

И. К. Парно

ИНТЕГРАЛЫ

В 10 КЛАССЕ
СРЕДНЕЙ ШКОЛЫ

И. К. Парно

Интегралы

**в X классе
средней школы**

Пособие для учителей

**ИЗДАТЕЛЬСТВО
„ПРОСВЕЩЕНИЕ“
МОСКВА. 1970**



Парно И. К.

П 18 Интегралы в X классе средней школы. Пособие для учителей. М., «Просвещение», 1970.

104

В связи с введением в курс математики средней школы темы «Интеграл» возникла потребность в соответствующем пособии для учителя. Предлагаемая брошюра содержит один из возможных вариантов изложения темы.

В настоящее время, пока старшие классы занимаются по прежней программе, книга может служить пособием для факультативных занятий.

6-6

160-69

517(07)

Предисловие

Новая программа по математике для средней школы *) предусматривает изучение в X классе темы «Интеграл». Ее содержание следующее.

Первообразная функция. Определенный интеграл и его применение к определению площади под кривой. Формула Ньютона — Лейбница.

В объяснительной записке к новой программе указывается, что применения интегралов к вычислению объемов и площадей поверхностей относятся к курсу геометрии.

В программе факультативных курсов (дополнительные главы и вопросы математики) тема «Интеграл» содержит следующие вопросы:

Интеграл как предел суммы. Применения в геометрии и механике. Натуральный логарифм как $\int_1^a \frac{dx}{x}$. Число e и показательная функция e^x при действительном x .

В связи с введением в курс математики средней школы новой темы возникла необходимость в соответствующем пособии для учителя. В настоящем пособии предлагается один из возможных вариантов изложения темы «Интеграл» согласно новой программе. Тема эта изложена в главах II и III. Им предпосылаются в главе I следующие вопросы.

Число e . Дифференциал функции, формулы дифференцирования. Теорема о конечном приращении функции.

Эти вопросы и материал, содержащийся в книге «Производная и ее применение к исследованию функции» **), составляют вместе первую часть, а материал, изложенный в главах II и III настоящей брошюры, — вторую часть

*) «Математика в школе», 1967, № 1. Новые программы, стр. 4—23.

**) И. К. Парно. Производная и ее применение к исследованию функций. М., «Просвещение», 1968. В дальнейшем при ссылках на эту книгу будем называть ее кратко [Производная].

«Начал анализа», предусмотренных новой программой для средней школы.

Кроме того, такие вопросы как длина дуги плоской кривой (гл. III, § 3) и площадь поверхности вращения (гл. III, § 4) не входят в программу. Эти вопросы могут быть предложены учащимся на занятиях математического кружка.

Рукопись настоящей работы была прочитана К. А. Сибирским, сделавшим к ней весьма ценные замечания; отдельные замечания были сделаны при ознакомлении с работой также и К. Г. Спатару, Н. Х. Спатару и И. И. Барбул. Выражаю всем им свою глубокую благодарность.

Автор

ПРОИЗВОДНЫЕ И ДИФФЕРЕНЦИАЛЫ ЭЛЕМЕНТАРНЫХ ФУНКЦИЙ

§ 1. Число e

1. Рассмотрим переменную

$$u_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \quad (n = 1, 2, 3, \dots).$$

Если вычислить значения этой переменной для $n = 1, 2, 3, 4$: $u_1 = 2$; $u_2 = 2,25$; $u_3 \approx 2,37$; $u_4 \approx 2,44$; $u_5 \approx 2,49$, — то заметим, что она возрастающая. Пользуясь формулой бинома Ньютона, можно доказать, что переменная u_n возрастает при любом n .

Действительно,

$$\begin{aligned} u_n &= \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = 1 + \frac{n}{1} \cdot \frac{1}{n} + \frac{n(n-1)}{1 \cdot 2} \cdot \frac{1}{n^2} + \\ &+ \frac{n(n-1)(n-2)}{1 \cdot 2 \cdot 3} \cdot \frac{1}{n^3} + \dots + \frac{n(n-1) \dots [n-(n-1)]}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot n} \times \\ &\times \frac{1}{n^n} = 1 + 1 + \frac{1}{2!} \left(1 - \frac{1}{n}\right) + \frac{1}{3!} \left(1 - \frac{1}{n}\right) \left(1 - \frac{2}{n}\right) + \\ &+ \dots + \frac{1}{n!} \left(1 - \frac{1}{n}\right) \left(1 - \frac{2}{n}\right) \dots \left(1 - \frac{n-1}{n}\right). \end{aligned}$$

Аналогично

$$\begin{aligned} u_{n+1} &= \left(1 + \frac{1}{n+1}\right)^{n+1} = 1 + \frac{n+1}{1} \cdot \frac{1}{n+1} + \\ &+ \frac{(n+1) \cdot n}{1 \cdot 2} \cdot \frac{1}{(n+1)^2} + \frac{(n+1) n (n-1)}{1 \cdot 2 \cdot 3} \cdot \frac{1}{(n+1)^3} + \\ &+ \frac{(n+1) \cdot n (n-1) \dots [n+1-(n-1)]}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot n} \cdot \frac{1}{(n+1)^n} + \\ &+ \frac{(n+1) n (n-1) \dots (n+1-n)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot (n+1)} \cdot \frac{1}{(n+1)^{n+1}} = \\ &= 1 + \frac{1}{1} + \frac{1}{2!} \left(1 - \frac{1}{n+1}\right) + \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{1}{3!} \left(1 - \frac{1}{n+1}\right) \left(1 - \frac{2}{n+1}\right) + \\
& + \frac{1}{n!} \left(1 - \frac{1}{n+1}\right) \left(1 - \frac{2}{n+1}\right) \dots \left(1 - \frac{n-1}{n+1}\right) + \\
& + \frac{1}{(n+1)^{n+1}}.
\end{aligned}$$

Сравним, далее, члены первого разложения (u_n) с соответствующими членами второго разложения (u_{n+1}).

Из неравенства $n < n+1$ следует:

$$\begin{aligned}
\frac{1}{n} &> \frac{1}{n+1}; \quad \frac{i}{n} > \frac{i}{n+1} \quad (i = 1, 2, 3, \dots); \\
-\frac{i}{n} &< -\frac{i}{n+1}; \quad 1 - \frac{i}{n} < 1 - \frac{i}{n+1},
\end{aligned} \tag{1}$$

т. е.

$$\begin{aligned}
1 - \frac{1}{n} &< 1 - \frac{1}{n+1}; \quad 1 - \frac{2}{n} < 1 - \frac{2}{n+1}; \\
1 - \frac{3}{n} &< 1 - \frac{3}{n+1} \text{ и т. д.}
\end{aligned}$$

Поэтому

$$\begin{aligned}
\left(1 - \frac{1}{n}\right) \left(1 - \frac{2}{n}\right) &< \left(1 - \frac{1}{n+1}\right) \left(1 - \frac{2}{n+1}\right); \\
\left(1 - \frac{1}{n}\right) \left(1 - \frac{2}{n}\right) \left(1 - \frac{3}{n}\right) &< \\
< \left(1 - \frac{1}{n+1}\right) \left(1 - \frac{1}{n+1}\right) \left(1 - \frac{3}{n+1}\right); \\
&\dots \dots \dots \\
\left(1 - \frac{1}{n}\right) \left(1 - \frac{2}{n}\right) \dots \left(1 - \frac{n-1}{n}\right) &< \\
< \left(1 - \frac{1}{n+1}\right) \left(1 - \frac{2}{n+1}\right) \dots \left(1 - \frac{n-1}{n+1}\right).
\end{aligned}$$

Мы видим, таким образом, что члены первого разложения (u_n), начиная с третьего, меньше соответствующих членов второго разложения (u_{n+1}). Кроме того, второе разложение имеет на один член больше, а именно добавочный член $\frac{1}{(n+1)^{n+1}}$. Следовательно, $u_n < u_{n+1}$, т. е. переменная u_n *возрастающая*.

Докажем теперь, что эта переменная *ограничена* в своем возрастании. В самом деле, замечаем, что каждый из множителей

$$1 - \frac{1}{n}, 1 - \frac{2}{n}, \dots, 1 - \frac{n-1}{n}$$

в разложении u_n меньше единицы; поэтому если каждый из них заменить единицей, то каждый член в разложении u_n , начиная с третьего, увеличится, так что для любого натурального n имеем:

$$u_n < 1 + 1 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \dots + \frac{1}{n!}.$$

Если в этом неравенстве каждый из множителей 3, 4, ..., n в знаменателе заменить числом 2, то каждый член суммы в правой части неравенства снова увеличится, и мы получим неравенство:

$$u_n < 1 + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \dots + \frac{1}{2^{n-1}}.$$

Отсюда

$$u_n < 1 + \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \dots + \frac{1}{2^{n-1}} \right);$$

$$u_n < 1 + \frac{1 - \frac{1}{2^{n-1}} - \frac{1}{2}}{1 - \frac{1}{2}};$$

$$u_n < 1 + \frac{1}{1 - \frac{1}{2}};$$

$$u_n < 3.$$

Таким образом, переменная u_n возрастающая и ограниченная и, следовательно, имеет конечный предел. Этот предел обозначается буквой e :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n} \right)^n = e.$$

Замечания.

1) В высшей математике и в различных теоретических вопросах имеет большое значение система логарифмов с основанием e ; логарифмы с основанием e называются *натуральными логарифмами*. Таким образом, натуральный

логарифм числа N есть некоторое число x , удовлетворяющее равенству $e^x = N$; иными словами, натуральным логарифмом числа N называется показатель степени, в которую нужно возвысить основание e , чтобы получить число N . Натуральный логарифм числа N обозначается символом $\ln N$.

2) Число e — иррациональное.

3) Числовое значение буквы e дается равенством

$$e = 2,71828\ 18284\ 59045\ 23538\dots$$

4) Согласно определению $\ln N$ есть число, которое удовлетворяет равенству

$$N = e^{\ln N}. \quad (2)$$

С другой стороны, $\lg N$ есть число, удовлетворяющее равенству

$$N = 10^{\lg N}. \quad (3)$$

Из равенств (2) и (3) следует, что $10^{\lg N} = e^{\ln N}$.

Логарифмируя последнее равенство (сперва при основании 10, а затем при основании e), получим формулы:

$$\lg N = \ln N \lg e; \quad \ln N = \lg N \ln 10,$$

применяя которые можно вычислить десятичный логарифм числа, зная его натуральный логарифм, и обратно. Значения выражений $\lg e$ и $\ln 10$ даются равенствами

$$\lg e = 0,43429\ 44819\ 03\dots$$

$$\ln 10 = 2,30258\ 50929\ 94\dots$$

2. Определяя предел переменной $u_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$, мы полагали, что n стремится к бесконечности, принимая целые положительные значения.

Предположим теперь, что в выражении $\left(1 + \frac{1}{m}\right)^m$ переменная m неограниченно возрастает ($m \rightarrow +\infty$), принимая все промежуточные действительные положительные значения. Обозначив через n наибольшее натуральное число, содержащееся в m , найдем:

$$n \leq m < n + 1 \quad (n = 1, 2, 3, \dots). \quad (4)$$

Из этого условия вытекает:

$$\frac{1}{n+1} < \frac{1}{m} \leq \frac{1}{n};$$

$$1 + \frac{1}{n+1} < 1 + \frac{1}{m} \leq 1 + \frac{1}{n}.$$

Отсюда, принимая во внимание условие (4), получим:

$$\left(1 + \frac{1}{n+1}\right)^n < \left(1 + \frac{1}{m}\right)^m < \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1}.$$

Однако*)

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{n+1}\right)^n = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\left(1 + \frac{1}{n+1}\right)^{n+1}}{1 + \frac{1}{n+1}} = \frac{e}{1} = e;$$

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1} &= \lim_{n \rightarrow +\infty} \left[\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \cdot \left(1 + \frac{1}{n}\right) \right] = \\ &= e \cdot 1 = e. \end{aligned}$$

Из этого следует, что

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{m}\right)^m = e.$$

3. Предположим, наконец, что $m \rightarrow -\infty$. Полагая

$$-m = n,$$

получим:

$$\begin{aligned} \left(1 + \frac{1}{m}\right)^m &= \left(1 - \frac{1}{n}\right)^{-n} = \frac{1}{\left(\frac{n-1}{n}\right)^n} = \left(\frac{n}{n-1}\right)^n = \\ &= \left(\frac{n-1+1}{n-1}\right)^n = \left(1 + \frac{1}{n-1}\right)^n = \\ &= \left(1 + \frac{1}{n-1}\right)^{n-1} \cdot \left(1 + \frac{1}{n-1}\right). \end{aligned}$$

Но если $m \rightarrow -\infty$, то $n \rightarrow +\infty$ и $(n-1) \rightarrow +\infty$, поэтому

$$\begin{aligned} \lim_{m \rightarrow -\infty} \left(1 + \frac{1}{m}\right)^m &= \lim_{n \rightarrow +\infty} \left[\left(1 + \frac{1}{n-1}\right)^{n-1} \cdot \left(1 + \frac{1}{n-1}\right) \right] = \\ &= e \cdot 1 = e. \end{aligned}$$

Из предыдущего видим, что предел выражения $\left(1 + \frac{1}{m}\right)^m$, когда $|m| \rightarrow +\infty$, не зависит от знака переменной m .

4. Рассмотрим выражение $\frac{a^{\Delta x} - 1}{\Delta x}$, в котором Δx стре-

*) Если $m \rightarrow +\infty$, то и $n \rightarrow +\infty$.

мится к нулю (не обращаясь при этом в нуль) и $a \neq 1$ ($a > 0$). Полагая $a^{\Delta x} - 1 = \frac{1}{m}$, найдем что

$$a^{\Delta x} = 1 + \frac{1}{m},$$

откуда

$$\Delta x \ln a = \ln \left(1 + \frac{1}{m} \right); \quad \Delta x = \frac{\ln \left(1 + \frac{1}{m} \right)}{\ln a}.$$

Принимая во внимание, что из $\Delta x \rightarrow 0$ следует $m \rightarrow \infty$ (и обратно), получим:

$$\begin{aligned} \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{a^{\Delta x} - 1}{\Delta x} &= \lim_{m \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{m} \cdot \ln a}{\ln \left(1 + \frac{1}{m} \right)} = \lim_{m \rightarrow \infty} \frac{\ln a}{m \ln \left(1 + \frac{1}{m} \right)} = \\ &= \frac{\ln a}{\lim_{m \rightarrow \infty} \ln \left(1 + \frac{1}{m} \right)^m} = \frac{\ln a^*}{\ln \lim_{m \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{m} \right)^m} = \frac{\ln a}{\ln e} = \ln a. \end{aligned}$$

5. Рассмотрим выражение $(1 + \alpha)^{\frac{1}{\alpha}}$, в котором α стремится к нулю (не обращаясь при этом в нуль). Полагая $\frac{1}{\alpha} = m$, найдем, что

$$(1 + \alpha)^{\frac{1}{\alpha}} = \left(1 + \frac{1}{m} \right)^m.$$

Принимая во внимание, что из $\alpha \rightarrow 0$ следует $|m| \rightarrow +\infty$, получим:

$$\lim_{\alpha \rightarrow 0} (1 + \alpha)^{\frac{1}{\alpha}} = e.$$

6. Рассмотрим выражение $\left(1 + \frac{x}{m} \right)^m$, в котором m стремится к бесконечности **). Полагая $\frac{x}{m} = \alpha$, найдем:

*) Логарифмическая функция непрерывна, поэтому имеем

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \ln \left(1 + \frac{1}{m} \right)^m = \ln \lim_{m \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{m} \right)^m$$

О непрерывности функции см. книгу [Производная] гл. I § 3.

**) Заметим что в процессе предельного перехода величина x рассматривается как постоянная (изменяется только m).

$$\left(1 + \frac{x}{m}\right)^m = \left[(1 + \alpha)^{\frac{1}{\alpha}}\right]^x.$$

Однако, когда $m \rightarrow \infty$, переменная α стремится к нулю, а $(1 + \alpha)^{\frac{1}{\alpha}}$ стремится к числу e (см. п. 5), тогда, в силу непрерывности степенной функции, получим:

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{x}{m}\right)^m = e^x.$$

Упражнения.

1. Найти предел выражения $\left(1 - \frac{1}{m}\right)^m$ при m , стремящемся к бесконечности.

Ответ: $\frac{1}{e}$.

2. Найти предел выражения $\left(1 - \frac{x}{m}\right)^m$ при m , стремящемся к бесконечности.

Ответ: e^{-x} .

3. Найти предел выражения $(1 + \sin \alpha)^{\frac{1}{\alpha}}$ при α , стремящемся к нулю.

Ответ: e .

4. Найти предел выражения $(1 + ax)^{\frac{1}{x}}$ при x , стремящемся к нулю.

Ответ: e^a .

5. Найти предел выражения $\alpha^{\frac{1}{\alpha-1}}$ при α , стремящемся к единице.

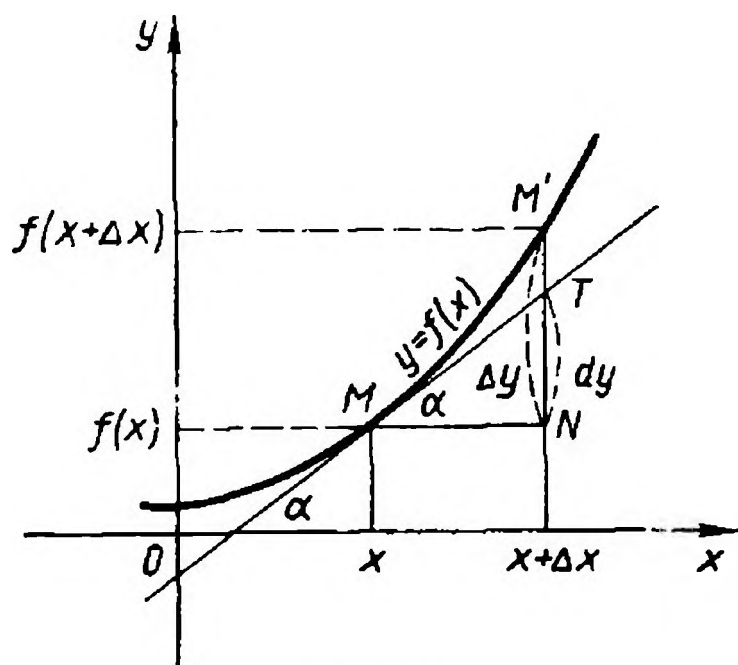
Ответ: e .

§ 2. Дифференциал

1. При решении многих задач вместо производной $f'(x)$ вводят произведение $f'(x) \cdot \Delta x$, где Δx — произвольное приращение независимой переменной x . Это произведение называют дифференциалом функции $y = f(x)$ и обозначают символом:

$$dy, \text{ или } df(x)$$

(читается «дэ игрек» или «дэ эф от икс»).



Черт. 1.

Итак, дифференциалом функции называют произведение производной этой функции на приращение независимой переменной:

$$dy = y' \cdot \Delta x, \text{ или } df(x) = f'(x) \cdot \Delta x. \quad (1)$$

Если $f(x) = x$, то согласно определению дифференциала

$$dx = x' \cdot \Delta x = 1 \cdot \Delta x = \Delta x,$$

т. е. дифференциал независимой переменной x равен приращению этой переменной:

$$dx = \Delta x. \quad (2)$$

Из (1) и (2) найдем отношение дифференциала функции к дифференциалу независимого переменного:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y' \cdot \Delta x}{\Delta x} = y', \text{ или } \frac{df(x)}{dx} = \frac{f'(x) \cdot \Delta x}{\Delta x} = f'(x).$$

Таким образом, отношение дифференциала функции $[dy, df(x)]$ к дифференциалу аргумента (dx) равно производной этой функции:

$$\frac{dy}{dx} = y', \text{ или } \frac{df(x)}{dx} = f'(x). \quad (3)$$

Если заменить Δx в (1) его выражением из (2), найдем, что

$$dy = y' dx, \text{ или } df(x) = f'(x) dx, \quad (4)$$

т. е. дифференциал функции $y = f(x)$ равен произведению производной этой функции на дифференциал аргумента.

Изменяя в (4) обозначение аргумента, получим:

$$df(u) = f'(u) du; df(t) = f'(t) dt$$

и т. д.

Примеры.

1) Найти дифференциал функции $f(x) = 3x^2 + 5$.

Решение. Так как: $f'(x) = (3x^2 + 5)' = 6x$, то

$$df(x) = d(3x^2 + 5) = 6x dx.$$

При $x = 1$ найдем:

$$[df(x)]_{x=1} = 6dx.$$

Полагая $dx = 0,01$, получим

$$[df(x)]_{x=1}^{dx=0,01} = 0,06.$$

$$2) y = x^n; dy = nx^{n-1}dx.$$

$$3) y = \sin t; dy = \cos t dt.$$

2) Из равенств (4) и (2) можно усмотреть геометрический смысл дифференциала функции. Пусть кривая MM , (черт. 1) изображает график функции $y = f(x)$, а MT — касательную в точке M к этой кривой. В треугольнике MNT катет $MN = \Delta x$, а $\operatorname{tg} \alpha = f'(x)^*$. Следовательно,

$$NT = f'(x) \Delta x, \text{ или } NT = df(x),$$

т. е. NT (черт. 1) изображает дифференциал функции.

3) Из чертежа 1 видно, что $NM' = f(x + \Delta x) - f(x)$ есть приращение Δy функции $y = f(x)$, и так как для достаточно малых приращений Δx аргумента разность TM' между $NM' = \Delta y$ и $NT = dy$ очень мала по сравнению с $MN = \Delta x$, то можно считать, что приращение Δy функции $y = f(x)$ приблизительно равно ее дифференциалу dy (для малых приращений Δx) **):

$$\Delta y \approx dy, \text{ или } f(x + \Delta x) - f(x) \approx f'(x) \cdot \Delta x,$$

откуда следует, что

$$f(x + \Delta x) \approx f(x) + f'(x) \cdot \Delta x. \quad (5)$$

Эту формулу в предположении, что Δx достаточно мала, используют в приближенных вычислениях.

Примеры.

1) Для функции $f(x) = \sqrt{x}$ формула (5) принимает вид

$$\sqrt{x + \Delta x} \approx \sqrt{x} + \frac{1}{2\sqrt{x}} \Delta x.$$

Полагая в этой формуле $x = m^2$, получим:

$$\sqrt{m^2 + \Delta x} \approx \sqrt{m^2} + \frac{1}{2\sqrt{m^2}} \Delta x,$$

*) [Производная], стр. 42.

**) Действительно, $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y - dy}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \left(\frac{\Delta y}{\Delta x} - \frac{dy}{\Delta x} \right) =$
 $= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \left(\frac{\Delta y}{\Delta x} - \frac{dy}{dx} \right) = f'(x) - f'(x) = 0.$

или

$$\sqrt{m^2 + \Delta x} \approx m + \frac{1}{2m} \cdot \Delta x. \quad (6)$$

Пользуясь формулой (6), вычислим $\sqrt{83}$:

$$\sqrt{83} = \sqrt{81 + 2} \approx 9 + \frac{1}{2 \cdot 9} \cdot 2 \approx 9,111.$$

Проверка: $9,111^2 \approx 83,010$.

2) Для функции $f(x) = \operatorname{tg} x$ формулу (5) запишем так:

$$\operatorname{tg}(x + \Delta x) \approx \operatorname{tg} x + \frac{1}{\cos^2 x} \cdot \Delta x. \quad (7)$$

Применим эту формулу для вычисления $\operatorname{tg} 46^\circ$, если известно, что $\operatorname{tg} 45^\circ = 1$, $\cos 45^\circ = \frac{1}{\sqrt{2}}$, а также, что радианная мера угла 45° равна $\frac{\pi}{4}$, а угла в 1° равна $0,0175^*$).

Подставив эти значения в (7), получим:

$$\operatorname{tg}(45^\circ + 1^\circ) = \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4} + 0,0175\right) \approx \operatorname{tg} \frac{\pi}{4} + 2 \cdot 0,0175,$$

откуда $\operatorname{tg} 46^\circ \approx 1,0350$.

Проверка. В четырехзначных таблицах находим: $\operatorname{tg} 46^\circ \approx 1,0355$.

§ 3. Производная сложной функции

1. Рассмотрим функцию $y = f(u)$, где переменная u есть функция переменной x : $u = \varphi(x)$. В таком случае функция $y = f[\varphi(x)]$ называется сложной функцией или функцией от функции.

Примеры.

1) $y = \sin u$, где $u = ax + b$, следовательно, $y = \sin(ax + b)$, и функция y есть функция от функции.

2) $y = u^n$, где $u = \operatorname{tg} x$, следовательно, $y = (\operatorname{tg} x)^n$, и функция y есть функция от функции.

Вернемся к нашей функции $y = f[\varphi(x)]$. Пусть Δx есть некоторое приращение переменной x . Этому приращению соответствует приращение Δu функции $u = \varphi(x)$, а прира-

*) См. «Четырехзначные математические таблицы» В. М. Брадиса.

щению Δu переменной u соответствует приращение Δy функции $y = f[\varphi(x)]$.

Допустим, что:

1) Существует предел отношения $\frac{\Delta y}{\Delta u}$ при $\Delta u \rightarrow 0$, т. е. существует производная функции $y = f(u)$ по переменной u :

$$\lim_{\Delta u \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta u} = f'(u) = y'_u.$$

2) Существует предел отношения $\frac{\Delta u}{\Delta x}$ при $\Delta x \rightarrow 0^*$), т. е. существует производная функции $u = \varphi(x)$ по переменной x :

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta u}{\Delta x} = \varphi'(x) = u'_x.$$

Вычислим предел отношения $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ при $\Delta x \rightarrow 0$, т. е. производную y'_x функции $y = f[\varphi(x)]$ по переменной x .

С этой целью напомним равенство

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\Delta y}{\Delta u} \cdot \frac{\Delta u}{\Delta x} \quad (**).$$

Переходя к пределу, будем иметь:

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta u \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta u} \cdot \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta u}{\Delta x}, \quad (1)$$

или $y'_x = y'_u \cdot u'_x$,

т. е. производная сложной функции равна произведению производных функций $y = f(u)$ и $u = \varphi(x)$, взятых по переменной, от которой каждая из них непосредственно зависит.

Примеры.

1) Вычислить производную y'_x функции $y = \sin(ax + b)$.

Решение. Введем обозначение: $ax + b = u$, тогда будем иметь:

$$y'_x = (\sin u)'_u \cdot (ax + b)'_x = \cos u \cdot a = a \cos(ax + b).$$

2) Вычислить производную y'_x функции $y = (\cos x)^n$.

Решение. Введем обозначение: $\cos x = u$, тогда будем иметь:

$$y'_x = (u^n)'_u \cdot (\cos x)'_x = nu^{n-1} \cdot (-\sin x) = -n \sin x \cos^{n-1} x.$$

*) Следовательно, если $\Delta x \rightarrow 0$, то и $\Delta u \rightarrow 0$.

**) Предполагаем, что $\Delta u \neq 0$.

2. Дифференциал сложной функции. Рассмотрим функцию $y = f(u)$, где переменная u есть функция переменной x : $u = \varphi(x)$. В таком случае $y = f[\varphi(x)]$ есть сложная функция. Дифференциал этой функции по переменной x есть

$$dy = y'_x dx,$$

откуда, принимая во внимание формулу (1), найдем:

$$dy = y'_u \cdot u'_x dx;$$

но $u'_x dx$ есть дифференциал функции $u = \varphi(x)$:

$$du = u'_x dx.$$

Следовательно,

$$dy = y'_u \cdot du,$$

или

$$df(u) = f'(u) du. \quad (2)$$

Сравнивая эту формулу с формулой

$$df(x) = f'(x) dx,$$

видим, что формула (2) верна и в случае, когда u есть независимая переменная, и в случае, когда u есть функция переменной x .

Пользуясь формулой (2), найдем, например, что

$$du^n = nu^{n-1} du, \quad d \sin u = \cos u du$$

и т. д.

Применение формулы (2) значительно упрощает вычисление дифференциала сложных функций.

Примеры.

$$1) \quad d(5x - 4)^3 = 3(5x - 4)^2 d(5x - 4) = 3(5x - 4)^2 5dx = 15(5x - 4)^2 dx.$$

$$2) \quad d \sqrt{\cos x} = \frac{1}{2 \sqrt{\cos x}} d(\cos x) = \frac{1}{2 \sqrt{\cos x}} (-\sin x) dx = \\ = -\frac{\sin x}{2 \sqrt{\cos x}} dx.$$

3. Производная показательной функции. Чтобы найти производную функции $y = a^x$ ($a \neq 1$, $a > 0$), следуем известной схеме *).

*) [Производная], стр. 43.

1. Придаем аргументу значение x и находим соответствующее значение функции: a^x

2. Придаем аргументу значение $x + \Delta x$ и находим соответствующее значение функции: $a^{x+\Delta x}$.

3. Находим приращение функции, соответствующее приращению Δx аргумента:

$$\Delta y = a^{x+\Delta x} - a^x = a^x (a^{\Delta x} - 1).$$

4. Находим отношение этого приращения к приращению аргумента:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{a^x (a^{\Delta x} - 1)}{\Delta x}.$$

5. Находим производную функции $y = a^x$, т. е. предел отношения $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ при $\Delta x \rightarrow 0$:

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{a^x (a^{\Delta x} - 1)}{\Delta x} = a^x \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{a^{\Delta x} - 1}{\Delta x} *).$$

Однако (см. § 1, п. 4) $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{a^{\Delta x} - 1}{\Delta x} = \ln a$, следовательно,

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = a^x \ln a.$$

В частности, когда $a = e$, имеем:

$$(e^x)' = e^x **),$$

т. е. функция e^x равна своей производной.

Если имеем функцию $y = a^u$, где $u = \varphi(x)$, то

$$y_x = (a^u)'_u \cdot u' = a^u \ln a \cdot u'.$$

Таким образом,

$$(a^u)'_x = a^u \ln a u'.$$

При $a = e$ имеем:

$$(e^u)'_x = e^u \cdot u'.$$

Примеры.

$$1) (a^{\sin x})' = a^{\sin x} \cdot \ln a \cdot \cos x.$$

$$2) (e^{kx})' = k e^{kx}.$$

*) В этом предельном переходе величина x рассматривается как постоянная.

**); Логарифм основания равен единице: $\ln e = 1$

4. Производная логарифмической функции. Требуется найти производную функции

$$y = \log_a x. \quad (3)$$

Равенство (3) равносильно равенству

$$a^y = x.$$

Рассматривая в этом равенстве y как функцию x , найдем производную по x каждой его части:

$$a^y \ln a \cdot y' = 1,$$

откуда

$$y' = \frac{1}{a^y \ln a}, \text{ или } y' = \frac{1}{x \ln a}.$$

Таким образом, мы нашли, что

$$(\log_a x)' = \frac{1}{x \ln a}.$$

В частности, если $a = e$, то

$$(\ln x)' = \frac{1}{x}.$$

Если дана функция $y = \log_a u$, где $u = \varphi(x)$, то

$$(\log_a u)' = \frac{1}{u \ln a} \cdot u'.$$

В частности, если $y = \ln u$, где $u = \varphi(x)$, то

$$(\ln u)' = \frac{1}{u} \cdot u'. \quad (4)$$

Примеры.

$$1) y = \log_a (2x + x^3); y' = \frac{1}{\ln a} \cdot \frac{1}{2x + x^3} \cdot (2x + x^3)';$$

$$y' = \frac{1}{\ln a} \cdot \frac{2 + 3x^2}{2x + x^3}.$$

$$2) y = \ln (x^3); y' = \frac{1}{x^3} \cdot (x^3)' = \frac{3x^2}{x^3}; y' = \frac{3}{x}.$$

5. Производная функции $y = \arcsin x$. Требуется найти производную функции

$$y = \arcsin x, \quad (5)$$

где $-1 \leq x \leq 1$ и $-\frac{\pi}{2} \leq y \leq \frac{\pi}{2}$. Из равенства (5) выводим:

$$\sin y = x.$$

Найдем производную по x каждой части этого равенства:

$$\cos y \cdot y' = 1.$$

Отсюда

$$y' = \frac{1}{\cos y} = \frac{1}{\sqrt{1 - \sin^2 y}}^{*)} = \\ = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}} \left(y / \pm \frac{\pi}{2}, x \neq \pm 1 \right).$$

Итак,

$$(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}} \quad (|x| < 1).$$

Если имеем функцию $y = \arcsin u$, где $u = \varphi(x)$, то

$$(\arcsin u)' = \frac{1}{\sqrt{1 - u^2}} \cdot u' \quad (|u| < 1).$$

Пример. $y = \arcsin \frac{1}{x}$; $y' = \frac{1}{\sqrt{1 - \left(\frac{1}{x}\right)^2}} \cdot \left(\frac{1}{x}\right)' =$

$$= \frac{1}{\frac{1}{x} \sqrt{x^2 - 1}} \cdot \left(-\frac{1}{x^2}\right);$$

$$y' = -\frac{1}{x \sqrt{x^2 - 1}}.$$

6. Производная функции $y = \arcsin x$. Требуется найти производную функции

$$y = \arcsin x, \quad (6)$$

где $-1 \leq x \leq 1$ и $0 \leq y \leq \pi$. Из равенства (6) следует:

$$\sin y = x.$$

Найдем производную по x обеих частей этого равенства:

$$\cos y \cdot y' = 1,$$

откуда

$$y' = \frac{1}{\cos y} = \frac{1^{**})}{\sqrt{1 - \sin^2 y}} =$$

*) В промежутке $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$, т. е. в I и IV четвертях, $\cos y$ положителен, так что

$$\cos y = +\sqrt{1 - \sin^2 y}.$$

**) В промежутке $(0, \pi)$, т. е. в I и II четвертях, $\sin y$ положителен, поэтому

$$\sin y = +\sqrt{1 - \cos^2 y}.$$

$$= -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \quad (y \neq 0, \pi; x \neq \pm 1).$$

Итак,

$$(\arccos x)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \quad (|x| < 1).$$

Если дана функция $y = \arccos u$, где $u = \varphi(x)$, то

$$(\arccos u)' = -\frac{1}{\sqrt{1-u^2}} \cdot u' \quad (|u| < 1).$$

Пример.

$$y = \arccos \frac{x}{a}; \quad y' = -\frac{1}{\sqrt{1-\left(\frac{x}{a}\right)^2}} \cdot \left(\frac{x}{a}\right)' = -\frac{1}{\sqrt{a^2-x^2}}.$$

7. Производная функции $y = \operatorname{arctg} x$. Требуется найти производную функции

$$y = \operatorname{arctg} x, \tag{7}$$

где x изменяется от $-\infty$ до $+\infty$ и $-\frac{\pi}{2} < y < \frac{\pi}{2}$.

Из равенства (7) следует

$$\operatorname{tg} y = x.$$

Найдем производную по x от обеих частей этого равенства:

$$\frac{1}{\cos^2 y} \cdot y' = 1, \text{ или } (1 + \operatorname{tg}^2 y) y' = 1.$$

Отсюда

$$y' = \frac{1}{1 + \operatorname{tg}^2 y} = \frac{1}{1 + x^2}.$$

Следовательно,

$$(\operatorname{arctg} x)' = \frac{1}{1+x^2}.$$

Если дана функция $y = \operatorname{arctg} u$, где $u = \varphi(x)$, то

$$(\operatorname{arctg} u)' = \frac{1}{1+u^2} \cdot u'.$$

Пример.

$$y = \operatorname{arctg} \frac{1+x}{1-x}; \quad y' = \frac{1}{1+\left(\frac{1+x}{1-x}\right)^2} \cdot \left(\frac{1+x}{1-x}\right)' =$$

$$= \frac{(1-x)^2}{(1-x)^2 + (1+x)^2} \cdot \frac{(1-x) + (1+x)}{(1-x)^2} = \frac{2}{2 + 2x^2} = \frac{1}{1+x^2}.$$

8. Производная функции $y = \operatorname{arc} \operatorname{ctg} x$. Требуется найти производную функции

$$y = \operatorname{arc} \operatorname{ctg} x, \quad (8)$$

где x изменяется от $-\infty$ до $+\infty$ и $0 < y < \pi$.

Из равенства (8) следует:

$$\operatorname{ctg} y = x.$$

Найдем производную по x обеих частей этого равенства:

$$-\frac{1}{\sin^2 y} \cdot y' = 1, \text{ или } -(1 + \operatorname{ctg}^2 y) \cdot y' = 1,$$

откуда

$$y' = -\frac{1}{1 + \operatorname{ctg}^2 y} = -\frac{1}{1 + x^2}.$$

Таким образом,

$$(\operatorname{arc} \operatorname{ctg} x)' = -\frac{1}{1 + x^2}.$$

Если дана функция $y = \operatorname{arc} \operatorname{ctg} u$, где $u = \varphi(x)$, то

$$(\operatorname{arc} \operatorname{ctg} u)' = -\frac{1}{1 + u^2} \cdot u'.$$

Пример.

$$\begin{aligned} y = \operatorname{arc} \operatorname{ctg} \frac{x}{2}; \quad y' &= -\frac{1}{1 + \left(\frac{x}{2}\right)^2} \cdot \left(\frac{x}{2}\right)' = \\ &= -\frac{4}{x^2 + 4} \cdot \frac{1}{2} = -\frac{2}{x^2 + 4}. \end{aligned}$$

Упражнения.

1. Найти производные следующих функций:

1. $y = e^{\frac{1}{x}}.$

Ответ: $y' = -\frac{1}{x^2} \cdot e^{\frac{1}{x}}.$

2. $y = a^{px+q}.$

» $y' = pa^{px+q} \cdot \ln a.$

3. $y = \ln \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}.$

» $y' = \frac{1}{x(1+x^2)}.$

4. $y = \operatorname{arc} \sin \frac{1}{1+x^2}.$

» $y' = -\frac{2x}{|x|(1+x^2)\sqrt{2+x^2}}.$

5. $y = \operatorname{arc} \operatorname{ctg} \sqrt{x}.$

» $y' = \frac{1}{-2\sqrt{x}(1+x)}.$

2. Показать, что функция e^x удовлетворяет уравнению $y' = y$.

3. Показать, что функция e^{kx} удовлетворяет уравнению $y' = ky$.

4. Показать, что функция e^{-kx} удовлетворяет уравнению $y' = -ky$.

5. Определить количество радия в любой момент времени t , если известно, что скорость распада радия пропорциональна наличному количеству радия и что в момент времени t_0 имелось R_0 граммов радия.

Решение. Обозначим через $R(t)$ количество радия, которое имелось в момент времени t . Скорость распада, т. е. скорость убывания функции $R(t)$, равна производной $R'(t)$ этой функции по переменной t . Так как скорость $R'(t)$ пропорциональна значению функции $R(t)$, то имеем:

$$R'(t) = -kR(t), \text{ или } \frac{R'(t)}{R(t)} = -k, \quad (9)$$

где $k > 0$ — постоянная величина.

Соотношение (9) можно рассматривать как полученное путем вычисления производной по t каждой части равенства

$$\ln R(t) = -kt + kC^*),$$

где C — произвольная постоянная. Из этого соотношения выводим:

$$R(t) = e^{-kt + kC^{**}}.$$

Отсюда, принимая во внимание условие

$$R(t_0) = R_0,$$

получим:

$$\begin{aligned} e^{-kt_0 + kC} &= R_0; \quad e^{-kt_0} \cdot e^{kC} = R_0; \\ e^{kC} &= R_0 \cdot e^{kt_0}. \end{aligned}$$

Введя обозначение $R_0 \cdot e^{kt_0} = C_1$, найдем:

$$R(t) = C_1 e^{-kt}. \quad (10)$$

Легко убедиться, что найденная нами функция (10) удовлетворяет условию (9).

*) См. формулу (4).

**) Согласно определению $\ln R(t)$ есть показатель степени в которую нужно возвысить основание e , чтобы получить $R(t)$.

Действительно,

$$\begin{aligned} R'(t) &= (C_1 e^{-kt})' = C_1 e^{-kt} (-kt)' = \\ &= -C_1 k e^{-kt} = -k (C_1 e^{-kt}) = -k R(t). \end{aligned}$$

Замечание. Уравнение (10) выражает закон изменения функции $R(t)$, согласно которому производная $R'(t)$ (скорость изменения) функции $R(t)$ пропорциональна значению этой функции.

По такому закону изменяются и многие другие величины. Например, при охлаждении какого-либо тела его температура уменьшается пропорционально разности температур этого тела и окружающей его среды.

9. Формулы производных и дифференциалов элементарных функций

I. $(C)' = 0;$	$dC = 0.$
II. $(x)' = 1;$	$d(x) = dx.$
III. $(u + v)' = u' + v';$	$d(u + v) = du + dv.$
IV. $(uv)' = uv' + vu';$	$d(uv) = u dv + v du.$
V. $(Cu)' = Cu';$	$d(Cu) = C du.$
VI. $(u^n)' = nu^{n-1}u';$	$d(u^n) = nu^{n-1}du.$
VII. $(\sqrt{u})' = \frac{u'}{2\sqrt{u}};$	$d\sqrt{u} = \frac{du}{2\sqrt{u}}.$
VIII. $\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - v'u}{v^2};$	$d\left(\frac{u}{v}\right) = \frac{vdu - u dv}{v^2}.$
IX. $(\sin x)' = \cos x;$	$d \sin x = \cos x dx.$
X. $(\cos x)' = -\sin x;$	$d(\cos x) = -\sin x dx.$
XI. $(\operatorname{tg} x)' = \frac{1}{\cos^2 x};$	$d(\operatorname{tg} x) = \frac{dx}{\cos^2 x}.$
XII. $(\operatorname{ctg} x)' = -\frac{1}{\sin^2 x};$	$d(\operatorname{ctg} x) = -\frac{dx}{\sin^2 x}.$
XIII. $\begin{cases} (a^x)' = a^x \ln a; \\ (e^x)' = e^x; \end{cases}$	$\begin{cases} d(a^x) = a^x \ln a dx. \\ d(e^x) = e^x dx. \end{cases}$
XIV. $\begin{cases} (\log_a x)' = \frac{1}{x \ln a}; \\ (\ln x)' = \frac{1}{x}; \end{cases}$	$\begin{cases} d(\log_a x) = \frac{dx}{x \ln a}. \\ d(\ln x) = \frac{dx}{x}. \end{cases}$
XV. $(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}};$	$d(\arcsin x) = \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}.$

$$\text{XVI. } (\arccos x)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}};$$

$$d(\arccos x) = -\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}.$$

$$\text{XVII. } (\operatorname{arctg} x)' = \frac{1}{1+x^2};$$

$$d(\operatorname{arctg} x) = \frac{dx}{1+x^2}.$$

$$\text{XVIII. } (\operatorname{arccotg} x)' = -\frac{1}{1+x^2};$$

$$d(\operatorname{arccotg} x) = -\frac{dx}{1+x^2}.$$

10. Вычислить дифференциалы следующих функций:

- | | |
|--|--|
| 1. $y = ax^2 + bx + c.$ | О т в е т: $dy = (2ax + b) dx.$ |
| 2. $y = (a^3 - x^3)^6.$ | » $dy = -18x^2 (a^3 - x^3)^5 dx.$ |
| 3. $y = \sqrt{a^2 + x^2}.$ | » $dy = \frac{x}{\sqrt{a^2 + x^2}} dx.$ |
| 4. $y = \sqrt{x^2 - a^2}.$ | » $dy = \frac{xdx}{\sqrt{x^2 - a^2}}.$ |
| 5. $y = \sqrt{a^2 - x^2}.$ | » $dy = -\frac{xdx}{\sqrt{a^2 - x^2}}.$ |
| 6. $y = (e^x + e^{-x})^2.$ | » $dy = 2(e^{2x} - e^{-2x}) dx.$ |
| 7. $y = e^x \ln x.$ | » $dy = e^x \left(\ln x + \frac{1}{x} \right) dx.$ |
| 8. $y = \sin e^x.$ | » $dy = e^x \cos e^x dx.$ |
| 9. $y = \operatorname{arctg} \sqrt{x}.$ | » $dy = \frac{1}{1+x} \cdot \frac{1}{2\sqrt{x}} dx.$ |
| 10. $y = \ln \sin^2 x.$ | » $dy = 2 \operatorname{ctg} x dx.$ |
| 11. $y = \ln \cos x.$ | » $dy = -\operatorname{tg} x dx.$ |
| 12. $y = \ln \operatorname{tg} x.$ | » $dy = \frac{1}{\sin x \cos x} dx.$ |
| 13. $y = \ln \operatorname{ctg} x.$ | » $dy = -\frac{1}{\sin x \cos x} dx.$ |
| 14. $y = \ln \operatorname{tg} \frac{x}{2}.$ | » $dy = \frac{1}{\sin x} dx.$ |

§ 4. Теорема о конечном приращении (теорема Лагранжа)

1. Допустим, что функция $y = f(x)$ определена в промежутке $[a, b]$ *) и имеет производную в каждой точке этого промежутка. Пусть кривая AB (черт. 2, 3) есть

*) Промежуток $[a, b]$ есть множество всех чисел x , удовлетворяющих условию $a \leq x \leq b$.

график функции $y = f(x)$ и $[a, f(a)]$, $[b, f(b)]$ — соответственно координаты точек A и B . Соединим эти точки хордой AB .

В теореме о конечном приращении утверждается*), что существует на графике по крайней мере одна точка $M[\xi, f(\xi)]$, отличная от A и B , касательная в которой параллельна хорде AB .

Касательная MT в точке M графика и хорда AB , будучи параллельны, имеют один и тот же угол наклона α к оси Ox . Но угловой коэффициент**) хорды AB равен

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{f(b) - f(a)}{b - a},$$

а угловой коэффициент***) касательной MT равен

$$\operatorname{tg} \alpha = f'(\xi).$$

Равенство

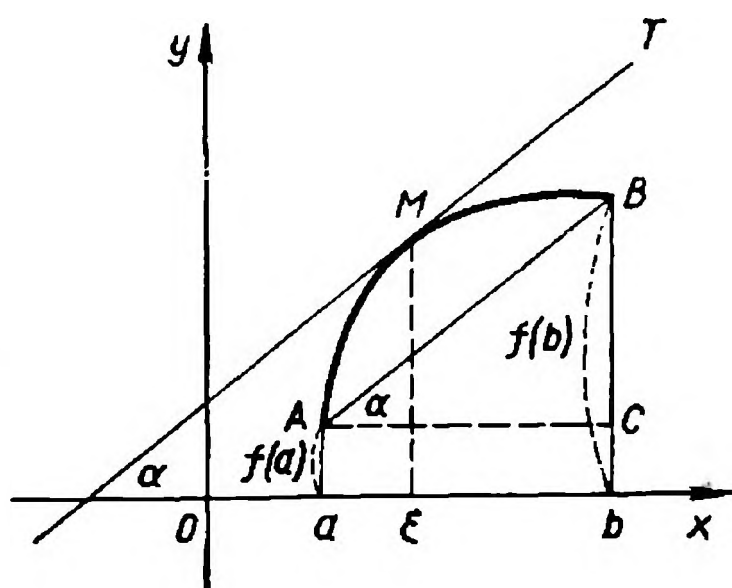
$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a} = f'(\xi) \quad (1)$$

выражает тот факт, что угловой коэффициент хорды AB равен угловому коэффициенту касательной MT к кривой AB в точке $[\xi, f(\xi)]$, т. е. что $AB \parallel MT$.

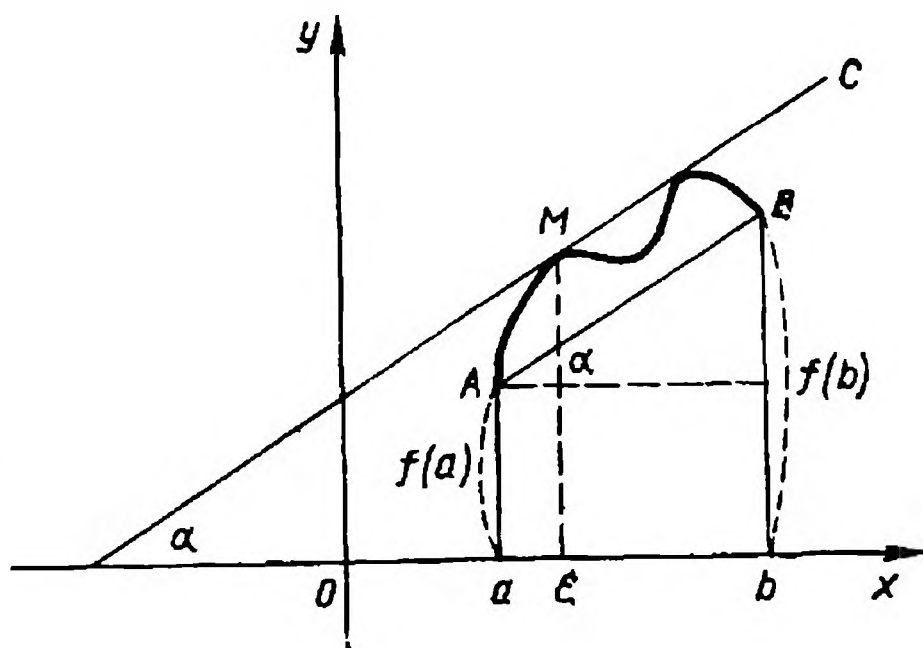
*) Аналитическое доказательство теоремы заменено здесь интуитивным объяснением.

**) В прямоугольном треугольнике ABC катет $BC = f(b) - f(a)$, а катет $AC = b - a$.

***) [Производная], стр. 42.



Черт. 2.



Черт. 3.

Равенство (1) представляет собой аналитическое выражение *теоремы Лагранжа*. Часто ее записывают в виде:

$$f(b) - f(a) = (b - a) f'(\xi) \quad (a < \xi < b).$$

2. Следствия из теоремы о конечном приращении. 1) *Если производная $f'(x)$ функции $f(x)$ равна нулю в любой точке промежутка $[a, b]$, то функция $f(x)$ постоянна в этом промежутке *).*

Действительно, пусть c и x — две произвольные точки промежутка $[a, b]$. По теореме о конечном приращении

$$f(x) - f(c) = (x - c) f'(\xi),$$

где ξ есть точка, содержащаяся между c и x . Но по условию $f'(\xi) = 0$, следовательно,

$$f(x) - f(c) = 0,$$

т. е. для любого x из $[a, b]$ имеем:

$$f(x) = f(c) = \text{const.}$$

2) *Если две функции $f(x)$ и $g(x)$ имеют равные производные*

$$f'(x) = g'(x), \quad (a \leq x \leq b),$$

*то они отличаются одна от другой на постоянную величину **).*

Действительно, введя обозначение

$$\varphi(x) = f(x) - g(x),$$

имеем согласно условию:

$$\varphi'(x) = f'(x) - g'(x) = 0 \quad (a \leq x \leq b).$$

Следовательно, согласно следствию 1)

$$\varphi(x) = C \quad (a \leq x \leq b),$$

т. е.

$$f(x) - g(x) = C \quad (a \leq x \leq b).$$

Пример. Функции $\arcsin x$ и $-\arccos x$ имеют равные производные:

*) Известно, что производная постоянной равна нулю. В следствии 1) утверждается, что справедлива и обратная теорема.

**) Известно, что из равенства $f(x) - g(x) = C$ следует $f'(x) = g'(x)$. В следствии 2) утверждается, что справедлива и обратная теорема

$$(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \quad (-1 < x < 1);$$

$$(-\arccos x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \quad (-1 < x < 1).$$

Следовательно, эти функции отличаются одна от другой на постоянную величину.

Действительно, обозначим $\arcsin x$ через φ :

$$\varphi = \arcsin x \quad \left(-\frac{\pi}{2} \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2} \right).$$

Из этого равенства следует:

$$\sin \varphi = x. \quad (2)$$

Принимая во внимание формулу приведения

$$\cos\left(\frac{\pi}{2} - \varphi\right) = \sin \varphi$$

и равенство (2), находим:

$$\cos\left(\frac{\pi}{2} - \varphi\right) = x. \quad (3)$$

Пользуясь соотношением $-\frac{\pi}{2} \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2}$, найдем:

$$-\frac{\pi}{2} \leq -\varphi \leq \frac{\pi}{2}, \quad 0 \leq \frac{\pi}{2} - \varphi \leq \pi.$$

Следовательно, из равенства (3) получим:

$$\frac{\pi}{2} - \varphi = \arccos x,$$

откуда:

$$\frac{\pi}{2} - \arcsin x = \arccos x;$$

$$\arcsin x + \arccos x = \frac{\pi}{2};$$

$$\arcsin x - (-\arccos x) = \frac{\pi}{2}.$$

Итак, разность функций $\arcsin x$ и $-\arccos x$ равна постоянной $\frac{\pi}{2}$.

Упражнение. Функции $\arctg x$ и $-\operatorname{arccotg} x$ имеют равные производные. Проверить равенство

$$\arctg x - (-\operatorname{arccotg} x) = \frac{\pi}{2}.$$

§ 5. Краткие исторические сведения *).

Понятия переменной и функции возникли в XVII веке под влиянием запросов естествознания и техники.

Впервые ввел эти понятия Р. Декарт (1637 г.). Термин «функция» появляется (1692 г.) у Г. Лейбница, хотя и несколько в ином понимании, нежели современное.

Определение понятия функции, близкое к современному, находим у И. Бернулли (1718 г.). Это понятие получает современную общность в определениях Н. И. Лобачевского (1834 г.) и Л. Дирихле (1837 г.)

Обозначение переменных величин последними буквами латинского алфавита (x, y, z, \dots) введено Р. Декартом (1637 г.), а знак функции $f(x)$ Л. Эйлером (1734 г.).

Термин *limes*, а также первые шаги в создании теории пределов мы находим у И. Ньютона (1686 г.). Современная теория пределов возникла в начале XIX века.

Разработкой приемов решения задач о проведении касательной к кривой занимались в начале XVII века П. Ферма и Р. Декарт. В 1629 г. Ферма предложил способы нахождения наибольших и наименьших значений переменных величин. Вычисления, которые применял Ферма при решении задач о проведении касательных и об отыскании экстремумов (т. е. максимумов или минимумов функций), были равносильны вычислению производной.

Теория производных была разработана И. Ньютоном в 1665 — 1666 гг., а несколько позже (1673 — 1676 гг.) — Г. Лейбницем.

Соответствующие работы были опубликованы: Лейбница — в 1684 — 1686 гг., Ньютона — в 1704 — 1736 гг.

Операция вычисления производных была названа Лейбницем «дифференцированием».

Знак Δx был введен в 1755 г. Л. Эйлером. Ему же принадлежит (1736 г.) обозначение постоянной e (основание натуральных логарифмов).

Обозначение $\frac{dy}{dx}$ было предложено (1875 г.) Г. Лейбницем, а $y', f'(x)$ (1770, 1779 г.) — Ж. Лагранжем.

*) Здесь использован материал § 4 (гл. I, стр. 24) и § 7 (гл. III, стр. 97) книги [Производная].

§ 1. Задача о площади криволинейной трапеции

Школьная геометрия учит нас вычислять площади плоских фигур, ограниченных отрезками прямых (треугольника, параллелограмма, трапеции, многоугольника), а из площадей плоских фигур, ограниченных кривыми линиями, вычислять только площадь круга и его частей. Однако практика требует умения вычислять и площади многих других криволинейных фигур.

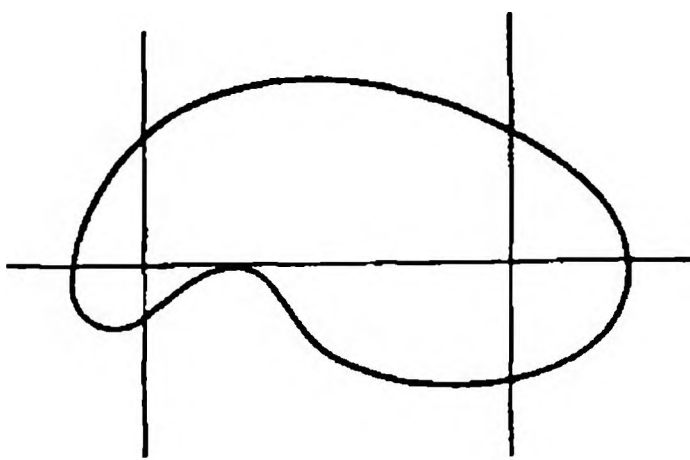
Фигура, ограниченная произвольной кривой (черт. 4), обычно может быть разбита с помощью прямых, параллельных двум перпендикулярным направлениям, на части, имеющие форму фигур, изображенных на чертежах 5, 6, 7.

Рассмотрим фигуру, называемую *криволинейной трапецией* (черт. 5). Мы видим, что у криволинейной трапеции три стороны представляют собой прямые (AA' , BB' , $A'B'$), а четвертая сторона (AB) — дуга произвольной кривой; две из прямолинейных сторон взаимно параллельны ($AA' \parallel BB'$) и перпендикулярны к третьей ($AA' \perp A'B'$, $BB' \perp A'B'$). Предполагается, что криволинейная сторона (AB) обладает свойством пересекаться с любой прямой, параллельной сторонам AA' и BB' , не более чем в одной точке.

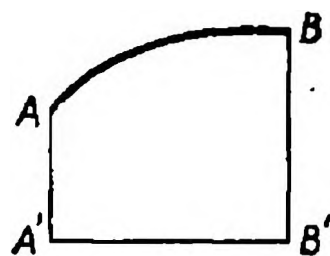
Если одна из параллельных сторон обращается в точку, криволинейная трапеция принимает форму *криволинейного треугольника* (черт. 6). Если же обе параллельные стороны обращаются каждая в точку, то криволинейная трапеция принимает форму сегмента плоской фигуры, т. е. фигуры, ограниченной какой-либо дугой и стягивающей ее хордой (черт. 7).

Таким образом, вычисление площади фигуры, ограниченной кривой линией (черт. 4), сводится к вычислению площади криволинейной трапеции.

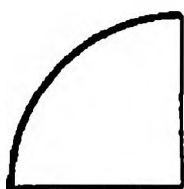
Выберем систему прямоугольных координат xOy таким образом, чтобы криволинейная трапеция $A'ABV'$ располагалась над осью Ox , а ее сторона $A'B'$ лежала на этой оси (черт. 8).



Черт. 4.



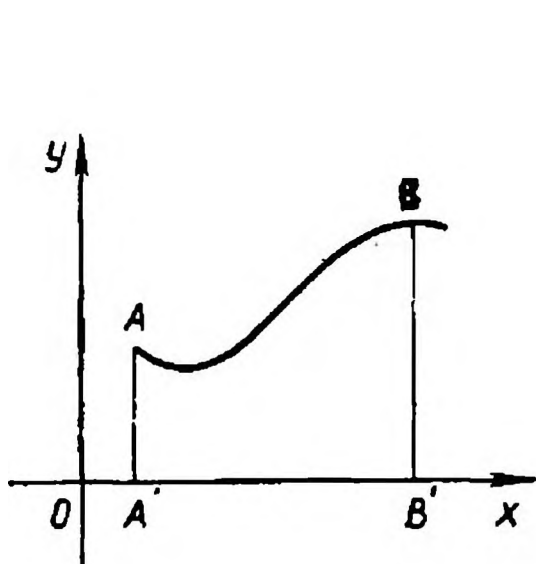
Черт. 5.



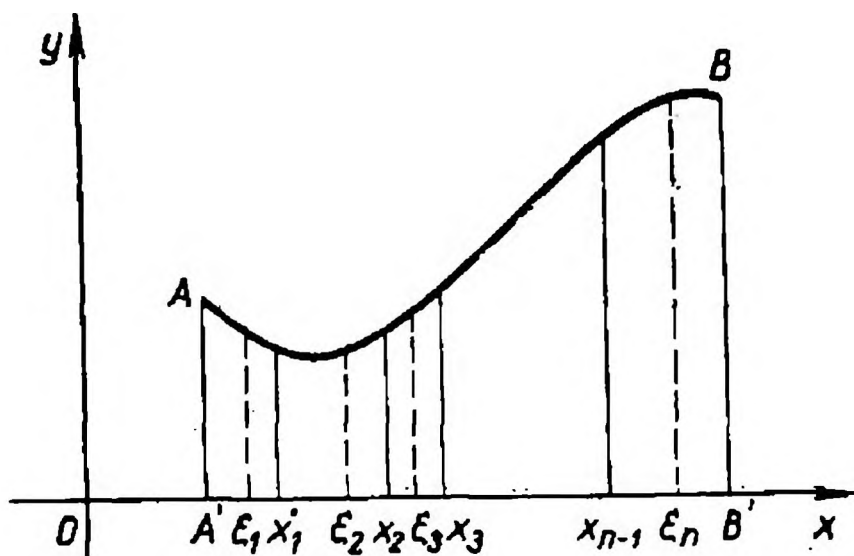
Черт. 6.



Черт. 7.



Черт. 8.



Черт. 9.

Обозначим абсциссы точек A и B соответственно через a и b ($a < b$). Пусть имеем функцию $y = f(x)$, график которой на промежутке $[a, b]$ совпадает со стороной AB трапеции $A'ABV'$.

Ставим себе задачу — вычислить площадь криволинейной трапеции $A'ABV'$.

Для решения этой задачи разобьем промежуток $[a, b]$ на n частей (промежутков), не обязательно равных; пусть абсциссы точек деления x_1, x_2, \dots, x_{n-1} удовлетворяют условию

$$a < x_1 < x_2 < \dots < x_{n-1} < b.$$

Для общности обозначений положим $a = x_0$ и $b = x_n$. В каждом из промежутков

$$[x_{i-1}, x_i] \quad (1 \leq i \leq n)$$

выберем произвольным образом по точке с абсциссой ξ_i (черт. 9), которая, следовательно, удовлетворяет условию

$$x_{i-1} \leq \xi_i \leq x_i.$$

В каждой точке ξ_i (черт. 9) восставим перпендикуляр к оси Ox до пересечения со стороной AB трапеции $A'ABB'$. Принимая во внимание, что кривая AB есть график функции $y = f(x)$, найдем, что полученные нами точки пересечения имеют соответственно координаты

$$\xi_i, f(\xi_i).$$

Наконец, проведем через точки $[\xi_i, f(\xi_i)]$ прямые, параллельные оси Ox , и построим n прямоугольников (черт. 10) соответственно с основанием

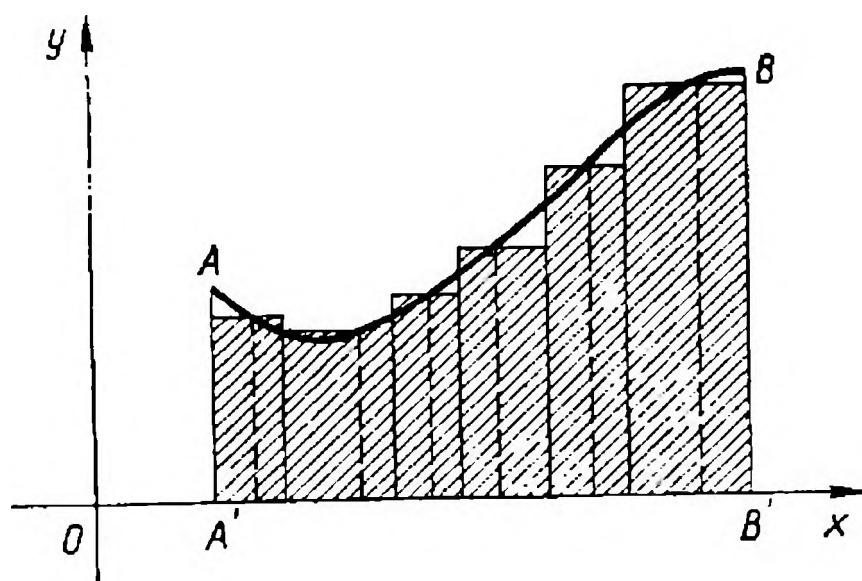
$$x_i - x_{i-1} = \Delta x_i \quad (1 \leq i \leq n),$$

высотой $f(\xi_i)$ и площадью $f(\xi_i) \Delta x_i$.

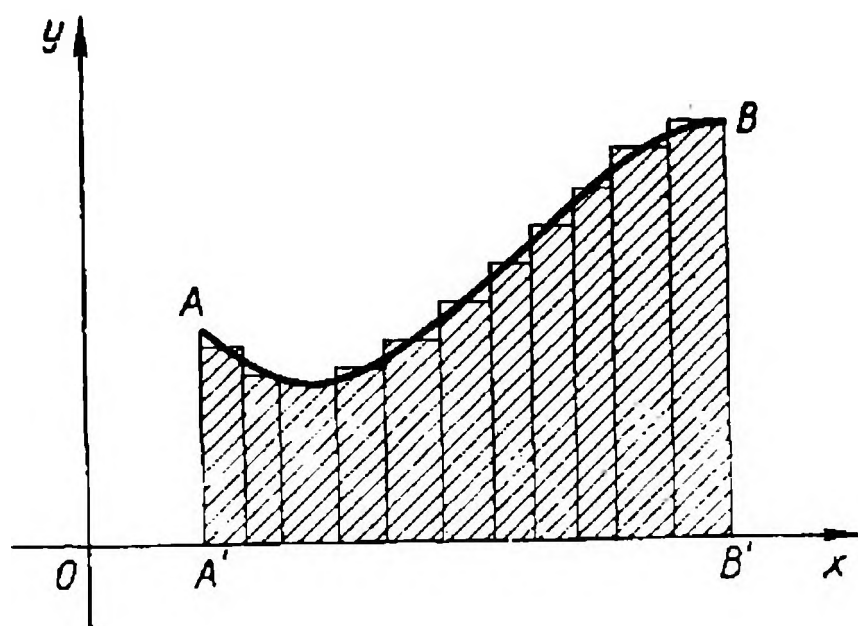
Сумма $f(\xi_1) \Delta x_1 + f(\xi_2) \Delta x_2 + \dots + f(\xi_n) \Delta x_n$, которую обозначим для краткости символом

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^n f(\xi_i) \Delta x_i &= f(\xi_1) \Delta x_1 + f(\xi_2) \Delta x_2 + \\ &+ \dots + f(\xi_n) \Delta x_n, \end{aligned}$$

выражает площадь заштрихованной фигуры (многоугольника) ступенчатого вида (черт. 10).



Черт. 10.



Черт. 11.

Мы видим, что этот многоугольник мало отличается от криволинейной трапеции $A'ABB'$. Очевидно, разбивая промежуток $[a, b]$ на достаточно малые части (черт. 11), можно получить ступенчатые многоугольники, сколь угодно мало отличающиеся от данной нам криволинейной трапеции. Если мы будем продолжать разбиение промежутка $[a, b]$ на части все более и более мелкие и вычислять каждый раз сумму (1), то можно ожидать, что сумма (1) в этом процессе будет стремиться к определенному пределу. Естественно считать, что этот предел есть площадь криволинейной трапеции.

Описанный выше процесс предельного перехода имеет в своей основе разбиение промежутка $[a, b]$ на части все более и более мелкие. Как мы знаем, эти части (промежутки) и их длины Δx_i могут быть и неравными. Обозначим наибольшую из длин Δx_i символом « $\max \Delta x_i$ ». Если в процессе разбиения промежутка $[a, b]$ на части $\max \Delta x_i$ будет стремиться к нулю, то и длина каждого из промежутков

$$[x_{i-1}, x_i] \quad (1 \leq i \leq n)$$

также будет стремиться к нулю, а число n этих промежутков будет стремиться к бесконечности.

Таким образом, обобщая понятие площади круга, известное из школьной геометрии, мы приходим к следующему определению площади криволинейной трапеции:

Если сумма $\sum_{i=1}^n f(\xi_i) \Delta x_i$ стремится, при все более и более мелком разбиении промежутка $[a, b]$, к некоторому пределу, то этот предел называется площадью данной криволинейной трапеции.

Обозначив через F площадь криволинейной трапеции, мы можем, следовательно, написать:

$$F = \lim_{\max \Delta x_i \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n f(\xi_i) \Delta x_i. \quad (2)$$

Формула (2) указывает нам тот путь, которому нужно следовать, чтобы найти площадь криволинейной трапеции.

Итак, вычисление площади трапеции свелось к отысканию предела суммы $\sum_{i=1}^n f(\xi_i) \Delta x_i$ при $\max \Delta x_i$, стремящемся к нулю.

Примечание. Выше мы предполагали, что $f(x) \geq 0$ на промежутке $[a, b]$. Если $f(x) < 0$ для значений аргумента x из промежутка $[a, b]$, то криволинейная трапеция $A'ABB'$ расположена под осью Ox (черт. 12) и $f(\xi_i) \Delta x_i < 0$ ($1 \leq i \leq n$), а предел

$$F = \lim_{\max \Delta x_i \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n f(\xi_i) \Delta x_i$$

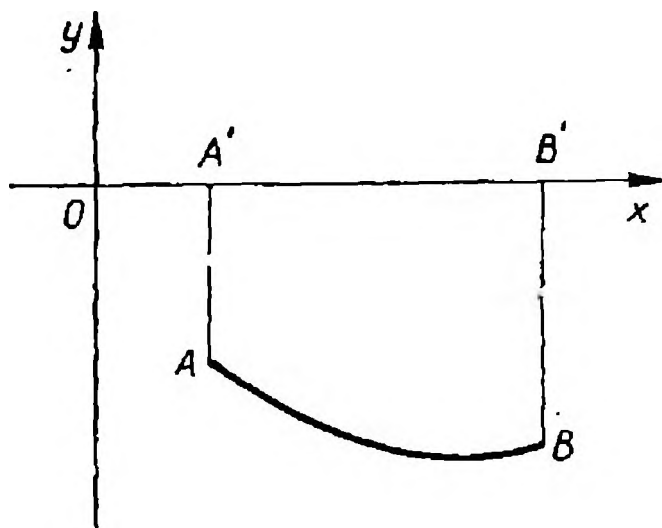
есть отрицательное число.

Чтобы и в этом случае предел (2) выражал площадь, условимся считать площадь трапеции, расположенной под осью, отрицательной (черт. 12).

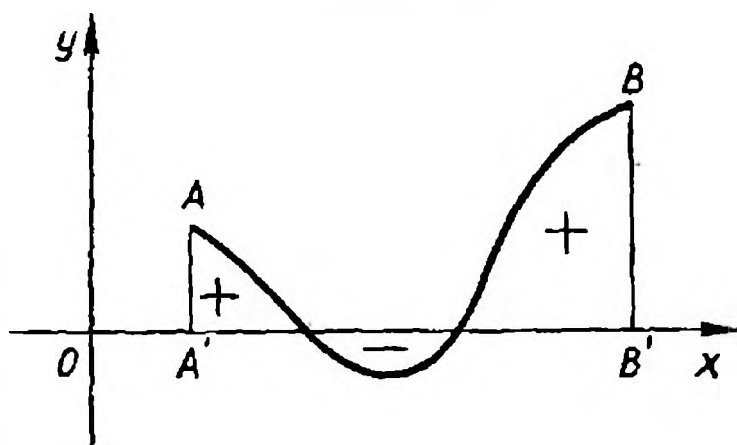
Если $f(x)$ меняет знак в промежутке $[a, b]$ (черт. 13), то предел

$$F = \lim_{\max \Delta x_i \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n f(\xi_i) \Delta x_i$$

представляет собой алгебраическую сумму положительных и отрицательных площадей.



Черт. 12.



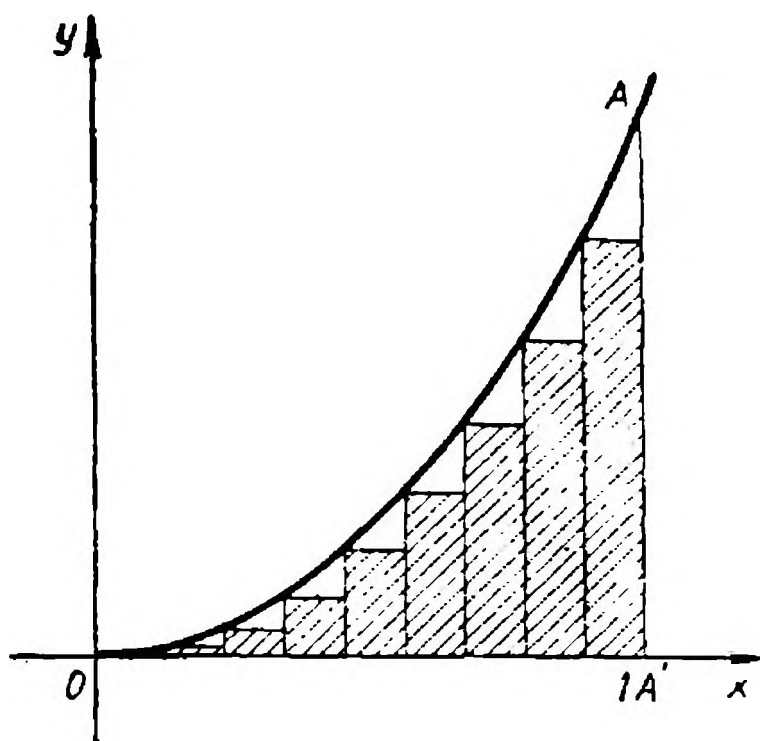
Черт. 13.

§ 2. Пример вычисления площади криволинейного треугольника

Требуется вычислить площадь криволинейного треугольника OAA' (черт. 14), ограниченного параболой $y = x^2$, осью Ox и прямой $x = 1$.

Решение. Криволинейный треугольник OAA' можно рассматривать как криволинейную трапецию, у которой одна из параллельных сторон обратилась в точку.

Чтобы вычислить площадь треугольника OAA' , используем формулу (2), § 1:



Черт. 14.

$$F = \lim_{\max \Delta x_i \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n f(\xi_i) \Delta x_i.$$

В данном случае абсциссы точек O и A равны соответственно:

$$x_0 = 0; x_n = 1.$$

С целью упрощения вычислений разделим промежуток $[0, 1]$ точками с абсциссами:

$$x_1 = \frac{1}{n}, x_2 = \frac{2}{n}, \dots,$$

$$x_{i-1} = \frac{i-1}{n}, x_i = \frac{i}{n}, \dots, x_{n-1} = \frac{n-1}{n}$$

на n равных частей (промежутков). В каждом из промежутков

$$[x_{i-1}, x_i] \quad (1 \leq i \leq n)$$

выберем произвольным образом по точке с абсциссой ξ_i , которая, следовательно, удовлетворяет условию:

$$x_{i-1} \leq \xi_i \leq x_i.$$

Вычислим площадь криволинейного треугольника OAA' , полагая ξ_i равным x_{i-1} . Таким образом,

$$\xi_1 = 0, \xi_2 = \frac{1}{n}, \xi_3 = \frac{2}{n}, \dots, \xi_n = \frac{n-1}{n}.$$

В каждой точке ξ_i (черт. 14) восставим перпендикуляр к оси Ox до пересечения со стороной OA криволинейного треугольника OAA' . Получим точки пересечения с координатами:

$$\xi_i, f(\xi_i) = \xi_i^2 \quad (1 \leq i \leq n),$$

так как кривая OA в нашей задаче является параболой и имеет уравнение $y = f(x) = x^2$. Проведем через точки

ξ_i , $f(\xi_i)$ прямые, параллельные оси Ox , и построим n прямоугольников (черт. 14) соответственно с основанием

$$\Delta x_i = x_i - x_{i-1} = \frac{i}{n} - \frac{i-1}{n} = \frac{1}{n},$$

высотой

$$f(\xi_i) = \xi_i^2 = \frac{(i-1)^2}{n^2}$$

и площадью

$$f(\xi_i) \Delta x_i = \frac{(i-1)^2}{n^2} \cdot \frac{1}{n}.$$

Сумма

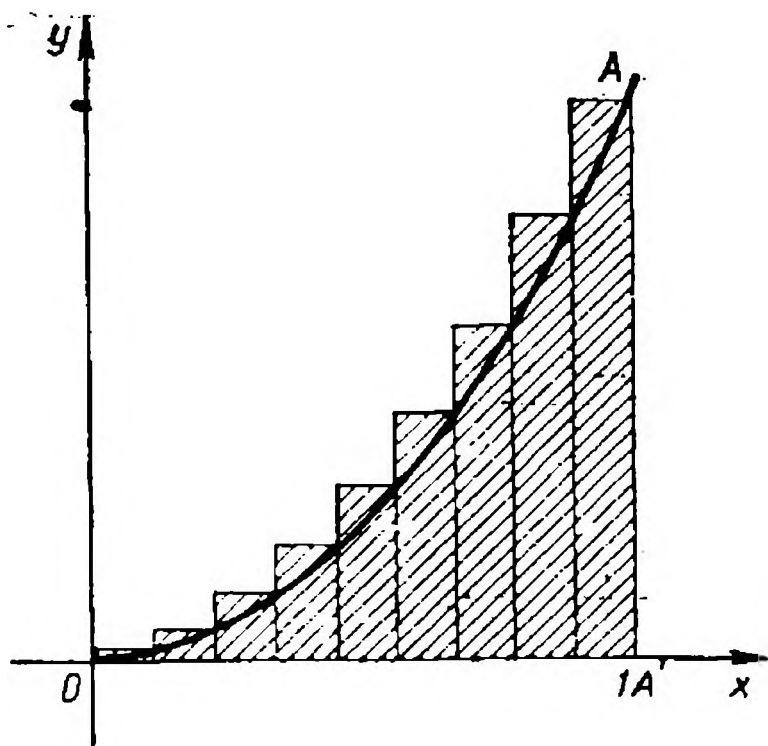
$$\begin{aligned} S_n &= \sum_{i=1}^n f(\xi_i) \Delta x_i = \sum_{i=1}^n \frac{(i-1)^2}{n^2} \cdot \frac{1}{n} = \\ &= 0 \cdot \frac{1}{n} + \frac{1^2}{n^2} \cdot \frac{1}{n} + \frac{2^2}{n^2} \cdot \frac{1}{n} + \dots + \frac{(n-1)^2}{n^2} \cdot \frac{1}{n} \quad (1) \end{aligned}$$

выражает площадь ступенчатого многоугольника, который содержится в криволинейном треугольнике OAA' (на черт. 14 этот многоугольник заштрихован). Чтобы найти площадь криволинейного треугольника OAA' , нужно вычислить предел суммы S_n , когда $\max \Delta x_i$ стремится к нулю. Однако мы разбили промежуток $[0, 1]$ на равные промежутки и каждое Δx_i равно $\frac{1}{n}$, следовательно, и наибольшее из чисел Δx_i равно $\frac{1}{n}$, т. е. $\max \Delta x_i = \frac{1}{n}$. Когда $\max \Delta x_i = \frac{1}{n}$ стремится к нулю, тогда n — число частей промежутка $[0, 1]$ — стремится к бесконечности. Значит, в силу формулы (2) § 1 площадь F криволинейного треугольника OAA' равна пределу суммы (1), когда n стремится к бесконечности:

$$\begin{aligned} F &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left[0 \cdot \frac{1}{n} + \frac{1^2}{n^2} \cdot \frac{1}{n} + \frac{2^2}{n^2} \cdot \frac{1}{n} + \right. \\ &\quad \left. + \dots + \frac{(n-1)^2}{n^2} \cdot \frac{1}{n} \right]. \end{aligned}$$

Чтобы вычислить этот предел, напомним сумму S_n в виде:

$$S_n = 0 \cdot \frac{1}{n} + \frac{1^2}{n^2} \cdot \frac{1}{n} + \frac{2^2}{n^2} \cdot \frac{1}{n} + \dots + \frac{(n-1)^2}{n^2} \cdot \frac{1}{n} =$$



Черт. 15.

$$\begin{aligned}
 &= \frac{1^2 + 2^2 + \dots + (n-1)^2}{n^3} = \\
 &= \frac{(n-1) \cdot n \cdot (2n-1)}{6} \cdot \frac{1}{n^3} *) = \\
 &= \frac{1}{6} \cdot \frac{n-1}{n} \cdot \frac{n}{n} \times \\
 &\times \frac{2n-1}{n} = \frac{1}{6} \left(1 - \frac{1}{n} \right) \times \\
 &\quad \times \left(2 - \frac{1}{n} \right).
 \end{aligned}$$

Таким образом,

$$\begin{aligned}
 F &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{6} \times \\
 &\times \left(1 - \frac{1}{n} \right) \cdot \left(2 - \frac{1}{n} \right),
 \end{aligned}$$

откуда найдем:

$$F = \frac{1}{3}.$$

Этот результат получен нами при определенном выборе точек ξ_i в каждом из промежутков $[x_{i-1}, x_i]$ (см. стр. 31).

Вычислим теперь площадь криволинейного треугольника OAA' , полагая ξ_i равным x_i :

$$\xi_1 = \frac{1}{n}, \quad \xi_2 = \frac{2}{n}, \quad \xi_3 = \frac{3}{n}, \quad \dots, \quad \xi_n = \frac{n}{n} = 1.$$

Как и выше, восставим в каждой точке ξ_i перпендикуляр к оси Ox до пересечения со стороной OA криволинейного треугольника OAA' . Через полученные таким образом точки пересечения проведем прямые, параллельные оси Ox , и построим n прямоугольников (черт. 15) соответственно

*) Здесь использована формула $1^2 + 2^2 + \dots + (n-1)^2 = \frac{(n-1)n(2n-1)}{6}$, которую можно вывести из равенства

$$(k+1)^3 - k^3 = 3k^2 + 3k + 1$$

если положить в нем последовательно k равным $1, 2, 3, \dots, (n-1)$ и сложить полученные равенства. В самом деле поступая так, придем к уравнению $n^3 - 1 = 3S_2 + 3S_1 + n - 1$, где $S_2 = 1^2 + 2^2 + \dots + (n-1)^2$ и $S_1 = 1 + 2 + \dots + (n-1) = \frac{n(n-1)}{2}$. Решив это уравнение относительно S_2 , получим искомую формулу.

с основанием $\Delta x_i = \frac{1}{n}$, высотой $f(\xi_i) =$

$$\xi_i^2 = \frac{i^2}{n^2} \quad \text{и площадью} \quad f(\xi_i) \cdot \Delta x_i = \frac{i^2}{n^2} \cdot \frac{1}{n}.$$

Сумма

$$\begin{aligned} S'_n &= \sum_{i=1}^n f(\xi_i) \Delta x_i = \sum_{i=1}^n \frac{i^2}{n^2} \cdot \frac{1}{n} = \\ &= \frac{1^2}{n^2} \cdot \frac{1}{n} + \frac{2^2}{n^2} \cdot \frac{1}{n} + \dots + \frac{n^2}{n^2} \cdot \frac{1}{n} \end{aligned} \quad (2)$$

выражает площадь ступенчатого многоугольника, в котором содержится криволинейный треугольник OAA' (на черт. 15 этот многоугольник заштрихован). Площадь F криволинейного треугольника OAA' мы найдем как предел суммы (2), когда n стремится к бесконечности:

$$F = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1^2}{n^2} \cdot \frac{1}{n} + \frac{2^2}{n^2} \cdot \frac{1}{n} + \dots + \frac{n^2}{n^2} \cdot \frac{1}{n} \right).$$

Чтобы вычислить этот предел, напомним сумму S'_n в виде:

$$\begin{aligned} S'_n &= \frac{1^2}{n^2} \cdot \frac{1}{n} + \frac{2^2}{n^2} \cdot \frac{1}{n} + \dots + \frac{n^2}{n^2} \cdot \frac{1}{n} = \\ &= \frac{1^2 + 2^2 + \dots + n^2}{n^3} = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} \cdot \frac{1}{n^3} *) = \\ &= \frac{1}{6} \cdot \frac{n}{n} \cdot \frac{n+1}{n} \cdot \frac{2n+1}{n} = \frac{1}{6} \cdot 1 \cdot \left(1 + \frac{1}{n}\right) \left(2 + \frac{1}{n}\right). \end{aligned}$$

Таким образом,

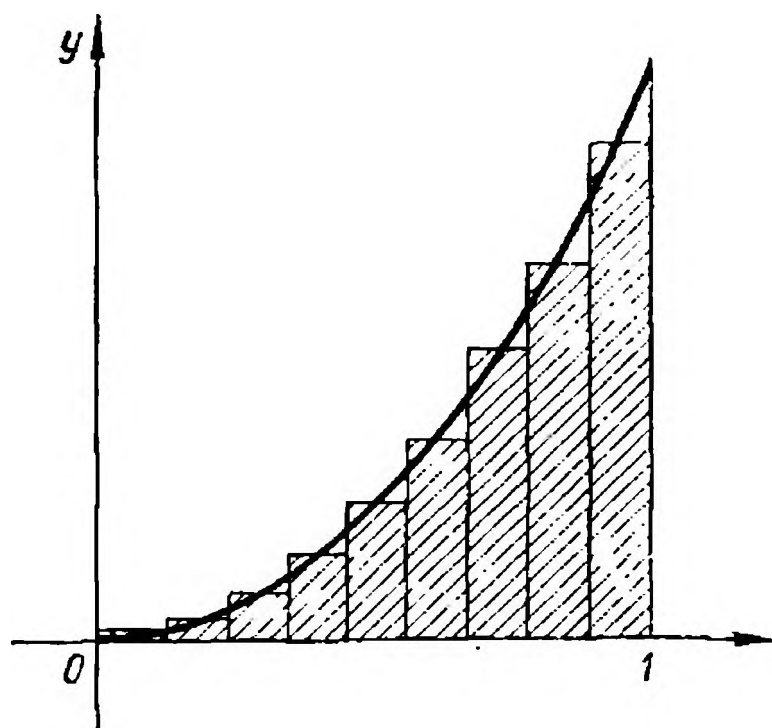
$$F = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{6} \left(1 + \frac{1}{n}\right) \left(2 + \frac{1}{n}\right),$$

откуда

$$F = \frac{1}{3}.$$

Видим, что этот результат совпадает с полученным раньше, т. е. число $\frac{1}{3}$ есть общий предел обеих сумм S_n и S'_n .

*) Здесь применена формула $1^2 + 2^2 + \dots + (n-1)^2 = \frac{(n-1)n(2n-1)}{6}$ (см. сноску на стр. 36), в которой вместо $n-1$ подставлено n .



Черт. 16.

Покажем, наконец, что, придавая ξ_i в каждом из промежутков $[x_{i-1}, x_i]$ ($1 \leq i \leq n$) любое другое значение, удовлетворяющее условию

$$x_{i-1} < \xi_i < x_i, \quad (3)$$

получим тот же результат.

Действительно, разделив промежуток $[0, 1]$ на n равных частей, построим, как и раньше, n прямоугольников (черт. 16) соответственно с основанием $\Delta x_i =$

$\frac{1}{n}$, высотой $f(\xi_i) = \xi_i^2$ и площадью $f(\xi_i) \Delta x_i = \xi_i^2 \cdot \frac{1}{n}$ ($1 \leq i \leq n$).

Сумма

$$\begin{aligned} \sigma_n &= \sum_{i=1}^n f(\xi_i) \Delta x_i = \sum_{i=1}^n \xi_i^2 \cdot \frac{1}{n} = \\ &= \xi_1^2 \cdot \frac{1}{n} + \xi_2^2 \cdot \frac{1}{n} + \dots + \xi_n^2 \cdot \frac{1}{n} \end{aligned}$$

выражает площадь заштрихованного на чертеже 16 многоугольника.

Из условия (3), принимая во внимание, что $x_{i-1} = \frac{i-1}{n}$ и $x_i = \frac{i}{n}$, получим:

$$\frac{i-1}{n} < \xi_i < \frac{i}{n},$$

$$\frac{(i-1)^2}{n^2} < \xi_i^2 < \frac{i^2}{n^2};$$

$$\frac{(i-1)^2}{n^2} \cdot \frac{1}{n} < \xi_i^2 \cdot \frac{1}{n} < \frac{i^2}{n^2} \cdot \frac{1}{n};$$

$$\sum_{i=1}^n \frac{(i-1)^2}{n^2} \cdot \frac{1}{n} < \sum_{i=1}^n \xi_i^2 \cdot \frac{1}{n} < \sum_{i=1}^n \frac{i^2}{n^2} \cdot \frac{1}{n};$$

т. е.

$$S_n < \sigma_n < S'_n.$$

Но

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \lim_{n \rightarrow \infty} S'_n = \frac{1}{3}.$$

Следовательно, и

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sigma_n = \frac{1}{3}.$$

Итак, $\lim_{\max \Delta x_i \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n f(\xi_i) \Delta x_i$ в случае криволинейного треугольника OAA' (черт. 14), ограниченного параболой $y = f(x) = x^2$, не зависит от выбора точки ξ_i в каждом из промежутков

$$[x_{i-1}, x_i] \quad (1 \leq i \leq n)$$

§ 3. Задача об определении пройденного пути по скорости

Пусть некоторая точка M движется по прямой с переменной скоростью $v = f(t)$.

Требуется найти путь, пройденный точкой M за промежуток времени от $t = a$ до $t = b$ ($a < b$). Предполагается, что функция $f(t)$ непрерывна на $[a, b]$.

Чтобы решить задачу, разделим промежуток времени $[a, b]$ на n малых частей точками t_1, t_2, \dots, t_{n-1} , которые удовлетворяют условию

$$a < t_1 < t_2 < \dots < t_{n-1} < b.$$

Для общности обозначений положим $a = t_0$ и $b = t_n$. В каждом из промежутков

$$[t_{i-1}, t_i] \quad (1 \leq i \leq n)$$

выберем произвольным образом по точке τ_i , каждая из которых, следовательно, удовлетворяет условию $t_{i-1} \leq \tau_i \leq t_i$.

Скорость $v = f(t)$ мало изменяется за промежуток времени $[t_{i-1}, t_i]$ ($1 \leq i \leq n$), длина которого $\Delta t_i = t_i - t_{i-1}$ достаточно мала *); будем считать ее на протяжении каждого

*) Так как функция $f(t)$ непрерывна в $[a, b]$, то достаточно малым приращениям аргумента соответствуют сколь угодно малые приращения функции (см. [Производная], стр. 10).

промежутка времени $[t_{i-1}, t_i]$ постоянной и равной скорости $f(\tau_i)$ точки M в момент τ_i из этого промежутка. Другими словами, мы допускаем, что точка M за промежуток времени от $t = t_{i-1}$ до $t = t_i$ движется равномерно. Но в таком случае пройденный ею путь за промежуток времени $[t_{i-1}, t_i]$ равен произведению скорости $[f(\tau_i)]$ на время (Δt_i) :

$$f(\tau_i) \cdot \Delta t_i \quad (1 \leq i \leq n).$$

Сумма

$$\sum_{i=1}^n f(\tau_i) \Delta t_i = f(\tau_1) \Delta t_1 + f(\tau_2) \Delta t_2 + \dots + f(\tau_n) \Delta t_n$$

выражает приближенно весь путь, пройденный точкой M за время от a до b .

Предел этой суммы, когда части $[t_{i-1}, t_i]$ в разбиении промежутка $[a, b]$ становятся сколь угодно малыми, представляет собой точное значение пути L , пройденного точкой M за промежуток времени $[a, b]$:

$$L = \lim_{\max \Delta t_i \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n f(\tau_i) \Delta t_i.$$

Таким образом, задача об определении пути точки, движущейся со скоростью $v = f(t)$, сводится к задаче

о вычислении предела суммы $\sum_{i=1}^n f(\tau_i) \Delta t_i$ при $\max \Delta t_i$, стремящемся к нулю.

§ 4. Интегральная сумма и определенный интеграл

Многие задачи геометрии, физики и других областей знания сводятся к вычислению пределов сумм вида

$$\sum_{i=1}^n f(\xi_i) \Delta x_i.$$

Необходимо поэтому заняться более подробным изучением пределов таких сумм.

С этой целью изложим следующим образом содержание § 1 — 3 настоящей главы, полностью отвлекаясь при этом

от соответствующей геометрической (физической) интерпретации.

Пусть функция $f(x)$ определена в промежутке $[a, b]$. Выполним следующие операции:

1) разделим промежуток $[a, b]$ на части точками

$$x_0 = a < x_1 < x_2 < \dots < x_{n-1} < x_n = b$$

и обозначим разности

$$x_i - x_{i-1} \quad (1 \leq i \leq n)$$

через Δx_i , а наибольшую из этих разностей через $\max \Delta x_i$;

2) в каждом из промежутков $[x_{i-1}, x_i]$ выберем произвольную точку ξ_i :

$$x_{i-1} \leq \xi_i \leq x_i \quad (1 \leq i \leq n)$$

и вычислим $f(\xi_i)$;

3) найдем произведение числа $f(\xi_i)$ и длины Δx_i соответствующего промежутка:

$$f(\xi_i) \cdot \Delta x_i;$$

4) составим сумму этих произведений:

$$S_n = \sum_{i=1}^n f(\xi_i) \Delta x_i = f(\xi_1) \Delta x_1 + f(\xi_2) \Delta x_2 + \dots + f(\xi_n) \Delta x_n.$$

Эту сумму назовем *интегральной суммой* функции $f(x)$ для промежутка $[a, b]$;

5) будем изменять разбиение промежутка $[a, b]$ таким образом, чтобы величина $\max \Delta x_i$ стремилась к нулю, т. е. будем делить промежуток $[a, b]$ на части все более и более мелкие. Если при этом существует предел

$$\lim_{\max \Delta x_i \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n f(\xi_i) \Delta x_i,$$

который не зависит от способа разбиения промежутка $[a, b]$ и от выбора точек ξ_i в промежутках $[x_{i-1}, x_i]$, то этот предел называют *определенным интегралом функции $f(x)$* , взятым по промежутку $[a, b]$, и обозначают символом

$$\int_a^b f(x) dx:$$

$$\int_a^b f(x) dx = \lim_{\max \Delta x_i \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n f(\xi_i) \Delta x_i. \quad (1)$$

Символ $\int_a^b f(x) dx$ читается: «интеграл от a до b $f(x) dx$ ».

Примечание 1. Если $a = b$, то длины промежутков $[x_{i-1}, x_i]$ равны нулю. В таком случае каждое из произведений $f(\xi_i) \Delta x_i$ равно нулю и интегральная сумма $S_n = \sum_{i=1}^n f(\xi_i) \Delta x_i$ также равна нулю: $S_n = 0$. Поэтому

$$\lim_{\max \Delta x_i \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n f(\xi_i) \Delta x_i = 0$$

и, следовательно,

$$\int_a^a f(x) dx = 0.$$

Примечание 2. Согласно определению площадь F криволинейной трапеции $A'ABV'$ (черт. 8), ограниченной осью Ox , графиком функции $y = f(x)$ и прямыми $x = a$ и $x = b$, равна пределу суммы $\sum_{i=1}^n f(\xi_i) \Delta x_i$, когда $\max \Delta x_i \rightarrow 0$. Значит, согласно определению (1) эта площадь равна интегралу от a до b от $f(x) dx$, т. е.

$$F = \int_a^b f(x) dx.$$

В частности, площадь F криволинейного треугольника OAA' (фиг. 14), ограниченного параболой $y = x^2$, осью Ox и прямой $x = 1$, равна интегралу от 0 до 1 от $x^2 dx$, т. е.

$$F = \int_0^1 x^2 dx.$$

Знак \int называется *знаком интегрирования*; число a называется *нижним пределом* интеграла, а число b — *верхним*; промежуток $[a, b]$ называется *промежутком интегрирования*; функция $f(x)$ называется *интегрируемой функцией*; выражение $f(x) dx$ называется *подынтегральным выражением* и, наконец, переменная x называется *переменной интегрирования*.

В подробных учебниках математического анализа доказывается, что если функция $f(x)$ непрерывна на $[a, b]$, то существует определенный интеграл $\int_a^b f(x) dx$.

§ 5. Вычисление определенного интеграла

1. Свойство определенного интеграла. Вычисление определенного интеграла $\int_a^b f(x) dx$ прямым методом, т. е.

путем определения предела интегральной суммы $\sum_{i=1}^n f(\xi_i) \Delta x_i$

при $\max \Delta x_i \rightarrow 0$, применяется лишь в простейших случаях, так как непосредственное вычисление предела интегральной суммы — задача чрезвычайно трудная. Поэтому возникла необходимость найти другой более легкий путь вычисления определенного интеграла. Этот путь был найден. Переходим ниже к его рассмотрению.

Покажем, прежде всего, что определенный интеграл обладает весьма важным свойством.

Пусть функция $y = f(x)$ непрерывна на $[a, b]$ и ее график совпадает на этом промежутке со стороной AB криволинейной трапеции $A'ABV'$ (черт. 17). Допустим, что абсцисса x точки C' — переменная величина. В таком случае с изменением величины x в промежутке $[a, b]$ изменяется и положение стороны CC' трапеции $A'ACC'$ и, следовательно, ее площадь возрастает или убывает. Другими словами, площадь криволинейной трапеции $A'ACC'$ есть функция переменной x , определяющей положение стороны CC' этой трапеции. Обозначим площадь криволинейной трапеции $A'ACC'$ как функцию x следующим образом:

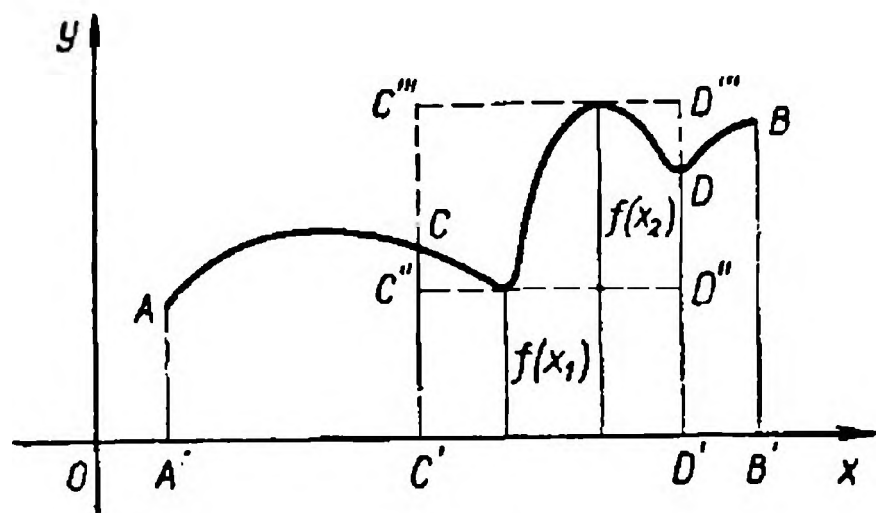
$$\text{Площ. } A'ACC' = F(x).$$

Из сказанного в § 4 (примечание 2) следует, что площадь трапеции $A'ACC'$ (черт. 17) равна определенному интегралу от a до x от $f(x) dx$:

$$F(x) = \int_a^x f(x) dx. \quad (1)$$

Докажем, что производная $F'(x)$ функции $F(x)$ равна $f(x)$, т. е. докажем следующую теорему:

Производная определенного интеграла, рассматриваемого как функция его верхнего предела, равна интегрируемой функции.



Черт. 17.

Чтобы доказать эту теорему, необходимо вычислить производную функции $F(x)$. Общая схема для вычисления производной нам известна *): придадим аргументу x приращение Δx и вычислим соответствующее приращение $\Delta F(x)$ функции; составим за-

тем отношение $\frac{\Delta F(x)}{\Delta x}$ этих приращений и перейдем к отысканию предела этого отношения при Δx , стремящемся к нулю. Этот предел (если он существует) называется, как мы знаем, производной функции $F(x)$.

Следуя этой схеме:

1) выберем допустимое значение аргумента x (абсциссы точки C'); этому значению аргумента соответствует значение $F(x)$ функции (площадь криволинейной трапеции $A'ACC'$);

2) заменим в выражении $F(x)$ значение x аргумента значением $x + \Delta x$ **) (абсцисса точки D'); получим значение $F(x + \Delta x)$ функции (площадь криволинейной трапеции $A'ADD'$);

3) из конечного значения $F(x + \Delta x)$ функции вычтем ее начальное значение $F(x)$; получим приращение функции $\Delta F(x) = F(x + \Delta x) - F(x)$ (площадь криволинейной трапеции $C'CDD'$).

Чтобы найти величину этого приращения площади трапеции, поступим следующим образом:

найдем на промежутке $[x, x + \Delta x]$ такую точку, в которой функция $y = f(x)$ имеет наименьшее значение. Пусть $f(x_1)$ есть это наименьшее значение, где $x \leq x_1 \leq x + \Delta x$; построим прямоугольник $C'C''D''D'$ с основанием Δx , высотой $f(x_1)$ и площадью $f(x_1)\Delta x$. Найдем затем на промежутке $[x, x + \Delta x]$ такую точку, в которой функция $y = f(x)$ имеет наибольшее значение. Пусть $f(x_2)$ есть это наибольшее значение, где $x \leq x_2 \leq x + \Delta x$; построим прямо-

*) См. книгу [Производная], стр. 43.

**) Предполагаем $\Delta x > 0$.

угольник $C'C''D''D'$ с основанием Δx , высотой $f(x_2)$ и площадью $f(x_2) \Delta x$.

Сравнивая площадь $\Delta F(x)$ трапеции $C'CDD'$ с площадями $f(x_1) \Delta x$ и $f(x_2) \Delta x$ прямоугольников $C'C''D''D'$ и $C'C'''D'''D'$, видим, что имеет место соотношение

$$f(x_1) \Delta x < \Delta F(x) < f(x_2) \Delta x; \quad (2)$$

4) чтобы найти отношение приращений $\Delta F(x)$ и Δx , разделим каждую часть неравенств (2) на положительное *) Δx , получим:

$$f(x_1) < \frac{\Delta F(x)}{\Delta x} < f(x_2); \quad (3)$$

5) найдем, наконец, предел отношения $\frac{\Delta F(x)}{\Delta x}$ при Δx , стремящемся к нулю. Но при Δx , стремящемся к нулю, промежуток $[x, x + \Delta x]$ становится все более и более малым и точки x_1 и x_2 приближаются к точке x , а $f(x_1)$ и $f(x_2)$ стремятся к $f(x)$, т. е. имеем:

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} x_1 = x \text{ и } \lim_{x_1 \rightarrow x} f(x_1) = f(x);$$

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} x_2 = x \text{ и } \lim_{x_2 \rightarrow x} f(x_2) = f(x).$$

Что же касается отношения $\frac{\Delta F(x)}{\Delta x}$, то оно в пределе равно производной функции $F(x)$:

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta F(x)}{\Delta x} = F'(x).$$

Так как $f(x_1)$ и $f(x_2)$ имеют один и тот же предел $f(x)$, когда Δx стремится к нулю, а отношение $\frac{\Delta F(x)}{\Delta x}$ неизменно заключено между $f(x_1)$ и $f(x_2)$ (см. неравенства 3), то отсюда следует, что предел $\frac{\Delta F(x)}{\Delta x}$ или $F'(x)$ равен общему пределу $f(x)$ величин $f(x_1)$ и $f(x_2)$, т. е.

$$F'(x) = f(x).$$

Таким образом теорема доказана.

2. Первообразная функция. Функция $F(x)$, производная которой равна $f(x)$ (в некотором промежутке I), назы-

*) В случае $\Delta x < 0$, рассуждая аналогично, приходим к тем же неравенствам (3).

вается первообразной по отношению к функции $f(x)$ (в промежутке I).

Если $F(x)$ служит первообразной для $f(x)$, т. е.

$$F'(x) = f(x),$$

то функция $F(x) + C$ при любом постоянном C также является первообразной для $f(x)$, так как имеем*):

$$[F(x) + C]' = [F(x)]' + [C]' = f(x).$$

Например, функции

$$F_1(x) = \frac{x^3}{3}; F_2(x) = \frac{x^3}{3} + 5; F_3(x) = \frac{x^3}{3} - 0,7$$

и вообще функция

$$F(x) = \frac{x^3}{3} + C,$$

где C — произвольная постоянная, все являются первообразными для функции $f(x) = x^2$.

Обратно: любая функция, первообразная для $f(x)$, может быть представлена в виде $F(x) + C$.

Действительно, пусть

$$\Phi'(x) = f(x) \text{ и } F'(x) = f(x),$$

тогда будем иметь:

$$\Phi'(x) = F'(x)$$

и, следовательно (глава I, § 4, п. 2, стр. 26)

$$\Phi(x) - F(x) = C,$$

т. е.

$$\Phi(x) = F(x) + C.$$

3. Формула Ньютона — Лейбница. Пользуясь свойством определенного интеграла, доказанным в п. I, можно задачу об его вычислении заменить отысканием первообразной $F(x)$ для интегрируемой функции $f(x)$.

Действительно, предположим, что выполняются все условия теоремы п. I, т. е.

1) функция $y = f(x)$ непрерывна на $[a, b]$ и ее график есть кривая AB (черт. 18);

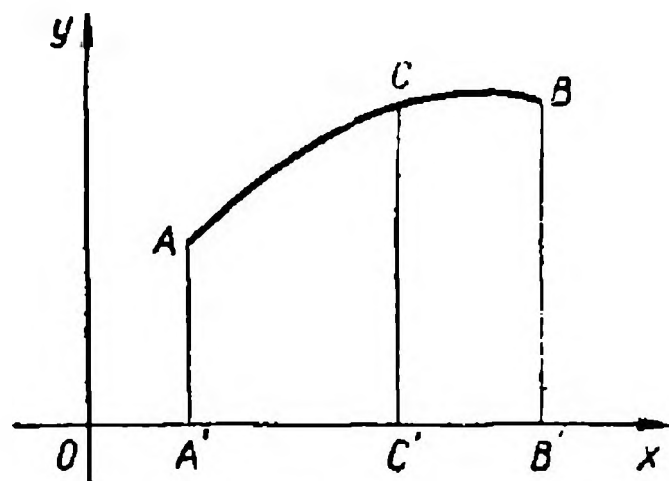
2) абсцисса x точки C' (черт. 18) — переменная вели-

*) Производная постоянной равна нулю.

чина на $[a, b]$; точки A' и B' имеют соответственно абсциссы a, b ;

3) площадь криволинейной трапеции $A'ACC'$ равна $F(x)$ и, следовательно,

$$F(x) = \int_a^x f(x) dx.$$



Черт. 18.

Ставим себе задачу вычи-

слить площадь трапеции $A'ABV'$, т. е. $\int_a^b f(x) dx$.

Из доказанного выше мы знаем, что производная $F'(x)$ функции $F(x)$ равна интегрируемой функции $f(x)$. Другими словами, функция $F(x)$ является первообразной для $f(x)$. Но если функция $f(x)$ имеет хотя бы одну первообразную, то она имеет бесчисленное множество первообразных. Пусть функция $\Phi(x)$ — любая первообразная для $f(x)$. В таком случае (см. п. 2)

$$\Phi(x) = F(x) + C. \quad (5)$$

Положив в равенстве (5) $x = a$, будем иметь:

$$\Phi(a) = F(a) + C.$$

Но из (4) следует *):

$$F(a) = \int_a^a f(x) dx = 0,$$

следовательно,

$$\Phi(a) = C.$$

Положив в равенстве (5) $x = b$, будем иметь:

$$\Phi(b) = F(b) + C.$$

Принимая во внимание, что из (4) следует

$$F(b) = \int_a^b f(x) dx,$$

*) См. (2) § 4.

Получим:

$$\Phi(b) = \int_a^b f(x) dx + C,$$

откуда

$$\int_a^b f(x) dx = \Phi(b) - C = \Phi(b) - \Phi(a),$$

т. е.

$$\int_a^b f(x) dx = \Phi(b) - \Phi(a).$$

Таким образом, для вычисления определенного интеграла $\int_a^b f(x) dx$ имеем следующее правило:

1) находим для интегрируемой функции $f(x)$ какую-нибудь из ее первообразных $\Phi(x)$;

2) вычисляем значение первообразной функции $\Phi(x)$ при $x = b$, т. е. $\Phi(b)$;

3) вычисляем значение первообразной функции $\Phi(x)$ при $x = a$, т. е. $\Phi(a)$;

4) из $\Phi(b)$ вычитаем $\Phi(a)$. Разность $\Phi(b) - \Phi(a)$ изображают символом $[\Phi(x)]_a^b$ (двойная подстановка от a до b) и пишут:

$$[\Phi(x)]_a^b = \Phi(b) - \Phi(a);$$

5) записываем полученный результат:

$$\int_a^b f(x) dx = \Phi(b) - \Phi(a).$$

Пример. Вычислим, пользуясь формулой Ньютона — Лейбница площадь криволинейного треугольника OAA' (черт. 14), ограниченного графиком функции $y = x^2$, осью Ox и прямой $x = 1$.

Решение. В данном примере интегрируемая функция $f(x) = x^2$, а одна из ее первообразных $F(x) = \frac{x^3}{3}$ (действительно, $\left(\frac{x^3}{3}\right)' = x^2$); точки O и A' имеют соответственно абсциссы 0 и 1. Следовательно,

$$\text{площадь } OAA' = \int_0^1 x^2 dx = \left[\frac{x^3}{3} \right]_0^1 = \frac{1}{3} - 0 = \frac{1}{3}.$$

Мы видим, что этот результат совпадает с результатом, полученным нами в § 2 путем непосредственного вычисления предела суммы $\sum_{i=1}^n f(\xi_i) \Delta x_i$ при $\max \Delta x_i$, стремящемся к нулю.

§ 6. Первообразная функция

1. Первообразные элементарных функций. В предыдущем параграфе мы ввели понятие первообразной функции и выяснили, что если функция $F(x)$ есть первообразная по отношению к функции $f(x)$ *), то и функция $F(x) + C$, где C — произвольная постоянная, также является первообразной функции $f(x)$; обратно, любая первообразная для функции $f(x)$ может быть представлена в виде $F(x) + C$.

Множество $F(x) + C$ всех первообразных функций $f(x)$ называют *неопределенным интегралом* функции $f(x)$ и обозначают символом $\int f(x) dx$:

$$\int f(x) dx = F(x) + C. \quad (1)$$

Символ $\int f(x) dx$ читается: «интеграл от $f(x) dx$ ».

Разыскание для функции $f(x)$ всех ее первообразных называется интегрированием функции $f(x)$.

В равенстве (1) функцию $f(x)$ называют *подынтегральной функцией*, а постоянную C — *постоянной интегрирования*.

По самому определению равенства:

$$F'(x) = f(x) \text{ и } \int f(x) dx = F(x) + C \quad (2)$$

полностью равносильны. Таким образом, любая формула устанавливающая, что производная некоторой функции $F(x)$ равна $f(x)$, непосредственно приводит к формуле для интегрирования функции $f(x)$. Поэтому из формул для производных элементарных функций (см. таблицу на стр. 23) можно составить следующую таблицу интегралов (первообразных):

*) Здесь и в дальнейшем предполагается, что рассматриваемые нами функции непрерывны в некотором промежутке.

- 1) $(C)' = 0$;
- 2) $(x)' = 1$;
- 3) $(ax)' = a$;
- 4) $\left(\frac{x^{m+1}}{m+1}\right)' = x^m (m \neq -1, x \geq 0)$;
- 5) $\left(a \frac{x^{m+1}}{m+1}\right)' = ax^m$
($m \neq -1, x \geq 0$);
- 6) $\left(a_0 \frac{x^{n+1}}{n+1} + a_1 \frac{x^n}{n} + \dots + a_n x\right)' = a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \dots + a_n$;
- 7) $\begin{cases} (\ln x)' = \frac{1}{x} (x > 0), \\ [\ln(-x)]' = \frac{1}{x} (x < 0); \end{cases}$
- 8) $\begin{cases} \left(\frac{a^x}{\ln a}\right)' = a^x, \\ (e^x)' = e^x; \end{cases}$
- 9) $(-\cos x)' = \sin x$;
- 10) $(\sin x)' = \cos x$;
- 11) $(\operatorname{tg} x)' = \frac{1}{\cos^2 x}$;
- 12) $(-\operatorname{ctg} x)' = \frac{1}{\sin^2 x}$;
- 13) $\begin{cases} (\operatorname{arc} \sin x)' \\ (-\operatorname{arc} \cos x)' \end{cases} = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$;
- 14) $\begin{cases} (\operatorname{arc} \operatorname{tg} x)' \\ (-\operatorname{arc} \operatorname{ctg} x)' \end{cases} = \frac{1}{1+x^2}$;

$$\int 0 \cdot dx = C.$$

$$\int 1 \, dx = \int dx = x + C.$$

$$\int a \, dx = ax + C.$$

$$\int x^m \, dx = \frac{x^{m+1}}{m+1} + C.$$

$$\int ax^m \, dx = a \frac{x^{m+1}}{m+1} + C.$$

$$\int (a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \dots + a_n) \, dx = a_0 \frac{x^{n+1}}{n+1} + a_1 \frac{x^n}{n} + \dots + a_n x + C.$$

$$\int \frac{1}{x} \, dx = \int \frac{da}{x} = \ln |x| + C.$$

$$\int a^x \, dx = \frac{a^x}{\ln a} + C.$$

$$\int e^x \, dx = e^x + C.$$

$$\int \sin x \, dx = -\cos x + C.$$

$$\int \cos x \, dx = \sin x + C.$$

$$\int \frac{1}{\cos^2 x} \, dx = \int \frac{d \operatorname{tg} x}{\cos^2 x} = \operatorname{tg} x + C.$$

$$\int \frac{1}{\sin^2 x} \, dx = \int \frac{d \operatorname{ctg} x}{\sin^2 x} = -\operatorname{ctg} x + C.$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \, dx = \begin{cases} \operatorname{arc} \sin x + C, \\ -\operatorname{arc} \cos x + C. \end{cases}$$

$$\int \frac{1}{1+x^2} \, dx = \begin{cases} \operatorname{arc} \operatorname{tg} x + C, \\ -\operatorname{arc} \operatorname{ctg} x + C. \end{cases}$$

2. Свойства неопределенного интеграла. Из равносильных равенств

$$F'(x) = f(x) \text{ и } \int f(x) \, dx = F(x) + C \quad (2)$$

следует:

$$[\int f(x) \, dx]' = [F(x) + C]' = f(x),$$

т. е. производная неопределенного интеграла равна подынтегральной функции.

Из равенств (2) выводим также следующее правило:

чтобы проверить справедливость равенства

$$\int f(x) dx = F(x) + C, \quad (3)$$

нужно найти производную его правой части. Если в результате получим подынтегральную функцию левой части, то, значит, равенство (3) верно.

Сказанное выше используем при доказательстве следующих двух свойств неопределенного интеграла.

Свойство I. Постоянный множитель можно вынести за знак интеграла:

$$\int af(x) dx = a \int f(x) dx \quad (a \neq 0). \quad (4)$$

Действительно, найдем производную правой части равенства (4):

$$[a \int f(x) dx]' = a [\int f(x) dx]' = a f(x).$$

Видим, что эта производная равна подынтегральной функции левой части. Следовательно, равенство (4) верно.

Свойство II. Интеграл от суммы функций равен сумме интегралов этих функций. Например,

$$\int [f(x) + g(x) - h(x)] dx = \int f(x) dx + \int g(x) dx - \int h(x) dx. \quad (5)$$

Действительно,

$$\begin{aligned} & [\int f(x) dx + \int g(x) dx - \int h(x) dx]' = \\ &= [\int f(x) dx]' + [\int g(x) dx]' - [\int h(x) dx]' = \\ &= f(x) + g(x) - h(x). \end{aligned}$$

Видим, что производная правой части равенства (5) совпадает с подынтегральной функцией левой части. Следовательно, равенство (5) верно. Легко убедиться, что это свойство справедливо и в случае суммы n функций.

3. Постоянная интегрирования. Напомним, что слагаемое C , входящее в правую часть равенства

$$\int f(x) dx = F(x) + C,$$

является произвольной постоянной. В отношении употребления этой постоянной необходимо сделать следующие замечания.

Замечание 1. Если C_1 и C_2 — произвольные постоянные, то сумма их $C_1 + C_2$ также является произвольной постоян-

ной и поэтому может быть записана в виде одной произвольной постоянной C :

$$C_1 + C_2 = C.$$

То же можно сказать и относительно суммы 3-х, 4-х... , n произвольных постоянных.

Принимая во внимание это замечание, можно доказать свойство II неопределенного интеграла также и следующим образом. Из равенств

$$\begin{aligned} \int f(x) dx &= F(x) + C_1; \quad \int g(x) dx = G(x) + C_2; \\ \int h(x) dx &= H(x) + C_3, \end{aligned}$$

$$\text{где } F'(x) = f(x); \quad G'(x) = g(x); \quad H'(x) = h(x),$$

выводим:

$$\begin{aligned} \int f(x) dx + \int g(x) dx - \int h(x) dx &= F(x) + \\ &+ G(x) - H(x) + C_1 + C_2 - C_3, \end{aligned}$$

или

$$\begin{aligned} \int f(x) dx + \int g(x) dx - \int h(x) dx &= F(x) + \\ &+ G(x) - H(x) + C. \end{aligned} \quad (6)$$

Но

$$\begin{aligned} [F(x) + G(x) - H(x)]' &= F'(x) + G'(x) - H'(x) = \\ &= f(x) + g(x) - h(x), \end{aligned}$$

т. е. функция $[F(x) + G(x) - H(x)]$ есть первообразная для функции $[f(x) + g(x) - h(x)]$. Следовательно,

$$\int [f(x) + g(x) - h(x)] dx = F(x) + G(x) - H(x) + C. \quad (7)$$

Из (7) и (6) имеем:

$$\begin{aligned} \int [f(x) + g(x) - h(x)] dx &= \int f(x) dx + \\ &+ \int g(x) dx - \int h(x) dx. \end{aligned}$$

Замечание 2. Если C_1 — произвольная постоянная, то произведение aC_1 , где $a \neq 0$, также является произвольной постоянной и поэтому может быть записано в виде

$$aC_1 = C,$$

где C — произвольная постоянная.

Принимая во внимание это замечание, свойство I не-

определенного интеграла можно доказать также и следующим образом. Из равенства

$$f(x) dx = F(x) + C_1,$$

где $F'(x) = f(x)$, выводим:

$$a \int f(x) dx = aF(x) + aC_1, \quad (a \neq 0)$$

или

$$a \int f(x) dx = aF(x) + C. \quad (8)$$

Но

$$[aF(x)]' = aF'(x) = af(x),$$

т. е. функция $aF(x)$ есть первообразная для функции $af(x)$. Поэтому

$$\int af(x) dx = aF(x) + C. \quad (9)$$

Из (9) и (8) выводим:

$$\int af(x) dx = a \int f(x) dx \quad (a \neq 0).$$

4. Примеры применения формул 1 — 14.

$$1. \int 3x^2 dx = x^3 + C.$$

$$2. \int \frac{1}{x^2} dx = \int x^{-2} dx = -x^{-1} + C = -\frac{1}{x} + C.$$

$$3. \int \frac{1}{x^3} dx = \int x^{-3} dx = \frac{x^{-2}}{-2} + C = -\frac{1}{2x^2} + C.$$

$$4. \int (5x + 3) dx = 5 \cdot \frac{x^2}{2} + 3x + C.$$

$$5. \int (3x^3 - x - 1) dx = 3 \cdot \frac{x^4}{4} - \frac{x^2}{2} + C.$$

$$6. \int \frac{1}{\sqrt{x}} dx = \int x^{-\frac{1}{2}} dx = \frac{x^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}} + C = 2\sqrt{x} + C.$$

$$7. \int 3 \sqrt[3]{x^2} dx = \int 3x^{\frac{2}{3}} dx = 3 \cdot \frac{x^{\frac{5}{3}}}{\frac{5}{3}} + C = \frac{9}{5} x \sqrt[3]{x^2} + C.$$

$$8. \int \frac{dx}{\sqrt[3]{x^2}} = \int x^{-\frac{2}{3}} dx = \frac{x^{\frac{1}{3}}}{\frac{1}{3}} + C = 3 \sqrt[3]{x} + C.$$

$$9. \int \frac{3x+5}{x} dx = \int \left(3 + \frac{5}{x}\right) dx = \int 3dx + \int \frac{5}{x} dx = 3x + 5 \ln |x| + C.$$

$$10. \int \left(2 \cos x - \frac{1}{1+x^2} + \frac{3}{\sqrt{x}}\right) dx = \int 2 \cos x dx - \int \frac{dx}{1+x^2} + \int \frac{3dx}{\sqrt{x}} = 2 \sin x - \arctg x + 6 \sqrt{x} + C.$$

5. Интегрирование по частям. Допустим, что $u = f(x)$ и $v = g(x)$ — непрерывные функции, имеющие производные в промежутке $[a, b]$.

Интегрируя обе части равенства

$$uv' + vu' = (uv)',$$

получим:

$$\int (uv' + vu') dx = uv + C;$$

$$\int uv' dx + \int vu' dx = uv + C,$$

откуда, учитывая, что $v'dx = dv$ и $u'dx = du$, найдем:

$$\int u dv + \int v du = uv + C,$$

или

$$\int u dv = uv - \int v du. \quad (10)$$

В этой формуле предполагается, что постоянная интегрирования включена в символ $\int v du$. С помощью формулы (10) вычисление интеграла $\int u dv$ сводится к вычислению интеграла $\int v du$, который возможно берется легче. Такой способ называется *интегрированием по частям*.

Примеры.

1) Найдем $\int \ln x dx$.

Решение. Положим $\ln x = u$ и $x = v$, откуда $dx = dv$.

Применяя формулу (10) и учитывая, что $d \ln x = \frac{1}{x} dx$, получим:

$$\begin{aligned} \int \ln x dx &= x \ln x - \int x \cdot \frac{1}{x} dx = x \ln x - \int dx = \\ &= x \ln x - x + C. \end{aligned}$$

2) Найти $\int x e^x dx$.

Решение. Положим $x = u$ и $e^x = v$, откуда $e^x dx = dv$.

Применим интегрирование по частям:

$$\int x e^x dx = x e^x - \int e^x dx = x e^x - e^x + C.$$

3) Найти $\int x \sin x dx$.

Решение. Положим $x = u$ и $-\cos x = v$, откуда $\sin x dx = dv$. Применим формулу (10):

$$\begin{aligned}\int x \sin x dx &= -x \cos x - \int (-\cos x) dx = \\ &= -x \cos x + \int \cos x dx = -x \cos x + \sin x + C.\end{aligned}$$

4) Найти $\int \cos^2 x dx$.

Решение. Положим $\cos x = u$ и $\sin x = v$, откуда

$$-\sin x dx = du \text{ и } \cos x dx = dv.$$

Применим формулу (10):

$$\begin{aligned}\int \cos^2 x dx &= \sin x \cos x - \int \sin x (-\sin x) dx = \\ &= \sin x \cos x + \int \sin^2 x dx = \\ &= \sin x \cos x + \int (1 - \cos^2 x) dx = \\ &= \sin x \cos x + \int dx - \int \cos^2 x dx.\end{aligned}$$

Отсюда

$$2 \int \cos^2 x dx = \sin x \cos x + \int dx,$$

или

$$\int \cos^2 x dx = \frac{1}{2} (x + \sin x \cos x) + C^*).$$

6. Интегрирование подстановкой. 1) Допустим, что требуется найти $\int \sin(x + a) dx$. Путем замены переменной

$$x + a = t,$$

откуда

$$dt = d(x + a) = dx,$$

получим под знаком интеграла функцию, первообразную которой мы знаем. Действительно,

$$\begin{aligned}\int \sin(x + a) dx &= \int \sin t dt = -\cos t + C = \\ &= -\cos(x + a) + C.\end{aligned}$$

2) Найти $\int (3x + 5)^{10} dx$.

Путем подстановки (замены переменной)

$$3x + 5 = t,$$

откуда

*) Этот же результат можно получить и иным путем (см упражнение 3, стр. 56).

$$dt = d(3x + 5) = 3dx; \quad dx = \frac{1}{3} dt,$$

получим:

$$\begin{aligned} \int (3x + 5)^{10} dx &= \int t^{10} \cdot \frac{1}{3} dt = \frac{1}{3} \int t^{10} dt = \\ &= \frac{1}{3} \cdot \frac{t^{11}}{11} + C = \frac{1}{33} (3x + 5)^{11} + C. \end{aligned}$$

3) Найти $\int \cos^2 x dx$.

Имеем:

$$\cos^2 x = \frac{1 + \cos 2x}{2},$$

поэтому

$$\int \cos^2 x dx = \int \frac{1 + \cos 2x}{2} dx = \frac{1}{2} (\int dx + \int \cos 2x dx).$$

Чтобы вычислить последний интеграл, положим $2x = t$.
Отсюда

$$2dx = dt; \quad dx = \frac{1}{2} dt.$$

Следовательно,

$$\begin{aligned} \int \cos 2x dx &= \int \cos t \cdot \frac{1}{2} dt = \frac{1}{2} \int \cos t dt = \\ &= \frac{1}{2} \sin t + C_1 = \frac{1}{2} \sin 2x + C_1 = \\ &= \sin x \cos x + C_1. \end{aligned}$$

Таким образом,

$$\begin{aligned} \int \cos^2 x dx &= \frac{1}{2} (\int dx + \int \cos 2x dx) = \\ &= \frac{1}{2} (x + C_2 + \sin x \cos x + C_1) = \\ &= \frac{1}{2} (x + \sin x \cos x) + C, \end{aligned}$$

где $C = \frac{1}{2} (C_1 + C_2)$.

Итак,

$$\int \cos^2 x dx = \frac{1}{2} (x + \sin x \cos x) + C,$$

т. е. мы получили тот же результат, что и в упражнении 4, стр. 56.

4) Найти $\int \operatorname{tg} x dx = \int \frac{\sin x dx}{\cos x}$.

Так как $\sin x dx = -d \cos x$, имеем:

$$\int \operatorname{tg} x dx = - \int \frac{d \cos x}{\cos x},$$

Положив $\cos x = u$, найдем:

$$\begin{aligned} \int \operatorname{tg} x dx &= - \int \frac{d \cos x}{\cos x} = - \int \frac{du}{u} = - \ln |u| + C = \\ &= - \ln |\cos x| + C. \end{aligned}$$

5. Найти $\int \operatorname{ctg} x dx$.

Аналогично предыдущему, полагая $\sin x = u$, найдем:

$$\begin{aligned} \int \operatorname{ctg} x dx &= \int \frac{\cos x}{\sin x} dx = \int \frac{d \sin x}{\sin x} = \\ &= \int \frac{du}{u} = \ln |u| + C = \ln |\sin x| + C. \end{aligned}$$

6. Найти $\int \frac{x dx}{1+x}$.

Положив $1+x=t$, имеем:

$$x = t - 1, \quad dx = dt.$$

Следовательно,

$$\begin{aligned} \int \frac{x dx}{1+x} &= \int \frac{t-1}{t} dt = \int \left(1 - \frac{1}{t}\right) dt = \\ &= \int dt - \int \frac{dt}{t} = t - \ln |t| + C_1 = \\ &= 1+x - \ln |1+x| + C_1 = x - \ln |1+x| + \\ &\quad + (1+C_1) = x - \ln |1+x| + C, \end{aligned}$$

где $C = 1 + C_1$.

7. Найти $\int \frac{x dx}{1+\sqrt{1+x^2}}$.

Положив $\sqrt{1+x^2} = u$, имеем:

$$du = \frac{x dx}{\sqrt{1+x^2}} = \frac{x dx}{u} \text{ и } x dx = u du.$$

Следовательно,

$$\int \frac{x dx}{1 + \sqrt{1 + x^2}} = \int \frac{u du^{**})}{1 + u} = u - \ln |1 + u| + C = \\ = \sqrt{1 + x^2} - \ln(1 + \sqrt{1 + x^2}) + C.$$

8. Найти $\int \sqrt{1 - x^2} dx$.

Положив $x = \sin t$, $-\frac{\pi}{2} \leq t \leq \frac{\pi}{2}$, имеем: $dx = \cos t dt$.
Следовательно,

$$\int \sqrt{1 - x^2} dx = \int \cos t \cos t dt = \int \cos^2 t dt^{**}) = \\ = \frac{1}{2} (t + \sin t \cos t) + C = \\ = \frac{1}{2} (\arcsin x + x \sqrt{1 - x^2}) + C.$$

9. Найти $\int \sqrt{a^2 - x^2} dx$, $a > 0$.

Положив $x = au$, имеем:

$$dx = a du \text{ и } u = \frac{x}{a}.$$

Следовательно,

$$\int \sqrt{a^2 - x^2} dx = \int \sqrt{a^2 - a^2 u^2} a du = \int a^2 \sqrt{1 - u^2} du = \\ = a^2 \int \sqrt{1 - u^2} du = a^2 \cdot \frac{1}{2} (\arcsin u + u \sqrt{1 - u^2}) + C = \\ = a^2 \cdot \frac{1}{2} \left(\arcsin \frac{x}{a} + \frac{x}{a} \sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2}} \right) + C = \\ = \frac{1}{2} \left(a^2 \arcsin \frac{x}{a} + x \sqrt{a^2 - x^2} \right) + C.$$

Упражнения.

- | | |
|----------------------------------|---|
| 1. $\int x^6 dx$. | Ответ: $\frac{1}{6} x^6 + C$. |
| 2. $\int 4x^3 dx$. | » $x^4 + C$. |
| 3. $\int (mx^2 + nx + p) dx$. | » $\frac{m}{3} x^3 + \frac{n}{2} x^2 +$
$+ px + C$. |
| 4. $\int \frac{dx}{2\sqrt{x}}$. | » $\sqrt{x} + C$. |

*) См. пример 6, стр. 57.

**) См. пример 4, стр. 55.

5. $\int \frac{dx}{x \pm a}.$
6. $\int \frac{xdx}{1+x^2}.$
7. $\int \frac{xdx}{x^2 \pm a^2}.$
8. $\int \frac{dx}{\sqrt{a+bx}}.$
9. $\int \frac{xdx}{\sqrt{a^2-x^2}}.$
10. $\int \frac{xdx}{\sqrt{a^2+x^2}}.$
11. $\int \frac{xdx}{\sqrt{x^2-a^2}}.$
12. $\int \frac{dx}{a^2+x^2}.$
13. $\int \frac{1}{\sqrt{a^2-x^2}} dx.$
14. $\int \sin kx dx.$
15. $\int \cos kx dx.$
16. $\int \frac{dx}{\sin x \cos x}$
17. $\int \frac{dx}{\sin x}.$
18. $\int \frac{dx}{\cos x}.$
19. $\int e^{kx} dx.$
20. $\int \frac{e^x dx}{e^x + 1}.$

Ответ: $\ln(x \pm a) + C.$

» $\frac{1}{2} \ln(1+x^2) + C.$

» $\frac{1}{2} \ln(x^2 \pm a^2) + C.$

» $\frac{2}{b} \sqrt{a+bx} + C.$

» $-\sqrt{a^2-x^2} + C.$

» $\sqrt{a^2+x^2} + C.$

» $\sqrt{x^2-a^2} + C.$

» $\frac{1}{a} \operatorname{arctg} \frac{x}{a} + C.$

» $\operatorname{arcsin} \frac{x}{a} + C.$

» $-\frac{1}{k} \cos kx + C.$

» $\frac{1}{k} \sin kx + C.$

» $\ln |\operatorname{tg} x| + C =$
 $= -\ln |\operatorname{ctg} x| + C$

» $\ln \left| \operatorname{tg} \frac{x}{2} \right| + C =$
 $= -\ln \left| \operatorname{ctg} \frac{x}{2} \right| + C.$

» $-\ln \left| \operatorname{tg} \left(\frac{\pi}{4} - \frac{x}{2} \right) \right| +$
 $+ C = \ln \left| \operatorname{ctg} \left(\frac{\pi}{4} - \right. \right.$
 $\left. \left. - \frac{x}{2} \right) \right| + C.$

» $\frac{1}{k} e^{kx} + C.$

» $\ln(e^x + 1) + C.$

$$21. \int \frac{dx}{\sqrt{1-a^2x^2}}.$$

$$\text{О т в е т: } \frac{1}{a} \arcsin(ax) + C.$$

$$22. \int x e^{kx} dx.$$

$$» \quad \frac{x e^{kx}}{k} - \frac{e^{kx}}{k^2} + C.$$

$$23. \int \arcsin x dx,$$

$$» \quad x \arcsin x + \sqrt{1-x^2} + C.$$

§ 7. Свойства определенных интегралов

1. В § 4 была выведена формула Ньютона — Лейбница:

$$\int_a^b f(x) dx = [F(x)]_a^b = F(b) - F(a),$$

где $f(x)$ — функция, непрерывная в промежутке $[a, b]$, а $F(x)$ — функция, первообразная для $f(x)$. Определяя интеграл $\int_a^b f(x) dx$, мы предположили, что $a < b$ (см. § 3). Однако

легко заметить, что правая часть в формуле Ньютона — Лейбница имеет вполне определенный смысл и при $a \geq b$. Поэтому в случае $a \geq b$ можно ввести следующее определение. Допустим, что $f(x)$ — функция, непрерывная в $[a, b]$. Тогда полагаем

$$\int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a). \quad (1)$$

Из (1) в случае $a = b$ имеем:

$$\int_a^a f(x) dx = 0, \quad (2)$$

что соответствует геометрическому смыслу определенного интеграла, так как в случае $a = b$ параллельные стороны криволинейной трапеции совпадают и ее площадь равна нулю. Равенство (2) можно сформулировать следующим образом: если пределы интеграла совпадают, то интеграл равен нулю*).

*) См. также примечание 1, стр. 42.

В случае $a > b$ из (1) имеем:

$$\int_a^b f(x) dx = - \int_b^a f(x) dx. \quad (3)$$

Действительно,

$$- \int_b^a f(x) dx = - [F(a) - F(b)] = F(b) - F(a) = \int_a^b f(x) dx.$$

Равенство (3) можно сформулировать следующим образом: **если переставить между собой пределы интеграла, то знак интеграла меняется на обратный.**

Из изложенного выше следует, что символ $\int_a^b f(x) dx$ имеет вполне определенный смысл независимо от того, будет ли $a < b$ или $a \geq b$.

Пользуясь свойствами неопределенного интеграла (§ 6, п. 2), выведем аналогичные свойства определенного интеграла.

Свойство I. Постоянный множитель можно вывести за знак интеграла:

$$\int_a^b kf(x) dx = k \int_a^b f(x) dx. \quad (4)$$

Действительно, допустим, что функция $F(x)$ — одна из первообразных для функции $f(x)$, т. е.

$$\int f(x) dx = F(x) + C.$$

Тогда

$$\begin{aligned} \int kf(x) dx &= k \int f(x) dx = k[F(x) + C] = \\ &= kF(x) + kC = kF(x) + C_1 \quad (k \neq 0) \end{aligned}$$

и, следовательно,

$$\begin{aligned} \int_a^b kf(x) dx &= [kF(x)]_a^b = kF(b) - kF(a) = \\ &= k[F(b) - F(a)] = k \int_a^b f(x) dx. \end{aligned}$$

В частности, при $k = -1$ имеем:

$$\int_a^b [1 - f(x)] dx = - \int_a^b f(x) dx.$$

Легко проверить, что формула (4) справедлива и при $k = 0$.

Свойство II. Интеграл суммы равен сумме интегралов слагаемых:

$$\int_a^b [f(x) + g(x)] dx = \int_a^b f(x) dx + \int_a^b g(x) dx. \quad (5)$$

Действительно, пусть $F(x)$ — первообразная для $f(x)$ и $G(x)$ — первообразная для $g(x)$, т. е.

$$\int f(x) dx = F(x) + C_1 \text{ и } \int g(x) dx = G(x) + C_2.$$

Тогда

$$\begin{aligned} \int [f(x) + g(x)] dx &= \int f(x) dx + \int g(x) dx = \\ &= [F(x) + C_1] + [G(x) + C_2] = \\ &= F(x) + G(x) + (C_1 + C_2) = \\ &= F(x) + G(x) + C \end{aligned}$$

и, следовательно,

$$\begin{aligned} \int_a^b [f(x) + g(x)] dx &= [F(x) + G(x)]_a^b = \\ &= [F(b) + G(b)] - [F(a) + G(a)] = \\ &= [F(b) - F(a)] + [G(b) - G(a)] = \\ &= \int_a^b f(x) dx + \int_a^b g(x) dx. \end{aligned}$$

Легко убедиться, что это свойство справедливо и для суммы n слагаемых.

Свойство III. Допустим, что $f(x)$ — функция непрерывная в некотором промежутке I . Если a, b, c — точки этого промежутка, то

$$\int_a^b f(x) dx = \int_a^c f(x) dx + \int_c^b f(x) dx. \quad (6)$$

Действительно, из равенства

$$\int f(x) dx = F(x) + C$$

получим:

$$\begin{aligned}\int_a^c f(x) dx + \int_c^b f(x) dx &= [F(x)]_a^c + [F(x)]_c^b = \\ &= [F(c) - F(a)] + [F(b) - F(c)] = F(b) - \\ &\quad - F(a) = \int_a^b f(x) dx.\end{aligned}$$

2. Опираясь на доказанные выше свойства определенных интегралов, решим следующие примеры:

$$\begin{aligned}1) \int_0^{\frac{\pi}{2}} 3 \sin x dx &= -3 \int_0^{\frac{\pi}{2}} (-\sin x) dx = 3 \int_{\frac{\pi}{2}}^0 (-\sin x) dx = \\ &= 3 [\cos x]_{\frac{\pi}{2}}^0 = 3 \left(\cos 0 - \cos \frac{\pi}{2} \right) = 3;\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}2) \int_1^2 \frac{2x^2 + x + 1}{x} dx &= \int_1^2 \left(2x + 1 + \frac{1}{x} \right) dx = \\ &= 2 \int_1^2 x dx + \int_1^2 dx + \int_1^2 \frac{dx}{x} = \\ &= 2 \left[\frac{x^2}{2} \right]_1^2 + [x]_1^2 + [\ln x]_1^2 = \\ &= 2 \left(2 - \frac{1}{2} \right) + (2 - 1) + (\ln 2 - \ln 1) = 4 + \ln 2;\end{aligned}$$

3) проверить равенство:

$$\int_a^b 3x^2 dx = \int_a^c 3x^2 dx + \int_c^b 3x^2 dx.$$

Решение.

$$\begin{aligned}\int_a^b 3x^2 dx &= [x^3]_a^b = b^3 - a^3. \\ \int_a^c 3x^2 dx + \int_c^b 3x^2 dx &= [x^3]_a^c + [x^3]_c^b = (c^3 - a^3) + \\ &\quad + (b^3 - c^3) = b^3 - a^3.\end{aligned}$$

3. Пользуясь результатами, полученными при решении примеров 4, 5, § 5, вычислим следующие интегралы:

$$1) \int_1^2 \ln x \, dx = [x \ln x - x]_1^2 = (2 \cdot \ln 2 - 2) - (1 \cdot \ln 1 - 1) = 2 \ln 2 - 2 + 1 = -1 + \ln 4;$$

$$2) \int_0^1 x e^x \, dx = [x e^x - e^x]_0^1 = (1 \cdot e - e) - (0 \cdot e^0 - e^0) = 0 + 1 = 1;$$

$$3) \int_0^{\frac{\pi}{2}} x \sin x \, dx = [-x \cos x + \sin x]_0^{\frac{\pi}{2}} = \left(-\frac{\pi}{2} \cos \frac{\pi}{2} + \sin \frac{\pi}{2}\right) - (0 \cdot \cos 0 + \sin 0) = 1;$$

$$4) \int_0^{\frac{\pi}{3}} \operatorname{tg} x \, dx = [-\ln \cos x]_0^{\frac{\pi}{3}} = -\ln \cos \frac{\pi}{3} + \ln \cos 0 = -\ln \frac{1}{2} + \ln 1 = -\ln \frac{1}{2} = -(\ln 1 - \ln 2) = \ln 2;$$

$$5) \int_0^1 \sqrt{1-x^2} \, dx = \frac{1}{2} [\arcsin x + x \sqrt{1-x^2}]_0^1 = \frac{1}{2} (\arcsin 1 + 1 \cdot \sqrt{1-1^2}) - \frac{1}{2} (\arcsin 0 + 0 \cdot \sqrt{1-0}) = \frac{1}{2} \arcsin 1 = \frac{1}{2} \cdot \frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{4}.$$

4. Вычислить следующие интегралы:

$$1) \int_1^3 5 \, dx, \quad \text{О т в е т: } 10.$$

$$2) \int_0^2 \left(\frac{1}{4} x + 1\right) \, dx, \quad \text{» } 2,5.$$

$$3) \int_0^2 3x^2 \, dx, \quad \text{» } 8.$$

$$4) \int_1^2 \frac{1}{x} \, dx, \quad \text{» } \ln 2.$$

- | | | | |
|-----|---|---|----------------------|
| 5) | $\int_0^{\pi} \sin x dx,$ | » | 2. |
| 6) | $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x dx,$ | » | 1. |
| 7) | $\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx,$ | » | $\frac{\pi}{6}.$ |
| 8) | $\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1+x^2}} dx,$ | » | $\frac{\pi}{4}.$ |
| 9) | $\int_0^1 \frac{x dx}{1+x^2},$ | » | $\frac{1}{2} \ln 2.$ |
| 10) | $\int_{-1}^1 \arcsin x dx.$ | » | 0. |

Глава III

ПРИЛОЖЕНИЯ ОПРЕДЕЛЕННОГО ИНТЕГРАЛА

§ 1. Вычисление площадей

Допустим, что $f(x)$ — функция, непрерывная в промежутке $[a, b]$, и что $f(x) \geq 0$. Из изложенного в § 1 и 4 мы знаем, что площадь F фигуры $A'ABV'$, ограниченной графиком функции $y = f(x)$, осью Ox и прямыми $x = a$ и $x = b$ (черт. 8), равна интегралу от a до b от $f(x) dx$:

$$F = \int_a^b f(x) dx.$$

Рассмотрим ниже несколько примеров вычисления площадей.

1. Вычислить площадь криволинейного треугольника OAA' , ограниченного параболой $y = x^2$, осью Ox и прямой $x = a$ (черт. 19).

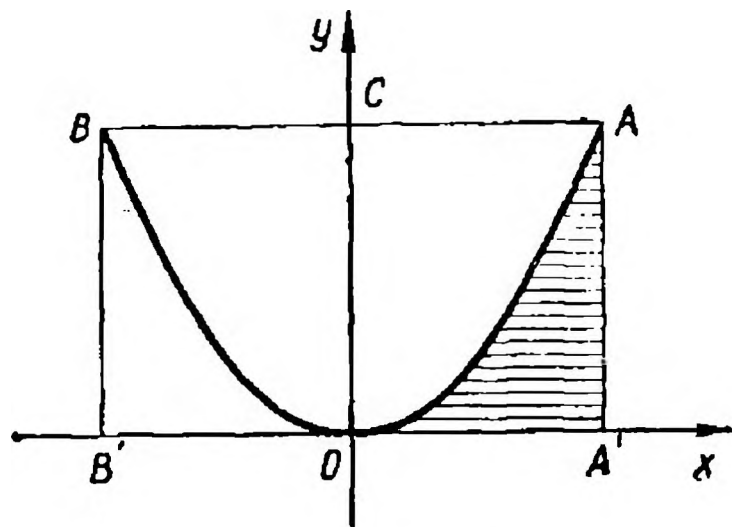
Решение. $F = \int_0^a x^2 dx = \left[\frac{x^3}{3} \right]_0^a = \frac{a^3}{3}.$

Замечание. Видим, что площадь $\frac{a^3}{3}$ криволинейного треугольника OAA' равна одной трети площади a^3 прямоугольника $COA'A$ *). Отсюда следует, что площадь криволинейного треугольника COA равна двум третям площади этого прямоугольника. Принимая во внимание, что фигура BOA симметрична относительно оси Oy , найдем, что площадь параболического сегмента BOA равна двум третям площади прямоугольника $B'BA A'$.

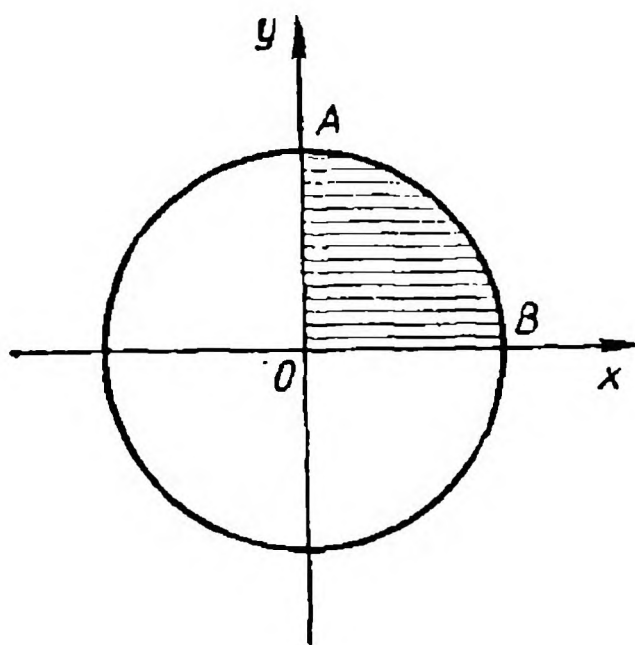
2. Вычислить площадь круга.

Решение. Уравнение окружности радиуса R с центром в начале системы координат (черт. 20) есть $x^2 + y^2 = R^2$. Из этого уравнения найдем:

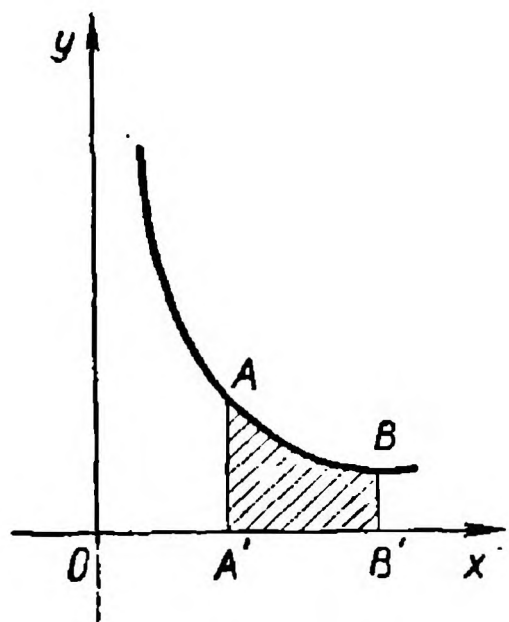
*) Точка A параболы имеет координаты a, a^2 , следовательно, площадь прямоугольника $COA'A$ равна $OA' \cdot A'A = a \cdot a^2 = a^3$.



Черт. 19



Черт. 20.



Черт. 21.

$$y = \pm \sqrt{R^2 - x^2},$$

а для части окружности, расположенной над осью Ox , получим:

$$y = \sqrt{R^2 - x^2}.$$

Площадь четверти круга OAB равна

$$\int_0^R \sqrt{R^2 - x^2} dx.$$

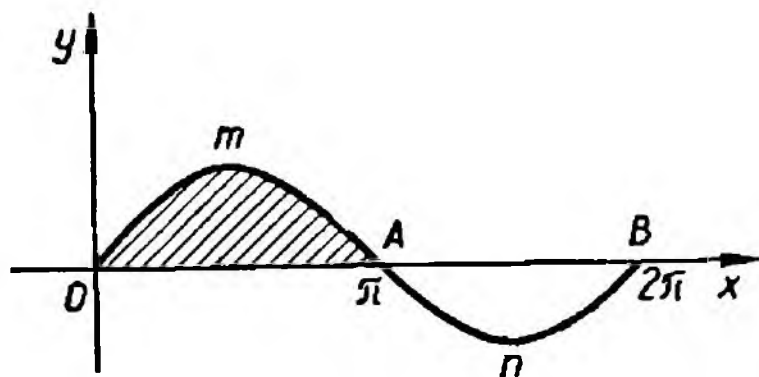
Используя результат, полученный в примере 9 (§ 6, п. 6, стр. 59), найдем:

$$\begin{aligned} \int_0^R \sqrt{R^2 - x^2} dx &= \frac{1}{2} \left[R^2 \arcsin \frac{x}{R} + x \sqrt{R^2 - x^2} \right]_0^R = \\ &= \frac{1}{2} (R^2 \arcsin 1 + R \sqrt{R^2 - R^2}) - \frac{1}{2} (R^2 \arcsin 0 + \\ &\quad + 0 \cdot \sqrt{R^2 - 0}) = \frac{1}{2} R^2 \cdot \frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{4} R^2. \end{aligned}$$

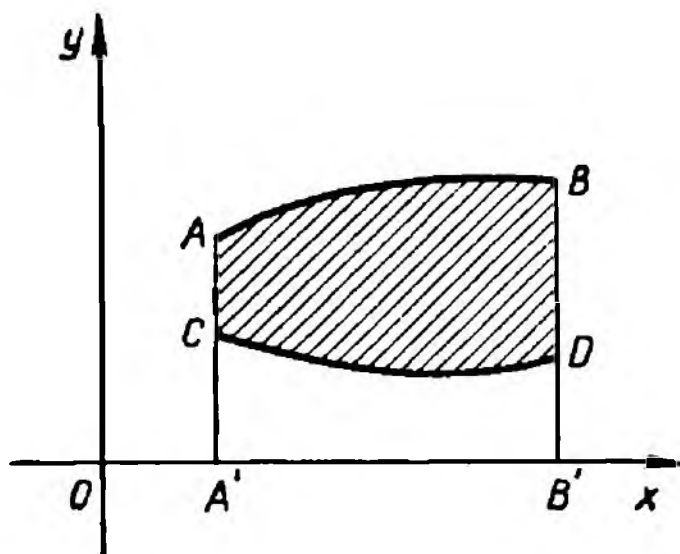
Следовательно, площадь круга равна πR^2 .

3. Вычислить площадь криволинейной трапеции $A'ABV'$ (черт. 21), ограниченной гиперболой $y = \frac{1}{x}$, осью Ox и прямыми $x = 1$ и $x = a > 1$.

Решение. $F = \int_1^a \frac{dx}{x} = [\ln x]_1^a = \ln a - \ln 1 = \ln a.$



Черт. 22.



Черт. 23.

Итак, площадь под кривой $y = \frac{1}{x}$ в пределах от $x = 1$ до $x = a$ выражается числом $\ln a$.

4. Вычислить площадь F_1 фигуры $OmA O$, ограниченной дугой OA синусоиды $y = \sin x$ и осью Ox (черт. 22).

Решение.
$$F_1 = \int_0^{\pi} \sin x dx = [-\cos x]_0^{\pi} = -\cos \pi + \cos 0 = -(-1) + 1 = 2.$$

Замечание 1. Площадь F_2 фигуры $AnBA$, ограниченной дугой AB синусоиды $y = \sin x$ и осью Ox выразится отрицательным числом, так как эта фигура расположена под осью Ox .

Действительно,

$$F_2 = \int_{\pi}^{2\pi} \sin x dx = [-\cos x]_{\pi}^{2\pi} = -\cos 2\pi + \cos \pi = -1 - 1 = -2.$$

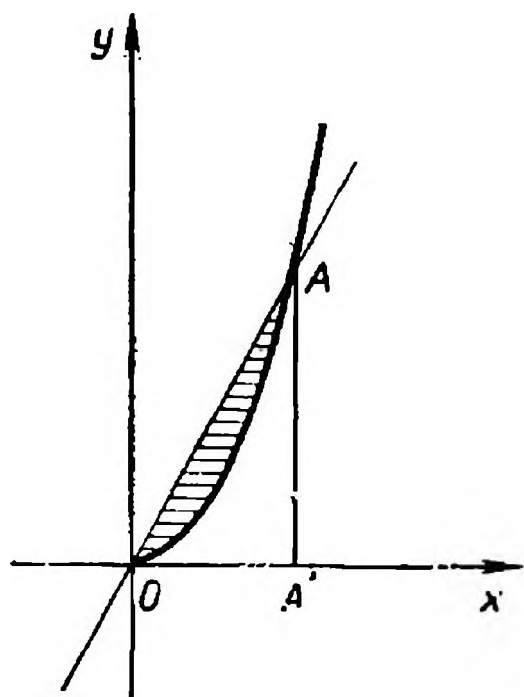
Замечание 2. Абсолютная величина этой площади, т. е. $-2| = 2$, выражает площадь фигуры $AnBA$ в смысле, известном из геометрии *).

Если вычислить площадь фигуры, ограниченной дугой $OmA nB$ синусоиды $y = \sin x$ и осью Ox , то получим в результате число нуль:

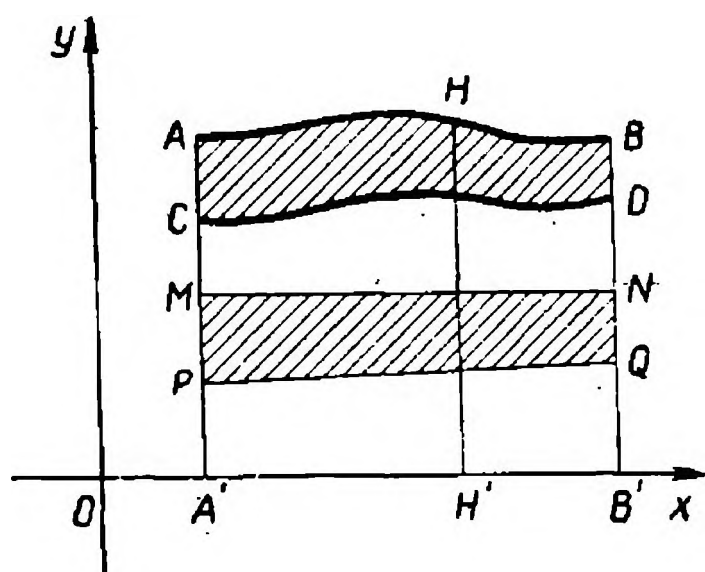
$$\int_0^{2\pi} \sin x dx = \int_0^{\pi} \sin x dx + \int_{\pi}^{2\pi} \sin x dx = 2 + (-2) = 0,$$

т. е. алгебраическую сумму площадей F_1 и F_2 .

*) В геометрии площадь — это действительное неотрицательное число, которое получается в результате измерения фигуры квадратной единицей.



Черт. 24.



Черт. 25.

Замечание 3. Сумма $2 + |-2| = 4$ выражает площадь фигуры $OtAnBO$ в смысле, известном из геометрии.

5. Вычислить площадь F фигуры $CABD$ (черт. 23), ограниченной линиями $x = a$, $x = b$, $y = f(x)$ и $y = g(x)$, где $f(x)$ и $g(x)$ — функции, непрерывные в промежутке $[a, b]$ и удовлетворяют условиям:

$$f(x) \geq 0, g(x) \geq 0, f(x) > g(x).$$

Решение. Площадь фигуры $CABD$ получим, если из площади криволинейной трапеции $A'ABB'$ вычтем площадь криволинейной трапеции $A'CDB'$, следовательно,

$$F = \int_a^b f(x) dx - \int_a^b g(x) dx = \int_a^b [f(x) - g(x)] dx. \quad (1)$$

Пример. Вычислить площадь F фигуры, ограниченной прямой $y = 2x$ и параболой $y = x^2$ (черт. 24).

Решение. Найдем сперва точки пересечения прямой $y = 2x$ и параболы $y = x^2$. Для этого решим систему уравнений:

$$y = 2x; y = x^2.$$

Получим точки $O(0; 0)$ и $A(2; 4)$. Следовательно, имеем:

$$F = \int_0^2 (2x - x^2) dx = \left[2 \cdot \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} \right]_0^2 = 2 \cdot \frac{4}{2} - \frac{8}{3} = \frac{4}{3}.$$

Тот же результат получим, если из площади прямоугольного

треугольника OAA' , равной $\frac{2 \cdot 4}{2}$, вычтем площадь криволинейного треугольника OAA' , равную

$$\int_0^2 x^2 dx = \left[\frac{x^3}{3} \right]_0^2 = \frac{8}{3}.$$

Возвращаясь к формуле (1), обозначим в ней разность $f(x) - g(x)$ через $h(x)$:

$$f(x) - g(x) = h(x).$$

Тогда формула (1) примет вид:

$$F = \int_a^b h(x) dx. \quad (2)$$

Замечаем, что $h(x)$, будучи разностью ординат $f(x)$ и $g(x)$, представляет длину отрезка, параллельного оси Oy , заключенного между графиками функций $y = f(x)$ и $y = g(x)$. Из формулы (2) видим, что площадь F не зависит от формы соответствующей фигуры, а зависит только от $h(x)$. Другими словами, если взять две другие функции $f_1(x)$ и $g_1(x)$, такие, что $f_1(x) - g_1(x) = h(x)$, то получим другую фигуру, эквивалентную первой. Полученный нами результат можно сформулировать следующим образом:

Если две фигуры на плоскости $ABDC$ и $MNPQ$ (черт. 25), ограниченные параллельными прямыми AA' и BB' , обладают тем свойством, что при пересечении их любой прямой NN' , параллельной AA' и BB' , получаются отрезки равной длины, то площади этих фигур равны.

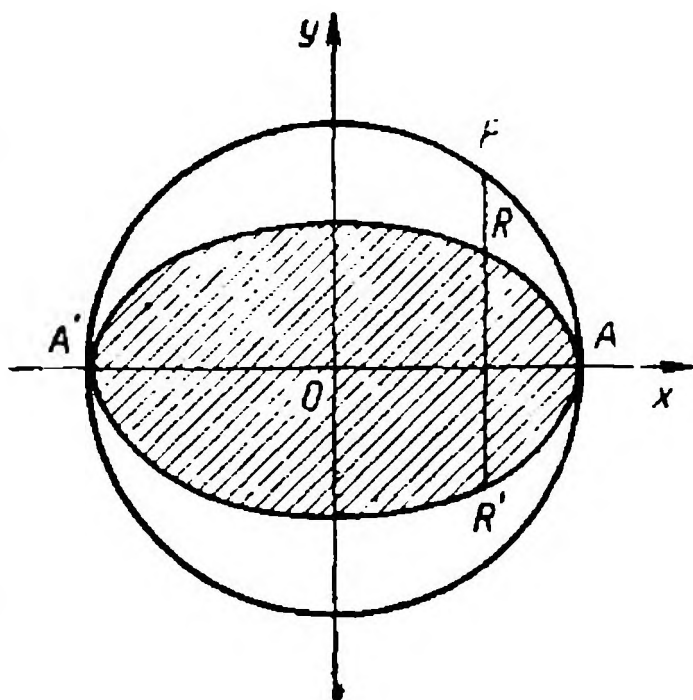
Это предложение называется *принципом Кавальери*. Можно также показать, что в случае если упомянутые выше отрезки составляют отношение, равное некоторой постоянной k , то площади соответствующих фигур находятся в том же отношении k .

Действительно, в этом случае площадь одной из фигур дается формулой $F = \int_a^b h(x) dx$, а другой фигуры формулой

$F_1 = \int_a^b h_1(x) dx$, и так как по условию $h_1(x) = kh(x)$, то имеем:

$$F_1 = \int_a^b h_1(x) dx = \int_a^b kh(x) dx = k \int_a^b h(x) dx = kF.$$

Пример. Построим по точкам фигуру, ставя в соответствие каждой точке $P(x, y)$, взятой на окружности $x^2 + y^2 = a^2$ (черт. 26), точку R с координатами $x, \frac{b}{a}y$, где $b < a$. Таким образом, получим фигуру $ARA'R'A$, называемую эллипсом*). Требуется найти площадь фигуры $ARA'R'A$, т. е. площадь эллипса.



Черт. 26.

Решение. Так как в данном случае $h(x) = y$, $ah_1(x) = \frac{b}{a}y$, то их отношение

$$\frac{h_1(x)}{h(x)} = \frac{b}{a}$$

есть постоянная величина, и, следовательно, в том же отношении находятся и площади F_1 и F эллипса и круга:

$$F_1 = \frac{b}{a} F.$$

Но площадь F круга равна πa^2 , следовательно, для площади эллипса найдем:

$$F_1 = \frac{b}{a} \pi a^2 = \pi ab.$$

*) Из уравнения окружности находим $y = \pm \sqrt{a^2 - x^2}$, следовательно, ордината точки R равна $\pm \frac{b}{a} \sqrt{a^2 - x^2}$. Если обозначим ординату точки R через y , то получим $y = \pm \frac{b}{a} \sqrt{a^2 - x^2}$, где x — абсцисса точки R . Возвышая обе части этого равенства в квадрат, получим:

$$y^2 = \frac{b^2}{a^2} (a^2 - x^2); \quad \frac{y^2}{b^2} = 1 - \frac{x^2}{a^2}; \quad \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

Это последнее есть уравнение эллипса. Итак, координаты точки R удовлетворяют уравнению эллипса, и, следовательно, точка R принадлежит эллипсу.

Упражнения.

1. Вычислить площадь фигуры, ограниченной параболой $y^2 = 4x$ и прямой $x = 9$.

Ответ: 72.

2. Вычислить площадь фигуры, ограниченной гиперболой $y = \frac{9}{x}$, осью Ox и прямыми $x = 3$ и $x = 6$.

Ответ: $9 \ln 2$.

3. Вычислить площадь фигуры, ограниченной параболой $y = x^2$ и прямой $y = 4x$.

Ответ: $10\frac{2}{3}$.

4. Вычислить площадь фигуры, ограниченной параболой $y = ax^2$ и прямыми $x = p$ и $x = q$.

Ответ: $\frac{a}{3} (q^3 - p^3)$.

5. Вычислить площадь фигуры, ограниченной прямой $y = 3x$, параболой $y = -x^2 + 6x$ и осью Ox .

Ответ: 31,5.

6. Вычислить площадь четверти эллипса $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$.

Ответ: $\frac{\pi ab}{4}$.

Указание. Четверть эллипса $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ ограничена прямыми $x = 0$, $x = a$, осью Ox и кривой

$$y = \frac{b}{a} \sqrt{a^2 - x^2} \quad (0 \leq x \leq a).$$

Следовательно, вопрос сводится к вычислению интеграла

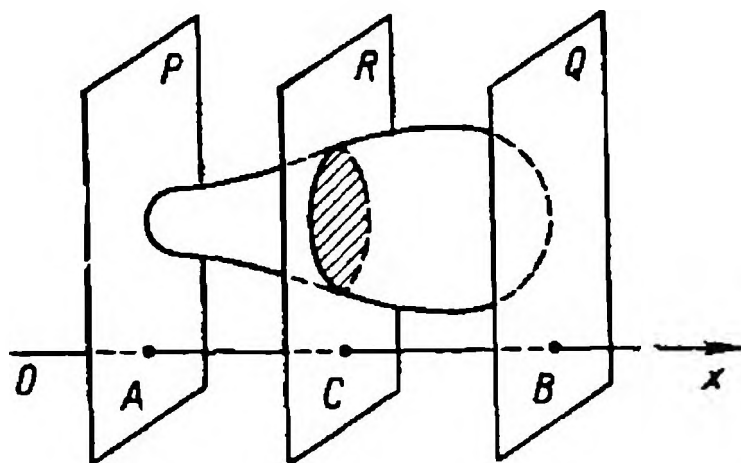
$$\int_0^a \frac{b}{a} \sqrt{a^2 - x^2} dx.$$

§ 2. Объемы геометрических тел

Такое же рассуждение, как и в случае вычисления площади криволинейной трапеции, можно применить для определения других величин, например, объема геометрического тела.

Действительно, пусть имеем геометрическое тело T , со-

держась между двумя параллельными плоскостями P и Q (черт. 27). Выберем ось Ox так, чтобы она была перпендикулярна к плоскостям P и Q . Обозначим абсциссы точек пересечения A и B плоскостей P и Q с осью Ox соответственно через a и b ($a < b$).



Черт. 27.

Рассмотрим плоскость R , перпендикулярную к оси Ox *) и пересекающую ее в точке C , абсцисса которой равна x ($a \leq x \leq b$).

Предположим, что в сечении тела T плоскостью R получается фигура (назовем ее *поперечным сечением*), площадь которой нам известна (или которую мы умеем вычислять) при любом значении x в промежутке $[a, b]$; следовательно, любому значению x из $[a, b]$ соответствует вполне определенная площадь поперечного сечения, т. е. площадь этого сечения есть функция переменной x ; обозначим эту площадь через $F(x)$. Предположим, кроме того, что функция $F(x)$ непрерывна на $[a, b]$.

Требуется определить объем тела T .

Для решения этой задачи разобьем промежутки $[a, b]$ на n частей (промежутков), не обязательно равных; предположим, что абсциссы точек деления x_1, x_2, \dots, x_{n-1} удовлетворяют неравенствам

$$a < x_1 < x_2 < \dots < x_{n-1} < b.$$

Для общности обозначений положим $a = x_0$ и $b = x_n$. В каждом из промежутков

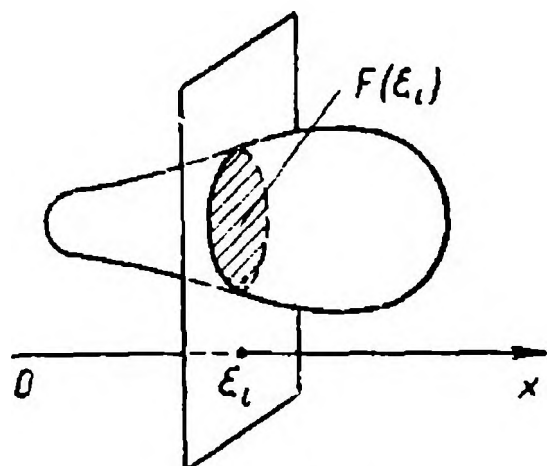
$$[x_{i-1}, x_i] \quad (1 \leq i \leq n)$$

выберем произвольным образом по точке с абсциссой ξ_i , которая, следовательно, удовлетворяет условию

$$x_{i-1} \leq \xi_i \leq x_i.$$

Проведем через каждую точку ξ_i плоскость, перпенди-

*) Плоскость R , следовательно, параллельна плоскостям P и Q .



Черт. 28.

кулярную к оси Ox до пересечения с телом T (черт. 28); получим поперечное сечение, площадь которого равна $F(\xi_i)$. Наконец, построим n цилиндров, имеющих соответственно высоту, равную

$$x_i - x_{i-1} = \Delta x_i \quad (1 \leq i \leq n),$$

площадь основания, равную $F(\xi_i)$, и объем, равный $F(\xi_i) \Delta x_i$ *).

Интегральная сумма

$$\sigma_n = \sum_{i=1}^n F(\xi_i) \Delta x_i = F(\xi_1) \Delta x_1 + F(\xi_2) \Delta x_2 + \dots + F(\xi_n) \Delta x_n$$

выражает объем тела, составленного из n построенных нами цилиндров. Это тело из n цилиндров отличается от тела T тем меньше, чем меньше промежутки $[x_{i-1}, x_i]$ ($1 \leq i \leq n$). Разбивая промежуток $[a, b]$ на части все более и более мелкие, будем при этом вычислять каждый раз сумму σ_n .

Предел суммы $\sigma_n = \sum_{i=1}^n F(\xi_i) \Delta x_i$, когда части, на которые мы разбиваем промежуток $[a, b]$, становятся сколь угодно малыми **), назовем по определению объемом тела T .

Обозначив этот объем через V , будем иметь:

$$V = \lim_{\max \Delta x_i \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n F(\xi_i) \Delta x_i \text{ ***).$$

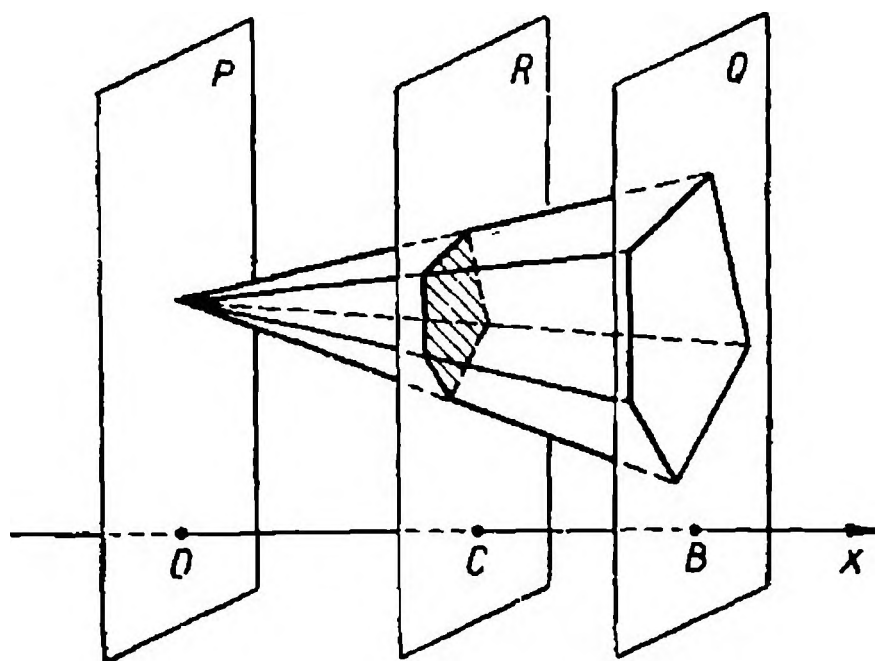
Но предел интегральной суммы σ_n при $\max \Delta x_i$, стремящемся к нулю, обозначается символом $\int_a^b F(x) dx$ (см. стр. 41), следовательно,

$$V = \int_a^b F(x) dx,$$

*) Если сечение—круг, то строим прямой круговой цилиндр, объем которого, как мы знаем из геометрии, равен произведению площади основания на высоту. Это правило обобщаем и на случай, когда сечение имеет любую другую форму.

**) Функция $F(x)$ непрерывна на $[a, b]$, и, следовательно, этот предел существует.

***) $\max \Delta x_i$, как и в § 1, стр. 33, есть наибольшая из длин Δx_i интервалов $[x_{i-1}, x_i]$ ($1 \leq i \leq n$).



Черт. 29.

т. е. мы получили формулу, позволяющую вычислять объем геометрического тела по площади его поперечных сечений.

Примеры.

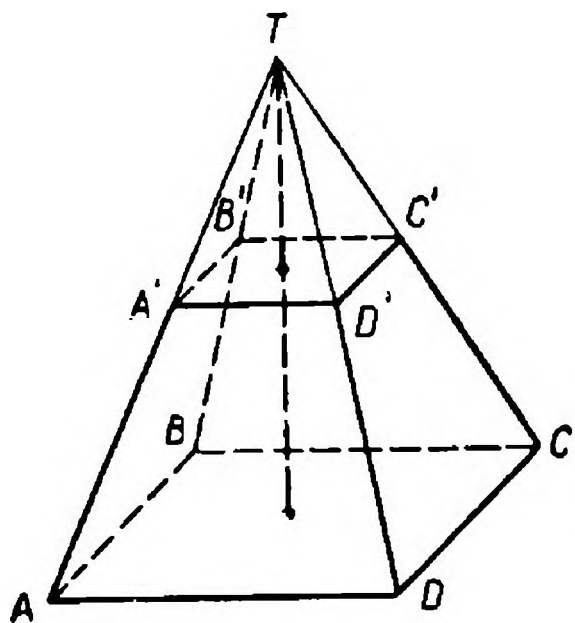
1. Вычислить объем пирамиды T высоты H , основанием которой служит любой многоугольник площади S .

Пусть Q — плоскость, в которой лежит основание пирамиды T . Проведем через вершину этой пирамиды плоскость P , параллельную плоскости Q (черт. 29). Выберем ось Ox так, чтобы она была перпендикулярна к плоскостям P и Q . Начало координат выберем в точке O пересечения плоскости P с осью Ox (следовательно, абсцисса точки O равна нулю); абсцисса точки B пересечения плоскости Q с осью Ox равна H , а плоскость R , перпендикулярная к оси Ox , пересекает ее в точке C , абсцисса которой равна x . При пересечении пирамиды T плоскостью R получается многоугольник, площадь которого обозначим через $F(x)$. Из геометрии мы знаем, что в пирамиде площадь основания и площадь сечения, параллельного основанию, относятся как квадраты их расстояний от вершины; следовательно, принимая во внимание, что сечение, параллельное основанию, находится на расстоянии x от вершины, а расстояние основания от вершины равно высоте H , будем иметь:

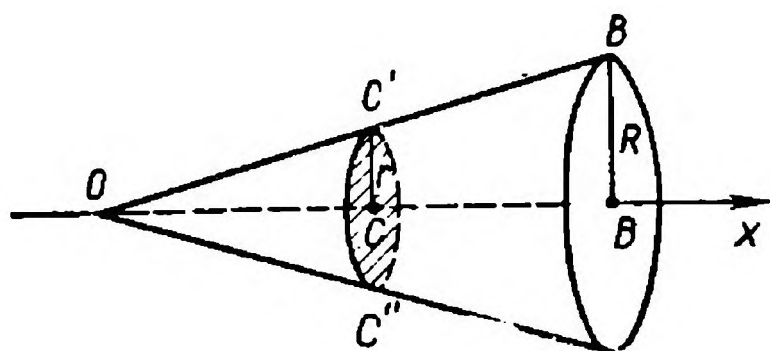
$$\frac{F(x)}{S} = \frac{x^2}{H^2}; \quad F(x) = S \cdot \frac{x^2}{H^2}.$$

Таким образом, на основании формулы (1) для вычисления объема пирамиды T получаем формулу:

$$V = \int_0^H S \frac{x^2}{H^2} dx,$$



Черт. 30



Черт. 31.

из которой находим:

$$V = S \cdot \frac{1}{H^2} \left[\frac{x^3}{3} \right]_0^H = S \cdot \frac{1}{H^2} \cdot \frac{H^3}{3},$$

$$V = \frac{1}{3} SH,$$

т. е. **объем пирамиды равен одной трети произведения площади основания на высоту.**

Упражнение. Вычислить объем усеченной пирамиды.

Указание. Объем усеченной пирамиды $ABCD A'B'C'D'$ (черт. 30) равен разности объемов пирамид $TABCD$ и $TA'B'C'D'$.

Ответ. $V = \frac{H}{3} (S + \sqrt{Ss} + s)$, где H — высота, S — площадь нижнего основания и s — площадь верхнего основания усеченной пирамиды.

2. Вычислить объем прямого кругового конуса T , высота которого H , а радиус основания R .

Решение. Выберем начало координат в вершине O конуса T , а ось Ox направим по его оси симметрии (черт. 31). Точка B является центром основания конуса и имеет абсциссу, равную H . Обозначим буквой x абсциссу центра C сечения, параллельного основанию, и через r радиус этого сечения. Из подобия треугольников OCC' и OBB' следует:

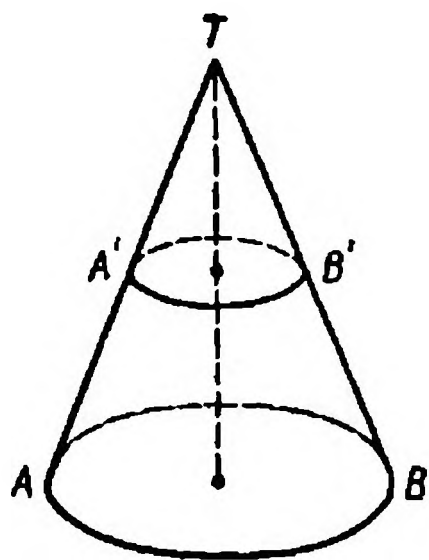
$$\frac{r}{R} = \frac{x}{H}.$$

Отсюда

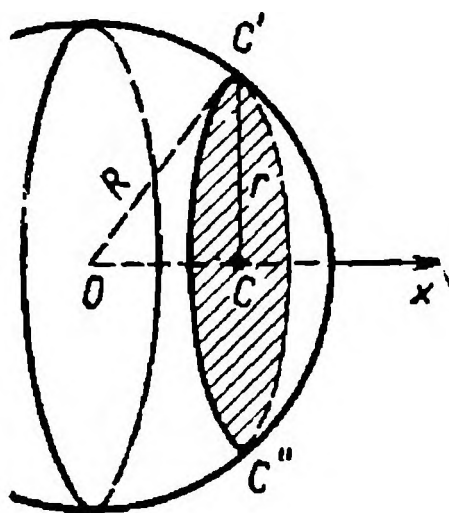
$$r = \frac{R}{H} x \text{ и } F(x) = \pi r^2 = \pi \frac{R^2}{H^2} x^2,$$

где $F(x)$ — площадь поперечного сечения $C'C''$. Следовательно, в силу (1) получим для вычисления объема V конуса T формулу

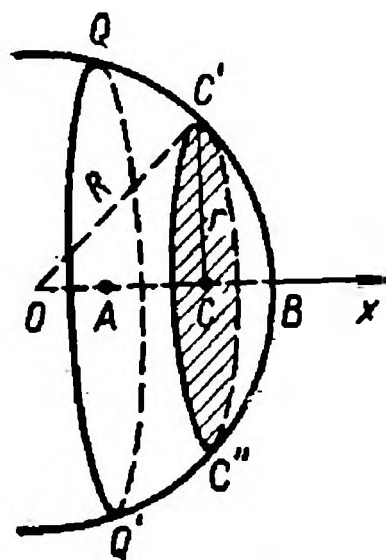
$$V = \int_0^H \pi \frac{R^2}{H^2} x^2 dx,$$



Черт. 32.



Черт. 33.



Черт. 34

из которой найдем:

$$V = \pi \frac{R^2}{H^2} \left[\frac{x^3}{3} \right]_0^H = \frac{\pi R^2}{H^2} \cdot \frac{H^3}{3} = \frac{1}{3} \pi R^2 H.$$

Итак, **объем прямого кругового конуса равен одной трети произведения площади основания на высоту.**

Упражнение. Вычислить объем усеченного конуса.

Указание. Объем усеченного конуса $ABA'B'$ равен разности объемов конусов TAB и $TA'B'$ (черт. 32).

Ответ: $V = \frac{1}{3} \pi H (R^2 + Rr + r^2),$

где H — высота, R — радиус нижнего основания и r — радиус верхнего основания усеченного конуса.

3. **Вычислить объем шара радиуса R .**

Решение. Вычислим объем $\frac{1}{2} V$ половины шара. Введем обозначения, отмеченные на чертеже 33, где начало O координат совпадает с центром шара, а точка C — центр поперечного сечения $C'C''$ — имеет абсциссу x ; радиус r сечения равен $\sqrt{R^2 - x^2}$, а площадь $F(x)$ этого сечения равна

$$\pi r^2 = \pi (R^2 - x^2).$$

Следовательно, для объема половины шара получим формулу:

$$\frac{1}{2} V = \int_0^R (R^2 - x^2) dx,$$

из которой найдем:

$$\begin{aligned}\frac{1}{2} V &= \pi R^2 \int_0^R dx - \pi \int_0^R x^2 dx = \pi R^2 [x]_0^R - \pi \left[\frac{x^3}{3} \right]_0^R = \\ &= \pi R^2 \cdot R - \pi \frac{R^3}{3} = \pi R^3 - \frac{1}{3} \pi R^3 = \frac{2}{3} \pi R^3.\end{aligned}$$

Таким образом, объем V шара равен $\frac{4}{3} \pi R^3$.

4. Пусть QQ' — плоское сечение в шаре (черт. 34). Часть $QQ'B$ шара называется *шаровым сегментом*. Круг QQ' называется *основанием* шарового сегмента, а отрезок AB радиуса, перпендикулярного к основанию, называется *высотой* шарового сегмента.

Требуется *вычислить* объем шарового сегмента высоты H , если известно, что радиус шара равен R .

Решение. Выберем начало координат в центре O шара, а ось направим по радиусу OB , перпендикулярному к основанию QQ' шарового сегмента. На чертеже 34 точка C есть центр поперечного сечения $C'C''$. Обозначим абсциссу точки C буквой x . Точка A — центр основания QQ' — имеет абсциссу, равную $R - H$. Из треугольника OCC' , в котором катет OC равен x , а гипотенуза OC' равна R , находим радиус сечения $C'C''$:

$$r = \sqrt{R^2 - x^2}.$$

Обозначим через $F(x)$ площадь сечения $C'C''$, тогда

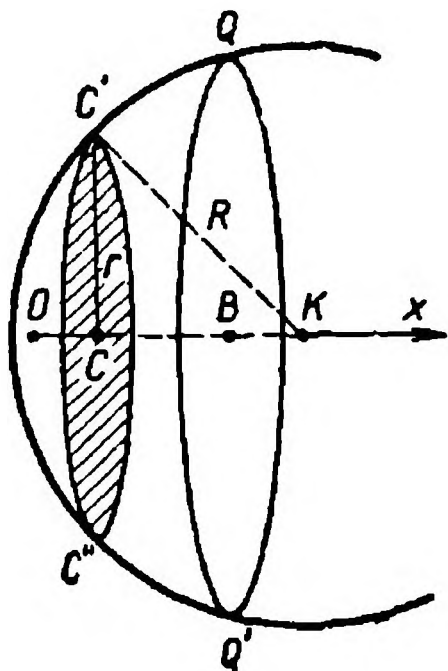
$$F(x) = \pi r^2 = \pi (R^2 - x^2).$$

Следовательно, для объема V шарового сегмента получим формулу:

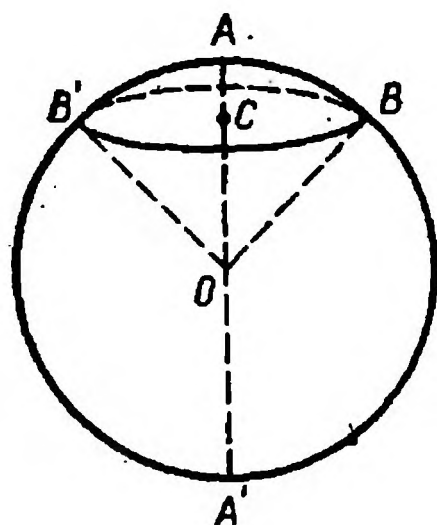
$$V = \int_{R-H}^R \pi (R^2 - x^2) dx.$$

Выполнив вычисления, найдем:

$$\begin{aligned}V &= \int_{R-H}^R \pi R^2 dx - \int_{R-H}^R \pi x^2 dx = \pi R^2 \int_{R-H}^R dx - \pi \int_{R-H}^R x^2 dx = \\ &= \pi R^2 [x]_{R-H}^R - \pi \left[\frac{x^3}{3} \right]_{R-H}^R = \pi R^2 [R - (R - H)] - \\ &- \pi \left[\frac{R^3}{3} - \frac{(R - H)^3}{3} \right] = \pi R^2 H - \frac{\pi}{3} [R^3 - (R^3 - 3R^2H + \\ &+ 3RH^2 - H^3)] = \pi R^2 H - \frac{\pi}{3} (3R^2H - 3RH^2 + H^3) = \\ &= \pi R^2 H - \pi R^2 H + \pi RH^2 - \frac{\pi H^3}{3} = \pi H^2 \left(R - \frac{H}{3} \right).\end{aligned}$$



Черт. 35.



Черт. 36.

Упражнение. Вычислить объем шарового сегмента, выбрав начало координат O (черт. 35) в конце радиуса KO , перпендикулярного к основанию QQ' шарового сегмента, а ось Ox направив по этому радиусу.

Указание. Обозначив через $F(x)$ площадь поперечного сечения, найдем:

$$F(x) = \pi (2Rx - x^2).$$

Следовательно, вычисление объема V шарового сегмента сводится к вычислению интеграла:

$$V = \int_0^H \pi (2Rx - x^2) dx,$$

где H — высота OB шарового сегмента, а R — радиус шара.

Замечание. Если в формуле для объема шарового сегмента положить $H = 2R$, то получим объем шара:

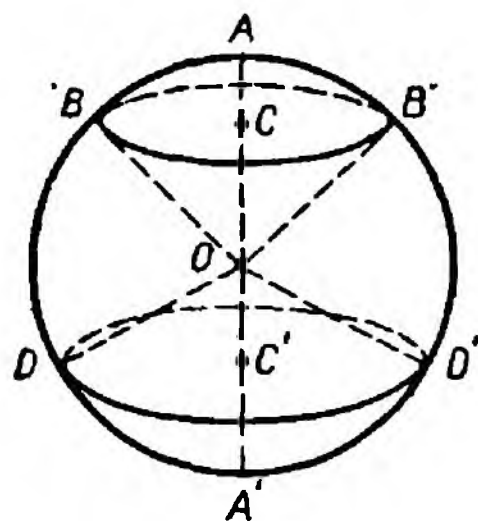
$$V = \pi (2R)^2 \left(R - \frac{2R}{3} \right) = \pi \cdot 4R^2 \cdot \frac{R}{3} = \frac{4}{3} \pi R^3.$$

Упражнения.

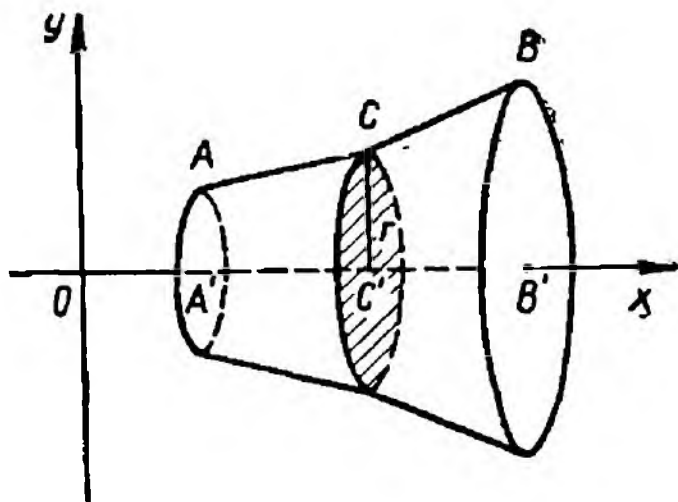
1) Вычислить объем шарового сектора первого рода *).

Ответ. $V = \frac{2}{3} \pi R^2 H$, где H — высота сегмента ABB' (черт. 36).

*) Шаровым сектором первого рода называется геометрическое тело, которое получается от вращения кругового сектора AOB (черт. 36) вокруг диаметра AA' , не пересекающего дугу AB .



Черт. 37.



Черт. 38.

Указание. Объем шарового сектора первого рода равен сумме объемов шарового сегмента ABV' и конуса OBV' , имеющего высоту, равную $R - H$.

2) Вычислить объем шарового сектора второго рода *).

Ответ. $V = \frac{2}{3} \pi R^2 H$, где H — высота шарового пояса $BB'DD'$ (черт. 37).

Указание. Если из объема шара вычесть сумму объемов шаровых секторов $OBAB'$ и $ODA'D'$ (черт. 37), то получится искомый объем.

5. Пусть AB (черт. 38) — график функции $y = f(x)$, непрерывной в промежутке $[a, b]$. Предположим, что $f(x) \geq 0$ ($a \leq x \leq b$). Требуется вычислить объем V тела, полученного вращением криволинейной трапеции $A'ABV'$ вокруг оси Ox .

Решение. Любое поперечное сечение тела вращения есть круг. Поперечное сечение с центром в точке C' (черт. 38), абсциссу которой обозначим буквой x , имеет радиус, равный $f(x)$ **), и поэтому его площадь равна

$$\pi [f(x)]^2.$$

Используя формулу (1), найдем:

$$V = \int_a^b \pi [f(x)]^2 dx. \quad (2)$$

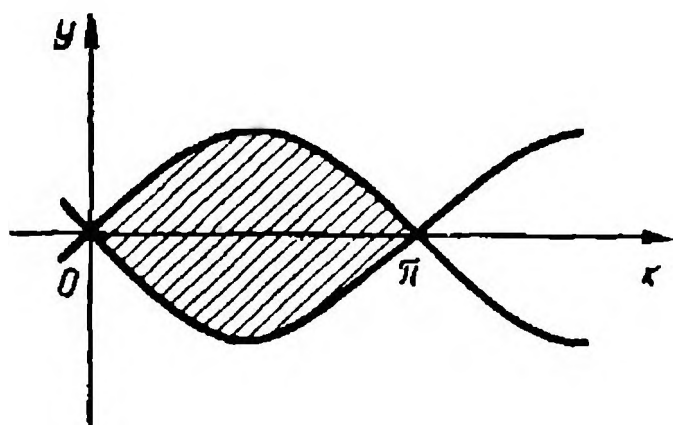
*) Шаровым сектором второго рода называется геометрическое тело, которое получается вращением кругового сектора BOD (черт. 37) вокруг диаметра AA' , не пересекающего дугу BD .

**) Точка C принадлежит кривой AB и имеет координаты $x, f(x)$.

Пример. Вычислить объем тела, ограниченного поверхностью, полученной вращением вокруг оси Ox полуволны синусоиды (черт. 39).

Решение. Полуволна синусоиды есть график функции

$$y = \sin x \quad (0 \leq x \leq \pi).$$



Черт. 39.

Следовательно, обозначив искомый объем через V , найдем:

$$\begin{aligned} V &= \pi \int_0^{\pi} \sin^2 x dx = \pi \int_0^{\pi} \frac{1 - \cos 2x}{2} dx *) = \pi \int_0^{\pi} \frac{1}{2} dx - \\ &- \pi \int_0^{\pi} \frac{\cos 2x}{2} dx = \frac{1}{2} \pi \int_0^{\pi} dx - \frac{1}{4} \pi \int_0^{\pi} \cos 2x d(2x) = \\ &= \frac{1}{2} \pi [x]_0^{\pi} - \frac{1}{4} \pi [\sin 2x]_0^{\pi} = \frac{1}{2} \pi \cdot \pi - \frac{1}{4} \pi \cdot 0 = \frac{\pi^2}{2}. \end{aligned}$$

6. Пользуясь формулой $V = \int_a^b F(x) dx$, вычислить объем геометрического тела T , если известно, что $F(x) = ax^2 + bx + c$.

Решение. Выберем ось Ox так, чтобы она была перпендикулярна к параллельным плоскостям P и Q , между которыми содержится данное геометрическое тело T (черт. 40). Начало координат выберем в точке O пересечения плоскости P с осью Ox . В таком случае абсцисса точки O равна нулю. Абсциссу точки B пересечения плоскости Q с осью Ox обозначим через H **).

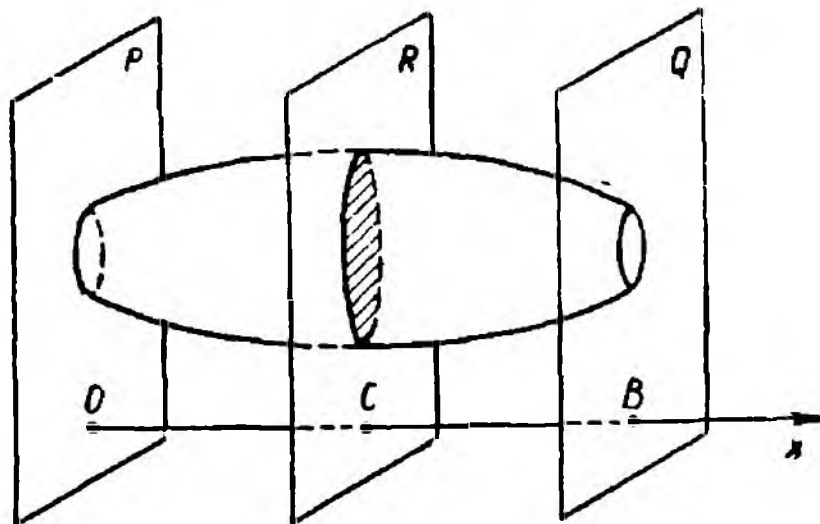
Плоскость R (черт. 40) перпендикулярна к оси Ox и пересекает ее в точке C , абсциссу которой обозначим буквой x ($0 \leq x \leq H$).

В сечении тела T плоскостью R получается фигура (по-

*) Первообразную функцию $\sin^2 x = 1 - \cos^2 x$ можно также найти, пользуясь формулой:

$$\int \cos^2 x dx = \frac{1}{2} (x + \sin x \cos x) + C \quad (\text{см. стр. 57}).$$

**) H есть расстояние от плоскости P до плоскости Q и равно высоте тела T .



Черт. 40.

перечное сечение), площадь которой $F(x) = ax^2 + bx + c$ нам известна для любого x из промежутка $[0, H]$.

Следовательно, для вычисления объема тела T имеем формулу:

$$V = \int_0^H (ax^2 + bx + c) dx,$$

из которой найдем:

$$\begin{aligned} V &= \left[\frac{ax^3}{3} + \frac{bx^2}{2} + cx \right]_0^H = \frac{aH^3}{3} + \frac{bH^2}{2} + cH = \\ &= \frac{H}{6} (2aH^2 + 3bH + 6c). \end{aligned}$$

Замечаем, что

$$\begin{aligned} 2aH^2 + 3bH + 6c &= c + 4 \left[a \left(\frac{H}{2} \right)^2 + b \frac{H}{2} + c \right] + \\ &+ (aH^2 + bH + c) = F(0) + 4F\left(\frac{H}{2}\right) + F(H), \end{aligned}$$

где $F(0)$ — площадь основания, расположенного в плоскости P , $F\left(\frac{H}{2}\right)$ — площадь поперечного сечения, проведенного через середину высоты OB , и $F(H)$ — площадь основания, расположенного в плоскости Q .

Итак, мы получили формулу:

$$V = \frac{H}{6} \left[F(0) + 4F\left(\frac{H}{2}\right) + F(H) \right],$$

называемую формулой Симпсона.

Заметим, что эта формула применяется, когда площадь $F(x)$ поперечного сечения тела T есть функция второй степени относительно x , т. е. когда $F(x) = ax^2 + bx + c$.

Замечание 1. В примерах 1—4 настоящего параграфа, вычисляя площади $F(x)$ поперечных сечений пирамиды, конуса, шара и шарового сегмента, мы нашли соответственно выражения:

$$\frac{S}{H^2} x^2, \quad \frac{R^2}{H^2} x^2, \quad \pi (R^2 - x^2), \quad \pi (2Rx - x^2) ^*),$$

которые являются функциями второй степени относительно x . Это означает, что объемы этих тел могут быть вычислены и с помощью формулы Симпсона.

В качестве примера применим формулу Симпсона для вычисления объема пирамиды.

В этом случае имеем:

$$F(x) = \frac{S}{H^2} x^2,$$

откуда

$$F(0) = 0;$$

$$F\left(\frac{H}{2}\right) = \frac{S}{H^2} \left(\frac{H}{2}\right)^2 = \frac{S}{4};$$

$$F(H) = \frac{S}{H^2} \cdot H^2 = S.$$

Следовательно,

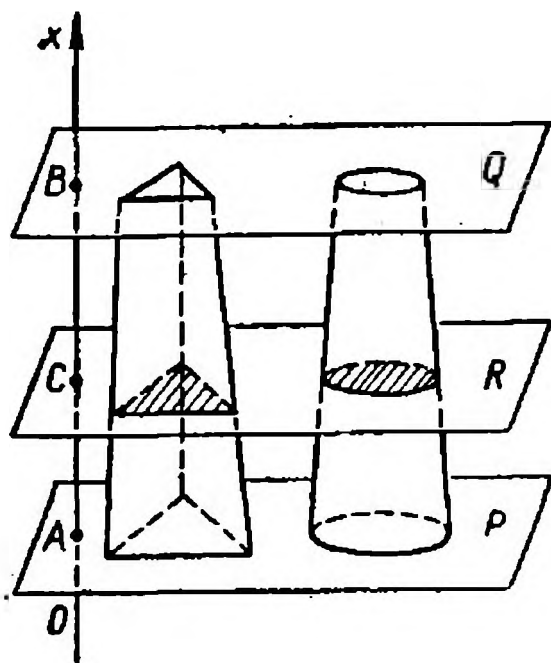
$$V = \frac{H}{6} \left(0 + 4 \cdot \frac{S}{4} + S\right) = \frac{H}{6} \cdot 2S = \frac{1}{3} SH.$$

Видим, что этот результат совпадает с полученным ранее в п. I (стр. 76).

Замечание 2. Из формулы (1) получается как следствие принцип Кавальери для объемов:

если два геометрических тела T_1 и T_2 , содержащиеся между двумя параллельными плоскостями P и Q , обладают тем свойством, что при пересечении их любой плоскостью R , параллельной P и Q , получаются фигуры, имеющие равные площади, то объемы этих геометрических тел равны.

*) См. упражнения на стр. 75—79.



Черт. 41.

Действительно, учитывая равенство площадей $F(x)$ поперечных сечений, полученных при пересечении тел T_1 и T_2 плоскостью R (черт. 41), приходим к выводу, что объемы этих двух тел выражаются одним и тем же интегралом $\int_a^b F(x) dx$, следовательно, эти объемы равны.

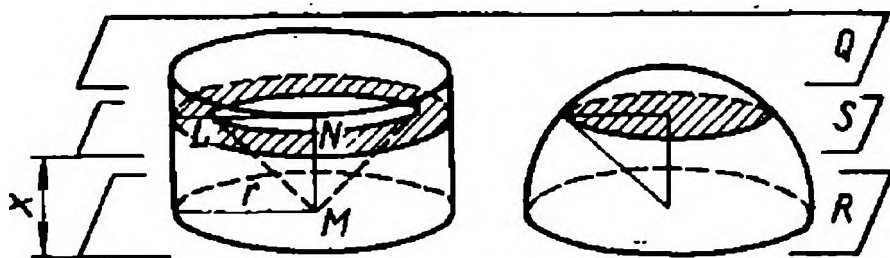
Пользуясь принципом Кавальери, можем, например, вывести формулу для объема шара, если умеем вычислять объем цилиндра и объем конуса.

С этой целью расположим половину шара радиуса R между плоскостью нижнего основания и плоскостью верхнего основания цилиндра радиуса R и высоты R (черт. 42).

Предположим, что из этого цилиндра вырезан и изъят конус с вершиной в центре M нижнего основания цилиндра и с основанием, которое совпадает с верхним основанием цилиндра.

Плоскость S (см. черт. 42) пересекает шар по кругу радиуса $\sqrt{R^2 - x^2}$, и, следовательно, площадь поперечного сечения в шаре равна $\pi(R^2 - x^2)$; эта же плоскость S пересекает цилиндр по кругу радиуса R , а конус — по кругу радиуса x *). Следовательно, площадь поперечного сечения **) в теле, оставшемся от цилиндра, равна

$$\pi R^2 - \pi x^2 = \pi(R^2 - x^2).$$



Черт. 42.

*) Так как радиус основания цилиндра равен его высоте, заключаем, что в $\triangle MNL$ (черт. 42) $\angle NML = 45^\circ$.

**) Это сечение есть круговое кольцо.

Таким образом, поперечные сечения в шаре и теле, оставшемся от цилиндра, имеют равные площади. Следовательно, согласно принципу Казальери, объем половины шара равен объему тела, оставшегося от цилиндра, т. е. равен разности объемов цилиндра ($\pi R^2 \cdot R$) и конуса ($\frac{1}{3} \pi R^2 \cdot R$):

$$\pi R^2 \cdot R - \frac{1}{3} \pi R^2 \cdot R = \frac{2}{3} \pi R^2 \cdot R.$$

Отсюда находим, что объем шара равен $\frac{4}{3} \pi R^3$.

Упражнения.

1. Вычислить объем геометрического тела T , содержащегося между двумя параллельными плоскостями, пересекающими ось Ox соответственно в точках с абсциссами $x = 0$ и $x = 3$, если известно, что площадь $F(x)$ поперечного сечения в T равна $\pi \left(16 - \frac{32}{3}x + \frac{16}{9}x^2 \right)$.

О т в е т: 16π .

2. Вычислить объем геометрического тела T , содержащегося между двумя параллельными плоскостями, пересекающими ось Ox соответственно в точках с абсциссами $x = 0$ и $x = H$, если известно, что площадь $F(x)$ поперечного сечения в T равна $\pi \frac{R^2}{H^2} (H^2 - 2Hx + x^2)$.

О т в е т: $\frac{1}{3} \pi R^2 H$.

3. Вычислить объем тела, образованного вращением вокруг оси Ox криволинейной трапеции, ограниченной параболой $y^2 = 2px$, прямыми $x = a$, $x = b$ и осью Ox .

О т в е т: $\pi p (b^2 - a^2)$.

4. Вычислить объем тела, образованного вращением вокруг оси Ox криволинейного треугольника, ограниченного косинусоидой $y = \cos x$, прямой $x = 0$ и осью Ox .

О т в е т: $\frac{\pi^2}{4}$.

5. Вычислить объем тела, образованного вращением вокруг оси Ox эллипса $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$.

О т в е т: $\frac{4}{3} \pi a b^2$.

6. Вычислить объем шарового слоя, образованного вращением вокруг оси Ox криволинейной трапеции, ограничен-

ной прямыми $x = x_1$, $x = x_2$, осью Ox и дугей окружности $y = \sqrt{R^2 - x^2}$ ($-R \leq x_1 < x_2 \leq R$).

О т в е т: $\pi \left[R^2 (x_2 - x_1) - \frac{x_2^3 - x_1^3}{3} \right]$.

7. Вычислить объем конуса, пользуясь формулой Симпсона.

8. Вычислить объем шара, пользуясь формулой Симпсона.

§ 3. Длина дуги плоской кривой

Рассмотрим в плоскости xOy дугу AB (черт. 43) кривой линии, представляющей график функции $y = f(x)$. Точки A и B имеют соответственно координаты $a, f(a)$ и $b, f(b)$. Чтобы найти длину дуги AB данной кривой, разобьем промежуток $[a, b]$ на части (промежутки) точками

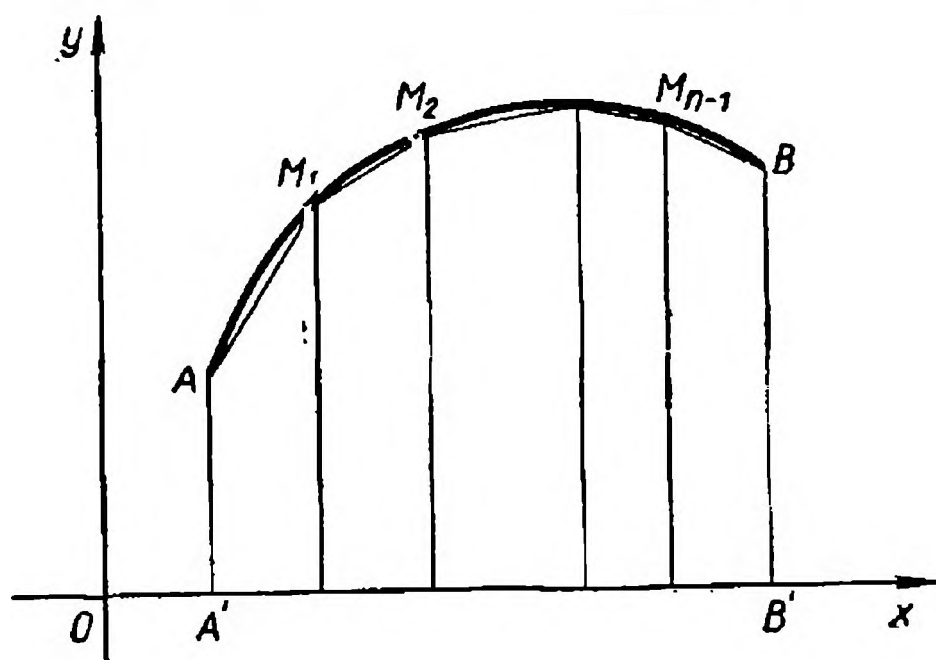
$$x_0 = a < x_1 < x_2 < \dots < x_{n-1} < x_n = b.$$

В каждой из этих точек восставим перпендикуляр к оси Ox до пересечения с кривой AB . Пусть $A, M_1, M_2, \dots, M_{n-1}, B$ — точки пересечения, полученные таким образом. Эти точки делят дугу AB на n частей. Обозначим для общности точку A буквой M_0 , а точку B буквой M_n . Соединив отрезками прямой последовательно каждые две соседние точки, получим ломаную линию (черт. 44) с вершинами $M_i [x_i, f(x_i)]$ ($1 \leq i \leq n$). Так как две соседние вершины M_{i-1}, M_i имеют соответственно координаты

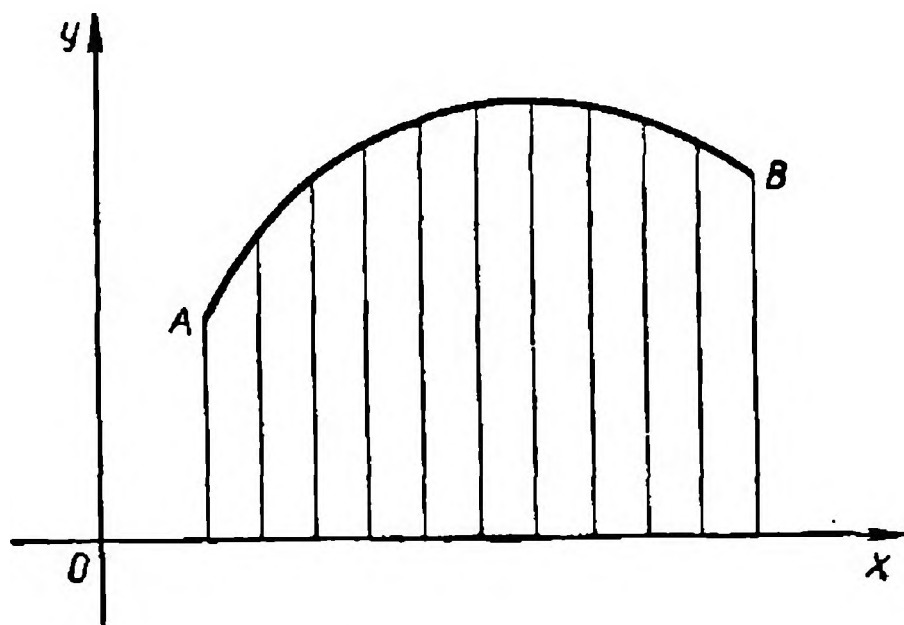
$$[x_{i-1}, f(x_{i-1})], [x_i, f(x_i)], \quad (1 \leq i \leq n)$$

то длина хорды $M_{i-1}M_i$ выражается формулой:

$$M_{i-1}M_i = \sqrt{(x_i - x_{i-1})^2 + [f(x_i) - f(x_{i-1})]^2}.$$



Черт. 43.



Черт. 44.

Допустим, что функция $f(x)$ имеет производную $f'(x)$ и что эта производная непрерывна в промежутке $[a, b]$.

По теореме Лагранжа

$$f(x_i) - f(x_{i-1}) = f'(\xi_i)(x_i - x_{i-1}),$$

где

$$x_{i-1} < \xi_i < x_i.$$

Полагая

$$x_i - x_{i-1} = \Delta x_i,$$

получим.

$$M_{i-1}M_i = \sqrt{(\Delta x_i)^2 + [f'(\xi_i) \Delta x_i]^2} = \Delta x_i \sqrt{1 + [f'(\xi_i)]^2}.$$

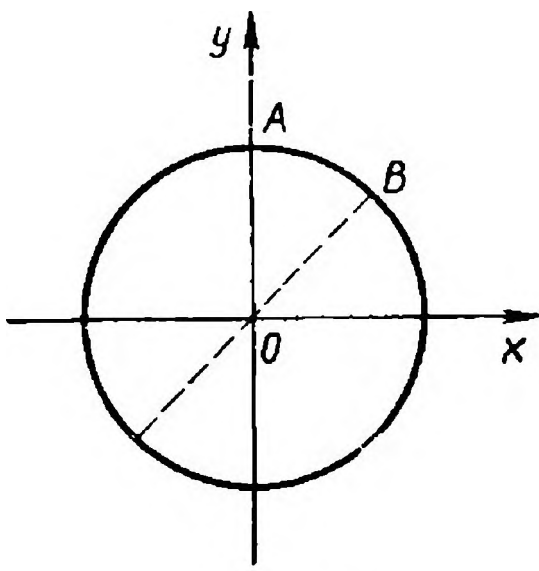
Следовательно, длина ломаной $M_0M_1M_2 \dots M_{n-1}M_n$, вписанной в дугу AB , равна:

$$\begin{aligned} \sigma_n &= \sum_{i=1}^n \sqrt{1 + [f'(\xi_i)]^2} \cdot \Delta x_i = \sqrt{1 + [f'(\xi_1)]^2} \cdot \Delta x_1 + \\ &+ \sqrt{1 + [f'(\xi_2)]^2} \cdot \Delta x_2 + \dots + \sqrt{1 + [f'(\xi_n)]^2} \cdot \Delta x_n. \end{aligned}$$

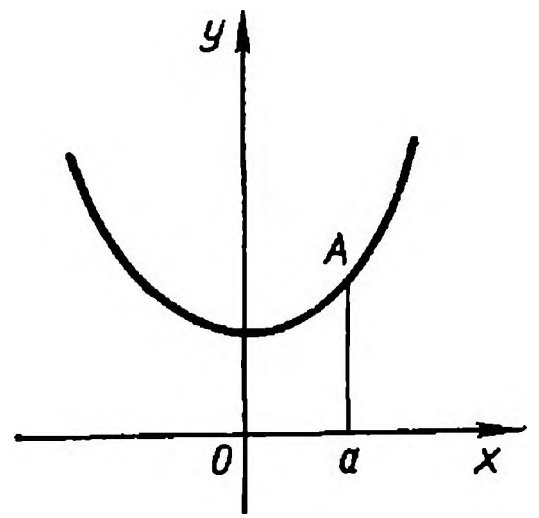
Ломаная линия $M_0M_1 \dots M_{n-1}M_n$, очевидно, отличается от дуги AB . Однако, разбивая промежуток $[a, b]$ на достаточно малые части (промежутки), можно получить ломаные линии, вписанные в дугу, сколь угодно мало отличающиеся от этой дуги. Если мы будем продолжать разбиение промежутка $[a, b]$ на части все более и более малые и вычислять каждый раз сумму σ_n , т. е. длину соответствующей ломаной, то можно ожидать, что в этом процессе разбиения промежутка $[a, b]$ сумма σ_n стремится к определенному конечному пределу. Этот предел, когда он существует, назовем, по определению, *длиной дуги AB* *).

Поэтому, обозначив длину этой дуги буквой L , а наибольшую из длин Δx_i промежутков $[x_{i-1}, x_i]$ ($1 \leq i \leq n$) символом $\max \Delta x_i$,

*) Это определение является обобщением понятия длины дуги кривой линии (окружности), известного из геометрии.



Черт. 45.



Черт. 46

имеем:

$$L = \lim_{\max \Delta x_i \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n \sqrt{1 + [f'(\xi_i)]^2} \cdot \Delta x_i. \quad (1)$$

Однако σ_n представляет интегральную сумму непрерывной функции

$$\sqrt{1 + [f'(x)]^2},$$

а предел (1), как известно, есть определенный интеграл этой функции, взятый по промежутку $[a, b]$:

$$\lim_{\max \Delta x_i \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n \sqrt{1 + [f'(\xi_i)]^2} \cdot \Delta x_i = \int_a^b \sqrt{1 + [f'(x)]^2} dx.$$

Таким образом, длина L дуги AB кривой линии, представляющей график функции $y = f(x)$ в промежутке $[a, b]$, равна определенному интегралу от a до b от $\sqrt{1 + [f'(x)]^2} dx$, т. е.

$$L = \int_a^b \sqrt{1 + [f'(x)]^2} dx. \quad (2)$$

Пример. Вычислить длину окружности (черт. 45):

$$x^2 + y^2 = r^2. \quad (3)$$

Решение. Из уравнения (3) найдем:

$$y^2 = r^2 - x^2,$$

откуда, вычислив производную обеих частей равенства, получим

$$2yy' = -2x; \quad y' = -\frac{x}{y}.$$

Пользуясь формулой (2), найдем длину L дуги AB *):

$$\begin{aligned}
 L &= \int_0^{\frac{r\sqrt{2}}{2}} \sqrt{1 + \frac{x^2}{y^2}} dx = \int_0^{\frac{r\sqrt{2}}{2}} \sqrt{\frac{x^2 + y^2}{y^2}} dx = \\
 &= \int_0^{\frac{r\sqrt{2}}{2}} \sqrt{\frac{r^2}{r^2 - x^2}} dx^{**}) = r \int_0^{\frac{r\sqrt{2}}{2}} \frac{dx}{\sqrt{r^2 - x^2}}^{***}) = r \left[\arcsin \frac{x}{r} \right]_0^{\frac{r\sqrt{2}}{2}} = \\
 &= r \left[\arcsin \frac{\sqrt{2}}{2} - \arcsin 0 \right] = r \left[\frac{\pi}{4} - 0 \right] = \frac{r\pi}{4}.
 \end{aligned}$$

Следовательно, *длина окружности равна* $8 \cdot \frac{r\pi}{4} = 2\pi r$.

Упражнение. Вычислить длину дуги кривой, представляющей график функции $y = \frac{a}{2} (e^{\frac{x}{a}} + e^{-\frac{x}{a}})$ в пределах от нуля до a (черт. 46).

Ответ $\frac{a}{2} (e - e^{-1})$.

§ 4. Площадь поверхности вращения

Рассмотрим в плоскости xOy дугу AB (черт. 47) кривой линии, представляющей график функции $y = f(x)$. Точки A и B имеют соответственно координаты $a, f(a)$ и $b, f(b)$. Допустим, что:

- 1) функция $f(x)$ непрерывна в промежутке $[a, b]$;
- 2) $f(x) > 0$ на $[a, b]$;
- 3) существует производная $f'(x)$ функции $f(x)$;
- 4) эта производная непрерывна в промежутке $[a, b]$.

Разобьем промежуток $[a, b]$ на части (промежутки) точками

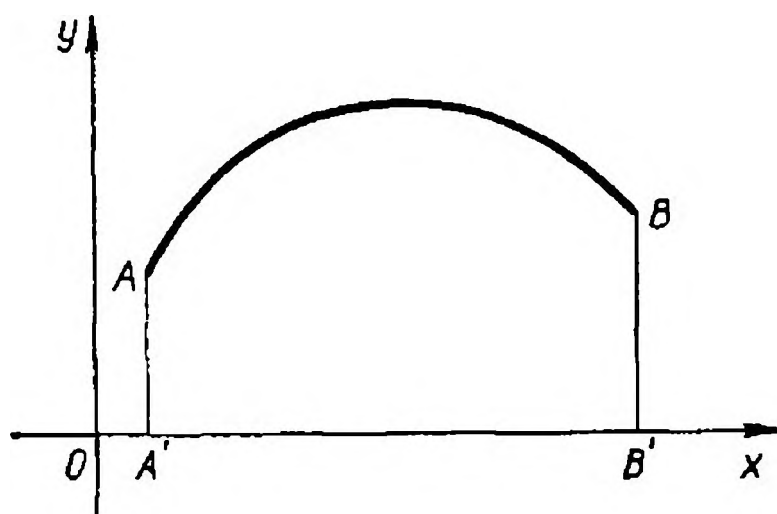
$$x_0 = a < x_1 < x_2 < \dots < x_{n-1} < x_n = b.$$

В каждой из этих точек восставим перпендикуляр к оси Ox до пересечения с кривой AB в точках $A, M_1, M_2, \dots, M_{n-1}, B$. Обозначим

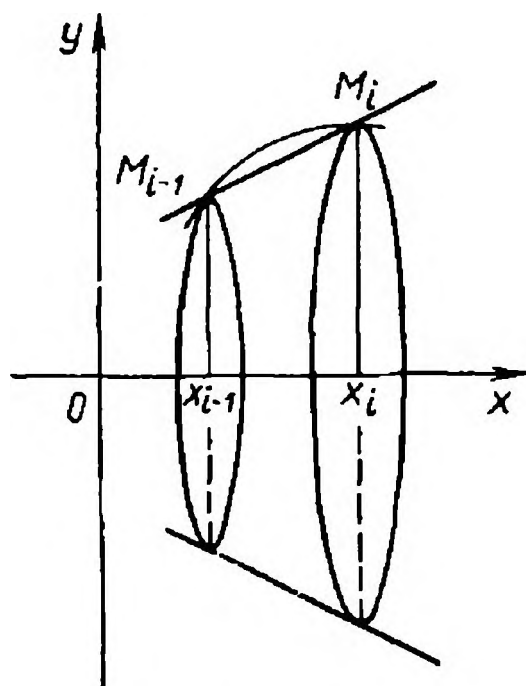
*) Дуга AB содержится между прямыми $x = 0$ и $y = x$ и равна одной восьмой окружности; абсциссы точек A и B соответственно равны 0 и $\frac{r\sqrt{2}}{2}$.

**) Функция $\frac{1}{\sqrt{r^2 - x^2}}$ непрерывна в промежутке $\left[0; \frac{r\sqrt{2}}{2}\right]$.

***) См. упражнение 13, § 6.



Черт. 47.



Черт. 48.

для общности точку A буквой M_0 и точку B буквой M_n . Соединив отрезками прямой последовательно каждые две соседние точки

$$M_{i-1} [x_{i-1}, f(x_{i-1})], M_i [x_i, f(x_i)] \quad (1 \leq i \leq n),$$

получим ломаную линию $M_0M_1M_2 \dots M_{n-1}M_n$ (черт. 43), вписанную в дугу AB . При вращении фигуры $A'ABV'$ вокруг оси Ox дуга AB опишет некоторую поверхность вращения.

Чтобы найти площадь этой поверхности, вычислим сперва площадь поверхности, описанной при вращении вокруг оси Ox ломаной линией $M_0M_1M_2 \dots M_n$.

При этом вращении каждая сторона $M_{i-1}M_i$ ломаной линии опишет боковую поверхность усеченного конуса *) (черт. 48).

Площадь этой поверхности равна:

$$2\pi \frac{f(x_{i-1}) + f(x_i)}{2} \cdot \sqrt{(x_i - x_{i-1})^2 + [f(x_i) - f(x_{i-1})]^2} **).$$

Сумма

$$\sum_{i=1}^n 2\pi \frac{f(x_{i-1}) + f(x_i)}{2} \cdot \sqrt{(x_i - x_{i-1})^2 + [f(x_i) - f(x_{i-1})]^2} \quad (1)$$

выражает площадь поверхности, описанной при вращении ломаной $M_0M_1M_2 \dots M_{n-1}M_n$ вокруг оси Ox .

*) В частности, сторона ломаной линии может описать поверхность конуса или цилиндра, однако и в этом случае площадь соответствующей поверхности можно вычислить по формуле для площади боковой поверхности усеченного конуса.

**) Здесь применена формула для площади боковой поверхности усеченного конуса: $S_{\text{бок}} = 2\pi \frac{r_1 + r_2}{2} \cdot G$, где r_1 и r_2 — радиусы оснований, а G — образующая усеченного конуса. Длина образующей найдена по формуле для расстояния между двумя точками.

Применяя формулу Лагранжа (см. § 4, гл. I)

$$f(x_i) - f(x_{i-1}) = f'(\xi_i)(x_i - x_{i-1}),$$

где

$$x_{i-1} < \xi_i < x_i,$$

и полагая

$$x_i - x_{i-1} = \Delta x_i,$$

запишем сумму (1) в виде

$$\sum_{i=1}^n 2\pi \cdot \frac{f(x_{i-1}) + f(x_i)}{2} \cdot \sqrt{1 + [f'(\xi_i)]^2} \cdot \Delta x_i. \quad (2)$$

Считая разности $(\xi_i - x_{i-1})$, $(x_i - \xi_i)$ достаточно малыми и учитывая, что $f(x)$ непрерывна в $[a, b]$, заменим $f(x_{i-1})$ и $f(x_i)$ числом $f(\xi_i)$ *). Тогда из (2) получим сумму

$$\sum_{i=1}^n 2\pi f(\xi_i) \sqrt{1 + [f'(\xi_i)]^2} \cdot \Delta x_i. \quad (3)$$

Будем продолжать разбиение промежутка $[a, b]$ на части (промежутки) все более и более мелкие и вычислять каждый раз соответствующую сумму (3). Можно ожидать, что в этом процессе разбиения промежутка $[a, b]$ сумма (3) стремится к определенному конечному пределу. Этот предел, когда он существует, назовем, по определению, *площадью поверхности вращения, описанной дугой АВ**).*

Обозначим символом $\max \Delta x_i$ наибольшую из длин Δx_i промежутков $[x_{i-1}, x_i]$ ($1 \leq i \leq n$). Когда $\max \Delta x_i$ стремится к нулю, длина каждого из промежутков $[x_{i-1}, x_i]$ ($1 \leq i \leq n$) стремится к нулю, а число n этих промежутков стремится к бесконечности.

Поэтому, обозначив буквой F площадь поверхности вращения, описанной дугой АВ, можем записать:

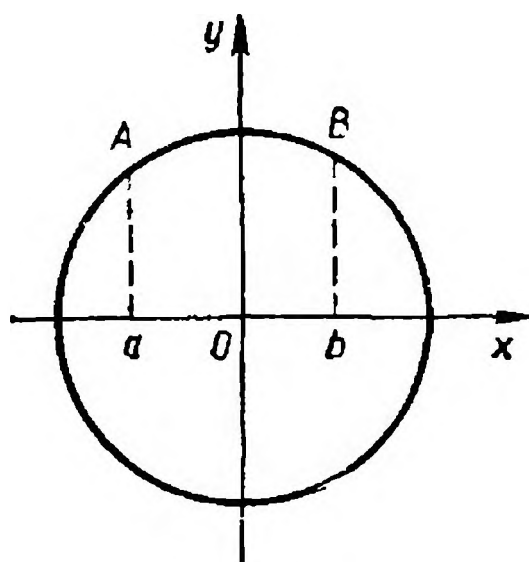
$$F = \lim_{\max \Delta x_i \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n 2\pi f(\xi_i) \sqrt{1 + [f'(\xi_i)]^2} \cdot \Delta x_i. \quad (4)$$

Однако выражение (3) представляет интегральную сумму непрерывной функции

$$2\pi f(x) \sqrt{1 + [f'(x)]^2}.$$

*) Малым приращениям $(\xi_i - x_{i-1})$, $(x_i - \xi_i)$ аргумента соответствуют также малые приращения $[f(\xi_i) - f(x_{i-1})]$, $[f(x_i) - f(\xi_i)]$ непрерывной функции $f(x)$, так что можем считать $f(x_{i-1})$ и $f(x_i)$ почти равными числу $f(\xi_i)$.

**) Это определение является обобщением известного из геометрии определения площади поверхности круглого тела (шара).



Черт. 49.

а предел (4) равен определенному интегралу этой функции, взятому по промежутку $[a, b]$:

$$\lim_{\max \Delta x_i \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n 2\pi f(\xi_i) \sqrt{1 + [f'(\xi_i)]^2} \cdot \Delta x_i = \int_a^b 2\pi f(x) \sqrt{1 + [f'(x)]^2} dx.$$

Таким образом, площадь F поверхности вращения, описанной дугой AB кривой, представляющей график функции $y = f(x)$ на $[a, b]$, равна определенному интегралу от a до b

$$F = \int_a^b 2\pi f(x) \sqrt{1 + [f'(x)]^2} dx, \text{ т. е.} \quad (5)$$

Пример. Из геометрии известно, что шаровой пояс можно рассматривать как поверхность, описанную дугой окружности при вращении вокруг диаметра, не пересекающего эту дугу.

Пусть AB (черт. 49) — дуга окружности радиуса R с центром в начале системы координат xOy , уравнение которой:

$$y = f(x) = \sqrt{R^2 - x^2}^*).$$

Обозначим координаты точек A и B соответственно буквами a и b ($b > a$).

Нам нужно вычислить площадь поверхности, описанной этой дугой при вращении вокруг оси Ox , т. е. площадь шарового пояса.

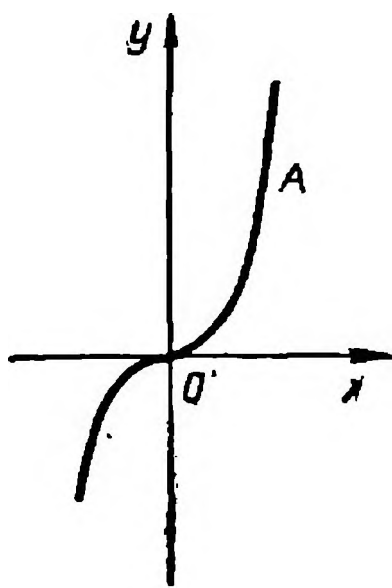
Имея в виду формулу (5), выполним следующие операции:

$$\begin{aligned} 1. f'(x) &= -\frac{2x}{2\sqrt{R^2 - x^2}} = -\frac{x}{\sqrt{R^2 - x^2}}. \\ 2. \sqrt{1 + [f'(x)]^2} &= \sqrt{1 + \left[-\frac{x}{\sqrt{R^2 - x^2}}\right]^2} = \frac{R}{\sqrt{R^2 - x^2}}^{**}). \\ 3. f(x) \cdot \sqrt{1 + [f'(x)]^2} &= \sqrt{R^2 - x^2} \cdot \frac{R}{\sqrt{R^2 - x^2}} = R. \\ 4. \int_a^b 2\pi f(x) \sqrt{1 + [f'(x)]^2} dx &= \int_a^b 2\pi R dx. \end{aligned}$$

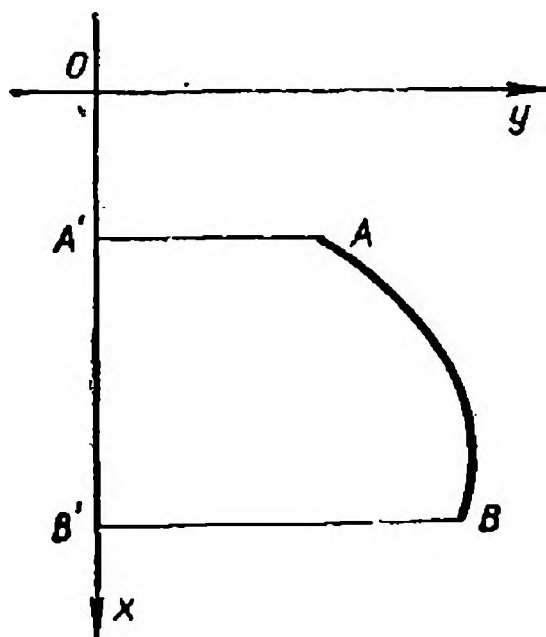
*) Из уравнения окружности $x^2 + y^2 = R^2$ для ее половины, расположенной над осью Ox , получим $y = \sqrt{R^2 - x^2}$.

**) Тот же результат можно получить и так: из уравнения окружности найдем $y^2 = R^2 - x^2$, откуда $2yy' = -2x$; $y' = -\frac{x}{y}$;

$$\sqrt{1 + [f'(x)]^2} = \sqrt{1 + \left(-\frac{x}{y}\right)^2} = \sqrt{\frac{x^2 + y^2}{y^2}} = \frac{R}{\sqrt{R^2 - x^2}}.$$



Черт. 50.



Черт. 51.

$$5. \int_a^b 2\pi R dx = 2\pi R \int_a^b dx = 2\pi R [x]_a^b = 2\pi R (b - a).$$

Обозначив высоту шарового пояса через H и учитывая, что $b - a = H$, найдем:

$$F = 2\pi R H,$$

т. е. **площадь поверхности шарового пояса равна произведению длины окружности большого круга ($2\pi R$) на высоту (H).**

Замечание 1. В частности, при $a = -R$ найдем площадь сегментной поверхности *)

$$F = 2\pi R H,$$

где H — высота сегментной поверхности.

Замечание 2. В частности, при $a = -R$, $b = R$ и, значит, $H = b - a = R - (-R) = 2R$ найдем площадь поверхности шара:

$$F = 4\pi R^2.$$

Упражнение. Дуга OA (черт. 50) кубической параболы $y = x^3$, ограниченная точками с абсциссами $x = 0$ и $x = a$, вращается вокруг оси Ox . Вычислить площадь поверхности, описанной дугой OA при вращении вокруг оси Ox .

Ответ: $\frac{\pi}{27} (10\sqrt{10} - 1).$

§ 5. Задачи из физики

1. Давление жидкости на пластинку. Предположим, что вертикальная пластинка $A'ABV'$, имеющая форму криволинейной трапеции (черт. 51), погружена в жидкость. Верхняя

*) Сегментную поверхность можно рассматривать как поверхность, описанную дугой окружности при вращении вокруг диаметра, который проходит через один из концов дуги.

сторона $A'A$ этой пластинки параллельна свободной поверхности жидкости, сторона ее $A'B'$ вертикальна, а сторона $B'B$ параллельна $A'A$.

Систему координат выберем так, чтобы ось Ox была направлена вниз по вертикальной стороне $A'B'$ пластинки, а ось Oy была расположена на свободной поверхности жидкости и параллельна $A'A$ (черт. 51). Сторона AB пластинки имеет форму кривой линии, уравнение которой есть $y = f(x)$. Точки A' и B' имеют соответственно абсциссы a , b ($a < b$).

Требуется определить силу давления жидкости на пластинку $A'ABV'$.

Решение. Из физики известно, что сила давления жидкости на горизонтальную пластинку, погруженную в нее на глубину x^*), равна весу столба жидкости, имеющего в основании эту пластинку и высоту x . Следовательно, введя обозначения: s — для площади пластинки, γ — для удельного веса жидкости и q — для силы давления жидкости, можем записать:

$$q = \gamma s x. \quad (1)$$

Согласно принципу Паскаля давление в жидкости передается одинаково во всех направлениях, следовательно, и в направлении, перпендикулярном к пластинке $A'ABV'$. Но сила давления жидкости на вертикальную пластинку $A'ABV'$ изменяется с глубиной (см. формулу 1), поэтому для ее вычисления применим тот же способ, что и при вычислении площадей и объемов (см. § 1, гл. II, § 1, 2, гл. III).

Итак, разобьем промежутки $[a, b]$ на n частей (промежутков) точками, абсциссы которых x_1, x_2, \dots, x_{n-1} удовлетворяют условию:

$$a < x_1 < x_2 < \dots < x_{n-1} < b.$$

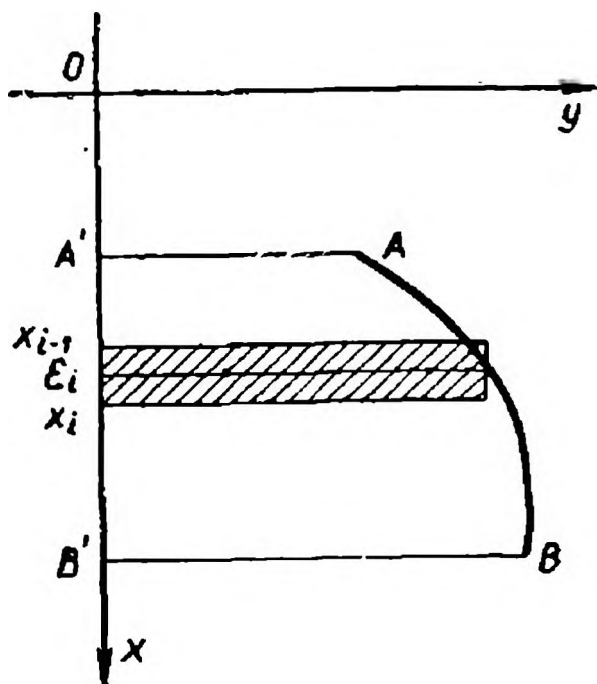
Для общности положим $a = x_0$ и $b = x_n$. В каждом из промежутков

$$[x_{i-1}, x_i] \quad (1 \leq i \leq n)$$

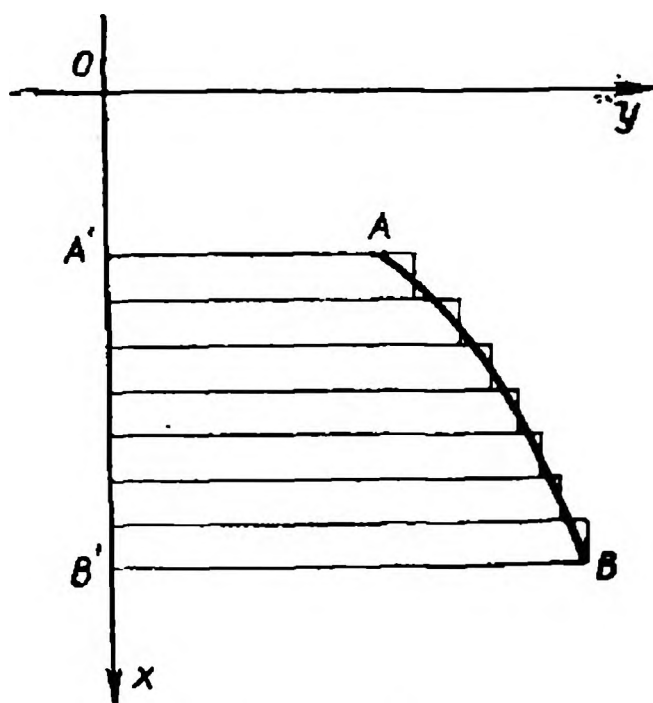
выберем произвольным образом по точке с абсциссой ξ_i , которая, следовательно, удовлетворяет условию

$$x_{i-1} \leq \xi_i \leq x_i.$$

*) Глубина x отсчитывается от свободной поверхности жидкости.



Черт. 52.



Черт. 53.

В каждой точке ξ_i (черт. 52) восставим перпендикуляр к оси Ox до пересечения с AB . Получим точки пересечения с координатами

$$\xi_i, f(\xi_i) \quad (1 \leq i \leq n).$$

Наконец, проведем через точки $[\xi_i, f(\xi_i)]$ прямые, параллельные оси Ox , и построим n прямоугольников (черт. 53) соответственно с основанием $f(\xi_i)$, высотой $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$ и площадью, равной $f(\xi_i) \Delta x_i$. Хотя давление жидкости на нижнюю сторону прямоугольника с измерениями

$$f(\xi_i), \Delta x_i \quad (1 \leq i \leq n)$$

больше, чем давление на его верхнюю сторону, мы допустим, что давление жидкости на этот прямоугольник постоянное на всей его поверхности.

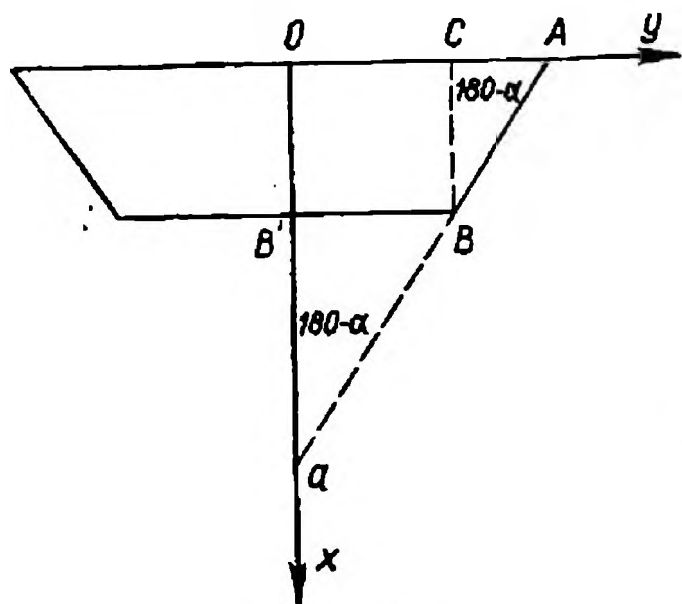
Таким образом, учитывая, что площадь прямоугольника равна $f(\xi_i) \Delta x_i$, соответствующий столб жидкости имеет высоту, равную ξ_i , и удельный вес жидкости равен γ , найдем, что сила давления жидкости на этот прямоугольник равна:

$$\gamma \xi_i f(\xi_i) \Delta x_i \quad (1 \leq i \leq n).$$

Сумма

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^n \gamma \xi_i f(\xi_i) \Delta x_i &= \gamma \xi_1 f(\xi_1) \Delta x_1 + \\ &+ \gamma \xi_2 f(\xi_2) \Delta x_2 + \dots + \gamma \xi_n f(\xi_n) \Delta x_n \end{aligned} \quad (2)$$

выражает силу давления жидкости на пластинку $A'ABV'$, вычисленную пока что приближенно.



Черт. 54.

Обозначив силу давления жидкости на пластинку $A'BV'$ буквой Q , а наибольшую из длин Δx_i промежутков $[x_{i-1}, x_i]$ ($1 \leq i \leq n$) символом $\max \Delta x_i$, имеем:

$$Q = \lim_{\max \Delta x_i \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n \gamma \xi_i f(\xi_i) \quad (3)$$

Однако (2) является интегральной суммой непрерывной функции $\gamma x f(x)$, а предел (3), как мы знаем, есть опреде-

ленный интеграл этой функции, взятый по промежутку $[a, b]$:

$$\lim_{\max \Delta x_i \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n \gamma \xi_i f(\xi_i) \Delta x_i = \int_a^b \gamma x f(x) dx.$$

Следовательно,

$$Q = \int_a^b \gamma x f(x) dx. \quad (4)$$

Полученная нами формула (4) дает решение задачи, сформулированной выше (стр. 94).

Упражнение. Плотина имеет форму равнобедренной трапеции. Верхнее основание ее равно a и находится на свободной поверхности воды, а нижнее основание, погруженное в воду, равно b . Высота OB' плотины (черт. 54) (от свободной поверхности воды до нижнего основания трапеции) равна H . Требуется вычислить силу давления воды на эту плотину.

Решение. Ось Ox направим по оси симметрии OB' плотины (черт. 54), а ось Oy — по верхней стороне OA .

Вычислим силу давления воды на половину $OB'BA$ плотины.

Чтобы написать уравнение стороны AB , нужно найти ее угловой коэффициент*), т. е. тангенс угла α , образованного прямой AB с осью Ox (черт. 54). Проведем BC параллельно Ox . Из прямоугольного треугольника ABC , в котором катет AC равен $\frac{a}{2} - \frac{b}{2}$, а катет BC равен H , найдем

$$\operatorname{tg}(180^\circ - \alpha) = \frac{a - b}{2H},$$

*) Здесь имеем в виду уравнение вида $y = mx + n$ прямой.

откуда

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{b-a}{2H}.$$

Отрезок, отсекаемый прямой AB на оси Oy , равен $\frac{a}{2}$. Следовательно, уравнение прямой AB запишется так:

$$y = \frac{b-a}{2H} x + \frac{a}{2}.$$

Применяя формулу (4), найдем:

$$\frac{Q}{2} = \int_0^H \gamma x \left(\frac{b-a}{2H} x + \frac{a}{2} \right) dx,$$

где $\frac{Q}{2}$ — сила давления воды на половину $OB'VA$ плотины.

Выполняя вычисления, получим:

$$\begin{aligned} \frac{Q}{2} &= \int_0^H \gamma \frac{b-a}{2H} x^2 dx + \int_0^H \gamma \frac{a}{2} x dx = \gamma \frac{b-a}{2H} \int_0^H x^2 dx + \\ &+ \gamma \frac{a}{2} \int_0^H x dx *) = \gamma \frac{b-a}{2H} \left[\frac{x^3}{3} \right]_0^H + \gamma \frac{a}{2} \left[\frac{x^2}{2} \right]_0^H = \\ &= \gamma \frac{b-a}{2H} \frac{H^3}{3} + \gamma \frac{a}{2} \frac{H^2}{2} = \gamma \frac{b-a}{2} \frac{H^2}{3} + \gamma \frac{a}{2} \frac{H^2}{2} = \\ &= \gamma \frac{H^2}{2} \left(\frac{b-a}{3} + \frac{a}{2} \right) = \gamma \frac{H^2}{2} \frac{2b-2a+3a}{6} = \gamma \frac{H^2}{2} \frac{2b+a}{6}, \end{aligned}$$

откуда

$$Q = \gamma \frac{H^2}{6} (2b + a).$$

В частности, при $a = 350$ дм, $b = 125$ дм, $H = 80$ дм, $\gamma = 1 \frac{\kappa\Gamma}{\text{дм}^3}$, получим:

$$Q = 1 \cdot \frac{80^2}{6} (2 \cdot 125 + 350) \kappa\Gamma = \frac{80^2}{6} \cdot 600 \kappa\Gamma = 640\,000 \kappa\Gamma.$$

2. Путь, пройденный движущимся телом. В § 3, гл. 1 мы нашли, что длина L пути, пройденного телом, движущимся со скоростью $v = f(t)$, сводится к задаче о вычислении предела суммы $\sum_{i=1}^n f(\tau_i) \Delta t_i$ при $\max \Delta t_i$, стремящемся

*) Удельный вес воды γ — постоянная.

к нулю. Этот предел, как мы знаем, обозначается симво-

лом $\int_a^b f(t) dt$.

Следовательно,

$$L = \int_a^b f(t) dt. \quad (5)$$

Применим эту формулу для вычисления пути, пройденного телом в свободном падении.

Известно, что скорость v тела, падающего в пустоте с начальной скоростью v_0 , равна $v_0 + gt$:

$$v = v_0 + gt.$$

Вычислим длину пути L , пройденного этим телом за промежуток времени $[0, T]$.

Решение.

$$\begin{aligned} L &= \int_0^T (v_0 + gt) dt = \int_0^T v_0 dt + \int_0^T gtdt = v_0 \int_0^T dt + \\ &+ g \int_0^T t dt = v_0 [t]_0^T + g \left[\frac{t^2}{2} \right]_0^T, \end{aligned}$$

откуда

$$L = v_0 T + g \frac{T^2}{2}.$$

3. Работа переменной силы. Допустим, что тело M перемещается по оси Ox от A к B (черт. 55) под действием силы F , направленной по этой оси. Обозначим абсциссы точек A и B соответственно через a и b . Пусть величина силы F зависит от абсциссы x точки приложения, т. е. $F = f(x)$, где $f(x)$ — функция, непрерывная на $[a, b]$.

Требуется вычислить работу, которую совершает сила F при перемещении тела M из A в B .

Решение. Разобьем промежуток $[a, b]$ на n частей (промежутков); предположим, что абсциссы точек деления $x_1, x_2, x_3, \dots, x_{n-1}$ удовлетворяют неравенствам

$$a < x_1 < x_2 < \dots < x_{n-1} < b.$$

Для общности положим $a = x_0$ и $b = x_n$. В каждом из промежутков

$$[x_{i-1}, x_i] \quad (1 \leq i \leq n)$$



Черт. 55.

выберем произвольным образом по точке с абсциссой ξ_i , которая, следовательно, удовлетворяет условию

$$x_{i-1} \leq \xi_i \leq x_i.$$

Функция $F = f(x)$, будучи непрерывной, почти не изменяется на промежутке $[x_{i-1}, x_i]$, длина которого $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$ достаточно мала; поэтому мы можем считать силу F на промежутке $[x_{i-1}, x_i]$ приблизительно постоянной и равной $f(\xi_i)$. Работа, совершенная постоянной силой, величина которой $f(\xi_i)$, при перемещении тела M из точки x_{i-1} в точку x_i равна

$$f(\xi_i) \Delta x_i.$$

Сумма

$$\sum_{i=1}^n f(\xi_i) \Delta x_i = f(\xi_1) \Delta x_1 + f(\xi_2) \Delta x_2 + \dots + f(\xi_n) \Delta x_n \quad (6)$$

выражает приближенное значение искомой работы, совершенной силой $F = f(x)$ на промежутке $[a, b]$.

Обозначив эту работу через L , а наибольшую из длин промежутков $[x_{i-1}, x_i]$ через $\max \Delta x_i$, мы можем записать:

$$L = \lim_{\max \Delta x_i \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n f(\xi_i) \Delta x_i. \quad (7)$$

Но (6) есть интегральная сумма непрерывной функции $f(x)$, а предел (7) является определенным интегралом этой функции, взятым по промежутку $[a, b]$:

$$\lim_{\max \Delta x_i \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n f(\xi_i) \Delta x_i = \int_a^b f(x) dx.$$

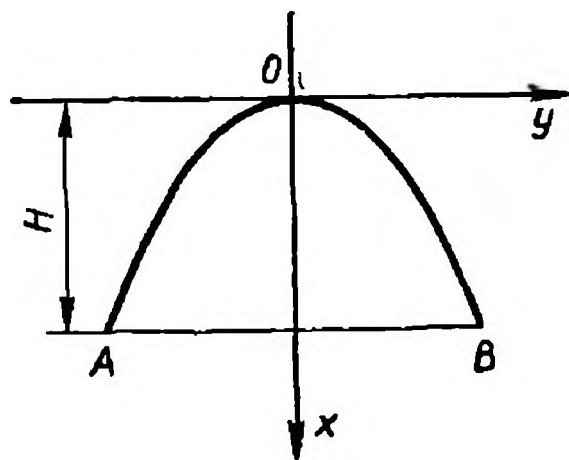
Таким образом,

$$L = \int_a^b f(x) dx. \quad (8)$$

Полученная нами формула (8) является решением задачи, сформулированной выше (стр. 99).

Примечание. Если направление силы F совпадает с направлением движения тела M по оси Ox , то работа, совершенная этой силой, имеет положительное значение; в противном случае эта работа отрицательна.

Пример. Предположим, что на прямой MN расположены два электрических заряда c и c' и что расстояние



Черт. 56.

Решение.

между ними равно r . Сила взаимодействия этих двух зарядов направлена по MN и равна

$$F = k \frac{cc'}{r^2},$$

где k — постоянная.

Требуется вычислить работу, совершенную силой F , когда заряд c неподвижен, а заряд c' перемещается по MN из R_1 в R_2 .

$$L = \int_{R_1}^{R_2} k \frac{cc'}{r^2} dr = kcc' \int_{R_1}^{R_2} \frac{dr}{r^2},$$

откуда

$$L = kcc' \left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2} \right).$$

В частности, если заряд $c' = +1$ перемещается под действием силы F из положения R_1 в бесконечно удаленную точку, то работа, совершенная силой F , равна:

$$L = \lim_{R_2 \rightarrow \infty} kc \cdot 1 \cdot \left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2} \right) = \frac{kc}{R_1}.$$

Таким образом, нами получено значение потенциала в точке с абсциссой R_1 электрического поля, создаваемого зарядом c .

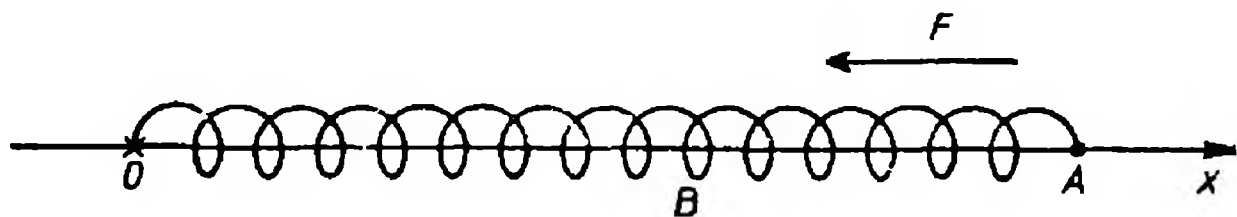
Упражнения.

1. Вертикальная пластина, погруженная в жидкость, имеет форму прямоугольника. Основание этого прямоугольника равно b , а высота равна a ; верхнее основание пластины параллельно свободной поверхности воды и находится на глубине h . Найти давление воды на эту пластину.

Ответ: $\frac{1}{2} ab (a + 2h)$.

2. Вертикальная пластина AOB ограничена параболой $y^2 = 2px$ (черт. 56). Вершина параболы находится на свободной поверхности воды. Нижняя сторона AB пластины находится на глубине H . Вычислить давление воды на эту пластину.

Ответ: $\frac{4}{5} \sqrt{2p} \cdot H^2 \sqrt{H}$.



Черт. 57.

3. Точка движется по прямой со скоростью $v = at^2$. Вычислить длину пути, пройденного этой точкой в первые T единиц времени от начального момента $t = 0$.

Ответ: $\frac{1}{3} aT^3$.

4. Точка M движется по прямой AB под действием силы $F = a \cos x$, направленной вдоль прямой AB . Вычислить работу, совершенную силой F при перемещении точки на расстоянии от $x = 0$ до $x = \frac{\pi}{2}$.

Ответ: a .

5. Точка M перемещается по оси Ox из точки A с абсциссой a в точку B с абсциссой b (черт. 57) под действием упругой силы F пружины, пропорциональной абсциссе x точки M . Вычислить работу, совершенную силой F .

Указание. $F = -kx$, где $k > 0$ — коэффициент пропорциональности. Знак «—» в выражении для F показывает, что сила F имеет отрицательное направление по оси Ox .

Ответ: $\frac{k}{2} (a^2 - b^2)$.

§ 6. Краткие исторические сведения

Интегральное исчисление возникло в связи с задачами об определении площадей и объемов.

За 2000 лет до н. э. египтяне и вавилоняне уже умели определять приближенно площадь круга и знали правило для вычисления объема усеченной пирамиды.

Задача теоретического обоснования правил для вычисления площадей и объемов появляется впервые в науке у древних греков. Знаменитый философ-материалист Демокрит из Абдеры в V веке до н. э. рассматривает тела, как состоящие из очень большого числа весьма малых частиц. С этой точки зрения конус представляет совокупность весьма тонких цилиндрических дисков различных диаметров.

Большую роль сыграла в истории интегрального исчисления задача о квадратуре *) круга. Гиппократ из Хиоса (середина V в. до н. э.) первым нашел точную квадратуру нескольких криволинейных фигур.

Философ Антифон (конец V в. до н. э.) применил способ приближения для определения площади криволинейной фигуры с помощью вписанных в нее прямолинейных фигур.

В IV веке до н. э. Евдокс из Книды применил для вычисления площадей и объемов метод исчерпывания **).

Архимед (287—212 гг. до н. э.) при определении площадей и объемов пользовался разложением плоской фигуры или геометрического тела на элементы. Так, например, в задаче вычисления объема эллипсоида вращения он делит его ось симметрии на равные части и строит вписанные и описанные цилиндры, имеющие высотой равные отрезки оси симметрии. Иными словами, Архимед впервые составляет для определения объема суммы, которые в настоящее время называются интегральными суммами.

И. Кеплер (1615 г.) и Б. Кавальери (1635 г.) развили метод «неделимых», применяя его для вычисления площадей и объемов. Связь между дифференцированием и интегрированием была показана (1670 г.) И. Барроу.

Появление дифференциального и интегрального исчислений в настоящем смысле этого слова относится к последней трети XVII века. Основные операции нового исчисления были исследованы в общем виде И. Ньютоном и Г. Лейбницем.

Г. Лейбницу принадлежит символ дифференциала dx (1675—1684 гг.) и символ интеграла $\int y dx$ (1675, 1668 гг.).

Символ $\int_a^b f(x) dx$ ввел Ж. Фурье (1819—1822 гг.).

• Термин «интеграл» (от латинского integer — целый) был предложен И. Бернулли.

Работа по исследованию основ дифференциального и интегрального исчислений начинается в XIX веке трудами О. Коши и Б. Больцано.

В развитие интегрального исчисления в XIX веке внесли значительный вклад М. В. Остроградский, В. Я. Буняковский, В. Я. Чебышев.

*) Квадратура круга — построение такого квадрата, площадь которого была бы равна площади данного круга.

**) См. «Начала Евклида», книги XI—XV. М. — Л., 1950, стр. 281.

Литература

1. Н. П. Тарасов. Курс высшей математики для техникумов, изд. 4. М. — Л., 1945.
2. А. К. Власов. Курс высшей математики, т. 1, изд. 4, исправленное. М. — Л., 1945.
3. Р. Курант и Г. Роббинс. Что такое математика. М. — Л., 1947.
4. Г. М. Фихтенгольц. Курс дифференциального и интегрального исчисления, т. II. М. — Л., 1948.
5. Н. Н. Лузин. Интегральное исчисление, изд. 3. М., 1952.
6. Энциклопедия элементарной математики, под ред. П. С. Александрова, Я. И. Маркушевича и А. Я. Хинчина, кн. 3. Функции и пределы. М. — Л., 1952.
7. А. Я. Хинчин. Краткий курс математического анализа. М., 1953.
8. «Академия наук СССР». Математика, ее содержание, методы и значение, т. 1, 2. М., 1956.
9. И. К. Парно. Производная и ее применение к исследованию функций. М., 1968.
10. И. А. Марнянский. Элементы математического анализа в школьном курсе математики. М., 1964.
11. А. Н. Черкасов. Введение в высшую математику. М., 1964.
12. Л. С. Фрейман. Что такое высшая математика. М., 1965.
13. И. Г. Башмакова, А. Н. Колмогоров, А. П. Юшкевич. Статья «Знаки математические» в БСЭ.
14. А. П. Юшкевич. Статья «Дифференциальное исчисление» в БСЭ.
15. А. П. Юшкевич. Статья «Интегральное исчисление» в БСЭ.
16. Д. Я. Стройк. Краткий очерк истории математики. М., 1964.

Предисловие	3
Глава I. Производные и дифференциалы элементарных функций	
§ 1. Число ϵ	5
§ 2. Дифференциал	11
§ 3. Производная сложной функции	14
§ 4. Теорема о конечном приращении (теорема Лагранжа)	24
§ 5. Краткие исторические сведения	28
Глава II. Интеграл	
§ 1. Задача о площади криволинейной трапеции	29
§ 2. Пример вычисления площади криволинейного треугольника	33
§ 3. Задача об определении пройденного пути по скорости	39
§ 4. Интегральная сумма и определенный интеграл	40
§ 5. Вычисление определенного интеграла	43
§ 6. Первообразная функция	49
§ 7. Свойства определенных интегралов	60
Глава III. Приложения определенного интеграла	
§ 1. Вычисление площадей	66
§ 2. Объем геометрических тел	72
§ 3. Длина дуги плоской кривой	86
§ 4. Площадь поверхности вращения	89
§ 5. Задачи из физики	93
§ 6. Краткие исторические сведения	101
Литература	103

Иван Константинович
Парно

ИНТЕГРАЛЫ В ДЕСЯТОМ КЛАССЕ
СРЕДНЕЙ ШКОЛЫ

Редактор Г. С. Уманский. Художественный редактор В. Г. Ежков
Технический редактор Л. К. Кухаревич
Корректор Н. М. Данковцева

* * *

Сдано в набор 23/V 1969 г. Подписано к печати 12/XII 1969 г. $84 \times 108^{1/32}$.
Типографская № 1. Печ. л. 3,25. Условных л. 5,46. Уч.-изд. л. 4,74. Тираж
40 тыс. экз. (Пл. 1969 г. № 160).

* * *

Издательство «Просвещение» Комитета по печати при Совете Министров РСФСР.
Москва, 3-й проезд Марьиной рощи, 41
Типография издательства ЦК КП Белоруссии. Минск, Ленинский проспект, 79.
Заказ № 349. Цена 14 коп.