I_n^2 R_n. \quad (2.3)$$

Если ток ветви направлен противоположно действию ЭДС источника энергии, то тогда произведение EI получается отрицательным.

2.2. Групповое соединение приемников

1. **Последовательное соединение.** При последовательном соединении по всем приемникам протекает один и тот же ток. При этом эк-

вивалентное сопротивление группы последовательно соединенных приемников равно сумме сопротивлений отдельных приемников этой группы

$$R = R_1 + R_2 + R_3 + \dots + R_n. \quad (2.4)$$

2. Параллельное соединение. При параллельном соединении на всех приемниках действует одно и то же напряжение (рис. 2.1), ток всей группы равен сумме токов отдельных приемников. Например, для трех параллельных приемников (рис. 2.1) $I = I_1 + I_2 + I_3$.

Эквивалентная проводимость группы параллельно соединенных приемников равна сумме проводимостей отдельных приемников этой группы

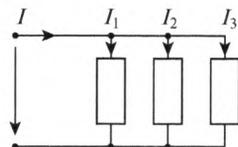


Рис. 2.1

$$G = G_1 + G_2 + G_3 + \dots + G_n. \quad (2.5)$$

В частном случае эквивалентное сопротивление цепи из двух параллельных сопротивлений R_1 и R_2 определяется формулой:

$$R_3 = \frac{R_1 \cdot R_2}{R_1 + R_2}. \quad (2.6)$$

3. Смешанное соединение. Смешанное соединение приемников представляет сочетание последовательного и параллельного соединения, при котором эквивалентное сопротивление группы в целом может быть найдено по изложенным выше правилам.

Например, приемники 2 и 3 (рис. 2.2) соединены между собой последовательно, а приемники 6 и 7 образуют параллельное соединение. Общее эквивалентное сопротивление R_3 равно:

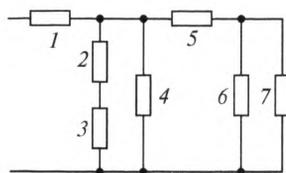


Рис. 2.2

$$R_3 = R_1 + \frac{R_{234} \cdot R_{567}}{R_{234} + R_{567}},$$

$$\text{где } R_{234} = \frac{(R_2 + R_3)R_4}{R_2 + R_3 + R_4}; \quad R_{567} = R_5 + \frac{R_6 \cdot R_7}{R_6 + R_7}. \quad (2.7)$$

4. Преобразования треугольника сопротивлений в эквивалентную звезду сопротивлений и наоборот. Звезда и треугольник (рис. 2.3) считаются эквивалентными, если они по отношению к своим выводам обладают одинаковыми электрическими свойствами, в частности, имеют между соответствующими выводами одинаковые сопротивления.

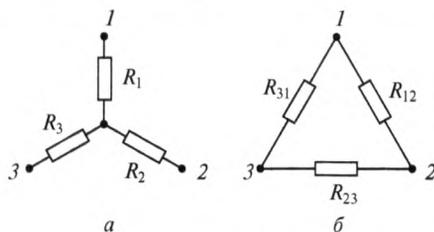


Рис. 2.3

$$\left. \begin{aligned} R_1 &= \frac{R_{12}R_{31}}{R_{12} + R_{23} + R_{31}}, \\ R_2 &= \frac{R_{23}R_{12}}{R_{12} + R_{23} + R_{31}}, \\ R_3 &= \frac{R_{31}R_{23}}{R_{12} + R_{23} + R_{31}}, \end{aligned} \right\} \begin{aligned} R_{12} &= R_1 + R_2 + \frac{R_1 R_2}{R_3}, \\ R_{23} &= R_2 + R_3 + \frac{R_2 R_3}{R_1}, \\ R_{31} &= R_3 + R_1 + \frac{R_3 R_1}{R_2}, \end{aligned} \quad (2.8)$$

2.1. Найти эквивалентное сопротивление R_{12345} цепи, представленной на рис. 2.4, а.

Решение. Заменяв параллельное соединение сопротивлений R_1 и R_2 одним эквивалентным — R_{12} , получим цепь на рис. 2.5, б. Заменяв параллельное соединение сопротивлений R_4 и R_5 одним эквивалентным — R_{45} и последовательное соединение сопротивлений R_{12} и R_3 одним эквивалентным — R_{123} , получим цепь на рис. 2.4, в.

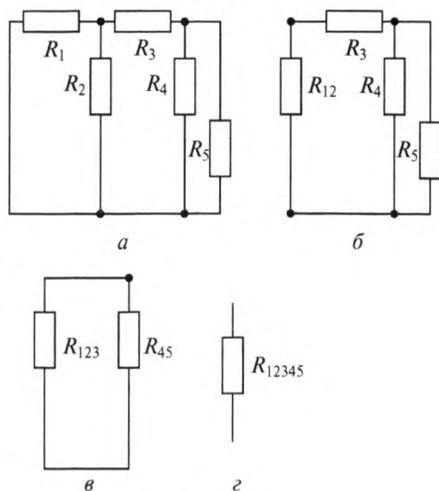


Рис. 2.4

$$R_{12} = \frac{R_1 \cdot R_2}{R_1 + R_2} \quad \text{— (рис. 2.5, б);} \quad R_{123} = R_{12} + R_3 \quad \text{— (рис. 2.5, в)}$$

$$R_{45} = \frac{R_4 \cdot R_5}{R_4 + R_5} \quad \text{— (рис. 2.5, з);} \quad R_{12345} = \frac{R_{123} \cdot R_{45}}{R_{123} + R_{45}};$$

2.2. Определить сопротивление цепи $R_{\text{экв}}$ (рис. 2.5) между зажимами 1 и 2: а) при разомкнутых точках 3 и 4; б) при замкнутых точках 3 и 4.

Решение. При разомкнутых точках 3 и 4 звезду из сопротивлений преобразуем в треугольник (рис. 2.6) по соотношениям (2.8).

Тогда получим:

$$R_{\text{экв}} = \frac{R_{12} \cdot (R_{134} + R_{32})}{R_1 + R_2 + R_{134} + R_{32}},$$

где

$$R_{12} = R_1 + R_2 + \frac{R_1 R_2}{R_3}, \quad R_{23} = R_2 + R_3 + \frac{R_2 R_3}{R_1},$$

$$R_{31} = R_3 + R_1 + \frac{R_3 R_1}{R_2}, \quad R_{134} = \frac{R_{13} \cdot R_4}{R_{13} + R_4}.$$

При замкнутых точках 3 и 4 (рис. 2.6) сопротивление $R_{\text{экв}}$ равно:

$$R_{\text{экв}} = \frac{(R_1 + R_{23})R_4}{R_1 + R_{23} + R_4}, \quad \text{где} \quad R_{23} = \frac{R_2 \cdot R_3}{R_2 + R_3}.$$

2.3. Найти эквивалентное сопротивление R_{123456} цепи, представленной на рис. 2.7.

$$R_{123456} = \frac{(R_{1234}) \cdot R_{56}}{R_1 + R_2 + R_3 + R_4 + R_5 + R_6},$$

где

$$R_{1234} = \frac{(R_{123}) \cdot R_4}{R_1 + R_2 + R_3 + R_4};$$

$$R_{123} = R_1 + R_2 + R_3.$$

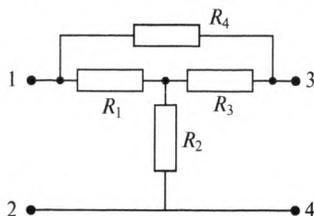


Рис. 2.5

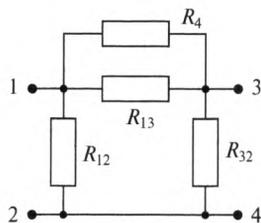


Рис. 2.6

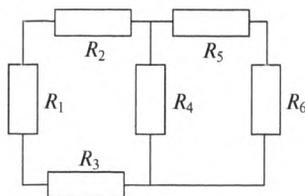
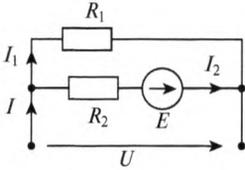


Рис. 2.7

2.3. Расчет простых цепей

2.4. Дано: $E = 50$ В; $I_1 = 5$ А; $R_1 = R_2 = 20$ Ом. Определить ток цепи I , А.



Решение. 1. Определим напряжение U

$$U = I_1 R_1 = 5 \cdot 20 = 100 \text{ В.}$$

2. Определим ток I_2

$$I_2 = (U + E) / R_2 = (100 + 50) / 20 = 7,5 \text{ А.}$$

3. Определим ток I

$$I - I_1 - I_2 = 0; \quad I = 5 + 7,5 = 12,5 \text{ А.}$$

2.5. Определить постоянные токи во всех сопротивлениях электрической схемы (рис. 2.8). Параметры цепи: $R_1 = R_2 = 4$ Ом, $R_3 = R_4 = 1$ Ом, $R_5 = 6$ Ом, $E = 9$ В. Проверить баланс мощностей.

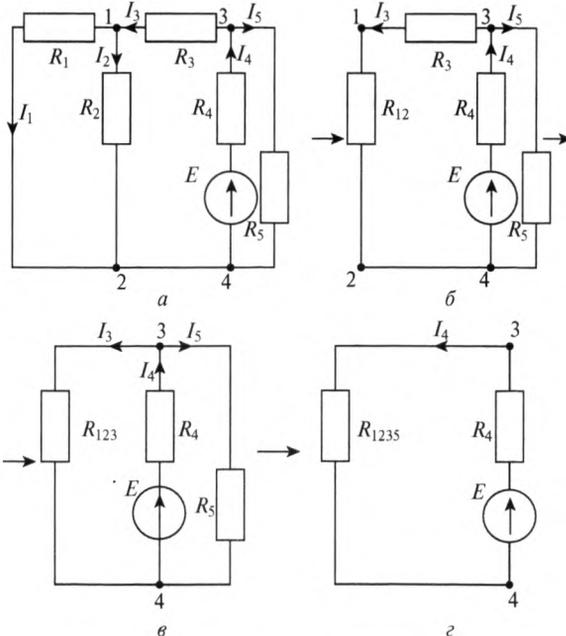


Рис. 2.8

Решение. 1. Выберем произвольно в ветвях положительные направления токов и промаркируем их I_1, I_2, I_3, I_4, I_5 .

2. Преобразуем поэтапно исходную схему в одноконтурную схему. Последовательность преобразований наглядно представлена на рис. 2.8, где

$$R_{12} = \frac{R_1 \cdot R_2}{R_1 + R_2} = \frac{4 \cdot 4}{4 + 4} = 2 \text{ Ом}; \quad (\text{рис. 2.8, б})$$

$$R_{123} = R_{12} + R_3 = 2 + 1 = 3 \text{ Ом}; \quad (\text{рис. 2.8, в})$$

$$R_{1235} = \frac{R_{123} \cdot R_5}{R_{123} + R_5} = \frac{3 \cdot 6}{3 + 6} = 2 \text{ Ом}. \quad (\text{рис. 2.8, г})$$

3. Определим ток I_4 и напряжение U_{34} на участке 3—4 для одноконтурной схемы (рис. 2.8, г)

$$I_4 = \frac{E}{R_{1235} + R_4} = \frac{9}{2 + 1} = 3 \text{ А}; \quad U_{34} = I_4 \cdot R_{1235} = 3 \cdot 2 = 6 \text{ В}.$$

4. Определим токи I_3 и I_5 напряжение U_{12} на сопротивлении R_{12} (рис. 2.8, в).

$$I_3 = \frac{U_{34}}{R_{12} + R_3} = \frac{6}{2 + 1} = 2 \text{ А}; \quad I_5 = \frac{U_{34}}{R_5} = \frac{6}{6} = 1 \text{ А}.$$

5. Определим напряжение U_{12} на сопротивлении R_{12} и токи I_1 , I_2 , (рис. 2.8, б).

$$U_{12} = I_3 \cdot R_{12} = 2 \cdot 2 = 4 \text{ В}; \quad I_1 = \frac{U_{12}}{R_1} = \frac{4}{4} = 1 \text{ А}; \quad I_2 = \frac{U_{12}}{R_2} = \frac{4}{4} = 1 \text{ А}.$$

Проверим полученные результаты с помощью первого закона Кирхгофа. Для узла 3 (рис. 2.8, а) имеем $I_4 - I_3 - I_5 = 3 - 2 - 1 = 0$ — верно.

Баланс мощностей

$$E \cdot I_4 = R_1 I_1^2 + R_2 I_2^2 + R_3 I_3^2 + R_4 I_4^2 + R_5 I_5^2;$$

$$9 \cdot 3 = 4 \cdot 1 + 4 \cdot 1 + 1 \cdot 4 + 1 \cdot 9 + 1 \cdot 6.$$

Баланс мощностей выполняется, что также подтверждает верность расчетов токов в ветвях.

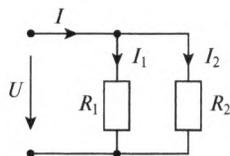
2.6. Дано: $I = 5 \text{ А}$; $I_1 = 3 \text{ А}$; $U = 100 \text{ В}$. Определить мощность в сопротивлении R_2 в ваттах.

Решение. 1. Определим ток I_2

$$I - I_1 - I_2 = 0; \quad I_2 = 5 - 3 = 2 \text{ А}.$$

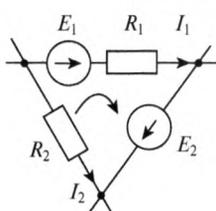
2. Определим мощность в сопротивлении R_2

$$P = UI_2 = 100 \cdot 2 = 200 \text{ Вт}.$$



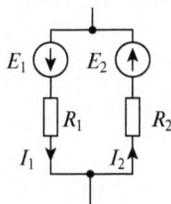
В задачах 2.7—2.16 укажите правильный ответ.

2.7. Укажите правильное уравнение:



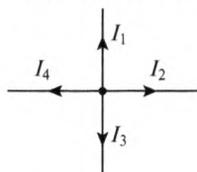
1. $E_1 + E_2 = I_1 R_1 + I_2 R_2$.
2. $E_1 + E_2 = I_1 R_1 - I_2 R_2$.
3. $-E_1 - E_2 = I_1 R_1 + I_2 R_2$.
4. $-E_1 - E_2 = I_1 R_1 - I_2 R_2$.

2.8. Укажите правильное уравнение:



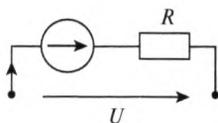
1. $E_1 + E_2 = I_1 R_1 + I_2 R_2$.
2. $E_1 + E_2 = I_1 R_1 - I_2 R_2$.
3. $-E_1 - E_2 = I_1 R_1 + I_2 R_2$.
4. $-E_1 - E_2 = I_1 R_1 - I_2 R_2$.

2.9. Укажите правильное уравнение:

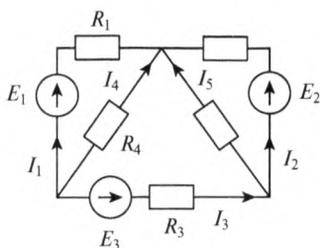


1. $I_1 + I_2 + I_3 + I_4 = 0$;
2. $I_1 - I_2 = I_3 + I_4$;
3. $I_1 + I_2 + I_3 - I_4 = 0$;
4. $I_1 + I_2 = I_3 + I_4$.

2.10. Дано: $E = 200$ В; $R = 10$ Ом; $U = 100$ В. Определите ток I , А.



1. 30.
2. 10.
3. 15.
4. 20.

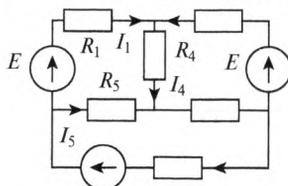


2.11. Дано: $E_1 = 10$ В; $R_1 = 2$ Ом; $R_4 = 2$ Ом; $I_4 = 5$ А. Определите ток I_1 А.

1. 10.
2. 6.
3. 5.
4. 4.

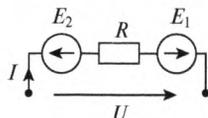
2.12. Дано: $E_1 = 100$ В; $I_1 = 10$ А; $I_5 = 4$ А; $R_1 = R_4 = R_5 = 10$ Ом. Найдите ток I_4 , А.

1. 4.
2. 3.
3. 5.
4. 6.



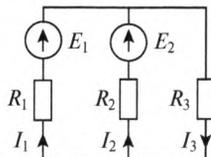
2.13. Дано: $E_1 = 200$ В; $E_2 = 100$ В; $U = 100$ В; $I = 10$ А. Определите сопротивление R , Ом.

1. 20.
2. 15.
3. 10.
4. 25.



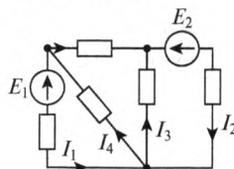
2.14. Дано: $E_1 = 100$ В; $I_1 = 5$ А; $R_1 = 10$ Ом; $R_3 = 10$ Ом. Найдите ток I_3 , А.

1. 3.
2. 6.
3. 4.
4. 5.



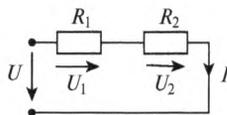
2.15. Дано: $I_1 = 2$ А; $I_2 = 3$ А; $I_3 = 4$ А. Определите ток I_4 , А.

1. 2.
2. 0,5.
3. 1,5.
4. 1.



2.16. Дано: $U = 200$ В; $R_1 = 60$ Ом; $R_2 = 40$ Ом. Определите мощность цепи в ваттах.

1. 600.
2. 400.
3. 360.
4. 240.



2.4. Методы расчета сложных цепей постоянного тока

Применение законов Кирхгофа. Для расчета, т.е. для определения токов во всех ветвях цепи, необходимо составить систему уравнений

по законам Кирхгофа. Общее число уравнений в системе должно соответствовать числу неизвестных токов, т.е. числу ветвей.

По 1-му закону Кирхгофа составляется число уравнений, на единицу меньшее числа узлов цепи. По 2-му закону Кирхгофа составляются все недостающие уравнения для любых произвольно выбранных независимых контуров цепи (независимый контур должен отличаться от других контуров как минимум одной ветвью).

2.17. Составить систему уравнений для схемы (рис. 2.9).

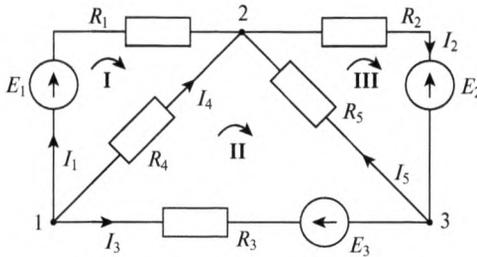


Рис. 2.9

Приняв для нашей цепи направление токов в ветвях и направление обхода трех выбранных контуров, как показано на рис. 2.9, составляем следующую систему уравнений:

$$\begin{array}{l}
 \text{узел 1} \\
 \text{узел 2} \\
 \text{контур I} \\
 \text{контур II} \\
 \text{контур III}
 \end{array}
 \left\{ \begin{array}{l}
 -I_1 - I_4 - I_3 = 0, \\
 I_1 + I_4 + I_5 - I_2 = 0, \\
 I_1 R_1 - I_4 R_4 = E_1, \\
 I_4 R_4 - I_5 R_5 - I_3 R_3 = E_3, \\
 I_2 R_2 + I_5 R_5 = -E_2.
 \end{array} \right.$$

Метод контурных токов. В целях упрощения расчета сложных цепей (уменьшения количества уравнений) вместо действительных токов в ветвях вводят фиктивные, так называемые контурные токи, искусственно наделенные свойством не разветвляться в цепи, а замыкаться в ней по определенным контурам. Если замкнуть контурные токи по независимым контурам цепи, выбрав, таким образом, их число равным числу независимых контуров, то все действительные токи в ветвях однозначно определяются через контурные токи.

Уравнения для контуров, в которых неизвестными являются контурные токи I_1, I_{II}, \dots, I_n , образуют систему:

Если дано уравнение

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{X} = \mathbf{B}, \quad (2.11)$$

где \mathbf{A} — квадратная матрица, \mathbf{X} , \mathbf{B} — вектора; причем \mathbf{B} — известный вектор (т.е. столбец чисел), \mathbf{X} — неизвестный вектор, то решение \mathbf{X} можно записать в виде:

$$\mathbf{X} = \mathbf{A}^{-1} \cdot \mathbf{B}, \quad (2.12)$$

где \mathbf{A}^{-1} — обратная от \mathbf{A} матрица.

Достаточно просто решить уравнение (2.11) с использованием электронных таблиц Excel.

В Excel обратная матрица вычисляется функцией МОБР(), а перемножаются матрицы (или матрица на вектор) — функцией МУМНОЖ().

Чтобы вычислить обратную матрицу от матрицы \mathbf{A} , необходимо выполнить следующие операции.

1. Мышкой выделить квадратную область клеток, где будет размещена обратная матрица.
2. Начать вписывать формулу =МОБР().
3. Выделить мышкой матрицу \mathbf{A} . При этом правее скобки впишется соответствующий диапазон клеток.
4. Закрыть скобку, нажать комбинацию клавиш Ctrl-Shift-Enter.
5. Должна вычислиться обратная матрица и заполнить предназначенную для нее область.

Чтобы умножить матрицу на вектор, — следующие:

1. Мышкой выделить область клеток, где будет размещен результат умножения.
2. Начать вписывать формулу =МУМНОЖ().
3. Выделить мышкой матрицу — первый сомножитель. При этом правее скобки впишется соответствующий диапазон клеток.
4. С клавиатуры ввести разделитель (;) (точка с запятой).
5. Выделить мышкой вектор — второй сомножитель. При этом правее скобки впишется соответствующий диапазон клеток.
6. Закрыть скобку, нажать комбинацию клавиш Ctrl-Shift-Enter.
7. Вычислить произведение и заполнить предназначенную для него область.

2.18. Дано: сложная схема (рис. 2.10). Все сопротивления R_1 — R_5 равны 2 Ом, $E_1 = E_2 = E_3 = 10$ В. Требуется определить контурные токи I_{11} , I_{22} , I_{33} .

Система уравнений, составленная согласно методу контурных токов, будет иметь вид:

$$\left. \begin{aligned} R_{11}I_1 + R_{12}I_{II} + R_{13}I_{III} &= E_{11}; \\ R_{21}I_1 + R_{22}I_{II} + R_{23}I_{III} &= E_{22}; \\ R_{31}I_1 + R_{32}I_{II} + R_{33}I_{III} &= E_{33}. \end{aligned} \right\} \quad (2.13)$$

Подставив заданные числовые значения в систему (2.13), получим:

$$\left. \begin{aligned} 4I_1 - 2I_{II} + 0 &= 10; \\ -2I_1 + 6I_{II} - 2I_{III} &= 10; \\ 0 - 2I_{II} + 4I_{III} &= -10. \end{aligned} \right\} \quad (2.14)$$

Запишем систему уравнений (2.15) в матричной форме

$$\mathbf{AI} = \mathbf{E}, \quad (2.15)$$

где \mathbf{A} — квадратная матрица коэффициентов при контурных токах, размером 3×3 ; \mathbf{I} и \mathbf{E} — матрицы — столбцы неизвестных контурных токов и заданных контурных ЭДС.

Решение системы (2.15):

$$\mathbf{I} = \mathbf{A}^{-1}\mathbf{E}. \quad (2.16)$$

В таблице 2.1 представлен фрагмент таблицы Excel, где размещены матрица \mathbf{A} ; обратная матрица \mathbf{A}^{-1} ; матрица-столбец \mathbf{E} ; матрица-столбец искомых контурных токов \mathbf{I} .

Таблица 2.1

4	-2	0		10
-2	6	-2		10
0	-2	4		-10
0,3125	0,125	0,0625		3,75
0,125	0,25	0,125		2,5
0,0625	0,125	0,3125		-1,25

Таким образом, $I_{11} = 3,75$ А; $I_{22} = 2,5$ А; $I_{33} = -1,25$ А.

Отрицательный знак у тока I_{33} означает, что этот ток направлен в противоположную сторону направлению, указанному на схеме.

Метод эквивалентного источника. Метод эквивалентного источника применяется для расчета тока в какой-либо одной выделенной ветви сложной цепи (рис. 2.10, а).

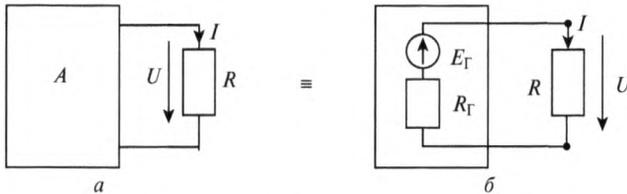


Рис. 2.10

Любую сложную цепь по отношению к одному из ее приемников всегда можно условно представить как некоторый эквивалентный источник с параметрами E_{Γ} и R_{Γ} (рис. 2.10, б).

Неизвестные величины E_{Γ} и R_{Γ} можно найти из опыта холостого хода (ХХ) и короткого замыкания (КЗ). При проведении опыта ХХ ветвь с сопротивлением R размыкается и на ее зажимах возникает напряжение $U_{\text{ХХ}}$, равное ЭДС эквивалентного генератора: $U_{\text{ХХ}} = E_{\Gamma}$. При проведении опыта КЗ исключаются все источники (источники напряжения заменяются перемычками, а ветви с источником тока отключаются). Тогда входное сопротивление цепи становится равным сопротивлению эквивалентного генератора: $R_{\text{ВХ}} = R_{\Gamma}$.

Ток I в упомянутом приемнике можно рассчитать по формуле

$$I = \frac{E_{\Gamma}}{R + R_{\Gamma}} = \frac{U_{\text{ХХ}}}{R + R_{\text{ВХ}}}. \quad (2.17)$$

Метод наложения. Принцип наложения позволяет при расчете цепей с несколькими источниками расчленить исходную задачу на ряд частных задач, в каждой из которых предполагаются поочередно действующими лишь по одному из всех источников цепи. Решая каждую из частных задач, т.е. находя частичные токи, получаем возможность путем их соответствующего суммирования вычислить действительные токи в цепи. Если во всех частных задачах, число которых должно равняться числу источников в исходной цепи, будем получать упрощение цепи, то решение даже нескольких частных задач может представить меньшие затруднения, чем расчет исходной сложной цепи. Практически метод наложения целесообразно применять при небольшом количестве источников (два, три) и преимущественно в тех случаях, когда частичные цепи оказываются простыми цепями.

Метод замены нескольких параллельных источников напряжения одним эквивалентным. Если имеется несколько источников напряжения с ЭДС E_1, E_2, \dots, E_n с внутренними сопротивлениями (рис. 2.11, а), ра-

ботающих параллельно на общую нагрузку R , то они могут быть заменены одним эквивалентным источником $E_{\text{Э}}$ с внутренним эквивалентным сопротивлением $R_{\text{Э}}$ (рис. 2.11, б).

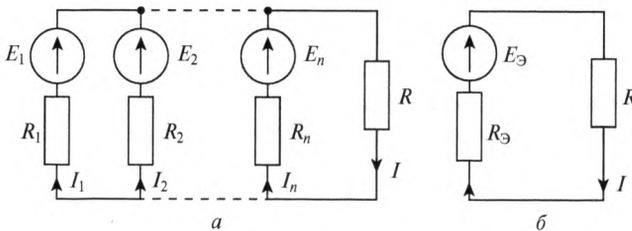


Рис. 2.11

При этом

$$E_{\text{Э}} = \frac{\sum_{k=1}^n E_k G_k}{\sum_{k=1}^n G_k}; \quad G_k = 1/R_k; \quad \frac{1}{R_{\text{Э}}} = \sum_{k=1}^n \frac{1}{R_k}. \quad (2.18)$$

Ток в сопротивлении R

$$I = \frac{E_{\text{Э}}}{R + R_{\text{Э}}}.$$

2.19. Определить ток I_1 в цепи (рис. 2.12) методом эквивалентного источника. Известно $E_1 = 24$ В, $E_2 = 12$ В, $R_{\text{и}} = 2$ Ом, $R_1 = 10$ Ом, $R = 20$ Ом, $R_2 = 4$ Ом.

Решение. Рассмотрим определение тока первого источника в схеме параллельной работы двух источников E_1 и E_2 через линии передачи $R_{\text{Л1}}$ и R_2 на общий приемник R (рис. 2.12, а). Как в аналогичной задаче предыдущего параграфа, будем считать внутреннее сопротивление второго источника равным нулю. Все величины, помеченные на схеме, принимаем заданными. Хотя формально в задаче предлагается определить ток первого источника, будем его искать как ток линии $R_{\text{Л1}}$, которую сейчас условно примем за приемник. Это позволит последовательно применить изложенную выше методику расчета.

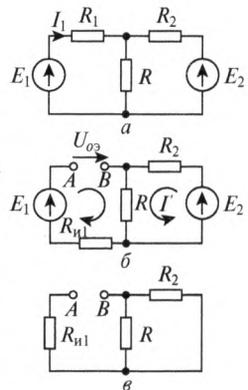


Рис. 2.12

Выбрав произвольно направление искомого тока I_1 , отключаем R_1 (рис. 2.12, б) и определяем напряжение $U_{0Э}$, возникающее между концами образованной ветви. При этом подчеркиваем, что направление напряжения должно быть выбрано совпадающим с выбранным ранее направлением тока I_1 в рассматриваемой ветви.

Нетрудно видеть (рис. 2.12, б), что образовавшаяся после отключения первой линии цепь является простейшей неразветвленной цепью, единственный ток которой, замыкающийся по правому контуру цепи, будет равен

$$I' = \frac{E_2}{R_2 + R} = \frac{5}{4 + 20} = 0,5 \text{ А.}$$

Для определения напряжения холостого хода $U_{0Э}$ составим уравнение по 2-му закону Кирхгофа в развернутой форме вдоль левого контура цепи, включающего оборванную ветвь,

$$RI' + U_{0Э} = E_1.$$

Из последнего уравнения с учетом ранее найденного значения тока I' получим

$$U_{0Э} = E_1 - RI' = 24 - 20 \cdot 0,5 = 14 \text{ В.}$$

Эквивалентное сопротивление цепи с оборванной ветвью относительно ее концов A и B при отсутствующих источниках легко определить, ориентируясь по вспомогательной схеме (рис. 2.12. в):

$$R_{иЭ} = R_{и1} + \frac{R_2 R}{R_2 + R} = 2 + \frac{4 \cdot 20}{4 + 20} = 3,33 \text{ Ом.}$$

Таким образом, искомый ток будет равен

$$I_1 = \frac{U_{0Э}}{R_1 + R_{иЭ}} = \frac{14}{10 + 3,33} = 1,05 \text{ А.}$$

2.20. Условия задачи 2.19. Определить ток I_1 методом наложения.

Решение. Для частичного тока I'_1 , протекающего по первой ветви под действием первого источника (второй источник замкнут), будем иметь:

$$I'_1 = \frac{E_1}{(R_1 + R_{и1}) + \frac{R_2 R}{R_2 + R}} = \frac{24}{(10 + 2) + \frac{4 \cdot 20}{4 + 20}} = 1,56 \text{ А.}$$

Для определения тока I_1'' в той же ветви под действием второго источника (первый источник замкнут) будем иметь:

$$I_1'' = \frac{E_2}{R_2 + \frac{(R_1 + R_{II})R}{R_1 + R}} = \frac{12}{4 + \frac{(10+2) \cdot 20}{10+2+20}} = 1,044 \text{ А.}$$

Окончательно получаем искомый ток I_1

$$I_1 = I_1' - I_1'' = 1,56 - 1,044 = 0,51 \text{ А.}$$

ГЛАВА 3

ОДНОФАЗНЫЕ ЭЛЕКТРИЧЕСКИЕ ЦЕПИ СИНУСОИДАЛЬНОГО ТОКА

3.1. Основные положения и соотношения

Синусоидальные токи и напряжения выражаются аналитически следующим образом:

$$i = I_m \sin(\omega t + \psi_i); \quad u = U_m \sin(\omega t + \psi_u), \quad (3.1)$$

где i и u — мгновенные значения тока и напряжения; I_m и U_m — амплитуды тока и напряжения; ω — угловая частота тока и напряжения; t — время; $(\omega t + \psi_i)$ и $(\omega t + \psi_u)$ — фазы тока и напряжения, ψ_i и ψ_u — начальные фазы тока и напряжения.

Угловая частота ω связана с частотой f и периодом T соотношением:

$$\omega = 2\pi f, \quad 1/c, \quad f = 1/T, \quad \text{Гц.} \quad (3.2)$$

Действующие значения синусоидального тока и напряжения:

$$I = I_m / \sqrt{2}, \quad U = U_m / \sqrt{2}. \quad (3.3)$$

2-й закон Кирхгофа. Уравнение для мгновенных значений напряжений для последовательной цепи одноконтурной, состоящей из элементов R, L, C ,

$$u = u_R + u_L + u_C,$$

где

$$u_R = Ri, \quad u_L = L \frac{di}{dt}, \quad u_C = \frac{1}{C} \int_0^t i dt + u_C(0). \quad (3.4)$$

Векторное изображение синусоидальных токов и напряжений

На рисунке 3.1 показано изображение тока в виде вектора длиной I_m , вращающегося против часовой стрелки с постоянной угловой скоростью ω (соответствующей угловой частоте тока) относительно полюса 0 полярной системы координат. Его положение на этом рисунке

зафиксировано в момент времени $t = 0$, при котором угол его наклона к полярной оси P составляет величину, равную начальной фазе $+\psi_i$.

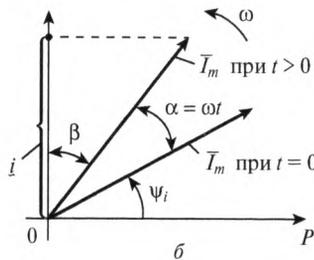


Рис. 3.1

Законы Кирхгофа в векторной форме записи

При расчете цепей можно использовать законы Кирхгофа в векторной форме записи.

1-й закон Кирхгофа:

$$\sum_{k=1}^K \bar{I}_k = 0. \quad (3.5)$$

Геометрическая сумма векторов всех токов, подходящих к любому узлу цепи, равна нулю.

2-й закон Кирхгофа:

$$\sum_{k=1}^K \bar{E}_k = \sum_{n=1}^N \bar{U}_n. \quad (3.6)$$

Элементы в цепи синусоидального тока

Сопротивление R

$$I = U/R = UG, \quad G = 1/R. \quad (3.7)$$

Начальная фаза тока $\psi_i = \psi_u$ или $\varphi = \psi_u - \psi_i = 0$.

Индуктивность L

$$I = U/X_L = Ub_L,$$

$$X_L = \omega L \text{ — индуктивное сопротивление;} \quad (3.8)$$

$$b_L = \frac{1}{X_L} = \frac{1}{\omega L} \text{ — индуктивная проводимость.} \quad (3.8, a)$$

Начальная фаза тока $\psi_i = \psi_u - 90^\circ$ или $\varphi = \psi_u - \psi_i = +90^\circ$

Емкость C

$$I = U/X_C = Ub_C,$$

$$X_C = 1/\omega C \text{ — емкостное сопротивление;} \quad (3.9)$$

$$b_C = \frac{1}{X_C} = \frac{1}{1/\omega C} = \omega C \text{ — емкостная проводимость.} \quad (3.9, a)$$

Цепь с последовательным соединением R, L, C

2-й закон Кирхгофа в векторной форме записи для цепи рис. 3.2, a

$$\vec{U} = \vec{U}_R + \vec{U}_L + \vec{U}_C. \quad (3.10)$$

Векторная диаграмма в соответствии (3.10) показана на рис. 3.2, б для случая,

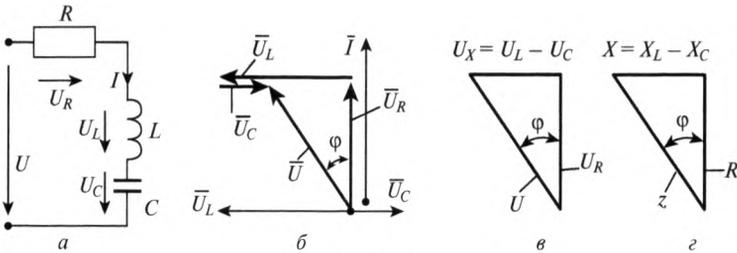


Рис. 3.2

когда $U_L > U_C$. Применяя правило сложения векторов, получен треугольник напряжений рисунке 3.2, в, на основании которого получено выражение (3.11):

$$U = \sqrt{U_R^2 + (U_L - U_C)^2} = \sqrt{U_R^2 + U_X^2}, \quad (3.11)$$

$$U = I\sqrt{R^2 + (X_L - X_C)^2} = I\sqrt{R^2 + X^2} \quad \text{или} \quad U = Iz. \quad (3.12)$$

Здесь

$$z = \sqrt{R^2 + (X_L - X_C)^2} = \sqrt{R^2 + X^2} \text{ — полное сопротивление;} \quad (3.13)$$

$$X_L - X_C = X \text{ — реактивное сопротивление;} \quad (3.14)$$

$$\begin{aligned} \varphi &= \arctg \frac{U_L - U_C}{U_R} = \arctg \frac{X_L - X_C}{R} \\ -90^\circ &\leq \varphi \leq +90^\circ. \end{aligned} \quad (3.15)$$

Цепь с параллельным соединением R, L, C

На основании 1-го закона Кирхгофа в векторной форме получена векторная диаграмма для случая $I_L > I_C$.

На рисунке 3.3 представлена схема и векторные диаграммы. Все пояснения указаны на этом рисунке:

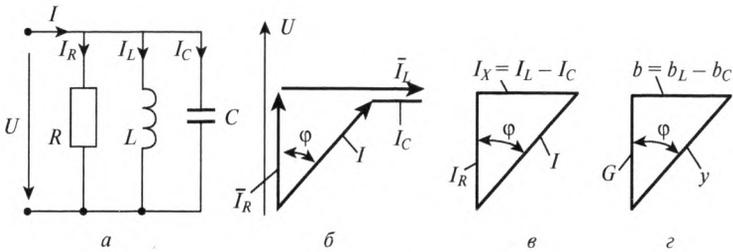


Рис. 3.3

$$I = \sqrt{I_R^2 + (I_L - I_C)^2} = \sqrt{I_R^2 + I_X^2},$$

где $I_X = (I_L - I_C)$.

(3.16)

При этом $I_R = UG$; $I_L = Ub_L$; $I_C = Ub_C$.

Подставляя эти значения токов в формулу (3.16), находим

$$I = U\sqrt{G^2 + (b_L - b_C)^2} = U\sqrt{G^2 + b^2} \quad \text{или} \quad I = Uy. \quad (3.17)$$

$$\varphi = \operatorname{arctg} \frac{I_L - I_C}{I_R} = \operatorname{arctg} \frac{b_L - b_C}{G}. \quad (3.18)$$

Мощность в цепи переменного тока

Активная, реактивная и полная мощности определяются по формулам

$$P = UI \cos \varphi, \text{ Вт}, \quad (3.19)$$

$$Q = UI \sin \varphi = I^2 x = U^2 b, \text{ вар}, \quad (3.20)$$

$$S = UI = I^2 z = U^2 y = \sqrt{P^2 + Q^2}, \text{ В} \cdot \text{А}. \quad (3.21)$$

3.1. Для схемы (рис. 3.3) дано: $X_L = 3$ Ом, $X_C = 6$ Ом, $R = 4$ Ом, $U = 24$ В. Требуется определить напряжение на емкости и индуктивности.

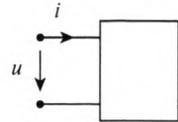
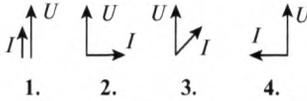
Решение. Ток в цепи равен:

$$I = U/z, \quad z = \sqrt{R^2 + (X_L - X_C)^2} = \sqrt{4^2 + (3-6)^2} = 5 \text{ А}.$$

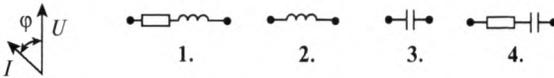
Напряжение на емкости $U_C = IX_C = 5 \cdot 6 = 30$ В. Напряжение на индуктивности $U_L = IX_L = 5 \cdot 3 = 15$ В.

В задачах 3.2—3.7 указать правильное решение.

3.2. Дано: $u = 120 \sin(628t + 130^\circ)$ В; $i = 10 \sin(628t + 40^\circ)$ А. Укажите векторную диаграмму цепи.

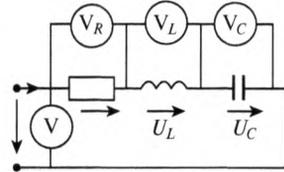


3.3. Дана векторная диаграмма цепи. Она соответствует цепи...



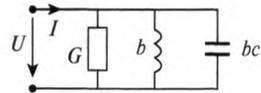
3.4. Даны показания вольтметров: $V - 50$ В; $V_C - 40$ В; $V_L - 70$ В. Определите показание V_R , вольт.

1. 40.
2. 100.
3. $\sqrt{50}$.
4. 50.



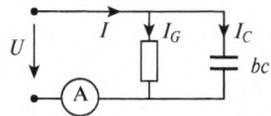
3.4. Дано: $G = 0,6$ См; $b_L = 1,2$ См; $b_C = 0,4$ См. Определите угол сдвига фаз ϕ между напряжением и током цепи.

1. $\arctg \frac{0,8}{0,6}$.
2. $\arctg \frac{0,6}{0,4}$.
3. $\arctg \frac{0,6}{0,8}$.
4. $\arctg \frac{1,2}{0,4}$.



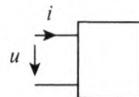
3.5. Дано: $U = 10$ В; $G = 0,8$ См; $b_C = 0,6$ См. Определите показание амперметра, А.

1. 1.
2. 2.
3. 3.
4. 4.



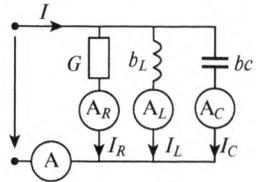
3.6. Дано: $u = 100\sqrt{2} \sin(\omega t + 20^\circ)$ В; $i = 10\sqrt{2} \sin(\omega t - 40^\circ)$ А. Определите активную мощность цепи, Вт.

1. 500.
2. 700.
3. 1000.
4. 400.



3.7. Даны показания амперметров: $A — 10 \text{ A}$; $A_L — 12 \text{ A}$; $A_C — 4 \text{ A}$. Определите показание $A_R A$.

1. 6.
2. 4.
3. 8.
4. 10.



3.2. Символический метод расчета

Комплексные токи и напряжения. Положения векторов токов и напряжений на комплексной плоскости показаны на рис. 3.4. Здесь \dot{U} — комплексное действующее значение напряжения (сокращенно — комплексное напряжение); \dot{I} — комплексное действующее значение тока (сокращенно — комплексный ток).

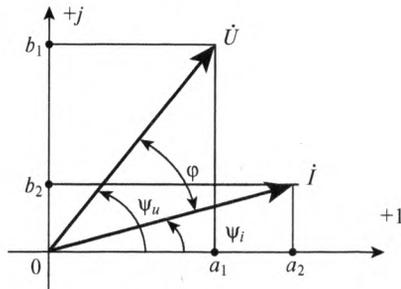


Рис. 3.4. Векторы тока и напряжения на комплексной плоскости

Аналитическая запись \dot{U} и \dot{I} имеет вид

$$\dot{U} = a_1 + jb_1 = U \cos \psi_u + U \sin \psi_u = Ue^{j\psi_u}; \quad (3.22)$$

$$\dot{I} = a_2 + jb_2 = I \cos \psi_i + I \sin \psi_i = Ie^{j\psi_i}. \quad (3.23)$$

Комплексное сопротивление \underline{Z}

$$\underline{Z} = \frac{\dot{U}}{\dot{I}} = \frac{Ue^{j\psi_u}}{Ie^{j\psi_i}} = \frac{U}{I} e^{j(\psi_u - \psi_i)} = ze^{j\varphi} = z \cos \varphi + jz \sin \varphi = (R + jX). \quad (3.24)$$

где z — полное сопротивление цепи, а φ — угол сдвига между напряжением и током.

Комплексная проводимость \underline{Y}

$$\underline{Y} = \frac{\dot{I}}{\dot{U}} = \frac{1}{\underline{Z}} = ye^{-j\varphi} = y \cos \varphi - jy \sin \varphi = (G - jb). \quad (3.25)$$

Соответствия между мгновенными и комплексными значениями напряжений и токов:

$$u_R = iR \neq R\dot{i}; \quad u_L = L \frac{di}{dt} \neq j\omega L\dot{i}; \quad u_C = \frac{1}{C} \int i dt \neq -j \frac{1}{\omega C} \dot{i} = \frac{\dot{i}}{j\omega C}; \quad (3.26)$$

$$i_G = Gu \neq G\dot{U}; \quad i_C = Cdu/dt \neq j\omega C\dot{U},$$

где (\neq) — принятый здесь знак соответствия.

Комплексная мощность

$$\tilde{S} = \dot{U} \dot{I}^* = S e^{j\varphi} = S \cos \varphi + jS \sin \varphi = P + jQ, \quad (3.27)$$

где $\dot{I}^* = I e^{-j\psi_i}$ — комплексный ток, сопряженный заданному комплексному току $\dot{I} = I e^{+j\psi_i}$.

Законы Кирхгофа в комплексной форме записи

1-ый закон Кирхгофа: алгебраическая сумма комплексных токов в узле равна нулю:

$$\sum_{k=1}^K \dot{I}_k = 0. \quad (3.28)$$

2-ой закон Кирхгофа: алгебраическая сумма комплексных ЭДС контура равна алгебраической сумме комплексных напряжений на всех комплексных сопротивлениях этого контура:

$$\sum_m^Q \dot{E}_q = \sum_{n=1}^N \dot{I}_n \underline{Z}_n. \quad (3.29)$$

Аналогия с цепями постоянного тока

Все методы расчета цепей постоянного тока можно применять для расчета комплексных токов, на основании которых находятся действующие и мгновенные значения искоемых токов.

В задачах 3.8—3.14 указать правильное решение.

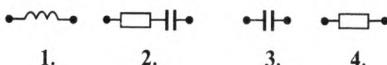
3.8. Дано: $\underline{Z} = (4 + j3)$ Ом. Показательная форма записи при этом равна:

1. $\sqrt{4^2 + 3^2} e^{j \arctg(4/3)}$.
2. $\sqrt{4^2 + 3^2} e^{-j \arctg(3/4)}$.
3. $\sqrt{4^2 + 3^2} e^{j \arctg(3/4)}$.
4. $\sqrt{4^2 + 3^2} e^{-j \arctg(4/3)}$.

3.9. Дан комплексный ток $\dot{I} = 10e^{j60^\circ}$ А. Найдите соответствующую ему синусоиду тока.

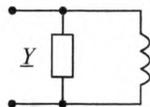
1. $10\sin(\omega t + 60^\circ)$.
2. $10\sqrt{2}\sin(\omega t + 60^\circ)$.
3. $10\sqrt{2}\sin(60^\circ)$.
4. $10\sqrt{2}\sin(\omega t - 60^\circ)$.

3.10. Дано комплексное сопротивление цепи $Z = 4e^{-90^\circ}$ Ом. Оно соответствует цепи...



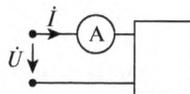
3.11. Дано: $G = 0,4$ См; $b = 0,6$ См. Укажите комплексную проводимость цепи \underline{Y} См.

1. $0,4 - j0,6$.
2. $0,6 - j0,4$.
3. $0,4 - j0,6$.
4. $0,6 - j0,4$.



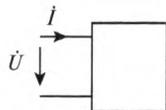
3.12. Дано: $\dot{U} = 120e^{j65^\circ}$ В; $Z = 2e^{j5^\circ}$ Ом. Определите показания амперметра, А.

1. 60.
2. 40.
3. 20.
4. 80.



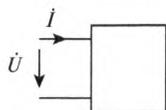
3.13. Дано: $\dot{U} = 200$ В; $\dot{I} = (10 + j20)$ А. Определите реактивную мощность цепи, вар.

1. 1000.
2. 2000.
3. 3000.
4. 4000.



3.14. Дано: $\dot{U} = (100 + j200)$ В; $\dot{I} = 10$ А. Определите активную мощность цепи, Вт.

1. 1000.
2. 2000.
3. 3000.
4. 4000.



3.3. Резонанс в цепях синусоидального тока

Существует резонанс напряжений и резонанс токов.

Резонанс в последовательной цепи из элементов R, L, C (резонанс напряжений)

Резонансом в цепи, содержащей сопротивления индуктивности и емкости, называется такой режим, при котором ток и напряжение на входе цепи совпадают по фазе, т.е. $\varphi = 0$ или $x = 0$.

При последовательном соединении условию соответствуют соотношения

$$x = \omega L - \frac{1}{\omega C} = 0, \quad \text{т.е.} \quad \omega L = \frac{1}{\omega C}. \quad (3.30)$$

Отношение

$$Q = \frac{U_{C0}}{U} = \frac{U_{L0}}{U} \quad (3.31)$$

определяет кратность превышения напряжения на индуктивности и на емкости над напряжением на зажимах всей цепи. Величину Q называют *добротностью контура*.

Затухание контура

$$d = 1/Q. \quad (3.32)$$

Резонанс в параллельной цепи из элементов R, L, C (резонанс токов)

Условием резонанса при параллельном соединении активного индуктивного и емкостного сопротивлений является также отсутствие сдвига фаз между током и напряжением на входе цепи.

Резонанс имеет место, как указано выше, при $\varphi = 0$, что равносильно при параллельном соединении условию:

$$b = b_L - b_C = 0 \quad \text{или} \quad \frac{1}{\omega L} - \omega C = 0. \quad (3.33)$$

Резонансная частота

$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}. \quad (3.34)$$

Добротность контура

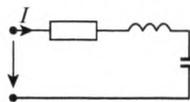
$$Q = \frac{I_{C0}}{I} = \frac{I_{L0}}{I} \quad (3.35)$$

определяет кратность превышения тока в индуктивности и тока в емкости над суммарным током всей цепи.

В задачах 3.15—3.19 указать правильное решение.

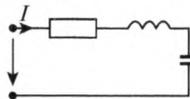
3.15. Цепь находится в режиме резонанса. Если уменьшить емкостное сопротивление, ток I в цепи...

1. Уменьшится.
2. Увеличится.
3. Не изменится.



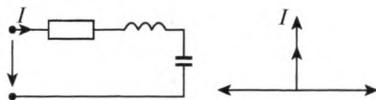
3.16. Цепь находится в режиме резонанса. Если уменьшить индуктивное сопротивление, ток I в цепи...

1. Увеличится.
2. Уменьшится.
3. Не изменится.



3.17. Для последовательной цепи построена векторная диаграмма для режима резонанса. Укажите направление вектора входного напряжения.

1. По направлению тока.
2. Вправо перпендикулярно току.
3. Влево перпендикулярно току.
4. В противоположную сторону тока.



3.18. Последовательная цепь находится в режиме резонанса. Условие, при котором напряжение на индуктивности превышает напряжение на входе цепи, равно...

1. $x_L > R$;
2. $x_L < R$;
3. $x_L = R$;
4. $x_C < R$.

3.19. Какое условие необходимо выполнить, чтобы в параллельной цепи возник резонанс токов?

1. $b = b_L - b_C = 0$;
2. $b_L > b_C$.
3. $b = b_L - b_C > 0$;
4. $b = b_L - b_C < 0$.

3.4. Цепи с индуктивно связанными катушками

Если при изменении во времени тока в одной катушке на зажимах второй возникает ЭДС, — такие катушки называются *индуктивно связанными*.

Потокосцеплением самоиндукции:

$$\Psi_{L1} = w_1 \Phi, \quad (3.36)$$

где w_1 — число витков первой катушки; Φ — магнитный поток, проходящий через один виток катушки.

ЭДС самоиндукции:

$$e_L = -\frac{d\psi_L}{dt}. \quad (3.37)$$

ЭДС взаимной индукции

$$e_M = -\frac{d\psi_M}{dt} = -M \frac{di}{dt}, \quad (3.38)$$

где M — взаимная индуктивность катушек.

Напряжения u_1 и u_2 каждой индуктивно связанной катушки имеют две составляющие: одна из них (u_L) вызвана действием ЭДС самоиндукции, а другая (u_M) вызвана действием ЭДС взаимной индукции:

$$\begin{aligned} u_1 &= u_{L1} \pm u_{M12} = \frac{d\psi_{L1}}{dt} \pm \frac{d\psi_{M12}}{dt} = L_1 \frac{di_1}{dt} \pm M \frac{di_2}{dt}; \\ u_2 &= u_{L2} \pm u_{M21} = \frac{d\psi_{L2}}{dt} \pm \frac{d\psi_{M21}}{dt} = L_2 \frac{di_2}{dt} \pm M \frac{di_1}{dt}. \end{aligned} \quad (3.39)$$

Знак «+» берется в том случае, когда потоки самоиндукции и взаимной индукции совпадают по направлению (согласное включение катушек), «-» — когда потоки не совпадают по направлению (встречное включение катушек).

Комплексная форма записи уравнений (3.39) имеет вид

$$\begin{cases} \dot{U}_1 = j\omega L_1 \dot{I}_1 \pm j\omega M \dot{I}_2; \\ U_2 = j\omega L_2 \dot{I}_2 \pm j\omega M \dot{I}_1. \end{cases} \quad (3.40)$$

При последовательном соединении двух индуктивно связанных катушек эквивалентное сопротивление определяется по формуле

$$R_1 + jx_1 + R_2 + jx_2 \pm 2jx_M, \quad (3.41)$$

где $x_M = \omega M$ — сопротивление взаимной индукции.

В электротехнической литературе для характеристики магнитной связи двух любых катушек используется коэффициент магнитной связи

$$K = M / \sqrt{L_1 L_2} < 1. \quad (3.42)$$

3.19. Для цепи с последовательным соединением двух индуктивно связанных катушек известны их параметры R_1 , L_1 , R_2 , L_2 , взаимная индуктивность M , частота ω сети и комплексное напряжение \dot{U} . Требуется определить комплексный ток цепи \dot{I} при согласном и встречном включении катушек.

Решение. В соответствии со 2-м законом Кирхгофа имеем $\dot{U} = \dot{U}_1 + \dot{U}_2$, где $\dot{U}_1 = (R_1 + j\omega L_1)\dot{I} \pm j\omega M\dot{I}$; $\dot{U}_2 = (R_2 + j\omega L_2)\dot{I} \pm j\omega M\dot{I}$.

Тогда $\dot{U} = \dot{U}_1 + \dot{U}_2 = [(R_1 + R_2) + j\omega(L_1 + L_2 \pm 2M)]\dot{I} = \underline{Z}_\Sigma \dot{I}$. Здесь $\underline{Z}_\Sigma = (R_1 + R_2) + j\omega(L_1 + L_2 \pm 2M) = R_\Sigma + j\omega L_\Sigma$.

Анализ \underline{Z}_Σ показывает, что его величина зависит от способа включения катушек. При согласном включении $\underline{Z}_\Sigma = (R_1 + R_2) + j\omega(L_1 + L_2 + 2M)$, а при встречном включении $\underline{Z}_\Sigma = (R_1 + R_2) + j\omega(L_1 + L_2 - 2M)$. Таким образом, при согласном включении \underline{Z}_Σ больше, чем при встречном, за счет изменения реактивного сопротивления цепи:

$$X_{L\text{согл}} = X_{L1} + X_{L2} + 2X_M; \quad X_{L\text{встр}} = X_{L1} + X_{L2} - 2X_M.$$

Заметим, что при всех условиях $X_{L1} + X_{L2} - 2X_M > 0$, т.е. $X_{L1} + X_{L2} \geq 2M$, так как X_Σ всегда положительно и является индуктивным сопротивлением. Отрицательное значение X_Σ означало бы превращение этого сопротивления в емкостное, чего не может быть физически.

3.20. Для цепи с последовательным соединением двух индуктивно связанных катушек (рис. 3.5) известны их сопротивления и действующее значение

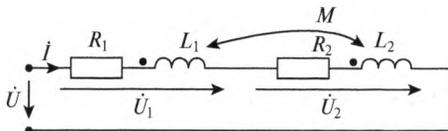


Рис. 3.5

приложенного напряжения: $X_1 = 20$ Ом; $X_2 = 30$ Ом, $X_M = 5$ Ом, $R_1 = R_2 = 0$, $U = 120$ В. Требуется определить ток цепи, а также действующие значения напряжений на каждой из катушек при согласном и встречном их включении.

Решение. При отсутствии в цепи активных сопротивлений задачу можно решить, пользуясь только модулями комплексных токов, напряжений и сопротивлений.

При согласном включении (указано на схеме знаками): а) полное сопротивление цепи $z_{\Sigma\text{согл}} = X_1 + X_2 + 2X_M = 20 + 30 + 10 = 60$ Ом; б) действующее значение тока $I_{\text{согл}} = U/z_{\Sigma\text{согл}} = 120/60 = 2$ А; в) действующее значение напряжения на 1-й катушке: $U_1 = I_{\text{согл}}z_{1\text{согл}} = I_{\text{согл}}(X_1 + X_M) = 2 \cdot 25 = 50$ В, где $z_{1\text{согл}} = (X_1 + X_M)$; г) действующее значение напряжения на 2-й катушке: $U_2 = I_{\text{согл}}z_{2\text{согл}} = I_{\text{согл}}(X_2 + X_M) = 2 \cdot 35 = 70$ В, где $z_{2\text{согл}} = (X_2 + X_M)$.

При встречном включении: а) $z_{\text{Эвстр}} = X_1 + X_2 - 2X_M = 20 + 30 - 10 = 40$ Ом; б) $I_{\text{встр}} = U/z_{\text{Эвстр}} = 120/40 = 3$ А; в) $U_1 = I_{\text{встр}}z_{1\text{встр}} = I_{\text{встр}}(X_1 - X_M) = 3 \cdot 15 = 45$ В; д) $U_2 = I_{\text{встр}}z_{2\text{встр}} = I_{\text{встр}}(X_2 - X_M) = 3 \cdot 25 = 75$ В. Здесь $z_{1\text{встр}} = (X_1 - X_M)$, $z_{2\text{встр}} = (X_2 - X_M)$.

3.21. В цепи с последовательным соединением двух идеальных ($R_1 = R_2 = 0$) индуктивно связанных катушек (рис. 3.5) при неизменном действующем значении приложенного напряжения $U = 120$ В измерили действующее значение тока при согласном ($I_{\text{согл}} = 2$ А) и при встречном ($I_{\text{встр}} = 6$ А) включении этих катушек. Требуется определить величину сопротивления взаимной индуктивности M этих катушек.

Решение. 1. Сопротивление цепи при согласном включении катушек

$$z_{\text{согл}} = \frac{U}{I_{\text{согл}}} = \frac{120}{2} = 60 = (X_1 + X_2 + 2X_M) \text{ Ом.}$$

2. Сопротивление цепи при встречном включении катушек

$$z_{\text{встр}} = \frac{U}{I_{\text{встр}}} = \frac{120}{6} = 20 = (X_1 + X_2 - 2X_M) \text{ Ом.}$$

3. Разность этих сопротивлений $z_{\text{согл}} - z_{\text{встр}} = 4X_M = 60 - 20 = 40$ Ом.

4. Величина взаимной индуктивности катушек $X_M = 40/4 = 10$ Ом.

Цепь с параллельным соединением индуктивно связанных катушек

Для цепи (рис. 3.6) с параллельным соединением двух индуктивно связанных катушек, у которых известны их параметры R_1, R_2, L_1, L_2 , взаимная индуктивность M , частота ω и комплексное напряжение \dot{U} , уравнения имеют вид

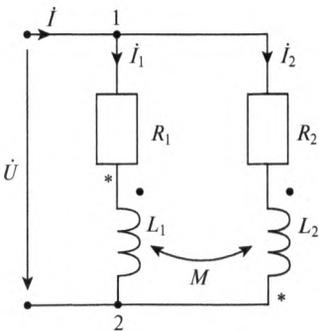


Рис. 3.6

$$\left. \begin{aligned} \dot{U} &= Z_1 \dot{I}_1 \pm Z_M \dot{I}_2; \\ \dot{U} &= \pm Z_M \dot{I}_1 + Z_2 \dot{I}_2, \end{aligned} \right\} \quad (3.43)$$

где $Z_1 = (R_1 + j\omega L_1)$; $Z_2 = (R_2 + j\omega L_2)$; $Z_M = j\omega M$.

Решение уравнений (3.43) имеет вид:

$$\left. \begin{aligned} \dot{I}_1 &= \frac{\dot{U}(Z_2 \mp Z_M)}{Z_1 Z_2 - Z_M^2}; \\ \dot{I}_2 &= \frac{\dot{U}(Z_1 \mp Z_M)}{Z_1 Z_2 - Z_M^2}. \end{aligned} \right\} \quad (3.44)$$

3.22. Известны (рис. 3.6) сопротивления двух параллельно включенных катушек и действующее значение приложенного напряжения: $X_1 = 3 \text{ Ом}$; $X_2 = 2 \text{ Ом}$; $X_M = 1 \text{ Ом}$, $R_1 = R_2 = 0$; $U = 10 \text{ В}$. Определить действующие значения токов I , I_1 , I_2 во всех ветвях цепи при встречном включении катушек.

Решение. При встречном включении в уравнениях (3.43) у слагаемых вида $j\omega MI$ должен стоять знак $(-)$. Кроме того, при отсутствии активных сопротивлений катушек уравнения можно составить только для модулей напряжений токов и сопротивлений, не применяя символического метода. При этих условиях получаем

$$\begin{cases} U = X_1 I_1 - X_M I_2 \\ U = -X_M I_1 + X_2 I_2 \end{cases}$$

Подставляя численные значения известных величин, находим

$$\begin{cases} 10 = 3I_1 - I_2 \\ 10 = -I_1 + 2I_2 \end{cases}$$

Решаем эту систему с помощью теории определителей.

1. Главный определитель системы

$$\Delta = \begin{vmatrix} 3 & -1 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} = 6 - 1 = 5.$$

2. Первый дополнительный определитель

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 10 & -1 \\ 10 & 2 \end{vmatrix} = 20 + 10 = 30.$$

3. Второй дополнительный определитель

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} 3 & 10 \\ -1 & 10 \end{vmatrix} = 30 + 10 = 40.$$

4. Действующие значения искомых токов

$$I_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta} = \frac{30}{5} = 6 \text{ А}; \quad I_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta} = \frac{40}{5} = 8 \text{ А}; \quad I = I_1 + I_2 = 14 \text{ А}.$$

Аналогичный результат расчета получим, воспользовавшись методикой расчета с использованием электронной таблицы Excel. Подробно этот метод расчета представлен в параграфе 2.4.

В таблице 3.1 представлен фрагмент таблицы Excel, где размещена матрица **A**; обратная матрица **A**⁻¹; матрица-столбец **E**; матрица-столбец искомых токов ($I_1 = 6 \text{ А}$, $I_2 = 8 \text{ А}$).

Таблица 3.1

3	-1		10
-1	2		10
0,4	0,2		6
0,2	0,6		8

Результаты расчетов обоими методами совпали.

Цепь с трансформаторной связью между катушками. Такая цепь представлена на рис 3.7.

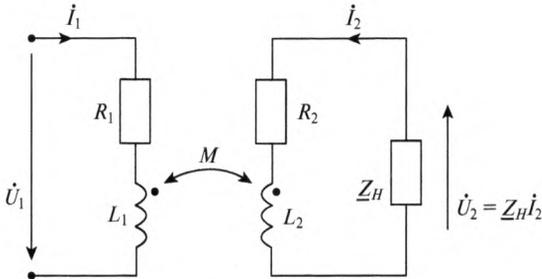


Рис. 3.7

Уравнения для левого и правого контуров цепи имеют вид:

$$\begin{cases} \dot{U}_1 = (R_1 + j\omega L_1)\dot{I}_1 \pm j\omega M\dot{I}_2; \\ 0 = \pm j\omega M\dot{I}_1 + (R_2 + j\omega L_2)\dot{I}_2 + \underline{Z}_H \dot{I}_2. \end{cases} \quad (3.45)$$

Комплексные токи \dot{I}_1 и \dot{I}_2 обеих катушек:

$$\dot{I}_1 = \frac{\underline{Z}_2 \dot{U}_1}{\underline{Z}_1 \underline{Z}_2 - \underline{Z}_M^2}; \quad \dot{I}_2 = \frac{\mp \underline{Z}_M \dot{U}_1}{\underline{Z}_1 \underline{Z}_2 - \underline{Z}_M^2}, \quad (3.46)$$

где $(R_1 + j\omega L_1) = \underline{Z}_1$; $(R_2 + j\omega L_2 + \underline{Z}_H) = \underline{Z}_2$; $j\omega M = \underline{Z}_M$.

3.23. В цепи с трансформаторной связью двух идеальных (без активных сопротивлений) катушек индуктивности (рис. 3.7) к катушке X_1 приложено синусоидальное напряжение частотой $f = 500$ Гц, а катушка X_2 разомкнута. Действующее значение тока в катушке X_1 составляет $I_1 = 10$ А, а напряжение на разомкнутых зажимах катушки X_2 составляет $U_2 = 50$ В. Требуется определить величину взаимной индуктивности M этих катушек.

Решение. При отсутствии активных сопротивлений катушек ($R_1 = R_2 = 0$) уравнения (3.39) можно составить только для модулей токов, напряжений и сопротивлений, не применяя символического метода.

С учетом, что правый контур цепи разомкнут ($I_2 = 0$), имеем:

$$U_1 = I_1 X_1; \quad 0 = \pm I_1 X_M + U_2,$$

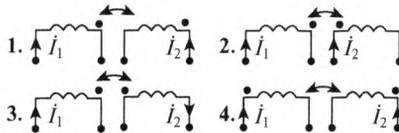
где $X_1 = \omega L_1$, $X_M = \omega M$.

При этом из второго уравнения следует, что $\pm X_M = -U_2/I_1$ или $|X_M| = U_2/I_1 = 5$ Ом. Тогда величина взаимной индуктивности катушек

$$M = \frac{X_M}{\omega} = \frac{5}{2\pi f} = \frac{5}{6,28 \cdot 500} = 1,95 \cdot 10^{-3} \text{ Гн.}$$

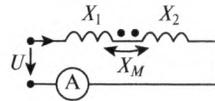
В задачах 3.24—3.28 указать правильное решение.

3.24. Укажите вариант согласного включения индуктивно связанных катушек.



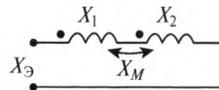
3.25. Дано: $U = 100$ В; $X_1 = 10$ Ом; $X_2 = 20$ Ом; $X_M = 10$ Ом. Найдите показание амперметра, А.

1. 10.
2. 4.
3. 6.
4. 8.



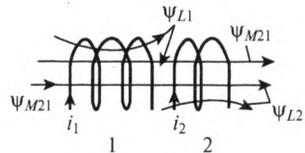
3.26. Дано: $X_1 = 30$ Ом; $X_2 = 50$ Ом; $X_M = 10$ Ом. Найдите величину X_{Σ} , Ом.

1. 100.
2. 60.
3. 80.
4. 40.



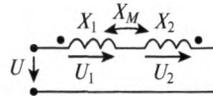
3.27. Укажите формулу ЭДС самоиндукции катушки 2.

1. $\frac{d\psi_{L2}}{di_2}$.
2. $-\frac{d\psi_{M12}}{dt}$.
3. $-\frac{d\psi_{L2}}{dt}$.
4. $\frac{d\psi_{L1}}{di_1}$.



3.28. Дано: $U = 120$ В; $X_1 = 30$ Ом; $X_2 = 50$ Ом; $X_M = 10$ Ом. Найдите величину U_1 , В.

1. 40.
2. 20.
3. 60.
4. 80.



ТРЕХФАЗНЫЕ ЭЛЕКТРИЧЕСКИЕ ЦЕПИ

4.1. Основные положения и соотношения

Расположив ЭДС E_A вдоль оси вещественных чисел комплексной плоскости, получаем запись ЭДС в следующем виде:

$$\dot{E}_A = E_A; \quad \dot{E}_B = E_A e^{j240^\circ} = E_A e^{-j120^\circ}; \quad \dot{E}_C = E_A e^{j120^\circ}, \quad (4.1)$$

или

$$\dot{E}_A = E_A; \quad \dot{E}_B = a^2 E_A; \quad \dot{E}_C = a E_A, \quad (4.2)$$

где $e^{+j120^\circ} = a$ — фазовый множитель.

Соотношения в симметричной трехфазной цепи

Для трехфазной цепи, соединенной звездой (рис. 4.1),

$$U_{\text{л}} = \sqrt{3}U_{\text{ф}}; \quad \dot{I}_{\text{ф}} = \dot{I}_{\text{л}}. \quad (4.3)$$

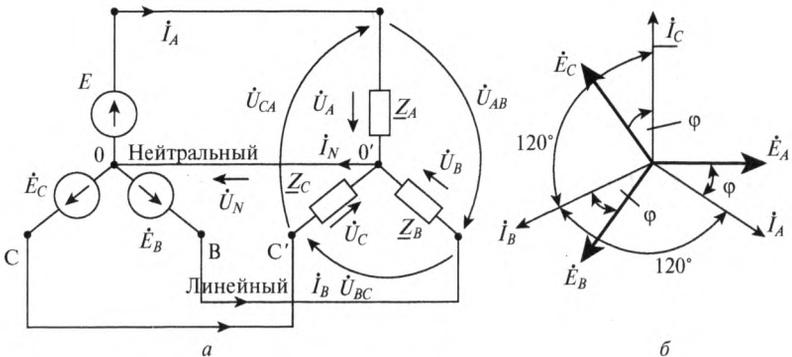


Рис. 4.1

Ток в нейтральном проводе \dot{I}_N

$$\dot{I}_A + \dot{I}_B + \dot{I}_C = \dot{I}_N. \quad (4.4)$$

При отсутствии нейтрального провода, а также при симметричной нагрузке

$$\dot{I}_A + \dot{I}_B + \dot{I}_C = 0. \tag{4.5}$$

При отсутствии нейтрального провода напряжение между нулевыми точками генератора и приемника равно:

$$\dot{U}_{10} = \dot{J}_{11} / \underline{Y}_{11}, \tag{4.6}$$

где $J_{11} = -(\dot{E}_A \underline{Y}_A + \dot{E}_B \underline{Y}_B + \dot{E}_C \underline{Y}_C)$ и $\underline{Y}_{11} = (\underline{Y}_A + \underline{Y}_B + \underline{Y}_C)$.

Для трехфазной цепи, соединенной треугольником (рис. 4.2),

$$\dot{U}_л = \dot{U}_\phi; \quad I_л = \sqrt{3} I_\phi. \tag{4.7}$$

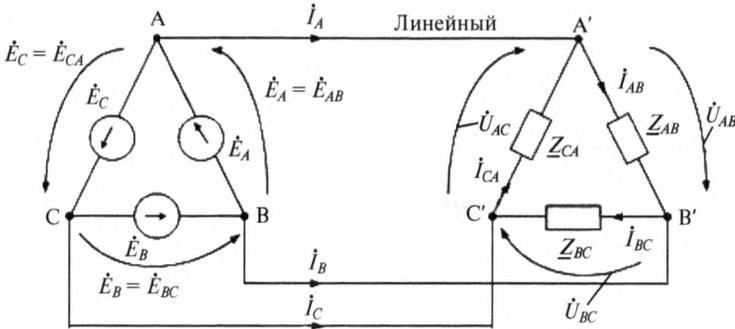


Рис. 4.2

Сумма комплексных линейных напряжений всех трех фаз (в соответствии со 2-м законом Кирхгофа) равна нулю:

$$\dot{U}_{AB} + \dot{U}_{BC} + \dot{U}_{CA} = 0. \tag{4.8}$$

Сумма комплексных токов всех трех линейных проводов равна нулю:

$$\dot{I}_A + \dot{I}_B + \dot{I}_C = 0. \tag{4.9}$$

Трехфазные цепи могут работать в двух основных режимах — симметричном и несимметричном.

Мощность трехфазной цепи

Комплексная мощность трехфазной цепи равна сумме комплексных мощностей всех трех фаз:

$$\tilde{S}_{3\phi} = \tilde{S}_A + \tilde{S}_B + \tilde{S}_C. \tag{4.10}$$

С учетом формулы (4.10) для комплексной мощности трехфазной цепи получаем:

$$\tilde{S}_{3\phi} = \sum P_{\phi} + j \sum Q_{\phi},$$

где $\sum P_{\phi} = P_A + P_B + P_C$ и $\sum Q_{\phi} = Q_A + Q_B + Q_C$. (4.11)

В частном случае при симметричном режиме работы трехфазной цепи имеем:

$$P_{3\phi} = 3P_{\phi}; \quad Q_{3\phi} = 3Q_{\phi}; \quad S_{\phi} = U_{\phi} I_{\phi} = \sqrt{P_{\phi}^2 + Q_{\phi}^2}. \quad (4.12)$$

Для соединения приемников как звездой, так и треугольником:

$$P_{3\phi} = \sqrt{3} U_{\text{л}} I_{\text{л}} \cos \varphi; \quad Q_{3\phi} = \sqrt{3} U_{\text{л}} I_{\text{л}} \sin \varphi;$$

$$S_{3\phi} = \sqrt{3} U_{\text{л}} I_{\text{л}} = \sqrt{(P_{3\phi})^2 + (Q_{3\phi})^2}. \quad (4.13)$$

Симметричный режим работы трехфазной цепи имеет место при следующих двух условиях: генератор вырабатывает симметричную систему ЭДС и, кроме того, комплексные сопротивления всех трех фаз приемника одинаковы (симметричный приемник). Очевидно, что при симметричном режиме достаточно произвести расчет только одной фазы трехфазной цепи (например, фазы *A*). Токи других фаз будут иметь с фазой *A* одинаковые амплитуды (а также и действующие значения) и сдвинуты по фазе относительно своих фазных напряжений на один и тот же угол (φ). При этом друг относительно друга токи всех трех фаз будут сдвинуты по фазе на $\pm 120^\circ$.

4.2. Расчет трехфазных цепей

4.1. Трехфазная цепь (рис. 4.1, *a*) состоит из генератора, вырабатывающего симметричную систему ЭДС с действующим значением $E = 220$ В, и симметричного приемника, соединенного звездой, сопротивление каждой фазы которого составляет $Z_A = Z_B = Z_C = Z_{\phi} = R = 22$ Ом. Требуется определить токи и напряжения всех трех фаз приемника, напряжение между нейтральными точками генератора (0) и приемника (0'), ток в нейтральном проводе, а также построить векторную диаграмму цепи на комплексной плоскости.

Решение. 1. Принимаем направление действия ЭДС, токов и напряжений в данной цепи в соответствии с рис. 4.1, *a*.

2. Определяем комплексные фазные ЭДС генератора. Для этого совмещаем ЭДС фазы А с осью вещественных чисел (рис. 4.1, а) и получаем

$$\begin{aligned}\dot{E}_A &= 220 \text{ В}; & \dot{E}_B &= 220e^{-j120^\circ} = (-110 - j190) \text{ В}; \\ \dot{E}_C &= 220e^{+j120^\circ} = (-110 + j190) \text{ В}.\end{aligned}$$

3. Определяем комплексные линейные напряжения приемника. Для этого воспользуемся 2-м законом Кирхгофа для контуров цепи, образованных фазными ЭДС генератора и линейными напряжениями трехфазного приемника:

$$\begin{aligned}\dot{U}_{AB} &= \dot{E}_A - \dot{E}_B = [220 - (-110 - j190)] = (330 + j190) = \\ &= \sqrt{330^2 + 190^2} e^{j \arctg \frac{190}{330}} = 380e^{j30^\circ} \text{ В};\end{aligned}$$

$$\dot{U}_{BC} = \dot{E}_B - \dot{E}_C = [(-110 - j190) - (-110 + j190)] = -j380 = 380e^{-j90^\circ} \text{ В};$$

$$\dot{U}_{CA} = \dot{E}_C - \dot{E}_A = [(-110 + j190) - 220] = -330 + j190 = 380e^{+j150^\circ} \text{ В}.$$

Действующие значения всех трех линейных напряжений одинаковы и составляют $U_l = 380 \text{ В}$.

4. Определяем комплексные фазные напряжения приемника. В соответствии со 2-м законом Кирхгофа непосредственно из схемы цепи находим, что при наличии нейтрального провода они равны фазным ЭДС генератора:

$$\dot{U}_A = \dot{E}_A = 220 \text{ В}; \quad \dot{U}_B = \dot{E}_B = 220e^{-j120^\circ} \text{ В}; \quad \dot{U}_C = \dot{E}_C = 220e^{+j120^\circ} \text{ В}.$$

Действующие значения всех трех фазных напряжений одинаковы ($U_\phi = 220 \text{ В}$) и в $\sqrt{3}$ раз меньше линейных напряжений ($U_l = 380 \text{ В}$).

5. Определяем комплексное напряжение \dot{U}_N между нейтральными точками приемника и генератора. Для этого используем метод узловых напряжений, согласно которому в нашем примере для двух узлов это напряжение равно

$$\dot{U}_N = \dot{J}_{11} / \dot{Y}_{11}.$$

6. Определяем комплексные фазные (они же линейные) токи приемника, используя формулу закона Ома:

$$\dot{I}_A = \frac{\dot{U}_A}{\underline{Z}_A} = \frac{220}{22} = 10 \text{ А}; \quad \dot{I}_B = \frac{\dot{U}_B}{\underline{Z}_B} = \frac{220e^{-j120^\circ}}{22} = 10e^{-j120^\circ} = (-5 - j8,7) \text{ А};$$

$$\dot{I}_C = \frac{\dot{U}_C}{Z_C} = \frac{220e^{+j120^\circ}}{22} = 10e^{+j120^\circ} = 10(-0,5 + j8,7) = (-5 + j8,7) \text{ А.}$$

Действующее значение токов во всех трех фазах цепи одинаково и составляет $I_\Phi = 10$ А. Векторы этих токов образуют симметричную систему и их сумма, определяющая ток в нейтральном проводе \dot{I}_N в соответствии с формулой (4.5), равна нулю.

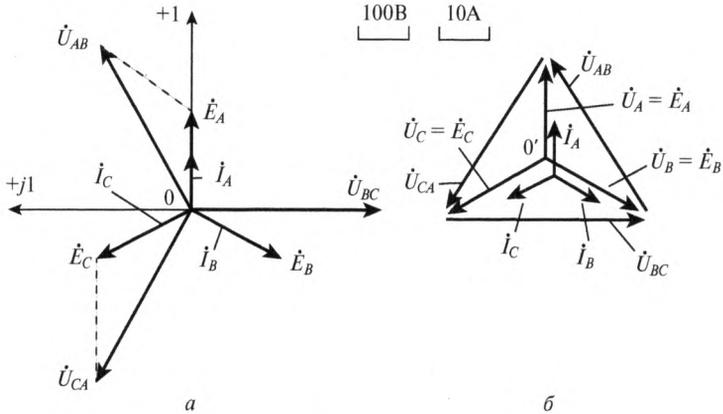


Рис. 4.3

Следовательно, при симметричном режиме работы нейтральный провод для нормальной работы цепи не нужен.

7. Векторная диаграмма токов и напряжений исследуемой цепи представлена в двух вариантах. В первом варианте (рис. 4.3, а) все векторы исходят из начала координат комплексной плоскости. Во втором варианте (рис. 4.3, б) векторы линейных напряжений перенесены параллельно самим себе так, чтобы они расположились между концами соответствующих векторов фазных напряжений и образовали равносторонний треугольник.

Из этой диаграммы видно, что при симметричном режиме работы достаточно рассчитать токи и напряжения только одной из фаз цепи, например фазы А. Токи и напряжения остальных двух фаз будут такими же по действующему значению, но сдвинуты относительно фазы А по фазе на $\pm 120^\circ$. Кроме того, из геометрии равностороннего треугольника следует, что $U_L = \sqrt{3}U_\Phi$.

4.2. Три одинаковых сопротивления $Z_{AB} = Z_{BC} = Z_{CA} = Z_\Phi = (30 + j40)$ Ом соединены треугольником и подключены к трехфазному генератору

ру, фазные обмотки которого объединены в звезду (рис. 4.4). Генератор вырабатывает симметричную систему фазных ЭДС с действующим значением $E_\Phi = 380$ В. Требуется определить показания электромагнитных амперметра и вольтметра, включенных в цепь.

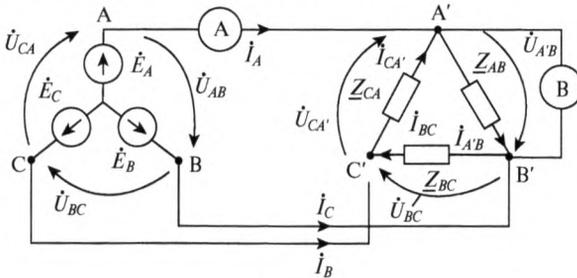


Рис. 4.4

Решение. 1. Данная трехфазная цепь работает в симметричном режиме, поэтому для решения задачи достаточно рассчитать только одну ее фазу (например, фазу АВ приемника). Принятые направления напряжений и токов соответствуют рис. 4.4.

2. Действующие значения линейных ЭДС трехфазного генератора в $\sqrt{3}$ больше действующих значений его фазных ЭДС и составляют $E_\Pi = \sqrt{3}E_\Phi = 660$ В.

Провода линии электропередачи в нашем примере не обладают сопротивлением, поэтому действующие значения фазных напряжений приемника, соединенного треугольником $U_\Phi = E_\Pi = 660$ В. Таким образом, показание вольтметра электромагнитной системы, включенного в фазу АВ приемника, составляет 660 В.

3. Действующие значения тока в фазе АВ приемника

$$I_\Phi = \frac{U_\Phi}{z_\Phi} = \frac{660}{50} = 13 \text{ А, где } z_\Phi = \sqrt{R^2 + X^2} = \sqrt{30^2 + 40^2} = 50 \text{ Ом.}$$

4. Угол сдвига фаз φ между напряжением и током фазы АВ: $\varphi = \arctg X/R = \arctg 40/30 = 53^\circ$. На этот угол (цепь имеет индуктивный характер) ток I_{AB} в фазе АВ отстает от приложенного напряжения U_{AB} .

5. Действующие значения напряжений и токов в фазах ВС и СА приемника такие же, как и в фазе АВ, но их векторы сдвинуты относительно векторов фазы АВ на 120° : в фазе ВС — на 120° по часовой стрелке, а в фазе СА — на 120° против часовой стрелки.

6. При симметричном режиме работы трехфазной цепи действующие значения линейных токов в $\sqrt{3}$ раз больше действующих значе-

ний фазных токов, поэтому $I_{\text{л}} = \sqrt{3}I_{\text{ф}} = \sqrt{3} \cdot 13 = 25 \text{ А}$. Следовательно, показание амперметра, включенного в любой линейный провод, составляет 25 А.

4.3. Обмотки трехфазного электродвигателя (рис. 4.5, а) рассчитаны на фазное напряжение $U = 380 \text{ В}$.

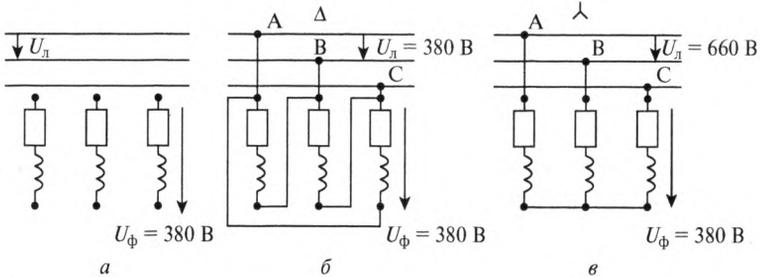


Рис. 4.5

В цепи с какими линейными напряжениями может нормально работать такой электродвигатель?

Решение. В электроэнергетике линейные напряжения низковольтных трехфазных цепей имеют стандартные величины действующих значений, составляющие 220, 380 или 660 В. Они отличаются друг от друга в $\sqrt{3}$ раз, что позволяет один и тот же трехфазный приемник эксплуатировать на двух смежных линейных напряжениях.

В нашей задаче трехфазный электродвигатель будет нормально работать от трехфазной сети с линейным напряжением $U_{\text{л}} = 380 \text{ В}$ при включении его обмоток треугольником (рис. 4.5, б) и от сети с линейным напряжением $U_{\text{л}} = 660 \text{ В}$ при включении его обмоток звездой (рис. 4.5, в). В обоих этих случаях на каждую его фазу придется напряжение $U_{\text{ф}} = 380 \text{ В}$.

4.4. Два симметричных трехфазных приемника, каждый из которых соединен звездой, включены в трехфазную цепь с действующим значением линейного напряжения $U_{\text{л}} = 415 \text{ В}$, как это показано на рис. 4.6, а. Параметры приемников известны: $R = 6 \text{ Ом}$; $X_C = 8 \text{ Ом}$. Требуется определить показание электромагнитного амперметра, включенного в один из линейных проводов цепи.

Решение. 1. Между нейтральными точками симметричных приемников нет напряжения, поэтому можно считать, что эти приемники включены между собой параллельно, и объединить их в один эквивалентный приемник, показанный на рис. 4.6, б.

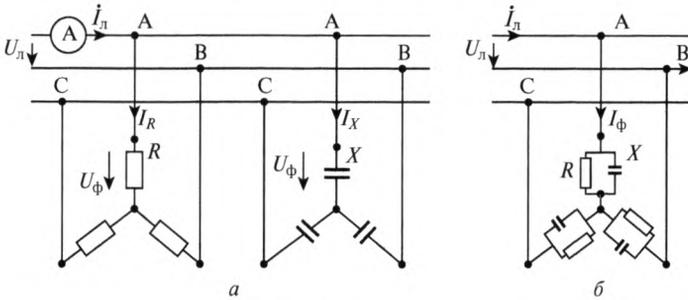


Рис. 4.6

2. Фазные напряжения этого трехфазного приемника составляют $U_{\phi} = U_{\text{л}}/\sqrt{3} = 415/\sqrt{3} = 240 \text{ В}$.

3. Ток в каждой фазе эквивалентного приемника состоит из суммы токов в его активном (I_R) и реактивном (I_X) сопротивлениях, включенных параллельно между собой. В соответствии с законом Ома для цепи синусоидального тока имеем $I_R = \frac{U_{\phi}}{R} = \frac{240}{6} = 40 \text{ А}$; $I_X = \frac{240}{8} = 30 \text{ А}$.

4. Действующее значение общего тока в каждой фазе трехфазного приемника составляет: $I_{\phi} = \sqrt{I_R^2 + I_X^2} = \sqrt{40^2 + 30^2} = 50 \text{ А}$. Это значение тока и является показанием амперметра, включенного в любой линейный провод, так как при соединении приемника звездой $I_{\phi} = I_{\text{л}}$.

4.5. Два симметричных трехфазных приемника, соединенные треугольником, включены в трехфазную цепь с действующим значением линейного напряжения $U_{\text{л}} = 360 \text{ В}$ (рис. 4.7, а). Сопротивления фаз этих приемников известны: $R = 40 \text{ Ом}$, $X = 30 \text{ Ом}$. Требуется определить показание электромагнитного амперметра, включенного в один из линейных проводов цепи.

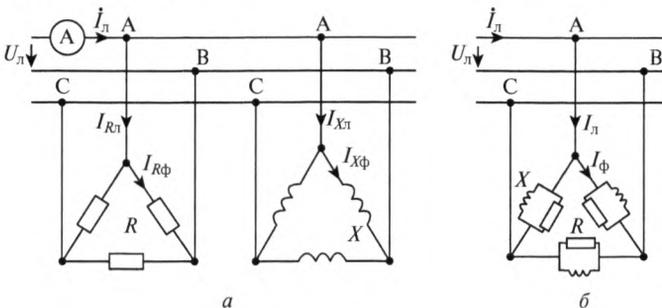


Рис. 4.7

Решение. 1. Каждая из фаз обоих приемников (АВ, ВС и СА) находится под одинаковым линейным напряжением. Поэтому можно считать, что эти приемники включены между собой параллельно, и заменить их одним эквивалентным приемником, как это показано на рис. 4.7, б. Действующее значение напряжения на каждой фазе этого приемника равно линейному напряжению цепи $U_{\phi} = U_{л} = 360$ В.

2. Проводимость каждой фазы такого приемника определяется в соответствии с формулой (3.17)

$$y = \sqrt{G^2 + b^2} = \sqrt{\left(\frac{1}{R}\right)^2 + \left(\frac{1}{X_L}\right)^2} = \sqrt{\left(\frac{1}{40}\right)^2 + \left(\frac{1}{30}\right)^2} = \\ = \sqrt{(0,025)^2 + (0,033)^2} = \sqrt{0,000625 + 0,001109} = \sqrt{0,001734} = 0,0416 \text{ Ом.}$$

3. Ток в каждой фазе эквивалентного приемника соответствует формуле (3.17):

$$I_{\phi} = Uy = 360 \cdot 0,0416 = 15.$$

4. Действующее значение тока в линейном проводе симметричной трехфазной цепи составляет $I_{л} = \sqrt{3}I_{\phi} = 1,73 \cdot 15 = 26$ А, что и является показанием амперметра, включенного в этот провод.

4.6. Два симметричных трехфазных приемника (рис. 4.8, а) включены в

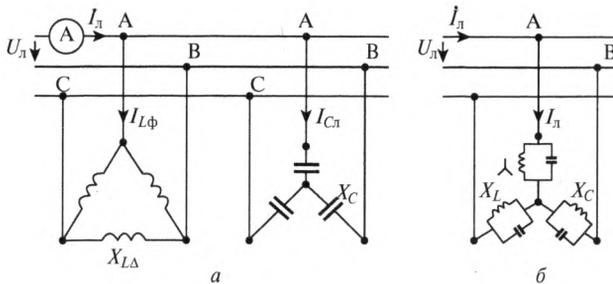


Рис. 4.8

трехфазную цепь с действующим значением линейного напряжения $U_{л} = 660$ В. Индуктивный приемник соединен треугольником, а емкостной приемник — звездой. Сопротивления этих приемников известны: $X_{L\Delta} = 228$ Ом, $X_C = 76$ Ом. Требуется определить показание электромагнитного амперметра, включенного в один из линейных проводов цепи.

Решение. 1. Преобразуем (для удобства вычислений) индуктивный треугольник в эквивалентную звезду, воспользовавшись формулой (4.8, а), и получим:

$$X_{L\lambda} = \frac{X_{L\Delta}}{3} = \frac{228}{3} = 76 \text{ Ом.}$$

2. Два симметричных трехфазных приемника, соединенные звездой, включены между собой параллельно, и их можно объединить в один эквивалентный трехфазный приемник, показанный на рис. 4.8, б. Общая проводимость каждой фазы такого приемника равна нулю:

$$y = \sqrt{\left(\frac{1}{X_L}\right)^2 - \left(\frac{1}{X_C}\right)^2} = \sqrt{\left(\frac{1}{76}\right)^2 - \left(\frac{1}{76}\right)^2} = 0.$$

Таким образом, в цепи имеет место резонанс токов, и ток в линейном проводе равен нулю. Следовательно, показание амперметра в любом линейном проводе этой цепи равно нулю.

4.7. Три однофазных приемника (рис. 4.9) с сопротивлениями $R = 55 \text{ Ом}$,

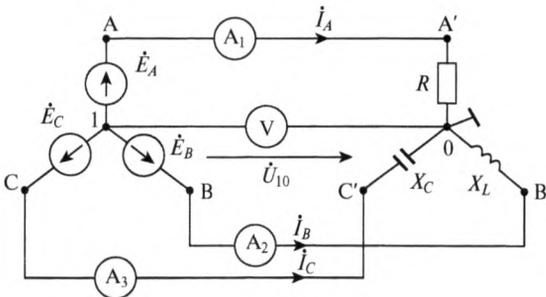


Рис. 4.9

$X_L = 44 \text{ Ом}$ и $X_C = 36,6 \text{ Ом}$ объединены в звезду и подключены к симметричному трехфазному генератору, также соединенному звездой с действующим значением фазной ЭДС $E_\phi = 220 \text{ В}$. Исходные данные: $\dot{E}_A = 220 \text{ В}$; $\dot{E}_B = 220e^{j240^\circ} = (-110 - j190) \text{ В}$; $\dot{E}_C = 220e^{j120^\circ} = (-110 + j190) \text{ В}$; $\underline{Z}_A = 55 \text{ Ом}$; $\underline{Z}_B = j44 \text{ Ом}$; $\underline{Z}_C = -j36,6 \text{ Ом}$.

Решение. 1. Применяем метод узловых напряжений, в соответствии с которым промежуточной неизвестной величиной является узловое

напряжение \dot{U}_{10} . Приняв нейтраль генератора за узел (1), а нейтраль приемника за опорный узел (0) и направив \dot{U}_{10} от узла 1 к узлу 0, в соответствии с формулой (4.6) получаем $\dot{U}_{10} = \dot{J}_{11}/\underline{Y}_{11}$, где $J_{11} = -(\dot{E}_A \underline{Y}_A + \dot{E}_B \underline{Y}_B + \dot{E}_C \underline{Y}_C)$ и $\underline{Y}_{11} = (\underline{Y}_A + \underline{Y}_B + \underline{Y}_C)$.

2. Находим численные значения указанных выше величин:

$$\underline{Y}_A = \frac{1}{\underline{Z}_A} = \frac{1}{55} = 0,0182 \text{ См}; \quad \underline{Y}_B = \frac{1}{\underline{Z}_B} = \frac{1}{j44} = -j0,0227 \text{ См};$$

$$\underline{Y}_C = \frac{1}{\underline{Z}_C} = \frac{1}{-j36,6} = +j0,0273 \text{ См}; \quad \dot{E}_A \underline{Y}_A = 220 \cdot 0,0182 = 4 \text{ А};$$

$$\dot{E}_B \underline{Y}_B = 220e^{j240^\circ} \cdot 0,0227e^{-j90^\circ} = 5e^{j150^\circ} = (-4,3 + j2,5) \text{ А};$$

$$\dot{E}_C \underline{Y}_C = 220e^{j120^\circ} \cdot 0,0272e^{+j90^\circ} = 6e^{j210^\circ} = (-5,2 - j3) \text{ А};$$

$$\dot{J}_{11} = -[4 + (-4,3 + j2,5) + (-5,2 - j3)] = 5,5 + j0,5 = 5,52e^{j5,2^\circ} \text{ А};$$

$$\underline{Y}_{11} = 0,0182 - j0,0227 + j0,0273 = 0,0182 + j0,0046 = 0,0188e^{j14,2^\circ} \text{ См}.$$

3. Находим узловое напряжение:

$$\dot{U}_{10} = \frac{\dot{J}_{11}}{\underline{Y}_{11}} = \frac{5,52e^{j5,2^\circ}}{0,0182e^{j14,2^\circ}} = 234e^{-j9^\circ} = (289 - j46) \text{ В}.$$

Модуль этого напряжения $U_{10} = 234 \text{ В}$ определяет показание вольтметра V.

4. Определяем токи в линейных проводах:

$$\dot{I}_A = \underline{Y}_A(\dot{E}_A + \dot{U}_{10}) = 0,0182[220 + (289 - j46)] = (9,3 - j0,8) = 9,3e^{-j5^\circ} \text{ А};$$

$$\dot{I}_B = \underline{Y}_B(\dot{E}_B + \dot{U}_{10}) = -j0,0227[(-110 - j190) + (289 - j46)] =$$

$$= (-5,4 - j4,1) = 6,7e^{-j217^\circ} \text{ А};$$

$$\dot{I}_C = \underline{Y}_C(\dot{E}_C + \dot{U}_{10}) = +j0,0273[(-110 + j190) + (289 - j46)] =$$

$$= (-3,9 + j4,9) = 6,3e^{j129^\circ} \text{ А}.$$

5. Показания амперметров, включенных в линейные провода цепи, соответствуют модулям линейных токов и составляют $A_1 = 9,3 \text{ А}$; $A_2 = 6,7 \text{ А}$; $A_3 = 6,3 \text{ А}$.

4.8. В трехфазной симметричной цепи задачи 4.1 произошел обрыв фазы А при отсутствии нулевого провода. Требуется определить комплексные токи и напряжения всех трех фаз приемника и комплексное

напряжение между нейтральными точками приемника и генератора. Построить векторную диаграмму токов и напряжений цепи на комплексной плоскости.

Решение. 1. Исходные данные для расчета: $E_\phi = 220$ В; $Z_\phi = R = 22$ Ом.

Совмещая вектор ЭДС фазы А источника с осью вещественных чисел, получаем

$$\begin{aligned}\dot{E}_A &= 220 \text{ В}; & \dot{E}_B &= 220e^{-j120^\circ} = (-110 - j190) \text{ В}; \\ \dot{E}_C &= 220e^{+j120^\circ} = (-110 + j190) \text{ В}.\end{aligned}$$

2. Линейные напряжения приемника остаются такими же, как и при симметричном режиме работы цепи: $\dot{U}_{AB} = 380e^{j30^\circ} = (330 + j190)$ В; $\dot{U}_{BC} = 380e^{-j90^\circ} = -j380$ В; $\dot{U}_{CA} = (-330 + j190)$ В. Однако фазные напряжения здесь изменяются, поскольку в цепи отсутствует нулевой провод, поддерживающий их равными фазными ЭДС генератора.

3. Определяем комплексное напряжение между нейтральными точками приемника и генератора, используя формулу метода узловых напряжений и принимая нейтраль генератора за опорный узел

$$\dot{U}_N = \frac{\dot{E}_A \underline{Y}_A + \dot{E}_B \underline{Y}_B + \dot{E}_C \underline{Y}_C}{\underline{Y}_A + \underline{Y}_B + \underline{Y}_C + \underline{Y}_N}.$$

В этой формуле $\underline{Y}_A = 0$ (фаза А оборвана); $\underline{Y}_B = \underline{Y}_C = 1/Z_\phi = 0,0455$ См; $\underline{Y}_N = 0$ (нет нейтрального провода). Таким образом,

$$\begin{aligned}\dot{U}_N &= \frac{\dot{E}_B \underline{Y}_B + \dot{E}_C \underline{Y}_C}{\underline{Y}_B + \underline{Y}_C} = \frac{[(-110 - j190) \cdot 0,0455] + [(-110 + j190) \cdot 0,0455]}{0,0455 + 0,0455} = \\ &= \frac{(-5 - j8,64) + (-5 + j8,64)}{0,091} = \frac{-10}{0,091} = -110 \text{ В}.\end{aligned}$$

4. Определяем комплексные токи в линейных проводах (они же фазные токи приемника), используя формулу метода узловых напряжений. С учетом принятых в данной задаче направлений токов и напряжений имеем:

$$\begin{aligned}\dot{I}_A &= \underline{Y}_A (\dot{E}_A - U_N) = 0, \quad \text{так как } \underline{Y}_A = 0; \\ \dot{I}_B &= \underline{Y}_B (\dot{E}_B - \dot{U}_N) = 0,045 [(-110 - j190) - (-110)] = \\ &= 0,0455(-j190) = -j8,64 = 8,64e^{-j90^\circ} \text{ А};\end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \dot{I}_C &= \underline{Y}_C(\dot{E}_C - \dot{U}_N) = 0,045[(-110 + j190) - (-110)] = \\ &= 0,0455(+j190) = +j8,64 = 8,64e^{+j90^\circ} \text{ А.} \end{aligned}$$

Из этих расчетов следует, что \dot{I}_C и \dot{I}_B — это фактически один и тот же ток в контуре 0ВВ'0'C'С0 (фаза А разорвана), направление которого на рис. 4.1 принято в соответствии с направлением \dot{U}_{BC} , т.е. в направлении \dot{I}_B . Поэтому ток \dot{I}_C имеет знак, противоположный \dot{I}_B . Действующее значение этого тока $I_B = I_C = 8,64 \text{ А}$.

5. Определяем комплексные фазные напряжения \dot{U}_B и \dot{U}_C приемника, воспользовавшись формулой закона Ома:

$$\dot{U}_B = \dot{I}_B \underline{Z}_B = -j8,64 \cdot 22 = -j190 \text{ В}; \quad \dot{U}_C = \dot{I}_C \underline{Z}_C = -j8,64 \cdot 22 = +j190 \text{ В}.$$

Отсюда следует, что $\dot{U}_C = -\dot{U}_B$ и истинное направление напряжения \dot{U}_C на схеме рис. 4.1, а противоположно принятому. Действующие значения этих напряжений равны между собой и каждое из них равно половине действующего значения напряжения U_{BC} . Этот результат находится в полном соответствии с конфигурацией электрической схемы при обрыве фазы А и отсутствии линейного провода. В самом деле, ток в образовавшейся после разрыва фазы А цепи протекает через два одинаковых сопротивления $\underline{Z}_\Phi = R = 22 \text{ Ом}$, соединенных между собой последовательно и находящихся под воздействием линейного напряжения $U_{BC} = 380 \text{ В}$. На каждое из них приходится половина этого напряжения ($U_B = U_C = 190 \text{ В}$), а действующее значение тока составляет $I_B = I_C = 380/44 = 8,64 \text{ А}$.

6. Определяем комплексное напряжение \dot{U}_A на оборванной фазе А. Непосредственно из закона Ома это напряжение найти невозможно, так как $\dot{I}_A = 0$ и $\underline{Z}_A = \infty$. Его определяем из рассмотрения контура 0АА0'А цепи, для которого в соответствии со 2-м законом Кирхгофа имеем: $\dot{E}_A = \dot{U}_A + \dot{U}_A + \dot{U}_N$ или $\dot{U}_A = \dot{E}_A - \dot{U}_N = 220 - (-110) = +330 \text{ В}$.

7. Векторная диаграмма исследуемой цепи представлена на рис. 4.10 в двух вариантах.

В первом варианте (рис. 4.10, а) все векторы исходят из начала координат комплексной плоскости (точка 0). Во втором варианте (рис. 4.10, б) векторы линейных напряжений перенесены параллельно самим себе так, чтобы они опирались на концы векторов фазных напряжений. Такое их расположение позволяет определять действующие значения токов и напряжений, используя только геометрию равностороннего треугольника.

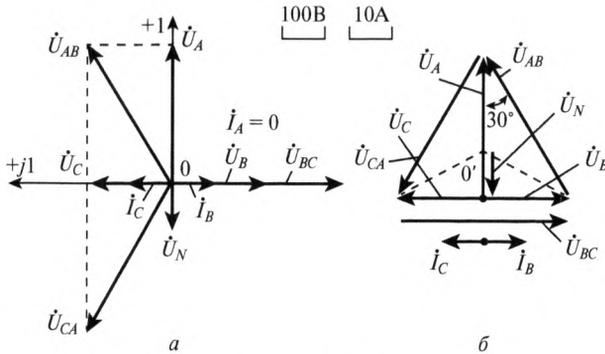


Рис. 4.10

Очевидно, что здесь нейтральная точка $0'$ симметричного режима опустилась на середину вектора \dot{U}_{BC} и поэтому действующие значения напряжений фаз В и С стали равными половине действующего значения линейного напряжения: $U_B = U_C = U_{л}/2 = 380/2 = 190$ В (на схеме цепи два одинаковых сопротивления $R = 22$ Ом соединены последовательно и находятся под воздействием линейного напряжения $\dot{U}_{л} = 380$ В). Действующее значение напряжения \dot{U}_A на разорванной фазе А определяет высоту равностороннего треугольника, величина которой $\dot{U}_A = \dot{U}_{AB} \cos 30^\circ = 380 \cdot 0,86 = 330$ В.

Действующее значение напряжения на нейтральном проводе U_N определяется на диаграмме рис. 4.10, б расстоянием между точками $0'$ при симметричном и исследуемом режимах работы: $U_N = 220 \cdot \cos 60^\circ = 110$ В. Заметим, что при определении U_A и U_N можно использовать также известный из курса математики факт, что центр равностороннего треугольника делит его высоту в отношении 2 : 1. Действующие значения токов в фазах В и С $I_B = I_C = U_{л}/2R = 380/44 = 8,64$ А.

4.9. В трехфазной цепи задачи 4.1 произошло короткое замыкание фазы А при отсутствии нейтрального провода. Требуется определить комплексные токи и напряжения всех трех фаз приемника, а также напряжение между нейтральной точкой приемника и генератора; построить векторную диаграмму токов и напряжений на комплексной плоскости.

Решение. 1. Исходные данные для расчета: $\dot{E}_\Phi = 220$ В; $\underline{Z}_A = \underline{Z}_B = \underline{Z}_C = \underline{Z}_\Phi = R = 22$ Ом. Совместим ЭДС фазы А с осью вещественных чисел и получим:

$$\dot{E}_A = 220 \text{ В}; \quad \dot{E}_B = 220e^{-j120^\circ} = (-110 - j190) \text{ В};$$

$$\dot{E}_C = 220e^{+j120^\circ} = (-110 + j190) \text{ В}.$$

2. Линейные напряжения приемника остаются такими же, как и при симметричном режиме работы $\dot{U}_{AB} = 380e^{j30^\circ} = (330 + j190) \text{ В};$

$$\dot{U}_{BC} = 380e^{-j90^\circ} = -j380 \text{ В}; \quad \dot{U}_{CA} = 380e^{+j150^\circ} = (-330 + j190) \text{ В}.$$

Однако фазные напряжения приемника претерпевают изменения.

3. Определяем комплексное напряжение \dot{U}_N между нейтральными точками приемника и генератора. Формула (4.6) метода узловых напряжений здесь не годится, так как при коротком замыкании фазы А $\underline{Y}_A = \infty$ и она приводит к неопределенности вида ∞/∞ . Поэтому комплексное напряжение \dot{U}_N находим, рассмотрев контур $0AA'O'$ и составив для него уравнение по 2-му закону Кирхгофа: $\dot{E}_A = \dot{U}_A + \dot{U}_N$. При коротком замыкании фазы А, $\dot{U}_A = 0$, получаем, что $\dot{U}_N = \dot{E}_A = 220 \text{ В}$.

4. Определяем комплексные токи в фазах В и С приемника, используя формулу (5.8) метода узловых напряжений:

$$\dot{I}_B = \underline{Y}_B(\dot{E}_B - \dot{U}_N) = 0,045[(-110 - j190) - 220] = (-15 - j8,6) = 17,3e^{-j150^\circ} \text{ А};$$

$$\dot{I}_C = \underline{Y}_C(\dot{E}_C - \dot{U}_N) = 0,045[(+110 + j190) - 220] = (-15 + j8,6) = 17,3e^{+j150^\circ} \text{ А}.$$

5. Определяем комплексный ток в линейном проводе А, используя формулу (7.3, а), согласно которой $\dot{I}_A + \dot{I}_B + \dot{I}_C = 0$. Тогда $\dot{I}_A = -(\dot{I}_B + \dot{I}_C) = -[(-15 - j8,6) + (-15 + j8,6)] = -(-30) = +30 \text{ А}$.

6. Определяем комплексные напряжения на фазах В и С приемника (напряжение $\dot{U}_A = 0$), используя формулу закона Ома:

$$\dot{U}_B = \dot{I}_B \underline{Z}_B = [(-15 - j8,6) \cdot 22] = (-330 - j190) = 380e^{-j150^\circ} \text{ В}, \quad \dot{U}_B = -\dot{U}_{AB};$$

$$\dot{U}_C = \dot{I}_C \underline{Z}_C = [(-15 + j8,6) \cdot 22] = (-330 + j190) = 380e^{+j150^\circ} \text{ В}, \quad \dot{U}_C = \dot{U}_{CA}.$$

7. Векторная диаграмма токов и напряжений при коротком замыкании фазы А показана на рис. 4.11 в двух вариантах.

В первом варианте (рис. 4.11, а) все векторы расположены в начале координат комплексной плоскости (точка 0). Во втором варианте (рис. 4.11, б) векторы линейных напряжений перенесены параллельно самим себе так, чтобы они расположились между концами соответствующих фазных векторов. Такое их расположение позволяет опре-

делять действующие значения всех фазных токов и напряжений цепи, не произведя ее полного расчета.

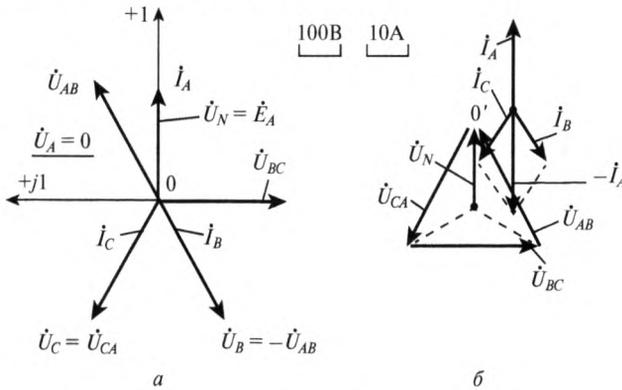


Рис. 4.11

Очевидно, что точка $0'$ диаграммы, находящаяся при симметричном режиме работы в центре равностороннего треугольника, перемещается при коротком замыкании фазы А ($\dot{U}_A = 0$) вверх и совпадает с его вершиной. При этом действующие значения напряжений на фазах В и С становятся равными линейным напряжениям и составляют $U_B = U_C = 380$ В, т.е. увеличиваются по сравнению с симметричным режимом работы данной цепи в $\sqrt{3}$ раз. Токи в фазах В и С совпадают по фазе со своими фазными напряжениями, и их действующие значения составляют $I_B = I_C = 17,3$ А, т.е. возрастают по сравнению с симметричным режимом работы также в $\sqrt{3}$ раз. Ток в закороченной фазе А $\dot{I}_A = -(\dot{I}_B + \dot{I}_C)$. Его действующее значение, как это непосредственно следует из геометрических построений, составляет 30 А и увеличивается по сравнению с симметричным режимом работы в 3 раза.

4.10. В условиях задачи 4.4 определить активную, реактивную и полную мощность двух параллельно соединенных симметричных приемников. Исходные данные для эквивалентного трехфазного приемника: $U_\Phi = 240$ В; $R = 6$ Ом; $X = 8$ Ом; $I_\Phi = 50$ А.

Решение. 1. При решении задачи применим формулы (4.13). Предварительно определим угол сдвига фаз между напряжением и током в каждой фазе приемника, воспользовавшись формулой (3.30): $\varphi = \text{arctg } b/G = \text{arctg } 6/8 = 37^\circ$.

2. Активная мощность приемника

$$P_{3\Phi} = 3P_\Phi = 3(240 \cdot 50 \cdot \cos 37^\circ) = 36\,000 \cdot 0,8 = 28\,800 \text{ Вт.}$$

3. Реактивная мощность приемника

$$Q_{3\phi} = 3Q_{\phi} = 3(240 \cdot 50 \cdot \sin 37^\circ) = 36\,000 \cdot 0,6 = 21\,600 \text{ вар.}$$

4. Полная мощность приемника

$$S_{3\phi} = 3S_{\phi} = 3(240 \cdot 50) = 36\,000 \text{ В} \cdot \text{А.}$$

5. Проверка расчетов:

$$S_{3\phi} = \sqrt{P_{3\phi}^2 + Q_{3\phi}^2} = \sqrt{28\,800^2 + 21\,600^2} = 36\,000 \text{ В} \cdot \text{А.}$$

4.11. В условиях задачи 4.5 определить активную, реактивную и полную мощность эквивалентного трехфазного приемника. Исходные данные:

$$U_{\text{л}} = 360 \text{ В}; \quad I_{\text{л}} = 26 \text{ А}; \quad G = 0,025 \text{ См}; \quad b = 0,033 \text{ См.}$$

Решение. 1. При решении задачи воспользуемся формулами (4.12). Предварительно найдем угол сдвига фаз φ между напряжением и током фазы: $\varphi = \arctg b/G = \arctg 0,033/0,025 = 53^\circ$.

2. Активная мощность цепи

$$P_{3\phi} = \sqrt{3}U_{\text{л}}I_{\text{л}}\cos\varphi = 1,73 \cdot 360 \cdot 26 \cdot \cos 53^\circ = 9716 \text{ Вт} = 9,716 \text{ кВт.}$$

3. Реактивная мощность приемника

$$Q_{3\phi} = \sqrt{3}U_{\text{л}}I_{\text{л}}\sin\varphi = 1,73 \cdot 360 \cdot 26 \cdot \sin 53^\circ = 12\,954 \text{ вар} = 12,954 \text{ квар.}$$

4. Полная мощность приемника $S_{3\phi} = \sqrt{3}U_{\text{л}}I_{\text{л}} = 1,73 \cdot 360 \cdot 26 = 16\,193 \text{ В} \cdot \text{А} = 16,193 \text{ кВА.}$

В задачах 4.12—4.17 укажите правильный ответ.

4.12. Дано:

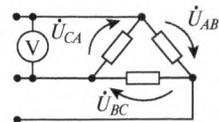
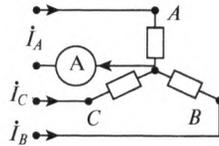
$$\begin{aligned} \dot{I}_A &= 10 \text{ А}; & \dot{I}_B &= -5 + j8,7 \text{ А}; \\ \dot{I}_C &= -5 - j8,7 \text{ А}. \end{aligned}$$

Определите показание амперметра электромагнитной системы, А.

1. 0. 2. 20.
3. 37,4. 4. 40.

4.13. Дано:

$$\dot{U}_{AB} = -j500 \text{ В}; \quad \dot{U}_{BC} = j200 \text{ В.}$$



Определите показание вольтметра, В.

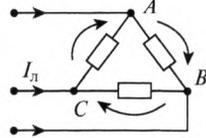
1. -300.
2. 300.
3. 500.
4. 400.

4.14. Дано:

$$U_{л} = 660 \text{ В}; \quad I_{л} = 17,3 \text{ А}; \quad R_{AB} = R_{BC} = R_{CA}.$$

Найдите сопротивление фазы R , Ом.

1. 38.
2. 17,3.
3. 22.
4. 66.

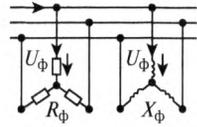


4.15. Дано:

$$U_{\Phi} = 120 \text{ В}; \quad X_{\Phi} = 40 \text{ Ом}; \quad R_{\Phi} = 30 \text{ Ом}.$$

Определите линейный ток $I_{л}$, А.

1. 5.
2. 7.
3. 6.
4. 8.

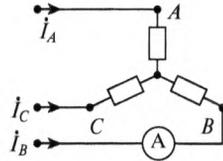


4.16. Дано:

$$\dot{I}_A = j60 \text{ А}; \quad \dot{I}_C = -j80 \text{ А}.$$

Определите показание амперметра, А.

1. 20.
2. 40.
3. -j60.
4. 80.

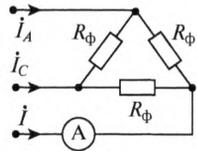


4.17. Дано:

$$\dot{I}_A = j30 \text{ А}; \quad \dot{I}_C = -j10 \text{ А}.$$

Определите I , А.

1. 20.
2. 10.
3. 31,6.
4. 35.



ЧАСТЬ II

**РАСЧЕТ
НЕСИНУСОИДАЛЬНЫХ
И ПЕРЕХОДНЫХ
ПРОЦЕССОВ. РАСЧЕТ
НЕЛИНЕЙНЫХ ЦЕПЕЙ**

ГЛАВА 5

НЕСИНУСОИДАЛЬНЫЕ ПЕРИОДИЧЕСКИЕ ПРОЦЕССЫ В ЛИНЕЙНЫХ ЦЕПЯХ

5.1. Основные положения и соотношения

Из курса математики известно, что всякая несинусоидальная периодическая функция, удовлетворяющая условиям Дирихле, т.е. имеющая за период конечное число разрывов первого рода и конечное число максимумов и минимумов, может быть разложена в тригонометрический ряд Фурье:

$$f(\omega t) = A_0 + A_k \sin(k\omega t + \psi_k), \quad k = 1, 2, 3, \dots, \quad (5.1)$$

где A_0 — постоянная составляющая, равная среднему значению функции за период; $A_1 \sin(\omega t + \psi_1)$ — основная, или первая, гармоника.

Она имеет тот же период $T = 2\pi/\omega$, что и данная несинусоидальная функция. Все остальные гармоники, имеющие частоту, не равную частоте ω , называются высшими гармониками.

Ниже представлены несинусоидальные периодические ток, напряжение и ЭДС:

$$\begin{aligned} e &= E_0 + E_{1m} \sin(\omega t + \varphi_{e1}) + E_{2m} \sin(2\omega t + \varphi_{e2}) + \dots + \\ &\quad + E_{km} \sin(k\omega t + \varphi_{ek}) + \dots, \\ u &= U_0 + U_{1m} \sin(\omega t + \varphi_{u1}) + U_{2m} \sin(2\omega t + \varphi_{u2}) + \dots + \\ &\quad + U_{km} \sin(k\omega t + \varphi_{uk}) + \dots, \\ i &= I_0 + I_{1m} \sin(\omega t + \varphi_{i1}) + I_{2m} \sin(2\omega t + \varphi_{i2}) + \dots + \\ &\quad + I_{km} \sin(k\omega t + \varphi_{ik}) + \dots \end{aligned} \quad (5.2)$$

Ряд (5.1) можно записать в другой форме:

$$f(\omega t) = A_0 + B_1 \sin \omega t + B_2 \sin 2\omega t + \dots + C_1 \cos \omega t + C_2 \cos 2\omega t + \dots \quad (5.3)$$

Действующее значение несинусоидального тока равно корню квадратному из суммы квадратов действующих значений гармоник. При этом постоянная составляющая рассматривается как частный

случай гармоник с угловой частотой, равной нулю (нулевая гармоника)

$$I = \sqrt{\sum_k I_k^2} = \sqrt{I_0^2 + I_1^2 + I_2^2 + \dots + I_k^2 + \dots} \quad (5.4)$$

Аналогично определяются действующие значения несинусоидальных напряжения и ЭДС

$$U = \sqrt{\sum_k U_k^2} = \sqrt{U_0^2 + U_1^2 + U_2^2 + \dots + U_k^2 + \dots}, \quad (5.4, a)$$

$$E = \sqrt{\sum_k E_k^2} = \sqrt{E_0^2 + E_1^2 + E_2^2 + \dots + E_k^2 + \dots} \quad (5.4, б)$$

5.1. Мгновенное значение несинусоидального тока представлено в виде ряда:

$$i = 12 + 6\sin\left(\omega t + \frac{\pi}{3}\right) + 4\sin\left(2\omega t + \frac{\pi}{4}\right).$$

Требуется найти действующее значение тока.

Решение. Действующее значение несинусоидального тока определим по выражению (5.4):

$$I = \sqrt{12^2 + \frac{6^2}{2} + \frac{4^2}{2}} = 13,1 \text{ А.}$$

Активная мощность при несинусоидальном режиме согласно равна сумме постоянной мощности и активных мощностей всех гармоник:

$$P = U_0 I_0 + U_1 I_1 \cos \varphi_1 + U_2 I_2 \cos \varphi_2 + \dots + U_k I_k \cos \varphi_k + \dots \quad (5.5)$$

Реактивная мощность определяется как сумма реактивных мощностей отдельных гармоник:

$$Q = U_1 I_1 \sin \varphi_1 + U_2 I_2 \sin \varphi_2 + \dots + U_k I_k \sin \varphi_k + \dots \quad (5.6)$$

Полная мощность определяется при несинусоидальных напряжениях и токах через их действующие значения U и I

$$S = UI. \quad (5.7)$$

Коэффициент мощности. Для периодических несинусоидальных процессов вводят понятие о коэффициенте мощности λ , определяя его из соотношения

$$\lambda = \frac{P}{UI} = \frac{\sum_{k=0}^{\infty} P_k}{\sqrt{\sum_{k=0}^{\infty} U_k^2} \sqrt{\sum_{k=0}^{\infty} I_k^2}}. \quad (5.8)$$

5.2. Известны несинусоидальный ток i и напряжение u на входе цепи:

$$i = 18\sqrt{2} \sin(\omega t + 20^\circ) + 12\sqrt{2} \sin(3\omega t + 13^\circ) + 4\sqrt{2} \sin(5\omega t - 17^\circ),$$

$$u = 10 + 20\sqrt{2} \sin(\omega t + 35^\circ) + 14\sqrt{2} \sin(3\omega t + 63^\circ) + 8\sqrt{2} \sin(5\omega t + 37^\circ).$$

Требуется определить: активную, реактивную, полную мощности и коэффициент мощности.

Решение. Действующие значения тока и напряжения равны:

$$I = \sqrt{18^2 + 12^2 + 4^2} = 22 \text{ А}, \quad U = \sqrt{10^2 + 20^2 + 14^2 + 8^2} = 27,6 \text{ В}.$$

Полная мощность:

$$S = UI = 22 \cdot 27,6 = 607 \text{ В} \cdot \text{А}.$$

Активная мощность:

$$P = U_0 I_0 + U_1 I_1 \cos \varphi_1 + U_3 I_3 \cos \varphi_3 + U_5 I_5 \cos \varphi_5 =$$

$$= 10 \cdot 0 + 20 \cdot 18 \cos 15^\circ + 14 \cdot 12 \cos 50^\circ + 8 \cdot 4 \cos 54^\circ = 488,7 \text{ В}.$$

Реактивная мощность:

$$Q = U_1 I_1 \sin \varphi_1 + U_3 I_3 \sin \varphi_3 + U_5 I_5 \sin \varphi_5 =$$

$$= 20 \cdot 18 \sin 15^\circ + 14 \cdot 12 \sin 50^\circ + 8 \cdot 4 \sin 54^\circ = 247 \text{ вар}.$$

Коэффициент мощности: $\lambda = P/S = 487,7/607 = 0,8$.

Характеристики формы периодических несинусоидальных кривых

Коэффициент амплитуды — отношение максимального значения V_m к действующему значению функции V

$$k_a = V_m/V. \quad (5.9)$$

Коэффициент формы — отношение действующего значения V к среднему значению функции V_{cp}

$$k_f = V/V_{cp}. \quad (5.10)$$

Коэффициент гармоник — отношение действующего значения высших гармоник к действующему значению основной гармоники. Служит для оценки относительного содержания высших гармоник в несинусоидальной функции по сравнению с основной

$$k_H = \frac{\sqrt{V^2 - V_1^2}}{V_1}, \quad V^2 = V_1^2 + V_2^2 + V_3^2 + \dots + V_k^2 + \dots \quad (5.11)$$

Коэффициент искажения — отношение действующего значения основной гармоники к действующему значению всей функции. Служит также для оценки содержания высших гармоник в разложении данной величины в ряд Фурье и отличается от коэффициента гармоник только тем, что оценка эта делается не по отношению к первой гармонике, а по отношению к действующему значению V всей величины в целом:

$$\kappa_{\text{И}} = \frac{\sqrt{V^2 - V_1^2}}{V}. \quad (5.12)$$

Коэффициент синусоидальности оценивает степень приближения формы кривой к синусоиду и определяется отношением действующего значения V_1 первой гармоники разложения к действующему значению V всей величины в целом:

$$\lambda = V_1/V. \quad (5.13)$$

5.3. Вычислить коэффициенты амплитуды, гармоник, искажения, синусоидальности кривой напряжения, уравнение которой

$$u = 20\sqrt{2} \sin(\omega t^\circ) + 14\sqrt{2} \sin(3\omega t).$$

Решение. Сначала вычислим действующее значение напряжения по формуле (5.4)

$$U = \sqrt{20^2 + 14^2} = 24,4 \text{ В.}$$

Затем найдем среднее значение:

$$\begin{aligned} U_{\text{ср}} &= \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} (U_{1m} \sin \omega t + U_{2m} \sin 2\omega t) d\omega t = \\ &= -\frac{1}{\pi} \left[U_{1m} \cos \omega t + \frac{U_{2m}}{2} \cos 2\omega t \right]_{\omega t=0}^{\omega t=\pi} = \frac{2U_{1m}}{\pi} = 18 \text{ В.} \end{aligned}$$

Определим максимальное значение напряжения u :

$$\frac{du}{d(\omega t)} = U_{1m} \cos \omega t + U_{2m} \cos 2\omega t = 0.$$

Опуская промежуточные вычисления, получим:

$$U_{\text{max}} = 43 \text{ В.}$$

Теперь по формулам (5.9)—(5.13) вычислим искомые коэффициенты:

$$k_a = \frac{43}{24} = 1,79; \quad k_{\Phi} = \frac{24,4}{18} = 1,35; \quad \kappa_{\Gamma} = \frac{14}{20} = 0,7; \quad \kappa_{\text{И}} = \frac{14}{24,4} = 0,57.$$

5.2. Расчет линейных цепей с несинусоидальными ЭДС

Несинусоидальные периодические ЭДС, напряжения и токи можно представить в виде ряда Фурье, который в общем виде содержит постоянную составляющую, основную или первую гармонику, имеющую период, равен периоду самой функции, и высшие гармоники, частота которых в целое число раз больше частоты первой гармоники.

Расчет основан на принципе наложения, а именно: мгновенное значение несинусоидального тока в любой ветви в данный момент времени равно алгебраической сумме мгновенных значений отдельных гармоник тока в данный момент времени. В результате этого расчет можно свести к решению n задач с синусоидальными ЭДС (n — число гармоник) и одной задачи с постоянной ЭДС.

Весь расчет можно разделить на следующие этапы.

1. Разложение несинусоидальных источников ЭДС в ряд Фурье, т.е. на постоянную и гармонические составляющие. При этом в зависимости от симметрии кривой ЭДС в ней может отсутствовать постоянная составляющая.

2. Расчет постоянной составляющей тока, если в разложении присутствует постоянная составляющая ЭДС.

3. Расчет мгновенных значений гармоник тока i_k комплексным методом.

4. Суммирование мгновенных значений тока отдельных гармоник и постоянной составляющей

$$i = I_0 + i_1 + i_2 + \dots + i_k.$$

При расчете постоянной составляющей тока необходимо учесть, что индуктивное и емкостное сопротивления соответственно равны:

$$X_{L0} = 0, \quad X_{C0} = \infty, \quad (5.14)$$

так как постоянную составляющую можно представить процессом, у которого частота $\omega \rightarrow 0$ или $\omega = 0$.

При расчете гармонических составляющих тока необходимо учесть, что индуктивное и емкостное сопротивления зависят от частоты, т.е. от номера гармоники:

$$X_{Lk} = k\omega L = kX_{L1}, \quad X_{Ck} = 1/k\omega C = X_{C1}/k.$$

Активное сопротивление резистора в диапазоне низких частот не зависит от частоты и всегда равно его электрическому сопротивлению R .

5.4. Для цепи (рис. 5.1) дано: $X_{L1} = \omega L = 3$ Ом, $R = X_{C1} = 1/\omega C = 4$ Ом; $u = 10 + 5\sqrt{2} \sin \omega t + 2\sqrt{2} \sin 3\omega t$.

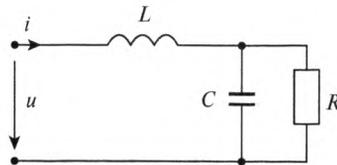


Рис. 5.1

Требуется определить действующее и мгновенное значения тока на входе цепи и активную мощность.

Решение 1. Постоянная составляющая тока равна

$$I_0 = U_0/R = 10/4 = 2,5 \text{ А.}$$

2. Действующее и мгновенное значения тока первой гармоники найдем комплексным методом:

$$\dot{I}_1 = \frac{\dot{U}_1}{\underline{Z}_1}; \quad \dot{U}_1 = 5; \quad \underline{Z}_1 = jX_{L1} - \frac{jRX_{C1}}{R - jX_{C1}} = j3 - \frac{j16}{4 - j4} = j3 - \frac{-64 + j64}{4^2 + 4^2} = 2 + j;$$

$$I_1 = \frac{5}{2 + j} = 2 - j; \quad I_1 = \sqrt{2^2 + 1^2} = \sqrt{5} \text{ А}; \quad i_1 = \sqrt{10} \sin(\omega t - 0,46) \text{ А.}$$

3. Определим действующее и мгновенное значения тока третьей гармоники

$$\dot{I}_3 = \frac{\dot{U}_3}{\underline{Z}_3}; \quad \dot{U}_3 = 2; \quad \underline{Z}_3 = j3X_{L3} - \frac{jR X_{C1}}{R - j X_{C1}} = j9 - \frac{j5,3}{4 - j4} = 0,39 + j12,1;$$

$$I_3 = \frac{2}{0,39 + j12,1} = 0,005 - j0,16; \quad I_3 = 0,16 \text{ А}; \quad i_3 = \sqrt{0,32} \sin(3\omega t - 1,57) \text{ А.}$$

4. Действующее значение тока на входе цепи

$$I = \sqrt{I_0^2 + I_1^2 + I_3^2} = \sqrt{6,25 + 5 + 0,0256} = 3,3 \text{ А.}$$

5. Мгновенное значение тока на входе цепи

$$i = I_0 + i_1 + i_3 = 2,5 + \sqrt{10} \sin(\omega t - 0,46) + \sqrt{0,32} \sin(3\omega t - 1,57) \text{ А.}$$

6. Активная мощность

$$P = U_0 I_0 + U_1 I_1 \cos \varphi_1 + U_3 I_3 \cos \varphi_3 = \\ = 10 \cdot 2,5 + 5 \cdot 2,23 \cos 0,46 + 2 \cdot 0,16 \cos 1,57 = 36,2 \text{ Вт.}$$

5.5. К цепи, изображенной на рис. 5.2, приложено периодическое несинусоидальное напряжение u , частота напряжения $f = 50$ Гц, максимальное напряжение $U_m = 314$ В. Параметры цепи $R = 5$ Ом, $L = 5,34$ мГн, $C = 212$ мкФ.

$$u = \frac{U_m}{2} + \frac{2U_m}{\pi} \sin \omega t + \frac{2U_m}{3\pi} \sin 3\omega t = 157 + 200 \sin \omega t + 66,7 \sin 3\omega t \text{ В.}$$

Требуется рассчитать ток i цепи, ограничившись первыми тремя членами ряда Фурье.

Решение. 1. Рассчитаем ток от воздействия постоянной составляющей напряжения ($f = 0$). В этом случае $U_0 = 157$ В, $R = 5$ Ом, $X_L(0) = 0$, $X_C(0) = \infty$. Ветвь с емкостью не пропускает постоянного тока (обрыв

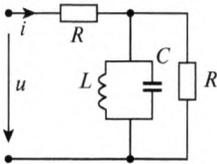


Рис. 5.2

цепи), а через ветвь с индуктивностью постоянный ток проходит без сопротивления (короткое замыкание). Поэтому постоянная составляющая тока проходит только через ветвь с сопротивлением R и сразу замыкается на индуктивность L . Ток в сопротивлении R , включенном параллельно L и C , нет. Таким образом,

$$I_0 = \frac{U_0}{R} = \frac{157}{5} = 31,4 \text{ А.}$$

2. Определим комплексные токи первой и третьей гармоник.

2.1. Первая гармоника ($f = 50$ Гц), $u_1 = 200 \sin \omega t$ В, $R = 5$ Ом.

Реактивные сопротивления для первой гармоники:

$$X_L(\omega) = \omega L = 2\pi f L = 2\pi \cdot 50 \cdot 3,34 \cdot 10^{-3} = 1,67 \text{ Ом,}$$

$$X_C(\omega) = \frac{1}{\omega C} = \frac{1}{2\pi f C} = \frac{1}{2\pi \cdot 50 \cdot 212 \cdot 10^{-6}} = 15 \text{ Ом.}$$

Комплексное сопротивление цепи $\underline{Z}(\omega) = \underline{Z}_R(\omega) + \underline{Z}_{RLC}(\omega)$, где

$$\underline{Z}_R(\omega) = R; \quad \underline{Z}_{RLC}(\omega) = \frac{1}{\underline{Y}_{RLC}(\omega)}.$$

В свою очередь, проводимость параллельного участка цепи

$$\begin{aligned} \underline{Y}_{RLC}(\omega) &= \frac{1}{R} + \frac{1}{jX_L(\omega)} + \frac{1}{-jX_C(\omega)} = \\ &= \frac{1}{5} + \frac{1}{j1,67} + \frac{1}{-j15} = 0,2 - j0,544 \text{ См.} \end{aligned}$$

Тогда сопротивление параллельного участка цепи

$$\underline{Z}_{RLC}(\omega) = \frac{1}{0,2 - j0,544} = 0,62 + j1,64 \text{ Ом.}$$

Комплексное сопротивление цепи

$$\underline{Z}(\omega) = \underline{Z}_R(\omega) + \underline{Z}_{RLC}(\omega) = 5 + 0,62 + j1,64 = 5,85e^{j16,3^\circ} \text{ Ом.}$$

Комплексный ток определяется как отношение комплексного напряжения к комплексному сопротивлению. Расчет будем вести в амплитудных значениях тока и напряжения:

$$\dot{I}_{m1} = \frac{\dot{U}_{m1}}{\underline{Z}(\omega)} = \frac{200e^{j^\circ}}{5,85e^{j16,3^\circ}} = 17,1e^{-j16,3^\circ} \text{ А.}$$

2.2. Третья гармоника ($f = 150$ Гц).

$$u_3 = 66,7 \sin 3\omega t \text{ В; } R = 5 \text{ Ом; } X_L = (3\omega) = 3X_L(\omega) = 3 \cdot 1,67 = 5 \text{ Ом;}$$

$$X_C(3\omega) = \frac{1}{3} X_C(\omega) = \frac{15}{3} = 5 \text{ Ом.}$$

Расчет можно производить аналогично предыдущему с учетом изменившихся величин реактивных сопротивлений. Однако в данном конкретном случае расчет будет упрощен, если заметить, что на параллельном участке L, C имеет место резонанс токов (индуктивное и емкостное сопротивления одинаковы). Сопротивление этого участка имеет бесконечно большое значение и тока на этом участке не будет. Он протекает только через два следующих друг за другом активных сопротивления. Сдвиг фаз между напряжением и током при этом отсутствует, как в чисто реактивной цепи. Поэтому

$$\dot{I}_{m3} = \frac{\dot{U}_{m3}}{2R} = \frac{66,7e^{j^\circ}}{10} = 6,67e^{j^\circ} \text{ А.}$$

3. Для найденных комплексных амплитуд \dot{I}_{m1} и \dot{I}_{m3} запишем соответствующие мгновенные значения:

$$i_1 = 17,1 \sin(\omega t - 16,3^\circ) \text{ А;}$$

$$i_3 = 6,67 \sin 3\omega t \text{ А.}$$

Методом наложения определим несинусоидальный ток в цепи

$$i = I_0 + i_1 + i_3 = 31,4 + 17,1 \sin(\omega t - 16,3^\circ) + 6,67 \sin 3\omega t \text{ А.}$$

В задачах 5.6—5.15 укажите правильный ответ.

5.6. Мгновенное значение несинусоидального напряжения представлено в виде ряда $u = 4 + 3\sqrt{2}\sin(\omega t + \pi/3) + 1,41\sin(2\omega t + \pi/4)$. Чему равно действующее значение напряжения?

1. 5,1 В. 2. 3 В. 3. 1,41 В. 4. 8 В.

5.7. Известны несинусоидальные ток i и напряжение u на входе цепи:

$$i = 2 + 4\sqrt{2}\sin(\omega t + 20^\circ) + 2\sqrt{2}\sin(2\omega t + 13^\circ) + \sqrt{2}\sin(3\omega t - 17^\circ),$$

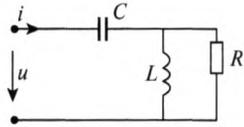
$$u = 2 + 8\sqrt{2}\sin(\omega t + 35^\circ) + 4\sqrt{2}\sin(2\omega t + 63^\circ) + 2\sqrt{2}\sin(3\omega t + 37^\circ).$$

Чему равна полная мощность?

1. 23 В · А. 2. 46 В · А. 3. 0 В · А. 4. 4 В · А.

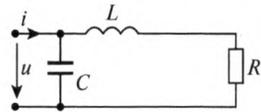
5.8. Для цепи дано $X_L = \omega L = 3$ Ом, $R = 4$, $X_C = 1/\omega C = 4$ Ом; $u = 10 + 5\sqrt{2}\sin\omega t + 2\sqrt{2}\sin 3\omega t$. Определите постоянную составляющую тока на входе цепи.

1. 2,5 А.
2. 0,9 А.
3. 1,4 А.
4. 0 А.



5.9. Для цепи дано $X_L = \omega L = 3$ Ом, $R = 4$ Ом, $X_C = 1/\omega C = 4$ Ом, $u = 10 + 5\sqrt{2}\sin\omega t + 2\sqrt{2}\sin 3\omega t$. Определите постоянную составляющую тока на входе цепи.

1. 2,5 А.
2. 0,9 А.
3. 1,4 А.
4. 0 А.



5.10. Мгновенное значение несинусоидального напряжения представлено в виде ряда $u = 8 + 3\sqrt{2}\sin(\omega t + \pi/3) + 1,41\sin(2\omega t + \pi/4)$. Чему равно действующее значение напряжения?

1. 5,1 В. 2. 3 В. 3. 1,41 В. 4. 8,6 В.

5.11. Чему равна активная мощность в цепи при несинусоидальном токе и напряжении?

1. Сумме постоянной мощности и активных мощностей всех гармоник.
2. Активной мощности первой гармоники.
3. Сумме активных мощностей всех гармоник.
4. Постоянной мощности.

5.12. Известны несинусоидальные ток i и напряжение u на входе цепи:

$$i = \sqrt{2} \sin(\omega t + 20^\circ) + 2\sqrt{2} \sin(2\omega t + 13^\circ) + 2\sqrt{2} \sin(3\omega t - 17^\circ),$$

$$u = 2 + \sqrt{2} \sin(4\omega t + 35^\circ) + 2\sqrt{2} \sin(5\omega t + 63^\circ) + 2\sqrt{2} \sin(6\omega t + 37^\circ).$$

Чему равна полная мощность?

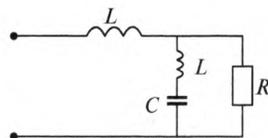
1. $15 \text{ В} \cdot \text{А}$. 2. $9 \text{ В} \cdot \text{А}$. 3. $0 \text{ В} \cdot \text{А}$. 4. $8 \text{ В} \cdot \text{А}$.

5.13. Если ток емкости $i = 2 \sin \omega t + 2 \sin 2\omega t$, то амплитуда первой гармоники напряжения будет больше амплитуды второй гармоники напряжения в...

1. 2 раза. 2. 8 раз. 3. 4 раза. 4. 1,5 раза.

5.14. Чему равно комплексное сопротивление цепи на частоте второй гармоники, если на частоте первой гармоники $R = 10 \text{ Ом}$, $X_L(\omega) = 5 \text{ Ом}$, $X_C(\omega) = 20 \text{ Ом}$?

1. $10e^{j90^\circ}$;
2. ∞ ;
3. $10e^{j45^\circ}$;
4. $35e^{j45^\circ}$.



5.15. Если ток индуктивности $L = 0,1 \text{ Гн}$ $i = 5 \sin(100t + 60^\circ) + 1 \sin(200t + 30^\circ)$, то напряжение на индуктивности u равно...

1. $u = 50 \sin(100t + 150^\circ) + 20 \sin(200t + 120^\circ)$;
2. $u = 50 \sin(100t + 150^\circ) + 10 \sin(200t + 60^\circ)$;
3. $u = 10 \sin(100t - 30^\circ) + 10 \sin(200t + 30^\circ)$;
4. $u = 50 \sin(100t - 30^\circ) + 20 \sin(200t - 60^\circ)$.

ГЛАВА 6

ПЕРЕХОДНЫЕ ПРОЦЕССЫ В ЭЛЕКТРИЧЕСКИХ ЦЕПЯХ

6.1. Основные положения и соотношения

Для учета влияния энергетического состояния цепи на момент коммутации и для записи законов коммутации введем понятие тока $i_L(-0)$ в индуктивности и напряжения $u_C(-0)$ на емкости в последний момент перед коммутацией, а также понятие тока $i_L(+0)$ в индуктивности и напряжения $u_C(+0)$ на емкости в первый момент после коммутации. Напомним, что за момент коммутации принято время $t = 0$. В соответствии с этим законы коммутации можно записать в виде:

- **первый закон коммутации**

$$i_L(-0) = i_L(+0) \quad \text{или} \quad \psi(-0) = \psi(+0); \quad (6.1)$$

- **второй закон коммутации**

$$u_C(-0) = u_C(+0) \quad \text{или} \quad q(-0) = q(+0). \quad (6.2)$$

Заметим, что напряжение на индуктивности и ток в емкости могут изменяться мгновенно.

Если цепь содержит только активные сопротивления, то запасенная энергия электрического и магнитного полей несоизмеримо мала с выделяющейся тепловой энергией в сопротивлениях, что обуславливает отсутствие переходных процессов в таких цепях. При этом ток и напряжения изменяются мгновенно от первоначально установившегося режима до вновь установившегося режима.

Независимыми начальными условиями принимают токи $i_L(-0)$ в индуктивностях и напряжения $u_C(-0)$ на емкостях. В дальнейшем для краткости будем их называть начальными условиями. Если $i_L(-0) = 0$ и $u_C(-0) = 0$, то такие начальные условия называются нулевыми. Следует отметить, что характер переходного процесса зависит от начальных условий.

6.2. Классический метод расчета переходных процессов

Электромагнитные процессы в электрических цепях описываются дифференциальными уравнениями, составленными согласно 1-му и 2-му законам Кирхгофа с использованием уравнений элементов. Порядок дифференциального уравнения определяется тем, сколько в цепи имеется накопителей электрической и магнитной энергии. Если требуется найти ток i_k в k -й ветви, то, исключая последовательно все токи остальных ветвей, можно получить одно дифференциальное уравнение, содержащее только ток i_k и его производные:

$$a_n \frac{d^n i_k}{dt^n} + a_{n-1} \frac{d^{n-1} i_k}{dt^{n-1}} + \dots + a_1 \frac{di_k}{dt} + a_0 i_k = f(t). \quad (6.3)$$

Здесь $a_n, a_{n-1}, \dots, a_1, a_0$ — постоянные коэффициенты, значение которых зависит от конфигурации цепи. Правая часть $f(t)$ содержит в себе заданные ЭДС.

Полный интеграл дифференциального уравнения с правой частью равен сумме частного решения этого уравнения и решения того же уравнения без правой части (однородного).

Частное решение уравнения (6.3) дает нам значение тока при $t = \infty$, т.е. при установившемся режиме, наступившем после коммутации. Характер и величина этой составляющей определяются внешними источниками. Поэтому ее часто называют принужденной составляющей и обозначают как $i_{пр}$. Например, если источники постоянны, то и принужденный ток $i_{пр} = \text{const}$. Если же ЭДС заданы в виде синусоидальных функций, то $i_{пр}$ также будет синусоидальной функцией. Определение $i_{пр}$ является задачей расчета установившегося режима в цепи, способы и методы которых рассматривались в предыдущих главах.

Общее решение определяет электромагнитные процессы, происходящие в цепи при отсутствии внешних источников энергии, за счет запаса энергии в индуктивностях и емкостях, который был в начальный момент времени.

Так как в реальных цепях всегда имеет место рассеяние энергии (преобразование в тепло), то запас энергии будет со временем исчерпан и электромагнитные процессы в цепи прекратятся.

Из этого следует, что общее решение однородного уравнения должно стремиться к нулю при $t \rightarrow \infty$. Эта составляющая не зависит от источников и поэтому ее часто называют свободной составляющей и обозначают как $i_{св}$. Общее решение однородного дифференциально-

го уравнения n -го порядка, как известно из курса математики в случае простых корней, имеет вид:

$$i_{св} = \sum_{k=1}^N A_k e^{\lambda_k t}, \quad (6.4)$$

где t — время; A_k — постоянные интегрирования, определяемые из начальных условий; λ_k — корень характеристического уравнения

$$a_n \lambda^n + a_{n-1} \lambda^{n-1} + \dots + a_1 \lambda + a_0 = 0. \quad (6.5)$$

Рассмотренный метод расчета переходных процессов называется **классическим**. Обратим внимание, что при составлении дифференциальных уравнений в качестве неизвестных необходимо принимать ток i_L в индуктивности и напряжение u_C на емкости.

6.1. Последовательная цепь R, L (рис. 6.1, а) $R = 100$ Ом и $L = 2$ Гн подключается к постоянному напряжению $U = 100$ В.

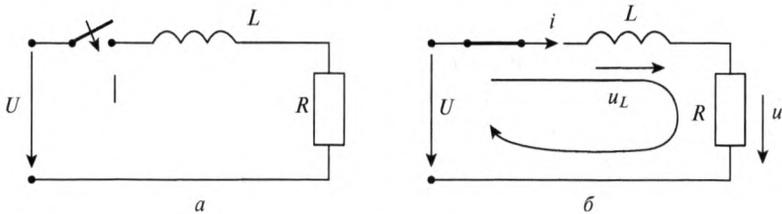


Рис. 6.1

Требуется определить ток и напряжение на индуктивности в переходном процессе и построить графики зависимостей $i_L(t)$, $u_L(t)$.

Решение. 1. Начальное условие ($i_L(t) = 0$) равно нулю, так как цепь до коммутации была отключена (принимается, что это было достаточно длительное время).

2. Изображаем электрическую цепь после коммутации (рис. 6.1, б) и на ней указываем направления токов и напряжений.

3. Для схемы (рис. 6.1, б) составляем уравнение по 2-му закону Кирхгофа:

$$u_L + u_R - U = 0. \quad (6.6)$$

Подставляя уравнения элементов $L di/dt$ и Ri в уравнение (6.6) и учитывая, что для последовательной цепи $i = i_L$, получим:

$$L di/dt + Ri = U. \quad (6.7)$$

Уравнение (6.7) — линейное дифференциальное первого порядка.

4. Решение уравнения (искомый ток переходного процесса) ищем в виде

$$i = i_{\text{пр}} + i_{\text{св}}. \quad (6.8)$$

5. Определяем $i_{\text{пр}}$, который представляет собой установившийся постоянный ток в цепи. Находим его по закону Ома, учитывая при этом, что индуктивное сопротивление при постоянном токе равно нулю:

$$i_{\text{пр}} = U/R = 100/100 = 1 \text{ А.}$$

6. Составляем однородное дифференциальное уравнение

$$L di_{\text{св}}/dt + Ri_{\text{св}} = 0,$$

решением которого будет функция $i_{\text{св}} = Ae^{\lambda t}$.

7. Составляем характеристическое уравнение для определения λ

$$L\lambda + R = 0,$$

корень которого равен $\lambda = -R/L = -100/2 = -50 \text{ с}^{-1}$.

Величина $\tau = |1/\lambda| = 0,02 \text{ с}$ называется постоянной времени цепи и имеет размерность времени.

8. Запишем решение (ток в переходном процессе)

$$i = i_{\text{пр}} + i_{\text{св}} = 1 + Ae^{-50t}. \quad (6.9)$$

9. Согласно 1-му закону коммутации и начальным условиям

$$i_L(-0) = i_L(+0) = i(0) = 0.$$

10. Определим постоянную интегрирования A путем подстановки в уравнение (6.9) $t = 0$ и, учитывая условие п. 9, получим

$$i(0) = \frac{U}{R} + Ae^{-\frac{R}{L} \cdot 0} = 1 + Ae^{-50 \cdot 0}; \quad 0 = 1 + Ae^{-50 \cdot 0}; \quad A = -1.$$

Ток в переходном процессе

$$i = \frac{U}{R} \left(1 - e^{-\frac{R}{L} t} \right) = 1 - e^{-50t} \text{ А.} \quad (6.10)$$

11. Напряжение на индуктивности можно определить по уравнению

$$u_L = U - u_R = U - Ri = 100 - 100(1 - e^{-50t}) = 100e^{-50t} \text{ В.} \quad (6.11)$$

Графики переходных процессов в соответствии с (6.10, 6.11) представлены на рис. 6.2. Постоянную времени τ можно определить графически.

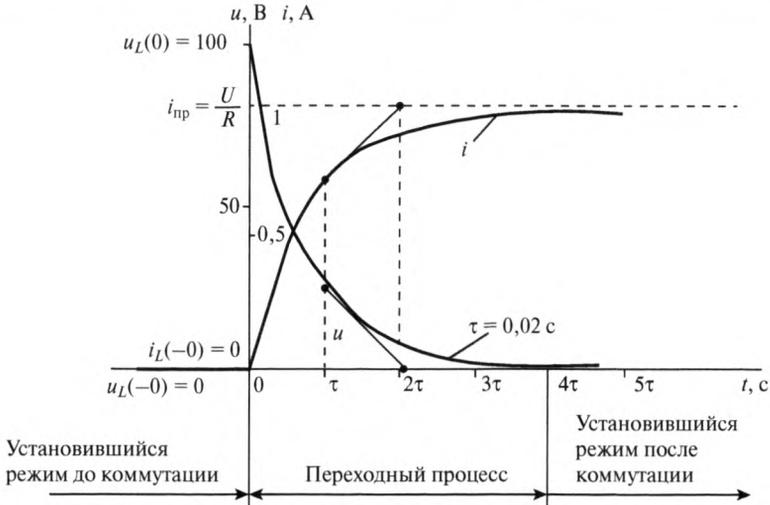


Рис. 6.2

Для этого к любой точке функции i_L проводят касательную, тогда длина подкасательной на оси времени будет равна постоянной времени τ . За длительность переходного процесса принимают время, равное $t = (4 \div 5)\tau$.

6.2. Рассмотрим случай, когда реальная катушка индуктивности, по которой протекал постоянный ток, замыкается накоротко (рис. 6.3, а). Активное сопротивление катушки $R_k = 100$ Ом, $R = 300$ Ом, индуктивность $L = 2$ Гн, $U = 100$ В. Требуется определить ток i_L переходного процесса в индуктивности.

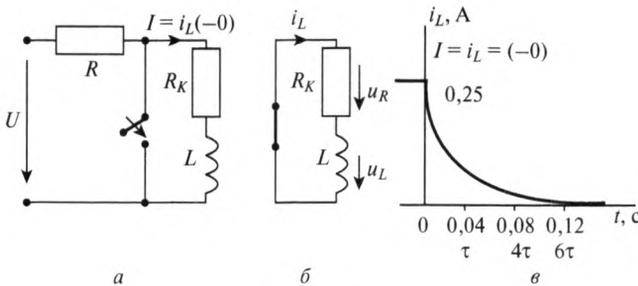


Рис. 6.3

Решение. 1. Определим начальные условия $i_L(-0)$, т.е. установившийся постоянный ток в цепи (рис. 6.3, а) до коммутации:

$$i_L(-0) = \frac{U}{R_1 + R_k} = \frac{100}{300 + 100} = 0,25 \text{ А.}$$

2. Для цепи, образовавшейся после коммутации (рис. 6.3, б), составляем уравнение по 2-му закону Кирхгофа:

$$u_L + u_R = 0.$$

3. Дифференциальное уравнение будет иметь вид:

$$L \frac{di_L}{dt} + R_k i_L = 0.$$

4. Дифференциальное уравнение получили однородным. Поэтому $i_{np} = 0$.

5. Ток переходного процесса равен

$$i_L = i_{Lcb} = Ae^{\lambda t}.$$

6. Характеристическое уравнение будет иметь вид:

$$L\lambda + R_k = 0,$$

где $\lambda = -\frac{R_k}{L} = -\frac{100}{2} = -50 \frac{1}{\text{с}}$; $\tau = \frac{1}{50} = 0,02 \text{ с.}$

7. Согласно 1-му закону коммутации

$$i_L(-0) = i_L(+0) = U/(R_1 + R_k) = 0,25.$$

8. Определим постоянную интегрирования A :

$$i_L(0) = 0,25 = Ae^{-50 \cdot 0}; \quad A = 0,25.$$

Следовательно, ток i_L в катушке равен

$$i_L = \frac{U}{R_1 + R_k} e^{\lambda t} = 0,25e^{-50t}.$$

На рисунке 6.3, в приведен график зависимости $i_L(t)$.

Проверим энергетические соотношения в цепи. До начала переходного процесса в магнитном поле индуктивности была запасена энергия

$$W_M = \frac{Li_L^2(-0)}{2} = \frac{2 \cdot 0,25^2}{2} = 0,0625 \text{ Дж.}$$

Энергия, преобразованная за время переходного процесса в тепловую, равна:

$$\int_0^{\infty} i_L^2 R_k dt = R_k i_L^2(-0) \int_0^{\infty} e^{-\frac{2R_k t}{L}} dt = \frac{R_k i_L^2(-0) L}{2R_k} = \frac{Li_L^2(-0)}{2} = 0,0625 \text{ Дж.}$$

Таким образом, весь запас энергии магнитного поля перешел в тепловую энергию в сопротивлении R_k .

6.3. Цепь (рис. 6.4, а), состоящая из последовательно соединенных сопротивления $R = 1000$ Ом и емкости $C = 200$ мкФ, в некоторый момент времени подключается к постоянному напряжению $U = 60$ В. Требуется определить ток и напряжение емкости в переходном процессе и построить графики $u_C(t)$, $i(t)$.

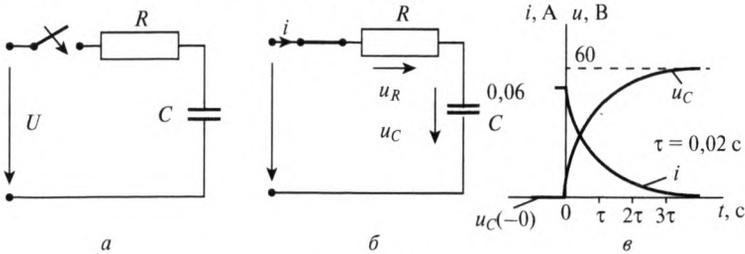


Рис. 6.4

Решение. 1. Определяем начальные условия. Начальное условие $u_C(-0) = 0$, так как цепь до коммутации была отключена (полагаем, достаточно длительное время).

2. Изображаем электрическую цепь после коммутации (рис. 6.4, б), указываем направления тока и напряжений и для нее составляем уравнение по 2-му закону Кирхгофа:

$$u_R + u_C - U = 0 \quad \text{или} \quad Ri + u_C = U.$$

3. Преобразуем уравнение п. 2 в дифференциальное. Для этого, подставив вместо тока i известное уравнение $i = Cdu_C/dt$, получим:

$$RC \frac{du_C}{dt} + u_C = U.$$

4. Решение уравнения (искомое напряжение на емкости) ищем в виде:

$$u_C = u_{Cпр} + u_{Cсв}.$$

5. Определяем $u_{Cпр}$. Так как в цепи постоянного тока в установившемся режиме сопротивление емкости равно бесконечности (при этом $Ri = 0$), то все напряжение будет приложено к емкости. Поэтому

$$u_{Cпр} = U = 60 \text{ В}.$$

6. Составляем однородное дифференциальное уравнение

$$RC \frac{du_{Cсв}}{dt} + u_{Cсв} = 0,$$

решением которого будет функция $u_{Cсв} = Ae^{\lambda t}$.

7. Составляем характеристическое уравнение $RC\lambda + 1 = 0$, корень которого равен $\lambda = -\frac{1}{RC} = -\frac{1}{10^3 \cdot 2 \cdot 10^{-4}} = -5 \frac{1}{c}$.

Постоянная времени $\tau = \left| \frac{1}{\lambda} \right| = RC = \frac{1}{5} = 0,2 c$.

8. Запишем решение $u_C(t) = u_{Cпр} + u_{Cсв} = U + Ae^{\lambda t}$.

9. Согласно 2-му закону коммутации и начальным условиям

$$u_C(-0) = u_C(+0) = u_C(0) = 0.$$

10. Определим постоянную интегрирования A путем подстановки $t = 0$ в уравнение п. 8

$$u_C(0) = U + A; \quad A = -U.$$

Напряжение на емкости в переходном процессе

$$u_C = U - Ue^{\lambda t} = U(1 - e^{\lambda t}) = 60(1 - e^{-5t}) \text{ В.}$$

11. Ток в цепи можно определить по уравнению $i = C \frac{du_C}{dt}$ или по уравнению п. 2

$$i = \frac{U - u_C}{R} = \frac{U - U(1 - e^{\lambda t})}{R} = \frac{U}{R} e^{\lambda t} = 0,06e^{-5t} \text{ А.}$$

Графики $u_C(t)$ и $i(t)$ представлены на рис. 6.4, в.

6.4. В цепи (рис. 6.5, а) происходит замыкание. Известны: $R_1 = 100 \text{ Ом}$, $R_2 = 3 \text{ Ом}$, $C = 200 \text{ мкФ}$, постоянное напряжение $U = 60 \text{ В}$. Требуется определить напряжение u_C при переходном процессе.

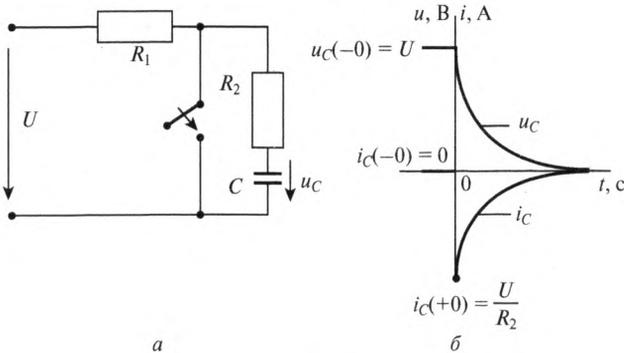


Рис. 6.5

Решение. Задачу можно решить, используя свойства дуальности соотношений:

$$u_L = L \frac{di}{dt} \quad \text{и} \quad i_C = C \frac{du_C}{dt}.$$

Дифференциальные уравнения, описывающие переходные процессы в цепи R, L и дуальной цепи R, C , будут также дуальны. Например, при включении цепи R, L (рис. 6.3, *a*) и цепи R, C (рис. 6.5, *a*) на постоянное напряжение были получены дуальные уравнения и соответственно их дуальные решения:

$$\begin{aligned} L \frac{di_L}{dt} + Ri_L &= U; & i_L &= \frac{U}{R}(1 - e^{-\lambda t}); \\ RC \frac{du_C}{dt} + u_C &= U; & u_C &= U(1 - e^{-\lambda t}). \end{aligned}$$

Поэтому, воспользовавшись результатами при расчете переходного процесса цепи R, L для случая короткого замыкания и свойством дальности, запишем напряжение u_C на емкости для случая короткого замыкания в виде

$$u_C = Ae^{\lambda t}; \quad i_C = \frac{U}{R_2} e^{\lambda t},$$

где $A = U$; $\lambda = -1/R_2C$.

Указанные выражения для A и λ студентам предлагается вывести самостоятельно. Графики зависимостей $u_C(t)$ и $i_C(t)$ представлены на рис. 6.5, *б*.

Проверим энергетические соотношения. До начала переходного процесса в электрическом поле конденсатора была запасена энергия

$W_{\text{э}} = \frac{CU^2}{2}$. Энергия, перешедшая за время переходного процесса в тепловую, равна

$$\int_0^{\infty} i_C^2 R_2 dt = \int_0^{\infty} \frac{U^2}{R_2} e^{-\frac{2t}{R_2C}} dt = -\frac{U^2 C R_2}{2 R_2} e^{-\frac{2t}{R_2C}} \Big|_0^{\infty} = -\frac{CU^2}{2} (0 - 1) = \frac{CU^2}{2}.$$

Таким образом, весь запас энергии электрического поля перешел в тепловую энергию в сопротивление R .

6.5. В цепи, изображенной на рис. 6.6, требуется определить напряжение и токи в переходном процессе. $R_1 = R_2 = 10$ Ом; $C = 10$ мкФ; $U = 20$ В.

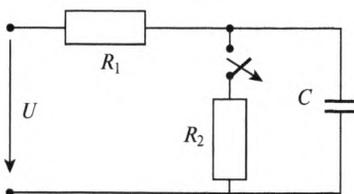


Рис. 6.6

Решение. 1. Определим начальные условия переходного процесса, т.е. $u_C(-0)$:

$$u_C(-0) = \frac{U \cdot R_2}{R_1 + R_2} = 10 \text{ В.}$$

По законам коммутации

$$u_C(-0) = u_C(0) = 10 \text{ В.}$$

2. Составим по 2-му закону Кирхгофа дифференциальное уравнение цепи:

$$u_{R1} + u_C = U; \quad u_{R1} = R_1 i = R_1 C \frac{du_C}{dt}.$$

В результате получим дифференциальное уравнение

$$R_1 C \frac{du_C}{dt} + u_C = U.$$

3. Решение уравнения в общем виде $u_C = u_{Cnp} + u_{Ccb}$, где принужденная составляющая $u_{Cnp} = U$, а свободную составляющую u_{Ccb} определим из однородного уравнения

$$R_1 C \frac{du_{Ccb}}{dt} + u_{Ccb} = 0.$$

в виде: $u_{Ccb} = A \cdot e^{pt}$, где p определим из характеристического уравнения

$$R_1 C p + 1 = 0; \quad p = -\frac{1}{R_1 C} = 10^4 \frac{1}{c}.$$

Постоянную интегрирования A найдем с учетом начального условия $u_C(0) = 10 \text{ В}$. Известно, что $u_C = u_{Cnp} + u_{Ccb} = U + Ae^{pt} = 20 + Ae^{-10^4 t}$, поэтому при $t = 0$ имеем уравнение

$$u_C(0) = 20 + A = 10, \quad A = -10 \text{ В.}$$

В результате получим напряжение и ток переходного процесса:

$$u_C = 20 - 10e^{-10^4 t} \text{ В}; \quad u_{R1} = U - u_C = 10e^{-10^4 t} \text{ В};$$

$$i = \frac{u_{R1}}{R_1} = 1e^{-10^4 t} \text{ А}.$$

Переходной процесс в цепи R, L, C

Рассмотрим особенности переходного процесса в цепи R, L, C (рис. 6.7, а) с нулевыми начальными условиями при подключении ее к постоянному напряжению U .

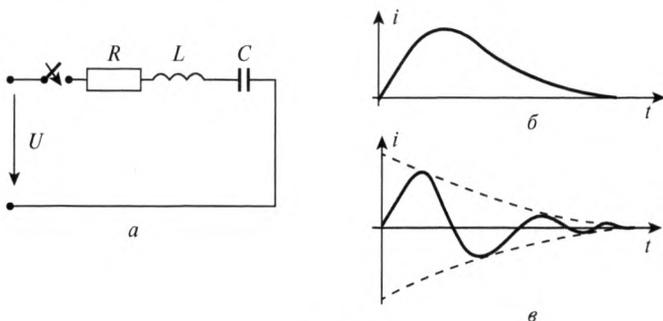


Рис. 6.7

Определим ток переходного процесса, придерживаясь указанного выше алгоритма.

1. В соответствии с исходными данными начальные условия являются нулевыми:

$$i_L(-0) = 0; \quad u_C(-0) = 0. \quad (6.12)$$

2. Выполним коммутацию и составим уравнение по 2-му закону Кирхгофа

$$u_R + u_L + u_C = U. \quad (6.13)$$

3. Преобразуем уравнение (6.13), используя известные соотношения:

$$u_R = Ri; \quad u_L = L \frac{di}{dt}; \quad u_C = \frac{1}{C} \int_0^t i dt + u_C(0);$$

$$Ri + L \frac{di}{dt} + \frac{1}{C} \int_0^t i dt + u_C(0) = U. \quad (6.14)$$

Для того чтобы избавиться от интеграла, продифференцируем обе части уравнения (6.14) и после деления на L получим

$$\frac{d^2 i}{dt^2} + \frac{R}{L} \frac{di}{dt} + \frac{1}{LC} i = 0. \quad (6.15)$$

Уравнение (6.15) — дифференциальное, однородное уравнение второго порядка. Поэтому оно содержит только одну свободную составляющую. Принужденная составляющая $i_{\text{пр}} = 0$. Это следует также из того, что ток установившегося режима после коммутации должен быть равен нулю, так как сопротивление емкости постоянному току равно бесконечности.

4. Решением однородного уравнения (искомый ток i) будет функция, состоящая из суммы двух экспонент:

$$i = i_{\text{св}} = A_1 e^{\lambda_1 t} + A_2 e^{\lambda_2 t}. \quad (6.16)$$

5. Составляем характеристическое уравнение

$$\lambda^2 + \frac{R}{L} \lambda + \frac{1}{LC} = 0, \quad (6.17)$$

корни которого λ_1 и λ_2 равны

$$\lambda_{1,2} = -\frac{R}{2L} \pm \sqrt{\left(\frac{R}{2L}\right)^2 - \frac{1}{LC}} = -\delta \pm \sqrt{\delta^2 - \omega_0^2}, \quad (6.18)$$

где $\delta = -R/2L$, $\omega_0 = 1/LC$.

6. Определим постоянные интегрирования A_1 и A_2 , входящие в уравнение (6.16). Для этого надо составить два уравнения, в которых неизвестными должны быть A_1 и A_2 .

Первое уравнение получим из нулевых начальных условий и закона коммутации, учитывая при этом, что $i_L = i$:

$$i(-0) = i(+0) = 0. \quad (6.19)$$

Подставив $t = 0$ в (6.16) с учетом (6.19), получим первое уравнение

$$A_1 + A_2 = 0.$$

Второе уравнение получим, если продифференцируем (6.16) и примем в нем $t = 0$:

$$\left. \frac{di}{dt} \right|_{t=0} = \lambda_1 A_1 + \lambda_2 A_2. \quad (6.20)$$

Выражение для $\left. \frac{di}{dt} \right|_{t=0}$ можно получить из исходного дифференциального уравнения (6.14)

$$\left. \frac{di}{dt} \right|_{t=0} = \frac{U - Ri(0) - u_C(0)}{L} = \frac{U}{L}, \quad (6.21)$$

так как $i(0) = 0$ и $u_C(-0) = u_C(+0) = 0$.

Второе уравнение для определения A_1 и A_2 примет вид:

$$\frac{U}{L} = \lambda_1 A_1 + \lambda_2 A_2. \quad (6.22)$$

Таким образом, мы имеем систему из двух уравнений с двумя неизвестными A_1 и A_2

$$\begin{cases} A_1 + A_2 = 0; \\ \lambda_1 A_1 + \lambda_2 A_2 = U/L. \end{cases} \quad (6.23)$$

Решение этой системы дает

$$A_1 = \frac{U}{L(\lambda_1 - \lambda_2)}; \quad A_2 = -\frac{U}{L(\lambda_1 - \lambda_2)}. \quad (6.24)$$

7. Искомый ток переходного процесса с учетом (6.24) будет равен:

$$i = A_1 e^{\lambda_1 t} + A_2 e^{\lambda_2 t} = \frac{U}{L(\lambda_1 - \lambda_2)} (e^{\lambda_1 t} - e^{\lambda_2 t}). \quad (6.25)$$

Переходный процесс зависит от корней λ_1 и λ_2 характеристического уравнения (6.17). Рассмотрим два случая:

а) корни вещественные, отрицательные и разные по величине:

$$\lambda_1 = -\delta + \sqrt{\delta^2 - \omega_0^2} < 0; \quad \lambda_2 = -\delta - \sqrt{\delta^2 - \omega_0^2} < 0.$$

Это возможно только при условии

$$\delta > \omega_0 \quad \text{или} \quad \frac{R^2}{4L^2} > \frac{1}{LC}, \quad \text{или} \quad R > 2\sqrt{\frac{L}{C}}.$$

Такой режим называется **апериодическим**. При этом ток приближается к установившемуся значению, меняя свою величину, но не меняя свое направление (рис. 6.7, б);

б) корни λ_1, λ_2 комплексные сопряженные с отрицательной вещественной частью. Это возможно при условии

$$\delta < \omega_0 \quad \text{или} \quad \frac{R^2}{4L^2} < \frac{1}{LC}, \quad \text{или} \quad R < 2\sqrt{\frac{L}{C}}.$$

Такой режим называется **периодическим**, или **колебательным**. Здесь имеет место многократный обмен энергией между индуктивностью и емкостью (рис. 6.7, *в*). Число таких обменов или колебаний в единицу времени называется собственной частотой колебаний, которая не зависит от входного напряжения. При каждом колебании часть энергии будет расходоваться, выделяясь в виде тепла в активном сопротивлении R . Поэтому процесс является затухающим.

6.3. Операторный метод расчета переходных процессов

В операторном методе расчета действительные функции времени t , называемые оригиналами, т.е. функциями времени, заменяют их изображениями, т.е. функциями комплексной переменной p .

Преобразование Лапласа выбрано потому, что оно заменяет операции дифференцирования и интегрирования функций времени простыми алгебраическими операциями над их изображениями.

Преобразование Лапласа

Преобразование Лапласа представляет собой интегральное уравнение, связывающее функцию $f(t)$ действительной переменной времени и функцию $F(p)$ комплексной переменной p :

$$F(p) = \Lambda[f(t)] = \int_0^{\infty} f(t)e^{-pt} dt. \quad (6.26)$$

Это уравнение называется прямым преобразованием Лапласа, в котором Λ является условным обозначением этого преобразования, $p = a + jb$ называется оператором, $f(t)$ — оригиналом, а $F(p)$ — изображением.

Изображение некоторых функций, наиболее часто встречающихся в задачах электротехники, приведены в табл. 6.1.

Таблица 6.1

№	Оригинал	Изображение
1	A	A/p
2	E/t	$1/p^2$
3	$\exp(\alpha t)$	$1/(p - \alpha)$
4	$\exp(-\alpha t)$	$1/(p + \alpha)$
5	$1 - \exp(-\alpha t)$	$\alpha/p(p + \alpha)$

Операторные уравнения и схемы замещения элементов R , L , C **1. Активное сопротивление R .**

Операторное уравнение для активного сопротивления R

$$U(p) = RI(p). \quad (6.27)$$

Схемы, соответствующие уравнениям для мгновенного значения и операторному уравнению (6.27) для активного сопротивления R , представлены на рис. 6.8.

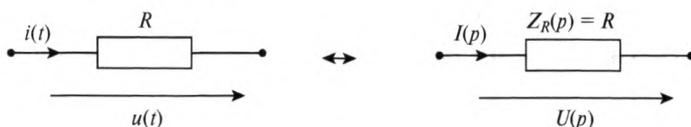


Рис. 6.8

2. Индуктивный элемент L .

Схемы, соответствующие уравнениям для мгновенного значения и операторному уравнению (6.28) для индуктивности R , представлены на рисунке 6.9.

Операторные уравнения для индуктивности:

$$U(p) = pLI(p) - E_L. \quad (6.28)$$

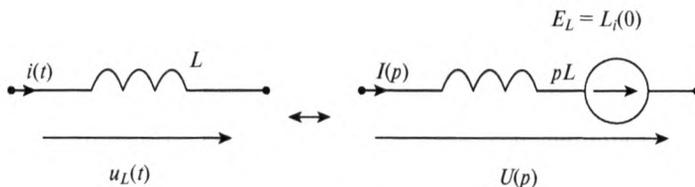


Рис. 6.9

3. Емкостный элемент C .

Операторное уравнение для емкости:

$$U(p) = \frac{I(p)}{pC} - E_C(p), \quad E_C(p) = -\frac{u_C(0)}{p}. \quad (6.29)$$

На рисунке 6.10 представлена схема, соответствующая уравнению для мгновенных значений токов и напряжений и уравнениям (6.29) для операторных токов и напряжений. Величина $1/pC$ называется емкостным операторным сопротивлением; pC — емкостной операторной проводимостью.

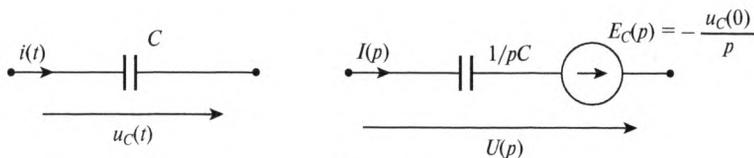


Рис. 6.10

Закон Ома в операторной форме с ненулевыми начальными условиями:

$$U_k(p) = R_k I(p) + pL_k I(p) + \frac{I(p)}{pC_k} - E_{Lk} - E_{Ck}(p). \quad (6.30)$$

1-й закон Кирхгофа в операторной форме:

$$\sum_{k=1}^K I_k(p) = 0. \quad (6.31)$$

2-й закон Кирхгофа в операторной форме:

$$\sum_{k=1}^m I_k(p) Z_k(p) = \sum_{k=1}^n [E_k(0) + E_{Lk} + E_{Ck}(p)],$$

$$Z_k(p) = R_k + pL_k + 1/pC_k. \quad (6.32)$$

Теорема разложения

В большинстве случаев изображение может быть представлено рациональной дробью, например для тока:

$$I(p) = \frac{M(p)}{N(p)} = \frac{a_0 p^m + a_1 p^{m-1} + \dots + a_m}{b_0 p^n + b_1 p^{n-1} + \dots + b_n}. \quad (6.33)$$

Если степень числителя меньше степени знаменателя $m < n$; a_k и b_k — вещественные числа, а корни p_1, p_2, \dots, p_n уравнения $N(p) = 0$ не кратны и не равны корням уравнения $M(p) = 0$, то, как известно из курса математики, оригинал соотношения (6.33) может быть найден по теореме разложения:

$$I(p) = \frac{M(p)}{N(p)} \leftrightarrow i(t) = \sum_{k=1}^n \frac{M(p_k)}{N'(p_k)} e^{p_k t}, \quad (6.34)$$

где p_k — корень уравнения $N(p) = 0$; N' — производная от $N(p)$ по p .

Теорема (6.34) разложения позволяет по изображению в виде рациональной дроби найти оригинал.

6.6. Цепь (рис. 6.1), у которой $R = 10$ Ом и $L = 0,2$ Гн, с нулевыми начальными условиями, включается под постоянное напряжение $U = 100$ В. Найти операторный ток в цепи $I(p)$.

Решение. Согласно закону Ома, в операторной форме при нулевых начальных условиях

$$I(p) = \frac{U(p)}{Z(p)} = \frac{U}{p(R + pL)} = \frac{100}{p(10 + 0,2p)} = \frac{M(p)}{N(p)},$$

где $U(p) = U/p$ — изображение постоянного напряжения; $Z(p) = R + pL = (10 + 0,2p)$.

В этом изображении $n = 2$; $M(p) = 100$; $N(p) = p(10 + 0,2p)$; $N'(p) = 0,4p + 10$; $p_2 = 0$; $p_1 = -200$. В соответствии с теоремой разложения ток в переходном процессе изменяется по закону:

$$i(t) = \frac{100}{0,4p_1 + 10} e^{p_1 t} + \frac{100}{0,4p_2 + 10} e^{p_2 t} = 10 - 1,42e^{-200t}.$$

Включение емкостной цепи под постоянное напряжение

6.7. Смешанная цепь с конденсатором C и двумя резисторами R_1 , R_2 включается под действие постоянного напряжения U . Конденсатор до включения цепи был разряжен, т.е. задано нулевое начальное условие $u_C(0) = 0$ (рис. 6.11, а). Требуется определить токи и напряжения на конденсаторе в переходном режиме.

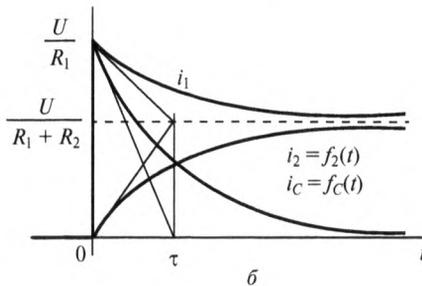
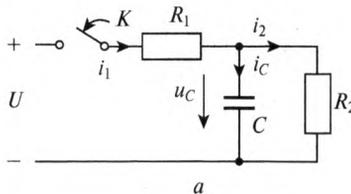


Рис. 6.11

Решение. Операторный ток в неразветвленной части цепи равен:

$$I(p) = \frac{U(p)}{Z(p)} = \frac{\frac{U}{p}}{R_1 + \frac{R_2 \frac{1}{pC}}{R_2 + \frac{1}{pC}}}.$$

Здесь учитывалось, что изображение $U(p)$ постоянного напряжения U представляет собой величину U/p (табл. 6.1), а операторное сопротивление $Z(p)$ цепи определяется способом соединения ее элементов (резистор R_1 включен последовательно с группой параллельно соединенных конденсатора C и резистора R_2).

Выполняя несложные алгебраические преобразования дроби, выражение для операторного тока $I_1(p)$ можно преобразовать к виду

$$\begin{aligned} I_1(p) &= \frac{U}{p} \frac{R_2 + \frac{1}{pC}}{R_1 R_2 + \frac{R_1 + R_2}{pC}} = U \frac{\frac{1}{R_1} + \frac{1}{p R_1 R_2 C}}{p + \frac{R_1 + R_2}{R_1 R_2 C}} \\ &= \frac{U}{R_1} \frac{1}{p + \frac{R_1 + R_2}{R_1 R_2 C}} + \frac{U}{R_1 + R_2} \frac{\frac{R_1 + R_2}{R_1 R_2 C}}{p \left(p + \frac{R_1 + R_2}{R_1 R_2 C} \right)}, \end{aligned}$$

удобному для отыскания оригинала по табл. 6.1. Действительно, вводя обозначение

$$\frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2} C = \tau,$$

для операторного тока получим

$$I_1(p) = \frac{U}{R_1} \frac{1}{p + \frac{1}{\tau}} + \frac{U}{R_1 + R_2} \frac{\frac{1}{\tau}}{p \left(p + \frac{1}{\tau} \right)},$$

чему соответствует ток переходного процесса (позиции 4 и 5 в табл. 6.1)

$$i_1 = f_1(t) = \frac{U}{R_1} \exp\left(-\frac{t}{\tau}\right) + \frac{U}{R_1 + R_2} \left[1 - \exp\left(-\frac{t}{\tau}\right) \right] = f_C(t) + f_2(t).$$

Таким образом, ток i_1 в неразветвленной части цепи при переходном процессе выражается суммой двух экспоненциальных функций с постоянной времени τ , построенных на рис. 6.9, б, т.е. изменяется также по экспоненте от начального значения U/R_1 до установившейся величины $U(R_1 + R_2)$.

Нетрудно показать, что составляющие $f_C(t)$ и $f_2(t)$ этого тока являются соответственно токами i_C и i_2 переходного процесса в конденсаторе и резисторе R_2 . В самом деле, операторный ток конденсатора при нулевых начальных условиях можно представить в виде

$$I_C(p) = \frac{U_C(p)}{\frac{1}{pC}} = pCI_1(p) \frac{R_2 \frac{1}{pC}}{R_2 + \frac{1}{pC}}.$$

Подставляя сюда первое из записанных выражений для $I_1(p)$, имеем:

$$\begin{aligned} I_C(p) &= pC \frac{U}{p} \frac{1}{R_1 + \frac{R_2 \frac{1}{pC}}{R_2 + \frac{1}{pC}}} \frac{R_2 \frac{1}{pC}}{R_2 + \frac{1}{pC}} = \frac{UR_2}{p \left(R_1 R_2 + \frac{R_1 + R_2}{pC} \right)} = \\ &= \frac{U}{R_1} \frac{1}{p + \frac{R_1 + R_2}{R_1 R_2 C}} = \frac{U}{R_1} \frac{1}{p + \frac{1}{\tau}}, \end{aligned}$$

откуда для оригинала i_C тока конденсатора получим:

$$i_C = \frac{U}{R_1} \exp\left(-\frac{t}{\tau}\right) = f_C(t).$$

Принимая во внимание очевидное соотношение

$$i_1 = i_C + i_2,$$

приходим к выводу, что второе слагаемое действительно является током второго резистора

$$i_2 = f_2(t) = \frac{U}{R_1 + R_2} \left[1 - \exp\left(-\frac{t}{\tau}\right) \right].$$

Очевидно, что напряжение u_C на конденсаторе, равное напряжению на резисторе R_2 , при переходном процессе будет изменяться аналогично току i_2 :

$$u_C = u_2 = R_2 i_2 = \frac{UR_2}{R_1 + R_2} \left[1 - \exp\left(-\frac{t}{\tau}\right) \right],$$

то есть кривая $f_2(t)$ на рис. 6.9, б в измененном масштабе может рассматриваться как кривая напряжения u_C на конденсаторе.

6.4. Расчет переходных процессов методом наложения (интеграл Дюамеля)

Для применения этого метода необходимо предварительно рассчитать переходный ток или напряжение исследуемой ветви цепи по заданному постоянному входному напряжению U_0 или току I_0 и найти зависимую от времени переходную функцию $K(t)$, связывающую искомую и заданную величины. Например, при включении цепи r, L на постоянное напряжение ток

$$i = \frac{U_0}{r} \left[1 - \exp\left(-\frac{r}{L}t\right) \right]. \quad (6.35)$$

Следовательно, переходная функция

$$K(t) = \frac{i}{U_0} = \frac{1}{r} \left[1 - \exp\left(-\frac{r}{L}t\right) \right]. \quad (6.36)$$

В данном случае она имеет размерность проводимости и называется переходной проводимостью

$$Y(t) = \frac{1}{r} \left[1 - \exp\left(-\frac{t}{\tau}\right) \right], \quad (6.37)$$

где $\tau = L/r$ — постоянная времени этой цепи.

Для постоянного напряжения, включенного позже на время x , переходная проводимость

$$Y(t-x) = \frac{1}{r} \left[1 - \exp\left(-\frac{t-x}{\tau}\right) \right]. \quad (6.38)$$

Аналогичным образом определяется любая переходная функция $K(t)$. Например, напряжение на индуктивности при включении r, L на постоянное напряжение U_0 и переходная функция соответственно равны:

$$u_L = U_0 \exp\left(-\frac{r}{L}t\right), \quad K(t) = \exp\left(-\frac{r}{L}t\right). \quad (6.39)$$

В этом случае переходная функция безразмерна. Переходная функция в принципе сразу определяет выходную величину, так как дает численное значение (но не размерность!) выходной величины, когда входная (U_0 или I_0) равна единице.

Интеграл Дюамеля имеет вид:

$$i(t) \approx Y(t)u(0) + \int_0^t Y(t-x)u'(x)dx, \quad (6.40)$$

где $u'(x) = \left. \frac{du(t)}{dt} \right|_{t=x}$.

При определении напряжения какой-либо ветви в интеграле Дюамеля вместо переходной проводимости должна стоять соответствующая переходная функция.

6.8. Определить ток при включении цепи r, L на затухающее по показательному закону напряжение $u(t) = U \exp(-t/T)$, где T — постоянная времени, характеризующая скорость затухания $u(t)$.

Решение. Переходные проводимости для этого случая даны выше, а составляющие интеграл Дюамеля равны:

$$u(0) = U, \quad u(x) = U \exp\left(-\frac{x}{T}\right), \quad u'(x) = \frac{du(x)}{dx} = -\frac{U}{T} \exp\left(-\frac{x}{T}\right).$$

После подстановки этих величин в интеграл Дюамеля и интегрирования определяется искомый ток:

$$\begin{aligned} i(t) &= \frac{1}{r} \left[1 - \exp\left(-\frac{t}{\tau}\right) \right] U + \int_0^t \frac{1}{r} \left[1 - \exp\left(-\frac{t-x}{\tau}\right) \right] \left(-\frac{U}{T} \exp\left(-\frac{x}{T}\right) \right) dx = \\ &= \frac{U}{r} \left[1 - \exp\left(-\frac{t}{\tau}\right) \right] - \frac{U}{r\tau} \left[-T \exp\left(-\frac{t}{T}\right) + T - \frac{\exp\left(-\frac{t}{\tau}\right)}{\frac{1}{\tau} - \frac{1}{T}} \left(\exp\left(\frac{t}{\tau} - \frac{t}{T}\right) - 1 \right) \right] = \\ &= \frac{U \left[\exp\left(-\frac{t}{T}\right) - \exp\left(-\frac{t}{\tau}\right) \right]}{r \left(1 - \frac{\tau}{T} \right)}. \end{aligned}$$

В частном случае, когда $\tau = T$, получается неопределенность, которая после раскрытия дает

$$i = \frac{U}{L} t \exp\left(-\frac{r}{L} t\right).$$

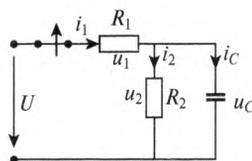
Во всех случаях переходный ток положителен и имеет максимум i_m , определяемый обычным образом. При $\tau = T$

$$i_m = \frac{U}{er}$$

В задачах 6.9—6.17 укажите правильный ответ.

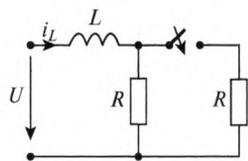
6.9. Определите независимые докоммутационные начальные условия переходного процесса, если $U = 10$ В, $R_1 = R_2 = 5$ Ом, $C = 10$ мкФ.

1. $u_C(-0) = 10$ В.
2. $i_1(-0) = 1$ А.
3. $u_1(-0) = 2,5$ В.
4. $u_C(-0) = 5$ В.



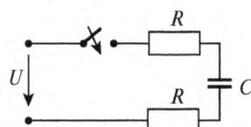
6.10. Определите ток индуктивности после окончания переходного процесса, если $U = 10$ В, $R = 5$ Ом, $L = 0,1$ Гн.

1. 2 А.
2. 0 А.
3. 10 А.
4. 4 А.



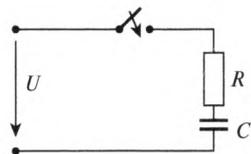
6.11. Характеристическое уравнение имеет вид...

1. $RCp + 1 = 0$.
2. $\frac{RC}{p} + 1 = 0$.
3. $2RCp + 1 = 0$.
4. $\frac{2RC}{p} + 1 = 0$.



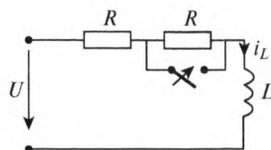
6.12. Постоянная времени переходного процесса τ составит при $R = 2$ Ом, $C = 10$ мкФ...

1. 0,2 с.
2. 20 мкс.
3. 5 мкс.
4. 10 мс.



6.13. В переходном процессе ток индуктивности i_L изменяется согласно выражению...

1. $i = \frac{U}{2R} + \frac{U}{2R} e^{-\frac{R}{L}t}$.
2. $i = \frac{U}{R} - \frac{U}{2R} e^{-\frac{R}{L}t}$.
3. $i = \frac{U}{2R} + \frac{U}{2R} e^{\frac{R}{L}t}$.
4. $i = \frac{U}{2R} - \frac{U}{2R} e^{-\frac{R}{L}t}$.



6.14. Какое операторное изображение соответствует функции $f(t) = Ke^{-\alpha t}$?

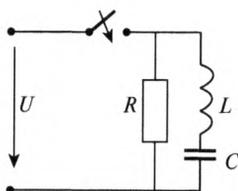
1. $\frac{K}{p(p+\alpha)}$. 2. $\frac{K}{p-\alpha}$.

3. $2K(p-\alpha)$. 4. $\frac{K}{p+\alpha}$.

6.15. Запишите операторное сопротивление $z(p)$ для схемы.

1. $\frac{1}{pc} + \frac{RpL}{pL+R}$. 2. $R + pL - \frac{1}{pc}$.

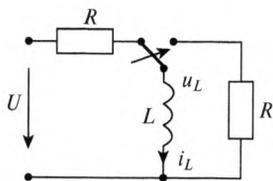
3. $\frac{R \cdot \left(pL + \frac{1}{pc} \right)}{R + pL + \frac{1}{pc}}$. 4. $R + pL + \frac{1}{pc}$.



6.16. Определите операторную ЭДС индуктивности $E_L(p)$ для цепи с параметрами $U = 10$ В, $R = 5$ Ом, $L = 0,2$ Гн.

1. $E_L(p) = 2$. 2. $E_L(p) = \frac{10}{p}$.

3. $E_L(p) = 0,4$. 4. $E_L(p) = \frac{5}{p}$.



6.17. При включении цепи r, L на постоянное напряжение U_0 переходная функция $K(t)$ этой цепи равна...

1. $K(t) = \frac{L}{r}$. 2. $K(t) = \frac{i}{U_0}$. 3. $K(t) = U_0 i$. 4. $K(t) = \frac{r}{L}$.

НЕЛИНЕЙНЫЕ ЭЛЕКТРИЧЕСКИЕ И МАГНИТНЫЕ ЦЕПИ ПРИ ПОСТОЯННОМ ТОКЕ

7.1. Нелинейные электрические цепи при постоянном токе

Различают два типа вольт-амперных характеристик (ВАХ) — статические и динамические. Статическими называют характеристики, в которых каждая точка дает значение постоянного напряжения при соответствующем значении постоянного тока. Динамические характеристики получают при достаточно быстрых изменениях тока.

По статическим характеристикам определяют статические и дифференциальные сопротивления нелинейных элементов (НЭ):

- **нелинейные сопротивления**

$$R_{СТ} = \frac{u}{i}, \quad R_{диф} = \frac{du}{di}. \quad (7.1)$$

По динамическим ВАХ определяют динамическое сопротивление:

$$R_d = \lim_{\Delta i \rightarrow 0} \frac{\Delta u}{\Delta i} = \frac{du}{di}; \quad (7.2)$$

- **индуктивность.** Характеристикой катушки индуктивности является зависимость $\psi(i)$, выражающая связь потокосцепления самоиндукции ψ и тока i в катушке. Эта характеристика называется вебер-амперной.

Динамическая характеристика отличается от статической из-за магнитной вязкости и вихревых токов. Из статической характеристики определяют статическую индуктивность: $L_{СТ} = \psi/i$; из динамической — динамическую индуктивность: $L_d = d\psi/di$;

- **нелинейная емкость.** Характеристикой конденсатора $q(u)$ является кулонвольтная. Аналогично нелинейным сопротивлению и индуктивности вводят понятия статической и динамической емкости:

$$C_{CT} = \frac{q}{u}, \quad C_d = \frac{dq}{du}. \quad (7.3)$$

Аналитический метод расчета

Для аналитических расчетов нелинейных цепей характеристики элементов представлены аналитическими выражениями. Процесс замены нелинейной характеристики, заданной графиком или таблицей, приближенным математическим выражением называется аппроксимацией.

Наиболее распространенной является аппроксимация нелинейных характеристик полиномом:

$$y(x) = \alpha_0 + \alpha_1 x + \alpha_2 x^2 + \alpha_3 x^3 + \dots + \alpha_n x^n. \quad (7.4)$$

Если вольтамперные характеристики нелинейных элементов цепи постоянного тока заданы графическими зависимостями, то расчет такой цепи выполняется графическими методами. Расчет таких цепей производится с использованием законов Кирхгофа.

Рассмотрим цепь (рис. 7.1, а) с последовательным соединением нелинейных элементов $U_1(I)$ и $U_2(I)$ (приведены на рис. 7.1, б в виде кривых 1 и 2).

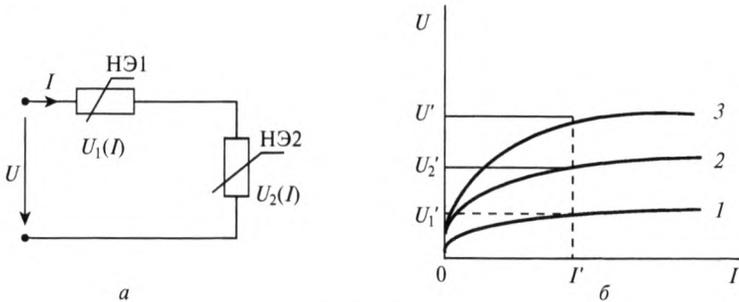


Рис. 7.1

Согласно 2-му закону Кирхгофа

$$U = U_1(I) + U_2(I),$$

где U — приложенное напряжение; $U_1(I)$ и $U_2(I)$ — напряжения на первом и втором нелинейных элементах.

Элементы соединены последовательно, и в них протекает одинаковый ток I . Поэтому результирующая вольтамперная характеристика нелинейной цепи $U(I)$ определяется кривой 3 на рис. 7.1, б. Она полу-

чена в результате сложения ординат кривых 1 и 2 при одних и тех же значениях тока.

По характеристике $U(I)$ находим значение тока I' в цепи при заданном значении приложенного напряжения U' . По этому значению тока определяем падения напряжения U'_1 и U'_2 на первом и втором элементах по кривым U_1 .

Параллельное соединение резистивных элементов. Если элементы соединены параллельно (рис. 7.2, а) и заданы их вольтамперные характеристики $I_1(U)$ и $I_2(U)$ кривыми 1 и 2 (рис. 7.2, б), то в этой цепи по 1-му закону Кирхгофа

$$I = I_1(U) + I_2(U).$$

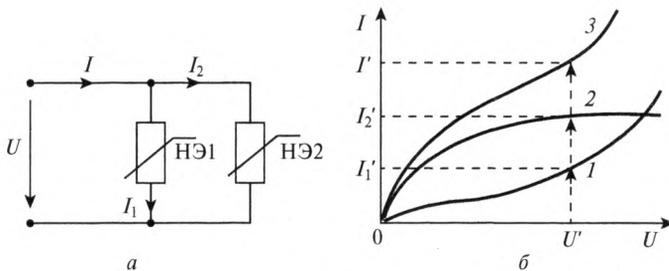


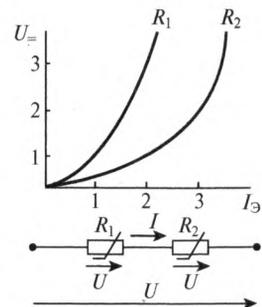
Рис. 7.2

Напряжения на первом и втором элементах одинаковы и равны U . Поэтому вольтамперную характеристику цепи (рис. 7.4, б) $I(U)$ (кривая 3) можно получить, суммируя токи (ординаты кривых) при одинаковых значениях U . По кривой $I(U)$ определим значение тока I' при заданном U' , а по кривым $I_1(U)$ и $I_2(U)$ находим токи нелинейных элементов I'_1 и I'_2 .

В задачах 7.1—7.3 укажите правильный ответ.

7.1. При последовательном соединении заданы вольтамперные характеристики нелинейных сопротивлений. При токе $I = 2$ А напряжение U составит...

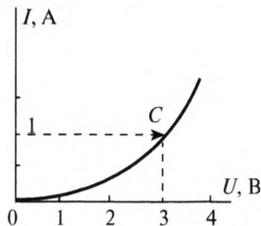
1. 2 В.
2. 4 В.
3. 3 В.
4. 1 В.



7.2. Определите величину статического сопротивления в точке C.

Дано: $I = 1$ А.

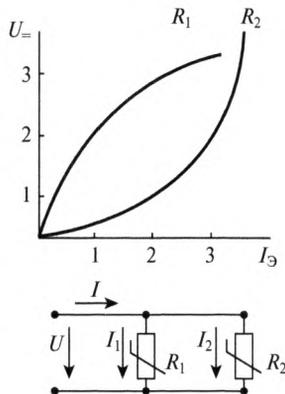
1. 6.
2. 0,66.
3. 2.
4. 3.



7.3. При параллельном соединении заданы вольтамперные характеристики нелинейных сопротивлений R_1 и R_2 . При напряжении $U = 2$ В сила тока I составит...

1. 3 А.
2. 1 А.
3. 2 А.
4. 4 А.

Если вольтамперные характеристики элементов заданы аналитическим выражением, то применяются аналитические методы расчета нелинейных цепей. Такой расчет содержит следующие этапы.



1. Задание характеристик нелинейных элементов аналитическими выражениями.

2. Запись системы уравнений цепи по законам Кирхгофа.

3. Аналитическое или численное решение системы уравнений.

7.4. Для цепи, изображенной на рис. 7.3, рассчитать напряжения и токи на участках цепи, если $R_1 = 2$ Ом; $R_2 = 1$ Ом; $E = 11$ В; $J = 0,5$ А, а характеристика нелинейного элемента задана выражением $U(I) = aI + bI^2$, где $a = 1$ Ом; $b = 2$ Ом · А⁻¹.

Решение. 1. Преобразуем источник тока J , R_1 в эквивалентный источник напряжения, где значение эквивалентной ЭДС составляет

$$E_1 = J \cdot R_1 = 1 \text{ В.}$$

2. Для преобразованной электрической цепи (рис. 7.3) запишем систему уравнений по законам Кирхгофа

$$\begin{cases} U(I) + R_1 I_1 = E + E_1; \\ R_1 I_1 - R_2 I_2 = E_1; \\ I - I_1 - I_2 = 0. \end{cases}$$

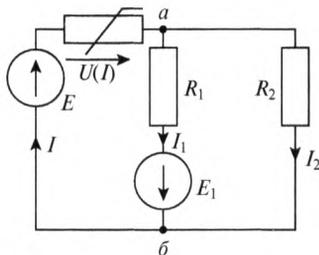


Рис. 7.3

3. Нелинейная характеристика задана в виде $U(I)$, поэтому выразим ток I_1 в первом уравнении системы через ток I . Из третьего уравнения системы

$$I_2 = I - I_1.$$

Подставляя I_2 во второе уравнение, выразим I_1 через I :

$$I_1 = \frac{E_1 + R_2 I}{R_1 + R_2}.$$

Подставим выражение для I_1 и нелинейную зависимость $U(I) = aI + bI^2$ в первое уравнение и получим квадратное уравнение относительно тока I

$$bI^2 + \left(a + \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2} \right) I + \frac{R_1 E_1}{R_1 + R_2} - E - E_1 = 0,$$

которое после подстановки исходных данных принимает вид $6I^2 + 5I - 34 = 0$.

4. Решение этого уравнения $I = 2$ А; $I = -2,8$ А, причем решение $I = -2,8$ не удовлетворяет условиям $I \geq 0$ и поэтому не имеет физического смысла.

5. В результате токи и напряжения в цепи равны:

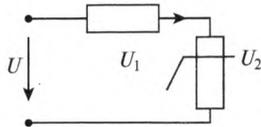
$$I = 2 \text{ А}; \quad U = aI + bI^2 = 10 \text{ В}; \quad U_{\text{аб}} = E - U = 1 \text{ В};$$

$$I_2 = \frac{U_{\text{аб}}}{R_2} = 1 \text{ А}; \quad I_1 = \frac{U_{\text{аб}} + E_1}{R_1} = 1 \text{ А}.$$

В задачах 7.5—7.8 укажите правильный ответ.

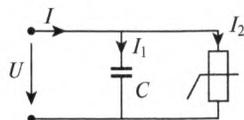
7.5. Дано: $U = 12$ В; $R = 2$ Ом; $U_{\text{НЭ}} = 4I + 6I^2$. Определить ток цепи I , А.

1. 1.
2. 2.
3. 5 А.
4. 0,04 А.



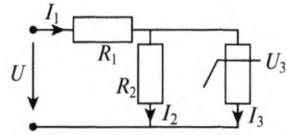
7.6. Найдите постоянный ток I , если $C = 1$ мкФ, $I_2(U) = 0,04U^2$, а величина $U = 5$ В.

1. 1 А.
2. 2 А.
3. 3 А.
4. 4 А.



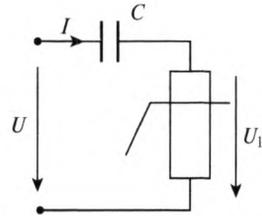
7.7. Найдите I_1 , если $R_1 = R_2 = 5 \text{ Ом}$, $I_2 = 2 \text{ А}$, а $I_3(U_3) = 0,01 U_3^2$.

1. 1 А.
2. 2 А.
3. 3 А.
4. 0,04 А.



7.8. Найдите постоянный ток I , если $U = 10 \text{ В}$, $C = 10 \text{ мкФ}$, а $U_1(I) = 2,5I^2$.

1. 0 А.
2. 15 А.
3. 2 А.
4. 10 А.



7.2. Магнитные цепи при постоянном токе

Основными уравнениями магнитного поля постоянных токов являются:

закон полного тока

$$\oint_l \overline{H} dl = I \quad (7.5)$$

и принцип непрерывности магнитного потока

$$\oint_S \overline{B} d\overline{S} = 0. \quad (7.6)$$

В общем случае для участка магнитной цепи

$$F = \sum_{k=1}^n w_k I_k, \quad (7.7)$$

где F — по аналогии с электродвижущей силой в электрических цепях называется магнитодвижущей силой.

Магнитный поток Φ аналогичен току I в электрических цепях и может быть вычислен на любом участке магнитной цепи как

$$\Phi = \int_S \overline{B} d\overline{S} \cong B \cdot S = \mu HS, \quad (7.8)$$

где B — магнитная индукция; S — сечение магнитопровода; H — напряженность магнитного поля; μ — магнитная проницаемость материала, в котором распространяется магнитный поток.

Отношение магнитодвижущей силы (МДС), равной интегралу напряженности магнитного поля вдоль всей цепи $\oint_l \vec{H} d\vec{l}$ к магнитному потоку Φ , называется магнитным сопротивлением всей цепи:

$$R_M = \frac{F}{\Phi} = \frac{wI}{\Phi}. \quad (7.9)$$

Такой подход дает возможность записать закон магнитной цепи, связывающий МДС с магнитным потоком:

$$\Phi = \frac{F}{R_M} = \frac{wI}{R_M}, \quad (7.10)$$

который аналогичен закону Ома для замкнутой цепи при постоянном токе:

$$I = E/R.$$

2-й закон Кирхгофа для любого контура магнитной цепи

$$\sum_{k=1}^n U_{Mk} = \sum_{k=1}^n w_k I_k, \quad (7.11)$$

где U_{Mk} — магнитное напряжение участка цепи.

Для любого участка магнитные напряжение и сопротивление составляют

$$U_{mk} = \Phi_k R_{mk}, \quad R_{mk} = \frac{l_k}{\mu_k \cdot S_k}. \quad (7.12)$$

7.9. Какова должна быть величина тока в обмотке электромагнита (рис. 7.4, а) для создания силы притяжения $f = 2000$ Н? Число витков обмотки $w = 628$.

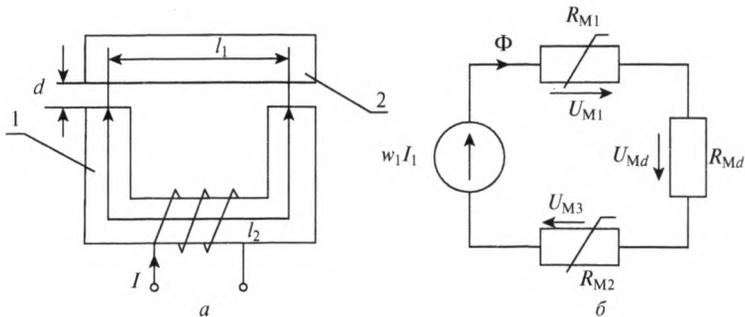


Рис. 7.4

Электромагнит состоит из сердечника (поз. 1, рис. 7.4, а) и ярма (поз. 2, рис. 7.4, а). Параметры магнитопровода: $\ell_1 = 0,25$ м, $\ell_2 = 0,6$ м. Сечения магнитопровода, ярма и сердечника одинаковы: $S_1 = S_2 = S = 25 \cdot 10^{-4}$ м². Величина зазора $d = 0,001$ м.

Кривые намагничивания материала сердечника (кривая 1) и ярма (кривая 2) приведены на рис. 7.5.

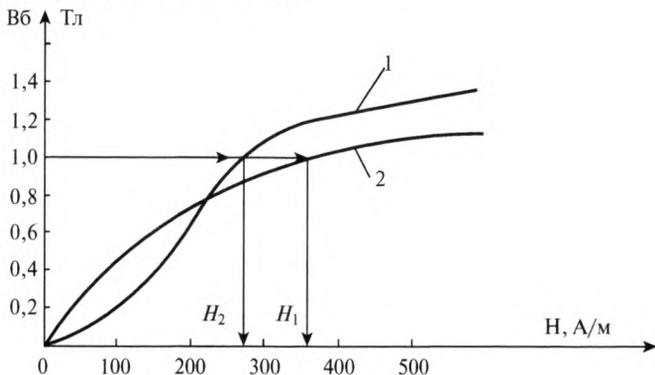


Рис. 7.5

Решение. Сила притяжения, создаваемая электромагнитом, зависит от величины магнитного потока в зазоре и сечения зазора S_d :

$$f = \frac{\Phi^2}{2\mu_0 S_d},$$

поэтому можно найти величину магнитного потока, необходимого для создания этой силы:

$$\Phi = \sqrt{f \cdot 2\mu_0 \cdot S_d} = \sqrt{2000 \cdot 2 \cdot 1,257 \cdot 10^{-6} \cdot 25 \cdot 10^{-4}} = 25 \cdot 10^{-4} \text{ Вб.}$$

Схема замещения магнитной цепи изображена на рис. 7.4, б, где R_{M1} — магнитное сопротивление сердечника; R_{M2} — магнитное сопротивление ярма, $R_{M\Delta}$ — магнитное сопротивление двух зазоров. По 2-му закону Кирхгофа для магнитной цепи МДС равна сумме магнитных напряжений участков:

$$F = wI = U_{M1} + U_{M2} + U_{M\Delta} = H_1 \ell_1 + H_2 \ell_2 + H_{\Delta} \cdot 2d.$$

Площади сечения сердечника, ярма и зазора одинаковы, поэтому магнитная индукция на всех участках

$$B_1 = B_2 = B_{\delta} = \frac{\Phi}{S} = \frac{25 \cdot 10^{-4}}{25 \cdot 10^{-4}} = 1 \text{ Тл.}$$

По кривым намагничивания (рис. 7.5) для сердечника и ярма определим напряженности магнитного поля: $H_1 = 375 \text{ А/м}$, $H_2 = 275 \text{ А/м}$.

Напряженность магнитного поля в зазоре равна

$$H_d = \frac{B}{\mu_0} = \frac{1}{1,257 \cdot 10^{-6}} = 795\,545 \text{ А/м}.$$

В результате необходимая МДС вычисляется как

$$F = H_1 \ell_1 + H_2 \ell_2 + H_d \cdot 2d = 375 \cdot 0,25 + 275 \cdot 0,6 + 795\,545 \cdot 2 \cdot 10^{-3} = 1860 \text{ А},$$

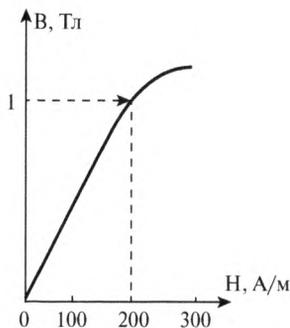
а ток в обмотке электромагнита, необходимый для создания силы в 2000 Н, равен

$$I = \frac{F}{w} = \frac{1860}{628} = 3 \text{ А}.$$

В задачах 7.10—7.14 укажите правильный ответ.

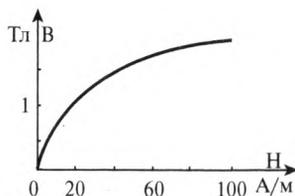
7.10. Дано: кривая намагничивания, длина l замкнутого магнитопровода 20 см, индукция B сердечника 1 Тл. Определить МДС.

1. 40.
2. 4000.
3. 1000.
4. 10.



7.11. Если заданы величина МДС $F = 20 \text{ А}$, длина средней линии $l_{\text{фер}} = 0,5 \text{ м}$, площадь поперечного сечения $S = 10 \cdot 10^{-4} \text{ м}^2$ магнитопровода и основная кривая намагничивания материала сердечника, то магнитный поток Φ составит...

1. 0,005 Вб.
2. 0,002 Вб.
3. 0,0024 Вб.
4. 0,0015 Вб.



7.12. Найдите магнитное сопротивление R_M , если длина магнитного провода $l = 0,1 \text{ м}$, напряженность магнитного поля $H = 400 \text{ А/м}$, а величина магнитного потока $\Phi = 0,02 \text{ Вб}$.

1. 2000 А/Вб.
2. 100 А/Вб.
3. 8 А/Вб.
4. 200 А/Вб.

7.13. Дано: катушка индуктивности, у которой напряженность магнитного поля $H = 400$ А /м, длина замкнутого магнитопровода $l = 0,4$ м, постоянный ток через обмотку 2 А. Определить число витков обмотки катушки.

1. 800. 2. 800. 3. 200. 4. 300.

7.14. Какой закон лежит в основе 2-го закона для магнитных цепей?

1. $\oint_l \overline{H} dl = I$. 2. $\oint_S \overline{B} dS = 0$. 3. $\sum_{K=1}^N I_K = 0$. 4. $u = w \frac{d\Phi}{dt}$.

НЕЛИНЕЙНЫЕ ЦЕПИ ПРИ ПЕРЕМЕННОМ ТОКЕ

8.1. Расчет установившихся процессов в нелинейных цепях при переменном токе

Общим свойством описанных выше инерционных элементов является линейность их характеристик для мгновенных значений установившегося режима.

Однако при изменении установившегося режима комплексные сопротивления нелинейных элементов изменяются, так как для действующих значений их характеристики нелинейны: $R = R(I)$, $L = L(I)$. В результате в комплексных уравнениях модули и аргументы комплексных сопротивлений нелинейных элементов являются функциями токов через эти элементы. Это исключает возможность применения принципа наложения и затрудняет расчет таких цепей.

В связи с этим используются различные приближенные методы расчета, одним из которых является метод эквивалентных синусоид.

Метод эквивалентных синусоид и области его применения

Математический аппарат метода. Принятые допущения дают возможность считать нелинейные элементы условно инерционными, т.е. линейными для мгновенных значений эквивалентной синусоиды. В результате этого применим комплексный метод расчета. Однако, как и в цепях с инерционными элементами, сопротивления нелинейных участков зависят от действующего значения тока.

Сущность метода. Несинусоидальные напряжения и токи исследуемой цепи заменяются эквивалентными синусоидальными u_s и i_s , причем действующие значения реальных напряжений и токов и их эквивалентных синусоид равны. В некоторых случаях эквивалентные синусоиды принимаются равными первым гармоникам реальных напряжений и токов.

Рассмотрим метод расчета цепей с инерционными элементами на примере цепи, изображенной на рис. 8.1. Эта цепь содержит источ-

ник синусоидального напряжения \dot{E} , линейные сопротивления Z_1 , Z_2 и нелинейное инерционное сопротивление с характеристикой относительно действующих значений вида $U_{нэ} = \alpha I_3^3$. По законам Кирхгофа запишем систему уравнений

$$\begin{cases} \dot{I}_1 - \dot{I}_2 - \dot{I}_3 = 0; \\ Z_1 \dot{I}_1 + Z_2 \dot{I}_2 = \dot{E}; \\ Z_1 \dot{I}_1 + U_{нэ} = \dot{E}. \end{cases} \quad (8.1)$$

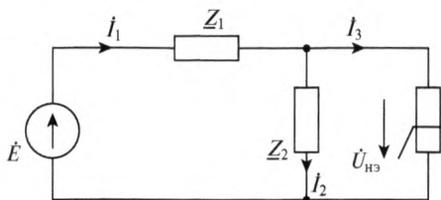


Рис. 8.1

По вольтамперной характеристике $U_{нэ} = \alpha I_3^3$ определим выражение для нелинейного активного сопротивления $R(I_3)$:

$$R(I_3) = \frac{U_{нэ}}{I_3} = \frac{\alpha I_3^3}{I_3} = \alpha I_3^2. \quad (8.2)$$

В результате получим

$$\dot{U}_{нэ} = R(I_3) \dot{I}_3 = (\alpha I_3^2) \dot{I}_3. \quad (8.3)$$

Подставив (8.3) в (8.1), запишем нелинейную систему комплексных уравнений, описывающих процессы в цепи с инерционным сопротивлением

$$\begin{cases} \dot{I}_1 - \dot{I}_2 - \dot{I}_3 = 0; \\ Z_1 \dot{I}_1 + Z_2 \dot{I}_2 = \dot{E}; \\ Z_1 \dot{I}_1 + (\alpha I_3^2) \dot{I}_3 = \dot{E}. \end{cases} \quad (8.4)$$

Сложность решения этой системы уравнений заключается в том, что коэффициент при комплексном токе \dot{I}_3 в третьем уравнении, равный αI_3^2 , зависит от модуля этого тока. Поэтому, предварительно выделив действительные и мнимые части уравнений системы, получим систему нелинейных алгебраических уравнений

$$\begin{cases} \operatorname{Re}[\dot{I}_1 - \dot{I}_2 - \dot{I}_3] = 0; \\ \operatorname{Re}[\underline{Z}_1 \dot{I}_1 + \underline{Z}_2 \dot{I}_2] = \operatorname{Re}[\dot{E}]; \\ \operatorname{Re}[\underline{Z}_1 \dot{I}_1 + (\alpha I_3^2) \dot{I}_3] = \operatorname{Re}[\dot{E}]; \\ \operatorname{Im}[\dot{I}_1 - \dot{I}_2 - \dot{I}_3] = 0; \\ \operatorname{Im}[\underline{Z}_1 \dot{I}_1 + \underline{Z}_2 \dot{I}_2] = \operatorname{Im}[\dot{E}]; \\ \operatorname{Im}[\underline{Z}_1 \dot{I}_1 + (\alpha I_3^2) \dot{I}_3] = \operatorname{Im}[\dot{E}], \end{cases} \quad (8.5)$$

которая может быть решена методом итераций или Ньютона. В результате найдем действительные и мнимые составляющие комплексных токов и вычислим $\dot{I}_1, \dot{I}_2, \dot{I}_3$.

8.1. Определить комплексный \dot{I} и мгновенный i токи в цепи (рис. 8.2) с нелинейным инерционным сопротивлением. Комплексное напряжение $\dot{U} = 10e^{j30^\circ}$ В, реактивное сопротивление емкости $X_C = 3$ Ом, вольтамперная характеристика инерционного сопротивления $U_{\text{нэ}}(I) = \alpha I^2$ В, где $\alpha = 2$ Ом/А.

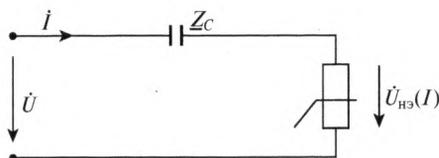


Рис. 8.2

Решение. На основании 2-го закона Кирхгофа запишем комплексное уравнение цепи:

$$\underline{Z}_C \dot{I} + \dot{U}_{\text{нэ}}(I) = \dot{U}.$$

По вольтамперной характеристике определим зависимость нелинейного сопротивления от тока:

$$R(I) = \frac{U_{\text{нэ}}(I)}{I} = \frac{\alpha I^2}{I} = \alpha I$$

и выразим $\dot{U}_{\text{нэ}}$ в виде $\dot{U}_{\text{нэ}}(I) = R(I)\dot{I} = (\alpha I)\dot{I}$. Учитывая, что $\underline{Z}_C = -jX_C$, $\dot{U}_{\text{нэ}}(I) = (\alpha I)\dot{I}$, преобразуем исходное уравнение к виду $[(\alpha I) - jX_C]\dot{I} = \dot{U}$.

Из этого уравнения запишем систему нелинейных уравнений для модулей и аргументов:

$$\begin{cases} \sqrt{(\alpha I)^2 + X_C^2} \cdot I = U; \\ \arctg \frac{-X_C}{\alpha I} + \psi_i = \psi_u, \end{cases}$$

решение которых позволит определить действующее значение I и начальную фазу ψ_i искомого тока.

Из первого уравнения системы найдем I . Для этого возведем в квадрат правую и левую части уравнения, преобразуем его к виду

$$I^4 + \frac{X_C^2}{\alpha^2} I^2 - \frac{U^2}{\alpha^2} = 0$$

и вычислим I^2 :

$$I^2 = \frac{-X_C}{2\alpha^2} \pm \sqrt{\left(\frac{X_C}{2\alpha^2}\right)^2 + \frac{U^2}{\alpha^2}} = -\frac{9}{8} \pm \frac{41}{8}.$$

Отрицательный корень не имеет физического смысла, так как $I^2 \geq 0$, следовательно, $I^2 = 4 \text{ А}^2$, а $I = 2 \text{ А}$.

Начальную фазу тока определим из второго уравнения системы

$$\psi_i = \psi_u - \arctg \frac{-X_C}{\alpha I} = 30^\circ - \arctg \frac{-3}{4} = 67^\circ.$$

Таким образом, комплексное действующее значение тока равно $\dot{I} = 2e^{j67^\circ}$, а выражение для мгновенного тока имеет вид:

$$i = I\sqrt{2} \sin(\omega t + \psi_i) = 2,83 \sin(\omega t + 67^\circ) \text{ А}.$$

8.2. Электромагнитные процессы в катушке с ферромагнитным сердечником

Дроссель. На рисунке 8.3 приведена конструктивная схема катушки индуктивности с замкнутым магнитопроводом, которую называют дросселем. Обмотка подключена к источнику напряжения u . Ток i , протекающий по обмотке, создает магнитный поток Φ , основная часть которого Φ_0 замыкается в ферромагнитном сердечнике, так как его магнитная проницаемость μ намного больше магнитной проницаемости окружающей среды (воздуха).

Однако часть магнитного потока Φ_S замыкается по воздуху и называется магнитным потоком рассеяния.

Уравнение, описывающее электромагнитные процессы в дросселе, имеет вид:

$$\begin{aligned} u &= Ri + \frac{d}{dt}(\psi_0 + \psi_S) = \\ &= Ri + \frac{d\psi_S}{dt} + \frac{d\psi_0}{dt}, \end{aligned} \quad (8.6)$$

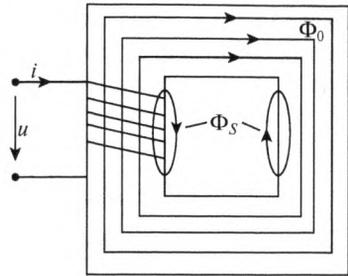


Рис. 8.3

где ψ_0 — потокосцепление, обусловленное потоком Φ_0 , замыкающимся в сердечнике, а ψ_S — обусловленное потоком Φ_S , замыкающимся вне сердечника.

При анализе электромагнитных процессов в дросселе используют метод эквивалентных синусоид. При этом заменяют несинусоидальные i и Φ_0 эквивалентными синусоидами, для которых записывают уравнение в комплексной форме

$$\dot{U} = R\dot{I} + j\omega L_S \dot{I} + j\omega w \dot{\Phi}_0 = R\dot{I} + j\omega L \dot{I} + \dot{U}_0, \quad (8.7)$$

где w — число витков обмотки дросселя.

На основании уравнения (8.7) получают схему замещения катушки с ферромагнитным сердечником (рис. 8.4, а) и ее векторную диаграмму (рис. 8.4, б). Сопротивление R отражает процессы превращения электрической энергии в тепловую в обмотке дросселя, индуктивность L_S связана с магнитным потоком Φ_S вне сердечника. Причем R и L_S — линейные элементы схемы замещения. Процессы в ферромагнитном сердечнике отражаются нелинейными активной проводимостью g_0 и индуктивностью с реактивной проводимостью b_0 .

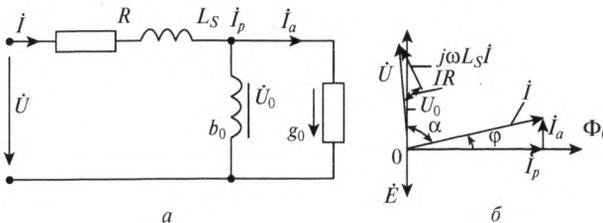


Рис. 8.4

Трансформатор. В трансформаторе с ферромагнитным сердечником (рис. 8.5) различают основной магнитный поток Φ_0 , замыкающийся

по сердечнику и сцепленный как с первой, так и со второй обмотками трансформатора, и магнитный поток рассеяния Φ_s , у которого часть пути проходит по воздуху.

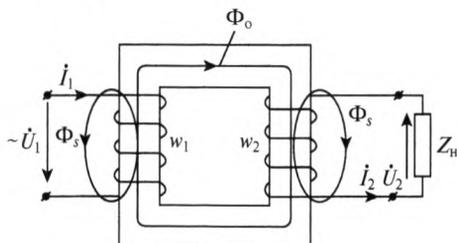


Рис. 8.5

Коэффициент трансформации трансформатора напряжения $k_{тн}$ равен:

$$k_{тн} = w_1/w_2 = E_1/E_2.$$

При холостом ходе отношение первичного и вторичного напряжений равно с достаточной точностью коэффициенту трансформации:

$$U_1/U_2 \cong E_1/E_2 = w_1/w_2 = k_{тн}.$$

T-схема замещения трансформатора с ферромагнитным сердечником, приведенная к первичной обмотке, показана на рис. 8.6.

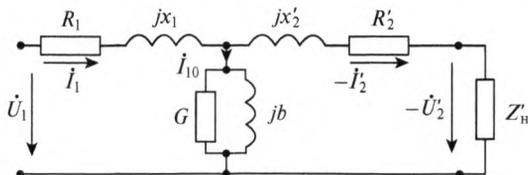


Рис. 8.6

Основные уравнения цепи нагруженного трансформатора для этой схемы (рис. 8.6), имеют вид:

$$I'_2 = I_{10} - I_1 \quad (8.8)$$

$$\dot{U}_1 = -\dot{E}_1 + \dot{I}_1(R_1 + jx_1); \quad (8.9)$$

$$\dot{U}'_2 = \dot{E}'_2 - \dot{I}'_2(R_2 + jx_2). \quad (8.10)$$

8.1. Однофазный трансформатор $U_1/U_2 = 6600/220$ В с номинальной мощностью $S = 40$ кВА имеет потери холостого хода $P_{хх} = 320$ Вт,

КПД при полной нагрузке $\eta = 96\%$ и $\cos \varphi = 0,8$. Требуется определить активное сопротивление первичной и вторичной обмоток.

Решение. Так как ток холостого хода имеет незначительную величину по сравнению с номинальным током, потерями в обмотке можно пренебречь и считать, что потери холостого хода приблизительно равны потерям в стали:

$$P_{xx} \approx P_{ст} = 320 \text{ Вт.}$$

Общие потери мощности при нагрузке трансформатора

$$P_{об} + P_{сТ} = \frac{S_H - \eta S_H \cos \varphi_2}{100} = 1320 \text{ Вт,}$$

где S_H — номинальная полная мощность трансформатора, $S_H = U_{2н} \cdot I_{2н}$.

Коэффициент полезного действия трансформатора

$$\eta = \frac{\beta S_H \cos \varphi_2}{\beta S_H \cos \varphi_2 + P_{10} + \beta^2 P_k},$$

где β — коэффициент нагрузки, который равен $\beta = I_2/I_{2н}$; S_H — номинальная полная мощность трансформатора, $S_H = U_{2н} \cdot I_{2н}$.

При номинальной нагрузке ($\beta = 1$)

$$\eta = \frac{S_H \cos \varphi_2}{S_H \cos \varphi_2 + P_{ст} + P_k}.$$

Отсюда

$$P_{об} + P_{сТ} = S_H \cos \varphi \cdot \left(\frac{1}{\eta} - 1 \right) = 40 \cdot 0,8 \left(\frac{1}{0,96} - 1 \right) = 1333 \text{ Вт}$$

$$P_{об} = 1333 - 320 = 1013 \text{ Вт.} \quad P_{1об} = P_{2об} = 1013/2 = 506,5 \text{ Вт.}$$

Номинальный ток в первичной цепи при нагрузке

$$I_1 = \frac{S}{U_1} = 6,7.$$

Активное сопротивление первичной обмотки

$$R_{1об} = \frac{P_{1об}}{I_1^2} = 22,5.$$

Активное сопротивление первичной обмотки равно приведенному сопротивлению вторичной обмотки:

$$R_{1об} = R'_{2об} = R_{2об} k^2 \text{ Ом,}$$

где $k = w_1/w_2 = 6600/222 = 30$, то $R_{2об} = \frac{22,5}{30^2} = 0,025 \text{ Ом.}$

8.2. Опыты холостого хода и короткого замыкания однофазного трансформатора дали следующие результаты:

$$U_{1xx} = 400 \text{ В}; \quad I_{1xx} = 0,3 \text{ А}; \quad P_{1xx} = 18 \text{ Вт}; \\ U_{1кз} = 32 \text{ В}; \quad I_{1кз} = 4,3 \text{ А}; \quad P_{1кз} = 70 \text{ Вт}.$$

Данный трансформатор — повышающий и имеет коэффициент трансформации $k = w_1/w_2 = 1/20$. Учитывая, что активное и реактивное сопротивления рассеяния первичной обмотки равны соответственным приведенным сопротивлениям вторичной обмотки, требуется определить их величины.

Решение. Из опыта холостого хода имеем:

$$Z_{xx} = \frac{U_{1xx}}{I_{1xx}} = 1333 \text{ Ом}; \quad \cos \varphi_{xx} = \frac{P_{1xx}}{I_{1xx} U_{1xx}} = 0,15; \\ x_{xx} = Z_{xx} \sin \varphi_{xx} = 1317 \text{ Ом}; \quad R_{xx} = Z_{xx} \cos \varphi_{xx} = 200 \text{ Ом}.$$

Из опыта короткого замыкания имеем:

$$Z_{кз} = \frac{U_{1кз}}{I_{1кз}} = 7,44 \text{ Ом}; \quad \cos \varphi_{кз} = \frac{P_{1кз}}{I_{1кз} U_{1кз}} = 0,51; \\ R_{1о6} + R'_{2о6} = Z_{кз} \cos \varphi_{кз} = 3,8 \text{ Ом}; \quad x_{1s} + x'_{2s} = Z_{кз} \sin \varphi_{кз} = 6,4 \text{ Ом},$$

так как

$$R_{1о6} = R'_{2о6}; \quad x_{1s} = x'_{2s},$$

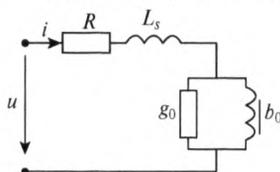
то

$$R_{1о6} = 1,9 \text{ Ом}; \quad R_{2о6} = \frac{R'_{2о6}}{k^2} = 760 \text{ Ом}; \\ x_{1s} = 3,2 \text{ Ом}; \quad x_{2о6} = \frac{x'_{2о6}}{k^2} = 1280 \text{ Ом}.$$

В задачах 8.3—8.7 укажите правильный ответ.

8.3. Какой элемент в схеме замещения дросселя характеризует потери в обмотке?

1. R .
2. b_0 .
3. L_s .
4. g_0 .



8.4. Какой элемент в схеме (см. задачу 8.3) замещения дросселя характеризует магнитный поток, замыкающийся по сердечнику?

1. b_0 .
2. R .
3. g_0 .
4. b_s .

8.5. Дано: $U_1 = 190$ В; $U_2 = 380$ В. Коэффициент трансформации k трансформатора равен:

1. 0,5.
2. 1,0.
3. 1,5.
4. 2,0.

8.6. Опыт холостого хода трансформатора позволяет определить...

1. Сопротивление вторичной обмотки.
2. Индуктивность рассеяния первичной обмотки.
3. Коэффициент трансформации.
4. Индуктивность рассеяния вторичной обмотки.

8.7. Если w_1 — число витков первичной обмотки, а w_2 — число витков вторичной обмотки, то однофазный трансформатор является понижающим, когда...

1. $w_1 + w_2 = 0$.
2. $w_1 = w_2$.
3. $w_1 < w_2$.
4. $w_1 > w_2$.



ЧАСТЬ III

**РАСЧЕТ
ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫХ
ПОЛЕЙ**

ВВЕДЕНИЕ. ОБЩИЕ СВЕДЕНИЯ ОБ ЭЛЕКТРОМАГНИТНОМ ПОЛЕ

В электротехнических устройствах происходит преобразование и распространение энергии электромагнитного поля (ЭМП), поэтому изучение теории и методов расчета ЭМП имеет большое практическое значение.

ЭМП можно рассматривать как особое свойство материи. Оно характеризуется четырьмя векторными величинами: \vec{E} — напряженностью электрического поля (ЭП); \vec{D} — электрической индукцией; \vec{H} — напряженностью магнитного поля (МП); \vec{B} — магнитной индукцией. Определить ЭМП в некоторой области пространства — значит указать эти векторы в любой ее точке. Таким образом, ЭМП предстает как совокупность ЭП(\vec{E} , \vec{D}) и МП(\vec{H} , \vec{B}), находящиеся во взаимной зависимости.

Характеристики ЭМП — \vec{E} , \vec{D} , \vec{H} , \vec{B} могут быть найдены из уравнений, описывающих ЭМП:

$\text{rot } \vec{H} = \vec{J}$	(В. 1)	$\text{rot } \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$	(В. 2)
$\text{div } \vec{D} = \rho$	(В. 3)	$\text{div } \vec{B} = 0$	(В. 4)
$\vec{D} = \epsilon \vec{E}$	(В. 5)	$\vec{B} = \mu \vec{H}$	(В. 6)

Здесь ρ — плотность электрического заряда; γ , ϵ , μ — электрическая проводимость, диэлектрическая и магнитная проницаемости среды.

К уравнениям (В. 1)—(В. 6) необходимо добавить уравнение для плотности тока

$$\vec{J} = \gamma \vec{E} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} + \rho \vec{v}. \quad (\text{В. 7})$$

В (В. 7) первый член справа $\gamma \vec{E}$ представляет плотность тока проводимости, второй — $\partial \vec{D} / \partial t$ — плотность тока смещения, третий — $\rho \vec{v}$ — плотность тока переноса; \vec{v} — скорость перемещения заряженных частиц.

Полный электрический заряд Q находится интегрированием по объему V в виде

$$Q = \iiint_V \rho dv. \quad (\text{В. 8})$$

Сила \vec{f} , действующая на точечный заряд Q , внесенный в поле, равна

$$\vec{f} = Q\vec{E}, \quad (\text{В. 9})$$

где напряженность \vec{E} численно равна силе, действующей на единичный заряд.

Сила \vec{f} взаимодействия двух точечных электрических зарядов Q_1 и Q_2 , действующая по линии x , соединяющей эти заряды, на основании закона Кулона равна

$$f = \frac{1}{4\pi\epsilon} \frac{Q_1 Q_2}{x^2}. \quad (\text{В. 10})$$

Модуль напряженности \vec{E} в поле точечного заряда определяется как

$$E = \frac{Q}{4\pi\epsilon x^2}. \quad (\text{В. 11})$$

Работа по перемещению электрического заряда Q от точки A до точки B определяется линейным интегралом

$$A = \int_A^B QE \cos\alpha dl = Q \int_A^B E \cos\alpha dl,$$

где dl — элемент длины пути интегрирования; заряд Q вынесен за знак интеграла, так как в процессе движения величина заряда не меняется.

Таким образом, работа по перемещению заряда равна произведению заряда Q на линейный интеграл:

$$U_{AB} = \int_A^B E \cos\alpha dl. \quad (\text{В. 12})$$

Этот интеграл, определяющийся характеристиками поля по выбранному пути, получил название электрического напряжения между точками A — B и равен

$$U_{AB} = \int_A^B \vec{E} d\vec{l}. \quad (\text{В. 13})$$

Единицей электрического напряжения U_{AB} является вольт (В). Если напряжение между двумя точками поля 1 В, то при перемещении заряда в 1 Кл из одной точки в другую будет совершена работа в 1 Дж.

Если в качестве конечной точки при определении напряжения условиться всегда брать фиксированную в пространстве точку P , которую назовем опорной точкой, то напряжение

$$U_{AP} = \int_A^P \vec{E} d\vec{l}$$

между произвольной точкой A и опорной точкой P будет являться функцией положения только точки A . В этом случае напряжение называют электрическим потенциалом точки A и обозначают буквой ϕ :

$$\phi_A = \int_A^P \vec{E} d\vec{l} = \int_A^P E \cos\alpha dl.$$

По своей физической природе потенциал не отличается от напряжения и потому является также скалярной величиной и измеряется в вольтах.

Если поинтересоваться потенциалом самой точки P , то придем к выводу: $\phi_P = \int_P^P \vec{E} d\vec{l} = 0$, что он равен нулю, так как определенный интеграл с одинаковыми нижним и верхним пределами обращается в нуль. Поэтому опорную точку нередко называют точкой нулевого потенциала.

РАСЧЕТ ЭЛЕКТРОСТАТИЧЕСКИХ ПОЛЕЙ

9.1. Основные аналитические зависимости

Электростатическим полем (ЭСП) называют электрическое поле (ЭП) неподвижных зарядов. Силовой характеристикой поля ЭП является напряженность \vec{E} , определяемая как отношение силы, действующей на пробный заряд, помещенный в ЭП, к величине этого заряда — $\vec{E} = \vec{f}/q_0$.

Здесь под пробным зарядом понимаем заряд q_0 положительного знака, настолько малый по величине, что он не искажает внешнего поля, в которое помещен. Другой важной характеристикой ЭП является вектор электрической индукции (в диэлектрике его называют вектором электрического смещения) \vec{D} :

$$\vec{D} = \epsilon_0 \vec{E} - \vec{P},$$

где \vec{P} — вектор поляризации, причем $\vec{D} = \epsilon \vec{E}$; $\epsilon = \epsilon_0 \epsilon_r$; $\epsilon_0 = 8,85 \cdot 10^{-12}$ Ф/м; вектор \vec{D} совпадает с вектором \vec{E} , вектор \vec{P} им противоположен.

Из общей системы уравнений Максвелла для ЭСП используют три:

$$\text{rot } \vec{E} = 0; \quad \text{div } \vec{D} = \rho; \quad \vec{D} = \epsilon \vec{E},$$

которые в однородном поле приводятся к одному уравнению:

$$\text{div grad } \phi = -\rho/\epsilon. \quad (9.1)$$

При отсутствии зарядов в рассматриваемой области

$$\text{div grad } \phi = 0. \quad (9.2)$$

Уравнение (9.1) называют неоднородным уравнением Лапласа (в технических дисциплинах — уравнением Пуассона), уравнение (9.2) — однородным уравнением Лапласа (в технических дисципли-

нах — уравнением Лапласа) для ЭСП. В прямоугольной системе координат x, y, z , с учетом

$$\operatorname{div} \operatorname{grad} \varphi = \vec{\nabla} \vec{\nabla} \varphi = \nabla^2 \varphi$$

и

$$\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2},$$

уравнения (9.1) и (9.2) примут вид:

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} = -\frac{\rho}{\varepsilon} \quad (\text{уравнение Пуассона}), \quad (9.3)$$

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} = 0 \quad (\text{уравнение Лапласа}). \quad (9.4)$$

Интегрирование уравнений Пуассона или Лапласа позволяет найти потенциал $\varphi(x, y, z)$ в каждой точке поля, а затем и напряженность поля \vec{E} по формуле

$$\vec{E} = -\operatorname{grad} \varphi. \quad (9.5)$$

При интегрировании уравнений Пуассона и Лапласа встречаемся с необходимостью определения постоянных интегрирования, которые находятся из граничных условий.

Граничные условия на поверхностях проводников:

— внутри проводников $\vec{E} = 0$;

— на поверхности проводников $\vec{E} = E_n = -\partial\varphi/\partial n$; $E_\tau = 0$, где E_n и E_τ — соответственно нормальная и касательная к поверхности проводника составляющие вектора \vec{E} .

1. Поверхность проводника представляет собой поверхность равного потенциала

$$\varphi = \text{const}. \quad (9.6)$$

2. Величина вектора электрической индукции \vec{D} численно равна поверхностной плотности заряда

$$D = \sigma, \quad (9.7)$$

т.е. весь заряд проводника сосредоточен на его поверхности, внутри проводника заряда нет.

Граничные условия на поверхности раздела двух диэлектриков

1. Касательные составляющие вектора \vec{E} на поверхности раздела двух диэлектриков равны:

$$\left. \begin{aligned} E_{1\tau} &= E_{2\tau}, \\ E_1 \sin \alpha_1 &= E_2 \sin \alpha_2, \end{aligned} \right\} \quad (9.8)$$

2. Нормальные составляющие вектора \vec{D} на поверхности раздела двух диэлектриков равны

$$\left. \begin{aligned} D_{1n} &= D_{2n}, \\ D_1 \cos \alpha_1 &= D_2 \cos \alpha_2, \end{aligned} \right\} \quad (9.9)$$

3. Соотношение между углом падения и углом преломления линий электрического поля на границе раздела двух диэлектриков имеет вид:

$$\frac{\operatorname{tg} \alpha_1}{\operatorname{tg} \alpha_2} = \frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2} = \frac{\varepsilon_{r1}}{\varepsilon_{r2}}. \quad (9.10)$$

Скачок нормальной составляющей напряженности ЭП объясняется наличием на границе сред некомпенсированных связанных зарядов и равен

$$E_{n2} - E_{n1} = \frac{\sigma_{\text{связ}}}{\varepsilon_0}.$$

В каждой точке поверхности заряженного тела напряженность определяется поверхностной плотностью свободных зарядов: $E = \sigma/\varepsilon$.

Величина вектора поляризации равна поверхностной плотности связанных зарядов — $P = \sigma_{\text{связ}}$.

Потенциал на границе раздела двух сред изменяется непрерывно

$$\varphi_1 = \varphi_2. \quad (9.11)$$

Производные от потенциала, взятые по нормали к границе раздела, удовлетворяют равенству

$$\varepsilon_1 \frac{\partial \varphi_1}{\partial n} = \varepsilon_2 \frac{\partial \varphi_2}{\partial n}.$$

Цель расчета поля: найти значения напряженности поля \vec{E} и электрического потенциала φ при заданной геометрии (расположение и форма заряженных тел) и граничных условиях. Задачи могут быть двух видов:

- а) заданы значения потенциала на границах поля;

- б) заданы значения напряженности поля на границах или, что то же, задано распределение зарядов по поверхности проводящих тел;
- в) заданы значения потенциалов на одних из границ, а на других — напряженности (задачи со смешанными граничными условиями).

Ниже на примерах рассмотрены наиболее употребляемые и относительно простые методы расчета ЭСП.

9.2. Расчет симметричных полей

9.1. ЭСП создано двумя тонкими параллельно расположенными пластинами бесконечного размера. Поверхностная плотность заряда на одной из пластин $+\sigma$, на другой $-\sigma$ Кл/м². Найти напряженность поля между пластинами и снаружи пластин. Как изменится напряженность поля, если одну из пластин удалить? Для обоих случаев нарисовать картину поля.

Решение. В соответствии с граничным условием весь заряд пластины сосредоточен на ее поверхности, обращенной к другой пластине.

$D = \sigma$; $E = \frac{D}{\epsilon}$; $\epsilon = \epsilon_0 \epsilon_r$; $\epsilon_r = 1$. Распределение векторов \vec{D} , \vec{E} в пространстве между пластинами изображено на рис. 9.1, а.

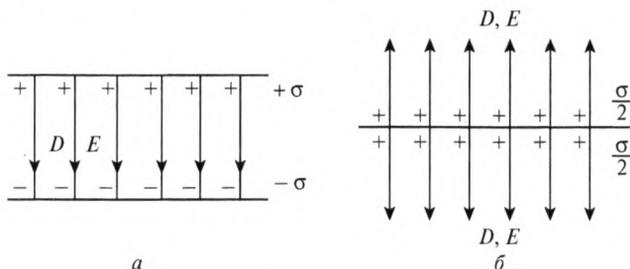


Рис. 9.1

Если одну из пластин удалить, ЭСП окажется симметричным по обе стороны оставшейся пластины: $D = 0,5\sigma$; $E = D/2\epsilon$. Картина поля изображена на рис. 9.1, б.

9.2. В ЭП, образованное пластинами A и B , внесена пластина C из проводящего материала. Изобразить картину поля.

Решение. Картина поля изображена на рис. 9.2 по правилам построения картины поля. Там же показано распределение плотности заряда

по пластинам. Результирующий заряд на пластине C отсутствует.

9.3. Шар имеет заряд $Q = 10^{-10}$ Кл. Найти наименьший радиус шара R , при котором в воздухе градиент потенциала не превысит допустимого значения (30 кВ/см).

$$\text{Решение: } |\text{grad } \phi| = E = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 R^2} = 3 \cdot 10^6 \text{ В/м};$$

$$R = \sqrt{\frac{Q}{4\pi\epsilon_0 E}} = \sqrt{\frac{10^{-10} \cdot 10^{12} \cdot 10^{-6}}{4\pi \cdot 8,85 \cdot 3}} = 0,55 \cdot 10^{-3} \text{ м.}$$

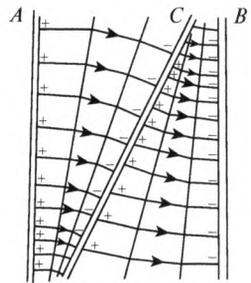


Рис. 9.2

По существу мы решаем заданную задачу в предположении, что весь заряд шара расположен в его центре.

9.4. Найти значение векторов напряженности поля, электрического смещения, поляризации, свободный и связанный заряды и емкость для плоского конденсатора с площадью пластин $S = 25 \text{ см}^2$, расстоянием между пластинами $d = 2 \text{ мм}$. Напряжение между пластинами $U = 1 \text{ кВ}$.

Задачу рассмотреть для двух случаев: а) между пластинами воздух; б) между пластинами вставлена текстолитовая пластина.

Решение. В обоих случаях поле между пластинами однородное.

В однородном поле $U = \int_l \vec{E} d\vec{l} = Ed$,

а) диэлектрик воздух $\epsilon_r = 1$:

$$E = U/d = 1000/2 \cdot 10^{-3} = 5 \cdot 10^5 \text{ В/м};$$

$$D = \epsilon_r \epsilon_0 E = 8,85 \cdot 10^{-12} \cdot 1 \cdot 5 = 4,44 \cdot 10^{-6} \text{ Кл/м}^2, \quad P = 0;$$

$$Q_{\text{своб}} = \int_S \vec{D} d\vec{s} = DS = 4,44 \cdot 10^{-6} \cdot 25 \cdot 10^{-4} = 11,1 \cdot 10^{-9} \text{ Кл.}$$

Плотность свободного заряда:

$$\sigma = D = 4,44 \cdot 10^{-6} \text{ Кл/м}^2.$$

Связанный заряд:

$$Q_{\text{связ}} = 0; \quad C = \frac{Q_{\text{своб}}}{U} = \frac{11,1 \cdot 10^{-9}}{10^3} = 11,1 \cdot 10^{-12} \text{ Ф.}$$

б) диэлектрик текстолит $\epsilon_r = 4$ — $E = U/d = 5 \cdot 10^5 \text{ В/м}$.

$$D = \epsilon_r \epsilon_0 E = 8,85 \cdot 10^{-12} \cdot 4,5 \cdot 10^5 = 17,7 \cdot 10^{-6} \text{ Кл/м}^2,$$

$$P = \varepsilon_0 E - D = (4,44 - 17,7) \cdot 10^{-6} = -13,3 \cdot 10^{-6} \text{ Кл/м}^2,$$

$$Q_{\text{связ}} = DS = 17,7 \cdot 10^{-6} \cdot 25 \cdot 10^{-4} = 44,4 \cdot 10^{-9} \text{ Кл.}$$

Плотность свободного заряда:

$$\sigma = D = 17,7 \cdot 10^{-6} \text{ Кл/м}^2.$$

Связанный заряд:

$$Q_{\text{связ}} = PS = -13,3 \cdot 10^{-6} \cdot 25 \cdot 10^{-4} = -33,3 \cdot 10^{-9} \text{ Кл,}$$

$$C = \frac{Q_{\text{своб}}}{U} = \frac{4,44 \cdot 10^{-9}}{10^3} = 44,4 \cdot 10^{-12} \text{ Ф.}$$

После зарядки рассмотренный выше конденсатор отключен от источника, а затем в него вставлена текстолитовая пластина. Определить $Q_{\text{своб}}, Q_{\text{связ}}, D, E, P, C$: а) до внесения пластины; б) после внесения пластины:

- а) *до внесения пластины.* Так как ничего не сказано о проводимости конденсатора, то можно считать его идеальным, т.е. без потерь. Тогда напряжение на нем, заряд и все остальные величины останутся теми же.
- б) на основании закона сохранения заряда свободный заряд $Q_{\text{своб}}$ после внесения пластины останется тот же, что и в конденсаторе до внесения пластины:

$$Q_{\text{своб}} = 11,1 \cdot 10^{-9} \text{ Кл,} \quad D = \frac{Q_{\text{своб}}}{S} = \frac{11,1 \cdot 10^{-9}}{25 \cdot 10^{-4}} = 4,44 \cdot 10^{-6} \text{ Кл/м}^2;$$

$$E = \frac{D}{\varepsilon_0 \varepsilon_r} = \frac{4,44 \cdot 10^{-6}}{8,85 \cdot 10^{-12} \cdot 4} = 125 \cdot 10^3 \text{ В/м,}$$

$$P = \varepsilon_0 E - D = -3,3 \cdot 10^{-6} \text{ Кл/м}^2, \quad Q_{\text{связ}} = PS = -8,3 \cdot 10^{-9} \text{ Кл,}$$

$$U = Ed = 125 \cdot 10^3 \cdot 2 \cdot 10^{-3} \text{ В,} \quad C = \frac{Q_{\text{своб}}}{U} = \frac{11,1 \cdot 10^{-9}}{250} = 44,4 \cdot 10^{-12} \text{ Ф.}$$

Таким образом, введение между обкладками отсоединенного от источника конденсатора текстолитовой пластины привело к изменению напряжения на конденсаторе в 4 раза — от 1000 до 250 В.

9.5. Пазовая изоляция обмотки электрической машины состоит из нескольких слоев клееной слюдяной ленты (миколекс) и киперной ленты, пропитываемых специальным компаундом. При укладке в паз между изоляцией обмотки и пакетом железа могут оставаться воздушные зазоры (рис. 9.3).

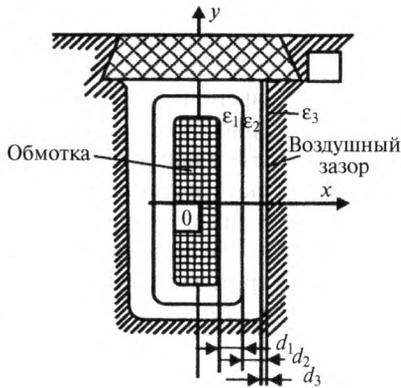


Рис. 9.3

Полагая, что поле в изоляции можно считать зависящим от одной координаты x , допустимая напряженность ЭП в воздушном зазоре $E_{\text{доб}} = 20$ кВ/см (действующее значение), определить эксплуатационное напряжение между обмоткой и корпусом машины. Численное решение выполнить для случая: $d_1 = 4$ мм; $d_2 = 1$ мм; $d_3 = 0,5$ мм; $\epsilon_1 = 7\epsilon_0$; $\epsilon_2 = 3,5\epsilon_0$; $\epsilon_3 = \epsilon_0$.

Решение. Задача сводится к определению разности потенциалов между обкладками плоского конденсатора, заполненного тремя диэлектриками, если известна допустимая напряженность поля в одном из них. Вектор электрического смещения D имеет только одну, нормальную к поверхности раздела сред составляющую, одинаковую во всех слоях изоляции:

$$D = \epsilon_1 E_1 = \epsilon_2 E_2 = \epsilon_3 E_3.$$

Допустимое значение напряженности поля задано в наиболее «слабом» диэлектрике — воздухе, что сразу дает возможность найти величину D :

$$D = \epsilon_3 E_3.$$

Искомое напряжение:

$$\begin{aligned} U_{\text{обм}} - U_{\text{корп}} &= E_1 d_1 + E_2 d_2 + E_3 d_3 = \\ &= E_3 \left(\frac{\epsilon_3}{\epsilon_1} d_1 + \frac{\epsilon_3}{\epsilon_2} d_2 + d_3 \right) = E_{\text{доп}} \left(\frac{d_1}{\epsilon_1/\epsilon_0} + \frac{d_2}{\epsilon_2/\epsilon_0} + d_3 \right). \end{aligned}$$

Численное решение: $U_{\text{обм}} - U_{\text{корп}} = 2,7$ кВ (действующее значение).

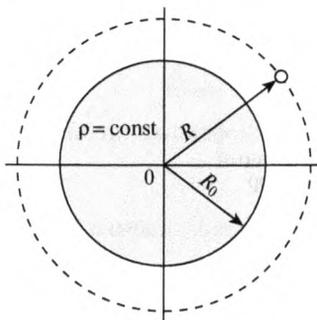


Рис. 9.4

9.6. Электрический заряд распределен с постоянной объемной плотностью ρ в части пространства, ограниченной сферической поверхностью радиуса R_0 (рис. 9.4). Определить напряженность ЭП с напряженностью $E(R)$ и электрический потенциал $\varphi(R)$ внутри и вне заряженной сферы.

Решение. В силу сферической симметрии задача может быть решена по теореме Гаусса $\oint_S \vec{E} d\vec{s} = Q/\epsilon$. В области расположения объемного заряда, при $0 < R < R_0$

$$\oint_S \vec{E} d\vec{s} = (1/\epsilon) \int_V \rho dv.$$

В силу сферической симметрии в любой точке на одном и том же расстоянии R значение E одинаково, поэтому $E_1 \cdot 4\pi R^2 = (4/3\epsilon)\pi R^3 \rho$, откуда $E_1(R) = \rho R/3\epsilon$, где $\epsilon = \epsilon_0 = 8,85 \cdot 10^{-12}$ Ф/м.

За пределами объемного заряда $R > R_0$

$$E_2 \cdot 4\pi R^2 = (4/3\epsilon)\pi R_0^3 \rho,$$

откуда

$$E_2(R) = Q/(4\pi\epsilon R^2).$$

Потенциал вне заряженной сферы

$$\varphi = \int \vec{E} d\vec{R} = - \int E dR = - \int \frac{Q dR}{4\pi\epsilon R^2} = \frac{Q}{4\pi\epsilon R} + \text{const.}$$

Так как рассматривается уединенный заряд, то при $R \rightarrow \infty$ $\varphi \rightarrow 0$, поэтому вне заряженной сферы $\varphi(R) = Q/(4\pi\epsilon R)$.

Внутри заряженной сферы

$$\varphi = \int \vec{E} d\vec{R} = - \int \frac{\rho R}{3\epsilon} dR = - \frac{\rho R^2}{6\epsilon} + \text{const.}$$

При $R = R_0$ $\frac{Q}{4\pi\epsilon R_0} = - \frac{\rho R_0^2}{6\epsilon} + \text{const.}$ Подставив в последнее выраже-

ние $Q = (4/3)\pi R_0^3 \rho$, найдем $\rho R_0^2/2\epsilon = \text{const.}$

Окончательно в рассматриваемой области (внутри заряженной сферы)

$$\varphi(R) = \frac{\rho R_0^2}{2\epsilon} - \frac{\rho R^2}{6\epsilon} = \frac{\rho}{6\epsilon} (3R_0^2 - R^2).$$

Графики $E(R)$ и $\varphi(R)$ изображены на рис. 9.5.

По результатам решения задачи 9.6 можно сделать следующее замечание: по мере удаления от заряженной сферы напряженность ЭП E убывает с квадратом расстояния, а электрический потенциал φ убывает обратно пропорционально расстоянию в первой степени.

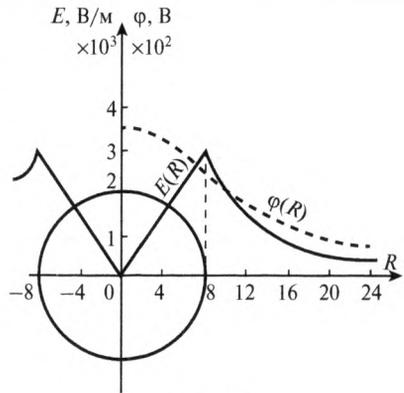


Рис. 9.5

9.7. Тот же заряд, что и в предыдущей задаче, сообщен металлическому шару того же радиуса R_0 . Определить и построить $E(R)$ и $\varphi(R)$.

Решение. Напряженность ЭП вне шара определяется по теореме Гаусса — по формуле $E = Q/(4\pi\epsilon R^2)$ ¹, внутри шара $E = 0$.

Потенциал вне шара: $\varphi = Q/(4\pi\epsilon R_0)$. Графики $E(R)$ и $\varphi(R)$ построены на рис. 9.6.

9.8. Шар имеет заряд $Q = 10^{-10}$ Кл. Найти наименьший радиус шара R , при котором в воздухе градиент потенциала не превысит допустимого значения (30 кВ/см).

Решение. $|\text{grad } \varphi| = E = Q/(4\pi\epsilon_0 R^2) = 3 \cdot 10^6$ В/м;

$$\begin{aligned} R &= \sqrt{\frac{Q}{4\pi\epsilon_0 E}} = \\ &= \sqrt{\frac{10^{-10} \cdot 10^{12} \cdot 10^{-6}}{4\pi \cdot 8,85 \cdot 3}} = \\ &= 0,55 \cdot 10^{-3} \text{ м.} \end{aligned}$$

9.9. В воздушном сферическом конденсаторе потенциал внутренней обкладки $U_1 = 50$ В, наружной $U_2 = -50$ В, радиусы обкладок $R_1 = 5$ см, $R_2 = 10$ см. Опреде-

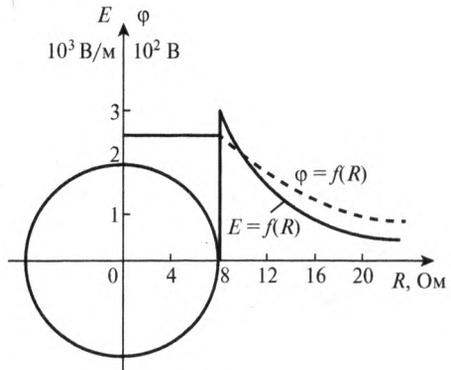


Рис. 9.6

¹ Если бы весь заряд Q был бы расположен в центре шара, то напряженность поля такого точечного заряда также определялась по этой же формуле. По существу мы решаем данную задачу в предположении, что весь заряд шара расположен в его центре.

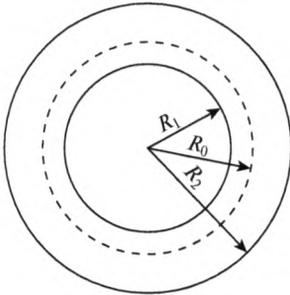


Рис. 9.7

лить радиус R_0 поверхности нулевого потенциала (рис. 9.7). Найти выражение для емкости сферического конденсатора.

Решение. Между шаровыми заряженными поверхностями имеем центральное симметричное поле, т.е. напряженность поля $E = Q/(4\pi\epsilon R^2)$, где Q — заряд обкладки конденсатора; $\epsilon = \epsilon_0$, $R_1 \leq R \leq R_2$.

Потенциал внутренней обкладки по определению (9.4)

$$\varphi_1 = \int_{R_1}^{R_0} \vec{E} d\vec{R} = \frac{Q}{4\pi\epsilon} \int_{R_1}^{R_0} \frac{dR}{R^2} = \frac{Q}{4\pi\epsilon} \left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_0} \right).$$

Заряд Q может быть выражен через разность потенциалов между обкладками конденсатора

$$\varphi_1 - \varphi_2 = \int_{R_1}^{R_2} \vec{E} d\vec{R} = \frac{Q}{4\pi\epsilon} \left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2} \right).$$

Подставляя во второе выражение значение заряда из первого, найдем

$$R_0 = \frac{(\varphi_1 - \varphi_2) R_1 R_2}{\varphi_1 R_1 - \varphi_2 R_2}.$$

Численное решение: $R_0 = 6,7$ см. Емкость конденсатора, в том числе и сферического $C = Q/U$, где Q — заряд пластины конденсатора, U — напряжение между обкладками конденсатора. Подставляя в последнее

выражение $U = \varphi_1 - \varphi_2$, получим $C = \frac{4\pi\epsilon R_1 R_2}{R_2 - R_1}$.

9.10. Рассчитать поле заряженной уединенной проволоки.

Решение. Согласно условию задачи есть только одна заряженная проволока, и больше ничего нет. Если длина проволоки достаточно велика, что в рассматриваемой области пространства ее можно считать

бесконечно длинной, то поле проволоки обладает цилиндрической симметрией. Используя теорему Гаусса

$\oint_S \vec{E} d\vec{s} = Q/\epsilon = \tau l/\epsilon$, где $\tau = Q/l$ —

линейная плотность заряда, можно определить напряженность поля E в любой точке, удаленной от проволоки на расстояние r (рис. 9.8) $E = \tau/(2\pi\epsilon r)$.

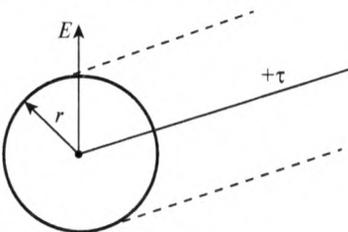


Рис. 9.8. Бесконечной длины проволока

Электрический потенциал $\varphi = -\int \frac{\tau}{2\pi r \epsilon} dr = -\frac{\tau}{2\pi \epsilon} \ln r + \text{const}$.

Постоянная интегрирования определяется в каждой конкретной задаче. Например, если мы имеем одножильный кабель, то потенциал оболочки кабеля, удаленной на расстояние R от заряженной жилы, равен потенциалу земли, т.е. нулю, тогда $0 = -(\tau/2\pi\epsilon) \ln R + \text{const}$; $\text{const} = \tau/(2\pi\epsilon R)$;

$$\varphi = -\frac{\tau}{2\pi \epsilon} \ln r + \frac{\tau}{2\pi \epsilon} \ln R = \frac{\tau}{2\pi \epsilon} \ln \frac{R}{r}.$$

9.11. Исследовать поле коаксиального кабеля.

Решение. В диэлектрике между жилой и оболочкой коаксиального кабеля (рис. 9.9, а) напряженность поля будет та же, что и в поле заряженной оси: при $r_1 \leq r \leq r_2$ — $E = \tau/(2\pi\epsilon r)$.

В жиле и в оболочке, а также вне кабеля поле отсутствует. Напряжение между жилой и оболочкой $U = \int_1^2 \vec{E} d\vec{r} = \frac{\tau}{2\pi\epsilon} \int_1^2 \frac{dr}{r} = \frac{\tau}{2\pi\epsilon} \ln \frac{r_2}{r_1}$.

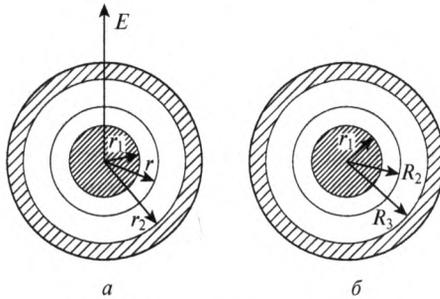


Рис. 9.9. Коаксиальный кабель

$$\text{Емкость кабеля } C = \frac{Q}{U} = \frac{\tau l}{\tau} \cdot 2\pi\epsilon \cdot \frac{1}{\ln \frac{r_2}{r_1}} = \frac{2\pi\epsilon l}{\ln \frac{r_2}{r_1}}.$$

Если кабель имеет двухслойную изоляцию (рис. 9.9, б), то, так как значение вектора электрического смещения \vec{D} не зависит от диэлектрической проницаемости среды, для расчета используют обобщенную теорему Гаусса: $\oint_S \vec{D} d\vec{s} = Q = \tau l$; вследствие цилиндрической симметрии поля $\oint_S \vec{D} d\vec{s} = D \cdot 2\pi r l = \tau l$, откуда $D = \tau/(2\pi r)$.

На границе раздела слоев изоляции $D_1 = D_2$, поэтому на границе раздела слоев изоляции напряженность поля меняется скачком: $E_2 = E_1(\epsilon_1/\epsilon_2)$.

Таким образом, если изоляция кабеля однослойная, то, так как значение $E(r)$ определяется гиперболической зависимостью, а поэтому неодинаково по толщине изоляции, выбирать в качестве изоляции диэлектрик с повышенной электрической прочностью оказывается невыгодным (напряженность поля в значительной части диэлектрика будет существенно меньше допустимого для данного диэлектрика значения). Если же сделать изоляцию кабеля многослойной, то неоднородность напряженности по толщине диэлектрика уменьшится и обеспечить необходимую изоляцию жилы от оболочки можно при меньшей толщине изоляции.

9.12. Изоляция коаксиального цилиндрического кабеля изготовлена из двух диэлектриков. Центральный провод первоначально покрыт слоем фторопласта, поверх которого надета резиновая трубка. Радиусы внутренней жилы и наружной металлической оболочки заданы: $R_1 = 1$ мм; $R_3 = 3$ мм (рис. 9.9). Определить внешний радиус слоя фторопласта, при котором наибольшее значение напряженности поля в каждом из диэлектриков будет равно допустимому для них значению. Найти величину эксплуатационного напряжения для этой конструкции и значения емкости на единицу ее длины. Диэлектрические проницаемости и допустимые напряженности соответственно равны: $\varepsilon_1 = 2,2\varepsilon_0$; $E_{1\max} = 8$ кВ/мм; $\varepsilon_2 = 4,8\varepsilon_0$; $E_{2\max} = 2$ кВ/мм.

Решение. Рациональное использование изолирующих материалов соответствует условию, при котором наибольшие значения напряженности поля в каждом из диэлектриков были бы равны допустимым для них значениям.

Согласно постулату Максвелла — $\oint_S \vec{D}d\vec{s} = Q$; $D2\pi Rl = \tau l$; $D = \tau / (2\pi R)$, где τ — линейная плотность свободных электрических зарядов на внутренней жиле; R — расстояние от жилы по нормали к ней. Очевидно, что в любом слое величина $DR = \text{const}$, и, следовательно, $E_{1\max}\varepsilon_1 R_1 = E_{2\max}\varepsilon_2 R_2$.

Отсюда можно определить искомый радиус границы раздела диэлектриков

$$R_2 = \frac{E_{1\max}}{E_{2\max}} \frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2} R_1 = \frac{E_{1\max}}{E_{2\max}} \frac{\varepsilon_{r1}}{\varepsilon_{r2}} R_1$$

(так как $\varepsilon = \varepsilon_0\varepsilon_r$, ε_r — относительная диэлектрическая проницаемость).

Определим τ , которая при данных размерах конструкции соответствует полю, максимальные напряженности которого в каждом слое изоляции будут равны заданным значениям: $\tau = 2\pi R_1 D = 2\pi\varepsilon_1 E_{1\max} R_1$.

Найдем соответствующую этому τ разность потенциалов

$$U = \varphi_1 - \varphi_3 = \int_{R_1}^{R_2} E_1 dR + \int_{R_2}^{R_3} E_2 dR = \\ = \frac{\tau}{2\pi} \left(\int_{R_1}^{R_2} \frac{dR}{\varepsilon_1 R} + \int_{R_2}^{R_3} \frac{dR}{\varepsilon_2 R} \right) = \varepsilon_1 R_1 E_{1\max} \left(\frac{1}{\varepsilon_1} \ln \frac{R_2}{R_1} + \frac{1}{\varepsilon_2} \ln \frac{R_3}{R_2} \right).$$

$$\text{Емкость кабеля на единицу длины } C' = \frac{\tau}{U_1 - U_3} = \frac{2\pi}{\frac{1}{\varepsilon_1} \ln \frac{R_2}{R_1} + \frac{1}{\varepsilon_2} \ln \frac{R_3}{R_2}}.$$

Численные значения: $R_2 = 1,84$ мм; $U = U_1 - U_3 = 6,76$ кВ; $C' = 145 \cdot 10^{-12}$ Ф/м.

9.13. Рассчитать поле цилиндра радиуса r_0 с объемным зарядом.

Решение. Пусть бесконечный цилиндр из диэлектрика имеет равномерный распределенный заряд с объемной плотностью ρ (рис. 9.9). Рассмотрим поле в двух областях. В первой области ($0 \leq r_1 \leq r_0$) заключена часть заряда цилиндра $-\oint \vec{E}_1 d\vec{s} = \pi r_1^2 l \rho / \varepsilon_1$, $\varepsilon_1 = \varepsilon$ — диэлектрическая проницаемость цилиндра.

Вследствие цилиндрической симметрии $\oint \vec{E}_1 d\vec{s} = E_1 \cdot 2\pi r l$, поэтому

$$E_1 = \rho r_1 / 2\varepsilon_1.$$

Во второй области ($r_0 \leq r_2 \leq \infty$) $\oint \vec{E}_2 d\vec{s} = \pi r_0^2 l \rho / \varepsilon_2$, $\varepsilon_2 = \varepsilon_0$ — диэлектрическая проницаемость окружающего пространства (воздуха).

$$E_2 = \rho r_0^2 / (2r_2 \varepsilon_2).$$

Потенциал поля в обеих областях:

$$\varphi_1 = -\int \vec{E}_1 d\vec{r} = \frac{\rho r_1^2}{4\varepsilon_1} + C_1, \quad \varphi_2 = -\int \vec{E}_2 d\vec{r} = \frac{\rho r_0^2 \ln r_2}{2\varepsilon_2} + C_2.$$

Постоянные интегрирования C_1 и C_2 находим из условия равенства потенциала нулю на оси провода, а также непрерывности функции $\varphi(r)$ на границе раздела диэлектриков. Таким образом, при $r_1 = 0$ $\varphi_1 = 0$; $C_1 = 0$. При $r = r_0$ $\varphi_1 = \varphi_2$, т.е. $\varphi_1 = \rho r_0^2 / 4\varepsilon_1 = \varphi_2 = \rho r_0^2 \ln r_0 / 2\varepsilon_2 + C_2$, от-

куда $C_2 = \frac{2}{\rho r_0^2} \left(\frac{1}{2\varepsilon_1} - \frac{\ln r_0}{\varepsilon_2} \right)$.

9.3. Расчет напряженностей полей наложением

ЭП в воздухе, а также в подавляющем большинстве видов изоляции является линейным, т.е. линейная зависимость $D(E)$: $D = \epsilon_0 \epsilon_r E$, где $\epsilon_0 = 8,85 \cdot 10^{-12} \text{ Ф/м}$, $\epsilon_r = \text{const}$. Для любой линейной среды применим метод наложения. С помощью этого метода ниже решены некоторые задачи.

9.14. Два одноименных точечных заряда Q и $3Q$ расположены на расстоянии d друг от друга. Найти на прямой, проходящей через эти заряды, точку с нулевой напряженностью.

Решение. Обозначим \vec{E}_1 напряженность ЭП заряда Q , величиной \vec{E}_2 напряженность поля заряда $3Q$. В точке, где $\vec{E} = 0$, $\vec{E}_1 = \vec{E}_2$ и направлены в противоположные стороны, тогда $Q/(4\pi\epsilon R_1^2) = 3Q/(4\pi\epsilon R_2^2)$, где R_1, R_2 — соответственно расстояния от искомой точки до зарядов Q и $3Q$, причем $R_2 = d - R_1$. Отсюда $Q(d - R_1)^2 = 3QR_1^2$; $R_1^2 + R_1d - 0,5d = 0$; $R_1 = -0,5d \pm \sqrt{(3/4)d}$. Оставляя положительный корень, найдем $R_1 = 0,365d$.

9.15. Рассчитать поле двухпроводной линии.

Решение. Пусть точки A и B — следы пересечения плоскости заряженными проволоками $+\tau$ и $-\tau$ (рис. 9.10). Найдем значения напряженности поля E и потенциала ϕ в произвольной точке M : $E_1 = \tau/(2\pi\epsilon a)$ — напряженность поля от заряженной проволоки $+\tau$, направлена по линии, соединяющей точку M с зарядом $+\tau$; $E_2 = \tau/(2\pi\epsilon b)$ — напряженность поля от заряженной проволоки $-\tau$, направлена по линии, соединяющей точку M с зарядом $-\tau$; $\Delta Mlm \sim \Delta AMB$, т.к. отношение длин двух сторон одного треугольника (b/a) пропорционально отношению длин двух сторон другого треугольника (E_1/E_2): $E_1 a = E_2 b = \tau/(2\pi\epsilon)$; $(E_1/E_2) = (b/a)$.

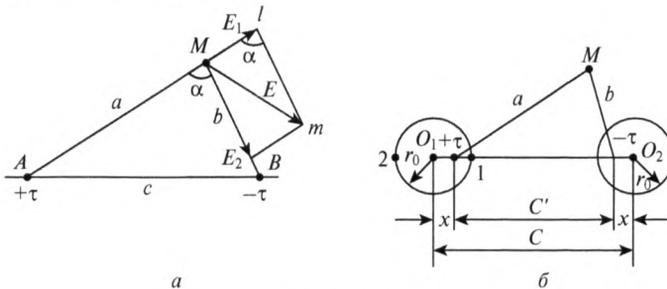


Рис. 9.10

Заключенные между сторонами b и a и сторонами Ml и lm углы равны, как углы между параллельными сторонами. Из подобия треугольников

$$E = E_1(c/b) = \tau c / (2\pi\epsilon ab).$$

Найдем теперь потенциал в точке M от заряда $+\tau$ по формуле $\varphi'_M = -(\tau/2\pi\epsilon)\ln b + \text{const}$. Потенциал в точке M от заряда $-\tau$: $\varphi''_M = (\tau/2\pi\epsilon)\ln a + \text{const}$. Потенциал в точке M от обоих заряженных проволок $\varphi_M = \varphi'_M + \varphi''_M = (\tau/2\pi\epsilon)\ln(b/a) = \text{const}$.

Постоянную интегрирования найдем, считая, что потенциал точки, расположенной посередине между заряженными осями, равен нулю. Так как при этом $(b/a) = 1$; $\ln 1 = 0$, то $0 = 0 + \text{const}$; $\text{const} = 0$, $\varphi_M = (\tau/2\pi\epsilon)\ln(b/a)$.

Выше рассмотрен случай, когда радиусы проводов (r_0) намного меньше расстояния между проводами ($r_0 \ll c$).

Рассмотрим теперь более сложный случай, когда расстояние между проводами двухпроводной линии соизмеримо с радиусом проводов. При этом, с одной стороны, поверхности проводов (проводящие металлические) являются поверхностями равного потенциала; с другой стороны, произойдет смещение противоположных по знаку зарядов на проводах друг к другу. Это приведет к тому, что «электрические оси» проводов $(+\tau; -\tau)^1$ и их геометрические оси ($O_1; O_2$) сместятся (рис. 9.10, б). Условием эквипотенциальности является условие $(b/a) = \text{const}$, поэтому для точки 1 (рис. 9.10, б) — $(c - r_0 - x)/(r_0 - x) = \text{const}$, а для точки 2 — $(c + r_0 - x)/(r_0 + x) = \text{const}$. Так как точки 1 и 2 принадлежат одному проводу и потенциалы их равны, то соотношение

$$\frac{c - r_0 - x}{r_0 - x} = \frac{c + r_0 - x}{r_0 + x},$$

откуда $x = 0,5c - \sqrt{(c^2/4) - r_0^2}$. Далее задача решается аналогично предыдущему случаю (когда геометрические и «электрические» оси совпадают).

9.16. Рассчитать ЭП двух цилиндров, если заряд распределен равномерно с объемной плотностью ρ в пространстве между двумя коаксиальными поверхностями (рис. 9.11).

¹ То есть весь заряд с поверхности цилиндра переносится на одну линию, при этом рассчитанное поле будет учитывать неравномерное распределение зарядов на поверхности провода (проводящего цилиндра): на части поверхности, обращенной к другому проводу, поверхностная плотность заряда будет больше, чем на удаленном. Перенесение заряда с поверхности цилиндра на его «электрическую ось» аналогично перенесению заряда шара в его центр.

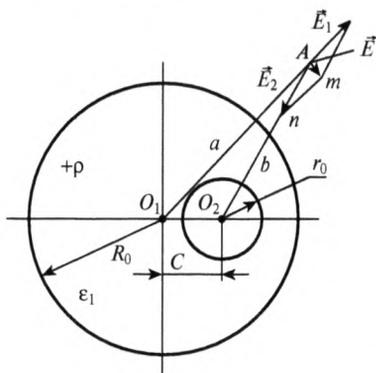


Рис. 9.11

(рис. 9.11) — $\vec{E} = \vec{E}_1 + \vec{E}_2$. По аналогии с предыдущей задачей $\triangle O_1AO_2 \sim \triangle Anm$, так как отношение длин двух сторон одного треугольника (b/a) пропорционально отношению двух сторон другого треугольника (E_1/E_2). Заключенные между сторонами b и a и An и nm углы равны, как углы между параллельными сторонами (рис. 9.11). Поэтому

$$E = E_1(c/b) = \rho R_0^2 c / (2\epsilon_0 ab).$$

9.17. Рассчитать поле диполя. Диполем называется система двух разноименных зарядов $+Q$ и $-Q$, находящихся на некотором расстоянии $2h$ друг от друга. Размерами зарядов в сравнении с расстоянием между ними можно пренебречь.

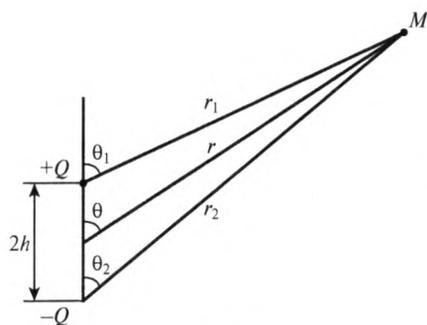


Рис. 9.12

Решение. Задача решается методом наложения. Сначала рассчитывается поле большого цилиндра с распределенным зарядом объемной плотностью ρ . Например, в точке A напряженность поля (см. задачу 9.12) — $E_1 = \rho R_0^2 / (2\alpha\epsilon_0)$, a — расстояние от центра большого цилиндра O_1 до точки A ; $\epsilon = \epsilon_0$.

Затем рассчитывается поле малого цилиндра с объемной плотностью $-\rho$. В точке A — $E_2 = -\rho r_0^2 / (2b\epsilon_0)$. Результирующая напряженность поля в точке A

Решение. Считая заряды $+Q$ и $-Q$ точечными, т.е. размерами их можно пренебречь, определим по методу наложения электрический потенциал φ и напряженность поля E в произвольной точке M (рис. 9.12):

$$\varphi = \frac{Q}{4\pi\epsilon} \left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2} \right) = \frac{Q}{4\pi\epsilon} \frac{r_2 - r_1}{r_1 r_2};$$

$$E = \frac{Q}{4\pi\epsilon} \left(\frac{1}{r_1^2} - \frac{1}{r_2^2} \right) = \frac{Q}{4\pi\epsilon} \frac{r_2^2 - r_1^2}{(r_1 r_2)^2}.$$

При значительном удалении точки M от диполя $r_2 - r_1 \approx 2h \cos \theta^1$; $r_2 + r_1 \approx 2r$; $r_2 r_1 = r^2$, поэтому

$$\varphi = \frac{Q}{4\pi\epsilon} \cdot \frac{2h \cdot \cos \theta}{r^2}, \quad E = \frac{Q}{4\pi\epsilon} \cdot \frac{2h \cdot \cos \theta \cdot 2r}{r^4} = \frac{Q}{2\pi\epsilon} \cdot \frac{2h \cos \theta}{r^3}.$$

Таким образом, напряженность ЭП диполя по мере удаления от него убывает с кубом расстояния, а электрический потенциал — с квадратом расстояния. При этом в любой точке на прямой, перпендикулярной оси диполя ($\theta = 90^\circ$) и проходящей через его центр, потенциал равен нулю.

Рассмотрение поля диполя интересно не только с позиции иллюстрации метода наложения. Понятие диполя и операции с ним используются при расчетах ЭП и МП, поэтому остановимся на этом вопросе подробнее.

Произведение $Q \cdot 2h$ называют электрическим моментом диполя. В литературе часто величину $2h$ заменяют на l (расстояние между зарядами $+Q$ и $-Q$), поэтому электрический момент диполя $p = Ql$. Этой величине сопоставляют вектор, направленный по оси диполя от отрицательного заряда к положительному: $\vec{p} = Q\vec{l}$, где $Q > 0$ и \vec{l} — вектор, направленный в ту же сторону, что и \vec{p} . Таким образом, в рассматриваемой задаче

$$\varphi = \frac{1}{4\pi\epsilon} \frac{p \cos \theta}{r^2}, \quad E = \frac{1}{2\pi\epsilon} \frac{p \cos \theta}{r^3},$$

т.е. электрический момент диполя является его важной характеристикой. От него зависит не только поле, создаваемое диполем, но и поведение диполя во внешнем поле.

9.4. Решение уравнений Лапласа и Пуассона

9.18. Между двумя бесконечными параллельными плоскостями, отстоящими друг от друга на расстоянии d (рис. 9.13), равномерно распределены объемный заряд с плотностью ρ в однородной изотропной среде с проницаемостью ϵ .

¹ По теореме косинусов $r_1^2 = h^2 + r^2 - 2hr \cos \theta$; $r^2 = h^2 + r_2^2 - 2hr_2 \cos \theta_2$, откуда $r_2^2 = -h^2 - r^2 + 2hr_2 \cos \theta_2$; $r_2^2 - r_1^2 = r^2 - h^2 + 2hr^2 \cdot 2 \cos \theta_2 - h^2 + 2hr \cos \theta \approx 4hr \cos \theta - 2h^2 = (r_2 - r_1)2r$;
 $r_2 - r = \frac{4hr \cos \theta - 2h^2}{2r} \approx 2h \cos \theta - \frac{h^2}{r^2} \approx 2h \cos \theta$.

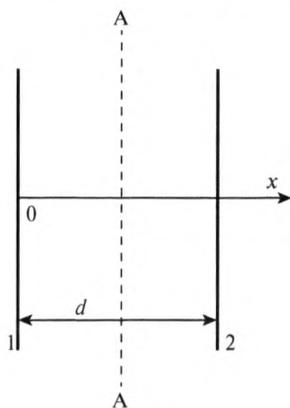


Рис. 9.13

Найти распределение потенциала в среде $\varphi(x)$ и напряженности поля $E(x)$.

Решение. Если совместить координатную плоскость yoz с левой пластиной, то потенциал окажется функцией только координаты x , и уравнение Пуассона примет вид:

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} = -\frac{\rho}{\epsilon},$$

тогда

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x} = -\frac{\rho}{\epsilon}x + C_1; \quad \varphi(x) = \frac{\rho}{2\epsilon}x^2 + C_1x + C_2.$$

Постоянные интегрирования найдем из следующих соображений: заряд распределен равномерно, значит, можно считать, что его количество по обе стороны от плоскости $A-A$ одинаково. Значит, потенциалы плоскостей 1, 2 равны между собой. Будем считать их равными нулю. Тогда из граничных условий найдем C_1, C_2 :

$$1) \quad x=0; \quad \varphi(0)=0; \quad 0 = -\frac{\rho}{2\epsilon} \cdot 0 + C_1 \cdot 0 + C_2; \quad C_2 = 0;$$

$$2) \quad x=d; \quad \varphi(d)=0; \quad 0 = -\frac{\rho}{2\epsilon}d^2 + C_1d; \quad C_1 = \frac{\rho}{2\epsilon}d.$$

Окончательно имеем

$$\varphi(x) = -\frac{\rho}{2\epsilon}x^2 + \frac{\rho d}{2\epsilon}x, \quad E = -\frac{\partial \varphi}{\partial x} = \frac{\rho}{\epsilon}x + \frac{\rho d}{2\epsilon}.$$

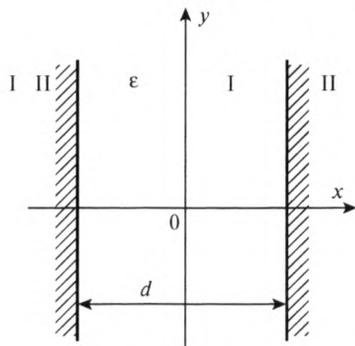


Рис. 9.14

9.19. С помощью измерительного зонда установлено, что распределение потенциала между пластинами плоского конденсатора подчиняется уравнению $\varphi = a((b^2/4) - x^2)$, где a, b — постоянная, x — координата, отсчитываемая от середины междуэлектродного промежутка (рис. 9.14). Найти распределение электрических зарядов в междуэлектродном пространстве и заряды на поверхности пластин конденсатора.

Решение. Уравнение Пуассона в прямоугольной системе координат:

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} = -\frac{\rho}{\varepsilon}.$$

Так как по условию задачи потенциал φ не зависит ни от y , ни от z , то $\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} = -\frac{\rho}{\varepsilon}$. Пользуясь выражением для потенциала, найдем $\partial\varphi/\partial x = -2ax$; $\partial^2\varphi/\partial x^2 = -2a$, т.е. объемный заряд в межэлектродном пространстве распределен равномерно: $\rho = 2\varepsilon a$.

Для определения зарядов на пластинах конденсатора применим постулат Максвелла сначала для правой, а затем для левой пластины конденсатора. Правая пластина: $\oint_S \vec{E} d\vec{s} = Q/\varepsilon$; $-E_{n1}S + E_{n2}S = Q/\varepsilon = \sigma S/\varepsilon$. Здесь S — площадь пластины, E_{n1} взята со знаком «-», а E_{n2} — со знаком «+», так как положительной считается нормаль, направленная во внешнюю от ограничиваемого междуэлектродного пространства сторону в направлении оси x . Поскольку $E_{n2} = 0$ (напряженность электростатического поля в проводящей среде), то $\sigma = -\varepsilon E_{n1}$. Значение E_{n1} , т.е. напряженность поля в межэлектродном пространстве, найдем

из выражения $E_{n1} = -\text{grad} \varphi = -\left. \frac{\partial \varphi}{\partial x} \right|_{x=0,5d} = ad$, откуда $\sigma = -\varepsilon ad$. Левая

пластина: $\oint_S \vec{E} d\vec{s} = Q/\varepsilon$; $-E_{n2}S + E_{n1}S = \sigma S/\varepsilon$. Так как $E_{n2} = 0$, то $\sigma = \varepsilon E_{n1}$, $E_{n1} = -\text{grad} \varphi = -\left. \frac{\partial \varphi}{\partial x} \right|_{x=-0,5d} = -ad$, $\sigma = -\varepsilon ad$. Обе пластины заряжены отрицательно с поверхностной плотностью заряда $\sigma = -\varepsilon ad$. Разность потенциалов между пластинами конденсатора $U = 0$.

9.20. Зондовые исследования цилиндрической полости, вдоль оси которой натянута тонкая металлическая нить, дали распределение потенциала электрического поля в ней: $\varphi = a(b \ln R - R^2)$, где R — расстояние от оси симметрии полости до точки P наблюдения; a , b — постоянные. Диаметр полости равен d (рис. 9.15). Известно, что стенка полости является проводником. Найти распределение электрических зарядов внутри по-

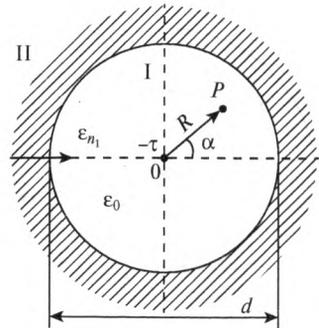


Рис. 9.15

лости и на ее поверхности. Численное решение задачи выполнить для случая: $d = 2,5$ см; $a = 282$ В/м²; $b = 6,4$ м²; $\varepsilon = \varepsilon_0$.

Решение. Для определения объемных зарядов внутри полости воспользуемся уравнением Пуассона в цилиндрической системе координат:

$$\Delta^2 \varphi = \frac{1}{R} \cdot \frac{\partial}{\partial R} \left(R \frac{\partial \varphi}{\partial R} \right) + \frac{1}{R^2} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \alpha^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} = \frac{\rho}{\varepsilon_0}.$$

Подставим в него соответствующие производные:

$$\frac{\partial \varphi}{\partial R} = a \left(\frac{b}{R} - 2R \right); \quad R \frac{\partial \varphi}{\partial R} = a(b - 2R^2);$$

$$\frac{1}{R} \frac{\partial}{\partial R} \left(R \frac{\partial \varphi}{\partial R} \right) = -4a; \quad \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \alpha^2} = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} = 0.$$

Тогда плотность объемных зарядов $\sigma = 4\varepsilon_0 a = \text{const}$. Объемный заряд в цилиндре произвольного радиуса $R \leq 0,5d$ и длины l — $Q_v = \rho \pi R^2 l = 4\pi \varepsilon_0 a l R^2$.

Определим поток вектора \vec{D} через боковую поверхность этого цилиндра $\oint_S \vec{D} d\vec{s} = Q = \int_V \rho dV + \int_l \tau dl$; $\left(-\varepsilon_0 \frac{dU}{dR} \right) 2\pi R l = 4\pi \varepsilon_0 a l R^2 + \tau l$. Решая последнее уравнение относительно линейной плотности заряда τ , найдем его величину $\tau = -2\pi \varepsilon_0 a b$. Распределение поверхностных зарядов найдем из условия:

$$D = \sigma, \quad D = \varepsilon_0 E_n = \varepsilon_0 \left(-\frac{\partial \varphi}{\partial n} \right) = \varepsilon_0 \frac{\partial \varphi}{\partial R} = \varepsilon_0 a \left(\frac{b}{R} - 2R \right).$$

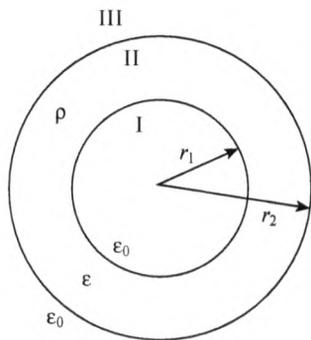


Рис. 9.16

Таким образом, плотность поверхностных зарядов $\sigma = \varepsilon_0 a \left(\frac{b}{R} - 2R \right)$. Численное решение: $\rho = 10^{-8}$ Кл/м³; $\tau = -10^{-7}$ Кл/м; $\sigma = 1,27 \cdot 10^{-6}$ Кл/м².

9.21. Рассчитать поле заряда с постоянной объемной плотностью, равномерно распределенного между двумя коаксиальными цилиндрическими поверхностями (рис. 9.16).

Решение. Здесь имеет место цилиндрическая симметрия поля, так как напряженность \vec{E} и потенциал φ зависят

только от одной координаты — радиуса. В первой из них ($0 \leq r \leq r_1$) поля нет, $\vec{E} = 0$. Во второй области ($r_1 \leq r \leq r_2$) поле описывается уравнением Пуассона, которое в цилиндрической системе координат имеет вид:

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial \varphi}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \alpha^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} = -\frac{\rho}{\epsilon}.$$

Так как потенциал зависит только от одной координаты r , то уравнение Пуассона упрощается:

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial \varphi_2}{\partial r} \right) = -\frac{\rho}{\epsilon}.$$

После первого интегрирования: $r \frac{\partial \varphi_2}{\partial r} = -\frac{r^2}{2} \frac{\rho}{\epsilon} + C_1$; $\frac{\partial \varphi_2}{\partial r} = -\frac{\rho r}{2\epsilon} + \frac{C_1}{r}$.

После второго интегрирования: $\varphi_2 = -\frac{\rho r^2}{4\epsilon} + C_1 \ln r + C_2$; C_1, C_2 — постоянные интегрирования; $E_2 = -\frac{\partial \varphi_2}{\partial r} = \frac{\rho r}{2\epsilon} - \frac{C_1}{r}$.

При $r = r_1$ $E_2 = 0$, поэтому $C_1 = \frac{\rho r_1^2}{2\epsilon}$.

Примем, что $\varphi = 0$ при $r = r_2$ (наружная цилиндрическая поверхность — оболочка заземлена). Тогда

$$0 = -\rho r_2^2 / 4\epsilon + (\rho r_1^2 / 2\epsilon) \ln r_2 + C_2, \quad C_2 = \frac{\rho}{2\epsilon} \left(\frac{r_2^2}{3} - r_1^2 \ln r_2 \right).$$

В третьей области при $r > r_2$ поле описывается уравнением Лапласа:

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial \varphi_3}{\partial r} \right) = 0.$$

После первого интегрирования получим: $r \frac{\partial \varphi_3}{\partial r} = C_3$; $\frac{\partial \varphi_3}{\partial r} = \frac{C_3}{r}$.

После второго интегрирования: $\varphi_3 = C_3 \ln r + C_4$; $E_3 = -\frac{\partial \varphi_3}{\partial r} = -\frac{C_3}{r}$.

Определим теперь постоянные интегрирования C_3 и C_4 . На границе раздела II и III области ($r_1 = r_2$) должны быть равны нормальные составляющие вектора электрического смещения ($D_{2n} = D_{3n}$). В нашем случае вектор электрического смещения, как и вектор напряженности ЭП, направлен по радиусу, т.е. имеет только нормальную составляющую:

$$D_{2(r=r_2)} = \varepsilon E_2 = \frac{\rho r_2}{2} - \frac{\rho r_1^2}{2r_2}, \quad D_{3(r=r_2)} = \varepsilon E_3 = -\varepsilon \frac{C_3}{r_2}.$$

Приравнивая эти два выражения, находим постоянную — $C_3 = -\frac{\rho}{2\varepsilon}(r_2^2 - r_1^2)$. Постоянную интегрирования C_4 находим из условия, что при $r = r_2$ $\varphi_3 = 0$:

$$0 = C_3 \ln r_2 + C_4; \quad C_4 = -C_3 \ln r_2 = \frac{\rho}{2\varepsilon}(r_2^2 - r_1^2) \ln r_2.$$

9.22. Рассчитать поле проводящего шара, помещенного в однородное поле E_0 .

Решение. Проводящее тело, внесенное в однородное поле, искажает его. Чтобы рассчитать поле в присутствии сторонних тел, используют уравнения Пуассона и Лапласа. Для шара поле будет характеризоваться сферической симметрией. При этом поле не будет зависеть от координаты α (рис. 9.17), и уравнение Лапласа в сферической системе координат примет вид:

$$\frac{1}{R^2} \cdot \frac{\partial}{\partial R} \left(R^2 \frac{\partial \varphi}{\partial R} \right) + \frac{1}{R^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial \theta} \right) = 0.$$

Решение этого уравнения обычно ищут в виде произведения двух функций, одна из которых зависит только от координаты r , другая — только от координаты θ . Так как решение достаточно громоздко и приводится во многих учебниках и задачниках по ТОЭ, приведем здесь лишь конечный результат.

Если металлический шар не заряжен, то

$$\varphi = E_0 \left(\frac{r_0^3}{R^2} - R \right) \cos \theta;$$

$$E_r = E_0 \left(\frac{2r_0^3}{R^3} + 1 \right) \cos \theta;$$

$$E_\theta = E_0 \left(\frac{r_0^3}{R^3} - 1 \right) \sin \theta; \quad E = \sqrt{E_r^2 + E_\theta^2}.$$

Наибольшая напряженность поля будет в точке $R = r_0$; $\theta = 0$: $E_{\max} = 3E_0$.

Таким образом, капелька воды, попав в бак трансформатора с масляным заполнением, вызовет значительное местное увеличение напряженности поля.

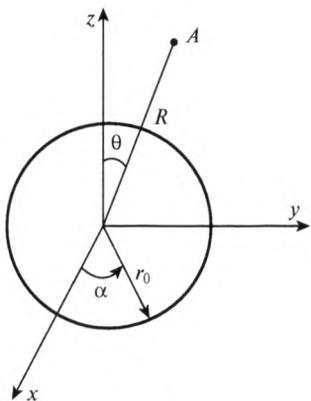


Рис. 9.17

Найдем плотность зарядов, индуцированных на поверхности шара. При $R = r_0 \sigma = D = 3\epsilon E_0 \cos \theta$. На одной половине шара индуцируется положительный заряд; на другой — равный ему по величине отрицательный заряд:

$$|q| = \int_{0,5S} \sigma ds = \int_0^{0,5\pi} 3\epsilon E_0 \cos \theta \cdot 2\pi r_0 \sin \theta \cdot r_0 d\theta = 3\epsilon E_0 \pi r_0^2.$$

На рисунке 9.18 изображена картина поля.

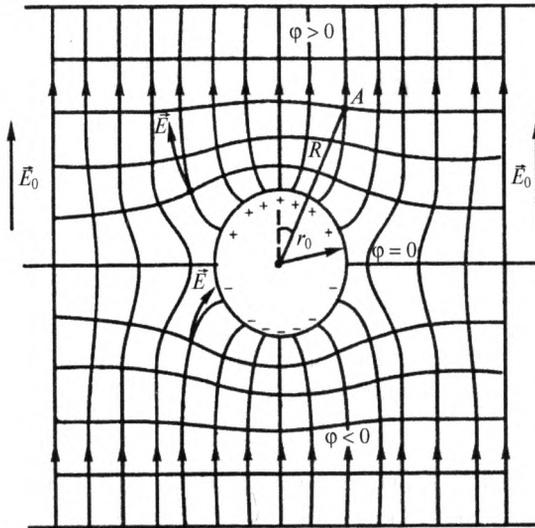


Рис. 9.18

Если помещенный в однородное поле металлический шар заряжен (величина заряда Q), то

$$\varphi = \frac{Q}{4\pi\epsilon R} + E_0 \left(\frac{r_0^3}{R^2} - r_0 \right) \cos \theta; \quad E_r = \frac{Q}{4\pi\epsilon R^2} + E_0 \left(\frac{2r_0^3}{R^3} + 1 \right) \cos \theta;$$

$$E_\theta = E_0 \left(\frac{r_0^3}{R^3} - 1 \right) \sin \theta.$$

ГЛАВА 10

РАСЧЕТ ЭЛЕКТРИЧЕСКИХ ПОЛЕЙ ОТ ПОСТОЯННЫХ ТОКОВ

10.1. Основные аналитические зависимости

Характеристики ЭП — \vec{E} , \vec{D} от постоянных токов могут быть найдены из уравнений ЭМП (В. 1)–(В. 7):

$$\operatorname{rot} \vec{E} = 0; \quad (10.1)$$

$$\operatorname{div} \vec{D} = \rho; \quad (10.2)$$

$$\vec{D} = \epsilon \vec{E}; \quad (10.3)$$

$$\vec{B} = \mu \vec{H}; \quad (10.4)$$

$$\vec{J} = \gamma \vec{E}. \quad (10.5)$$

Линии тока в проводящей среде всюду непрерывны (принцип непрерывности электрического тока):

$$\operatorname{div} \vec{J} = 0. \quad (10.6)$$

Таким образом, уравнения (10.1)–(10.3) представляют собой законы электрических цепей постоянного тока (постоянного, так как закон Ома в виде (10.1) учитывает только активное сопротивление проводника, в отличие от цепей переменного тока, где необходимо также учитывать емкость конденсатора и индуктивность катушки. Поэтому задачи на расчет цепей постоянного тока, которые приводятся в разделе курса ТОЭ «Теория линейных электрических цепей постоянного тока», по существу являются примерами расчета ЭП поля постоянных токов.

Поле в диэлектрике, окружающем проводники с токами, характеризуется уравнениями: $\operatorname{rot} \vec{E} = 0$; $\operatorname{div} \vec{D} = 0$; $\vec{D} = \epsilon \vec{E}$. Так как $\operatorname{rot} \vec{E} = 0$, то поле потенциальное, $\vec{E} = -\operatorname{grad} \phi$. Так как $\operatorname{rot} \vec{E} = 0$, $\operatorname{div} \vec{E} = 0$, то

$$\operatorname{div}(\operatorname{grad} \phi) = 0; \quad \nabla^2 \phi = 0, \quad (10.7)$$

в декартовой системе координат

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial z^2} = 0. \quad (10.8)$$

Таким образом, в диэлектрике, окружающем проводники с токами, поле описывается тем же уравнением Лапласа, как и в ЭСП.

Граничные условия на поверхности проводник—диэлектрик в рассматриваемом поле отличаются от электростатического. В ЭСП поверхность проводящего тела является поверхностью равного потенциала, линии напряженности нормальны к поверхностям проводящих тел $\vec{E} = E_n$ (рис. 10.1).

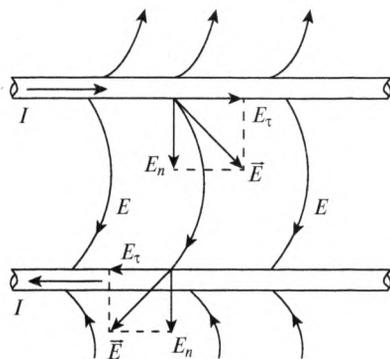


Рис. 10.1

В рассматриваемом поле векторы напряженности имеют не только нормальную, но и тангенциальную составляющую E_τ (при прохождении тока по проводнику возникает падение напряжения $U = E_\tau l$). Поэтому линии напряженности поля подходят к проводнику под углом, отличным от прямого. Практически же обычно $E_\tau \ll E_n$ и касательной составляющей можно пренебречь. Поэтому при рассмотрении ЭП в диэлектрике, окружающем проводники с токами, можно использовать решения, полученные при рассмотрении задач при расчете ЭСП.

Решения, полученные при рассмотрении электростатических задач, можно использовать также при анализе ЭП внутри проводящих тел с постоянными токами, так как между уравнениями ЭП в проводящей среде и уравнениями ЭСП существует аналогия, приведенная в табл. 10.1.

В таблице 10.1 ψ_D — поток вектора \vec{D} сквозь некоторую поверхность S равен части заряда заряженного тела.

Используя вышеприведенную аналогию, можно получить решение задач ЭП в проводящей среде на основе решений ЭСП и наоборот, если заменить:

$$\varepsilon \leftrightarrow \gamma, \quad D \leftrightarrow J, \quad C \leftrightarrow G, \quad \psi_D \leftrightarrow I.$$

Таблица 10.1

ЭП в проводящей среде	ЭСП
$\operatorname{rot} \vec{E} = 0$	$\operatorname{rot} \vec{E} = 0$
$\operatorname{div} \vec{J} = 0$	$\operatorname{div} \vec{D} = 0$
$\int_S \vec{J} d\vec{s} = I$	$\int_S \vec{D} d\vec{s} = \Psi_D \quad (\Psi_D = \Delta Q)$
$I = GU$	$\Psi_D = CU$

Аналогичны также и граничные условия на поверхности раздела сред в электростатическом и электрическом поле в проводящей среде.

10.2. Электрическое поле в проводящей среде

10.1. Плоский конденсатор с многослойным диэлектриком имеет площадь обкладок $S = 25 \text{ см}^2$, толщины слоев $d_1 = 2 \text{ см}$, $d_2 = 3 \text{ см}$, $d_3 = 2 \text{ см}$ и удельные проводимости в слоях: $\gamma_1 = 10^{-10} \text{ 1/Ом}\cdot\text{м}$; $\gamma_2 = 1,5 \cdot 10^{-10} \text{ 1/Ом}\cdot\text{м}$; $\gamma_3 = 10^{-10} \text{ 1/Ом}\cdot\text{м}$. Определить сопротивление утечки и емкость конденсатора, используя метод электростатической аналогии.

Решение. Электрический ток проводимости в конденсаторе вследствие конечной проводимости диэлектриков одинаков во всех слоях и равен $I = JS$, т. к. S одинаково, то и δ одинаково во всех слоях, поэтому $E_1 = J/\gamma_1$, $E_2 = J/\gamma_2$, $E_3 = J/\gamma_3$;

$$U = E_1 d_1 + E_2 d_2 + E_3 d_3 = J \left(\frac{d_1}{\gamma_1} + \frac{d_2}{\gamma_2} + \frac{d_3}{\gamma_3} \right) = \frac{I}{S} \left(\frac{d_1}{\gamma_1} + \frac{d_2}{\gamma_2} + \frac{d_3}{\gamma_3} \right);$$

$$R = \frac{U}{I} = \frac{1}{S} \left(\frac{d_1}{\gamma_1} + \frac{d_2}{\gamma_2} + \frac{d_3}{\gamma_3} \right).$$

Проводимость утечки $G_{\text{ут}} = 1/R$, откуда

$$C = \frac{S}{\frac{d_1}{\epsilon_1} + \frac{d_2}{\epsilon_2} + \frac{d_3}{\epsilon_3}}.$$

10.2. Коаксиальный кабель имеет радиус прямого провода (жилы) $r_1 = 1 \text{ см}$; внутренний радиус обратного провода (оболочки) $r_3 = 3 \text{ см}$. Изоляция состоит из двух слоев. Граничная поверхность между ними имеет радиус $r_2 = 2 \text{ см}$. Удельная проводимость слоев: $\gamma_1 = 10^{-10} \text{ 1/Ом}\cdot\text{м}$; $\gamma_2 = 2 \cdot 10^{-10} \text{ 1/Ом}\cdot\text{м}$. Определить сопротивление утечки $R_{\text{ут}}$ и емкость кабеля на 1 км длины.

Решение. По аналогии с предыдущей задачей

$$E = \frac{J}{\gamma} = \frac{I}{\gamma S},$$

где I — ток утечки; $S = 2\pi r l$ — поверхность цилиндра.

$E_1 = \frac{I}{2\pi r_1 \gamma_1}$ — напряженность поля на внутренней границе 1-го слоя.

$E_2 = \frac{I}{2\pi r_2 \gamma_2}$ — то же на внутренней границе 2-го слоя (рис. 10.2).

Напряжение между проводами кабеля

$$U = \int_{r_1}^{r_2} E_1 dr + \int_{r_2}^{r_3} E_2 dr = \frac{\tau}{2\pi l} \left[\frac{1}{\gamma_1} \ln r \Big|_{r_1}^{r_2} + \frac{1}{\gamma_2} \ln r \Big|_{r_2}^{r_3} \right];$$

$$R_{\text{ут}} = \frac{U}{I} = \frac{1}{2\pi l} \left(\frac{1}{\gamma_1} \ln \frac{r_2}{r_1} + \frac{1}{\gamma_2} \ln \frac{r_3}{r_2} \right); \quad G_{\text{ут}} = \frac{1}{R_{\text{ут}}}; \quad C = \frac{2\pi l}{\frac{1}{\epsilon_1} \ln \frac{r_2}{r_1} + \frac{1}{\epsilon_2} \ln \frac{r_3}{r_2}}.$$

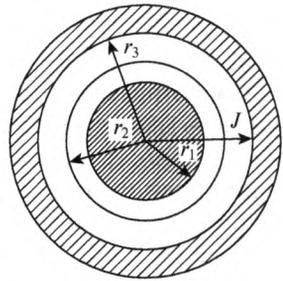


Рис. 10.2

10.3. Плоский конденсатор с двухслойным диэлектриком $d_1 = d_2 = 1$ см; $\epsilon_1 = 2\epsilon_0$; $\epsilon_2 = 4\epsilon_0$; $\gamma_1 = 2 \cdot 10^{-10}$ См/см; $\gamma_2 = 10^{-10}$ См/см подключен к источнику постоянного напряжения 3 кВ. Требуется: 1) определить напряженность поля, сопротивление конденсатора и мощность, выделяющуюся в единице объема диэлектрика, а также свободный и связанный поверхностные заряды на границе слоев; 2) как изменится решение задачи, если диэлектрик будет идеальным ($\gamma_1 = \gamma_2 = 0$)?

Решение. По определению напряжение $U = U_1 + U_2 = E_1 d_1 + E_2 d_2$; граничное условие $J_{1n} = J_{2n}$ (т.е. $\gamma_1 E_{1n} = \gamma_2 E_{2n}$). Из двух уравнений находим $E_1 = 1$ кВ/см; $E_2 = 2$ кВ/см; $J_1 = J_2 = 0,2$ мкА/см²; $D_1 = \epsilon_1 E_1 = 2000\epsilon_0$ Кл/см²; $D_2 = \epsilon_2 E_2 = 8000\epsilon_0$ Кл/см²; $P_1 = (\epsilon_1 - 1)E_1 = 1000\epsilon_0$ Кл/см²; $P_2 = (\epsilon_2 - 1)E_2 = 6000\epsilon_0$ Кл/см².

Тогда $q_{\text{своб}} = D_2 - D_1 = 6000\epsilon_0$ Кл/см²; $q_{\text{связ}} = P_1 - P_2 = -5000\epsilon_0$ к положительному; $\vec{p} = Q\vec{l}$, где $Q > 0$ и \vec{l} — вектор, направленный в ту же

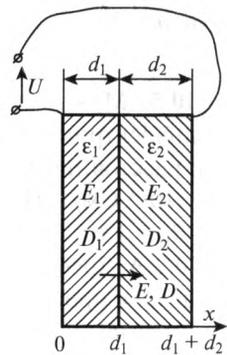


Рис. 10.3

сторону, где ϵ_0 — в Ф/см. Потери активной мощности в единице объема $p_1 = \gamma_1 E_1^2 = 0,2$ мкВт/см³ и $p_2 = \gamma_2 E_2^2 = 0,4$ мкВт/см³.

Сопrotивление конденсатора на единицу площади пластин $R_0 = U/J = 1,5 \cdot 10^{10}$ Ом/см². При $\gamma_1 = \gamma_2 = 0$ по прежнему $U = U_1 + U_2 = E_1 d_1 + E_2 d_2$; граничное условие $D_{1n} = D_{2n}$, т.е. $\epsilon_1 E_1 = \epsilon_2 E_2$. Из двух уравнений получим $E_1 = 2$ кВ/см; $E_2 = 1$ кВ/см; $D_1 = D_2 = 4000\epsilon_0$ Кл/см²; $P_1 = (\epsilon_1 - 1)E_1 = 2000\epsilon_0$ Кл/см²; $P_2 = (\epsilon_2 - 1)E_2 = 3000\epsilon_0$ Кл/см²; $q_{\text{своб}} = D_2 - D_1 = 0$; $q_{\text{связ}} = -1000\epsilon_0$ Кл/см².

10.4. К плоской проводящей шайбе (рис. 10.4) подводится напряжение от источника постоянного напряжения 1,57 В при помощи двух медных радиально расположенных пластин, врезанных в шайбу. Проводимость материала шайбы $\gamma = 2 \cdot 10^6$ См/м. Требуется определить

наибольшее и наименьшее значения плотности тока в шайбе и ток через источник. Размеры шайбы: $r_1 = 50$ мм; $r_2 = 80$ мм; толщина $d = 1$ мм. Потенциал каждой медной пластины считать во всех ее точках постоянным.

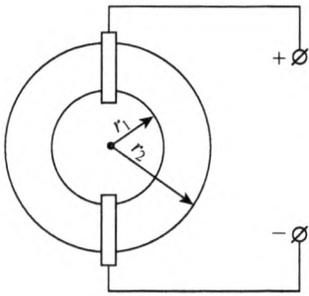


Рис. 10.4

Решение. Считая, что линии плотности тока и напряженности поля совпадают с полуокружностями и напряженность поля зависит от радиуса, из уравнения $U = \int \vec{E} d\vec{l}$ получаем $E = U/\pi r$ и $J = \gamma E = U\gamma/\pi r$. Тогда

$$J_{\max} = U\gamma/\pi r_1 = 2 \cdot 10^7 \text{ А/м}^2; \quad J_{\min} = U\gamma/\pi r_2 = 1,25 \cdot 10^7 \text{ А/м}^2,$$

$$\text{а ток } I = 2 \int \vec{J} d\vec{s} = 2 \int_{r_1}^{r_2} \frac{U\gamma d}{\pi r} dr = \frac{2U\gamma d}{\pi} \ln \frac{r_2}{r_1} = 940 \text{ А.}$$

10.5. Между электродами сферического конденсатора находится диэлектрик, удельная проводимость которого меняется в функции расстояния R от центра сфер по закону: $\gamma = \gamma_0/R$, где $R_1 < R < R_2$, $\gamma_0 = 10^{-4}$ См/м. Радиусы внутренней и внешней сфер соответственно: $R_1 = 1$ см, $R_2 = 5$ см. Ток утечки через несовершенную изоляцию $I = 0,2$ А. Требуется найти закон изменения потенциала между электродами и проводимость утечки конденсатора.

Решение. Так как плотность утечки $J = I/4\pi R^2$, напряженность ЭП $E = IR/(4\pi R^2 \gamma_0)$. Потенциал между электродами изменяется по закону $\phi = (I/4\pi \gamma_0) \ln(1/R) = C$. Постоянную интегрирования C найдем из ус-

ловия $\varphi = 0$ при $R = R_2$: $C = (I/4\pi\gamma_0)\ln R_2$. Закон изменения потенциала между электродами: $\varphi = \frac{I}{4\pi\gamma_0}\ln(R_2/R) = 159\ln\frac{5 \cdot 10^{-2}}{R}$ В; напряжение между электродами: $U = (I/4\pi\gamma_0)\ln(R_2/R_1) = 256$ В; полная проводимость утечки: $G = I/U = 7,82 \cdot 10^{-4}$ См.

10.6. Плоский конденсатор заполнен диэлектриком с $\varepsilon = 5\varepsilon_0$ и проводимостью $\gamma = \gamma_0 - kx$, где $\gamma_0 = 10^{-10}$ См/см, $k = 0,5 \cdot 10^{-10}$ См/см², x — координата, перпендикулярная плоскости пластин (рис. 10.5). Расстояние между обкладками $d = 1$ см, конденсатор подключен к источнику постоянного напряжения $U = 1$ кВ. Требуется определить распределение свободных и связанных объемных зарядов.

Решение. По закону Ома $E = J/\gamma$; в постоянном поле $\operatorname{div}\vec{J} = 0$ или в декартовой системе координат (при $\vec{J} = J_x$) $\frac{\partial J_x}{\partial x} = 0$ и, следовательно, $\vec{J} = \text{const}$. Выразим напряжение на конденсаторе через напряженность поля:

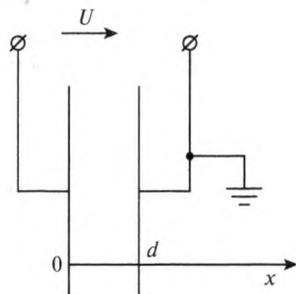


Рис. 10.5

$$U = \int_0^d \vec{E} d\vec{x} = \int_0^d \frac{\vec{J} d\vec{x}}{\gamma_0 - kx} = -\frac{J}{k} \ln(\gamma_0 - kx) \Big|_0^d,$$

откуда

$$U = \frac{J}{k} \ln \frac{\gamma_0}{\gamma_0 - kd} = \frac{J}{G_0},$$

где G_0 — проводимость конденсатора на единицу площади пластин. В нашем случае $E = \frac{J}{\gamma} = \frac{722}{1-0,5x}$ В/см; $D = \varepsilon E = \frac{3610\varepsilon_0}{1-0,5x}$ Кл/см²;

$$P = (\varepsilon - \varepsilon_0)E \approx \frac{2900\varepsilon_0}{1-0,5x} \text{ Кл/см}^2; \quad \rho = \frac{dD}{dx} = 3610\varepsilon_0 \frac{0,5}{(1-0,5x)^2} = \frac{1805\varepsilon_0}{(1-0,5x)^2}$$

$$\text{Кл/см}^3; \quad \rho_{\text{связ}} = -\frac{dP}{dx} = -\frac{1450\varepsilon_0}{(1-0,5x)^2} \text{ Кл/см}^2.$$

10.7. К центрам противоположных торцов тонкостенной цилиндрической банки диаметром D и высотой h припаяны провода диаметром d (рис. 10.6, а). Определить сопротивление банки R , если она сделана из жести толщиной δ с удельной проводимостью γ ($\delta \ll d$).

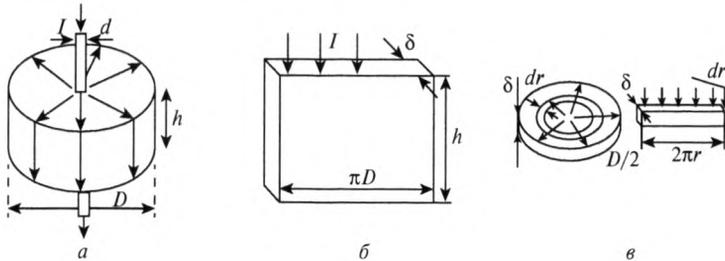


Рис. 10.6

Решение. Ток последовательно протекает по верхнему основанию, боковой поверхности и нижнему основанию банки, поэтому ее сопротивление $R = R_{\text{осн}} + R_{\text{бок}} + R_{\text{осн}}$. Боковая поверхность имеет поперечное сечение $S = \pi D \cdot \delta$ (рис. 10.6, б), длину $l = h$, поэтому $R_{\text{бок}} = l/\gamma S = h/(\gamma \pi D \delta)$.

Основания разбиваем на узенькие кольца с радиусом r и шириной dr (рис. 10.6, в), которые имеют сопротивление $dR = dr/(\gamma \cdot 2\pi r \delta)$.

Ток протекает через кольца последовательно, поэтому сопротивление основания можно вычислить по формуле

$$R_{\text{осн}} = \int dR = \int_{0,5d}^{0,5D} \frac{dr}{\gamma 2\pi r \delta} = \frac{\ln(D/d)}{\gamma 2\pi \delta}.$$

Искомое сопротивление банки

$$R = \frac{1}{\gamma \pi \delta} \left(\frac{h}{D} + \ln \frac{D}{d} \right).$$

10.8. Сферический заземлитель радиуса a находится в среде с относительно небольшой проводимостью γ . Ток, подводимый к заземлителю, I . Определить сопротивление растеканию R_p . Заземлитель закрыт на глубину, во много раз превышающую его радиус. Полагая, что через заземлитель произошло замыкание на землю с линии $U = 35$ кВ, $\gamma = 10^{-2}$ 1/Ом·м; найти ток короткого замыкания, если $a = 0,5$ м.

Решение. По условиям симметрии ток будет растекаться равномерно во все стороны. Линии плотности тока будут радиальными прямыми (рис. 10.7). На расстоянии r от центра заземлителя значение плотности тока I . В той же точке напряженность ЭП $E = \frac{J}{\gamma} = \frac{I}{4\pi\gamma r^2}$.

Напряжение между рассматриваемой точкой в земле и поверхностью заземлителя

$$\begin{aligned}
 U &= \int_a^r E dr = \frac{1}{4\pi\gamma} \int_a^r \frac{dr}{r^2} = \\
 &= \frac{1}{4\pi\gamma} \left(-\frac{1}{r} \right) \Big|_a^r = \frac{1}{4\pi\gamma} \left(\frac{1}{a} - \frac{1}{r} \right). \\
 J &= \frac{I}{4\pi r^2}.
 \end{aligned}$$

С увеличением расстояния r напряжение стремится к пределу

$$U_p = \frac{1}{4\pi\gamma a}.$$

Это предельное напряжение называется напряжением растекания. На расстоянии $r = 100a$ с достаточной степенью точности можно считать $U = U_p$. Отношение U_p к I называют сопротивлением растекания (или сопротивлением заземлителя) $R_p = \frac{U_p}{I} = \frac{1}{4\pi\gamma a}$.

Чем больше r , тем меньше почва влияет на сопротивление заземления. Численное значение $R_p = \frac{1}{4\pi \cdot 10^{-2} \cdot 0,5} = 15,9$ Ом. Ток короткого замыкания через заземлитель $I = \frac{U}{R_p} = \frac{35 \cdot 10^3}{15,9} = 2200$ А.

10.9. Полусферический заземлитель радиуса a погружен в землю вровень с ее поверхностью (рис. 10.8). Определить напряжение шага (шаговое напряжение) $U_{\text{ш}}$, под которым может оказаться человек, приближающийся к заземлителю. Ток I , протекающий через заземлитель, задан.

Решение. Поверхность полусферы в два раза меньше поверхности сферы, поэтому на произвольном расстоянии r от центра заземлителя

$$E = \frac{J}{\gamma} = \frac{I}{\gamma S} = \frac{I}{2\pi\gamma r^2}.$$

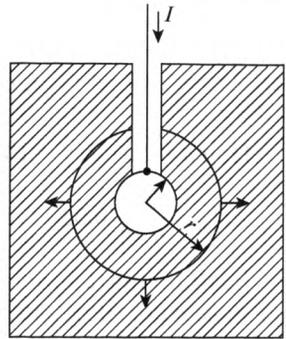


Рис. 10.7

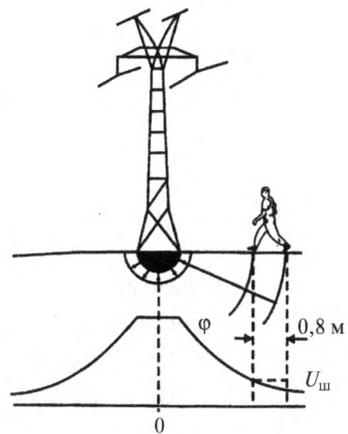


Рис. 10.8

Считая длину шага равной 0,8 м, найдем

$$U_{\text{ш}} = \int_r^{r+0,8} E dr = \frac{I}{2\pi\gamma} \left(\frac{1}{r} - \frac{1}{r+0,8} \right) = \frac{0,8I}{2\pi\gamma} \frac{1}{r(r+0,8)}. \quad (10.9)$$

При $a = 50$ см; $\gamma = 10^{-2}$ 1/Ом·м; $I = 1000$ А; $r = 3$ м

$$U_{\text{ш}} = \frac{10^5}{6,28} (0,33 - 0,264) = 1050 \text{ В; при } r = 5 \text{ м, } U_{\text{ш}} = 445 \text{ В.}$$

Если принять потенциал $\varphi = 0$ при $r \rightarrow \infty$, то в остальных точках на поверхности земли, начиная от $r = a$, потенциал $\varphi = \tau / (2\pi\gamma r) = U_p(a/r)$.

На рисунке 10.8 показана кривая $\varphi = f(r)$.

10.10. Часто применяют заземлители в виде труб, забитых вертикально в землю. Определить сопротивление заземлителя, максимальное шаговое напряжение вблизи цилиндрического заземлителя длиной l , радиусом r_0 (рис. 10.9) при протекании по нему тока I , если удельная проводимость земли γ постоянна.

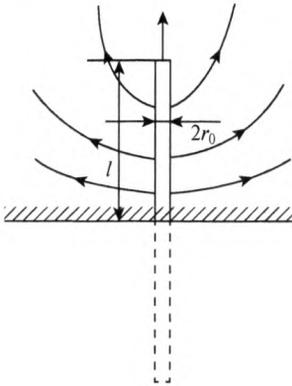


Рис. 10.9

Решение. Пользуемся методом электростатической аналогии и зеркальных изображений. Можно показать, что емкость цилиндра длиной $2l$ и радиусом r_0

$$C = 4\pi\epsilon / \left(\operatorname{Arsh} \frac{2l}{r_0} - \sqrt{\frac{r_0^2}{(2l)^2} + 1} + \frac{r_0}{2l} \right).$$

$$\text{Так как } \operatorname{Arsh} \frac{2l}{r_0} = \ln \left(\frac{2l}{r_0} + \sqrt{\left(\frac{2l}{r_0} \right)^2 + 1} \right),$$

то при $2l \gg r_0$

$$\operatorname{Arsh} \frac{2l}{r_0} - \sqrt{\frac{r_0^2}{(2l)^2} + 1} + \frac{r_0}{2l} \approx \ln \frac{4l}{r_0} - 1 = \ln \frac{2l}{r_0} + \ln 2 - 1 = \ln \frac{2l}{r_0} - 0,307 \approx \ln \frac{2l}{r_0}.$$

Таким образом, емкость $C = 4\pi\epsilon l / (\ln(2l/r_0))$. Следовательно, проводимость системы из электрода и его зеркального отображения $G = 4\pi\gamma l / (\ln(2l/r_0))$. Проводимость трубы как половины этой системы $G = 2\pi\gamma l / (\ln(2l/r_0))$. Сопротивление заземлителя (оно же сопротивление растекания) $R = \ln \frac{2l}{r_0} / 2\pi\gamma l$.

При определении проводимости заземлителя (при $2l/r_0 \gg 1$) пришли к выводу, что поле такого заземлителя соответствует полю бесконечного цилиндра (на небольших расстояниях от заземлителя): $E = \tau/(2\pi r\epsilon) = Q/(2\pi r\epsilon l)$. Производя замену $Q \rightarrow I$, $\epsilon \rightarrow \gamma$, имеем $E = I/(2\pi r\gamma l)$, где r — расстояние от оси заземлителя.

При длине шага 0,8 м

$$U_{\text{ш}} = \int_r^{r+0,8} \vec{E} d\vec{r} = \frac{I}{2\pi\gamma l} \int_r^{r+0,8} \frac{dr}{r} = \frac{I}{2\pi\gamma l} \ln \frac{r+0,8}{r}.$$

Максимальное шаговое напряжение будет при $r = r_0$

При $I = 100$ А, $\gamma = 10^{-2}$ 1/Ом·м, $l = 2$ м, $r_0 = 4$ см, $U_{\text{ш}} = 2424$ В.

10.11. Заземление проводов длинной телеграфной линии осуществлено посредством металлических шаров с радиусами r_1 и r_2 , глубоко зарытых в землю. Удельная проводимость грунта вблизи заземлителей равна соответственно γ_1 и γ_2 . Найти сопротивление земли между заземлителями.

Решение. Вдали от заземлителей линии тока в земле сильно расходятся; сечение участка, который они пересекают, становится очень большим и поэтому его сопротивлением можно пренебречь. Таким образом, сопротивление земли между заземлителями приблизительно равно сумме сопротивлений заземлителей (см. задачу 10.8):

$$R_3 = R_{p1} + R_{p2} = \frac{1}{4\pi} \left(\frac{1}{\gamma_1 r_1} + \frac{1}{\gamma_2 r_2} \right).$$

10.12. Два полусферических заземлителя, имеющие радиус $r_0 = 20$ см, помещены на расстояние $d = 15$ м друг от друга (рис. 10.10). При напряжении $U = 6$ В между ними идет ток $I = 75$ мА. Определить проводимость почвы, пренебрегая ее неоднородностью и контактным сопротивлением между почвой и заземлителем.

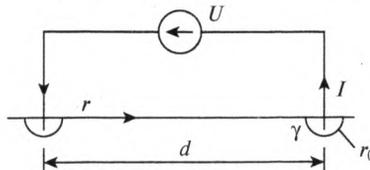


Рис. 10.10

Решение. Сопротивление между заземлителями $R = \frac{U}{I} = \frac{6}{0,075} = 80$ Ом. Распределение тока в почве можно рассматривать как сумму

токов растекания каждого из заземлителей. На кратчайшем пути между заземлителями плотности созданных ими токов складываются. Для определения напряжения между заземлителями достаточно на этом участке удвоить падение напряжения, созданное током, растекающимся с одного из заземлителей. От каждого из заземлителей

$$U = \int_{r_0}^{d-r_0} \vec{E} d\vec{r} = \int_{r_0}^{d-r_0} \frac{J}{\gamma} dr = \int_{r_0}^{d-r_0} \frac{I dr}{\gamma S_{\text{заземл}}}$$

От обоих заземлителей

$$U = 2 \int_{r_0}^{d-r_0} \frac{I dr}{2\pi\gamma r^2} = -\frac{I}{\pi\gamma r} \Big|_{r_0}^{d-r_0} = \frac{I(a-2r_0)}{\pi\gamma r_0(a-r_0)}$$

Сопrotивление растекания $R_p = \frac{U}{I} = \frac{a-2r_0}{\pi\gamma r_0(a-r_0)}$, откуда

$$\gamma = \frac{a-2r_0}{R_p \pi r_0(a-r_0)} \approx 0,02 \text{ Ом}^{-1} \cdot \text{м}^{-1}$$

10.13. Полусферический заземлитель диаметром 4 м находится в земле с проводимостью $\gamma_1 = 5 \cdot 10^{-4}$ См/см. На расстоянии $h = 50$ м от заземлителя проходит плоская граница раздела, за которой земля имеет проводимость $\gamma_2 = 10^{-4}$ См/см. С заземлителя растекается ток $I = 2000$ А (рис. 10.11). Требуется: 1) построить зависимость шагового напряжения (напряжение между точками, находящимися на расстоянии 0,8 м) от координаты x . Как будет меняться эта зависимость при изменении отношения проводимостей сред? 2) построить ту же зависимость при $\gamma_2 = 10^{-3}$ См/см.

Решение. Задачу можно решить методом отображений. Для расчета поля в 1-й среде введем, кроме тока I , фиктивный ток

$$I_1 = I \frac{\gamma_1 - \gamma_2}{\gamma_1 + \gamma_2} = k_1 I, \text{ для расчета поля}$$

во 2-й среде — фиктивный ток

$$I_2 = I \frac{2\gamma_2}{\gamma_1 + \gamma_2} = k_2 I. \text{ Тогда, используя решение (10.9), в 1-й среде:}$$

$$U_{\text{ш1}} = \frac{0,8I}{2\pi\gamma_1} \times$$

$$\times \left\{ \frac{1}{x(x+0,8)} - \frac{k_1}{(2h-x-0,8)(2h-x)} \right\} \text{ В;}$$

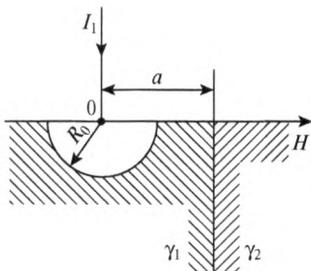


Рис. 10.11

во 2-й среде: $U_{ш2} = \frac{k_2 I}{2\pi\gamma_2} \frac{0,8}{x(x+0,8)}$ В. При $x = h$

$$\frac{U_{ш1}}{U_{ш2}} = \frac{\gamma_2}{\gamma_1 k_2} \left(1 - k_1 \frac{h+0,8}{h-0,8} \right) \approx \frac{\gamma_2}{\gamma_1}.$$

Если $\gamma_1 = 5 \cdot 10^{-4}$ См/см, $\gamma_2 = 10^{-4}$ См/см, то

$$U_{ш1} = 0,51 \cdot 10^4 \left\{ \frac{1}{x(x+0,8)} - \frac{0,66}{(100-x-0,8)(100-x)} \right\} \text{ В},$$

$$U_{ш2} = 0,85 \cdot 10^4 \frac{1}{x(x+0,8)} \text{ В (кривая 1 на рис. 10.12).}$$

При $x = h$ получим $U_{ш1} = 0,67 \text{ В}$ и $U_{ш2} = 3,35 \text{ В}$. На рисунке 10.12 построена кривая 2 (пунктир) для случая $\gamma_2 = 10^{-3}$ См/см.

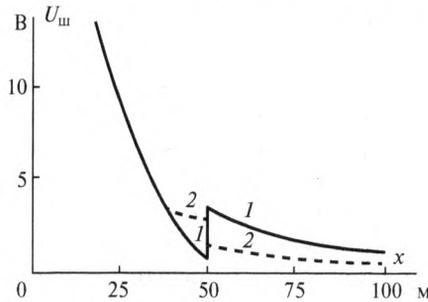


Рис. 10.12

10.14. Сферический заземлитель радиусом $R_0 = 2$ м расположен в земле с проводимостью $\gamma_1 = 2 \cdot 10^{-4}$ См/см на расстоянии $h = 10$ м от ее поверхности (рис. 10.13). В заземлитель втекает ток $I = 1000$ А. Определить распределение шагового напряжения и поверхностного заряда на границе.

Решение. Для расчета поля в земле введем фиктивный ток

$$I_1 = I[(\gamma_1 - \gamma_2)/(\gamma_1 + \gamma_2)] = I = 1000 \text{ А}.$$

Так как $\gamma_2 = 0$, для расчета поля в воздухе введем фиктивный заряд

$$Q_2 = 2I\epsilon_0/\gamma_1 = 0,886 \cdot 10^{-6} \text{ Кл}.$$

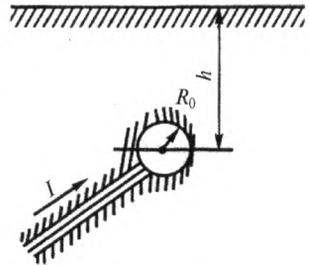


Рис. 10.13

Выражение тока I_1 и заряда Q_2 через ток I получаются из граничных условий $\gamma_1 E_{1n} = \gamma_2 E_{2n}$, $E_{1t} = E_{2t}$. Шаговое напряжение (учитывая токи I и I_1):

$$U_{\text{ш}} = \frac{I}{2\pi\gamma} \left\{ \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}} - \frac{1}{\sqrt{(x+0,8)^2 + h^2}} \right\} =$$

$$= 8 \cdot 10^3 \left\{ \frac{1}{\sqrt{x^2 + 100}} - \frac{1}{\sqrt{(x+0,8)^2 + 100}} \right\} \text{ В};$$

поверхностный заряд (учитывая, что $E_{1n} = J_{1n}/\gamma_1 = J_{2n}/\gamma_2 = 0$):

$$q_S = \epsilon_0 (E_{2n} - E_{1n}) = \epsilon_0 E_{2n} = \frac{Q_2 h}{4\pi(h^2 + x^2)^{1,5}} =$$

$$= \frac{2I\epsilon_0 h}{4\pi\gamma(h^2 + x^2)^{1,5}} = \frac{0,7}{(x^2 + 100)^{1,5}} \text{ мкКл/м}^2,$$

где x — расстояние в метрах.

10.15. 1. Составить схемы для определения частичных емкостей трехфазной линии над землей (рис. 10.14) при помощи электролитической ванны, глубина которой $h = 20$ мм. 2. Подобрать приборы с необходимыми пределами измерений, если проводимость электролита $\gamma = 2 \cdot 10^{-2}$ См/см и при моделировании размеры линии уменьшены в 10 раз. В распоряжении экспериментатора имеется источник напряжения с ЭДС 50 В. 3. Определить необходимую проводимость электролита, если в распоряжении экспериментатора имеются приборы: вольтметр на 50 В и миллиамперметр на 300 мА.

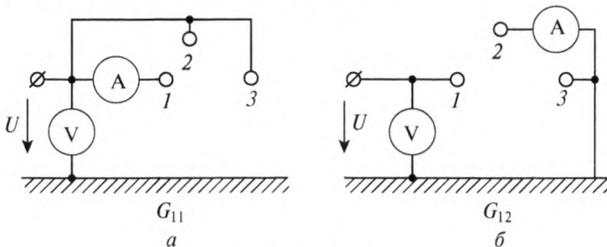


Рис. 10.14

Решение. По определению частичных емкостей:

$$C_{11} = \tau_1 / (\varphi_1 - \varphi_0); \quad C_{22} = \tau_2 / (\varphi_2 - \varphi_0); \quad C_{33} = \tau_3 / (\varphi_3 - \varphi_0) \quad \text{при } \varphi_1 = \varphi_2 = \varphi_3;$$

$$C_{12} = C_{21} = \tau_2 / (\varphi_1 - \varphi_2) \quad \text{при } \varphi_0 = \varphi_2 = \varphi_3;$$

$$C_{13} = C_{31} = \tau_1 / (\varphi_1 - \varphi_3) \quad \text{при } \varphi_1 = \varphi_2 = \varphi_0;$$

$$C_{23} = C_{32} = \tau_2 / (\varphi_2 - \varphi_3) \quad \text{при } \varphi_1 = \varphi_2 = \varphi_0.$$

1. Вместо частичных емкостей будем измерять частичные проводимости G ; затем вычислим емкости по формуле $C = G(\varepsilon/\gamma)$. Схемы для измерения проводимостей G_{11} и G_{12} приведены на рис. 10.14, *a* и *б*.

2. Наибольшие из частичных емкостей данной системы $C_{11} = C_{33} = 7,05 \text{ мкФ/м}$. Следовательно, наибольшая проводимость (рис. 10.14, *a*) $G_{11} = C_{11}\gamma/\varepsilon_0 = I_1/hU$. Отсюда наибольший ток при заданном напряжении источника $I_{\max} = UhC_{11}\gamma/\varepsilon_0 = 1,59 \text{ А}$.

3. При заданном максимальном токе $I_{\max} = 300 \text{ мА}$ проводимость электролита находится из того же соотношения

$$\gamma = I_{\max}\varepsilon_0/UC_{11}h = 3,77 \cdot 10^{-3} \text{ См/см.}$$

ГЛАВА 11

РАСЧЕТ МАГНИТНЫХ ПОЛЕЙ ПОСТОЯННЫХ ТОКОВ

11.1. Основные аналитические зависимости

Уравнения магнитного поля (МП) постоянных токов, как это следует из общих уравнений ЭМП, (В. 1)—(В. 6), имеют вид:

$$\operatorname{rot} \vec{H} = \vec{J}, \quad (11.1)$$

$$\operatorname{div} \vec{B} = 0, \quad (11.2)$$

$$\vec{B} = \mu \vec{H}. \quad (11.3)$$

В соответствии с уравнением (11.1) МП является вихревым. Для его расчета используют математическое понятие, которое называют векторный магнитный потенциал \vec{A} . Это такая величина, которая плавно меняется от точки к точке, ротор которой равен величине магнитной индукции \vec{B} :

$$\vec{B} = \operatorname{rot} \vec{A}. \quad (11.4)$$

Подстановка (11.4) в (11.2) дает выражение, тождественно равное нулю:

$$\operatorname{div} \operatorname{rot} \vec{A} = \vec{\nabla}[\vec{\nabla} \vec{A}] = 0.$$

Умножим обе части выражения (11.1) на величину μ : $\mu \operatorname{rot} \vec{H} = \mu \vec{J}$. Тогда в однородном поле при $\mu = \text{const}$: $\mu \operatorname{rot} \vec{H} = \mu \vec{J}$; $\operatorname{rot} \vec{B} = \mu \vec{J}$;

$$\operatorname{rot} \operatorname{rot} \vec{A} = \operatorname{grad} \operatorname{div} \vec{A} - \vec{\nabla}^2 \vec{A} = \mu \vec{J}. \quad (11.5)$$

Как отмечалось выше, функция \vec{A} непрерывна, т.е. $\operatorname{div} \vec{A} = 0$. Тогда выражение (11.5) имеет вид:

$$\vec{\nabla}^2 \vec{A} = -\mu \vec{J}, \quad (11.6)$$

что представляет собой уравнение Пуассона для векторного магнитного потенциала \vec{A} . Величина \vec{A} есть вектор, поэтому уравнение (11.6) распадается на три уравнения:

$$\bar{\nabla}^2 A_x = -\mu J_x; \quad \bar{\nabla}^2 A_y = -\mu J_y; \quad \bar{\nabla}^2 A_z = -\mu J_z. \quad (11.7)$$

Решение уравнений (11.7) с учетом граничных условий в МП (см. ниже) позволяет найти величину магнитной индукции \vec{B} и напряженности МП \vec{H} .

Выражение магнитного потока через векторный магнитный потенциал

Магнитный поток Φ , пронизывающий какую-либо поверхность S , равен $\Phi = \int_S \vec{B} d\vec{s}$. С учетом (11.4) $\Phi = \int_S \text{rot } \vec{A} d\vec{s}$. По теореме Стокса

$$\int_S \text{rot } \vec{A} d\vec{s} = \oint_l \vec{A} d\vec{l},$$

откуда

$$\Phi = \oint_l \vec{A} d\vec{l}. \quad (11.8)$$

Кроме того, что МП описывается векторным магнитным потенциалом \vec{A} , в области, где нет токов, его также можно описать с помощью скалярного магнитного потенциала φ_M (по аналогии с тем, как ЭП описывается скалярным электрическим потенциалом φ). Другими словами, поскольку $\text{rot } \vec{H} = 0$, то $\vec{H} = -\text{grad } \varphi_M$. С учетом (11.2) и (11.3) в однородном поле при $\mu = \text{const}$

$$\text{div } \vec{H} = 0, \quad (11.9)$$

$$\left. \begin{aligned} \text{div grad } \varphi_M &= 0; \\ \nabla^2 \varphi_M &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (11.10)$$

То есть скалярный магнитный потенциал подчиняется уравнению Лапласа, которое в проекциях на оси прямоугольной системы координат записывается в виде:

$$\frac{\partial^2 \varphi_M}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi_M}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varphi_M}{\partial z^2} = 0. \quad (11.11)$$

Граничные условия на поверхности раздела двух магнитных сред

Выражение (11.9) приводит к соотношению

$$H_{1\tau} = H_{2\tau}; \quad (11.12)$$

Выражение (11.2) — соответственно к соотношению

$$B_{1n} = B_{2n}, \quad (11.13)$$

где $H_{1\tau}, H_{2\tau}$ — касательные составляющие векторов \vec{H} к границе раздела сред (рис. 11.1); B_{1n}, B_{2n} — нормальные составляющие векторов \vec{B} .

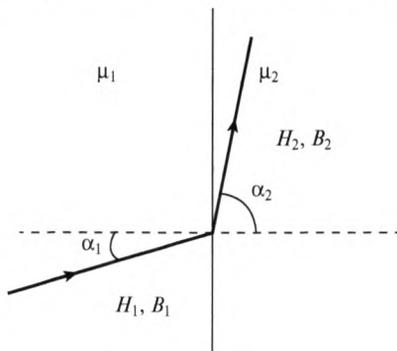


Рис. 11.1

Из рисунка 11.1 также следует, что $H_1 \sin \alpha_1 = H_2 \sin \alpha_2$; $B_1 \cos \alpha_1 = B_2 \cos \alpha_2$, откуда

$$\frac{\operatorname{tg} \alpha_1}{\mu_1} = \frac{\operatorname{tg} \alpha_2}{\mu_2}; \quad \frac{\operatorname{tg} \alpha_1}{\operatorname{tg} \alpha_2} = \frac{\mu_1}{\mu_2}. \quad (11.14)$$

Следствие: под каким бы углом линии магнитной индукции не входили из воздуха в ферромагнитную среду, внутри ферромагнитной среды они будут параллельны поверхности среды.

Действительно, магнитная проницаемость воздуха $\mu_1 = \mu_0$. Магнитная проницаемость ферромагнетика пусть $\mu_2 = 10^4 \mu_0$ (что вполне возможно), тогда

$$\frac{\operatorname{tg} \alpha_1}{\operatorname{tg} \alpha_2} = \frac{\mu_1}{\mu_2} = \frac{\mu_0}{10^4 \mu_0} = \frac{1}{10^4}.$$

Пусть $\alpha_1 = 0,5^\circ$, $\operatorname{tg} \alpha_1 = 0,009 \approx 0,01$, $\operatorname{tg} \alpha_2 = 100$, что соответствует $\alpha_2 = 89,5^\circ$.

11.2. Закон полного тока. Скалярный магнитный потенциал

11.1. По длинному прямолинейному проводу радиуса R протекает постоянный ток I . Найти напряженность МП внутри и вне провода.

Решение. При постоянном во времени токе плотность тока по сечению провода есть величина постоянная — $J = I/(\pi R^2)$,

$$\text{при } r \leq R - \oint_r \vec{H} d\vec{l} = I_r; \quad H \cdot 2\pi r = \frac{I}{\pi R^2} \cdot \pi r^2; \quad H = \frac{I}{2\pi R^2} r;$$

$$\text{при } r \geq R - I = 2\pi r H; \quad H = I/(2\pi r).$$

11.2. Длинный прямолинейный провод имеет кольцевое сечение радиусов R_1 и R_2 (рис. 11.2). По проводу протекает постоянный ток I . Построить кривую $H(r)$, где r — расстояние от точки O на оси провода до произвольных точек областей 1, 2, 3.

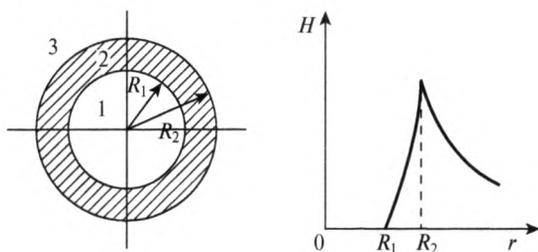


Рис. 11.2

Решение. Первая область: $r < R_1$, $H = 0$; вторая область: $R_1 \leq r \leq R_2$,

$$J = \frac{I}{\pi(R_2^2 - R_1^2)}, \quad J \text{ — плотность тока; } \frac{I \cdot \pi(r^2 - R_1^2)}{\pi(R_2^2 - R_1^2)} = 2\pi r H;$$

$$H = \frac{I}{2\pi(R_2^2 - R_1^2)} \frac{r^2 - R_1^2}{r}; \quad \text{третья область: } r > R_2; \quad 2\pi r H = I; \quad H = \frac{I}{2\pi r}.$$

График $H(r)$ на рис. 11.2.

11.3. По тому же проводу протекает ток $I = 1000$ А. Найти разность скалярных магнитных потенциалов между точками A и B (рис. 11.3).

Решение. В области вне токов, где $\text{rot } \vec{H} = 0$, по аналогии с ЭП, где $\text{rot } \vec{E} = 0$, связь между скалярным магнитным потенциалом φ_m и напряженностью МП \vec{H} такая же, как и связь между электрическим потенциалом φ и напряженностью ЭП \vec{E} : $\varphi_m = -\int \vec{H} d\vec{l}$. В зада-

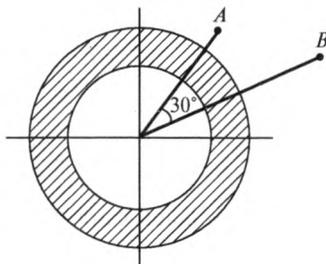


Рис. 11.3

че 11.2 получено: в области 3, т.е. в области вне токов $H = I/(2\pi r)$, поэтому

$$\varphi_M = -\int \frac{I}{2\pi r} r d\theta = -\frac{I}{2\pi} \theta + \text{const.}$$

Знак (–) означает, что увеличение магнитного потенциала происходит в сторону, противоположную направлению вектора \vec{H} . На рис. 11.4, б вектор \vec{H} направлен вниз, следовательно, потенциал φ_M растет в направлении, противоположном направлению \vec{H} , т.е. против часовой стрелки.

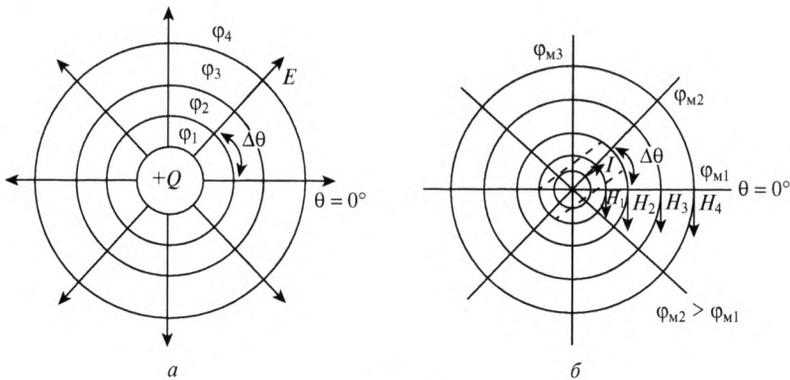


Рис. 11.4

Картина МП линейных токов совпадает с картиной ЭП линейных зарядов, если токи и заряды распределены в пространстве одинаково. Различие между этими картинками заключается лишь в том, что на месте линий напряженности ЭП располагаются линии равного магнитного потенциала и на месте линий равного электрического потенциала — линии напряженности МП (рис. 11.4, а и б). В соответствии с рис. 11.4, а и б

$$\left. \begin{aligned} \Delta\psi_E &= \frac{Q}{2\pi} \Delta\theta \\ \psi_E &= \frac{Q}{2\pi} \theta \end{aligned} \right| \begin{aligned} \Delta\varphi_M &= \frac{I}{2\pi} \Delta\theta \\ \varphi_M &= -\frac{I}{2\pi} \theta + \text{const.} \end{aligned}$$

Возвращаясь к поставленной задаче,

$$\varphi_{Ma} - \varphi_{Mb} = \frac{I}{2\pi} \cdot \frac{\pi}{6} = \frac{I}{12} = \frac{100}{12} = 8,33 \text{ А.}$$

11.4. Рассчитать МП плоскости с током.

Решение. Рассмотрим безграничную проводящую плоскость (практически достаточно, чтобы размеры пластины были намного больше ее толщины). По пластине равномерно течет ток одного направления. На рисунке 11.5 показано, что ток течет от нас. МП пластины будет направлено так, как показано на рисунке. Выберем контур в виде прямоугольника 1234 (рис. 11.5). По закону полного тока $2Hl = I$, $H = I/2l$. Отсюда следует, что МП как с одной стороны плоскости, так и с другой является однородным. Этот результат справедлив и для ограниченной пластины с током, но лишь для точек вблизи пластины и удаленных от ее краев.

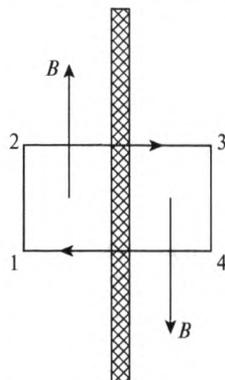


Рис. 11.5

11.5. Провод с током I спускается вертикально вниз и оканчивается в земле полусферическим заземлителем радиусом a (рис. 11.6). Требуется найти МП в земле и в воздухе при постоянном токе, считая проводимость земли γ_1 постоянной, и второй электрод, находящийся на расстоянии, намного большем a .

Решение. Магнитное поле в земле удовлетворяет уравнению $\text{rot } \vec{H} = \vec{J}$. В силу симметрии плотность тока в земле имеет только радиальную составляющую (в сферической системе координат $R, \theta, \alpha - \vec{J} = J_R = I/2\pi R^2$, а МП не зависит от координаты α . При этом для R -составляющей получим:

$$\text{rot}_R \vec{H} = \frac{1}{R^2 \sin \theta} \left[\frac{\partial}{\partial \theta} (R \sin \theta H_\alpha) \right] = I/2\pi R^2.$$

Интегрируя эту зависимость, получим:

$$R \sin \theta H_\alpha = -\frac{I \cos \theta}{2\pi} + f(R) + C.$$

На оси симметрии ($\theta = 0$):

$$R \sin \theta H_\alpha = 0 = -\frac{I}{2\pi} + f(R) + C.$$

Следовательно, $f(R)$ не зависит от R и постоянная $C = I/2\pi$. В результате получаем:

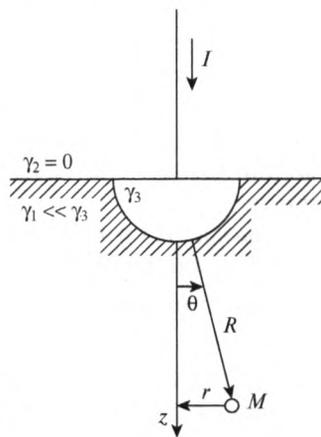


Рис. 11.6

$$H_{\alpha} = \frac{I}{2\pi R \sin \theta} (1 - \cos \theta).$$

Замечая, что $R \sin \theta = r$, можно последнее соотношение записать в виде

$$H_{\alpha} = \frac{I}{2\pi r} (1 - \cos \theta).$$

В воздухе напряженность МП определяется по закону полного тока $H'_{\alpha} = I/2\pi r$. На границе, т.е. при $\theta = 0,5\pi$, $H_{\alpha} = H'_{\alpha}$. Удовлетворяются уравнения поля и граничные условия.

11.6. Плотность тока в плазме газового разряда $J = J_z = J_0/(r/a + 1)$ в цилиндрической системе координат. Здесь r — текущий радиус, J_0 и a — постоянные. Требуется определить МП. Построить графики зависимости $J(r)$ и $H(r)$.

Решение. МП находим, интегрируя уравнение $\text{rot } \vec{H} = \vec{J}$, которое перепишем в виде:

$$J_z = \text{rot}_z \vec{H} = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r H_{\alpha}) = \frac{J_0}{r/a + 1}.$$

Интегрируя это уравнение, получаем $r H_{\alpha} = a J_0 [r - a \ln(r + a)C]$.

Постоянная C определяется из условия $H = H_0 = 0$ при $r = 0$:

$$0 = -\ln aC = \ln(1/aC).$$

Тогда $H = H_{\alpha} = a J_0 [1 - (a/r) \ln((r/a) + 1)]$.

11.7. Длинный диэлектрический цилиндр, заряженный с объемной плотностью $\rho = 4 \cdot 10^{-6}$ Кл/м³, вращается вокруг оси z , совпадающей с осью цилиндра, со скоростью $n = 100$ об/с. Радиус цилиндра $r_0 = 0,05$ м. Магнитная проницаемость материала цилиндра и окружающей среды равна μ_0 . Требуется определить магнитную индукцию внутри цилиндра в средней его части в зависимости от расстояния r от оси.

Решение. Плотность тока $J = J_a = \rho v = \rho 2\pi r n$. Напряженность МП внутри цилиндра находим, применяя закон полного тока. Так как поле не зависит от координаты z (цилиндр длинный), то $\text{rot}_{\alpha} \vec{H} = -\partial H_z / \partial r$ и $-\partial H_z / \partial r = 2\pi n \rho r$. Интегрируя, находим $H_z = -\pi n \rho r^2 + C$. Постоянную интегрирования можно определить из условия, что при $r = r_0$ должно быть $H_z = 0$ и $C = \pi n \rho r_0^2$. Магнитная индукция внутри цилиндра

$$B = B_z = \mu_0 \pi n \rho (r_0^2 - r^2).$$

11.8. Проводящая сферическая оболочка радиусом $a = 10$ см вращается вокруг оси z , проходящей через ее центр со скоростью 100 об/с. Заряд оболочки $q = 10^{-8}$ Кл. Магнитная проницаемость равна μ_0 . Требуется найти магнитную индукцию в любой точке внутри и вне оболочки, считая известным, что магнитный потенциал $\varphi_M = (C_1 R + (C_2/R^2)) \cos \theta$ удовлетворяет уравнению Лапласа (R, θ — сферические координаты).

Решение. Внутри оболочки ($R < a$) токи отсутствуют и, следовательно, $\text{rot } \vec{H}_1 = 0$, т.е. МП потенциально. Напряженность поля представим в виде $\vec{H}_1 = -\text{grad } \varphi_{M1}$, где φ_{M1} — скалярный потенциал МП внутри сферы. Аналогично вне оболочки ($R > a$) — $\vec{H}_2 = -\text{grad } \varphi_{M2}$. Решение задачи ищем в виде

$$\varphi_{M1} = \left(C_1 R + \frac{C_2}{R^2} \right) \cos \theta; \quad \varphi_{M2} = \left(C_3 R + \frac{C_4}{R^2} \right) \cos \theta.$$

Постоянные найдем из условий: 1) в центре оболочки ($R = 0$); 2) в бесконечности ($R \rightarrow \infty$) и 3) на поверхности оболочки ($R = a$).

1. Так как напряженность поля не может быть бесконечно большой, то $C_2 = 0$.

2. Так как в бесконечности поле отсутствует, то $C_3 = 0$.

3. Из граничного условия $B_{1n} = B_{2n}$, т.е. $H_{1R} = H_{2R}$, так как $\mu_1 = \mu_2 = \mu_0$, или $\partial \varphi_{M1} / \partial R = \partial \varphi_{M2} / \partial R$ при $R = a$, получаем $C_1 = -2C_4/a^3$. Из граничного условия $H_{2\tau} = -H_{1\tau} + J_{\text{пов}}$, где $J_{\text{пов}} = dI/ad\theta = nqR/2a^2 = nq \sin \theta / 2a$ поверхностная плотность тока, или $-\partial \varphi_{M2} / R \partial \theta + \partial \varphi_{M1} / R \partial \theta = J_{\text{пов}}$ при $R = a$, получаем $C_4/a^3 = nq/2a$. Из двух уравнений для C_1 и C_4 находим $C_1 = -nq/3a$; $C_4 = (nq/6)a^2$. Потенциалы $\varphi_{M1} = -(nq/3a)R \cos \theta = -(nq/3a)z$; $\varphi_{M2} = (nq/6R^2)a^2 \cos \theta$. По известным потенциалам находим напряженности МП:

$$H_1 = H_{1z} = -\partial \varphi_{M1} / \partial z = nq/3a; \quad H_{2R} = -\partial \varphi_{M2} / \partial R = (nq/3R^3)a^2 \cos \theta;$$

$$H_{2\theta} = -\partial \varphi_{M2} / R \partial \theta = (nq/6R^3)a^2 \sin \theta.$$

Эти решения определяют МП во всех точках вне и внутри сферической оболочки.

11.9. Вдоль двухпроводной линии протекает постоянный ток $I = 36$ А. Направление тока в проводах линии показано на рис. 11.7. Расстояние между осями проводов $d = 1$ м. Требуется определить разность скалярных магнитных потенциалов между точками M и N , M

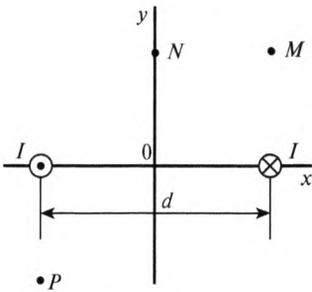


Рис. 11.7

и P , т.е. $\varphi_{MM} - \varphi_{MN}$ и $\varphi_{MM} - \varphi_{MP}$. Координаты точек: $x_M = 0,5$ м; $y_M = 0,5$ м; $x_N = 0$; $y_N = 0,5$ м; $x_P = -0,5$ м; $y_P = -0,5$ м.

Качественно построить картину МП двухпроводной линии. При решении выбрать путь интегрирования, соединяющий точки M и N , M и P так, чтобы он не пронизывал контур с током.

Решение. Магнитное напряжение между точками M и N по пути M/N , обусловленное током левого провода (рис. 11.8, а), $U_{MMN1} = (1/2\pi)\alpha$.

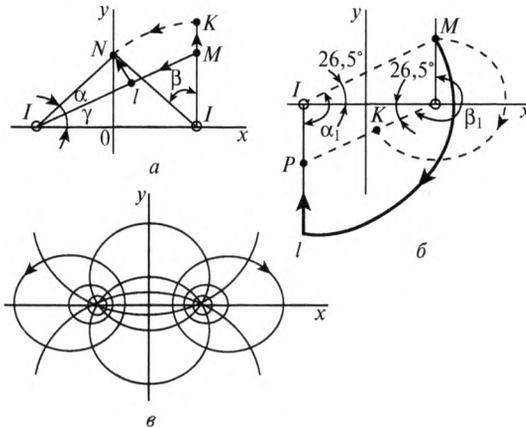


Рис. 11.8

Магнитное напряжение между точками M и N по пути MkN , обусловленное током правого провода $U_{MMN2} = -(1/2\pi)\beta$, где $\beta = 45^\circ$. Так как $\text{tg } a = 0,5$, $\alpha = 45^\circ - 26,5^\circ = 18,5^\circ$.

Магнитное напряжение между точками M и N :

$$U_{MMN} = U_{MMN1} + U_{MMN2} = \frac{36}{360^\circ}(-45^\circ + 18,5^\circ) = -2,65 \text{ А.}$$

Магнитное напряжение между точками M и P (рис. 11.8, б):

$$U_{MP} = U_{MP1} + U_{MP2} = \frac{I}{360^\circ}\beta_1 - \frac{I}{360^\circ}a_1 = 12,5 \text{ А,}$$

где $\beta_1 = 360^\circ - (90^\circ + 26,5^\circ) = 243,5^\circ$; $a_1 = 90^\circ + 26,5^\circ = 116,5^\circ$.

11.3. Векторный магнитный потенциал

11.10. По медному прямолинейному проводу радиуса R протекает постоянный ток I . Найти векторный магнитный потенциал в точке M , удаленной от оси провода на расстояние x . Окружающая среда — воздух.

Решение. Применим уравнение Пуассона для векторного магнитного потенциала (11.4). Пусть провод протянут в направлении оси z , ток течет вдоль оси z , плотность тока направлена вдоль оси z , уравнение Пуассона имеет вид (11.6): $\bar{\nabla}^2 A_z = -\mu J_z$, т.е. векторный магнитный потенциал \vec{A} имеет только одну составляющую, направленную вдоль оси z . Нас интересует, как меняется вектор A_z в функции x , т.е. нужно найти $A_z(x)$. Для краткости эту величину будем называть просто A .

Окружим точку M рамкой $abcd$, стороны которой $ad = bc$ соответствуют длине провода, $ab = dc = dx$ (рис. 11.9, а). МП тока в проводе создает в рамке магнитный поток $d\Phi = B dS = (\mu I / 2\pi x) l dx$. Выражая поток в рамке через векторный магнитный потенциал по теореме Стокса (11.8), получим:

$$d\Phi = A l - \left(A + \frac{\partial A}{\partial x} dx \right) l = -l \frac{\partial A}{\partial x} dx, \quad \frac{\mu I}{2\pi x} l dx = -\frac{\partial A}{\partial x} l dx,$$

$$dA = -\frac{\mu I dx}{2\pi x}, \quad A = -\frac{\mu I}{2\pi} \ln x + \text{const.}$$

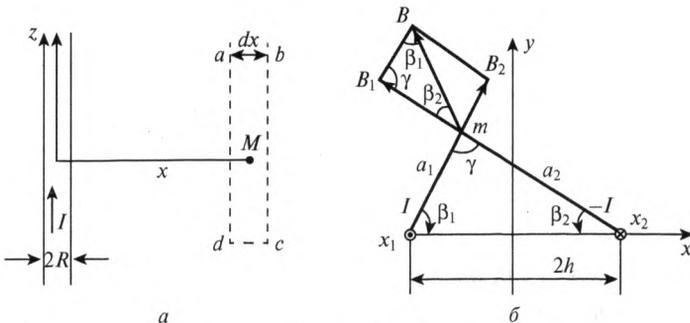


Рис. 11.9

Полагая $A = 0$ на поверхности провода (при $x = R$), найдем $\text{const} = \frac{\mu I}{2\pi} \ln R$, откуда $A = \frac{\mu I}{2\pi} \ln \frac{R}{x}$.

Провод рассматривается длинный. Теоретически при $l \rightarrow \infty$, а практически при $l \gg R$ линии напряженности поля есть окружности радиуса x , нормальные к проводу. То есть в прямоугольной системе координат $H = H_x$, в цилиндрической системе координат $H = H_\phi(x)$.

Так как $\vec{B} = \text{rot } \vec{A}$, $\vec{H} = (1/\mu)\text{rot } \vec{A}$, то, пользуясь выражением ротора вектора через проекции вектора в сферической системе координат, найдем

$$H_\phi = -\frac{1}{\mu} \frac{\partial A_z}{\partial x} = -\frac{1}{\mu} \frac{\partial}{\partial x} \left[\frac{\mu I}{2\pi} (\ln R - \ln x) \right]; \quad H = \frac{I}{2\pi x}.$$

11.11. Определить векторный магнитный потенциал двухпроводной линии (рис. 11.9, б).

Решение. Используя решение предыдущей задачи, найдем векторный магнитный потенциал от левого провода $A = -(\mu I/2\pi)\ln a + \text{const}$, где a — расстояние от точки m до оси левого провода. Векторный магнитный потенциал от правого провода $A = (\mu I/2\pi)\ln b + \text{const}$, где b — расстояние от точки m до оси левого провода; ток здесь взят со знаком «-», так как в правом проводе он течет в противоположную сторону (в сравнении с левым проводом). Векторный потенциал в точке m от обоих проводов $A = (\mu I/2\pi)\ln(a/b) + \text{const}$.

Для определения постоянной интегрирования положим $A = 0$ на оси y (рис. 11.9, б), тогда $A = (\mu I/2\pi)\ln(a/b)$.

Из последнего выражения посредством дифференцирования могут быть определены оба слагаемых напряженности поля, рассматриваемого в прямоугольной системе координат:

$$H_x = \frac{1}{\mu} \text{rot } A_x = \frac{1}{\mu} \left(\frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z} \right) = \frac{1}{\mu} \frac{\partial A_z}{\partial y}, \quad \text{так как } A = A_z, A_y = 0;$$

$$H_y = \frac{1}{\mu} \text{rot } A_y = \frac{1}{\mu} \left(\frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial x} \right) = -\frac{1}{\mu} \frac{\partial A_z}{\partial x}, \quad \text{так как } A_x = 0.$$

$$H = \sqrt{H_x^2 + H_y^2}; \quad B = \mu H.$$

Таким образом, для нахождения B и H через векторный потенциал \vec{A} необходимо выполнить достаточно сложные математические преобразования, в то время как и без векторного потенциала значение B и H найдено в задаче 11.10 достаточно просто.

Вполне законно возникает вопрос, зачем же нужен векторный потенциал, если уже известно МП. Ответ здесь может быть следующим: часто вычисление векторного потенциала полезно потому, что позво-

ляет найти качественную картину, которая может быть полезна для отыскания количественных результатов.

Как уже отмечалось, понятие векторного потенциала в МП соответствует скалярному потенциалу в ЭП. Их выражения оказываются подобными, из чего следует и подобие полей ЭП и МП (см. табл. 11.1).

Таблица 11.1

Вид поля	Электрическое поле	Магнитное поле
Поле уединенного провода	$\varphi = -\frac{\tau}{2\pi\epsilon} \ln r + \text{const}, E = \frac{\tau}{2\pi r\epsilon}$	$A = -\frac{\mu I}{2\pi} \ln r + \text{const}, H = \frac{\tau}{2\pi r}$
Поле двух проводов	$\varphi = \frac{\tau}{2\pi\epsilon} \ln \frac{b}{a}, E = \frac{\tau}{2\pi\epsilon} \cdot \frac{c}{ab}$	$A = \frac{\mu I}{2\pi} \ln \frac{b}{a}, H = \frac{I}{2\pi} \frac{c}{ab}$

Примечание. Обозначения одних и тех же геометрических величин, которые в силу тех или иных причин в задачах по анализу электрических и магнитных полей были выбраны разными, в таблице являются идентичными.

11.12. Многослойная оболочка бесконечно длинной катушки обтекается током плотностью $J = \text{const}$. Внутренний радиус обмотки — r_1 , внешний — r_2 . Требуется определить векторный потенциал \vec{A} и магнитную индукцию \vec{B} внутри катушки, в обмотке и вне катушки, считая обмотку равномерной и пренебрегая толщиной изоляции между витками. Построить графики $B(r)$ и $A(r)$. Как изменится решение задачи, если плотность тока $J = K/r^2$?

Решение. В круговой цилиндрической системе координат r, a, z с осью z , совпадающей с осью катушки, отсутствует зависимость поля от координаты z , так как катушка бесконечно длинная. Кроме того, поле симметрично относительно оси катушки, т.е. не зависит от координаты a . При этих условиях векторный потенциал удовлетворяет уравнению Пуассона

$$\frac{d}{dr} \left[\frac{1}{r} \frac{d}{dr} (r\vec{A}) \right] = -\mu_0 \vec{J},$$

где $\vec{J} = J_\alpha$ и $\vec{A} = A_\alpha$.

Решение этого уравнения запишем отдельно для каждой из областей:

- 1) при $r \leq r_1$ — $J_1 = 0$ и $A_1 = 0, 5C_1 r + C_5/r$;
- 2) при $r_1 \leq r \leq r_2$ — $J_2 = J = \text{const}$ и $A_2 = -\mu_0 J (r^2/3) + 0, 5C_2 r + C_3/r$;
- 3) при $r_2 \leq r$ — $J_3 = 0$ и $A_3 = 0, 5C_4 r + C_6/r$.

Вектор магнитной индукции $\vec{B} = \text{rot } \vec{A}$ имеет только одну составляющую

$$B_z = B = \frac{1}{r} \frac{d}{dr} (rA), \text{ т.е.}$$

- 1) $B_1 = C_1$;
- 2) $B_2 = -\mu_0 J r + C_2$;
- 3) $B_3 = C_4$.

Постоянные находятся из условий равенства векторных потенциалов и напряженностей МП при $r = r_1$ и $r = r_2$, а также из условия, что вне катушки поле отсутствует, а на оси — конечно: $C_1 = \mu_0 J (r_2 - r_1)$; $C_2 = \mu_0 J r$; $C_3 = -(\mu_0 J / 6) r_1^3$; $C_4 = C_5 = 0$; $C_6 = (\mu_0 J / 6) (r_2^3 - r_1^3)$. При этом

$$A_1 = 0,5\mu_0 J (r_2 - r_1) r; \quad B_1 = \mu_0 J (r_2 - r_1) r; \quad A_2 = \mu_0 J \left(-\frac{r^2}{3} + 0,5r_2 r - \frac{r_1^3}{6r} \right);$$

$$B_2 = \mu_0 J (r_2 - r); \quad A_3 = \frac{1}{6} \mu_0 J (r_2^3 - r_1^3) (1/r); \quad B_3 = 0.$$

Если плотность тока $J = K/r^2$, то изменится решение в области $r_1 \leq r \leq r_2$: $A_2 = \mu_0 K + 0,5C_2 r + C_3/r$.

Вид решения внутри и вне катушки останется прежний. Постоянные определяются из тех же условий, что и выше. Окончательное решение в этом случае:

$$A_1 = 0,5\mu_0 K r \left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2} \right); \quad B_1 = \mu_0 K \left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2} \right); \quad A_2 = \mu_0 K \left(1 - \frac{r}{2r_2} - \frac{r_1}{2r} \right);$$

$$B_2 = \mu_0 K \left(\frac{1}{r} - \frac{1}{r_2} \right); \quad A_3 = 0,5\mu_0 K (r_2 - r_1) (1/r); \quad B_3 = 0.$$

11.13. Вдоль длинной плоской стальной полосы, показанной на рис. 11.10, в направлении оси z протекает постоянный ток I . Толщина шины $2a = 0,4$ см, высота шины $h = 4$ см. Относительная магнитная проницаемость стали $\mu_r = 20$. Средой, окружающей шину, является воздух. Известно, что разность векторных магнитных потенциалов между некоторыми точками m и n равна $\vec{A}_m - \vec{A}_n = \vec{k}^0 \cdot 10^{-6}$ Вб/м. Координаты точки m : $x_m = 1$ см; $y_m = 0,5$ см; $z_m = 10$ см. Считая $A = 0$ при $y = 0$, определить величину постоянного тока I , протекающего вдоль шины.

Решение. Проинтегрировав уравнения Пуассона и Лапласа для векторного магнитного потенциала и определив постоянные интегрирования, найдем проекции векторного магнитного потенциала на ось внутри шины: $A_1 = -0,5\mu_1 J y^2$ и вне шины $A_2 = -\mu_2 J a y + J a^2 (\mu_2 - 0,5\mu_1)$, где μ_1 и μ_2 — абсолютные магнитные проницаемости стали и воздуха соответственно. Разность векторных магнитных потенциалов между точками m и n :

$$\vec{k} (A_m - A_n) = \vec{k} [-0,5\mu_1 J y_m^2 + \mu_2 J a y_n - J a^2 (\mu_2 - 0,5\mu_1)],$$

откуда определим модуль плотности тока $J = 2,22 \cdot 10^4 \text{ А/м}^2$. Ток, протекающий вдоль шины, $I = J2ah = 3,53 \text{ А}$.

11.14. Вдоль длинного цилиндрического стального провода протекает постоянный ток. Радиус провода $r_0 = 1 \text{ см}$. Относительная магнитная проницаемость стали $\mu_r = 50$. Средой, окружающей провод, является воздух. Проекция векторного магнитного потенциала на ось z внутри провода меняется в функции расстояний от оси провода по закону $A_1 = -6,28r^2 \text{ Вб/м}$, а вне провода она меняется по закону $A_2 = -25,1 \cdot 10^{-6} \times \ln(r/0,01) - 6,28 \cdot 10^{-4} \text{ Вб/м}$. Требуется найти законы изменения модуля напряженности МП H и модуля вектора намагнитченности J в функции расстояния от оси провода. Построить графики $H = f(r)$ и $J = f_1(r)$ при $0 < r < \infty$.

Решение. Так как $\vec{B} = \text{rot } \vec{A}$, модуль вектора магнитной индукции внутри и вне провода найдем из выражений:

$$B_1 = B_{1\alpha} = \text{rot}_\alpha \bar{A}_1 = -\frac{\partial A_{z1}}{\partial r} = 12,56r;$$

$$B_2 = B_{2\alpha} = \text{rot}_\alpha \bar{A}_2 = -\frac{\partial A_{z2}}{\partial r} = 25,1 \cdot 10^{-6} \frac{1}{r}.$$

Определим модуль напряженности МП внутри и вне провода:

$$H_1 = B_1/\mu_1 = 2 \cdot 10^5 r \text{ А/м}, \quad H_2 = B_2/\mu_2 = 20 \frac{1}{r} \text{ А/м}.$$

Пользуясь последними выражениями, строим график зависимости $H = f(r)$ (рис. 11.11).

Индукция $\vec{B} = \mu_0(\vec{H} + \vec{J})$, поэтому модуль вектора намагнитченности внутри провода $J_1 = B_1/\mu_0 - H_1 = 9,8 \cdot 10^6 r$, модуль вектора намагнитченности вне провода $J_2 = 0$. По выражениям для J_1 и J_2 строится график зависимости $J = f_1(r)$ (рис. 11.11).

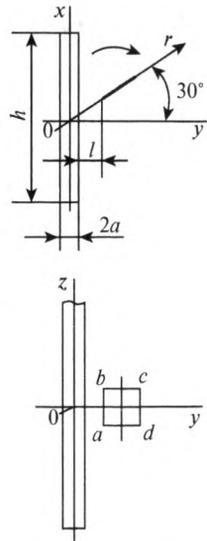


Рис. 11.10

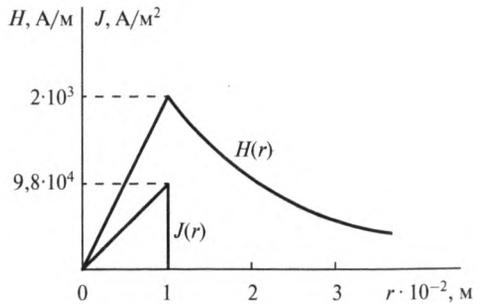


Рис. 11.11

11.4. Метод наложения

11.15. Двухпроводная линия состоит из цилиндрических проводов с радиусом сечения $r_0 = 2$ см, расстояние между осями проводов $2h = 40$ см. В проводах линии протекает ток $I = 25$ А. Окружающая среда — воздух. Определить для точки m , находящейся на расстояниях $a_1 = 18$ см и $a_2 = 33,5$ см от осей проводов, величину скалярного магнитного потенциала, величины векторов магнитной индукции и напряженности МП (рис. 11.12).

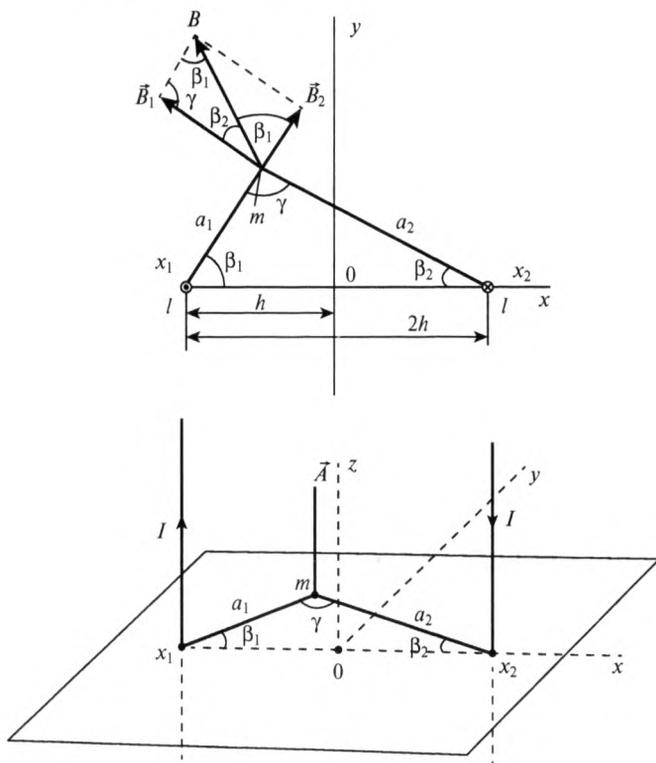


Рис. 11.12

Решение. При $2h \gg r_0$ задачу можно решать, считая, что токи проходят в бесконечно тонких нитях, совпадающих с осями проводов.

Поместим начало координат в точку O (рис. 11.12). Скалярный магнитный потенциал в точке m , обусловленный током в левом проводе, определяется углом β_1 , отсчитываемым от направления оси x по ча-

совой стрелке; потенциал, обусловленный током в правом проводе, определяется углом β_2 , отсчитываемым от направления оси x против часовой стрелки. Различие в направлениях отсчета объясняется противоположным направлением тока в проводах

$$\varphi_m = \frac{I}{2\pi}\beta_1 + \frac{I}{2\pi}\beta_2 + \text{const}, \quad \beta_1 + \beta_2 = \pi - \gamma \quad (\text{рис. 11.12}),$$

следовательно

$$\varphi_m = \frac{I}{2}\left(1 - \frac{\gamma}{\pi}\right) + \text{const}.$$

Положим $\varphi_m = 0$ во всех точках оси x , лежащих справа от правого провода и слева от левого провода. Для этих точек $\gamma = 0$, поэтому $\text{const} = -0,5I$ и $\varphi_m = -(I/2\pi)\gamma$. В нашем случае (точка m) $\gamma = 97^\circ 20' \approx 1,7$ рад, а $\varphi_m = -25 \cdot 1,7/6,28 = -6,77$ А.

Вектор магнитной индукции \vec{B} в точке m имеет составляющие: \vec{B}_1 , обусловленную током в левом проводнике, \vec{B}_2 , обусловленную током в правом проводнике. Его удобно вычислять, пользуясь подобием треугольников mB_1B и x_1x_2m (рис. 11.12); эти треугольники имеют по одинаковому углу γ ; прилегающие к этим углам стороны одного треугольника по построению обратно пропорциональны сторонам другого: $B_1 = \mu I/(2\pi a_1)$; $B_2 = \mu I/(2\pi a_2)$. Из подобия треугольников следует $B/B_1 = 2h/a_2$, откуда

$$B = B_1 \frac{2h}{a_2} = \frac{\mu I \cdot 2h}{2\pi \cdot a_1 a_2},$$

численно $B = 3,3 \cdot 10^{-5}$ Тл, $H = B/\mu = 26,4$ А/м.

11.16. На глубине h под поверхностью земли (рис. 11.13) находится сферический электрод (проводимость γ_3) радиусом a ($h \gg a$), к которому подводится постоянный ток I по изолированному вертикальному кабелю. Требуется найти МП в земле и воздухе, считая проводимость земли γ постоянной. Второй электрод расположен далеко от первого — на расстоянии, значительно большем h .

Решение. Для определения плотности тока в земле можно пользоваться методом зеркальных отображений: влияние границы раздела сред (поверхности земли) заменяем то-

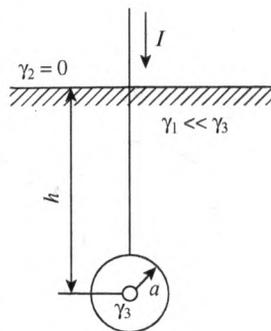


Рис. 11.13

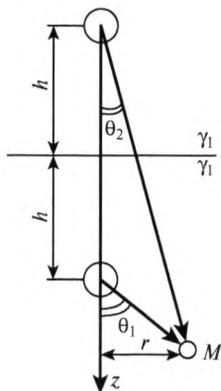


Рис. 11.14

ком $I' = I$ фиктивного электрода (рис. 11.14). Применяя принцип наложения, определим МП в земле. Поле истинного тока, как найдено в задаче 11.15, с заменой 2π на 4π (здесь заземлитель

сферический): $H_{\alpha 1} = H_1 = \frac{1}{4\pi r}(1 - \cos\theta_1)$. Поле

изображения тока $H_{\alpha 2} = H_2 = \frac{1}{4\pi r}(1 - \cos\theta_2)$. Общее МП в земле $H = H_{\alpha} = H_1 = H_2 (1/4\pi r)(2 - \cos\theta_1 - \cos\theta_2)$.

МП в воздухе по-прежнему $H' = H'_{\alpha} = I/2\pi r$. На границе ($\theta_2 = \pi - \theta_1$) получаем $H_{\alpha} = I/2\pi r = H'_{\alpha}$.

11.5. Магнитное поле в присутствии ферромагнетиков

11.17. Требуется рассчитать МП внутри, вне и в стенке ферромагнитной трубы, находящейся во внешнем однородном поле с индукцией B_0 (рис. 11.15). Проницаемость материала трубы $\mu_2 = \mu$. Определить коэффициент экранирования $K = B_1/B_0$, где B_1 — индукция внутри трубы.

Решение. Так как в рассматриваемом объеме отсутствуют токи, то $\text{rot } \vec{H} = 0$ и МП потенциально. Вводя функцию скалярного магнитного потенциала ($\vec{H} = -\text{grad } \varphi_M$) и применяя круговые цилиндрические координаты, решение уравнения Лапласа для φ_M можно представить в виде (выбирая $\varphi_M = 0$ при $r = 0$):

$$1) \varphi_{1M} = \left(C_1 r + \frac{C_2}{r} \right) \cos\alpha \text{ при } r \leq r_1;$$

$$2) \varphi_{2M} = \left(C_3 r + \frac{C_4}{r} \right) \cos\alpha \text{ при } r_1 \leq r \leq r_2;$$

$$3) \varphi_{3M} = \left(C_5 r + \frac{C_6}{r} \right) \cos\alpha \text{ при } r \geq r_2.$$

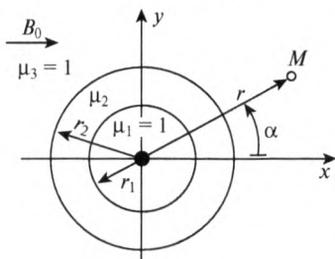


Рис. 11.15

Так как при $r = 0$ поле должно оставаться конечным, то $C_2 = 0$.

Труба заметно искажает внешнее однородное поле в точках, находящихся

ся вблизи трубы. Вдали от трубы ($r \rightarrow \infty$) ее искажающее действие будет незаметно, и поле останется однородным, т.е. $H = H_x = H_0$ и $\varphi_{3x} = -H_0 x = -H_0 r \cos \alpha$. Отсюда следует, что $C_5 = -H_0$. Остальные четыре постоянные определяются из граничных условий при а) $r = r_1$ и б) $r = r_2$.

$$\text{а) } \varphi_{1M} = \varphi_{2M} \text{ и } \mu_1(\partial\varphi/\partial r) = \mu_2(\partial\varphi_{2M}/\partial r);$$

$$C_1 r_1 = C_3 r_1 + \frac{C_4}{r_1} \quad \text{и} \quad C_1 = \mu \left(C_3 - C_4 \frac{1}{r_1^2} \right); \quad (11.15)$$

б) аналогично

$$C_3 r_2 + \frac{C_4}{r_2} = -H_0 r_2 + \frac{C_6}{r_2} \quad \text{и} \quad \mu \left(C_3 - C_4 \frac{1}{r_1^2} \right) = -H_0 - \frac{C_6}{r_2^2}. \quad (11.16)$$

Совместное решение уравнений (11.15) и (11.16) дает:

$$C_1 = 4\mu\rho; \quad C_4 = 2(\mu - 1)r_1^2\rho; \quad C_3 = 2(\mu + 1)\rho; \quad C_6 = (\mu^2 - 1)(r_1^2 - r_2^2)\rho,$$

$$\text{где } \rho = \frac{H_0 r_2^2}{r_1^2(\mu - 1)^2 - r_2^2(\mu + 1)^2}.$$

Таким образом, скалярные магнитные потенциалы определены:

$$\varphi_{1M} = 4\mu\rho r \cos \alpha = 4\mu\rho x; \quad \varphi_{2M} = 2\rho \left[(\mu + 1)r + (\mu - 1)\frac{r_1^2}{r} \right] \cos \alpha;$$

$$\varphi_{3M} = \left[-H_0 r + (\mu^2 - 1)\rho \frac{r_1^2 - r_2^2}{r} \right] \cos \alpha.$$

Теперь можно определить напряженность МП в каждой области:

1) внутри трубы — $H_1 = H_{1x} = -(\partial\varphi_{1M}/\partial x) = -4\mu\rho$, т.е. внутри трубы МП однородно (при однородном внешнем поле с напряженностью H_0);

2) в стенке трубы:

$$H_{2r} = -(\partial\varphi_{2M}/\partial r) = -2\rho \left[(\mu + 1) - (\mu - 1)(r_1^2/r^2) \right] \cos \alpha;$$

$$H_{2\alpha} = -(\partial\varphi_{2M}/r\partial\alpha) = 2\rho \left[(\mu + 1) + (\mu - 1)(r_1^2/r^2) \right] \sin \alpha;$$

3) вне трубы:

$$H_{3r} = -(\partial\varphi_{3M}/\partial r) = \left[H_0 + (\mu^2 - 1)\rho \frac{r_1^2 - r_2^2}{r^2} \right] \cos \alpha;$$

$$H_{3\alpha} = -(\partial\varphi_{3M}/r\partial\alpha) = \left[-H_0 + (\mu^2 - 1)\rho \frac{r_1^2 - r_2^2}{r^2} \right] \sin \alpha.$$

Коэффициент экранирования

$$K = \frac{B_1}{B_0} = \frac{H_1}{H_0} = \frac{-4\mu\rho}{H_0} = \frac{4\mu r_2^2}{r_2^2(\mu+1)^2 - r_1^2(\mu-1)^2}.$$

Если $\mu \gg \mu_0$, то $K = 4r_2^2/\mu(r_2^2 - r_1^2)$.

КВАЗИСТАТИЧЕСКОЕ ЭЛЕКТРОМАГНИТНОЕ ПОЛЕ

12.1. Основные аналитические зависимости

Условия квазистационарности. Два основных уравнения Максвелла, называемые «великими уравнениями», которые во введении обозначены В. 7 и В. 8 и которые еще называют законом полного тока и законом электромагнитной индукции, обуславливают взаимную зависимость электрических и магнитных полей. С первым из них

$$\operatorname{rot} \vec{H} = \vec{J} \quad (12.1)$$

или, в интегральной форме,

$$\int_l \vec{H} d\vec{l} = i \quad (12.1, a)$$

мы уже имели дело в предыдущей главе. При этом в правой части уравнения был постоянный ток I , в отличие от (12.1, a), где i — переменный ток. В настоящей главе большее внимание будет уделено другому уравнению

$$\operatorname{rot} \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = -\mu \vec{H}, \quad (12.2)$$

или, в интегральной форме,

$$\oint_l \vec{E} d\vec{l} = -\frac{\partial \Phi}{\partial t}. \quad (12.2, a)$$

Поскольку в постоянном электрическом поле $\oint_l \vec{E} d\vec{l} = 0$, то величина, стоящая в правой части, появляется только в переменном поле. Ее называют ЭДС электромагнитной индукцией

$$e = -\frac{d\Phi}{dt}, \quad (12.3)$$

или, если ЭДС наводится в устройстве (например, в катушке) с числом витков $w > 1$, то

$$e = -w \frac{d\Phi}{dt} = -\frac{d\Psi}{dt}, \quad (12.3, a)$$

где Ψ — потокосцепление катушки ($\Psi = w\Phi$).

Своим происхождением ЭДС индукции может быть обязана не только тому, что контур l пронизывается переменным во времени магнитным потоком. ЭДС может возникнуть и в случае, если контур меняет свою форму или ориентацию в пространстве (на этом основан принцип действия электрических машин постоянного тока).

На практике обычно имеют дело с переменными токами, меняющимися по периодическому закону, например $I = I_m \sin \omega t$, где $\omega = 2\pi f$ — угловая частота; f — частота переменного тока; $T = 1/f$ — период. Токи создают в окружающем пространстве МП. Изменение тока приводит и к изменению МП. Однако это изменение не может произойти сразу во всем пространстве. Оно будет распространяться, например, в вакууме или в воздухе со скоростью света $c = 3 \cdot 10^8$ м/с. Очевидно, что в каждый момент времени МП в непосредственной близости от проводника определяется мгновенным значением создающего его тока, если изменения тока во времени значительно медленнее, чем время распространения в пространстве этого изменения. Математически это можно описать выражением:

$$T = \frac{1}{f} \gg \frac{l}{c}, \quad f \ll \frac{c}{l}, \quad (12.4)$$

где l — протяженность проводника, в котором наводится ЭДС.

Условие (12.4) называют условием квазистационарности; при его соблюдении мгновенные значения индукции МП синхронно меняются с током (эффектом распространения МП можно пренебречь). Отметим также, что постоянный ток — это частный случай квазистационарного переменного тока с частотой $f = 0$.

Возможен и другой (хотя по существу тот же, но другими словами) подход: ЭМП, периодически изменяющееся во времени по синусоиде с не слишком высокими частотами, позволяющими пренебречь в уравнениях Максвелла токами смещения по сравнению с токами проводимости, можно рассматривать в квазистатическом приближении, если

$$\gamma \vec{E} \gg \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}, \quad (12.5)$$

откуда $\gamma \gg \omega \epsilon$, где γ — электрическая проводимость среды, $1/\text{Ом}\cdot\text{м}$; ω — круговая частота ЭМП; ϵ — диэлектрическая проницаемость среды, $\Phi/\text{м}$. Если учесть, что $\omega = 2\pi f$, то $f \ll (\gamma/2\pi\epsilon)$. Практически можно ограничиться частотами $f < 10^5$ Гц. Примерно к такому же выводу можно прийти на основании (12.4).

В данной главе рассматриваются три класса задач, удовлетворяющих условиям (12.4, 12.5). Первый класс задач составляют задачи по определению ЭДС, сил и энергий в телах и контурах простой геометрической формы, помещенных или движущихся в переменном электромагнитном поле. Для их решения не нужен новый теоретический материал. Записанные ранее законы и уравнения лишь применяются. Например, в задаче 11.10 используется формула $|e| = Blv$. Она получается из закона электромагнитной индукции

$$e = -\frac{d\Phi}{dt}$$

для случая, когда ЭДС наводится в проводнике длиной l , перемещающемся в магнитном поле с магнитной индукцией B , в плоскости, в которой $d\vec{s} \perp \vec{B}$:

$$e = -\frac{d\Phi}{dt} = -B \frac{ds}{dt} = -Bl \frac{da}{dt} = -Blv,$$

где a — расстояние, на котором перемещается проводник в МП.

Второй класс задач составляют задачи по расчету электрических и магнитных цепей, когда определяются интегральные параметры ЭМП: электрический ток, магнитный поток, мощность, энергия. Поле рассматривается в области пространства. Для его описания также не нужен новый теоретический материал.

К третьему классу задач мы относим задачи по исследованию распространения ЭМП в проводящей среде, удовлетворяющего условиям (12.5). Для решения этих задач потребуется новый теоретический материал.

12.2. ЭДС, наводимые в телах и контурах

12.1. Металлический диск радиусом $r = 15$ см, расположенный перпендикулярно МП с индукцией $B = 2$ Тл, вращается вокруг оси, проходящей через его центр (рис. 12.1). Два скользящих контакта (один на оси диска, другой на его краю) соединяют диск с сопротивлением

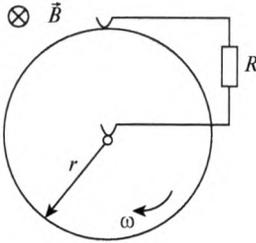


Рис. 12.1

$R = 4$ Ом. С какой угловой скоростью должен вращаться диск, чтобы на сопротивлении выделялась мощность 5 Вт?

Решение. При повороте на угол $\Delta\alpha$ радиус диска описывает площадь $\Delta S = 0,5r^2\Delta\alpha$ и при этом пересекает некоторое число линий магнитной индукции. Изменение магнитного потока при повороте диска на угол $\Delta\alpha$ равно $\Delta\Phi = 0,5Br^2\Delta\alpha$. Индуктивность при этом между контактами ЭДС $e = \Delta\Phi/\Delta t = 0,5B\omega r^2$,

где $\Delta\alpha/\Delta t = \omega$ — угловая скорость вращения диска. Электрический ток в цепи (ток будет постоянный, т. к. ЭДС также постоянна во времени) — $I = e/R = B\omega r^2/2R$. Выделяемая им мощность

$$P = I^2 R = \frac{B^2 \omega^2 r^4}{4R},$$

откуда $\omega = \sqrt{4RP/(B^2 r^4)} = 200$ 1/с.

Количество оборотов в минуту диска определяется из соотношений:

$$\omega = 2\pi f = 2\pi n_1 = \frac{2\pi n}{60} = \frac{\pi n}{30}; \quad n = \frac{30\omega}{\pi},$$

здесь n_1 — количество оборотов диска в секунду; n — количество оборотов в минуту.

12.2. Круглый виток радиуса a , изготовленный из медной проволоки площадью поперечного сечения $S_{\text{пр}}$, находится в однородном МП (в воздухе), напряженность которого в течение некоторого времени меняется от 0 до H_0 . Какое количество электричества пройдет через поперечное сечение проволоки за время существования электрического тока?

Решение. При изменении магнитного потока, пронизывающего виток, в нем индуцируется ЭДС

$$|e| = \pi a^2 \frac{dB}{dt} = \pi a^2 \mu_0 \frac{dH}{dt}.$$

Ток, протекающий по кольцу $i = |e|/R$, где $R = l/\gamma S_{\text{пр}}$, $l = 2\pi a$, γ — удельная проводимость провода (меди), поэтому

$$i = \frac{\pi a^2 \mu_0 \gamma S_{\text{пр}}}{2\pi a} \frac{dH}{dt} = \frac{\mu_0 \gamma S_{\text{пр}} a}{2} \frac{dH}{dt}.$$

Количество электричества, прошедшее через поперечное сечение проводника:

$$Q = \int_0^{t_0} idt = \int_0^{H_0} \frac{\mu_0 \gamma S_{\text{пр}} a}{2} \frac{dH}{dt} dt = \frac{1}{2} \mu_0 \gamma S_{\text{пр}} a H_0.$$

12.3. Имеется бесконечно длинный проводник, по которому проходит постоянный ток $I = 0,8$ А. В направлении, перпендикулярном к проводнику, движется квадратная рамка со стороной $a = 0,7$ м (рис. 12.2). Скорость рамки постоянна и равна v . В некоторый момент времени расстояние от проводника до ближайшей стороны рамки $X_0 = 0,5$ м. Какова должна быть скорость рамки, чтобы в этот момент в ней индуцировалась ЭДС $e = 5 \cdot 10^{-6}$ В?

Решение. Индукция МП в произвольной точке А на расстоянии x от проводника $B = \mu_0 I / (2\pi x)$. Магнитный поток через заштрихованный элемент площади рамки $d\Phi = \mu_0 I / (2\pi x) adx$.

Магнитный поток через всю рамку

$$\Phi = \int_{x_0}^{x_0+a} \frac{\mu_0 I}{2\pi x} adx = \frac{\mu_0 I a}{2\pi} \frac{x}{x+a} \frac{a}{x^2} v = \frac{\mu_0 I a^2 v}{2\pi(x+a)x},$$

откуда

$$v = \frac{e \cdot 2\pi(x+a)x}{\mu_0 I a^2}.$$

$$\text{При } x = x_0 - v = \frac{e \cdot 2\pi(x_0 + a)x_0}{\mu_0 I a^2} \approx 38 \text{ м/с.}$$

12.4. Внутри однослойной тороидальной катушки прямоугольного сечения протянут длинный прямой провод (рис. 12.3), по которому протекает ток $I = I_m \sin \omega t$. Число витков катушки w , магнитная проницаемость μ_0 . Найти ЭДС, индуцируемую в катушке.

$$\text{Решение. Искомая ЭДС } e = -\frac{d\psi}{dt} = -w \frac{d\Phi}{dt},$$

где Φ — магнитный поток через поперечное сечение катушки

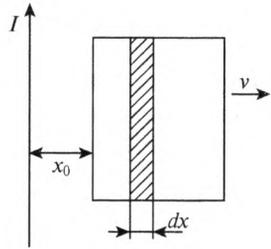


Рис. 12.2

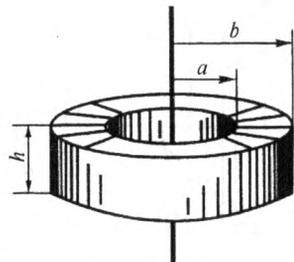


Рис. 12.3

$$\Phi = \int_w^b B_n dS = \int_w^b \frac{\mu_0 i}{2\pi r} h dr = \frac{\mu_0 i h}{2\pi} \ln \frac{b}{a}.$$

Здесь $B_n = \mu_0 i / (2\pi r)$ — значение индукции, создаваемой током в проводе на расстоянии r от него. ЭДС, индуцируемая в катушке:

$$e = -w \frac{d\Phi}{dt} = -\frac{\mu_0 h \omega I_M \cos \omega t}{2\pi} \ln \frac{b}{a}.$$

12.5. Плоская спираль с числом витков w , плотно прилегающих друг к другу, находится в однородном магнитном поле, перпендикулярном плоскости спирали (рис. 12.4). Наружный радиус витков спирали равен a . МП меняется во времени по закону $B = B_m \sin \omega t$. Найти амплитудное значение ЭДС индукции, наведенной в спирали.

Решение. ЭДС в каждом витке спирали

$$e_r = -\frac{d\Phi}{dt} = -\pi r^2 B_0 \omega \cos \omega t,$$

где r — радиус рассматриваемого витка.

На радиус dr приходится число витков $dw = (w/a)dr$. Витки соединены последовательно, поэтому полная ЭДС индукции в спирали

$$e = \int_0^a e_r dw = \int_0^a -\pi r^2 B_0 \omega \cos \omega t \cdot \frac{w}{a} dr.$$

Амплитудное значение ЭДС

$$E_m = (1/3)\pi a^2 B_0 \omega w.$$

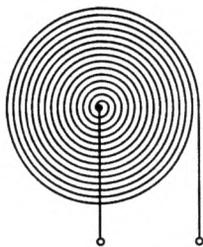


Рис. 12.4

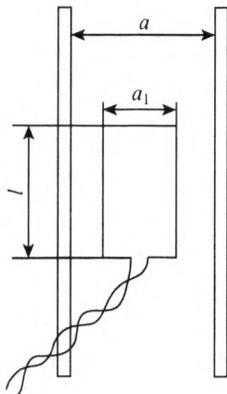


Рис. 12.5

12.6. Между проводами двухпроводной линии симметрично и в одной плоскости с ними расположена рамка, имеющая 100 витков (рис. 12.5). Через рамку проходит ток $i = 10 \sin 500t$, А. Вывести формулу коэффициента взаимной индуктивности. Определить величину ЭДС, наводимой в линии, если $a = 40$ мм, $a_1 = 25$ мм, $l = 50$ мм.

Решение. Контур, образованный двухпроводной линией, обозначим цифрой 1, контур, образованный рамкой — цифрой 2. Поскольку в линейной среде $M_{12} = M_{21}$, предположим, что

ток течет по линии, а в рамке наводится ЭДС. ЭДС, наводимая в рамке, от двухпроводной линии

$$e_r = -\frac{d\Phi}{dt} = -w \frac{d\Phi}{dt} = -M_{21} \frac{di_1}{dt}.$$

Магнитный поток Φ в рамке от левого провода

$$\Phi' = \int_{\frac{a-a_1}{2}}^{\frac{a-a_1}{2}+a_1} \vec{B} d\vec{s} = \int_{\frac{a-a_1}{2}}^{\frac{a+a_1}{2}} \vec{B} d\vec{s} = \int_{\frac{a-a_1}{2}}^{\frac{a+a_1}{2}} \frac{\mu_0 i_1}{2\pi r} l dr = \frac{\mu_0 i_1 l}{2\pi} \ln \frac{a+a_1}{a-a_1},$$

где $B = \mu_0 i / (2\pi r)$ — магнитная индукция на расстоянии r от левого провода; $ds = l dr$.

Магнитный поток в рамке от правого провода будет таким же, поэтому магнитный поток в рамке от обоих проводов

$$M_{12} = M_{21} = \frac{\Psi}{i_1} = \frac{w\Phi}{i_1} = \frac{\mu_0 w l}{\pi} \ln \frac{a+a_1}{a-a_1}.$$

Численные значения $M_{12} = M_{21} = 2,93 \cdot 10^{-6}$ Гн.

Используя полученный коэффициент взаимной индукции, найдем ЭДС, наводимую в линии:

$$e = -M_{12} \frac{di_2}{dt} = -\frac{\mu_0 w l}{\pi} \ln \frac{a+a_1}{a-a_1} \frac{d}{dt} (10 \sin 500t) = -0,0147 \cos \omega t.$$

12.7. Плоская проволочная петля расположена вблизи провода с током $i = 100 \sin 314t$, А (рис. 12.6). Ось провода лежит в плоскости, проходящей через петлю. Вычислить ЭДС, наводимую в петле.

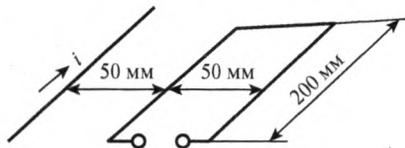


Рис. 12.6

Решение.

$$e = -\frac{d\Psi}{dt} = -\frac{d\Phi}{dt} = -M_{21} \frac{di_1}{dt},$$

$$\Phi = \int_{r_1}^{r_2} \vec{B} d\vec{s} = \frac{\mu_0 i_1}{2\pi} l \int_{r_1}^{r_2} \frac{dr}{r} = \frac{\mu_0 i_1 l}{2\pi} \ln \frac{r_2}{r_1}.$$

Здесь r_1 — расстояние от провода до ближайшей к нему стороны петли (50 мм); r_2 — то же до удаленной стороны (100 мм); $l = 200$ мм; $\mu_0 \approx 1,25 \cdot 10^{-6}$ Гн/м; $e = -\frac{\mu_0 l}{2\pi} \ln \frac{r_2}{r_1} \frac{d}{dt} (100 \sin 314t) = -0,87 \cos 314t$ мВ.

12.8. Определить взаимную индуктивность между двухпроводной линией передачи и линией связи (рис. 12.7). Провода линии проходят параллельно.

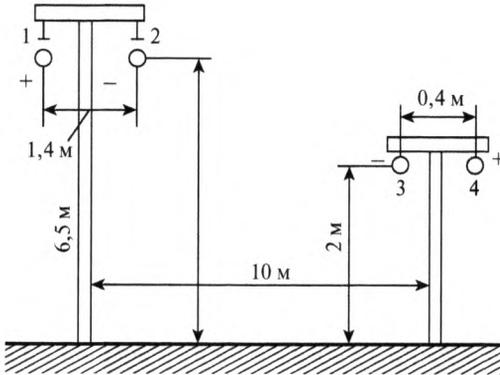


Рис. 12.7

Решение. В соответствии с предыдущей задачей, магнитный поток, созданный проводом 1 в рамке (линии связи),

$$\Phi_1 = \int_{d_{14}}^{d_{13}} \vec{B} d\vec{s} = \frac{\mu_0 i l}{2\pi} \int_{d_{14}}^{d_{13}} \frac{dr}{r} = \frac{\mu_0 i l}{2\pi} \ln \frac{d_{13}}{d_{14}}.$$

Магнитный поток, созданный проводом 2 в линии связи,

$$\Phi_2 = \int_{d_{23}}^{d_{24}} \vec{B} d\vec{s} = \frac{\mu_0 i l}{2\pi} \int_{d_{23}}^{d_{24}} \frac{dr}{r} = \frac{\mu_0 i l}{2\pi} \ln \frac{d_{24}}{d_{23}}.$$

$$M = \frac{\Psi}{i} = \frac{\mu_0 l}{2\pi} \ln \frac{d_{13} \cdot d_{24}}{d_{14} \cdot d_{23}}. \tag{12.6}$$

12.9. По контактному проводу электрифицированной железной дороги протекает ток $I = 1000$ А частотой 50 Гц. Какая ЭДС будет наводиться на единицу длины проводов линии связи, проходящей параллельно полотну железной дороги при различном расположении проводов А и В, указанном на рис. 12.8? Расстояние между проводами линии связи — 0,5 м.

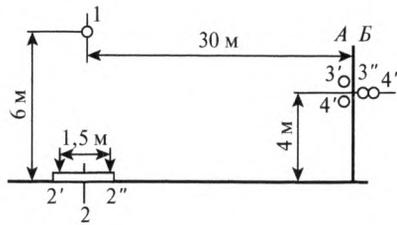


Рис. 12.8

Решение. Для определения наводимой ЭДС воспользуемся формулой (12.6), причем $l = 1$ м.

1. Заменяем рельсы одним проводником, расположенным посередине. Расположение проводов связи *A*

$$M_A = \frac{\mu_0}{2\pi} \ln \frac{d_{13'} \cdot d_{24'}}{d_{14'} \cdot d_{23'}} = 2 \cdot 10^{-7} (-3,3 \cdot 10^{-3}) = -6,6 \cdot 10^{-10} \text{ Гн/м,}$$

$d_{13'}$, d_{14} , $d_{23'}$, $d_{24'}$ — расстояния между соответствующими проводами;

$$E_A = \omega M_A I = 2\pi \cdot 50 (-6,6 \cdot 10^{-10}) 10^3 = -2,06 \cdot 10^{-4} \approx -0,2 \text{ мВ/м.}$$

Расположение проводов связи *B*

$$M_B = \frac{\mu_0}{2\pi} \ln \frac{d_{13''} \cdot d_{24''}}{d_{14''} \cdot d_{23''}} = 2 \cdot 10^{-7} \cdot 0,02 = 0,04 \cdot 10^{-7} \text{ Гн/м.}$$

$$E_B = \omega M_B I = 314 \cdot 0,04 \cdot 10^{-7} \cdot 10^3 = 1,25 \cdot 10^{-3} = 1,25 \text{ мВ/м.}$$

2. Ток в рельсах распределяется поровну.

Расположение проводов связи *A*. Коэффициент взаимной индукции между левым рельсом и линией связи

$$M'_A = \frac{\mu_0}{2\pi} \ln \frac{d_{13'} \cdot d_{24'}}{d_{14'} \cdot d_{23'}} = 6 \cdot 10^{-10} \text{ Гн/м.}$$

Коэффициент взаимной индукции между правым рельсом и линией связи

$$M''_A = \frac{\mu_0}{2\pi} \ln \frac{d_{13'} \cdot d_{24'}}{d_{14'} \cdot d_{23'}} = -24 \cdot 10^{-10} \text{ Гн/м,}$$

$$E_A = \omega (M'_A + M''_A) \cdot \frac{I}{2} = 314 \cdot (-18 \cdot 10^{-10}) \cdot 5 \cdot 10^2 = -2,8 \cdot 10^{-4} = -0,28 \text{ мВ/м.}$$

Расположение проводов связи B

$$M'_B = \frac{\mu_0}{2\pi} \ln \frac{d_{13''} \cdot d_{2'4''}}{d_{14''} \cdot d_{2'3''}} = -7,4 \cdot 10^{-10} \text{ Гн/м},$$

$$M''_B = \frac{\mu_0}{2\pi} \ln \frac{d_{13''} \cdot d_{2''4''}}{d_{14''} \cdot d_{2''3''}} = 0,6 \cdot 10^{-10} \text{ Гн/м},$$

$$E_B = \omega(M'_B + M''_B) \frac{I}{2} = 314(-6,9) \cdot 10^{-10} \cdot 500 = -1,06 \cdot 10^{-4} \approx -0,1 \text{ мВ/м}.$$

12.10. Металлический диск, насаженный на вал, вращается с постоянной скоростью 3000 об/мин в однородном МП, индукция которого 1 Тл, и перпендикулярна плоскости диска (рис. 12.9). Радиус диска $R = 0,1$ м. Требуется определить ЭДС, индуцируемую между валом и внешней окружностью диска. Указать качественное распределение зарядов на диске и на валу.

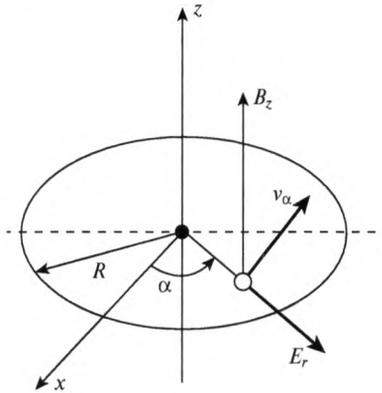


Рис. 12.9

Решение. Напряженность ЭП определяется векторным произведением $\vec{E} = \vec{v} \cdot \vec{B}$. В системе координат (рис. 12.9): $E = E_r = v\alpha B_z = \omega r B$.

$$\text{Электродвижущая сила: } e = \int_0^R E_r dr = \frac{\omega R^2 B}{2}.$$

Поскольку $\omega = 2\pi f = \pi n/30$, то окончательно $e = \pi n R^2 B/60$.

12.11. Стержень AD движется в МП (рис. 12.10) со скоростью $v = 0,25$ м/с. Магнитная индукция между полюсами электромагнита (т.е. на площади $0,5 \times 0,2$ м) изменяется во времени по закону $B = B_0(1 - kt)$, где $B_0 = 1$ Тл, $k = 5 \text{ с}^{-1}$; t — время, отсчитываемое от мо-

мента, когда стержень AD расположен, как показано на рис. 12.10. В остальной части проводникового контура, замкнутого вольтметром, магнитным полем можно пренебречь. Требуется определить ЭДС, наводимую в контуре (показание вольтметра V).

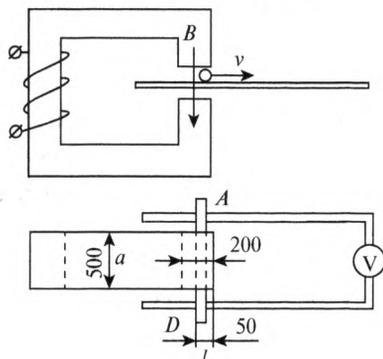


Рис. 12.10

Решение. ЭДС, наводимая в контуре, определяется по закону электромагнитной индукции:

$$e = -\frac{d\Phi}{dt} = \frac{d}{dt}(BS) = -\left(S\frac{dB}{dt} + B\frac{dS}{dt}\right).$$

В условиях данной задачи $B = B_0(1 - kt)$; $S = a(l - vt)$; $dB/dt = -B_0k$; $ds/dt = -av$, где $a = 0,5$ м; $l = 0,05$ м и $e = aB_0(lk + v - 2vkt)$.

Заметим, что часть ЭДС, обусловленная движением контура (BdS/dt), может быть определена иным способом по напряженности ЭП, возникающей в проводнике, движущемся в МП:

$$aB_0(1 - kt)v.$$

12.12. Медная цилиндрическая труба малой толщины δ при среднем радиусе $r_{\text{ср}}$ коаксиально надета на провод с током I и движется со скоростью v в направлении, совпадающем с осью проводника (рис. 12.11). Требуется определить показания вольтметра, присоединенного к внутренней и внешней поверхностям трубы посредством щеток. Зависят ли показания вольтметра от магнитных и электрических свойств трубы? Возникают ли в трубе напряженность поля, ток и заряды?

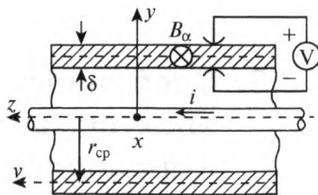


Рис. 12.11

Решение. Для решения задачи выберем круговую цилиндрическую систему координат с центром на оси провода. Вокруг провода с током образуется магнитное поле в трубе с индукцией $B = B_\alpha = I\mu/2\pi r_{\text{cp}}$. При движении трубы со скоростью $v = v_z$ в МП с индукцией B_α возникает радиальная напряженность ЭП $E_{\text{ст}} = vB$, которую будем называть сторонней. В проводящей трубе под действием электрического поля должен протекать ток плотностью $\vec{J} = \gamma(E + E_{\text{ст}})$, где E — напряженность ЭП при покоящейся трубе. Так как цепь тока разомкнута (считаем, что сопротивление вольтметра бесконечно велико) и, следовательно, $\vec{\delta} = 0$, то $\vec{E} = \vec{E}_{\text{ст}}$, т.е. в трубе образуется радиальная составляющая напряженности поля, $E_r = -vB$.

Из общего выражения для напряженности поля $\vec{E} = -\nabla\varphi - \partial\vec{A}/\partial t$ следует, что в условиях задачи $E_r = -(\nabla\varphi)_r = -vB = -vI\mu/2\pi r_{\text{cp}}$, так как $\partial A/\partial t = 0$. Вне трубы ЭП равно нулю. На внешней поверхности трубы появляются положительные, на внутренней — отрицательные заряды.

Вычислим показания вольтметра, применяя закон электромагнитной индукции $\oint \vec{E}d\vec{l} = -\partial\Phi/\partial t$. Отметим, что под интегралом стоит $E = -\nabla\varphi$, не включающее $E_{\text{ст}}$.

Выберем контур, проходящий через вольтметр, по соединительным проводам и вдоль радиуса трубы между щетками, связанный с направлением потока правилом правоходового винта. Тогда $E_r\Delta + U = \partial\Phi/\partial t$ или $U = \partial\Phi/\partial t + vB\Delta$.

При движении немагнитной трубы поток, сцепленный с контуром, не изменяется, т.е. $\partial\Phi/\partial t = 0$ и $U = v\Delta B = v\Delta I\mu_0/2\pi r_{\text{cp}}$.

При движении магнитной трубы с проницаемостью μ поток уменьшается со скоростью v . Тогда

$$\partial\Phi/\partial t = -\frac{I}{2\pi r_{\text{cp}}}(\mu - \mu_0)v\Delta \quad \text{и} \quad U = v\Delta I\mu_0/2\pi r_{\text{cp}}.$$

Как следует из приведенного решения, показания вольтметра не зависят от магнитных и электрических свойств трубы.

12.3. Особенности распространения электромагнитного поля в проводящей среде

12.13. Объясните, что такое индуктивное сопротивление.

Решение. Если по катушке с числом витков w (рис. 12.12) протекает переменный ток i , то в ней возникает магнитный поток Φ , который w раз сцепляется с катушкой (потокосцепление $\psi = w\Phi$). Величина потокосцепления зависит от величины тока i и от свойств катушки. Если исключить ток (разделить ψ/i), то останутся только свойства катушки. Таким образом, индуктивность $L = \psi/i$. ЭДС, наводимая в катушке, $e = -d\psi/dt = -d(Li)/dt = -L(di/dt)$. Напряжение u_L , уравновешивающее ЭДС — $u_L = L(di/dt)$. Если по катушке протекает переменный ток $i = I_m \sin \omega t$, то напряжение на катушке $u_L = L(di/dt) = L(d(I_m \sin \omega t)/dt) = \omega L I_m \cos \omega t$. В общем виде напряжение на катушке $u_L = U_{Lm} \sin(\omega t + \psi_{uc})$. Сравнивая два последних выражения, найдем $U_{Lm} = \omega L I_m$.

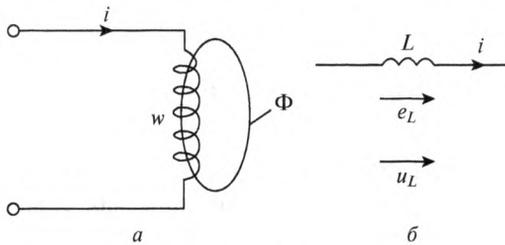


Рис. 12.12

Величину ωL , имеющую размерность Ом, называют индуктивным сопротивлением $X_L = \omega L$. Но это объяснение формальное. Если разделить u_L на i , то частное от деления будет функцией времени. Действительно,

$$\frac{u_L}{i} = \frac{U_{Lm} \cos \omega t}{I_m \sin \omega t} = \omega L \cdot \operatorname{ctg} \omega t.$$

Причем его значение будет меняться от $-\infty$ до $+\infty$.

Поэтому в качестве объяснения можно использовать следующее: индуктивное сопротивление есть среднее за период значение реакции катушки на протекание переменного тока. Кому-то такое объяснение может показаться спорным или даже ненужным, но в следующем примере оно уже окажется полезным.

12.14. Определить индуктивность катушки с числом витков w , намотанной на ферромагнитном сердечнике, зависимость $B(H)$ приведена на рис. 12.13, *a*. Заданы размеры сердечника и приложенное напряжение.

Решение. $u = U_M \sin \omega t$. Пренебрегая активным сопротивлением в сравнении с индуктивным, можно считать, что $u \approx \frac{d\psi}{dt} = \frac{d\psi}{di} \frac{di}{dt} = L_{\text{дин}} \frac{di}{dt}$.

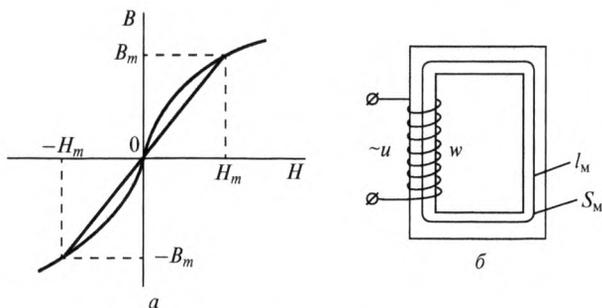


Рис. 12.13

С учетом того, что $\psi = wS_M B$; $i = Hl_M/w$,

$$\frac{d\psi}{di} = \frac{wS_M dB}{(l_M/w)dH} = \frac{w^2 S_M}{l_M} \frac{dB}{dH} = \frac{\mu_d w^2 S_M}{l_M} = L_{\text{дин}}.$$

Здесь $L_{\text{дин}}$ — динамическая (в рассматриваемом примере дифференциальная индуктивность; μ_d — динамическая (дифференциальная абсолютная магнитная проницаемость; S_M — сечение магнитопровода, l_M — его длина (рис. 12.13, б).

Таким образом, $\mu_d = dB/dH$, где в соответствии с рис. 11.15, B меняется в пределах от B_M до $-B_M$. Значение B_M найдем из выражения

$$u \approx \frac{d\psi}{dt} = wS_M \frac{dB}{dt};$$

$$B = \frac{1}{wS_M} \int u dt = \frac{1}{wS_M} \int U_m \sin \omega t dt = -\frac{U_m}{\omega w S_M} \cos \omega t, \quad \text{т.е.} \quad B_m = \frac{U_m}{\omega w S_M}.$$

Для вычисления значения $\mu_d = dB/dH$ воспользуемся представлением об $X_L = \omega L_{\text{дин}}$ как среднем значении за период (по теореме о среднем):

$$\mu_d = \left. \frac{dB}{dH} \right|_{\text{ср}} = \left| \frac{\int_{B_m}^{-B_m} dB}{H_m - (-H_m)} \right| = \left| \frac{-2B_m}{2H_m} \right| = \frac{B_m}{H_m} = \mu_{\text{стат}}.$$

Индуктивность катушки — $L = \mu_{\text{стат}} w^2 S_M / l_M$, $\mu_{\text{стат}}$ — статическое значение абсолютной магнитной проницаемости.

ОТВЕТЫ НА ЗАДАЧИ

Глава	Номера задач/Номера правильных ответов										
	Номер задачи	1.1	1.2	1.3	1.4	1.5	1.6	1.7	1.8	1.9	1.10
Глава 1	Правильный ответ	1	1	1	4	1	1	1	3	2	1
	Номер задачи	2.7	2.8	2.9	2.10	2.11	2.12	2.13	2.14	2.15	2.16
Глава 2	Правильный ответ	2	1	1	1	1	1	1	4	4	2
	Номер задачи	3.2	3.3	3.4	3.5	3.6	3.7	3.8	3.9	3.10	3.11
Глава 3	Правильный ответ	2	1	3	1	4	5	3	5	5	3
	Номер задачи	3.12	3.13	3.14	3.15	3.16	3.17	3.18	3.19	3.24	3.25
Глава 3	Правильный ответ	1	4	1	1	1	1	1	1	4	1
	Номер задачи	3.26	3.27	3.28	—	—	—	—	—	—	—
Глава 3	Правильный ответ	1	3	3	—	—	—	—	—	—	—
	Номер задачи	4.12	4.13	4.14	4.15	4.16	4.17	—	—	—	—
Глава 4	Правильный ответ	1	2	4	1	1	1	—	—	—	—
	Номер задачи	5.6	5.7	5.8	5.9	5.10	5.11	5.12	5.13	5.14	5.15
Глава 5	Правильный ответ	1	2	4	1	4	1	3	1	1	1
	Номер задачи	6.9	6.10	6.11	6.12	6.13	6.14	6.15	6.16	6.17	—
Глава 6	Правильный ответ	4	4	3	2	2	4	3	3	2	—
	Номер задачи	7.10	7.11	7.12	7.13	7.14	—	—	—	—	—
Глава 7	Правильный ответ	1	4	1	2	1	—	—	—	—	—
	Номер задачи	8.3	8.4	8.5	8.6	8.7	—	—	—	—	—
Глава 8	Правильный ответ	1	4	1	3	3	—	—	—	—	—

ТЕСТОВЫЕ ЗАДАНИЯ ПО ТЕОРИИ ЭЛЕКТРОМАГНИТНОГО ПОЛЯ

Тесты к главе 9

1. ЭМП представляет собой:
 - a) особый вид материи, которое оказывает давление на поглощающую поверхность и с силой воздействует на заряженные частицы;
 - b) материальную среду, характеризующуюся определенными параметрами: электрической проводимостью γ , магнитной проницаемостью μ и электрической постоянной ϵ_0 ;
 - c) материальную среду, характеризующуюся только электрической \vec{E} и магнитной напряженностью \vec{H} ;
 - d) вакуум, в котором перемещаются электрические и магнитные заряды.
2. ЭМП в некоторой области пространства полностью характеризуют вектора:
 - a) \vec{E} , \vec{H} , \vec{D} , \vec{B} ;
 - b) наличием величин \vec{E} , \vec{H} , \vec{B} в этой области пространства;
 - c) \vec{E} , \vec{H} .
3. Из представленных величин электрическое поле характеризуют:
 - a) E , D ;
 - b) H , B ;
 - c) B , μ ;
 - d) μ , H .
4. Электрические свойства среды характеризует величина:
 - a) γ ;
 - b) T ;
 - c) σ ;
 - d) μ .
5. Электрическим током называют:
 - a) направленное движение носителей электрических зарядов;
 - b) силу, действующую на электрически заряженную частицу, движущуюся в электромагнитном поле;
 - c) свободное хаотическое движение носителей электрических зарядов;
 - d) электродвижущую силу, возникающую в контуре при изменении магнитного потока, сцепляющегося с ним.

6. Высокой электропроводностью обладают:
- проводники;
 - диэлектрики;
 - магнетики;
 - полупроводники.
7. Электропроводность диэлектриков:
- практически равна нулю;
 - высокая;
 - комплексная величина;
 - стремится к бесконечности.
8. Для описания статического ЭП достаточно иметь уравнения, приведенные ниже:
- $\operatorname{rot} \vec{E} = 0, \operatorname{div} \vec{D} = \rho, \vec{D} = \epsilon \vec{E}$;
 - $\operatorname{div} \vec{D} = 0$;
 - $\Delta \vec{E} = 0, \vec{D} = \epsilon \vec{E}$;
 - $\operatorname{div} \vec{D} = \rho$.
9. Электрический потенциал φ ЭП представляет собой:
- работу, выполняемую по переносу единичного электрического заряда из бесконечности в заданную точку ЭП;
 - напряжение в заданной точке;
 - работу, выполняемую в ЭП при переносе электрического заряда;
 - работу, выполняемую по переносу единичного электрического заряда из заданной точки ЭП в бесконечность.
10. Причиной появления ЭП являются:
- только электрические заряды;
 - только электрические токи;
 - только электрические заряды и электрические токи;
 - электрические заряды, электрические токи и изменения МП во времени.
11. Причиной появления электростатического поля являются:
- электрические заряды;
 - электрические токи;
 - электрические заряды и электрические токи;
 - электрические заряды, электрические токи и изменения МП во времени.
12. Напряжение между точками a и b записывается в виде:

a)
$$U = \int_a^b \vec{E} d\vec{l};$$

$$b) U = \int_{\infty}^a \vec{E} d\vec{l};$$

$$c) U = \int_b^a \vec{E} d\vec{l};$$

$$d) U = \int_b^{\infty} \vec{E} d\vec{l}.$$

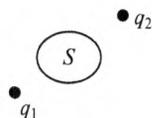
13. Поток вектора электрического смещения \vec{D} через замкнутую поверхность S равен:

a) 0;

b) $q_1 + q_2$;

c) $q_1 - q_2$;

d) q_1 .



14. Связь напряженности электростатического поля с потенциалом выражается формулой:

a) $\vec{E} = -\int \varphi d\vec{l}$;

b) $\varphi = -\int_a^b \vec{E} d\vec{l}$;

c) $\varphi = \int \vec{E} d\vec{l} + C$;

d) $\vec{E} = -\text{grad} \varphi$.

15. Граничные условия на границе раздела двух диэлектриков для электростатических полей описываются выражениями:

a) $E_{1\tau} = E_{2\tau}$; б) $E_{1n} = E_{2n}$; в) $D_{1n} = D_{2n}$; г) $D_{1\tau} = D_{2\tau}$.

a) а, г. б) а, б. в) а, в. г) в, г.

16. ЭП наиболее полно сформулировано в диэлектрической среде следующими уравнениями:

a) $\text{rot} \vec{E} = 0$, $\vec{E} = -\text{grad} \varphi$, где φ — электрический потенциал;

b) $\Delta \varphi = \rho / \epsilon$, где ρ — плотность электрического заряда;

c) $\Delta \varphi = 0$;

d) $\nabla^2 \vec{E} = \text{grad} \frac{\rho}{\epsilon}$.

17. Электрическая напряженность \vec{E} ЭП (ЭМП) представляет собой:

a) векторную величину, характеризующую ЭП и определяемую отношением силы, действующей на единичный электрический заряд к величине заряда;

b) силу, действующую на единичный электрический заряд к величине заряда;

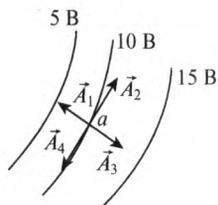
- с) силовое воздействие ЭП на внесенное тело или заряженную частицу;
- д) скалярную величину, характеризующую ЭП.
18. ЭП и МП представляют собой:
- а) две составляющие единого ЭМП, распространяющегося в пространстве со скоростью $3 \cdot 10^8$ м/с в виде волн либо фотонов;
- б) два независимых неподвижных поля;
- с) ЭП и МП совместно существуют лишь при распространении электромагнитных волн;
- д) два независимых поля, которые распространяются в пространстве со скоростью $3 \cdot 10^8$ м/с.
19. Если напряжение, приложенное к обкладкам плоского конденсатора, уменьшить в 2 раза, то напряженность ЭП между обкладками:
- а) уменьшится в 4 раза;
- б) уменьшится в 2 раза;
- с) увеличится в 2 раза;
- д) не изменится.
20. Если в масле с $\epsilon_1 = 2$ величина вектора \vec{E}_1 , перпендикулярного к границе раздела диэлектриков, равна 140 В/см, то в фарфоре с $\epsilon_1 = 7$ величина вектора \vec{E}_2 равна:
- а) 40 В/см;
- б) 280 В/см;
- с) 490 В/см;
- д) 70 В/см.
21. Напряжение между обкладками плоского конденсатора, у которого напряженность ЭП между пластинами $E = 40$ В/см и расстояние между пластинами $d = 2$ см, равно:
- а) $U = 80$ В;
- б) $U = 20$ В;
- с) $U = 8000$ В;
- д) $U = 2000$ В.
22. Напряжение между обкладками плоского конденсатора $U = 80$ В, расстояние между пластинами $d = 2$ см, напряженность ЭП между пластинами E равно:
- а) 40 В/см;
- б) 160 В/см;
- с) 400 В/см;
- д) 16 000 В/см.

23. Напряженность ЭП связана с индукцией ЭП соотношением:
- a) $\vec{E} = \epsilon_0 \vec{D}$;
 - b) $\vec{H} = \mu_0 \vec{B}$;
 - c) $\vec{B} = \vec{H} / \mu \mu_0$;
 - d) $\vec{D} = \epsilon \epsilon_0 \vec{E}$.
24. Электрическую емкость кабеля определяют из соотношения:
- a) $C = \frac{2\pi\epsilon l}{\ln \frac{r_2}{r_1}}$;
 - b) $C = \frac{2\pi\epsilon l}{\ln \frac{r_1}{r_2}}$;
 - c) $C = 2\pi\epsilon l \cdot \ln \frac{r_2}{r_1}$.

Тесты к главе 10

25. Заземление всех видов аппаратуры, источников и приемников электрической энергии применяется (выберите наиболее полный ответ):
- a) для защиты людей и оборудования от опасного действия электрического тока и обеспечения нормальной работы;
 - b) для снижения опасности попадания обслуживающего персонала под напряжение;
 - c) для обеспечения равного потенциала у источников энергии и у приемников энергии;
 - d) для возможного отвода атмосферного электричества.
26. Электростатическое экранирование представляет собой:
- a) электростатический режим экранирования основан на использовании явления электростатической индукции и заключается в замыкании зарядов на «землю» или корпус электрооборудования. Для экранирования может быть применен очень тонкий экран из магнитного или немагнитного металла и даже диэлектрика;
 - b) электростатический режим экранирования основан на использовании явления электростатической индукции и заключается в замыкании зарядов на «землю» или корпус электрооборудования. Для экранирования может быть использован лишь металлический экран;

- c) электростатическое экранирование заключается в создании около защищаемого объекта тонкого металлического экрана и отведении скапливающихся на нем электрических зарядов и возникающих токов (при облучении объекта электростатическим полем) на землю.
27. Если объемная плотность зарядов ρ больше нуля, то:
- $\operatorname{div} \vec{D} > 0$;
 - $\operatorname{div} \vec{D} < 0$;
 - $\operatorname{div} \vec{D} = 0$.
28. Соотношение между емкостью и проводимостью записывается соотношением:
- $C/G = \epsilon_a/\gamma$;
 - $C/G = \gamma/\epsilon_a$;
 - $C/G = \epsilon_a \cdot \gamma$;
 - $C/G = \epsilon_a/\gamma^2$.
29. Дифференциальная форма закона Джоуля — Ленца записывается уравнением:
- $p = \gamma E^2$;
 - $\operatorname{div} \vec{\delta} = 0$;
 - $\operatorname{rot} \vec{\delta} = 0$.
30. Удельная проводимость γ измеряется в:
- $\text{Ом}^{-1} \cdot \text{м}^{-1}$;
 - $\text{Ом}^{-1} \cdot \text{м}$;
 - $\text{Ом}^{-1} \cdot \text{м}^2$;
 - $\text{Ом} \cdot \text{м}$.
31. Если увеличить радиус круглого проводника с постоянным током I вдвое, то напряженность ЭП \vec{E} в каждой точке проводника:
- не изменится;
 - уменьшится в 4 раза;
 - уменьшится в 2 раза;
 - увеличится в 2 раза.
32. Для поля постоянных токов, эквипотенциальные линии которого изображены на рисунке, направление вектора напряженности \vec{E} в точке a совпадает с направлением вектора:
- \vec{A}_1 ;
 - \vec{A}_2 ;
 - \vec{A}_3 ;
 - \vec{A}_4 .



33. Если постоянный ток медной шины с удельной проводимостью $\gamma = 57 \cdot 10^6$ См/м имеет плотность $\vec{\delta} = 10^{-3}$ А/м², то напряженность ЭП равна:
- $17,54 \cdot 10^{-12}$ В/м;
 - $34,1 \cdot 10^{-8}$ В/м;
 - $57 \cdot 10^{-12}$ В/м;
 - 57 В/м.
34. Если постоянный ток медной шины с удельной проводимостью $\gamma = 57 \cdot 10^6$ См/м имеет напряженность ЭП $E = 17,54 \cdot 10^{-12}$, то плотность тока δ равна:
- $57 \cdot 10^{-3}$ А/м²;
 - $17,54 \cdot 10^{-3}$ А/м²;
 - $3 \cdot 10^{-3}$ А/м²;
 - 10^{-3} А/м².
35. ЭП постоянного тока описывается следующими уравнениями:
- уравнениями вида $\Delta U_{\text{Э}} = -\rho/\epsilon$;
 - уравнениями вида $\Delta \vec{E} = 0$; $\Delta U_{\text{Э}} = 0$;
 - уравнениями вида $\Delta \vec{E} + k^2 \vec{E} = 0$;
 - уравнениями вида $\Delta \vec{E} + \gamma \mu \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} + \epsilon \mu \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} = 0$.
36. ЭП в проводящей среде наиболее полно сформулировано следующими уравнениями:
- $\text{rot } \vec{E} = 0$, $\vec{E} = -\text{grad } \varphi$, где φ — электрический потенциал;
 - $\Delta \varphi = \rho/\epsilon$, где ρ — плотность электрического заряда;
 - $\Delta \varphi = 0$.
37. 1-й закон Кирхгофа в дифференциальной форме записывается уравнением:
- $\text{div } \vec{\delta} = 0$;
 - $\oint_S \vec{\delta} d\vec{S} = 0$;
 - $\oint_l \vec{\delta} d\vec{l} = 0$;
 - $\text{rot } \vec{\delta} = 0$.
38. Закон Ома в дифференциальной форме записывается уравнением:
- $\vec{\delta} = \gamma \vec{E}$;
 - $\text{rot } \vec{\delta} = 0$;
 - $\text{div } \vec{\delta} = 0$;
 - $\Delta \varphi = \rho/\epsilon$.

39. Для расчета статических полей с помощью зеркальных отображений (приведите наиболее полную формулировку) используется:

- a) метод зеркальных отображений используется в задачах с поверхностями раздела в виде плоскости кругового цилиндра или сферы, на которых могут появиться наведенные заряды или токи, закон распределения которых не известен. С помощью зеркальных отображений задача сводится к эквивалентной задаче расчета поля в однородной среде. Действие наведенных зарядов и токов учитывается введением фиктивных зарядов и токов, которые находятся из граничных условий исходной задачи;
- b) метод зеркальных отображений используется в задачах с неоднородными средами для упрощения расчета напряженностей поля, путем сведения неоднородной задачи к однородной задаче с соответствующими граничными условиями;
- c) метод зеркальных отображений используется в задачах с многослойными неоднородными средами, где разделяющие слои поверхности ограничены поверхностями второго порядка, на поверхностях могут появиться наведенные заряды или токи, закон распределения которых не известен. С помощью зеркальных отображений задача сводится к эквивалентной задаче расчета поля в однородной среде. Действие наведенных зарядов и токов учитывается введением фиктивных зарядов и токов, которые находятся из граничных условий исходной задачи;
- d) в соответствии с этим методом исходная задача, в которой поле должно рассчитываться в нескольких средах, сводится к эквивалентным задачам расчета ЭП в однородной среде. Поскольку при замене сред устраняются наведенные на поверхностях раздела заряды, их действие учитывается введением фиктивных зарядов. Величина, знак и расположение фиктивных зарядов находятся из граничных условий исходной задачи.

40. Связь векторов ЭМП в некоторой материальной среде характеризуется уравнениями:

$$a) \vec{B} = \mu \vec{H}, \quad \vec{D} = \epsilon \vec{E}, \quad \vec{\delta} = \gamma \vec{E};$$

$$b) \vec{\delta} = \gamma \vec{E};$$

$$c) \vec{\delta} = \gamma \vec{E} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t};$$

$$d) \vec{\delta} = \gamma \vec{E} + \rho \vec{v}.$$

41. Для идеального проводника справедливо уравнение:
- $\vec{\delta} = \gamma \vec{E}$;
 - $\vec{\delta} = \gamma \vec{E} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}$;
 - $\vec{\delta} = \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}$.
42. Анизотропными средами называются среды, материальные свойства которых:
- зависят от направлений;
 - одинаковы для полей любых направлений;
 - одинаковы только для слабых полей.
43. Для идеального диэлектрика справедливо уравнение:
- $\vec{\delta} = \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}$;
 - $\vec{\delta} = \gamma \vec{E} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}$;
 - $\vec{\delta} = \gamma \vec{E}$.
44. Идеальная электрическая емкость тела представляет собой:
- коэффициент пропорциональности между электрическим зарядом тела Q и электрическим потенциалом φ на теле, $C = Q/\varphi$;
 - свойство материала тела, зависящее от геометрии тела и его диэлектрической постоянной;
 - элемент, в котором ток опережает напряжение, приложенное к нему.
45. Резистивное сопротивление тела некоторой области представляет собой:
- коэффициент пропорциональности между электрическим напряжением U (потенциалом тела φ) и током I , вызванным приложенным напряжением, $r = U/I$;
 - резистивное сопротивление r тела — это свойство материала, зависящее от его размеров и электрической проводимости γ ;
 - резистивное сопротивление r тела — это элемент, в котором ток находится в фазе с напряжением, а выделяющаяся активная мощность идет на нагрев тела и отстает от напряжения, приложенного к нему, на 90° ;
- a) $\varepsilon_r = \varepsilon/\varepsilon_0$. b) $\varepsilon_r = \varepsilon_0/\varepsilon$. c) $\varepsilon_r = \varepsilon \cdot \varepsilon_0$.

46. Для идеального проводника справедливо уравнение:
- $\vec{\delta} = \frac{\partial \vec{D}}{\partial t};$
 - $\vec{\delta} = \gamma \vec{E} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t};$
 - $\vec{\delta} = \gamma \vec{E}.$
47. Изотропными средами называются среды, материальные свойства которых:
- одинаковы для полей любых направлений;
 - зависят от направлений;
 - одинаковы только для направления, параллельного горизонтальной оси;
 - одинаковы только для направления, параллельного вертикальной оси.
48. При физическом моделировании статических полей необходимо соблюдать условия:
- при переходе от реального устройства к модельному должны быть учтены масштабные коэффициенты и временные;
 - при переходе от реального устройства к модельному должны быть учтены масштабные коэффициенты;
 - при переходе от реального устройства к модельному должны быть учтены лишь временные коэффициенты;
 - при переходе от реального устройства к модельному должны быть учтены масштабные коэффициенты, временные и формы реального устройства и модели.

Тесты к главе 11

49. Принцип непрерывности магнитных силовых линий в дифференциальной форме имеет вид:
- $\operatorname{div} \vec{D} = 0;$
 - $\operatorname{div} \vec{B} = 0;$
 - $\operatorname{rot} \vec{E} = 0;$
 - $\operatorname{rot} \vec{H} = 0.$
50. Уравнение закона полного тока имеет вид:
- $\oint_L \vec{H} d\vec{l} = I;$

- b) $\oint_L \vec{H} d\vec{l} = \vec{I}$;
- c) $\vec{H} = \frac{wI}{2\pi r}$, где r — радиус окружности, на которой измеряется магнитная напряженность;
- d) $\operatorname{rot} \vec{H} = 0$.
- 51.** Граничные условия на плоскости раздела двух магнитных сред можно записать как: 1) $H_{1\tau} = H_{2\tau}$; 2) $H_{1n} = H_{2n}$; 3) $B_{1n} = B_{2n}$; 4) $B_{1\tau} = B_{2\tau}$:
- a) 2, 4.
 b) 1, 4.
 c) 1, 2.
 d) 1, 3.
- 52.** Дивергенция (div) вектора \vec{A} ($\operatorname{div} \vec{A}$) представляет:
- a) расхождение вектора \vec{A} ;
 b) частная производная вектора \vec{A} ;
 c) предел отношения поверхностного интеграла от вектора \vec{A} к элементу объема при стремлении последнего к нулю;
 d) это функция, дающая представление о приращении вектора \vec{A} при прохождении через замкнутую поверхность.
- 53.** Ротор (rot) вектора \vec{A} ($\operatorname{rot} \vec{A}$) представляет собой:
- a) вихрь вектора \vec{A} ;
 b) дифференциальную функцию от вектора \vec{A} ;
 c) предел отношения линейного интеграла от вектора \vec{A} к элементу поверхности при стремлении последнего к нулю;
 d) это функция, дающая представление о приращении вектора \vec{A} при прохождении через замкнутую поверхность.
- 54.** Статическое МП можно описать следующими уравнениями:

$$\operatorname{rot} \vec{H} = 0, \quad \operatorname{div} \vec{B} = 0, \quad \vec{B} = \mu \vec{H}.$$

- a) Достаточно ли этих уравнений?
 b) Нет, первое уравнение должно быть написано иначе — $\operatorname{rot} \vec{H} = \vec{\delta}$, где $\vec{\delta}$ — плотность стороннего тока.
 c) Нет, модель поля должна быть иной: $\Delta \vec{H} = 0$, $\vec{B} = \mu \vec{H}$.

55. Проанализируйте аналитическую зависимость $\oint_S \vec{A} d\vec{s} = \int_V \operatorname{div} \vec{A} dv$, характеризующую теорему Остроградского, и объясните, что она представляет собой. Дайте полный ответ:
- эта зависимость характеризует связь между поверхностным и объемным интегралами;
 - эта зависимость характеризует связь между векторной функцией и ее дивергенцией;
 - эта зависимость позволяет перейти от объемного интеграла векторной функции к поверхностному интегралу этой же функции.
56. Наиболее полно сформулировано аналитически МП постоянных токов:
- $\operatorname{rot} \vec{H} = \vec{\delta}$, $\operatorname{div} \vec{B} = 0$;
 - $\operatorname{rot} \vec{H} = 0$, $\operatorname{div} \vec{B} = 0$;
 - $\Delta \vec{A} = -\mu \vec{\delta}$.
57. МП постоянного тока описывается уравнениями математической физики:
- уравнениями вида $\Delta \vec{H} = 0$; $\Delta U_M = 0$;
 - уравнениями вида $\Delta \vec{A} = -\mu \vec{\delta}$;
 - уравнениями вида $\Delta \vec{H} + k^2 \vec{H} = 0$;
 - уравнениями вида $\Delta \vec{H} + \gamma \mu \frac{\partial \vec{H}}{\partial t} + \epsilon \mu \frac{\partial^2 \vec{H}}{\partial t^2} = 0$.
58. Принцип непрерывности магнитного потока записывается интегральным уравнением:
- $\int \vec{B} d\vec{S} = 0$;
 - $\Phi = \int \vec{B} d\vec{S}$;
 - $\vec{B} = \mu \vec{H}$;
 - $\oint_S \vec{A} d\vec{s} = \int_V \operatorname{div} \vec{A} dv$.
59. Принцип непрерывности магнитного потока в дифференциальной форме записывается уравнением:
- $\operatorname{div} \vec{B} = 0$;
 - $\operatorname{rot} \vec{H} = 0$;
 - $\operatorname{rot} \vec{H} = \vec{\delta}$;
 - $\vec{B} = \mu \vec{H}$.

60. Магнитное поле является потенциальным, если:
- $\operatorname{rot} \vec{H} = 0$;
 - $\operatorname{div} \vec{B} = 0$;
 - $\operatorname{rot} \vec{H} = \vec{\delta}$;
 - $\vec{B} = \mu \vec{H}$.
61. Магнитное поле является вихревым, если:
- $\operatorname{rot} \vec{H} = 0$;
 - $\operatorname{div} \vec{B} = 0$;
 - $\operatorname{rot} \vec{H} = \vec{\delta}$;
 - $\vec{B} = \mu \vec{H}$.
62. Магнитостатическое экранирование представляет собой:
- магнитостатическое экранирование основано на замыкании силовых линий МП в материале экрана. Цель таких экранов — отвод магнитного потока из защищаемой области. При конструировании магнитостатических экранов используются только магнитные материалы;
 - магнитостатическое экранирование основано на замыкании силовых линий МП в материале экрана. При конструировании магнитостатических экранов используются только магнитные материалы. Используют их одновременно и как электростатические экраны;
 - магнитостатические экраны изготавливаются из ферромагнитных материалов и предназначены для отведения части магнитного потока из защищаемой области;
 - магнитостатические экраны изготавливаются из ферромагнитных материалов и предназначены для отведения части магнитного и электрического потоков из защищаемой области.
63. Фазовая скорость v плоской электромагнитной волны в диэлектрике с относительной магнитной μ_r и относительной диэлектрической ϵ_r проницаемостью равна, м/с:
- $3 \cdot 10^8 \sqrt{\epsilon_r / \mu_r}$;
 - $3 \cdot 10^8 \sqrt{\epsilon_r \mu_r}$;
 - $3 \cdot 10^8$;
 - $3 \cdot 10^8 [1 / \sqrt{\epsilon_r \mu_r}]$.

64. Относительная магнитная проницаемость μ_r равна:
- $\mu_r = \mu/\mu_0$;
 - $\mu_r = \mu_0/\mu$;
 - $\mu_r = \mu \cdot \mu_0$.
65. Идеальная индуктивность L катушки представляет собой:
- параметр, описываемый формулой $L = w^2\mu_0 S/l$ Гн, где $\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7}$ Гн/м; w — число витков катушки; S — сечение прохождения потока, м²; l — длина провода катушки, м;
 - параметр L , описываемый формулой $L = w^2\mu S/l$ Гн, где $\mu = 4\pi \cdot 10^{-7} \cdot \mu_r$ Гн/м; μ_r — относительная магнитная проницаемость; w — число витков катушки; S — сечение прохождения потока, м²; l — длина провода катушки, м;
 - параметр L , описываемый формулой $L = \Psi/I$ Гн, где $\Psi = w\Phi$ — потокосцепление, связанное с катушкой, Гн; Φ — магнитный поток одного витка катушки, Гн; w — число витков катушки; I — ток, протекающий по катушке, м.
66. Индуктивность определяют из соотношения:
- $L = \frac{\Psi_L}{i}$;
 - $L = \frac{i}{\Psi_L}$;
 - $L = \Psi_L \cdot i$.
67. Магнитный поток для замкнутой магнитной цепи определяют из соотношения:
- $\Phi = \frac{wi}{R_M}$;
 - $\Phi = \frac{R_M}{wi}$;
 - $\Phi = wiR_M$.
68. Взаимную индуктивность двух контуров определяют из соотношения:
- $M_{km} = \frac{\Psi_{km}}{i_m}$;
 - $M_{km} = \frac{i_m}{\Psi_{km}}$;
 - $M_{km} = i_m \Psi_{km}$.
69. Коэффициент связи двух контуров определяют из соотношения:
- $K = \frac{|M|}{\sqrt{L_1 L_2}}$;

$$b) K = \frac{\sqrt{L_1 L_2}}{|M|};$$

$$c) K = |M| \sqrt{L_1 L_2}.$$

70. Электрическую емкость кабеля определяют из соотношения:

$$a) C = \frac{2\pi\epsilon l}{\ln \frac{r_2}{r_1}};$$

$$b) C = \frac{r_1}{2\pi\epsilon l};$$

$$c) C = 2\pi\epsilon l \cdot \ln \frac{r_2}{r_1}.$$

71. Абсолютная магнитная проницаемость μ равна:

$$a) \mu_r = \mu / \mu_0;$$

$$b) \mu_r = \mu_0 / \mu;$$

$$c) \mu = \mu_r \cdot \mu_0.$$

72. Закон полного тока в дифференциальной форме равен:

$$a) \operatorname{div} \vec{D} = 0;$$

$$b) \operatorname{div} \vec{B} = 0;$$

$$c) \operatorname{rot} \vec{H} = \vec{\delta};$$

$$d) \vec{B} = \mu \vec{H}.$$

Тесты к главе 12

73. Если $\gamma = 200 + j200 \text{ м}^{-1}$ — коэффициент распространения электромагнитной гармонической волны в проводнике, то глубина проникновения равна:

$$a) 5 \text{ мм};$$

$$b) 50 \text{ мм};$$

$$c) 2,5 \text{ мм};$$

$$d) 10 \text{ мм}.$$

74. Если в линии без потерь со скоростью света распространяется сигнал частоты $f = 10 \text{ МГц}$, то длина волны в линии равна:

$$a) 30 \text{ м};$$

$$b) 3 \text{ км};$$

$$c) 30 \text{ км};$$

$$d) 300 \text{ км}.$$

75. Электромагнитная волна называется плоской:
- a) если векторы напряженности ЭП \vec{E} и МП \vec{H} в любой данный момент времени лежат в плоскости, перпендикулярной распространению волны, и имеют в этой плоскости одинаковое значение, то такая волна называется плоской. Меняются они только в функции координаты Z (направления распространения волны) и времени t ;
 - b) линейно-поляризованная волна называется плоской. В ней \vec{E}, \vec{H} меняются только в функции координаты распространения волны и времени t ;
 - c) волна, в которой \vec{E}, \vec{H} изменяются только по координате распространения и во времени, но при этом векторы \vec{E} и \vec{H} в каждой точке пространства имеют всевозможные направления, быстро и беспорядочно сменяющие друг друга так, что ни одно из этих колебаний не является преимущественным.
76. Характеристики ЭМП — \vec{D}, \vec{B} являются векторными (иметь направление) в следующих случаях:
- a) величины \vec{D}, \vec{B} во всех средах являются векторными;
 - b) величины \vec{D}, \vec{B} могут быть скалярными в изотропных средах;
 - c) величины \vec{D}, \vec{B} могут быть скалярными и векторными;
 - d) величины \vec{D}, \vec{B} могут быть векторными в изотропных средах и тензорными в анизотропных средах.
77. Суммарный магнитный поток ($\Psi = w\Phi$), пересекающий замкнутый контур, наводит в нем ЭДС — e_L :
- a) если суммарный магнитный поток пересекает металлический контур перпендикулярно его плоскости, то в нем индуцируется ЭДС и протекает электрический ток;
 - b) если суммарный магнитный поток пересекает металлический контур перпендикулярно его плоскости и изменяется при этом во времени, то в нем индуцируется ЭДС и протекает электрический ток;
 - c) если суммарный магнитный поток направлен параллельно плоскости металлического контура, то в нем индуцируется ЭДС и протекает электрический ток;
 - d) если суммарный магнитный поток направлен параллельно плоскости металлического контура и изменяется при этом

во времени, то в нем индуцируется ЭДС и протекает электрический ток.

78. Граничными условиями для уравнения математической физики, описывающей ЭП, являются:

- условия, ограничивающие решение уравнения математической физики на границах рассматриваемой области;
- условия, фиксирующие поведение решения в начале выбранной координатной системы;
- условия, фиксирующие решение уравнения математической физики в бесконечности;
- условия, ограничивающие решение уравнения математической физики на границах рассматриваемой области, в начале выбранной координатной системы и в бесконечности.

79. Энергия в ЭМП описывается формулой:

- энергия ЭМП в объеме dv записывается в виде

$$W_0 dv = \left(\gamma E^2 + \frac{\epsilon E^2}{2} + \frac{\mu H^2}{2} \right) dv;$$

- энергия ЭМП в объеме dv записывается в виде

$$W_0 dv = \left(\frac{\mu H^2}{2} \right) dv;$$

- энергия ЭМП в объеме dv записывается в виде

$$W_0 dv = \left(\frac{\epsilon E^2}{2} \right) dv;$$

- энергия ЭМП в объеме dv записывается в виде

$$W_0 dv = \left(\frac{\epsilon E^2}{2} + \frac{\mu H^2}{2} \right) dv.$$

80. Принцип соответствия плоскопараллельных ЭП и МП заключается:

- в соответствии ряда величин: $\rho \leftrightarrow \delta_z$; $\varphi \leftrightarrow A_z$; $\epsilon \leftrightarrow 1/\mu$; $\vec{E} \leftrightarrow \vec{B}$; $\vec{D} \leftrightarrow \vec{H}$; $\tau \leftrightarrow I$; $U \leftrightarrow \Phi$; $C \leftrightarrow 1/L$, где C , τ , L , Φ , соответственно — емкость, заряд, индуктивность и магнитный поток, а z — координата распространения поля;
- в соответствии ряда величин: $\varphi \leftrightarrow A_z$; $\vec{E} \leftrightarrow \vec{B}$; $\vec{D} \leftrightarrow \vec{H}$; $U \leftrightarrow \Phi$, где z — координата распространения поля;
- в соответствии ряда величин: $\rho \leftrightarrow \delta_z$; $\varphi \leftrightarrow A_z$; $\epsilon \leftrightarrow 1/\mu$; $\tau \leftrightarrow I$; $C \leftrightarrow 1/L$, где C , τ , L , Φ , соответственно — емкость, заряд, индуктивность и магнитный поток, а z — координата распространения поля;

- d)* в соответствии ряда величин: $\vec{E} \leftrightarrow \vec{B}$; $\vec{D} \leftrightarrow \vec{H}$; $\tau \leftrightarrow I$; $U \leftrightarrow \Phi$; $C \leftrightarrow 1/L$, где C , τ , L , Φ , соответственно, емкость, заряд, индуктивность и магнитный поток.

81. Диполь электрический представляет собой:

- a)* диполь электрический представляет собой два разноименных заряда, сдвинутые в пространстве на некоторое расстояние друг от друга и обладающие моментом $\vec{m}_э = Qd$, где Q — величина заряда (положительного или отрицательного); d — расстояние между зарядами;
- b)* диполь электрический представляет собой два тока, текущие по параллельным проводам в противоположных направлениях;
- c)* два электрических разноименных электрических заряда, сдвинутые в пространстве на расстояние, стремящееся к нулю ($d \rightarrow 0$).

82. Диполь магнитный представляет собой:

- a)* диполь магнитный представляет собой виток с электрическим током I , создающим магнитный момент $\vec{m} = \vec{I}S$ А · м², где S — площадь пространства внутри витка, м;
- b)* диполь магнитный представляет катушку, намотанную w витками, по которой протекает электрический ток I ;
- c)* дипольное поле создается любым током $i = i(t)$, протекающим в какой-то области пространства.

83. Плоской электромагнитной волной является:

- a)* волна, у которой векторы \vec{E} и \vec{H} напряженностей расположены в плоскости, перпендикулярной направлению распространения волны, и изменяющиеся только в функции координаты распространения и времени;
- b)* волна, у которой векторы \vec{E} и \vec{H} напряженностей расположены в плоскости, перпендикулярной направлению распространения волны;
- c)* волна, изменяющаяся только в функции координаты распространения и времени;
- d)* волна, изменяющаяся только во времени.

84. Плоская электромагнитная волна обладает свойством:

- a)* векторы напряженности ЭП \vec{E} и напряженности МП \vec{H} в любой данный момент времени лежат в плоскости, перпендикулярной распространению волны, например xOy , и имеют в этой плоскости одинаковое значение. Меняются они

- только в функции координаты z (направления распространения волны) и времени t ;
- b) векторы напряженности ЭП \vec{E} и напряженности МП \vec{H} в любой данный момент времени лежат в плоскости, параллельной распространению волны, и имеют в этой плоскости одинаковое значение;
- c) векторы напряженности ЭП \vec{E} и напряженности МП \vec{H} в любой данный момент лежат в перпендикулярных в плоскостях;
- d) векторы напряженности ЭП \vec{E} и напряженности МП \vec{H} в любой данный момент времени лежат в плоскости, перпендикулярной распространению волны, например xOy , и имеют в этой плоскости разные значение.
85. Первое уравнение Максвелла для проводящей среды имеет вид:
- a) $\operatorname{rot} \dot{\vec{H}} = \gamma \dot{\vec{E}}$;
- b) $\operatorname{rot} \dot{\vec{H}} = j\omega \epsilon_a \dot{\vec{E}}$;
- c) $\operatorname{rot} \dot{\vec{H}} = \gamma \dot{\vec{E}} + j\omega \epsilon_a \dot{\vec{E}}$.
86. Второе уравнение Максвелла для проводящей среды имеет вид:
- a) $\operatorname{rot} \dot{\vec{E}} = -j\omega \mu_a \dot{\vec{H}}$;
- b) $\operatorname{rot} \dot{\vec{E}} = \gamma \dot{\vec{E}}$;
- c) $\operatorname{rot} \dot{\vec{E}} = \gamma \vec{E} + j\omega \epsilon_a \vec{E}$.
87. Глубину проникновения Δ определяют с помощью выражения:
- a) $\Delta = \sqrt{\frac{2}{\omega \gamma \mu_a}}$;
- b) $\Delta = \sqrt{\frac{\omega \gamma \mu_a}{2}}$;
- c) $\Delta = \sqrt{2\omega \gamma \mu_a}$.
88. Поверхностным эффектом называется:
- a) явление неравномерного распределения поля по сечению проводящего тела, вызванное затуханием электромагнитной волны при ее распространении в проводящей волне;
- b) явление равномерного распределения магнитного потока поля по сечению проводящего тела;

- с) явление неравномерного распределения магнитного потока и равномерного распределения электрического потока по сечению проводящего тела;
- д) явление равномерного распределения магнитного потока и неравномерного распределения электрического потока по сечению проводящего тела.
89. Глубина проникновения плоской электромагнитной гармонической волны — это расстояние, на котором амплитуда падающей волны:
- а) уменьшается до нуля;
- б) уменьшается в 2 раза;
- с) уменьшается в e раз;
- д) увеличивается в 2 раза.
90. Эквивалентная глубина проникновения Δ зависит от:
- а) параметров среды — μ , γ , ε ;
- б) частоты ω ;
- с) параметров среды — μ , γ , ε и частоты ω ;
- д) глубина проникновения Δ является постоянной величиной для данного материала.
91. Вектор Умова — Пойнтинга ($\vec{\Pi} = w\vec{v} = \vec{E}\vec{H}$) представляет собой:
- а) поток энергии, проходящий в единицу времени через единичную площадку, расположенную перпендикулярно к направлению распространения поля;
- б) мощность потока электрической энергии через единичную площадку;
- с) энергию электрического поля в единице объема.
92. Неравномерное распределение тока в цилиндрическом проводе кругового сечения связано с:
- а) поверхностным эффектом — вытеснением тока к поверхности проводника при повышении частоты питающего напряжения;
- б) неоднородным электрическим сопротивлением материала цилиндрического провода;
- с) нелинейными свойствами цилиндрического провода кругового сечения;
- д) неравномерным нагревом цилиндрического провода кругового сечения.
93. Электромагнитное экранирование — это:
- а) электромагнитное экранирование возникает на высоких частотах ($5 \cdot 10^3 < f < 10^9$) Гц, когда индукционные токи играют

первостепенную роль в величине эффективности экранирования. Как ЭП, так и МП вытесняются из экрана. Квазистатические режимы переходят в электромагнитный режим экранирования. Физическая сущность такого экранирования сводится к взаимодействию вторичного и первичного полей, которые близки по величине и противоположны по фазе, что приводит к ослаблению результирующего поля;

- b) электромагнитное экранирование преследует две задачи: а) отведение части излишнего магнитного потока от защищаемой области; б) снижение проникающего в защищаемую область магнитного потока с помощью вторичных полей, индуцированных в материале экрана внешним магнитным потоком;
- c) любой ферромагнитный экран при определенных характеристиках поля (например, высокой частоте ($5 \cdot 10^3 < f < 10^9$)) становится электромагнитным: как магнитный он отводит часть магнитного потока от защищаемой области, а как электрический — снижает проникающее в защищаемую область поле с помощью вторичных полей, индуцированных в материале экрана.
94. Закон электромагнитной индукции заключается в следующем:
- a) взаимосвязь некоторых функций в ЭМП, определяемая формулой $\operatorname{rot} \vec{E} = -\partial \vec{B} / \partial t$, где использованы общепринятые в электротехнике обозначения;
- b) взаимосвязь некоторых функций в ЭМП, определяемая формулой $e = -\partial \Psi / \partial t$, где использованы общепринятые в электротехнике обозначения;
- c) если некоторый контур пересекается магнитным потоком, изменяющимся во времени, то в нем индуцируется ЭДС.
95. Эквивалентная глубина проникновения Δ с увеличением частоты ω
- a) увеличивается;
- b) уменьшается;
- c) остается неизменной.
96. Силу, действующую в точке среды на помещенное в нее тело в ЭМП, можно определить в виде:
- a) суммарной силы, действующей в ЭМП на пробное тело, складывающейся векторно из силы магнитной и силы электрической, действующих на это пробное тело. Каждая из сил определяется соответствующим изменением энергии по изменению координаты пробного тела;

b) сила определяется по формуле $\vec{f} = \frac{\partial}{\partial q_i} \int_V \left(\frac{E^2}{2\epsilon} + \frac{H^2}{2\mu} \right) dv$, где

$i = 1, 2, 3$; остальные обозначения общепринятые;

c) сила определяется по формуле $\vec{f} = \frac{\partial}{\partial q_i} \int_V \left(\frac{\vec{E}\vec{D}}{2} + \frac{\vec{H}\vec{B}}{2} \right) dv$, где

$i = 1, 2, 3$; остальные обозначения общепринятые.

ЛАБОРАТОРНЫЕ РАБОТЫ НА ОСНОВЕ КОМПЬЮТЕРНОГО МОДЕЛИРОВАНИЯ (ВИРТУАЛЬНЫЕ ЛАБОРАТОРНЫЕ РАБОТЫ)

Общие указания

В последние годы в вузах ряда стран, включая и Россию, при изучении студентами различных дисциплин, связанных с электротехникой и электроникой, все более широкое применение находят системы компьютерного моделирования в различных программируемых средах, что обусловлено рядом причин, среди которых можно отметить следующие:

- 1) экономическая целесообразность — модернизация устаревшего оборудования лабораторий существенно дороже создания компьютерного класса и виртуальных лабораторных работ;
- 2) возможность исследования очень важных аномальных режимов, например, коротких замыканий; такие исследования на физических макетах недопустимы, так как приведут к их поломке;
- 3) возможность компьютерного моделирования самого современного оборудования различных модификаций;
- 4) возможность проведения лабораторных работ в компьютерных классах и организации тренинга лабораторных работ на домашних компьютерах;
- 5) возможность проведения лабораторных практикумов в филиалах.

При выборе программной среды для создания виртуальных учебных лабораторных работ (ВЛР) необходимо учитывать все 5 указанных выше требований. Поэтому, например, использование программы Multisim позволяет создать ВЛР высокого уровня.

Особенностью этой программы является наличие контрольно-измерительных приборов, по внешнему виду и характеристикам приближенных к промышленным аналогам. Программа легко осваивается и достаточно удобна в работе.

Целью выполнения лабораторного практикума является приобретение навыков экспериментального исследования электрических цепей с помощью компьютерного моделирования на основе программы Multisim.

Перед выполнением работ необходимо изучить основные теоретические положения. В конце каждой работы указаны номер литературы и страницы, где представлен материал по тематике данной работы.

В каждой работе предусмотрено 10 вариантов.

Работа 1. Исследование сложной электрической цепи постоянного тока

1. Цель работы

Экспериментальное исследование сложных электрических цепей постоянного тока методом компьютерного моделирования. Проверка опытным путем метода расчета сложных цепей постоянного тока с помощью 1-го и 2-го законов Кирхгофа.

2. Основные теоретические положения

Электрической цепью называют совокупность источников и приемников электрической энергии, соединенных между собой проводниками, предназначенную для передачи и преобразования электрической энергии. Источники электрической энергии характеризуются величиной ЭДС E , измеряемой в вольтах (В), и внутренним сопротивлением r , измеряемым в омах (Ом).

Приемниками электрической энергии в электрических цепях могут быть катушка индуктивности, конденсатор, аккумуляторная батарея в режиме зарядки, электрическая машина в режиме двигателя, лампа накаливания, электрическая печь и другие электрические компоненты. В них происходит необратимое (электрические печи) или обратимое (конденсатор, катушка индуктивности и аккумуляторная батарея) преобразование электрической энергии в другие ее виды. В цепях постоянного тока мы будем далее рассматривать только так называемые диссипативные элементы, которые не могут накапливать электрическую или магнитную энергию. Полученная ими электрическая энергия необратимо преобразуется в другие виды энергии, например в тепло. Все эти приемники — лампы накаливания, электрические печи и другие пассивные приемники — мы будем представлять в виде резисторов, которые характеризуются основным параметром — электрическим сопротивлением R , равным отношению постоянного напряжения U между выводами резистора к постоянному току I , протекающему в нем, т.е.: $R = U/I$. Величина электрического сопротивления R измеряется в омах (Ом).

Для расчета простых электрических цепей используют закон Ома для участка цепи, не содержащего ЭДС. Например, если между двумя точками a и b в электрической цепи включены только пассивные элементы — резисторы, то закон Ома для этого участка цепи запишется:

$$I_{ab} = \frac{U_{ab}}{R_{ab}}. \quad (1.1)$$

Если же участок цепи $a-b$ содержит источник ЭДС E_{ab} , то ток, протекающий по этому участку, будет определяться формулой

$$I_{ab} = \frac{U_{ab} \pm E_{ab}}{R_{ab}}. \quad (1.2)$$

где I_{ab} — ток, протекающий по участку ab ; U_{ab} — напряжение на участке ab , т.е. напряжение между точками a и b ; R_{ab} — суммарное сопротивление всех пассивных элементов, включенных на участке ab цепи между точками a и b ; E_{ab} — ЭДС, действующая на участке ab . Эта ЭДС входит в выражение со знаком «+», если ее направление совпадает с направлением тока I_{ab} , и со знаком «-», если ее направление противоположно направлению тока I_{ab} .

При последовательном соединении резисторов R_1 и R_2 их сопротивления складываются, т.е. эквивалентное сопротивление в этом случае будет равно:

$$R_{\Sigma} = R_1 + R_2. \quad (1.3)$$

При параллельном соединении тех же двух резисторов их эквивалентное сопротивление находится по формуле

$$R_{\Sigma} = \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2}. \quad (1.4)$$

Сложной электрической цепью называют такую цепь, которая не может быть сведена только к последовательному или параллельному соединению источников и приемников электрической энергии (рис. 1.1).

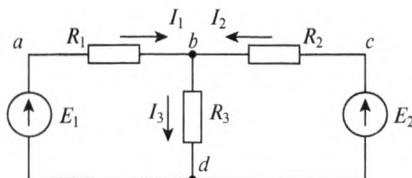


Рис. 1.1

Линейной электрической цепью называют электрическую цепь, содержащую приемники и источники электрической энергии, параметры которых (сопротивления и проводимости) остаются постоянными и не зависят от величины и направления протекающего через них тока. Зависимость тока от приложенного напряжения в таких приемниках (резисторах) изображается прямой линией, а сами резисторы называются линейными резисторами.

Сложные электрические цепи имеют несколько узлов и ветвей, а также могут иметь и несколько источников питания. Ветвью электрической цепи называют участок схемы, состоящий из нескольких последовательно соединенных элементов, по которым протекает один и тот же ток. Узлом электрической цепи называют точку соединения, к которой подходит не менее трех ветвей.

Расчет сложной линейной электрической цепи заключается в определении токов во всех ветвях и сводится к решению системы линейных алгебраических уравнений, составленных по законам Кирхгофа для данной электрической цепи.

Решение системы алгебраических уравнений представляет собой достаточно трудоемкую работу, объем которой возрастает с увеличением числа неизвестных при увеличении сложности электрической цепи.

В целях сокращения числа уравнений, решение которых даст искомые величины и определит режим электрической цепи, разработаны различные методы расчета линейных электрических цепей: например, метод контурных токов, где уравнения составляются только по 2-му закону Кирхгофа, или метод узловых потенциалов, когда уравнения составляются только по 1-му закону Кирхгофа.

В данной лабораторной работе экспериментально исследуется метод расчета электрических цепей с помощью составления и решения уравнений по 1-му и 2-му законам Кирхгофа.

1-й закон Кирхгофа формулируется следующим образом: сумма притекающих к узлу токов равна сумме вытекающих из узла токов или алгебраическая сумма токов в узле равна нулю, т.е.

$$\sum_{k=1}^K I_k = 0.$$

Например, для узла b (см. рис. 1.1):

$$I_1 + I_2 = I_3$$

или

$$I_1 + I_2 - I_3 = 0. \quad (1.5)$$

2-й закон Кирхгофа гласит: в любом замкнутом контуре электрической цепи алгебраическая сумма падений напряжения на всех сопротивлениях этого контура равна алгебраической сумме ЭДС, действующих в этом контуре, т.е.

$$\sum_{k=1}^N R_k I_k = \sum_{q=1}^M E_q.$$

Например, для контура *abda*:

$$R_1 \cdot I_1 + R_3 \cdot I_3 = E_1. \quad (1.6)$$

Для контура *cbdc*:

$$R_2 \cdot I_2 + R_3 \cdot I_3 = E_2. \quad (1.7)$$

Запишем уравнения (1.6)—(1.7) в канонической форме. Для этого расположим неизвестные в уравнениях в порядке их нумерации и заменим отсутствующие члены членами с нулевыми коэффициентами:

$$\begin{aligned} I_1 + I_2 - I_3 &= 0; \\ R_1 \cdot I_1 + 0 \cdot I_2 + R_3 \cdot I_3 &= E_1; \\ 0 \cdot I_1 + R_2 \cdot I_2 + R_3 \cdot I_3 &= E_2, \end{aligned}$$

или в матричной форме:

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ R_1 & 0 & R_3 \\ 0 & R_2 & R_3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \\ I_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ E_1 \\ E_2 \end{bmatrix}. \quad (1.8)$$

После подстановки численных значений ЭДС и сопротивлений полученная система уравнений решается известными из математики методами, например методом Крамера или методом Гаусса. Можно решить эту систему и в интегрированном пакете *MATHCAD* или применив алгебру с матрицами, используя электронную таблицу *Excel*.

В любой электрической цепи выполняется закон сохранения энергии, т.е. мощность, развиваемая источниками электрической энергии, равна сумме мощностей, потребляемых приемниками электрической энергии. Этот баланс мощностей записывается следующим образом:

$$\sum_{k=1}^M P_{\text{кист}} = \sum_{q=1}^N P_{\text{гпр}}$$

или

$$\sum_{k=1}^M E_k I_k = \sum_{q=1}^N R_q I_q^2. \quad (1.9)$$

3. Порядок выполнения работы

1. «Собрать» на экране монитора электрическую схему (рис. 1.2), параметры элементов которой должны быть установлены на компьютере в соответствии с вариантом (табл. 1.1). Заметим, вариант выбирается по последней цифре шифра студента.

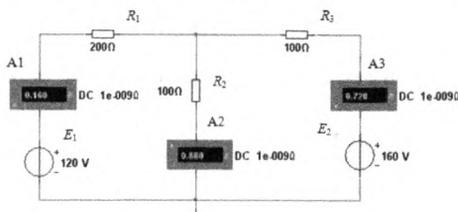


Рис. 1.2

Таблица 1.1

№ варианта	E_1 , В	E_2 , В	R_1 , Ом	R_2 , Ом	R_3 , Ом
1	20	40	100	50	100
2	30	60	120	60	120
3	40	80	140	70	140
4	50	100	160	80	160
5	60	120	180	90	180
6	70	140	200	100	200
7	80	160	220	110	220
8	90	180	240	120	240
9	100	200	260	130	260
0	110	220	280	140	280

2. С помощью амперметров А1—А3 измерить токи I_1 , I_2 , I_3 исследуемой схемы. Результаты измерений занести в табл. по форме 1.1.

Форма 1.1

Эксперимент				Расчет			
E_1 , В	E_2 , В	I_1 , А	I_2 , А	I_3 , А	I_1 , А	I_2 , А	I_3 , А

3. Составить систему уравнений по законам Кирхгофа для исследуемой цепи, подставив в эти уравнения вместо сопротивлений и ЭДС их величины

$$\begin{aligned}
 I_1 - I_2 + I_3 &= 0; \\
 R_1 \cdot I_1 + R_2 \cdot I_2 + 0 \cdot I_3 &= E_1; \\
 0 \cdot I_1 + R_2 \cdot I_2 + R_3 \cdot I_3 &= E_2.
 \end{aligned}$$

4. Решить полученную систему и результаты расчета занести в таблицу по форме 1.1. Сравнить расчетные токи с измеренными ранее в лабораторной работе.

5. Проверить баланс мощностей по равенству:

$$\sum_{k=1}^M E_k I_k = \sum_{q=1}^N R_q I_q^2.$$

6. Сделать вывод по результатам проделанной работы.

4. Содержание отчета

1. Схема исследуемой цепи.
2. Основные расчетные соотношения.
3. Таблица по форме 1.1 с результатами измерений и вычислений.
4. Расчет баланса мощностей.
5. Краткие выводы.

5. Вопросы для самопроверки

1. Сформулировать закон Ома для участка цепи.
2. Сформулировать 1-й и 2-й законы Кирхгофа.
3. Сколько независимых уравнений необходимо составить для расчета сложной цепи по 1-му закону Кирхгофа?
4. Сколько независимых уравнений необходимо составить для расчета сложной цепи по 2-му закону Кирхгофа?
5. Чему равна общая ЭДС при последовательном включении источников энергии?
6. Сформулируйте баланс мощностей для цепей постоянного тока.

Работа 2. Исследование линейных элементов электрических цепей

1. Цель работы

Экспериментальное исследование линейных элементов R , L и C методом компьютерного моделирования.

2. Основные теоретические положения

Любое реальное электротехническое устройство обладает тремя параметрами: сопротивлением R ; индуктивностью L и емкостью C .

Для удобства анализа и расчета электрических цепей вводят понятия об идеализированных элементах цепи, то есть таких, которые обладают только одним параметром — только сопротивлением; только индуктивностью; только емкостью. Эти элементы называются соответственно: сопротивлением, индуктивностью и емкостью.

С помощью идеализированных элементов можно любое реальное электротехническое устройство представить в виде комбинации идеализированных элементов и, следовательно, провести его электромагнитный расчет.

В качестве идеализированных элементов в настоящей работе используются резисторы, катушки индуктивности и конденсаторы, имеющие характеристики, близкие к идеализированным.

Исследуются электромагнитные процессы, происходящие в сопротивлении, индуктивности и емкости при их подключении к источнику синусоидального напряжения. Синусоидальное напряжение — периодическая функция. Ее периодом T называется минимальное время, по истечении которого значение функции повторяется. Число периодов в секунду называется частотой напряжения $f = 1/T$, Гц. Кроме частоты f в электротехнике часто используют понятие об угловой частоте $\omega = 2\pi f$, 1/с.

Аналитическая запись синусоидального напряжения имеет вид:

$$u = U_m \sin(\omega t + \psi_u). \quad (2.1)$$

Здесь u — мгновенное значение напряжения, т.е. его значение в любой момент времени t от начала отсчета; U_m — амплитуда напряжения, т.е. наибольшее его значение; $(\omega t + \psi_u)$ — фаза напряжения, град или рад, может принимать любые значения в пределах от 0 до $\pm 2K\psi$ радиан или от 0 до $\pm K360^\circ$ (K — любое целое число); ψ — начальная фаза напряжения (греческая «пси»), это напряжения при $t = 0$.

Синус любого угла, как известно из курса математики, изменяется в пределах от 0 до ± 1 , как бы велико ни было значение угла, входящего под его знак. Поэтому синусоидальное напряжение изменяется во времени, как это видно из формулы (2.1), в пределах от $+U_m$ до $-U_m$, принимая в этом диапазоне любые значения ($+U_m \geq u \geq -U_m$).

Все сказанное выше относится и к синусоидальному току, аналитическая запись которого имеет вид:

$$i = I_m \sin(\omega t + \psi_i). \quad (2.2)$$

Здесь i — мгновенное значение тока, А; I_m — амплитуда тока, А; $(\omega t + \psi_i)$ — фаза тока, град или рад; ψ_i — начальная фаза тока (греческая «пси»), град или рад. Графики напряжений $u(t)$ на рис. 2.1, 2.2,

2.3 построены для случая, когда начальная фаза напряжения принята равной нулю: $\psi_u = 0$, и тогда $u = U_m \sin \omega t$. График тока i на рис. 2.1 построен таким образом, что его начальная фаза $\psi_i = 0$, и тогда $i = I_m \sin \omega t$. График тока на рис. 2.2 построен так, что $\psi_i = -90^\circ$, и тогда $i = I_m \sin(\omega t - 90^\circ)$. График тока на рис. 2.3 построен так, что $\psi_i = +90^\circ$, и тогда $i = I_m \sin(\omega t + 90^\circ)$. Положительные начальные фазы этих графиков откладываются влево от точки начала отсчета ($t = 0$), а отрицательные начальные фазы — вправо.

Угол сдвига фаз между напряжением и током принято определять как разность начальных фаз напряжения (ψ_u) и тока (ψ_i). Этот угол обозначают греческой буквой φ (фи):

$$\varphi = \psi_u - \psi_i. \quad (2.3)$$

Угол сдвига фаз φ любой электрической цепи — произвольная величина. Он определяется соотношением между параметрами R , L и C для каждой конкретной цепи с постоянной частотой f .

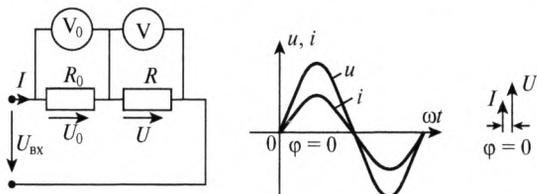
Сопrotивление R

Рис. 2.1

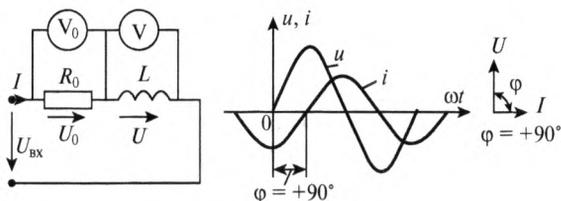
Индуктивность L

Рис. 2.2

В частности, в цепи с сопротивлением R ток и напряжение всегда совпадают по фазе ($\psi_u = \psi_i$) и угол сдвига фаз (см. формулу (2.3)) $\varphi = 0$; в цепи с индуктивностью L ток всегда отстает по фазе от напряжения на 90° ($\psi_i = \psi_u - 90^\circ$) и поэтому угол сдвига фаз $\varphi = +90^\circ$; в цепи с емкостью C ток всегда опережает напряжение по фазе на 90° ($\psi_i = \psi_u + 90^\circ$) и поэтому угол сдвига фаз $\varphi = -90^\circ$.

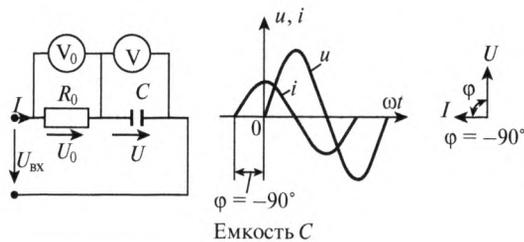


Рис. 2.3

В энергетике широко распространено понятие о коэффициенте мощности цепи:

$$P/S = \cos \varphi. \quad (2.4)$$

Этот коэффициент показывает, какая доля полной мощности преобразуется в тепло и другие виды энергии. Энергетики стремятся эту долю свести к единице, т.е. иметь $P = S$ или $\cos \varphi = 1$.

Фазовые соотношения между током и напряжением цепи исследуются с помощью двухлучевого осциллографа, позволяющего получать на экране одновременно две синусоиды: тока и напряжения.

Амплитудные соотношения между током и напряжением цепи

Синусоидальные напряжения и токи часто изображают в виде векторов, длина которых равна амплитуде, а угол между вектором и произвольно выбранной осью отсчета равен начальной фазе. При этом принято положительные начальные фазы откладывать от оси отсчета против часовой стрелки, а отрицательные начальные фазы — по часовой стрелке.

Совокупность векторов тока и напряжений цепи называется векторной диаграммой этой цепи. Векторные диаграммы для цепей с R , L и C показаны на рис. 2.1, 2.2 и 2.3.

Токи и напряжения в электрических цепях измеряют с помощью амперметров и вольтметров. Обычно для этого применяют приборы электромагнитной системы, шкалы которых отградуированы не в амплитудных значениях тока I_m и напряжения U_m , а в так называемых действующих значениях тока и напряжения I и U . Это основные расчетные величины цепей синусоидального тока. Они меньше амплитуд в $\sqrt{2}$ раз:

$$I = \frac{I_m}{\sqrt{2}}; \quad U = \frac{U_m}{\sqrt{2}}. \quad (2.5)$$

Между амплитудами напряжения и тока (так же, как и между их действующими значениями) любой электрической цепи существует однозначная связь, определяемая соотношениями между параметрами R , L и C . Отношение амплитуд (или действующих значений) напряжения и тока называется полным сопротивлением цепи: $Z = \frac{U}{I}$. В частности,

для цепи с активным сопротивлением:

$$\frac{U_m}{I_m} = \frac{U}{I} = z_R = R;$$

для цепи с индуктивностью:

$$\frac{U_m}{I_m} = \frac{U}{I} = z_L = x_L; \quad (2.6)$$

для цепи с емкостью:

$$\frac{U_m}{I_m} = \frac{U}{I} = z_C = x_C,$$

где x_L — индуктивное, а x_C — емкостное сопротивления.

Индуктивное и емкостное сопротивления принципиально зависят от частоты напряжения:

$$x_L = \omega L; \quad x_C = \frac{1}{\omega C}. \quad (2.7)$$

3. Порядок выполнения работы

1. Ознакомиться с методикой моделирования (приведена в конце 5-й работы) простых цепей переменного тока на компьютере.

2. Выбрать свой вариант из табл. 2.1.

3. «Собрать» цепь (рис. 2.4), содержащую только активное сопротивление R , измерительные приборы (ваттметр, амперметр, вольтметр) и датчик тока.

4. Установить параметры цепи и частоту синусоидального напряжения в соответствии со своим вариантом. Действующее значение напряжения источника $U_{\text{вх}}$ установить в пределах 5–10 В. Перевести приборы в режим измерения переменного тока (АС).

5. «Включить» цепь и записать показания измерительных приборов в соответствующую строку таблицы по форме 2.1.

Полученные расчетные результаты занести в соответствующую графу таблицы по форме 2.1 и сопоставить расчетные R , P и $\cos \varphi$ с установленными, согласно варианту и значениям. Убедиться в том, что значения этих параметров практически совпадают.

7. Настроить «осциллограф» и получить на его экране синусоиды тока и падение напряжения на сопротивлении. Напряжение на входе цепи практически равно напряжению на сопротивлении, так как сопротивления приборов (ваттметра и амперметра) не учитываем. Осциллограф имеет два канала. Канал **A** фиксирует мгновенное значение напряжения на исследуемом элементе. Канал **B** подключен к датчику тока и фиксирует мгновенное значение тока в цепи.

Скопировать экран монитора с помощью клавиши Prt Scr. Нажатие этой клавиши позволяет занести в буфер обмена содержимое экрана монитора. Затем из буфера скопировать в программу Paint, выделить нужный фрагмент и перенести в нужный файл (отчет по лабораторным работам).

Анализируя полученные графики u и i , убедиться в том, что в цепи с активным сопротивлением ток и напряжение совпадают по фазе.

Построить в тех же масштабах векторную диаграмму тока и напряжения цепи для амплитудных или действующих значений. При этом начальная фаза напряжения может быть выбрана любой и отличаться от ее значения на осциллографе. Указать на этой диаграмме угол сдвига фаз.

8. «Собрать» цепь, содержащую только индуктивность L , т.е. вместо активного сопротивления включить индуктивность. При этом все приборы и датчик тока остаются.

9. Установить заданную величину индуктивности (табл. 2.1). «Включить» цепь и полученные данные (напряжение, ток, мощность, коэффициент мощности) занести в табл. по форме 2.1.

Рассчитать величину индуктивного сопротивления x_L и индуктивности L цепи, воспользовавшись формулами

$$\frac{U_m}{I_m} = \frac{U}{I} = z_L = x_L \quad \text{и} \quad x_L = \omega L.$$

Затем рассчитать активную мощность P и коэффициент мощности $\cos \varphi$, воспользовавшись соотношениями, указанными в п. 6. В этих расчетах следует учесть, что $R = 0$.

Полученные расчетные значения занести в соответствующую графу таблицы по форме 2.1 и сопоставить величину L с установленным согласно варианту значением и расчетные P и $\cos \varphi$ с измеренными значениями. Убедиться в том, что эти значения параметров практически совпадают.

10. Настроить осциллограф и получить на его экране синусоиды тока и падение напряжения на индуктивности. Скопировать полученные осциллограммы.

11. Анализируя полученные графики u и i , убедиться в том, что в цепи с индуктивностью ток отстает от напряжения по фазе на четверть периода, то есть на 90° или $\pi/2$ радиан.

Построить в тех же масштабах векторную диаграмму тока и напряжения цепи для амплитудных или действующих значений. Указать на этой диаграмме угол сдвига фаз.

12. «Собрать» цепь, содержащую только конденсатор C , т.е. вместо индуктивности L включить конденсатор C . При этом все приборы и датчик тока остаются.

13. «Включить» цепь и полученные данные (напряжение, ток, мощность, коэффициент мощности) занести в табл. по форме 2.1.

Рассчитать величину емкостного сопротивления x_C и емкости C , воспользовавшись формулами

$$\frac{U_m}{I_m} = \frac{U}{I} = z_C = x_C \quad \text{и} \quad x_C = \frac{1}{\omega C}.$$

Затем рассчитать активную мощность P и коэффициент мощности $\cos \varphi$, воспользовавшись соотношениями, указанными в п. 6. В этих расчетах следует учесть, что $R = 0$.

Полученные расчетные значения занести в соответствующую графу табл. по форме 2.1 и сопоставить величину C с установленным согласно варианту значением и расчетные P и $\cos \varphi$ с измеренными значениями. Убедиться в том, что эти значения параметров практически совпадают.

14. Настроить осциллограф и получить на его экране синусоиды тока и напряжения на емкости.

Анализируя полученные графики u и i , убедиться в том, что в цепи с емкостью ток опережает напряжение по фазе на четверть периода, то есть на 90° или $\pi/2$ радиан.

Построить в тех же масштабах векторную диаграмму тока и напряжения цепи для амплитудных или действующих значений тока и напряжения. Указать на этой диаграмме угол сдвига фаз.

4. Содержание отчета

1. Титульный лист (указать специальность и шифр студента).
2. Схемы всех исследуемых цепей, соответствующие им графики u и i , а также векторные диаграммы.

3. Основные расчетные соотношения.
4. Таблица по форме 2.1 с результатами измерений и вычислений.
5. Краткие выводы.

5. Вопросы для самопроверки

1. Чем отличаются идеализированные элементы электрической цепи от реальных элементов?
2. Почему в данной работе в качестве идеализированных элементов можно использовать резистор, катушку индуктивности и конденсатор?
3. Для некоторой цепи известны напряжение и ток:

$$u = 282 \sin(314t + 30^\circ); \quad i = 141 \sin(314t + 70^\circ).$$

Требуется определить:

- действующие значения напряжения и тока цепи;
- частоту цепи f , Гц;
- угол сдвига фаз φ между напряжением и током цепи;
- характер цепи — индуктивный или емкостной.

Построить графики зависимости тока и напряжения цепи от времени.

Построить векторную диаграмму цепи.

4. В цепи с активным сопротивлением измерены действующие значения тока и напряжения: $I = 1$ А; $U = 10$ В. Требуется определить величину активного сопротивления.

Записать ток и напряжение в виде синусоид, если частота цепи $f = 1000$ Гц, а начальная фаза напряжения $\psi_u = 60^\circ$. Построить графики зависимости тока и напряжения от времени. Построить векторную диаграмму цепи.

5. В цепи с индуктивностью измерены действующие значения тока и напряжения: $U = 10$ В, $I = 1$ А. Требуется определить:

- величину индуктивного сопротивления x_L ;
- величину индуктивности L , если частота цепи $f = 1590$ Гц;
- записать ток и напряжение в виде синусоид, если частота цепи $f = 1590$ Гц, а начальная фаза напряжения $\psi_u = -360^\circ$;
- построить векторную диаграмму цепи.

6. В цепи с емкостью измерены действующие значения тока и напряжения цепи: $U = 10$ В; $I = 1$ А. Требуется:

- определить величину индуктивного сопротивления x_C ;
- определить величину индуктивности C , если частота цепи $f = 1590$ Гц;

- записать ток и напряжение в виде синусоид, если частота цепи $f = 1590$ Гц, а начальная фаза напряжения $\psi_u = -60^\circ$;
 - построить векторную диаграмму цепи.
7. Как зависят активное сопротивление R , индуктивное сопротивление x_L и емкостное сопротивление x_C от частоты приложенного напряжения?
8. Индуктивное сопротивление цепи составляет 8 Ом. Как изменится это сопротивление, если частоту приложенного напряжения увеличить в два раза?

Работа 3. Исследование разветвленной цепи синусоидального тока с одним источником энергии

1. Цель работы

Экспериментальное исследование методом компьютерного моделирования разветвленной электрической цепи с одним источником синусоидального напряжения и ее расчет комплексным методом.

2. Основные теоретические положения

В данной работе исследуется цепь, со смешанным соединением трех комплексных сопротивлений Z_1 , Z_2 и Z_3 .

Задача расчета состоит в определении токов во всех ветвях цепи при известных параметрах, заданном действующем значении приложенного к цепи напряжения и частоте сети. Расчет производится символическим методом (методом комплексных амплитуд) с использованием преобразований цепи либо к последовательному, либо к параллельному соединению ее элементов.

Рассматривается одна из двух схем такой цепи: с последовательно-параллельным (рис. 3.1, а) и параллельно-последовательным (рис. 3.1, б) соединениями этих элементов.

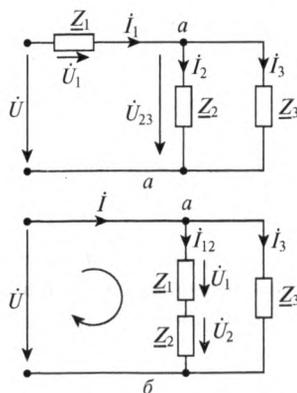


Рис. 3.1

Расчет исследуемой цепи

Порядок расчета цепи с последовательно-параллельным соединением комплексных сопротивлений (рис. 3.1, а)

1. Определяется эквивалентное комплексное сопротивление цепи Z_3 :

$$\underline{Z}_3 = \underline{Z}_1 + \frac{\underline{Z}_2 \underline{Z}_3}{\underline{Z}_2 + \underline{Z}_3}.$$

2. Определяется комплексное действующее значение тока \dot{I}_1 :

$$\dot{I}_1 = \dot{U}_1 / \underline{Z}_3.$$

При этом начальная фаза приложенного напряжения может быть принята равной нулю, т.е. $\dot{U}e^{j\psi} = Ue^{j0} = U$.

3. Определяется комплексное действующее значение напряжения на участке цепи с параллельным соединением \underline{Z}_2 и \underline{Z}_3 :

$$\dot{U}_{23} = \dot{U} - \dot{I}_1 \underline{Z}_1.$$

4. Определяется комплексное действующее значение тока \dot{I}_2 :

$$\dot{I}_2 = \frac{\dot{U}_{23}}{\underline{Z}_2}.$$

5. Определяется комплексное действующее значение тока \dot{I}_3 :

$$\dot{I}_3 = \frac{\dot{U}_{23}}{\underline{Z}_3}.$$

Проверка решения осуществляется по 1-му закону Кирхгофа для одного из узлов цепи. Например, для узла a имеем:

$$\dot{I}_1 = \dot{I}_2 + \dot{I}_3.$$

Если расчет произведен верно, то сумма комплексных токов $\dot{I}_2 + \dot{I}_3$ должна быть практически равна комплексному току \dot{I}_1 .

Порядок расчета цепи с параллельно-последовательным соединением комплексных сопротивлений (рис. 3.1, б)

1. Определяется эквивалентная комплексная проводимость всей цепи \underline{Y}_3 :

$$\underline{Y}_3 = \frac{1}{\underline{Z}_1 + \underline{Z}_2} + \frac{1}{\underline{Z}_3}.$$

2. Определяется комплексное действующее значение тока цепи \dot{I} :

$$\dot{I} = \dot{U} \underline{Y}_3.$$

Начальную фазу приложенного напряжения можно принять равной нулю, т.е. $\dot{U}e^{j\psi} = Ue^{j0} = U$.

3. Определяется комплексное действующее значение тока \dot{I}_{12} :

$$\dot{I}_{12} = \frac{\dot{U}}{\underline{Z}_1 + \underline{Z}_2}.$$

4. Определяется комплексное действующее значение напряжения \dot{U}_1 :

$$\dot{U}_1 = \dot{I}_{12} \underline{Z}_1.$$

5. Определяется комплексное действующее значение напряжения \dot{U}_2 :

$$\dot{U}_1 = \dot{I}_{12} \underline{Z}_1.$$

6. Определяется комплексное действующее значение тока \dot{I}_3 :

$$\dot{I}_3 = \frac{\dot{U}}{\underline{Z}_3}.$$

Проверка решения осуществляется по 1-му закону Кирхгофа для одного из узлов цепи или по 2-му закону Кирхгофа для одного из контуров цепи. Например, для узла a имеем: $\dot{I} = \dot{I}_{12} + \dot{I}_3$; для левого контура (на схеме рис. 3.1, b указано направление его обхода) имеем: $\dot{U} = \dot{U}_1 + \dot{U}_2$.

Если расчет произведен верно, то сумма комплексных токов $\dot{I}_{12} + \dot{I}_3$ должна быть практически равна комплексному току \dot{I} , а сумма комплексных напряжений $\dot{U}_1 + \dot{U}_2$ должна быть практически равна комплексному напряжению цепи \dot{U} .

Описание элементов исследуемой цепи

В качестве элементов исследуемой цепи применяются резисторы, катушки индуктивности и конденсаторы, которые в диапазоне используемых частот принимаются идеализированными элементами цепи, т.е. полагают, что резистор обладает только сопротивлением R ,

катушка индуктивности обладает только индуктивностью L и конденсатор обладает только емкостью C .

Комплексные сопротивления таких элементов записываются следующим образом:

$$\underline{Z}_R = R, \quad \underline{Z}_L = jx_L = j\omega L, \quad \underline{Z}_C = jx_C = -j\frac{1}{\omega C}.$$

В данной работе студенты исследуют одну из цепей, составленных из комбинации идеализированных элементов \underline{Z}_R , \underline{Z}_L , \underline{Z}_C (рис. 3.2, а). Векторные диаграммы (рис. 3.2, б) для этих цепей приведены в общем виде (без масштабов).

Экспериментальное исследование параметров цепи

Для экспериментального определения параметра любого идеализированного элемента цепи достаточно измерить действующее значение тока и напряжения на этом элементе. Отношение действующих значений напряжения и тока дает полное сопротивление z этого элемента. Для идеализированных элементов цепи эти соотношения дают:

— активное сопротивление: $\frac{U_R}{I} = z_R = R;$

— индуктивное сопротивление: $\frac{U_L}{I} = z_L = \omega L;$

— емкостное сопротивление: $\frac{U_C}{I} = z_C = \frac{1}{\omega C}.$

Зная частоту f приложенного к цепи напряжения, легко рассчитать индуктивность и емкость:

$$L = \frac{x_L}{\omega}; \quad C = \frac{1}{\omega x_C}; \quad \omega = 2\pi f.$$

Указания к построению векторных диаграмм

При построении векторной диаграммы используются данные измерений действующих значений токов и напряжений на всех элементах цепи, а также учитывается то обстоятельство, что все элементы цепи можно считать идеализированными. Предварительно следует выбрать масштабы токов и напряжений так, чтобы векторная диаграмма заполнила весь тетрадный лист.

При построении векторной диаграммы целесообразно руководствоваться следующими рекомендациями.

Для схемы (рис. 3.2) построение удобно начинать с вектора напряжения, полученного в результате непосредственных измерений, который должен практически совпадать с его значением, полученным при построении векторной диаграммы.

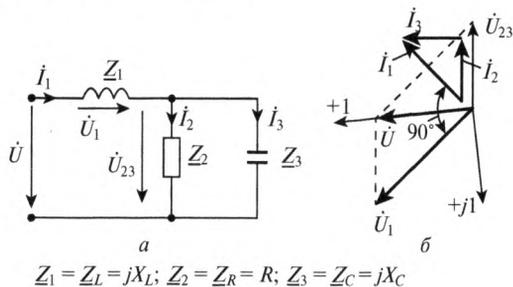


Рис. 3.2

После нахождения вектора общего тока цепи \dot{I}_1 определяется и положение вектора \dot{U}_1 . Этот вектор опережает вектор тока по фазе 90° . При геометрическом сложении векторов \dot{U}_1 и \dot{U}_{23} получаем в соответствии со 2-м законом Кирхгофа вектор общего напряжения цепи $\dot{U} = \dot{U}_1 + \dot{U}_{23}$. При этом действующее значение приложенного напряжения, полученное в результате непосредственных измерений, должно практически совпадать с его значением, полученным при построении векторной диаграммы.

Для схемы (рис. 3.3, а) построение следует начинать с вектора приложенного напряжения \dot{U} и отложить его на диаграмме в произвольном направлении.

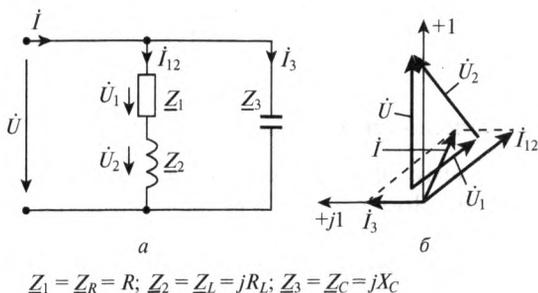


Рис. 3.3

Вектор тока \dot{I}_3 опережает вектор приложенного напряжения по фазе 90° . Вектор тока \dot{I}_{12} отстает по фазе от вектора приложенного напряжения на угол $\psi = \arctg x_L/R$. Параметры x_L , x_C и R к моменту построения векторной диаграммы уже известны. Вектор общего тока цепи \dot{I} в соответствии с 1-м законом Кирхгофа определяется как геометрическая сумма векторов \dot{I}_{12} и \dot{I}_3 , т.е. $\vec{I} = \dot{I}_{12} + \dot{I}_3$.

Векторы напряжений \dot{U}_1 и \dot{U}_2 находятся путем разложения вектора \dot{U} на две составляющие: \dot{U}_1 — на активном сопротивлении $Z_1 = R$, совпадающую по фазе с вектором тока \dot{I}_{12} , и \dot{U}_2 — на реактивном сопротивлении Z_2 , перпендикулярную вектору тока \dot{I}_{12} . В соответствии со 2-м законом Кирхгофа $\dot{U} = \dot{U}_1 + \dot{U}_2$.

Указания к записи токов и напряжений в виде комплексных чисел

Всякий вектор на плоскости, изображающий синусоидальный ток или напряжение, может быть записан в виде комплексного числа. Для этого векторную диаграмму токов и напряжений цепи следует совместить с комплексной плоскостью, координатная система которой состоит из взаимно перпендикулярных осей вещественных чисел и мнимых чисел, так, чтобы всякий вектор на плоскости, изображающий синусоидальный ток или напряжение, мог быть записан в виде комплексного числа. Для этого построенную в процессе выполнения данной работы векторную диаграмму следует совместить с комплексной плоскостью так, чтобы вещественная ось комплексной плоскости совпала с приложенным напряжением U (рис. 3.3, б). Тогда $\dot{U} = Ue^{j\omega t} = U$ и при расчете цепи можно пользоваться формулами, приведенными в разделе 2. При этом рассчитанные теоретически и построенные экспериментально векторные диаграммы должны практически совпасть.

3. Порядок выполнения работы

1. «Собрать» схему, представленную на рис. 3.4, в соответствии со своим вариантом. Номер схемы и ее параметры указаны в табл. 3.1. При этом номер варианта должен быть равен последней цифре шифра студента. В каждую из трех ветвей схемы ввести амперметр для последующего измерения действующего значения тока и параллельно каждому элементу подсоединить вольтметр.

Форма 3.1

Для схемы 1 (рис. 3.4)

F	$U, В$	$U_1, В$	$U_{23}, В$	$I_1, А$	$I_2, А$	$I_3, А$

Форма 3.2

Для схемы 2 (рис. 3.5)

F	$U, В$	$U_1, В$	$U_2, В$	$I, А$	$I_{12}, А$	$I_3, А$

3. Определить параметры всех элементов схемы, считая их идеализированными. Полученные расчетные данные занести в таблицу по форме 3.3.

Форма 3.3

$R, Ом$	$x_L, Ом$	$L, Ом$	$x_C, Ом$	$C, мкФ$

4. Построить векторную диаграмму цепи, используя результаты измерений токов и напряжений. Предварительно следует выбрать масштабы токов и напряжений таким образом, чтобы векторная диаграмма полностью занимала отдельный лист отчета. Аналогичные диаграммы представлены на рис 3.2, б. Проверить соответствие графических построений 1-му и 2-му законам Кирхгофа.

5. Произвести теоретический расчет цепи символическим методом, считая известными действующее значение приложенного напряжения U и сопротивления всех элементов цепи (таблицы по формам 3.2 и 3.3). Принять при расчетах начальную фазу приложенного напряжения равной нулю, т.е. совместить ось вещественных чисел комплексной плоскости с вектором U приложенного напряжения. Положение комплексной плоскости показано на векторных диаграммах рис. 3.1, б и 3.2, б. Результаты расчетов занести в таблицу по форме 3.4 для схемы 1 и в таблицу по форме 3.5 для схемы 2.

6. Сопоставить результаты расчета с опытом. Для этого на комплексной плоскости, сориентированной относительно построенной векторной диаграммы так, как это показано на рис. 3.1, построить расчетные значения векторов токов и напряжений, убедиться в их соответствии с опытными данными.

Форма 3.4

	Модуль	Аргумент	Вещественная часть	Мнимая часть
\dot{U} , В				
\dot{U}_1 , В				
\dot{U}_{23} , В				
\dot{I}_1 , В				
\dot{I}_2 , В				
\dot{I}_3 , В				

Форма 3.5

	Модуль	Аргумент	Вещественная часть	Мнимая часть
\dot{U} , В				
\dot{U}_1 , В				
\dot{U}_2 , В				
\dot{I}_{12} , В				
\dot{I}_3 , В				
\dot{I} , В				

4. Содержание отчета

1. Копия экрана монитора со схемой исследуемой цепи.
2. Таблицы с опытными и расчетными результатами.
3. Векторная диаграмма.
4. Выводы.

5. Вопросы для самопроверки

1. Как соотносятся между собой ток и напряжение в индуктивности; ток и напряжение в емкости?
2. Начальная фаза напряжения, приложенного к емкости, составляет $+30^\circ$. Какова начальная фаза тока в этой емкости?
3. Начальная фаза тока в индуктивности составляет -60° . Какова начальная фаза напряжения, приложенного к этой индуктивности?
4. Сформулируйте 1-й и 2-й законы Кирхгофа применительно к векторам действующих токов и напряжений исследуемой цепи синусоидального тока.

5. К идеализированной катушке индуктивности приложено синусоидальное напряжение, действующее значение которого $U = 314$ В. Частота сети $f = 50$ Гц. Какова величина индуктивности этой катушки, если действующее значение тока в ней $I = 1$ А?

6. К идеализированному конденсатору приложено напряжение, действующее значение которого $U = 318,5$ В, угловая частота сети $\omega = 314$ 1/с. Какова величина емкости этого конденсатора, если действующее значение тока в нем $I = 1$ А?

7. Сформулируйте 1-й и 2-й законы Кирхгофа применительно к комплексным действующим значениям токов и напряжений исследуемой цепи синусоидального тока.

8. К цепи, содержащей только индуктивное сопротивление $x_L = 2$ Ом, приложено напряжение, комплексное действующее значение которого $\dot{U} = 100e^{-j30^\circ}$. Записать комплексное действующее значение тока \dot{I} в этом сопротивлении.

9. В цепи, содержащей только емкостное сопротивление $x_C = 1$ Ом, протекает ток, комплексное действующее значение которого $\dot{I} = 20e^{+j45^\circ}$. Записать комплексное действующее значение напряжения \dot{U} , приложенного к этой цепи.

Работа 4. Исследование частотных свойств цепи с последовательным соединением активного сопротивления, индуктивности и емкости

1. Цель работы

Экспериментальное исследование резонанса и частотных характеристик цепи с последовательным соединением активного сопротивления, индуктивности и емкости с помощью компьютерного моделирования.

2. Основные теоретические положения

Схема исследуемой цепи представлена на рис. 4.1, а. В соответствии со 2-м законом Кирхгофа для этой цепи имеем:

$$\bar{U} = \bar{U}_R + \bar{U}_L + \bar{U}_C. \quad (4.1)$$

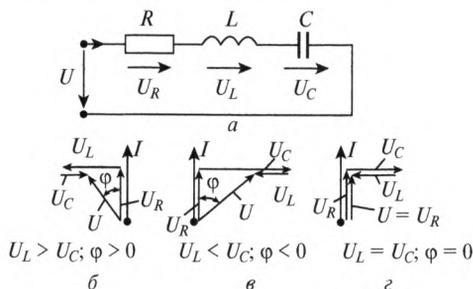


Рис. 4.1

Здесь \vec{U} — вектор действующего значения приложенного напряжения;
 \vec{U}_R — вектор действующего значения напряжения на активном сопротивлении R цепи, совпадающий по фазе с вектором действующего значения тока \vec{I} ;

\vec{U}_L — вектор действующего значения напряжения на индуктивном сопротивлении $X_L = \omega L$ цепи, опережающий по фазе вектор действующего значения тока \vec{I} на 90° ;

\vec{U}_C — вектор действующего значения напряжения на емкостном сопротивлении $X_C = 1/\omega C$ цепи, отстающий по фазе от вектора действующего значения тока \vec{I} на 90° .

Векторная диаграмма исследуемой цепи показана на рис. 4.1 для трех случаев соотношения между U_L и U_C .

На этой диаграмме векторы напряжений образуют прямоугольный треугольник со сторонами U , $(U_L - U_C)$ и U_R . Из этого треугольника легко найти соотношения между действующими значениями напряжений и угол сдвига фаз φ между напряжением и током цепи:

$$U = \sqrt{U_R^2 + (U_L - U_C)^2}; \quad (4.2)$$

$$\varphi = \arctg \frac{U_L - U_C}{U_R}. \quad (4.3)$$

На рис. 4.1, б $U_L > U_C$; ток цепи отстает по фазе от напряжения, $\varphi > 0$ и цепь имеет индуктивный характер. На рис. 4.1, в $U_L < U_C$; ток цепи опережает по фазе напряжение, $\varphi < 0$ и цепь имеет емкостной характер. На рис. 4.1, з $U_L = U_C$; ток цепи совпадает по фазе с напряжением, $\varphi = 0$ и цепь имеет чисто активный характер. В этих условиях в цепи имеет место резонанс напряжений. При резонансе напряжений $U_L - U_C = 0$ и $U = U_R$.

Известно, что в соответствии с законом Ома

$$U_R = IR; \quad U_L = IX_L; \quad U_C = IX_C. \quad (4.4)$$

Подставив (4.4) в (4.2) и (4.3), получаем

$$U = I\sqrt{R^2 + (X_L - X_C)^2} = Iz, \quad (4.5)$$

где $\sqrt{R^2 + (X_L - X_C)^2}$ — полное сопротивление цепи.

$$\varphi = \arctg \frac{X_L - X_C}{R}. \quad (4.6)$$

Из соотношения $U_L - U_C = 0$ вытекает, что при резонансе $X_L - X_C = 0$ или $\omega L - 1/\omega C$. Отсюда:

$$\omega^2 LC - 1 = 0. \quad (4.7)$$

Это уравнение показывает соотношение между ω , L , C при резонансе. Если L и C — заданные величины, то угловая частота цепи, при которой будет иметь место резонанс напряжений

$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}. \quad (4.8)$$

При резонансе напряжений полное сопротивление $z = R$ и является минимальным, а ток в цепи $I = U/z$ при неизменном значении действующего напряжения U — максимальным. Если при резонансе $X_{L0} = X_{C0} > R$, то напряжения на реактивных элементах цепи больше приложенного к цепи напряжения $U_{L0} = U_{C0} > U$.

Зависимости сопротивлений элементов цепи, напряжений на этих элементах, угла сдвига фаз, тока от частоты называются частотными характеристиками цепи. В данной работе рассматриваются зависимости активного сопротивления R , индуктивного сопротивления X_L , емкостного сопротивления X_C , полного сопротивления z , угла сдвига фаз φ и действующего значения тока цепи I от частоты приложенного напряжения. Общий вид этих характеристик показан на рис. 4.2.

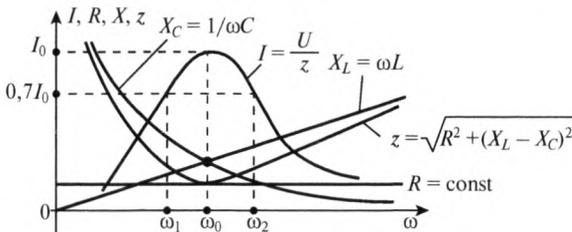


Рис. 4.2

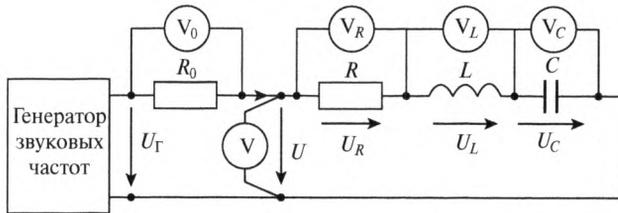


Рис. 4.3

При частоте $\omega_0 > \omega$ преобладает емкостное сопротивление и цепь имеет емкостной характер — ток опережает напряжение по фазе (векторная диаграмма на рис. 4.1, *в*).

При частоте $\infty > \omega > \omega_0$ в цепи преобладает индуктивное сопротивление и цепь имеет индуктивный характер — ток отстает от напряжения по фазе (рис. 4.1, *б*).

При частоте $\omega = \omega_0$ цепь является чисто активной — ток и напряжение совпадают по фазе и наблюдается резонанс напряжений (векторная диаграмма на рис. 4.1, *г*).

При исследовании радиотехнических цепей широко используют понятие о характеристическом (волновом) сопротивлении ρ , а также понятия о добротности Q , затухании d и абсолютной полосе пропускания $(\omega_2 - \omega_1)$ цепи.

Характеристическим (волновым) сопротивлением ρ цепи называется сопротивление каждого из двух реактивных элементов исследуемой цепи при резонансе:

$$\omega_0 L = \frac{1}{\omega_0} C = \rho = \sqrt{\frac{L}{C}}. \quad (4.9)$$

Добротностью Q цепи (контура) с последовательным соединением R, L, C называется отношение характеристического сопротивления к активному сопротивлению цепи:

$$Q = \frac{\rho}{R}. \quad (4.10)$$

Величина добротности показывает, во сколько раз напряжение на индуктивности и емкости при резонансе превышает напряжение цепи.

Величина, обратная добротности, называется затуханием d :

$$d = \frac{1}{Q}. \quad (4.11)$$

3. Порядок выполнения работы

1. Ознакомиться с методикой моделирования простых цепей переменного тока на компьютере.

2. Выбрать свой вариант из табл. 4.1. Номер варианта должен быть равен последней цифре шифра студента.

3. «Собрать» схему, представленную на рис. 4.4. Номер варианта указан в табл. 4.1. При этом номер варианта должен быть равен последней цифре шифра студента. Скопировать схему с экрана монитора для последующего представления ее в отчете по лабораторной работе. Напоминаем, что нажатие клавиши **Prt Scg** позволяет занести в буфер обмена содержимое экрана монитора, которое затем можно вставить в необходимый документ.

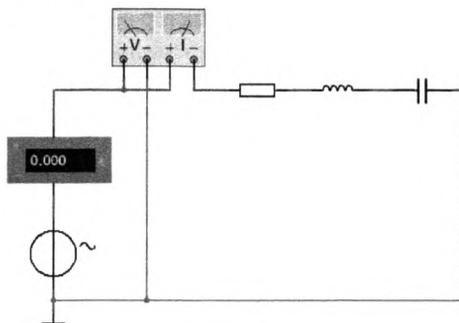


Рис. 4.4

4. Рассчитать величину резонансной частоты ω_0 по формуле

$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}.$$

5. Определить величину резонансной частоты экспериментально. Для этого, изменяя частоту напряжения источника ЭДС, найти то ее значение, при котором ток цепи достигает максимума. Рекомендуется вначале изменять частоту дискретно в десять раз. Определив приблизительный максимум в найденном диапазоне, продолжайте изменение частоты, сократив ее дискретизацию. При этом следите за показанием амперметра. Расчетное значение резонансной частоты и экспериментальное значение должны совпасть.

6. Изменяя частоту приложенного напряжения в пределах от $0,2\omega_0$ до $2\omega_0$, измерить при каждом из значений ω (значения частоты указаны в таблице по форме 4.1) действующее значение тока цепи I . Полученные данные занести в таблицу по форме 4.1.

Таблица 4.1

№ варианта	R , Ом	L , мГн	C , мкФ	U , В
1	100	20	0,500	1
2	125	25	0,400	1
3	200	40	0,250	2
4	250	50	0,200	2
5	375	75	0,134	3
6	400	80	0,125	3
7	500	100	0,100	4
8	600	120	0,840	4
9	220	70	0,250	2
0	330	80	0,200	2

Форма 4.1

Частота		Эксперимент				Теория (расчет)						
Ω , 1/с	f , Гц	I , мА	P , Вт	$\cos \varphi$	z , Ом	I , мА	R , Ом	X_L , Ом	X_C , Ом	z , Ом	P , Вт	$\cos \varphi$
$0,2\omega_0 =$	$0,2f_0 =$											
$0,5\omega_0 =$	$0,5f_0 =$											
$0,7\omega_0 =$	$0,7f_0 =$											
$\omega_0 =$	$f_0 =$											
$1,3\omega_0 =$	$1,3f_0 =$											
$1,7\omega_0 =$	$1,7f_0 =$											
$2\omega_0 =$	$2f_0 =$											

По полученным данным рассчитать значения I , R , X_L , X_C , z , P для тех же значений частот, что и в таблице по форме 4.1. Результаты расчета занести в таблицу по форме 4.1.

7. Построить экспериментальные частотные характеристики $I(\omega)$, $R(\omega)$, $X(\omega)_L$, $X(\omega)_C$, $z(\omega)P(\omega)$, $\cos \varphi(\omega)$ на графике.

8. Рассчитать теоретически характеристики $z(\omega)$, $P(\omega)\cos \varphi(\omega)$ по формулам $z = \sqrt{R^2 + (X_L - X_C)^2}$; $P = UI \cos \varphi$; $\cos \varphi = \text{arctg } x/R$ и сравнить их с экспериментальными характеристиками, представленными в таблице по форме 4.1. Убедиться в совпадении теории и опыта.

4. Содержание отчета

1. Копия экрана монитора со схемой исследуемой цепи.
2. Таблица экспериментальных и расчетных величин.

3. Основные расчетные формулы.
4. Графические частотные характеристики $I(\omega)$, $R(\omega)$, $X(\omega)_L$, $X(\omega)_C$, $z(\omega)P(\omega)$, $\cos \varphi(\omega)$.
5. Сравнение результатов теоретических и экспериментальных исследований.
6. Выводы.

5. Вопросы для самопроверки

1. Каково общее условие возникновения резонанса в электрической цепи?
2. Каковы основные особенности резонанса в цепи с последовательным соединением R , L , C ?
3. Почему резонанс в цепи с последовательным соединением R , L , C называют резонансом напряжения?
4. По каким признакам можно определить наступление резонанса в цепи с последовательным соединением R , L , C , если плавно изменять частоту на зажимах цепи от нуля до бесконечности?
5. Как изменяется характер полного сопротивления цепи при изменении частоты в ней от нуля до наибольшего значения?
6. Как объяснить тот факт, что при резонансе исследуемой цепи ток в ней достигает наибольшего значения?

Работа 5. Исследование трехфазных цепей, соединенных по схеме «звезда»

1. Цель работы

Экспериментальное исследование трехфазной цепи при соединении приемников звездой при различных режимах работы с помощью компьютерного моделирования.

2. Основные теоретические положения

В данной работе рассматривается трехфазная цепь, однофазные приемники которой соединены «звездой», с нейтральным проводом, как показано на рис. 5.1, *а*, и без нейтрального провода (рис. 5.1, *б*).

Провода, соединяющие фазы источника и приемника, называются линейными, а провод, соединяющий нейтральную точку источника «0» и нейтральную точку приемника «0'», называется нейтральным. Сопротивлением линейных проводов и сопротивлением нейтрального провода пренебрегаем.

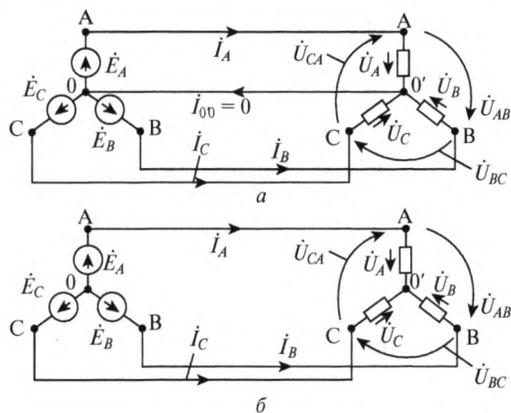


Рис. 5.1

В основе теоретического анализа исследуемой цепи лежит комплексный метод. Принятые при этом положительные направления комплексных действующих значений токов, напряжений и ЭДС показаны на рис. 5.1, а, б. Для наглядности уравнения, составленные по законам Кирхгофа для комплексных действующих значений токов и напряжений, представляются в виде векторных диаграмм.

При соединении приемников «звездой» различают два вида напряжений — фазные и линейные. Фазные напряжения — это напряжения на фазах приемника: \dot{U}_A , \dot{U}_B , \dot{U}_C . Линейные напряжения — это напряжения между линейными проводами: \dot{U}_{AB} , \dot{U}_{BC} , \dot{U}_{CA} . Соотношения между фазными и линейными напряжениями определяются непосредственно из рассмотрения рис. 5.1, а и подтверждаются 2-м законом Кирхгофа:

$$\dot{U}_{AB} = \dot{U}_A - \dot{U}_B; \quad \dot{U}_{BC} = \dot{U}_B - \dot{U}_C; \quad \dot{U}_{CA} = \dot{U}_C - \dot{U}_A. \quad (5.1)$$

При этом всегда сумма комплексных действующих значений линейных напряжений приемника равна нулю:

$$\dot{U}_{AB} + \dot{U}_{BC} + \dot{U}_{CA} = 0. \quad (5.2)$$

При соединении приемника звездой токи в линейных проводах

$$\dot{I}_A = \frac{\dot{U}_A}{\underline{Z}_A}; \quad \dot{I}_B = \frac{\dot{U}_B}{\underline{Z}_B}; \quad \dot{I}_C = \frac{\dot{U}_C}{\underline{Z}_C} \quad (5.3)$$

равны токам в фазах приемника (рис. 5.2).

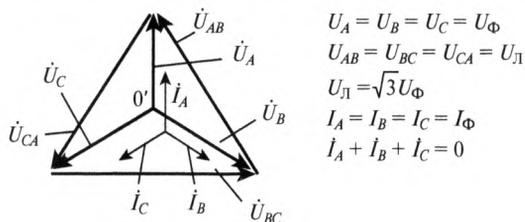


Рис. 5.2

При этом в соответствии с 1-м законом Кирхгофа для узла $0'$ сумма комплексных действующих значений фазных токов равна току в нейтральном проводе:

$$\dot{I}_A + \dot{I}_B + \dot{I}_C = \dot{I}_{0'0}. \quad (5.4)$$

При отсутствии нейтрального провода

$$\dot{I}_A + \dot{I}_B + \dot{I}_C = 0_0. \quad (5.5)$$

Различают симметричный и несимметричный режимы работы трехфазной цепи. Для получения симметричного режима работы необходимо соблюдение двух условий:

- трехфазный источник должен быть симметричным, т.е. действующие значения всех трех фазных напряжений должны быть одинаковыми и сдвинутыми друг относительно друга по фазе на 120° (на векторной диаграмме эти напряжения образуют симметричную трехлучевую звезду, как это показано на рис. 5.2);
- комплексные сопротивления всех трех фаз приемника должны быть одинаковыми:

$$\underline{Z}_A = \underline{Z}_B = \underline{Z}_C = \underline{Z}_\Phi.$$

При симметричном режиме работы цепи действующие значения токов во всех трех фазах приемника равны между собой:

$$I_A = I_B = I_C = I_\Phi.$$

Соответствующие векторы сдвинуты относительно друг друга по фазе на 120° .

Если хотя бы одно из вышеперечисленных условий не соблюдается, то режим работы цепи является несимметричным.

В данной работе трехфазный источник симметричен. Кроме того, сопротивления всех трех фаз приемника одинаковы и активны:

$$\underline{Z}_A = \underline{Z}_B = \underline{Z}_C = \underline{Z}_\Phi = R. \quad (5.6)$$

Симметричный режим работы при наличии нейтрального провода

При таком режиме работы (рис. 5.1, а) векторы действующих значений фазных напряжений \dot{U}_A , \dot{U}_B и \dot{U}_C образуют симметричную трехлучевую звезду (рис. 5.2). Векторы действующих значений линейных напряжений, определяемых из соотношения (5.1), также образуют симметричную трехлучевую звезду и могут быть расположены между концами векторов фазных напряжений, образуя замкнутый равносторонний треугольник, как это показано на рис. 5.2. При этом действующие значения линейных напряжений в $\sqrt{3}$ раз больше действующих значений фазных напряжений:

$$U_A = \sqrt{3}U_\Phi = 1,73U_\Phi.$$

Заметим, что система линейных напряжений определяется источником энергии и остается неизменной при любых изменениях фазных напряжений приемника.

Векторы действующих значений фазных токов \dot{I}_A , \dot{I}_B и \dot{I}_C также образуют симметричную трехлучевую звезду, причем каждый из векторов тока совпадает по фазе с вектором фазного напряжения, как ток в активном сопротивлении. Сумма векторов фазных токов в силу симметрии звезды токов равна нулю и поэтому ток I_{00} в нейтральном проводе в соответствии с соотношением (5.5) равен нулю.

Активная мощность одной фазы:

$$P_\Phi = U_\Phi I_\Phi. \quad (5.7)$$

Активная мощность трехфазной симметричной системы:

$$P_{3\Phi} = \sqrt{3}U_\Delta I_\Delta \cos\varphi. \quad (5.8)$$

Симметричный режим работы цепи при отсутствии нейтрального провода

При таком режиме работы сумма векторов действующих значений фазных токов по-прежнему равна нулю, и поэтому отсутствие нейтрального провода никак не влияет на режим работы трехфазной цепи. Векторная диаграмма токов и напряжений при этом та же, что и на рис. 5.2.

3. Порядок выполнения работы

1. «Собрать» трехфазную схему, у которой соединены источники и приемники звездой, с измерительными приборами (вольтметрами

и амперметрами), представленную на рис. 5.3. В соответствии со своим вариантом (табл. 5.1) установить параметры трехфазной цепи.

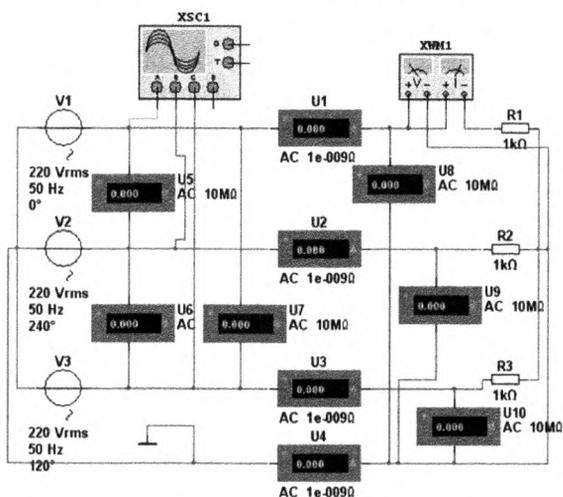


Рис. 5.3

При этом номер варианта должен быть равен последней цифре шифра студента. Скопировать схему с экрана монитора для последующего представления ее в отчете по лабораторной работе. Напоминаем, что нажатие клавиши Prt Scr позволяет занести в буфер обмена содержимое экрана монитора, которое затем можно вставить в необходимый документ.

2. Установить во всех трех фазах источника одинаковые действующие значения напряжений и начальные фазы: фаза А — 0° , фаза В — $(+240^\circ)$, фаза С — $(+120^\circ)$.

Таблица 5.1

Значение параметра	Вариант									
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	0
f , Гц	50	50	50	50	50	50	50	50	50	50
U , В	120	110	127	115	220	200	240	380	360	400
R , Ом	100	120	130	140	150	160	170	180	190	200

3. Исследовать симметричный режим работы цепи при наличии нейтрального провода. Для этого измерить действующие значения фазных и линейных напряжений приемника. Результаты измерений занести в первую строку таблицы по форме 5.1.

Форма 5.1

Режим работы	Измеряемая величина												
	$U_{AB}, В$	$U_{BC}, В$	$U_{CA}, В$	$U_A, В$	$U_B, В$	$U_C, В$	$U_{00}, В$	$I_A, А$	$I_B, А$	$I_C, А$	$I_{00}, А$	$P_{\Phi}, Вт$	$P_{3\Phi}, Вт$
Симметричный с нейтральным проводом													
Симметричный без нейтрального провода													

4. Затем измерить действующие значения фазных токов и действующее значение тока в нейтральном проводе. Результаты измерений также занести в таблицу по форме 5.1. По известным действующим значениям фазных и линейных напряжений, величинам фазных сопротивлений построить векторную диаграмму напряжений и токов для данного режима работы цепи.

Сопоставить результаты теоретических построений с экспериментальными данными и убедиться в том, что они практически совпадают. Убедиться также в том, что при этом режиме:

- действующие значения фазных напряжений приемника равны между собой;
- действующие значения линейных напряжений равны между собой и в $\sqrt{3}$ раз больше действующих значений фазных напряжений;
- действующие значения фазных токов равны между собой;
- ток в нейтральном проводе равен нулю.

5. Исследовать симметричный режим работы при отсутствии нейтрального провода.

Для этого отключить нейтральный провод и измерить действующие значения всех фазных и линейных напряжений приемника, а также действующие значения всех фазных токов. Результаты измерений занести во вторую строку таблицы по форме 5.1.

Убедиться в том, что обрыв нейтрального провода не привел к изменению режима работы цепи.

6. Рассчитать активные мощности для двух режимов одной фазы и всех трех фаз, используя формулы $P_{\Phi} = U_{\Phi} I_{\Phi}$; $P_{3\Phi} = \sqrt{3} U_{л} I_{л} \cos \varphi$. Результаты расчетов занести в таблицу по форме 5.1.

4. Содержание отчета

1. Схемы трехфазной цепи при всех исследуемых режимах ее работы, скопированные с экрана монитора.

2. Основные расчетные формулы.
3. Таблицы с результатами измерений.
4. Векторные диаграммы напряжений и токов для всех рассмотренных режимов работы цепи.
5. Краткие выводы по результатам работы.

5. Вопросы для самопроверки

1. Известны комплексные действующие значения линейных напряжений $\dot{U}_{AB} = (-50 - j87) \text{ В}$ и $\dot{U}_{BC} = (-50 - j87) \text{ В}$. Определить действующее значение линейного напряжения U_{BC} .

2. Для трехфазной цепи, работающей в симметричном режиме, известны действующее значение линейного напряжения $U_{\text{л}} = 380 \text{ В}$ и сопротивление фазы приемника, соединенного звездой $Z_{\text{ф}} = R = 22 \text{ Ом}$. Определить действующее значение фазного тока.

3. В трехфазной цепи с нейтральным проводом, работавшей в симметричном режиме, произошел обрыв нейтрального провода. Как изменятся действующие значения напряжений на фазах приемника?

4. В трехфазной цепи с нейтральным проводом, работавшей в симметричном режиме, произошел обрыв линейного провода А. Как изменятся действующие значения напряжений на фазах В и С?

Работа 6. Исследование полупроводниковых диодов

1. Цель работы

Исследование вольт-амперных характеристик полупроводниковых диода и стабилитрона.

2. Основные теоретические положения

В полупроводниковых диодах используется свойство *p-n* переходов, а также других электрических переходов, т.е. хорошо проводить электрический ток в одном направлении и плохо — в противоположном. Эти токи и соответствующие им напряжения между выводами диода называются прямым и обратным токами, прямым и обратным напряжениями.

По способу изготовления различают сплавные диоды, диоды с диффузионной базой и точечные диоды.

По функциональному назначению полупроводниковые диоды делятся на выпрямительные, импульсные, стабилитроны, фотодиоды, светоизлучающие диоды и т.д.

Выпрямительные диоды предназначены для преобразования переменного тока в постоянный и выполняются по сплавной или диффузионной технологиям. На рис. 6.1 приведены условное изображение выпрямительного диода и его типовая вольт-амперная характеристика. Прямой ток диода направлен от анодного А вывода к катодному К выводу.

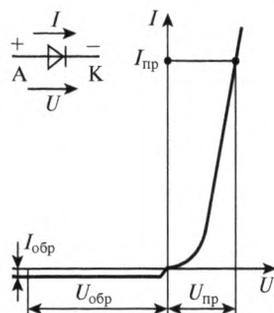


Рис. 6.1

Нагрузочную способность выпрямительного диода определяют: допустимый прямой ток $I_{пр}$ и соответствующее ему прямое напряжение $U_{пр}$; допустимое обратное напряжение $U_{обр}$ и соответствующий ему обратный ток $I_{обр}$; допустимая мощность рассеяния.

Допустимая мощность рассеяния у диодов малой мощности с естественным охлаждением (рис. 6.2, а) достигает 1 Вт. У диодов большой мощности (рис. 6.2, б) с радиаторами и искусственным охлаждением (воздушным или водяным) допустимая мощность рассеяния достигает 10 кВт при допустимых значениях прямого тока до 1000 А и обратного напряжения до 1500 В.

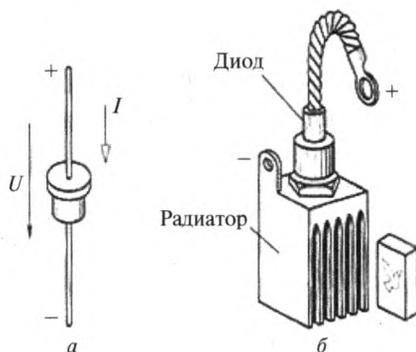


Рис. 6.2

При изменении напряжения между входными выводами стабилизатора $U_{вх} > U_{проб}(R_n + R)/R_n$ напряжение между выходными выводами $U_{вых} \approx U_{проб}$ изменяется незначительно.

Все полупроводниковые элементы обладают нелинейными и несимметричными вольт-амперными характеристиками (ВАХ). Для

определения ВАХ полупроводниковых элементов на постоянном токе используется установка, схема которой изображена на рис. 6.3, где БПН — блок постоянного напряжения лабораторного стенда; R — сопротивление, ограничивающее ток; ПЭ — полупроводниковый элемент (диод или стабилитрон).

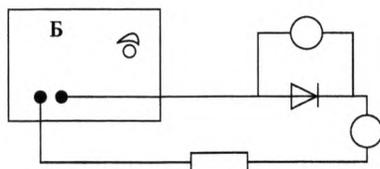


Рис. 6.3

Различают статическое сопротивление полупроводникового диода:

$$R_{ст}(I) = \frac{U}{I} \quad (6.1)$$

и его дифференциальное сопротивление:

$$R_g(I) = \frac{dU}{dI} = \frac{\Delta U}{\Delta I}. \quad (6.2)$$

На разных участках ВАХ эти сопротивления будут различными, т.е. являются функциями тока I .

Нелинейные свойства указанных полупроводниковых приборов эффективно используются в различных устройствах автоматики, электротехники, радиотехники. В частности, полупроводниковые диоды применяются для выпрямления переменного тока, стабилитроны — для стабилизации или ограничения напряжения.

Если полупроводниковый диод (рис. 6.4, а) подключен к источнику синусоидального напряжения $u = U_m \sin \omega t$ (рис. 6.4, б), то при положительной полуволне этого напряжения все напряжение, за вычетом падения напряжения на диоде, прикладывается к сопротивлению R_1 (рис. 6.4, в). При отрицательной полуволне приложенного напряжения сопротивление диода очень велико, и напряжение R_1 практически равно нулю, тем самым осуществляется выпрямление переменного тока.

На рис. 6.6, а приведена схема для ограничения амплитуды выпрямленного напряжения с использованием стабилитрона. Диод VD₁ предназначен для выпрямления входного синусоидального напряжения u_1 (рис. 6.4, б).

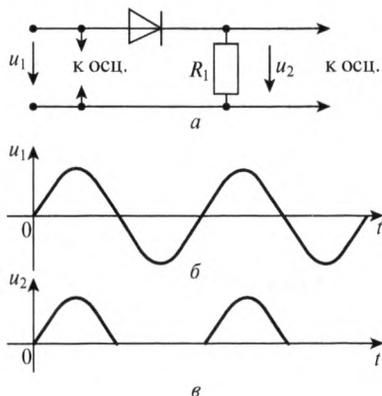


Рис. 6.4

Форма выпрямленного напряжения u_2 представлена на рис. 6.5, в. Это выпрямленное напряжение приложено к нелинейной цепи, содержащей стабилитрон VD_2 и сопротивления R_1, R_2 . Выходное напряжение этой цепи u_3 (рис. 6.5, г) зависит от величины ограничительного сопротивления R_2 :

$$u_3 = u_2 - R_2 i.$$

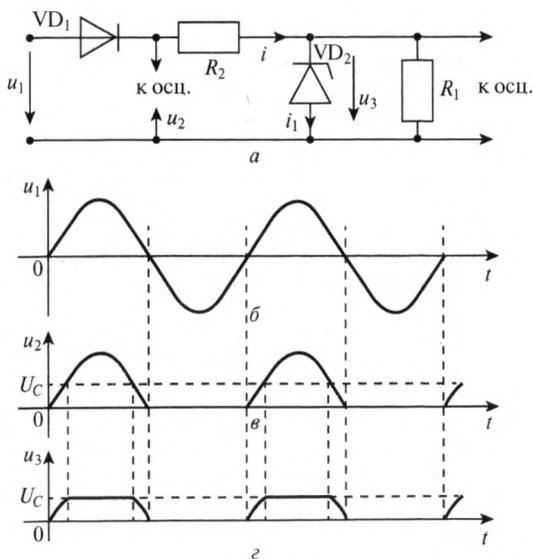


Рис. 6.5

3. Порядок выполнения работы

1. «Собрать» схему (рис. 6.6) для снятия ВАХ полупроводниковых приборов, используя амперметр и вольтметр постоянного тока и напряжения. Сопротивление $R = 100$ необходимо для ограничения тока через диод.

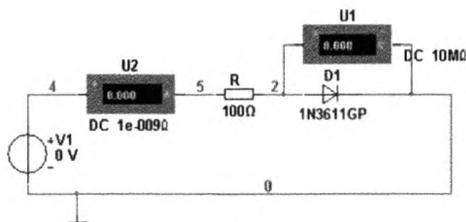


Рис. 6.6

2. Снять ВАХ диода при прямом его включении. Для этого поочередно устанавливать напряжения источника, сделав по пять измерений напряжения и тока при прямой и обратной полярности приложенного напряжения. При этом ток диода в прямом включении не должен превышать 50 мА, напряжение при обратном включении не должно превышать 20 В. Записывать показания амперметра и вольтметра в таблицу по форме 6.1.

3. Поменять полярность источника для снятия обратной ВАХ диода. Для этого поочередно устанавливать напряжения источника, напряжение при обратном включении не превышать 20 В. Результаты измерений п. 2, 3 занести в таблицу по форме 6.1.

4. Вместо диода установить стабилитрон и снять его прямую и обратную ВАХ по методике, указанной в п. 2 и 3. При этом ток стабилитрона в прямом и обратном включениях не должен превышать 15 мА. Результаты измерений занести в таблицу по форме 6.1.

5. По результатам измерений п. 2—4 построить ВАХ диода и стабилитрона в виде графика.

6. Вычислить статическое $R_{ст}$ и дифференциальное R_g сопротивления диода и стабилитрона для всех точек измерений по формулам:

$$R_{ст}(I) = \frac{U}{I}; \quad R_g(I) = \frac{dU}{dI} = \frac{\Delta U}{\Delta I}.$$

Приращения ΔU и ΔI определяются как разность напряжений и токов в соседних точках ВАХ. Результаты занести в таблицу по форме 6.1.

7. Построить графики зависимости $R_{ст}(I)$ и $R_g(I)$ для диода и стабилитрона.

Форма 6.1

Наименование полупроводни- кового элемента	Вольт-амперные характеристики							
	Прямое направление				Обратное направление			
	U , В	I , мА	$R_{ст}$, Ом	R_g , Ом	U , В	I , мА	$R_{ст}$, Ом	R_g , Ом
Диод								
		50			20			
Стабилитрон								
		15			15			

8. «Собрать» схему, изображенную на рис. 6.7. Величина R_1 задана в таблице 6.1. Подключая 4-канальный «осциллограф» на вход этой цепи и к сопротивлению R_1 , скопировать осциллограммы напряжений u_1 и u_2 . При этом осциллограф должен быть настроен так, чтобы осциллограммы u_1 и u_2 имели вид, представленный на рис. 6.4, б, в.

Таблица 6.1

№ варианта	Параметры цепи				
	R , Ом	R_1 , Ом	R_2 , Ом	U_1 , Ом	f , Гц
1	100	300	75	40	50
2	100	300	75	44	50
3	100	300	75	48	50
4	100	300	75	52	50
5	100	200	100	54	50
6	100	200	100	56	50
7	100	200	100	58	50
8	100	200	100	60	50

9. «Собрать» схему, изображенную на рис. 6.8. Величины R_1 и R_2 заданы в табл. 6.1. Подключая 4-канальный осциллограф, зарисовать кривые напряжений u_1 , u_2 и u_3 . При этом осциллограф должен быть настроен так, чтобы осциллограммы u_1 , u_2 и u_3 имели вид, представленный на рис. 6.5.

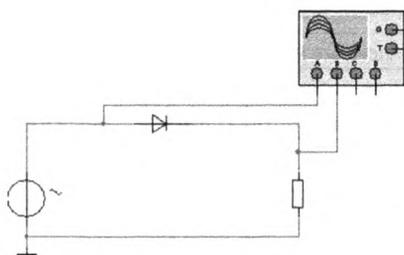


Рис. 6.7

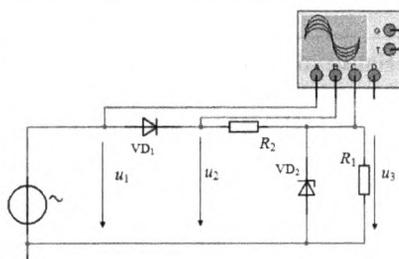


Рис. 6.8

4. Содержание отчета

1. Схемы установки для определения ВАХ выпрямителя и ограничителя напряжений.
2. ВАХ диода и стабилитрона.
3. Таблица опытных и расчетных данных.
4. Графики $R_{ст}(I)$ и $R_{д}(I)$ для диода и стабилитрона.
5. Осциллограммы напряжений u_1 , u_2 , u_3 выпрямителя и ограничителя напряжений.
6. Выводы.

5. Вопросы для самопроверки

1. Какие элементы электрической цепи называются нелинейными?
2. Какие характеристики нелинейных элементов называются статическими и какие динамическими?
3. Каким образом по характеристикам нелинейных элементов определяют статическое и дифференциальное сопротивления?
4. Какие характерные особенности работы имеют диод и стабилитрон?
5. Какие свойства диода используются в полупроводниковом выпрямителе? Как работает это устройство?
6. Какие свойства стабилитрона используются в полупроводниковом ограничителе напряжения? Как работает это устройство?

Работа 7. Исследование переходных процессов в цепи с последовательным соединением активного сопротивления с катушкой индуктивности и активного сопротивления с конденсатором

1. Цель работы

Экспериментальное исследование методом компьютерного моделирования переходных процессов в цепях с последовательным соединением активного сопротивления R с катушкой индуктивности L и активного сопротивления R с конденсатором C при включении их на постоянное напряжение и последующем замыкании накоротко. Определение постоянной времени цепи, сопоставление опытных данных с результатами теоретического расчета.

2. Основные теоретические положения

Переходным процессом называют процесс перехода электрической цепи от одного установившегося режима работы к другому установившемуся режиму ее работы. Переходный процесс возникает сразу после коммутации цепи. Его появление объясняется изменением запаса энергии в индуктивностях и емкостях цепи, которое не может происходить мгновенно (скачком). Поэтому переходный процесс в цепях, содержащих индуктивности и емкости, имеет определенное временное протяжение. Момент времени, соответствующий коммутации, принимается за начало отсчета времени переходного процесса и обозначается как $t = 0$.

Для момента коммутации справедливы два важных положения, которые называются законами коммутации.

1-й закон коммутации — ток в индуктивности при коммутациях не может изменяться мгновенно. Иначе говоря, ток в индуктивности в последний момент перед коммутацией равен току в ней в первый момент после коммутации.

2-й закон коммутации — напряжение на емкости при коммутациях не может изменяться мгновенно. Иначе говоря, напряжение на емкости в последний момент перед коммутацией равно напряжению на этой емкости в первый момент после коммутации.

В данной работе исследуются переходные процессы в цепях с последовательным соединением RL и RC при включении этих цепей

на постоянное напряжение, а также при отключении их от постоянного напряжения с одновременным замыканием накоротко. Схемы этих цепей, вид коммутации, графики изменения токов и напряжений на индуктивности и емкости при переходных процессах, а также аналитические выражения для исследуемых токов и напряжений приводятся в табл. 7.1.

Величины τ_1 и τ_2 , входящие в формулы для токов и напряжений при переходном процессе, зависят только от соотношения между параметрами цепи. Они называются постоянными времени и имеют размерность времени, с. Для цепи RL :

$$\tau_1 = \frac{L}{R}, \quad (7.1)$$

где L — индуктивность цепи, Гн; R — сопротивление цепи, Ом.

Для цепи RC :

$$\tau_2 = RC, \quad (7.2)$$

где C — емкость цепи, Ф.

Заметим, что величина постоянной времени τ_1 цепи RL прямо пропорциональна индуктивности цепи и обратно пропорциональна сопротивлению цепи, а величина постоянной времени τ_2 цепи RC прямо пропорциональна как величине емкости цепи, так и величине сопротивления цепи.

Рассмотрим поведение токов и напряжений в исследуемых цепях при указанных выше переходных процессах.

Цепь RL при включении ее на постоянное напряжение U (поз. 1, табл. 7.1)

Ток в цепи i в первый момент после коммутации равен нулю в соответствии с 1-м законом коммутации, так как до коммутации тока в цепи не было. Затем, постепенно нарастая в соответствии с уравнением $i = U/R(1 - e^{-t/\tau_1})$, он достигает при $t \rightarrow \infty$ своего установившегося значения, равного U/R .

Напряжение на индуктивности u_L в первый момент после коммутации совершает скачок от нуля до значения U напряжения источника. Это объясняется тем, что в первый момент после коммутации тока в цепи нет, нет и напряжения на сопротивлении R . Поэтому все напряжение источника оказывается приложенным к индуктивности. Затем по истечении времени напряжение на индуктивности, уменьшаясь в соответствии с уравнением $u_L = Ue^{-t/\tau_1}$ при $t \rightarrow \infty$, спадает до нуля.

Цепь RL при отключении ее от постоянного напряжения U с одновременным замыканием накоротко (поз. 2, табл. 7.1)

Ток цепи i в первый момент после коммутации остается равным в соответствии с 1-м законом коммутации его установившемуся значению U/R , имевшему место до коммутации. Затем по истечении времени он убывает в соответствии с уравнением $i = U/Re^{-t/\tau_1}$ и при $t \rightarrow \infty$ спадает до нуля. Напряжение на индуктивности u_L в первый момент после коммутации совершает скачок от нуля до значения $-U$. Это объясняется тем, что в первый момент после коммутации ток в цепи равен U/R , но для замкнутой накоротко цепи RL имеем по 2-му закону Кирхгофа: $iR + u_L = 0$. Отсюда для первого момента времени имеем $(U/R)R + u_L = 0$ или $u_L(0) = -U$. Затем по истечении времени это напряжение убывает в соответствии с уравнением $u_L = -Ue^{-t/\tau_1}$ и при $t \rightarrow \infty$ спадает до нуля.

Цепь RC при включении ее на постоянное напряжение (поз. 3, табл. 7.1)

Напряжение на емкости u_C в первый момент после коммутации остается равным нулю в соответствии со 2-м законом коммутации, так как до коммутации напряжения на ней не было. Затем по истечении времени напряжение на емкости увеличивается в соответствии с уравнением $u_C = U(1 - e^{-t/\tau_2})$ и при $t \rightarrow \infty$ достигает своего установившегося значения, равного напряжению U источника.

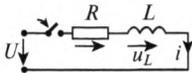
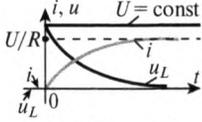
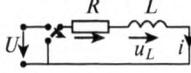
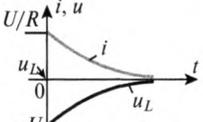
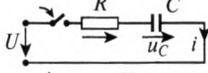
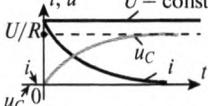
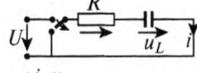
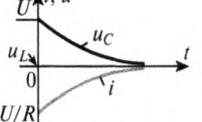
Ток в цепи i в первый момент после подключения ее к напряжению U изменяется скачком от 0 до U/R , так как в этот момент времени $u_C = 0$ и все напряжение цепи приходится на сопротивление R . Затем с течением времени ток в цепи уменьшается в соответствии с уравнением $i = U/Re^{-t/\tau_2}$ и при $t \rightarrow \infty$ спадает до нуля.

Цепь RC при отключении ее от постоянного напряжения U с одновременным замыканием накоротко (поз. 4, табл. 7.1)

Напряжение на емкости u_C в первый момент после коммутации согласно 2-му закону коммутации остается равным напряжению U , так как до переключения рубильника все напряжение приходилось на емкость.

Затем по истечении времени напряжение на емкости уменьшается в соответствии с уравнением $u_C = U(1 - e^{-t/\tau_2})$ и при $t \rightarrow \infty$ спадает до нуля.

Таблица 7.1

1	Включение цепи RL на постоянное напряжение	2	Отключение цепи RL от постоянного напряжения
  $i = \frac{U}{R} \left(1 - e^{-\frac{t}{\tau_1}}\right)$ $u_L = U e^{-\frac{t}{\tau_1}}$		  $i = \frac{U}{R} e^{-\frac{t}{\tau_1}}$ $u_L = U e^{-\frac{t}{\tau_1}}$	
3	Включение цепи RC на постоянное напряжение	4	Отключение цепи RC от постоянного напряжения
  $i = \frac{U}{R} e^{-\frac{t}{\tau_2}}$ $u_C = U \left(1 - e^{-\frac{t}{\tau_2}}\right)$		  $i = -\frac{U}{R} \left(e^{-\frac{t}{\tau_2}}\right)$ $u_C = U e^{-\frac{t}{\tau_2}}$	

Ток в цепи i в первый момент после переключения рубильника изменяется скачком от 0 до $-U/R$. Он изменяет направление по сравнению с зарядным током (поз. 3, табл. 7.1). Это происходит потому, что в первый момент коммутации напряжения на емкости, в соответствии со 2-м законом коммутации, остается равным U . Но по 2-му закону Кирхгофа сумма напряжений на емкости и на сопротивлении для этой цепи равна нулю. Для первого момента после коммутации имеем

$$u_C + iR = 0, \quad \text{отсюда} \quad i(0) = -\frac{u_C}{R} = -\frac{U}{R}.$$

Затем по истечении времени ток в цепи уменьшается в соответствии с уравнением $i = -U/R e^{-t/\tau_2}$ и при $t \rightarrow \infty$ спадает до нуля.

Длительность переходных процессов теоретически бесконечна, так как только при $t \rightarrow \infty$ ток цепи и напряжения на индуктивности

и емкости достигают (как это выяснено выше) своих установившихся значений.

Однако практически уже через время $t = 5\tau$, прошедшее после момента коммутации, переходный процесс можно считать завершенным.

Рассмотрим причины такого положения. Изменения величины $e^{-t/\tau}$ в зависимости от времени t , прошедшего с момента коммутации, представлены в табл. 7.2.

Таблица 7.2

t, c	0	1τ	2τ	3τ	4τ	5τ	∞
$e^{-t/\tau}$	1	0,37	0,14	0,05	0,02	0,007	0

В верхней строке этой таблицы приведено время, выраженное в долях $\tau/t = 0; t = \tau; t = 2\tau; t = 3\tau; t = 4\tau; t = 5\tau; t = \infty$.

В нижней строке этой таблицы даны численные значения экспоненты $e^{-t/\tau}$ при различных значениях t .

Из этой таблицы следует, что уже при $t = 4\tau$ величина $e^{-t/\tau} = 0,02$, т.е. составляет только 2% от ее первоначального значения, равного единице. Это означает, что ток в цепи и напряжения на индуктивности и емкости практически достигли своих установившихся значений, и переходный процесс уже практически завершен.

Экспериментальное исследование цепей RL и RC осуществляется с помощью осциллографа.

Цепь RL или RC подключается к генератору (Γ) звуковых частот (рис. 7.1), вырабатывающему прямоугольное напряжение с частотой f . Вид этого напряжения показан на рис. 7.2, *a*.

Для получения осциллограммы тока осциллограф подключают к сопротивлению R параллельно (рис. 7.1, *a*). Фактически при этом на экране фиксируется осциллограмма напряжения на этом сопротивлении.

Однако, как известно из курса теоретических основ электротехники, напряжение на сопротивлении R и ток в этом сопротивлении всегда имеют одинаковую форму. Поэтому данная осциллограмма является одновременно и осциллограммой тока.

Для получения осциллограммы напряжения на индуктивности и напряжения на емкости осциллограф подключается к ним параллельно, как это показано на рис. 7.1, *a, б*.

Вид кривых токов и напряжений, полученных с помощью осциллографа для цепей RL и RC , находящихся под воздействием прямоугольного напряжения, показан на рис. 7.2, *б* и рис. 7.2, *в*.

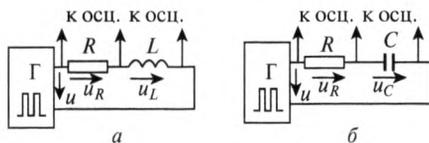


Рис. 7.1

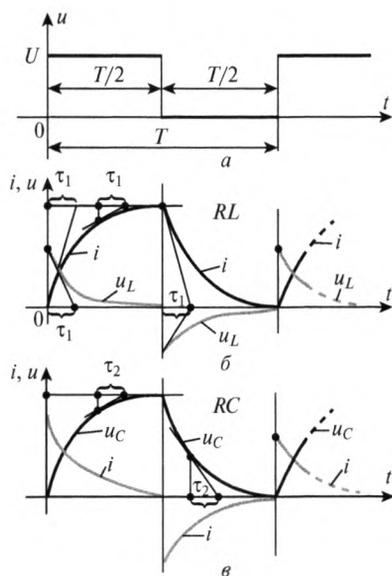


Рис. 7.2

При выбранном на этом рисунке положении осей координат моменту времени $t = 0$ соответствует появление на зажимах цепи напряжения $U = \text{const}$. Это означает фактически включение цепи под постоянное напряжение и определяет начало переходного процесса. Подробное описание поведения тока и напряжения на индуктивности тока и напряжения на индуктивности и емкости исследуемых цепей при таком переходном процессе дано выше.

Параметры цепей RL и RC подобраны таким образом, что за время одного полупериода приложенного прямоугольного напряжения переходный процесс практически завершается. Варианты параметров цепей RL , RC и частот источника f , подобранные таким образом, представлены в разделе 3 данного описания.

Через время $t = T/2$ после подключения исследуемой цепи к источнику прямоугольного напряжения оно скачком (при выбранном

на рис. 7.2 положении координатных осей) снижается до нуля. Это равносильно отключению цепи от постоянного напряжения и одновременному ее замыканию на внутреннее сопротивление источника (G), которым можно пренебречь по сравнению с сопротивлением цепи R . Возникающий при этом переходный процесс описан выше.

Заметим, что при использовании параметров и частот, указанных в разделе 3, этот переходный процесс также успевает практически завершиться за время действия второго полупериода прямоугольного напряжения.

Таким образом, в цепи RL и цепи RC , подверженной воздействию прямоугольного напряжения источника, периодически (с частотой $f = 1/T$) последовательно друг за другом совершаются два переходных процесса:

- а) переходный процесс, связанный с включением цепи на постоянное напряжение (первый полупериод прямоугольного напряжения источника);
- б) переходный процесс, связанный с отключением цепи от постоянного напряжения и одновременным замыканием цепи на коротко (второй полупериод прямоугольного напряжения источника).

Периодическое прямоугольное напряжение источника необходимо для того, чтобы получить на экране осциллографа стационарный график изменения тока цепи и напряжений на индуктивности и емкости при переходном процессе. Это достигается регулированием частоты развертки осциллографа до совпадения ее с частотой приложенного напряжения.

Внешний вид осциллограмм, получаемых на экране осциллографа, показан на рис. 7.2, б и 7.2, в. Заметим, что кривую тока и кривую напряжения получают на экране осциллографа по отдельности. Совмещают их на одном графике только при переносе на миллиметровую бумагу. При этом положение координатных осей рекомендуется принимать таким, как это показано на рис. 7.2.

Имея осциллограммы токов и напряжений, можно графически определить постоянный ток и время τ_1 и τ_2 , не зная параметров цепей.

Для этого надо взять любую точку на кривой тока или напряжения (рис. 7.2) и провести через нее касательную к кривой до пересечения ее с горизонтальной прямой, определяющей уровень установившегося тока (или установившегося напряжения). Затем из данной точки кривой опустить перпендикуляр на эту горизонтальную прямую.

Точки пересечения касательной и перпендикуляра с указанной выше горизонтальной прямой отсекут на ней отрезок, численно рав-

ный постоянной времени τ . В частном случае касательную к кривой можно проводить и из начала координат.

Найденное таким образом значение τ выражено в миллиметрах оси абсцисс. Для перевода ее в секунды необходимо предварительно найти масштаб времени α оси абсцисс. Если период прямоугольного напряжения T в секундах соответствует n миллиметрам на осциллограмме, то тогда масштаб оси абсцисс, с/мм:

$$\alpha = \frac{T}{n} = \frac{1}{nf}, \quad (7.3)$$

где f — частота источника, Гц.

Теперь, зная постоянную времени, выраженную в миллиметрах, легко найти ее значение в секундах:

$$\tau \text{ (с)} = \tau \text{ (мм)} \alpha. \quad (7.4)$$

3. Порядок выполнения работы

1. «Собрать» цепь с последовательным соединением сопротивления R и индуктивности L и подключить ее к генератору прямоугольного напряжения, как это показано на рис. 7.3. Установить параметры R и L , а также частоту f прямоугольного напряжения по табл. 7.3 для одного из приведенных там вариантов по указанию преподавателя. Установить датчик тока и подключить его к осциллографу на вход В.

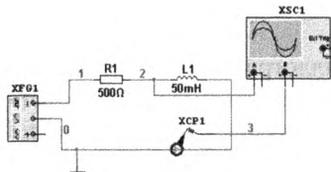


Рис. 7.3

2. Подключить вход А осциллографа к индуктивности и получить на его экране кривые изменения тока цепи и напряжения на индуктивности при воздействии на эту цепь прямоугольного периодического напряжения. Скопировать экран компьютера для последующего переноса осциллограмм тока и напряжения в отчет.

3. Используя полученные кривые тока и напряжения, найти графически постоянную времени τ_1 , выбрав для этого на этих кривых по 1—2 точки. Методика графического нахождения τ_1 дана в разделе 2 в описании физической лабораторной работы 7. Все найденные

значения τ_1 должны быть одинаковы между собой, так как величина τ_1 не зависит от тока напряжения цепи, а определяется только ее параметрами.

Таблица 7.3

№ варианта	Параметры цепи			
	R , Ом	L , мГн	C , мкФ	f , Гц
1	900	—	1,0	100
2	900	—	0,5	200
3	900	—	0,2	500
4	900	—	0,1	1 000
5	500	—	2,0	100
6	500	—	1,0	200
7	500	—	0,4	500
8	500	—	0,2	1 000
9	500	50	—	1 000
10	500	20	—	2 500
11	500	10	—	5 000
12	900	100	—	1 000
13	900	50	—	2 000
14	900	20	—	5 000
15	900	10	—	10 000
16	820	82	—	1 000

При определении величины τ_1 в секундах воспользоваться масштабом времени, указанным на панели развертки осциллографа. Полученные таким образом значения τ_1 занести в таблицу по форме 7.1.

Форма 7.1

Наименование	$\tau_{\text{экспер}}$, с	$\tau_{\text{теорет}}$, с	$\Delta = \frac{\tau_{\text{экспер}} - \tau_{\text{теорет}}}{\tau_{\text{экспер}}}$
<i>RL</i>			
<i>RC</i>			

Рассчитать теоретическое значение τ_1 по формуле (7.1) и занести его в табл. по форме 7.1. Сравнить между собой экспериментальное и теоретическое значение τ_1 . Убедиться в том, что они близки между собой.

4. Изменять сопротивление R и L на $\pm 20\%$, а затем аналогично действиям п. 3 определять постоянные времени для каждого варианта. Полученные таким образом значения τ_1 занести в табл. по форме 7.2.

Постоянная времени, мс	Изменение R			Изменение L		
	-20%	0%	+20%	-20%	0%	+20%
τ_1	$\tau_1 -$	$\tau_1 0$	$\tau_1 +$	$\tau_1 -$	$\tau_1 0$	$\tau_1 +$

5. Для одного экспериментального значения τ_1 (любого) провести сравнение с теоретическим значением τ_1 , с, которое следует рассчитать по формуле:

$$\tau_1 = \frac{L}{R},$$

где L — индуктивность цепи, Гн; R — сопротивление цепи, Ом. Сравнение выполнить по формуле, указанной в таблице по форме 7.1. Результаты сравнения занести в таблицу по форме 7.1.

6. «Собрать» цепь с последовательным соединением сопротивления R и емкости C и подключить ее к генератору прямоугольного напряжения, как это показано на рис. 7.4. Установить параметры R и C , а также частоту f прямоугольного напряжения по табл. 7.3 для одного из приведенных там вариантов по указанию преподавателя. Установить датчик тока и подключить его к осциллографу на вход В.

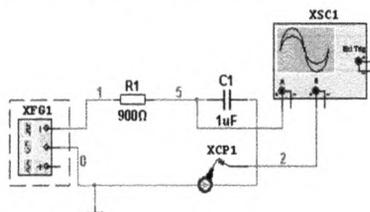


Рис. 7.4

7. Настроить осциллограф и получить на его экране кривые изменения тока цепи и напряжения на емкости при воздействии на эту цепь прямоугольного периодического напряжения. Скопировать экран компьютера для последующего переноса осциллограмм тока и напряжения в отчет.

8. Используя полученные кривые тока и напряжения, найти графически постоянную времени τ_2 . При определении величины τ_2 в секундах воспользоваться масштабом времени, указанным на панели развертки осциллографа. Полученные таким образом значения τ_2 занести в таблицу по форме 7.1.

9. Изменять сопротивление R и C на $\pm 20\%$, а затем аналогично действиям п. 8 определить постоянную времени для каждого варианта. Полученные таким образом значения τ_2 занести в таблицу по форме 7.3.

10. Для одного экспериментального значения τ_2 (любого) провести сравнение с теоретическим значением τ_2 , с, которое следует рассчитать по формуле:

$$\tau_2 = RC,$$

где C — емкость цепи, Ф; R — сопротивление цепи, Ом.

Сравнение выполнить по формуле, указанной в табл. по форме 7.3. Результаты сравнения занести в табл. по форме 7.3.

Форма 7.3

Постоянная времени, мс	Изменение R			Изменение C		
	-20%	0%	+20%	-20%	0%	+20%
τ_2	$\tau_2 -$	$\tau_2 0$	$\tau_2 +$	$\tau_2 -$	$\tau_2 0$	$\tau_2 +$

4. Содержание отчета

1. Схемы установок для исследования переходных процессов.
2. Перечень измерительных приборов и их краткие характеристики.
3. Таблицы опытных данных и расчетов по формам 7.1–7.3.
4. Осциллограммы переходных процессов и теоретические кривые этих процессов.
5. Выводы.

5. Вопросы для самопроверки

1. Изменится ли ток в цепи RL скачком при включении ее на постоянное напряжение? А напряжение на индуктивности?
2. Изменится ли ток в цепи RC скачком при отключении ее от постоянного напряжения? А напряжение на емкости?
3. Сформулируйте 1-й и 2-й законы коммутации.
4. Как изменится постоянная времени цепи RL , если увеличить в два раза прикладываемое к цепи напряжение?
5. Как изменится постоянная времени цепи RL , если индуктивность цепи увеличить в два раза?
6. Как изменится постоянная времени цепи RC , если сопротивление цепи уменьшить в два раза?

7. Цепь RL включается под действие постоянного напряжения U . Какова величина установившегося тока в цепи после завершения переходного процесса?

8. Цепь RL включается под действие постоянного напряжения U . Каковы значения тока в цепи и напряжения на индуктивности в первый момент после коммутации?

9. Цепь RC отключается от действия постоянного напряжения U и тут же замыкается накоротко. Каковы значения напряжения на емкости и тока цепи в первый момент после коммутации?

10. Цепь RC включается под действие постоянного напряжения U . Какова величина установившегося напряжения на емкости после завершения переходного процесса?

Работа 8. Исследование переходных процессов в цепи с последовательным соединением активного сопротивления, катушки индуктивности и конденсатора

1. Цель работы

Приобретение навыков расчета и экспериментального исследования переходных процессов в цепи, содержащей соединенные последовательно сопротивление, катушку индуктивности и конденсатор.

2. Основные теоретические положения

Переходные процессы в электрических цепях возникают при коммутации цепи и связаны с перераспределением энергии, запасенной индуктивностями и емкостями. В лабораторной работе 7 исследовались цепи первого порядка, содержащие элементы R , L и R , C . В этих цепях, имеющих только один накопитель, обмен энергии осуществляется между внешним источником и индуктивностью или емкостью. Особенность переходных режимов цепи R , L , C с двумя накопителями заключается в сложном процессе обмена энергией между тремя элементами: источником напряжения, индуктивностью L и емкостью C . В то же время часть энергии превращается в тепло в сопротивлении R . В связи с изложенным выше на характер переходного процесса оказывает большое влияние соотношение параметров сопротивления R ,

индуктивности L и емкости C . В зависимости от величины R , L и C переходный процесс может быть аperiodическим или колебательным.

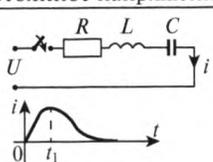
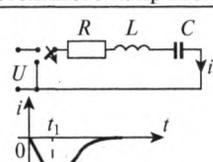
Аperiodический переходный процесс

При аperiodическом переходном процессе ток i не изменяет знак (табл. 8.1, поз. 1, 2). Такой вид переходного процесса возможен при условии $R > 2\sqrt{L/C}$. Рассмотрим аperiodический разряд емкости, предварительно заряженной до напряжения $u_c(0) = U$ (поз. 2, табл. 8.1). Энергия, запасенная емкостью, превратится в переходном процессе в тепло на сопротивлении R . При этом ток нарастает с 0 до максимального отрицательного значения и спадает до 0. С энергетической точки зрения это означает, что при разряде емкости отдаваемая ей энергия будет лишь в малой доле переходить в энергию магнитного поля индуктивности, а большая ее часть будет поглощаться сопротивлением.

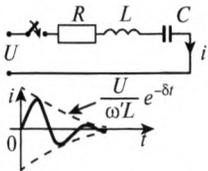
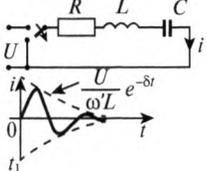
Начиная с некоторого момента времени t_1 , когда ток начинает уменьшаться, в тепло будет переходить не только оставшаяся энергия электрического поля емкости, но и энергия, которая запаслась в магнитном поле индуктивности.

При включении цепи R , L , C на постоянное напряжение (поз. 1, табл. 8.1) происходит процесс накопления электрической энергии емкостью C от внешнего источника напряжения U . При аperiodическом заряде емкости сопротивление R ограничивает ток i и соответственно долю энергии внешнего источника напряжения, которая переходит в энергию магнитного поля индуктивности. Поэтому ток в переходном процессе не изменяет знак.

Таблица 8.1

Аperiodический режим, $R > 2\sqrt{L/C}$	
1	<p>Включение цепи R, L, C на постоянное напряжение</p>  $i = \frac{U}{L(p_1 - p_2)}(e^{p_1 t} - e^{p_2 t});$ $p_{1,2} = -\frac{R}{2L} \pm \sqrt{\frac{R^2}{4L^2} - \frac{1}{LC}}$
2	<p>Отключение цепи R, L, C от постоянного напряжения</p>  $i = -\frac{u_c(0)}{L(p_1 - p_2)}(e^{p_1 t} - e^{p_2 t}); u_c(0) = U;$ $p_{1,2} = -\frac{R}{2L} \pm \sqrt{\frac{R^2}{4L^2} - \frac{1}{LC}}$

Колебательный режим, $R < 2\sqrt{L/C}$

<p>3 Включение цепи R, L, C на постоянное напряжение</p>	<p>4 Отключение цепи R, L, C от постоянного напряжения</p>
 $i = \frac{U}{\omega' L} e^{-\delta t} \sin \omega' L; \delta = \frac{R}{2L};$ $\omega' = \sqrt{\frac{1}{LC} - \frac{R^2}{4L^2}}$	 $i = \frac{u_c(0)}{\omega' L} e^{-\delta t} \sin \omega' L; u_c(0) = U;$ $\omega' = \sqrt{\frac{1}{LC} - \frac{R^2}{4L^2}}$

Колебательный переходный процесс

При колебательном переходном процессе ток i изменяется по затухающему синусоидальному закону (поз. 3, 4, табл. 8.1). Такой вид переходного процесса возможен при условии $R < 2\sqrt{L/C}$.

Рассмотрим колебательный разряд емкости, заряженной предварительно до напряжения $u_c(0) = U$ (поз. 4, табл. 8.1). Энергия, запасенная емкостью, превратится в переходном процессе в тепло на сопротивлении R , при этом ток изменяется по затухающему синусоидальному закону и меняет знак. Это означает, что в переходном процессе индуктивность и емкость обмениваются энергией, т.е. энергия электрического поля емкости переходит в энергию магнитного поля индуктивности и это продолжается несколько циклов, пока суммарная энергия не превратится в тепло на сопротивлении.

При включении цепи R, L, C на постоянное напряжение (поз. 3, табл. 8.1) происходит процесс накопления электрической энергии емкостью от внешнего источника напряжения U . При колебательном заряде ток i изменяет знак, т.е. происходит обмен энергией между индуктивностью и емкостью.

Расчет сопротивления R_k и индуктивности L катушки по осциллограмме тока колебательного процесса

При колебательном переходном процессе в цепи R, L, C ток изменяется по закону:

$$i = \frac{U}{\omega' L} e^{-\delta t} \sin \omega' L,$$

где δ — коэффициент, характеризующий затухание синусоиды тока; $\omega' t$ — частота периодических колебаний.

Эти величины зависят от параметров исследуемой цепи

$$\delta = \frac{R}{2L}; \quad \omega' = \frac{2\pi}{T'} = \sqrt{\frac{1}{LC} - \delta^2} \cong \sqrt{\frac{1}{LC}}, \quad (8.1)$$

где T' — период колебаний.

Быстрота затухания тока характеризуется декрементом колебаний Δ , равным отношению двух последующих амплитуд одного знака (рис. 8.1), т.е. токов в моменты времени t_1 и $(t_1 + T')$:

$$\Delta = \frac{i(t_1)}{i(t_1 + T')} = \frac{I_m e^{-\delta t_1}}{I_m e^{-\delta(t_1 + T')}}. \quad (8.2)$$

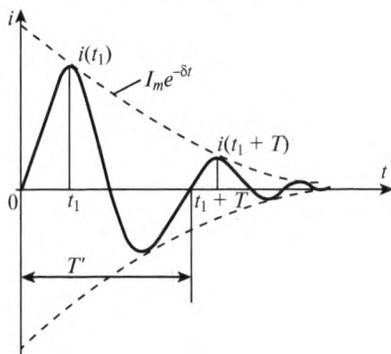


Рис. 8.1

Более удобной для расчетов характеристикой является логарифмический декремент колебаний $\ln \Delta$, равный

$$\ln \Delta = \delta T' = \frac{R}{2L} T'. \quad (8.3)$$

В лабораторной работе исследуется катушка индуктивности, включенная последовательно с конденсатором C и сопротивлением R_n . Эта цепь (рис. 8.2) подключается к генератору прямоугольного напряжения с внутренним сопротивлением R_r . По осциллограмме переходного процесса можно найти T' , $i(t_1)$, $i(t_1 + T')$. Эти данные позволяют в соответствии с выражением (8.1) найти индуктивность катушки

$$L = \frac{T'^2}{4\pi^2 C} \quad (8.4)$$

логарифмическому декременту колебаний, равному

$$\ln \Delta = \ln \frac{i(t_1)}{i(t_1 + T')}, \quad (8.5)$$

можно вычислить эквивалентное сопротивление контура

$$R = \frac{2L \ln \Delta}{T'} \quad (8.6)$$

и найти сопротивление катушки

$$R_k = R - R_r - R_n. \quad (8.7)$$

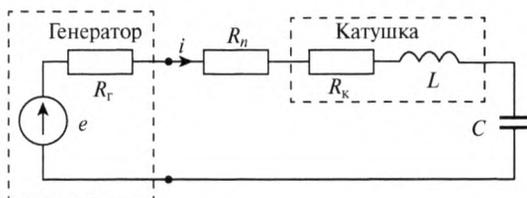


Рис. 8.2

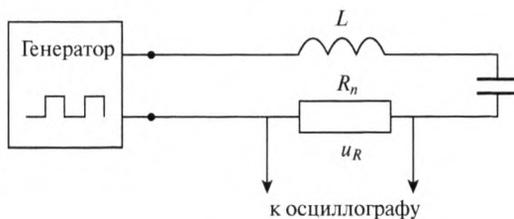


Рис. 8.3

Такой метод определения параметров электротехнических устройств широко применяется в практике.

3. Порядок выполнения работы

1. «Собрать» цепь (рис. 8.4) с последовательным соединением сопротивлений R , катушки индуктивности L и емкости C . Подключить цепь к генератору прямоугольного напряжения, установить параметры L , C , а также частоту f прямоугольного напряжения генератора в соответствии с табл. 8.2 для одного из приведенных там вариантов по указанию преподавателя и записать эти величины в таблицу по форме 8.1.

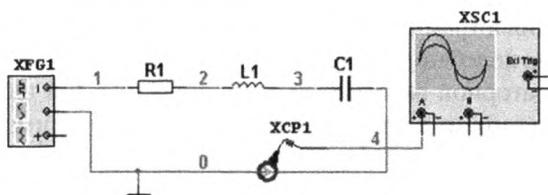


Рис. 8.4

Таблица 8.2

№ варианта	Параметры цепи				
	f , Гц	L , мГн	C , мкФ	R_1 , Ом	R_2 , Ом
1	100	45	0,9	800	5
2	100	50	0,9	800	4
3	100	55	0,9	800	3
4	100	45	1,0	900	5
5	100	50	1,0	900	4
6	100	55	1,0	900	3
7	100	45	1,1	950	5
8	100	50	1,1	950	4

Форма 8.1

№ п.п.	f , Гц	L , мГн	C , мкФ	R , Ом	Характер процесса	№ осциллограммы

2. Установить сопротивление $R = R_1$ по табл. 8.2 и записать в таблицу по форме 8.1. Определить характер (апериодический и колебательный) переходного процесса в этом случае. Отметим, что при апериодическом режиме $R > 2\sqrt{L/C}$, а при колебательном режиме $R < 2\sqrt{L/C}$. Результат зафиксировать в табл. по форме 8.1.

3. Включить генератор. Скопировать осциллограмму переходного процесса с монитора компьютера для последующего внесения ее в отчет. Убедиться в том, что характер переходного процесса соответствует расчету.

4. Установить сопротивление $R = R_2$ по табл. 8.2. Определить характер переходного процесса. Параметры цепи и результат анализа занести в табл. по форме 8.1. Включить генератор. Скопировать осциллограмму переходного процесса с монитора компьютера для последующего внесения ее в отчет. Убедиться в том, что характер переходного процесса соответствует расчету.

5. По осциллограмме колебательного переходного процесса определить период колебаний T' , используя методику, изложенную в физической лабораторной работе 8. Занести значения T' в табл. по форме 8.2. По осциллограмме в миллиметрах измерить максимальные положительные значения тока $i^*(t_1)$ и $i^*(t_1 + T')$. Вычислить декремент затухания Δ по выражению

$$\Delta = \frac{i(t_1)}{i(t_1 + T')} = \frac{I_m e^{-\delta t_1}}{I_m e^{-\delta(t_1 + T')}}.$$

Затем вычислить логарифмический декремент колебаний $\ln \Delta$, равный

$$\ln \Delta = \delta T' = \frac{R}{2L} T'.$$

6. Рассчитать индуктивность L и сопротивление R по формулам

$$L = \frac{T'^2}{4\pi^2 C} \quad \text{и} \quad R = \frac{2L \ln \Delta}{T'}.$$

Результаты расчетов занести в табл. по форме 8.3.

Форма 8.2

$i^*(t_1)$ мм	$i^*(t_1 + T')$ мм	Δ	$\ln \Delta$	L , мГн	R , Ом

Сопоставить расчетные значения индуктивности L и сопротивления R (таблица по форме 8.2) с заданными параметрами L и R этой индуктивности. Результаты внести в таблицу по форме 8.3.

Форма 8.3

	L , мГн	C , мкФ	R , Ом
Эксперимент			
Расчет по формулам			

4. Содержание отчета

1. Схема экспериментальной установки.
2. Перечень измерительных приборов и их характеристики.
3. Таблицы опытных данных по формам 8.1–8.3.
4. Осциллограммы переходных процессов.
5. Выводы.

5. Вопросы для самопроверки

1. Каким образом осуществляется обмен энергией в цепи R, L, C при аperiodическом переходном процессе?
2. Каким образом осуществляется обмен энергией в цепи R, L, C при колебательном переходном процессе?
3. Каким образом характер переходного процесса зависит от параметров R, L, C ?
4. Как связана частота собственных колебаний ω в переходном процессе цепи R, L, C с параметрами этой цепи?
5. Каким образом можно экспериментально определить параметры R и L катушки индуктивности, используя осциллограмму переходного процесса?

Работа 9. Методика применения программы Multisim для выполнения лабораторных работ

Общие положения

Программа Multisim позволяет провести лабораторные работы без сборки реальных схем за счет компьютерного (математического) моделирования процессов, происходящих в схемах.

Представленная программа располагает широким набором виртуальных элементов электрических цепей, представленных в виде условных обозначений (пиктограмм), которые обладают основными свойствами реальных физических элементов: источников постоянно-го и переменного напряжения и тока, резисторов, конденсаторов, катушек индуктивности, измерительных приборов и т.д.

Поэтому представленные лабораторные работы можно выполнить как на физическом стенде, так и в виртуальном исполнении на компьютере, при этом все методические указания для выполнения лабораторных работ практически полностью подходят для обоих указанных методов.

Следует отметить, что программа Multisim выбрана авторами как отличающаяся от других программ, преследующих те же цели, простым и легко осваиваемым пользовательским интерфейсом. В распоряжении авторов имеется лицензионная усовершенствованная (десятая) версия программы Multisim 10. Поэтому в дальнейшем описание процесса моделирования представлено этой версией. Программа Multisim

обладает преемственностью, т.е. все схемы, созданные в ранних версиях, могут быть промоделированы в версии программы Multisim 10.

Назначение и состав программы Multisim

Программа Multisim представляет собой компьютерное средство для схемотехнического моделирования и анализа электротехнических и электронных устройств и установок.

Программа Multisim 10 содержит в своем составе практически все известные элементы современных электрических цепей: источники неизменного и регулируемого постоянного и переменного напряжения и тока, резистивные индуктивные и емкостные элементы, трансформаторы, электрические машины, всевозможные электронные элементы, а также информационно-измерительную технику: амперметры, вольтметры, ваттметры, мультиметры, генераторы, осциллографы и т.д.

Правила сборки виртуальных электрических цепей, измерения и другие исследования выполняются по тем же правилам, что и для реальной цепи. Число и вид электрических схем самого разного назначения, которые можно собрать и исследовать, не ограничено.

Программа Multisim 10 является, в сущности, превосходной виртуальной лабораторией, помещенной в компьютер.

Открытие программы, ее составляющие и сборка схемы

Для обращения к программе Multisim необходимо создать ярлык на рабочем столе и им пользоваться для обращения к программе.

После запуска на экране появляется графическая оболочка интерфейса программы (рис. 9.1), посредством которой и осуществляется компьютерное моделирование поставленных задач.

Экран дисплея делится на четыре зоны (см. рис. 9.1).

Зона в верхней части экрана (1) — командное меню, содержащее команды возможных действий программы.

Зона в правой части экрана (2) — меню условных обозначений оборудования. Она содержит условные графические обозначения оборудования, которые могут быть использованы для компьютерного моделирования процессов.

Зона в верхней части экрана (3) — меню условных обозначений элементов. Она содержит условные графические обозначения элементов, которые могут быть использованы для компьютерного моделирования процессов.

Остальная часть экрана (4) — рабочая зона, в которой осуществляется построение необходимых схем.

Кнопка выхода из программы (5). При подведении к ней курсора мыши и нажатии левой кнопки будет произведен выход из программы.

Переключатель (6), при включении которого после сборки схемы и задания параметров ее элементов программа начинает компьютерное моделирование.

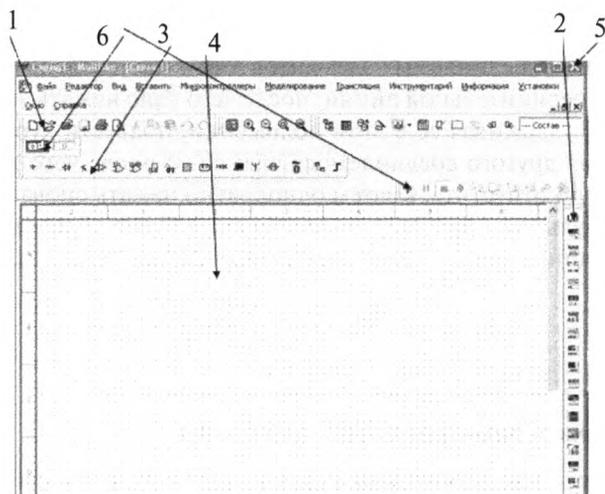


Рис. 9.1

Сборка схемы

Выбрать элементы схемы из соответствующих библиотек и разместить их на экране, используя метод *drag and drop*. Элемент выбирается и перетаскивается мышью на отведенное ему место. Выбранный (активный) элемент выделяется красным цветом. При необходимости поворот элемента на 90° осуществляется с помощью соответствующей «кнопки» на панели инструментов или щелчком правой клавиши мыши на элементе из контекстного меню на команде «Rotate» (вращение), или выделением элемента одним щелчком левой кнопки мыши, а затем одновременным нажатием на две клавиши — **Ctrl** и **R**.

Если в рабочую зону был вынесен неверный элемент и его необходимо удалить или возникла необходимость в корректировке собранной схемы, то для этого необходимо выполнить следующую операцию. К условному обозначению элемента, который подлежит удалению, подвести курсор мыши и выделить его путем однократного нажатия правой кнопки мыши (при этом он будет выделен пунктирными линиями). Если необходимо удалить сразу несколько элементов, то их мож-

но одновременно выделить путем нажатия левой кнопки мыши с последующим ее удержанием и перемещением курсора по экрану таким образом, чтобы в образующийся прямоугольник попали все необходимые элементы, после чего их можно удалить путем нажатия клавиши «Delete» на клавиатуре.

Для рисования соединительных линий (проводов) между выбранными элементами необходимо подвести курсор мыши к изображению одного из двух соединяемых элементов в том месте, где из него выходит конец соединительной линии; после чего надо нажать левую кнопку мыши и, удерживая ее в этом положении, подвести курсор к краю изображения другого соединяемого элемента; после чего надо левую кнопку мыши отпустить, а затем однократно нажать снова левую клавишу. В результате произведенных операций будет нарисована соединительная линия между двумя элементами схемы (рис. 9.2).

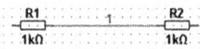


Рис. 9.2

Установка параметров собранной схемы

После того как необходимая схема будет собрана в рабочей зоне, необходимо задать как параметры отдельных ее элементов (сопротивления, емкости, индуктивности, источника напряжения, источника тока), так и измерительных приборов (амперметра, вольтметра), включенных в схему.

Данная операция осуществляется в следующей последовательности:

- а) выбрать элемент схемы путем подведения к нему курсора мыши;
- б) сделать два быстрых щелчка левой кнопкой «мыши» на изображении выбранного элемента;
- в) в появившемся окне (рис. 9.3) задать необходимые параметры элемента путем подводки курсора в соответствующую область и нажатия левой клавиши мыши. При необходимости в корректировке введенного значения следует удалить старое значение нажатием клавиши «Backspace», а затем ввести новое значение;
- г) установить нужный порядок измерения задаваемой величины при помощи кнопок прокрутки порядка путем подведения к ним курсора и нажатия левой кнопки мыши;
- д) подтвердить заданное значение параметра путем нажатия «ОК».

Окно задания параметров емкости и индуктивности выглядит аналогичным образом. Процесс задания значений параметров происходит также по пунктам «а—д».

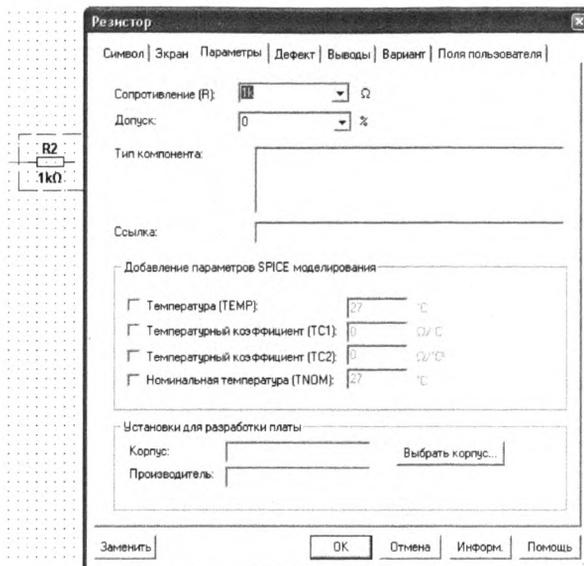


Рис. 9.3

Источники

Все источники в Multisim идеальные. Внутреннее сопротивление идеального источника напряжения равно нулю, поэтому его выходное напряжение не зависит от нагрузки. Идеальный источник тока имеет бесконечно большое внутреннее сопротивление, поэтому его ток не зависит от сопротивления нагрузки.

Установка параметров источников

Данная операция осуществляется в следующей последовательности:

- выбрать из тематической библиотеки соответствующий источник;
- сделать два быстрых щелчка левой кнопкой мыши на изображении выбранного источника (для примера выбран источник напряжения);
- в появившемся окне (рис. 9.4) последовательно задать необходимые параметры источника путем подводки курсора в соответствующую область окна и нажатия левой кнопки мыши, после чего ввести значение параметра с клавиатуры.

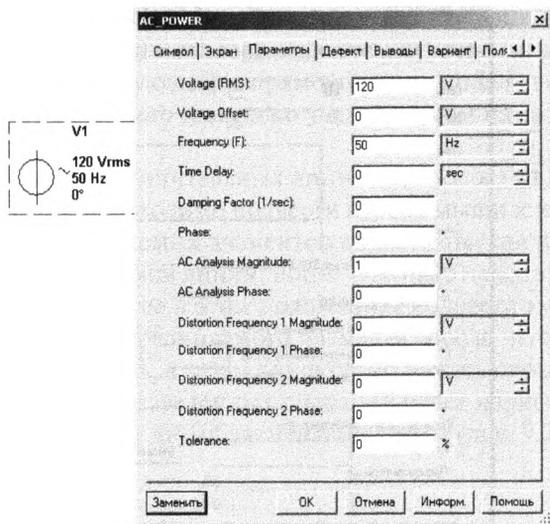


Рис. 9.4

При необходимости в корректировке введенного значения следует удалить старое значение нажатием клавиши «Backspace», а затем ввести новое значение;

- г) подтвердить заданные значения параметров источника напряжения путем нажатия кнопки «ОК».

Виртуальные измерительные приборы

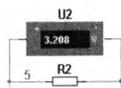
Виртуальные измерительные приборы, представленные в программе Multisim, имеют внешние лицевые панели приборов, которые достаточно близко совпадают с панелями физических приборов.

Амперметр.



Амперметр — измерительный прибор, который измеряет действующее значение тока в амперах. На панели прибора может быть указано значение тока в миллиамперах. В данном случае действующее значение тока, указанное на панели амперметра, равно 8,020 мА.

Вольтметр.



Вольтметр — измерительный прибор, который измеряет действующее значение тока в вольтах. Вольтметр подключают параллельно участку цепи, на котором следует измерить напряжение. В данном случае действующее значение напряжения на сопротивлении R_2 , указанное на панели вольтметра, равно 3,208 В.

Установка параметров вольтметров и амперметров

Данная операция осуществляется в следующей последовательности:

- выбрать измерительный прибор (вольтметр, амперметр) на собранной схеме, параметры которого необходимо задать путем подведения к нему курсора мыши;
- сделать два быстрых щелчка левой кнопкой мыши на изображении выбранного измерительного прибора;
- в появившемся окне задать режим работы прибора — «АС», что соответствует работе его на переменном токе.

Рекомендуется оставить значения внутренних сопротивлений измерительных приборов «по умолчанию», то есть не изменять их.

Необходимо учесть, что АС — измерение переменного напряжения; DC — измерение постоянного напряжения.

Ваттметр.



Ваттметр — измерительный прибор, который измеряет активную мощность и коэффициент мощности. Ваттметр имеет две обмотки — обмотку напряжения, которая включается параллельно исследуемому участку цепи, и токовую обмотку, которая включается последовательно с исследуемым участком. В данном случае указаны свернутая и развернутая панели ваттметра. На развернутой панели указаны активная мощность — 25,748 мВт и коэффициент мощности — 0,454. Свернутую панель используют для подключения вольтметра к исследуемой цепи.

Датчик тока

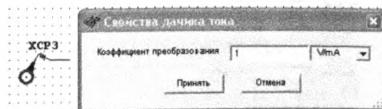


Рис. 9.5

Иконка и расширенное изображение датчика тока представлены на рис. 9.5. Находится датчик тока в библиотеке «Измерительные приборы». Датчик тока удобно использовать совместно с осциллографом, так как он позволяет осуществить гальваническую развязку между исследуемой цепью и многоканальным осциллографом. Коэффициент преобразования амперов в вольты можно менять в широких пределах.

Осциллограф. Осциллограф используют для анализа электромагнитных процессов во временной области. В программе Multisim доступны три разных осциллографа — двухканальный осциллограф (рис. 9.6), четырехканальный осциллограф (рис. 9.7) и осциллограф Agilent 54622D (в данных работах он не используется). На этих рисунках представлены иконки осциллографов, которые необходимы при «сборке» схемы, и расширенные экраны для регистрации мгновенных значений напряжений.

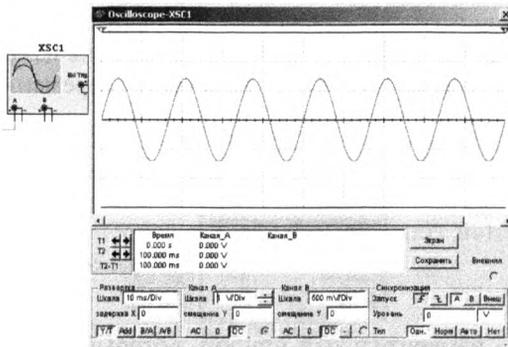


Рис. 9.6

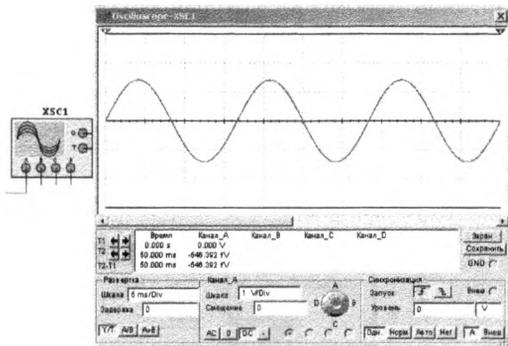


Рис. 9.7

Двух- и четырехканальный осциллографы работают практически одинаково и отличаются только количеством каналов.

Следует отметить, что настройка осциллографа является достаточно сложной. Поэтому дадим описание работы и настройки осциллографа подробно. При этом укажем настройку двухканального осциллографа. Настройка четырехканального осциллографа аналогична.

Настройки виртуальных осциллографов напоминают настройки обычного осциллографа. Их основные параметры — напряжение в вольтах по вертикальной оси, время развертки по горизонтальной оси и синхронизация. Если вы умеете пользоваться физическим лабораторным осциллографом, то все эти настройки должны быть вам знакомы. Если вы не знакомы с лабораторным осциллографом, то изучение виртуальных осциллографов в программе Multisim позволит научиться работе с ним.

Настройка виртуального осциллографа

Для использования осциллографа (двухканального) щелкните по кнопке Oscilloscope на панели инструментов и затем щелкните по месту, где следует поместить иконку осциллографа в рабочей области. Иконку (рис. 9.8) используют для подключения осциллографа к схеме.

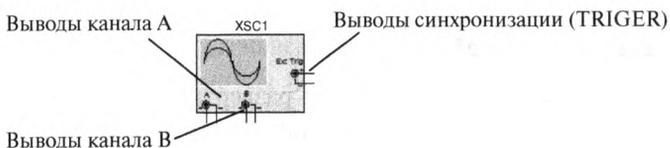


Рис. 9.8

Дважды щелкните по иконке, чтобы открылась панель осциллографа (рис. 9.9). Осциллограф имеет два канала А и В с отдельной регулировкой чувствительности по оси напряжений (ось Y).

Для проведения измерений осциллограф нужно настроить, для чего следует задать:

- 1) нужный масштаб, по которому откладывается уровень сигнала (ось Y);
- 2) нужный масштаб развертки по оси времени (ось X);
- 3) смещение начала координат по осям;
- 4) режим работы по входу — закрытый или открытый;
- 5) режим синхронизации — внутренний или внешний.

В этом же поле расположены три кнопки: Y/T , A/B , B/A , позволяющие задавать вид зависимости отображаемых сигналов. При нажатии на кнопку Y/T по вертикальной оси откладывается напряжение, по горизонтальной оси — время; при нажатии на кнопку A/B по вертикальной оси откладывается амплитуда напряжения на входе канала A ; по горизонтальной оси — канала B и при нажатии на кнопку B/A — наоборот. При этом масштаб осей определяется установками соответствующих каналов. В режимах A/B и B/A можно наблюдать частотные и фазовые сдвиги (фигуры Лиссажу), петли гистерезиса, вольт-амперные характеристики и т.д.

Управление каналами А и В панели осциллографа

Две нижние части панели осциллографа являются полями управления отображением сигналов, поданных на входы каналов A и B соответственно.

Верхнее окно в поле позволяет управлять масштабом оси отображаемого напряжения по вертикальной или горизонтальной оси. Цена деления может дискретно устанавливаться от 10^{-12} В/дел до 10^{+12} кВ/дел. Масштаб для каждой оси устанавливается отдельно. Чтобы получить удобное для работы изображение на экране осциллографа, перед началом эксперимента установите масштаб, соответствующий ожидаемому напряжению.

Например, при подаче на вход переменного сигнала амплитудой 3 вольта установите масштаб вертикальной оси 1 В/дел.

Ниже расположено поле, которое позволяет дискретно сдвигать ось X вверх или вниз. Для того чтобы развести изображения от каналов A и B , воспользуйтесь сдвигом по оси Y для одного или двух каналов.

Три нижние кнопки реализуют различные режимы работы осциллографа. Режим работы осциллографа с закрытым входом устанавливается нажатием на кнопку AC . В этом режиме на вход не пропускается постоянная составляющая сигнала. При нажатии на кнопку DC осциллограф переходит в режим с открытым входом. В этом режиме на вход осциллографа пропускаются как постоянная, так и переменная составляющая сигнала. При нажатии на кнопку 0 вход осциллографа соединяется с общим выводом осциллографа, что позволяет определить положение нулевой отметки по оси Y .

Управление синхронизацией

Правое поле управления Trigger (синхронизация) (рис. 9.10) определяет момент начала отображения осциллограммы на экране ос-

циллографа. Первоначально луч располагается в левой части экрана и не перемещается, пока осциллограф не получит сигнала синхронизации. После получения сигнала луч начинает движение вправо и рисует на экране видимую линию. Достигнув правой части экрана, луч автоматически перемещается в его левую часть. Затем он останавливается и больше не двигается, пока не получит новый сигнал синхронизации. Кнопки в строке Запуск задают момент запуска осциллограммы по фронту, или по срезу, импульса.

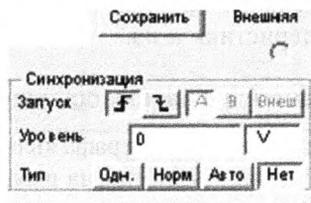


Рис. 9.10

Строка Уровень позволяет задавать уровень, при превышении которого происходит запуск осциллограммы. Значение уровня можно сдвинуть на 3 деления вниз или вверх.

Осциллограф имеет три режима синхронизации — автоматический, нормальный (обычный) и однократный.

1. Автоматический режим (Авто) — запуск осциллограммы производится автоматически при подключении осциллографа к схеме. Когда «луч» доходит до конца экрана, осциллограмма снова прописывается с начала экрана (новый экран).

Запуск может быть по входу «А» или «В», в которых запускающим сигналом является сигнал, поступающий на соответствующий вход.

Запуск может быть внешним (Внеш.). В этом случае сигналом запуска является сигнал, подаваемый на вход синхронизации.

2. Режим обычный (Норм.). В этом режиме осциллограмма на экране неподвижна.

3. Режим одноразовый (Одн.). Данный режим работает аналогично режиму Норм., за исключением того, что на экране формируется только одна кривая, а потом луч отключается.

На экране осциллографа видны два курсора — красный (курсор 1) и синий (курсор 2), при помощи которых можно измерить мгновенные значения напряжений в любой точке осциллограммы. Для этого просто переташите мышью курсоры за треугольники в их верхней части в требуемое положение. Координаты точек пересечения первого курсора с осциллограммами отображаются на табло (рис. 9.11). Т1

и T2 — это координаты курсоров 1 и 2 соответственно. В столбце Время приведены координаты каждого курсора по времени. В поле T2—T1 показана разность значений напряжений курсоров 2 и 1.

	Время	Канал_A	Канал_B
T1	10.816 ms	-11.388 V	-20.000 V
T2	44.694 ms	-12.857 V	20.000 V
T2-T1	33.878 ms	-1.470 V	40.000 V

Рис. 9.11

Функциональный генератор

Функциональный генератор является идеальным источником напряжения, генерирующим напряжения синусоидальной, прямоугольной и треугольной форм. Его уменьшенное и увеличенное изображения приведены на рис. 9.12.

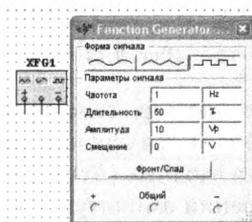


Рис. 9.12

Средний зажим генератора (Общий) при подключении к схеме обеспечивает общую точку для отсчета амплитуды переменного напряжения.

Для отсчета напряжения относительно нуля общий вывод заземляется. Напряжение на левом выводе принимается положительным, на правом — отрицательным.

Графопостроитель, или бode-плоттер

Зависимость амплитуды сигнала на элементе электрической цепи или устройства от частоты называют амплитудно-частотной характеристикой (АЧХ). Зависимость фазы сигналов от частоты — фазо-частотной характеристикой (ФЧХ). Бode-плоттер осуществляет измерение сигналов в двух точках схемы и фазовый сдвиг между этими сигналами. Его иконка и расширенное изображение приведены соответственно на рис. 9.13 и рис. 9.14.

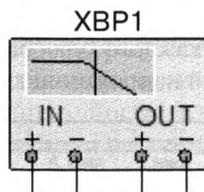


Рис. 9.13

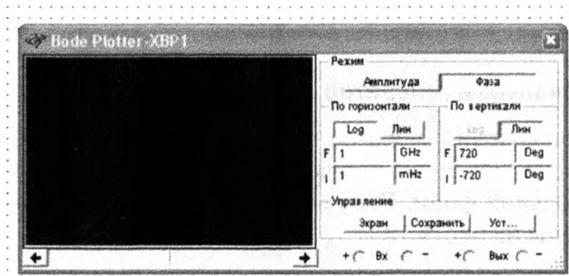


Рис. 9.14

Для измерений бode-плоттер генерирует собственный сигнал в спектре частот, который задается при настройке виртуального прибора. Бode-плоттер имеет два входных (*Вх*) и два выходных (*Вых*) зажима.

Для измерений отношений амплитуд или фазового сдвига следует подключить положительные входы *Вх* и *Вых* к исследуемым точкам схемы, а отрицательные — заземлить. Для получения АЧХ следует нажать на кнопку «Амплитуда», а для получения ФЧХ — на кнопку «Фаза».

Кнопки на панели управления позволяют задать начальное и конечное значения параметров, откладываемых по вертикальной оси. Клавиши Log и Lin определяют вид шкалы — соответственно логарифмическая и линейная. Панель управления по горизонтали служит для установки диапазона частот. Частота откладывается в герцах или в производных величинах (кГц или МГц).

Для получения АЧХ по вертикальной оси откладывают отношения напряжения в линейном масштабе от 0 до $10E12$ либо в логарифмическом масштабе. Для получения ФЧХ по вертикальной оси откладываются градусы в пределах от -720° до $+720^\circ$. В двух нижних окнах фиксируются координаты той или иной точки АЧХ или ФЧХ.

Помимо указанных выше в программе имеется ряд приборов: измеритель нелинейных искажений, частотомер, частотный анализатор и другие приборы — для анализа и синтеза цифровых и аналого-цифровых устройств.

ОТВЕТЫ НА ВОПРОСЫ ТЕСТА

Глава	Номера вопросов/Номера правильных ответов												
Глава 9	Номер вопроса	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
	Правильный ответ	c	a	a	a	a	a	a	a	a	d	a	c
	Номер вопроса	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24
	Правильный ответ	a	d	c	b	a	a	b	a	a	a	a	a
Глава 10	Номер вопроса	25	26	27	28	29	30	31	32	33	34	35	36
	Правильный ответ	a	c	a	a	a	a	b	a	a	d	b	c
	Номер вопроса	37	38	39	40	41	42	43	44	45	46	47	48
	Правильный ответ	a	a	d	a	a	a	a	a	b	c	a	d
Глава 11	Номер вопроса	49	50	51	52	53	54	55	56	57	58	59	60
	Правильный ответ	b	a	d	c	c	c	c	c	b	a	a	a
	Номер вопроса	61	62	63	64	65	66	67	68	69	70	71	72
	Правильный ответ	c	b	d	a	c	a	a	a	a	a	c	c
Глава 12	Номер вопроса	73	74	75	76	77	78	79	80	81	82	83	84
	Правильный ответ	d	a	a	c	b	a	a	a	a	a	a	a
	Номер вопроса	85	86	87	88	89	90	91	92	93	94	95	96
	Правильный ответ	a	a	a	a	c	c	a	a	a	a	a	a

ЛИТЕРАТУРА

- Аполлонский С.М.* Теоретические основы электротехники. Электромагнитное поле : учеб. пособие. СПб. : Лань, 2012.
- Аполлонский С.М.* Электромагнитное поле в неоднородных средах : учеб. пособие. СПб. : Изд-во СЗТУ, 2006.
- Аполлонский С.М.* Расчеты электромагнитных полей / С.М. Аполлонский, А.Н. Горский. М. : Маршрут, 2006.
- Аполлонский С.М.* Теоретические основы электротехники. Линейные и нелинейные цепи. Переходные процессы : учеб. пособие / С.М. Аполлонский, А.Л. Виноградов. СПб. : Изд-во СЗТУ, 2010.
- Башарин С.А.* Теоретические основы электротехники : учебник / С.А. Башарин, В.В. Фёдоров. 5-е изд., перераб. и доп. М. : Академия, 2013.
- Бессонов Л.А.* Теоретические основы электротехники. Электрические цепи : учебник. 11-е изд. М. : Гардарики, 2006.
- Богословский А.С.* Постоянные электрические поля. Л. : ВВМИОЛУ, 1987.
- Богословский А.С.* Магнитные поля и цепи постоянного тока. Л. : ВВМИОЛУ, 1977.
- Демирчян К.С.* и др. Теоретические основы электротехники : учебник для вузов. Т. 3. М., 2003.
- Каплянский А.Е.* Теоретические основы электротехники / А.Е. Каплянский, А.П. Лысенко, Л.С. Полотовский. М. : Высшая школа, 1972.
- Шакиров М.А.* Теоретические основы электротехники. Тензоры в ТОЭ, электродинамика, теория относительности : учеб. пособие. СПб. : Изд-во СПбГПУ, 2011.

**ТЕОРЕТИЧЕСКИЕ ОСНОВЫ
ЭЛЕКТРОТЕХНИКИ
ПРАКТИКУМ**

С.М. АПОЛЛОНСКИЙ, А.Л. ВИНОГРАДОВ

Б
А
К
А
Л
А
В
Р
И
А
Т

ISBN 978-5-406-00078-6



9 785406 000786