

**Ю. В. ЛИПОВЦЕВ, О. Н. ТРЕТЬЯКОВА**

# **ОСНОВЫ ВЫСШЕЙ МАТЕМАТИКИ ДЛЯ ИНЖЕНЕРОВ**

**Учебное пособие**

*Рекомендовано в качестве учебного пособия  
для студентов высших технических учебных заведений*



Москва  
«Вузовская книга»  
2009

ББК 22.1я73  
Л61

*Рекомендовано УМО АРК Российской Федерации в качестве учебного  
пособия для студентов высших технических учебных заведений*

Рецензенты:

д-р физ.-мат. наук, проф. *А. В. Пантелеев*;  
канд. физ.-мат. наук, доц. *А. С. Бортакровский*

**Липовцев Ю. В., Третьякова О. Н.**  
Л61 Основы высшей математики для инженеров: учеб. пособие /  
Ю. В. Липовцев, О. Н. Третьякова. — М.: Вузовская книга,  
2009. — 484 с.: ил.

ISBN 978-5-9502-0272-8

В учебном пособии приведены основные теоретические положения традиционных курсов высшей математики для инженерных специальностей технических вузов. Наряду с традиционным изложением курсов алгебры, математического анализа и дифференциальных уравнений, в данном пособии при решении ряда задач из этих разделов используются численные методы и примеры их программной реализации. Особенностью пособия является акцент на постановке и решении физических и технических задач, приводящих к задачам математической физики.

Предназначено для студентов технических вузов всех инженерных специальностей.

**ББК 22.1я73**

ISBN 978-5-9502-0272-8

© Липовцев Ю. В., Третьякова О. Н., 2002  
© ЗАО «Издательское предприятие  
«Вузовская книга», 2009

Математика есть единая  
симфония бесконечного.

*Д. Гильберт*

## ПРЕДИСЛОВИЕ

В данном учебном пособии представлен достаточно подробный курс лекций по высшей математике, читаемый для студентов технических специальностей вузов. При разработке пособия использованы учебники и учебные пособия, список которых прилагается в конце книги. К числу основных использованных источников следует отнести учебные пособия и учебники Г. М. Фихтенгольца, П. С. Александрова, Д. В. Беклемишева, В. А. Ильина и Э. Г. Позняка, Л. Д. Кудрявцева, Н. С. Пискунова.

По форме и стилю изложения материала пособие написано как конспект лекций. Каждая лекция является отдельным разделом главы. В начале каждой лекции представлен ее план, нумерация формул дается по лекциям, а рисунков — по главам. Для сокращения записи часто встречающихся выражений используются символы:  $\in$  (знак принадлежности),  $\exists$  (квантор существования),  $\forall$  (квантор всеобщности),  $\infty$  (знак бесконечности),  $\rightarrow$  (знак стремления), например:

$x \in [a, b]$  — переменная  $x$  принадлежит отрезку  $[a, b]$ ;

$x \notin [a, b]$  — переменная  $x$  не принадлежит отрезку  $[a, b]$ ;

$\exists x$  — существует некоторая переменная  $x$ ;

$\forall x$  — для любого значения переменной  $x$ ;

$\rightarrow \infty$  — переменная  $x$  стремится к бесконечности.

В разделах по методам решения дифференциальных уравнений, систем дифференциальных уравнений, рядам Фурье и другим значительное внимание уделено возможностям применения современного компьютера к решению актуальных инженерно-технических задач. В этой связи мы заменили некоторые традиционные разделы и включили системы дифференциальных уравнений второго порядка с переменными коэффициентами, показав возможности их эффективного решения конечно-разностным методом прогонки. Приведены Фортран-программы численного решения краевых задач.

В девятой главе рассмотрены задачи математического анализа, которые связаны с исследованием физических процессов и решением дифференциальных уравнений с частными производными. Их обычно

относят к избранным главам высшей математики и называют уравнениями математической физики.

Инженеры и студенты технических вузов как правило испытывают значительные затруднения в поиске руководства по постановке и решению задач в этой обширной и важной отрасли прикладной математики. В связи с этим содержание этой главы ориентировано на учебные планы по инженерно-техническим специальностям. Например, наряду с традиционным разделом по колебаниям струны включены задачи о поперечных колебаниях балки, исследования устойчивости элементов конструкций динамическим методом гидравлического удара в трубах, расчета критической скорости вращения вала, расчета температурных полей и напряжений и др.

Мы надеемся, что пособие будет полезно студентам технических вузов, изучающих курсы: «Математический анализ», «Аналитическая геометрия и линейная алгебра», «Обыкновенные дифференциальные уравнения», «Методы математического моделирования физических процессов».

Мы также выражаем глубокую благодарность рецензентам: доктору физико-математических наук, профессору А. В. Пантелееву и кандидату физико-математических наук, доценту А. С. Бортаковскому, полезные замечания которых были учтены при доработке рукописи.

*Авторы*

# ГЛАВА 1

## ЭЛЕМЕНТЫ ЛИНЕЙНОЙ АЛГЕБРЫ И АНАЛИТИЧЕСКОЙ ГЕОМЕТРИИ

---

### 1.1. Векторы на плоскости и в пространстве

Определение свободного вектора. Алгебраические операции над векторами. Разложение вектора по базису. Системы координат на плоскости и в пространстве.

Среди величин, изучаемых физикой, механикой и другими (в том числе техническими) науками, выделяются две группы: скалярные величины (длина, площадь, масса и др.), значения которых вполне определяются одним действительным числом, и векторные (сила, скорость, напряженность и др.), которые в отличие от скалярных характеризуются не только указанием числового значения, но и направлением. Понятие вектора представляет собой математическую абстракцию физических векторных величин. Математическая дисциплина, в которой изучают свойства операций над векторами, называется векторным исчислением и состоит из векторной алгебры и векторного анализа. Возникновение и развитие векторного исчисления тесно связано с потребностями механики и физики. В его создании приняли участие как математики (Р. Декарт, П. Ферма, У. Гамильтон, М. В. Остроградский), так и физики (Дж. К. Максвелл, Дж. Гиббс и др.)

#### 1.1.1. Определение свободного вектора

**ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1.** Закрепленным вектором  $\overline{AB}$  называется направленный отрезок  $AB$ , началом которого является точка  $A$ , а концом — точка  $B$ . Вектор, начало и конец которого совпадают, называется нулевым (рис. 1.1).



Рис. 1.1

Расстояние между точками  $A$  и  $B$  называется длиной (модулем) вектора  $\overline{AB}$  и обозначается  $|\overline{AB}|$ .

**ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2.** Множество всех закрепленных векторов, получающихся из фиксированного закрепленного вектора с помощью параллельного переноса, называется свободным вектором и обозначается  $\vec{a}$ .

### 1.1.2. Алгебраические операции над векторами

#### I. Операция сложения

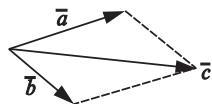
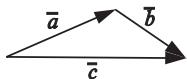


Рис. 1.2

**ОПРЕДЕЛЕНИЕ 3.** Суммой двух свободных векторов  $\vec{a}$  и  $\vec{b}$  называется свободный вектор  $\vec{c}$ , начало которого совпадает с началом первого, а конец — с концом второго, если совмещены конец вектора  $\vec{a}$  и начало вектора  $\vec{b}$  (рис. 1.2).

**З а м е ч а н и е.** Легко видеть, что если  $\vec{a}$  и  $\vec{b}$  приведены к общему началу, то  $\vec{c} = \vec{a} + \vec{b}$  является диагональю параллелограмма, построенного на этих векторах.

Это определение согласуется с решением одной из важнейших задач механики — отысканием равнодействующей системы сил, приложенных в одной точке.

*Свойства операции сложения.*

1.  $\vec{a} + \vec{b} = \vec{b} + \vec{a}$  (коммутативность).
2.  $(\vec{a} + \vec{b}) + \vec{c} = \vec{a} + (\vec{b} + \vec{c})$  (ассоциативность).
3. Существует единственный вектор  $\vec{0}$ , называемый нулевым вектором, такой, что  $\vec{0} + \vec{a} = \vec{a}$  для всех  $\vec{a}$ . Нулевой вектор  $\vec{0}$  порождается нулевым закрепленным вектором, т. е. точкой.
4. Для любого  $\vec{a}$  существует единственный вектор  $-\vec{a}$  такой, что  $\vec{a} + (-\vec{a}) = \vec{0}$ . Вектор  $-\vec{a}$  называется вектором, противоположным вектору  $\vec{a}$ .

#### II. Операция умножения вектора на число

**ОПРЕДЕЛЕНИЕ 4.** Произведением вектора  $\vec{a}$  на число  $\lambda \in \mathbb{R}$  называется вектор  $\vec{b} = \lambda \vec{a}$  такой, что:

- 1) если  $\lambda > 0$ ,  $\vec{a} \neq \vec{0}$ , то  $\lambda \vec{a}$  получается из  $\vec{a}$  растяжением в  $\lambda$  раз:  $|\lambda \vec{a}| = \lambda |\vec{a}|$ ;
- 2) если  $\lambda < 0$ ,  $\vec{a} \neq \vec{0}$ , то  $\lambda \vec{a}$  получается из  $\vec{a}$  растяжением в  $|\lambda|$  раз и последующим отражением:  $|\lambda \vec{a}| = |\lambda| |\vec{a}|$ ;
- 3) если  $\lambda = 0$  или  $\vec{a} = \vec{0}$ , то  $\lambda \vec{a} = \vec{0}$ .

*Свойства операции умножения.*

1.  $(\lambda_1 + \lambda_2) \vec{a} = \lambda_1 \vec{a} + \lambda_2 \vec{a}$  для любых действительных  $\lambda_1, \lambda_2$  и всех  $\vec{a}$  (дистрибутивность).
2.  $\lambda(\vec{a}_1 + \vec{a}_2) = \lambda \vec{a}_1 + \lambda \vec{a}_2$  (дистрибутивность).
3.  $(\lambda_1 \lambda_2) \vec{a} = \lambda_1 (\lambda_2 \vec{a})$  (ассоциативность).
4.  $1 \cdot \vec{a} = \vec{a}$ .

## 1.1.3. Разложение вектора по базису

Сначала изучим разложение векторов на плоскости.

**ОПРЕДЕЛЕНИЕ 5.** Два или более свободных векторов называются коллинеарными, если они, отложенные от одной точки, лежат на одной прямой.

Из определения умножения вектора на число вытекает, что векторы  $\vec{a}$  и  $\vec{b}$  коллинеарны тогда и только тогда, когда существует действительное число  $\lambda$  такое, что

$$\vec{a} = \lambda \vec{b}. \quad (1)$$

**ОПРЕДЕЛЕНИЕ 6.** Два неколлинеарных вектора на плоскости называются базисом на плоскости.

**Теорема 1.** Любой вектор  $\vec{c}$ , лежащий на плоскости, можно единственным образом разложить по базису  $\vec{e}_1, \vec{e}_2$ , то есть представить в виде

$$\vec{a} = x\vec{e}_1 + y\vec{e}_2. \quad (2)$$

*Доказательство.* Единственность разложения: предположим противное, т. е. есть по крайней мере два разложения:

$$\vec{a} = x_1\vec{e}_1 + y_1\vec{e}_2 = x_2\vec{e}_1 + y_2\vec{e}_2, \quad x_1 \neq x_2.$$

Отсюда

$$(x_1 - x_2)\vec{e}_1 = (y_2 - y_1)\vec{e}_2, \quad \vec{e}_1 = \frac{y_2 - y_1}{x_1 - x_2} \vec{e}_2 = \lambda \vec{e}_2.$$

В силу (1)  $\vec{e}_1, \vec{e}_2$  коллинеарны. Получили противоречие, т. е. представление (2) единственно.

Существование разложения (2) получается путем построения параллелограмма на векторах  $\vec{e}_1, \vec{e}_2$ , диагональю которого является  $\vec{a}$ :

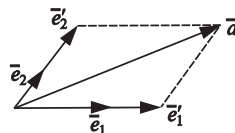


Рис. 1.3

$$\vec{a} = \vec{e}_1' + \vec{e}_2' = x\vec{e}_1 + y\vec{e}_2.$$

При разложении вектора  $\vec{a}$  использовались определения сложения векторов и умножения на число.

Числа  $x, y$  в разложении (2) называются координатами  $(x, y)$  вектора  $\vec{a}$  относительно базиса  $\vec{e}_1, \vec{e}_2$ .

Рассмотрим теперь пространственный случай.

**ОПРЕДЕЛЕНИЕ 7.** Три или более свободных векторов называются компланарными, если они, отложенные от одной точки, лежат в одной плоскости.

**ОПРЕДЕЛЕНИЕ 8.** Три некомпланарных вектора в пространстве называются базисом в пространстве.

**Теорема 2.** Любой вектор  $\vec{a}$  в пространстве можно единственным способом разложить по базису  $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$ , т. е. представить в виде

$$\vec{a} = x\vec{e}_1 + y\vec{e}_2 + z\vec{e}_3. \quad (3)$$

Доказательство аналогично доказательству теоремы 1, только для осуществления разложения необходимо на векторах  $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$  построить параллелепипед, диагональю которого является вектор  $\vec{a}$ .

Числа  $x, y, z$  в разложении (3) называются координатами вектора  $\vec{a}$  относительно базиса  $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$ . При этом можно записать

$$\vec{a} = x\vec{e}_1 + y\vec{e}_2 + z\vec{e}_3 = (x, y, z).$$

### 1.1.4. Система координат на плоскости и в пространстве

**ОПРЕДЕЛЕНИЕ 9.** Системой координат на плоскости или в пространстве называется фиксированная точка  $0$  (начало координат) и базис, отложенный от этой точки. Прямые, на которых лежат базисные векторы, называются осями координат. Если оси координат перпендикулярны, то система координат называется прямоугольной или декартовой.

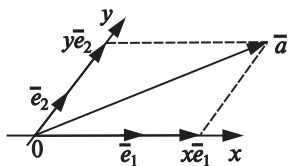


Рис. 1.4

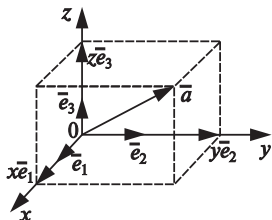


Рис. 1.5

$$\vec{a} = x\vec{e}_1 + y\vec{e}_2 = (x, y)$$

— координаты вектора  $\vec{a}$  в системе координат  $0, \vec{e}_1, \vec{e}_2$  (рис. 1.4).

$$\vec{a} = x\vec{e}_1 + y\vec{e}_2 + z\vec{e}_3 = (x, y, z)$$

— координаты вектора  $\vec{a}$  в системе координат  $0, \vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$  (рис. 1.5).

При сложении векторов их координаты складываются, а при умножении вектора на число координаты умножаются на это число:

$$\vec{a} = (x_1, y_1, z_1), \quad \vec{b} = (x_2, y_2, z_2),$$

$$\vec{a} + \vec{b} = (x_1 + x_2, y_1 + y_2, z_1 + z_2),$$

$$\lambda \vec{a} = (\lambda x_1, \lambda y_1, \lambda z_1), \quad \lambda \in \mathbb{R},$$

где  $\mathbb{R}$  — множество действительных чисел.

Координатами точки  $M(x, y, z)$  называются координаты радиуса-вектора  $\vec{0M} = (x, y, z)$ .



Итак, нами установлено взаимно однозначное соответствие между векторами или точками на плоскости и парами чисел и между векторами или точками в пространстве и тройками чисел. Это соответствие является сущностью метода координат, позволяющего геометрические вопросы переводить на алгебраический язык, язык чисел. Этот метод был предложен в XVII в. французским математиком Рене Декартом и явился основой для создания аналитической геометрии.

## 1.2. Линейные пространства

Определение и примеры линейных пространств. Понятие и свойства линейной зависимости векторов. Размерность и базис. Разложение вектора по базису.

При построении аналитической геометрии Р. Декарт и П. Ферма опирались на геометрию трехмерного пространства Евклида. Практика измерений, механика Ньютона, развитие точных наук вплоть до первой половины XIX в. способствовали тому, что ученые и философы считали принципы и теоремы геометрии Евклида не только истинными, но и единственно возможным и абсолютно точным описанием свойств реального пространства в целом. Открытие неевклидовой геометрии русским математиком Н. Лобачевским и венгерским математиком Бойя, создание Эйнштейном теории относительности, в которой подчеркивается четырехмерность реального пространства, показали, что абсолютизация геометрии Евклида лишена оснований, что только все геометрические теории могут дать, и действительно дают, все более точное описание свойств пространства в целом. Отвлекаясь от конкретного содержания геометрических векторов, выделяя линейные операции над ними, немецкие математики Г. Грассман, Д. Гильберт, Г. Вейль в конце XIX — начале XX в. создали понятие линейного пространства, в котором элементы (векторы) могут иметь произвольную природу.

### 1.2.1. Определение и примеры линейных пространств

**ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1.** Множество  $L$  элементов произвольной природы  $\bar{x}, \bar{y}, \dots$  называется линейным пространством над полем действительных чисел  $R$ , если:

а)  $\forall \bar{x}, \bar{y} \in L$  поставлен в соответствие элемент  $z \in L$ , называемый суммой элементов  $\bar{x}, \bar{y}$ . Сумма элементов  $\bar{x}, \bar{y}$  обозначается через  $\bar{x} + \bar{y}$ ;

б)  $\forall \bar{x} \in L, \forall \lambda \in R$  поставлен в соответствие элемент  $\lambda \bar{x} \in L$ , называемый произведением числа  $\lambda$  на элемент  $\bar{x}$ .

Для пояснения сказанного необходимо напомнить, что символическая запись « $\forall \bar{x}, \bar{y} \in L$ » означает сокращенную запись выражения «для любых двух векторов  $\bar{x}, \bar{y}$ , принадлежащих множеству  $L$ ». Аналогичным образом с помощью символики  $\forall \lambda \in R$  записано выражение «для любого  $\lambda$ , принадлежащего множеству действительных чисел  $R$ ».

Эти операции должны удовлетворять следующим аксиомам.

### I. Аксиомы сложения.

1.  $\bar{x} + \bar{y} = \bar{y} + \bar{x}$  (коммутативность).
2.  $(\bar{x} + \bar{y}) + \bar{z} = \bar{x} + (\bar{y} + \bar{z})$  (ассоциативность).
3.  $\exists$  элемент  $\bar{0}$  такой, что  $\bar{x} + \bar{0} = \bar{x}$  для любого  $\bar{x} \in L$ . Элемент  $\bar{0}$  называется нулевым.
4.  $\forall \bar{x} \in L$  существует элемент  $(-\bar{x}) \in L$ , называемый противоположным, такой, что  $\bar{x} + (-\bar{x}) = \bar{0}$ .

### II. Аксиомы умножения на число.

1.  $\lambda(\bar{x} + \bar{y}) = \lambda\bar{x} + \lambda\bar{y}$  (дистрибутивность).
2.  $(\lambda + \mu)\bar{x} = \lambda\bar{x} + \mu\bar{x}$  (дистрибутивность).
3.  $(\lambda\mu)\bar{x} = \lambda(\mu\bar{x})$  (ассоциативность).
4.  $\bar{x} = \bar{x}$ .

Элементы линейного пространства будем называть векторами.

Укажем некоторые примеры линейных пространств.

1.  $L = R$  — множество действительных чисел с обычными операциями сложения и умножения. Выполнение аксиом сложения и умножения очевидно.

2.  $L = R^n = \{\bar{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n), x_i \in R\}$  — множество упорядоченных наборов из  $n$  чисел (арифметическое пространство). Положим для  $\bar{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ ,  $\bar{y} = (y_1, y_2, \dots, y_n)$ ,  $\lambda \in R$

$$\bar{x} + \bar{y} = (x_1 + y_1, x_2 + y_2, \dots, x_n + y_n) \in R^n,$$

$$\lambda \bar{x} = (\lambda x_1, \lambda x_2, \dots, \lambda x_n) \in R^n.$$

Так как сложение и умножение производится покомпонентно по числам, то аксиомы сложения и умножения выполнены.

3.  $L^2$  — множество свободных векторов на плоскости,  $L^3$  — в трехмерном геометрическом пространстве. При этом  $L^2$  и  $L^3$  являются линейными пространствами относительно введенных в них операций.

### 1.2.2. Понятие и свойства линейной зависимости векторов

**ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2.** Выражение вида  $\lambda_1 \bar{u}_1 + \lambda_2 \bar{u}_2 + \dots + \lambda_n \bar{u}_n$  называется линейной комбинацией векторов  $\bar{u}_1, \bar{u}_2, \dots, \bar{u}_n$ , где  $\bar{u}_1, \bar{u}_2, \dots, \bar{u}_n \in L$ ,  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n \in R$ .

Числа  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ , входящие в линейную комбинацию, называются ее коэффициентами.

**ОПРЕДЕЛЕНИЕ 3.** Векторы  $\bar{u}_1, \bar{u}_2, \dots, \bar{u}_n$  называются линейно зависимыми, если существует нетривиальная линейная комбинация этих векторов, равная нулю; т. е. если существуют такие коэффициенты  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ , что  $\lambda_1 \bar{u}_1 + \lambda_2 \bar{u}_2 + \dots + \lambda_n \bar{u}_n = 0$  и  $\lambda_1^2 + \lambda_2^2 + \dots + \lambda_n^2 \neq 0$ .

В противном случае, т. е. когда

$$\lambda_1 \bar{u}_1 + \lambda_2 \bar{u}_2 + \dots + \lambda_n \bar{u}_n = 0 \quad (1)$$

только при  $\lambda_1 = \lambda_2 = \dots = \lambda_n = 0$  эти векторы называются линейно независимыми.

Так как  $0 \cdot \bar{u}_1 + 0 \cdot \bar{u}_2 + \dots + 0 \cdot \bar{u}_n = \bar{0}$ , то линейная независимость  $\bar{u}_1, \bar{u}_2, \dots, \bar{u}_n$  означает, что представление (1) единственно.

*Свойства линейной зависимости векторов.*

1. Векторы  $\bar{0}, \bar{u}_1, \bar{u}_2, \dots, \bar{u}_n$  линейно зависимы:

$$1 \cdot \bar{0} + 0 \cdot \bar{u}_1 + 0 \cdot \bar{u}_2 + \dots + 0 \cdot \bar{u}_n = \bar{0}.$$

2. Если  $\bar{u}_1, \bar{u}_2, \dots, \bar{u}_n \in L$  — линейно зависимые,  $\bar{u}_{n+1} \in L$ , то  $\bar{u}_1, \bar{u}_2, \dots, \bar{u}_n, \bar{u}_{n+1}$  — линейно зависимые.

*Доказательство.*  $\bar{u}_1, \dots, \bar{u}_n$  — линейно зависимые. Тогда пусть  $\lambda_1 \bar{u}_1 + \lambda_2 \bar{u}_2 + \dots + \lambda_n \bar{u}_n = 0$ , например, при  $\lambda_1 \neq 0 \Rightarrow \lambda_1 \bar{u}_1 + \lambda_2 \bar{u}_2 + \dots + \lambda_n \bar{u}_n + 0 \cdot \bar{u}_{n+1} = \bar{0}, \lambda_1 \neq 0$ .

3. Если  $\bar{u}_1, \bar{u}_2, \dots, \bar{u}_n \in L$  — линейно независимые, то хотя бы один из них является линейной комбинацией остальных.

*Доказательство.*  $\bar{u}_1, \bar{u}_2, \dots, \bar{u}_n$  — линейно зависимые  $\Rightarrow \exists \lambda_1 \bar{u}_1 + \lambda_2 \bar{u}_2 + \dots + \lambda_n \bar{u}_n = 0$  и, например,  $\lambda_1 \neq 0 \Rightarrow \bar{u}_1 = \left(-\frac{\lambda_2}{\lambda_1}\right) \bar{u}_2 + \dots + \left(-\frac{\lambda_n}{\lambda_1}\right) \bar{u}_n$ .

4. Если  $\bar{u}_1, \bar{u}_2, \dots, \bar{u}_n \in L$  — линейно независимые, а  $\bar{u}_1, \bar{u}_2, \dots, \bar{u}_n, \bar{u}_{n+1}$  — линейно зависимые, то  $\bar{u}_{n+1}$  является линейной комбинацией.

*Доказательство.*  $\bar{u}_1 + \bar{u}_2 + \dots + \bar{u}_n + \bar{u}_{n+1}$  — линейно зависимые  $\Rightarrow$  тогда существует нетривиальная линейная комбинация  $\lambda_1 \bar{u}_1 + \lambda_2 \bar{u}_2 + \dots + \lambda_n \bar{u}_n + \lambda_{n+1} \bar{u}_{n+1}$ , равная нулевому вектору. Если  $\lambda_{n+1} = 0$ , то

$\lambda_1 \bar{u}_1 + \dots + \lambda_n \bar{u}_n = \bar{0}$  и не все коэффициенты нули, что противоречит линейной независимости  $\bar{u}_1, \bar{u}_2, \dots, \bar{u}_n$ . Поэтому при  $\lambda_{n+1} \neq 0$

$$\bar{u}_{n+1} = \left( -\frac{\lambda_1}{\lambda_{n+1}} \right) \bar{u}_1 + \dots + \left( -\frac{\lambda_n}{\lambda_{n+1}} \right) \bar{u}_n.$$

### 1.2.3. Размерность и базис. Разложение вектора по базису

**ОПРЕДЕЛЕНИЕ 4.** Если в линейном пространстве  $L$  существует  $n$  линейно независимых векторов, а любые  $n+1$  векторов линейно зависимые, то линейное пространство называется  $n$ -мерным. Число  $n$  называется размерностью пространства и обозначается  $\dim L = n$ .

Итак, размерность линейного пространства — это максимальное число линейно независимых векторов.

**ОПРЕДЕЛЕНИЕ 5.** Если  $\dim L = n$ , то система из  $n$  линейно независимых векторов  $\bar{e}_1, \bar{e}_2, \dots, \bar{e}_n$ , заданных в определенном порядке, называется базисом пространства  $L$ .

**Теорема 1.** Если  $\dim L = n$ ;  $\bar{e}_1, \bar{e}_2, \dots, \bar{e}_n$  — базис  $L$ , то  $\forall \bar{u} \in L$  можно единственным способом разложить по базису, т. е. представить в виде линейной комбинации базисных векторов:

$$\bar{u} = x_1 \bar{e}_1 + x_2 \bar{e}_2 + \dots + x_n \bar{e}_n, \quad x_i \in R \quad (2)$$

*Доказательство.* Существование разложения. Из определений размерности и базиса вытекает, что векторы  $\bar{e}_1, \bar{e}_2, \dots, \bar{e}_n$  — линейно независимые, а векторы  $\bar{e}_1, \bar{e}_2, \dots, \bar{e}_n, \bar{u}$  — линейно зависимые. Поэтому в силу свойства линейной зависимости векторов  $\bar{u}$  является линейной комбинацией  $\bar{e}_1, \bar{e}_2, \dots, \bar{e}_n$ :

$$\bar{u} = x_1 \bar{e}_1 + x_2 \bar{e}_2 + \dots + x_n \bar{e}_n.$$

Единственность разложения. Предположим противное, т. е. пусть есть по крайней мере два разложения:

$$\bar{u} = x_1 \bar{e}_1 + x_2 \bar{e}_2 + \dots + x_n \bar{e}_n = x'_1 \bar{e}_1 + x'_2 \bar{e}_2 + \dots + x'_n \bar{e}_n$$

и, например,  $x_1 \neq x'_1$ . Тогда  $x_1 - x'_1 \neq 0$  и

$$(x_1 - x'_1) \bar{e}_1 + \dots + (x_n - x'_n) \bar{e}_n = \bar{0},$$

т. е.  $\bar{e}_1, \bar{e}_2, \dots, \bar{e}_n$  — линейно зависимые. Получили противоречие, так как  $\bar{e}_1, \bar{e}_2, \dots, \bar{e}_n$  — базис. Следовательно, разложение единственно.

Числа  $x_1, \dots, x_n$  в (2) называются координатами вектора  $\bar{u}$  в базисе  $\bar{e}_1, \bar{e}_2, \dots, \bar{e}_n$ . Мы будем писать  $\bar{u} = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ .

Если  $\bar{u} = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ ,  $\bar{v} = (y_1, y_2, \dots, y_n)$  то из (2) вытекает, что:

$$1) \bar{u} = \bar{v} \Leftrightarrow x_1 = y_1, \dots, x_n = y_n;$$

$$2) \bar{u} + \bar{v} = (x_1 + y_1, \dots, x_n + y_n);$$

$$3) \lambda \bar{u} = (\lambda x_1, \lambda x_2, \dots, \lambda x_n).$$

Набор из  $n$  координат  $(x_1, x_2, \dots, x_n)$  мы можем считать вектором арифметического пространства  $R^n$ . Поэтому разложение (2) устанавливает взаимно однозначное соответствие между произвольным линейным пространством  $L$  размерности  $n$  и  $R^n$ . Таким образом, мы можем отождествлять различные линейные пространства одинаковой размерности.

Охарактеризуем размерность и базисы в рассмотренных нами примерах линейных пространств.

1.  $L = R$  — очевидно,  $\dim R = 1$  и базис образует любое действительное число  $\lambda \neq 0$ .

2.  $L = R^n$  — можно показать, что  $\dim R^n = n$  и базис образуют, например, векторы

$$\bar{e}_1 = (1, 0, \dots, 0), \quad \bar{e}_2 = (0, 1, \dots, 0), \quad \bar{e}_n = (0, 0, \dots, 1).$$

3. **Теорема 2.**  $\dim L^2 = 2$  и базис  $L^2$  образуют любые два неколлинеарных вектора.

*Доказательство.* Если два вектора  $\bar{a}, \bar{b}$  коллинеарны, то существует действительное число  $\lambda$  такое, что  $\bar{a} = \lambda \bar{b}$ . Следовательно,

$$\bar{a} - \lambda \bar{b} = 0$$

и векторы  $\bar{a}, \bar{b}$  — линейно зависимые. Поэтому два коллинеарных вектора не могут быть базисом в пространстве  $L^2$  (на плоскости).

Но на плоскости есть, по крайней мере, два вектора, которые линейно независимы и, следовательно, неколлинеарные. Покажем теперь, что любые 3 вектора линейно зависимы. Если среди векторов  $\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}$  первые два линейно зависимы, то из свойства 2 линейной зависимости вытекает, что и 3 вектора линейно зависимы. Если  $\bar{a}, \bar{b}$  — линейно независимы, т.е. неколлинеарные, то по теореме 1

$$\bar{c} = x\bar{a} + y\bar{b}, \quad x\bar{a} + y\bar{b} - 1 \cdot \bar{c} = 0,$$

и векторы  $\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}$  — линейно зависимы. Теорема доказана.

Аналогично доказывается

**Теорема 3.**  $\dim L^3 = 3$  и базис в  $L^3$  образуют любые 3 некомпланарных вектора.

**Пример.** Проверить, что векторы  $\bar{a} = (2, -3)$ ,  $\bar{b} = (1, 2)$  образуют базис в  $R^2$  и найти разложение вектора  $\bar{c} = (9, 4)$  по этому базису.

### 1.3. Евклидовы пространства

Скалярное произведение в линейном пространстве. Длина вектора. Угол между векторами. Ортонормированный базис. Скалярное произведение в  $L^3$ .

#### 1.3.1. Скалярное произведение в линейном пространстве.

##### *Длина вектора. Угол между векторами*

**ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1.** Скалярным произведением в линейном пространстве  $L$  называется числовая функция, определенная для любых пар векторов  $\bar{u}, \bar{v} \in L$ , которую обозначим через  $(\bar{u}, \bar{v})$ , удовлетворяющая аксиомам:

- 1)  $(\bar{u}, \bar{v}) = (\bar{v}, \bar{u})$ ;
- 2)  $(\bar{u}_1 + \bar{u}_2, \bar{v}) = (\bar{u}_1, \bar{v}) + (\bar{u}_2, \bar{v})$ ;
- 3)  $(\lambda \bar{u}, \bar{v}) = \lambda(\bar{u}, \bar{v})$ ;  $\lambda \in R$ ;
- 4)  $(\bar{u}, \bar{u}) \geq 0$ ,  $(\bar{u}, \bar{u}) = 0 \Leftrightarrow \bar{u} = \bar{0}$ .

**ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2.** Линейное пространство со скалярным произведением называется евклидовым. Евклидово пространство будем обозначать  $E$ .

**ОПРЕДЕЛЕНИЕ 3.** Длиной вектора  $\bar{u} \in E$  называется неотрицательное число

$$|\bar{u}| = \sqrt{(\bar{u}, \bar{u})}.$$

Вектор, длина которого равна 1, называется единичным или нормированным. Если  $\bar{u} \in E$ , то вектор  $\frac{\bar{u}}{|\bar{u}|}$  — единичный.

**Теорема 1.** Для любых 2 векторов  $\bar{u}, \bar{v} \in E$  справедливы неравенства:

- 1)  $|(\bar{u}, \bar{v})| \leq |\bar{u}| \cdot |\bar{v}|$  (неравенство Коши — Буняковского);
- 2)  $|\bar{u} + \bar{v}| \leq |\bar{u}| + |\bar{v}|$  (неравенство треугольника).

**Доказательство.** 1. Рассмотрим неотрицательную числовую функцию параметра  $t$

$$0 \leq f(t) = |t\bar{u} + \bar{v}|^2 = (t\bar{u} + \bar{v}, t\bar{u} + \bar{v}) = t^2|\bar{u}|^2 + 2(\bar{u}, \bar{v})t + |\bar{v}|^2.$$

Так как это есть квадратный трехчлен, неотрицательный для  $t \in \mathbb{R}$ , то его дискриминант неположителен:

$$D = 4(\bar{u}, \bar{v})^2 - 4|\bar{u}|^2 |\bar{v}|^2 \leq 0.$$

Отсюда вытекает неравенство Коши – Буняковского

$$|(\bar{u}, \bar{v})| \leq |\bar{u}| |\bar{v}|.$$

2. Из свойств скалярного произведения и неравенства 1)

$$|\bar{u} + \bar{v}|^2 = (\bar{u} + \bar{v}, \bar{u} + \bar{v}) = |\bar{u}|^2 + 2(\bar{u}, \bar{v}) + |\bar{v}|^2 \leq |\bar{u}|^2 + 2|\bar{u}| |\bar{v}| + |\bar{v}|^2 = (|\bar{u}| + |\bar{v}|)^2.$$

Поэтому

$$|\bar{u} + \bar{v}| \leq |\bar{u}| + |\bar{v}|.$$

Неравенство Коши – Буняковского равносильно неравенствам

$$-1 \leq \frac{(\bar{u}, \bar{v})}{|\bar{u}| |\bar{v}|} \leq 1,$$

которые позволяют дать определение 4.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 4. Если  $\bar{u}, \bar{v} \in E$ , то

$$\cos(\bar{u}, \bar{v}) = \frac{(\bar{u}, \bar{v})}{|\bar{u}| \cdot |\bar{v}|}.$$

### 1.3.2. Ортонормированный базис

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 5. Будем говорить, что  $n$  векторов  $\bar{e}_1, \bar{e}_2, \dots, \bar{e}_n$  в  $n$ -мерном пространстве  $E$  образуют ортогональный базис, если они нормированные и попарно ортогональны, т. е.

$$(\bar{e}_i, \bar{e}_k) = \begin{cases} 1, & i = k, \\ 0, & i \neq k. \end{cases}$$

Для того чтобы данное определение было корректным, необходимо доказать, что входящие в определение векторы  $\bar{e}_1, \bar{e}_2, \dots, \bar{e}_n$  действительно образуют базис, т. е. линейно независимы. Покажем, что равенство

$$\lambda_1 \bar{e}_1 + \lambda_2 \bar{e}_2 + \dots + \lambda_n \bar{e}_n = \bar{0} \quad (1)$$

возможно лишь при  $\lambda_1 = \lambda_2 = \dots = \lambda_n = 0$ . Умножая обе части равенства (1) скалярно на  $\bar{e}_1$ , получаем

$$\lambda_1 \underbrace{(\bar{e}_1, \bar{e}_1)}_1 + \lambda_2 \underbrace{(\bar{e}_1, \bar{e}_2)}_0 + \dots + \lambda_n \underbrace{(\bar{e}_1, \bar{e}_n)}_0 = 0,$$

т. е.  $\lambda_1 = 0$ . Аналогично показывается, что и остальные коэффициенты равны 0.

Можно доказать, что, используя любую систему из  $n$  линейно независимых векторов, можно построить ортонормированный базис  $n$ -мерного евклидова пространства. Процесс ортогонализации произвольной независимой системы был предложен немецким математиком Шмидтом (начало XX в.).

Выясним, какие удобства имеет ортонормированный базис по сравнению с неортogonalным.

**Теорема 2.** Если  $\bar{e}_1, \bar{e}_2, \dots, \bar{e}_n$  — ортонормированный базис пространства  $E$ , то относительно этого базиса:

1) скалярное произведение двух векторов равно сумме произведений их соответствующих координат;

2) координаты вектора равны скалярным произведениям этого вектора на соответствующие базисные векторы.

*Доказательство.* 1.  $\bar{u} = x_1\bar{e}_1 + \dots + x_n\bar{e}_n$ ,  $\bar{v} = y_1\bar{e}_1 + \dots + y_n\bar{e}_n$ , следовательно,

$$\begin{aligned} (\bar{u}, \bar{v}) &= (x_1\bar{e}_1 + \dots + x_n\bar{e}_n, y_1\bar{e}_1 + \dots + y_n\bar{e}_n) = x_1y_1(\bar{e}_1, \bar{e}_1) + x_2y_1(\bar{e}_2, \bar{e}_1) + \dots + \\ &+ x_ny_1(\bar{e}_n, \bar{e}_1) + x_1y_2(\bar{e}_1, \bar{e}_2) + x_2y_2(\bar{e}_2, \bar{e}_2) + \dots + x_ny_2(\bar{e}_n, \bar{e}_2) + \dots + \\ &+ x_1y_n(\bar{e}_1, \bar{e}_n) + x_2y_n(\bar{e}_2, \bar{e}_n) + \dots + x_ny_n(\bar{e}_n, \bar{e}_n) = x_1y_1 + x_2y_2 + \dots + x_ny_n, \end{aligned}$$

так как

$$\begin{aligned} (\bar{e}_i, \bar{e}_j) &= 0, \quad \text{при } i \neq j; \\ (\bar{e}_i, \bar{e}_i) &= 1, \quad \text{при } i = j. \end{aligned}$$

Итак,

$$(\bar{u}, \bar{v}) = x_1y_1 + x_2y_2 + \dots + x_ny_n.$$

2. Умножая обе части равенства  $\bar{u} = x_1\bar{e}_1 + x_2\bar{e}_2 + \dots + x_n\bar{e}_n$  на вектор  $\bar{e}_1$  скалярно, получим

$$(u, \bar{e}_1) = x_1(\bar{e}_1, \bar{e}_1) + x_2(\bar{e}_2, \bar{e}_1) + \dots + x_n(\bar{e}_n, \bar{e}_1) = x_1,$$

так как  $(\bar{e}_1, \bar{e}_1) = 1$ .

Аналогично показывается, что

$$x_2 = (\bar{u}, \bar{e}_2), \dots, x_n = (\bar{u}, \bar{e}_n).$$

Скалярное произведение вектора  $\bar{u}$  на вектор  $\bar{e}$  единичной длины естественно назвать проекцией вектора  $\bar{u}$  на вектор  $\bar{e}$ .



Доказанное утверждение означает, что в ортонормированном базисе координаты вектора являются проекциями этого вектора на базисные.

*Следствие.* Если в ортонормированном базисе

$$\bar{u} = (x_1, x_2, \dots, x_n), \quad \bar{v} = (y_1, y_2, \dots, y_n),$$

то

$$|\bar{u}| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2}, \quad \cos(\hat{\bar{u}}, \hat{\bar{v}}) = \frac{x_1 y_1 + x_2 y_2 + \dots + x_n y_n}{\sqrt{x_1^2 + \dots + x_n^2} \cdot \sqrt{y_1^2 + \dots + y_n^2}}.$$

### 1.3.3. Скалярное произведение в $L^3$

**ОПРЕДЕЛЕНИЕ 6.** Скалярным произведением двух векторов

$\bar{a}, \bar{b} \in L^3$  называется число  $(\bar{a}, \bar{b}) = |\bar{a}| \cdot |\bar{b}| \cdot \cos(\hat{\bar{a}}, \hat{\bar{b}})$ .

Проверим выполнение аксиом скалярного произведения.

1.  $(\bar{a}, \bar{b}) = (\bar{b}, \bar{a})$  — очевидно.

2.  $(\bar{a}_1 + \bar{a}_2, \bar{b}) = (\bar{a}_1, \bar{b}) + (\bar{a}_2, \bar{b}) \Leftrightarrow |\bar{a}_1 + \bar{a}_2| |\bar{b}| \cos(\hat{\bar{a}_1 + \bar{a}_2}, \hat{\bar{b}}) =$

$$= |\bar{a}_1| |\bar{b}| \cos(\hat{\bar{a}_1}, \hat{\bar{b}}) + |\bar{a}_2| |\bar{b}| \cos(\hat{\bar{a}_2}, \hat{\bar{b}}) \Leftrightarrow |\bar{a}_1 + \bar{a}_2| \cos(\hat{\bar{a}_1 + \bar{a}_2}, \hat{\bar{b}}) = |\bar{a}_1| \cos(\hat{\bar{a}_1}, \hat{\bar{b}}) + |\bar{a}_2| \cos(\hat{\bar{a}_2}, \hat{\bar{b}}). \quad (2)$$

Произведение  $|\bar{a}| \cos(\hat{\bar{a}}, \hat{\bar{b}})$  назовем проекцией вектора  $\bar{a}$  на вектор  $\bar{b}$  (рис. 1.6).

Тогда (2) немедленно вытекает из рис. 1.6 и равенства

$$np_{\bar{b}}(\bar{a}_1 + \bar{a}_2) = np_{\bar{b}}\bar{a}_1 + np_{\bar{b}}\bar{a}_2.$$

3.  $(\lambda \bar{a}, \bar{b}) = \lambda(\bar{a}, \bar{b})$  — доказать самостоятельно, разбирая отдельно случаи  $\lambda \geq 0$ ,  $\lambda < 0$ .

4.  $(\bar{a}, \bar{a}) = |\bar{a}|^2 > 0$ ,  $\bar{a} \neq \bar{0}$ .

Пространство  $L^3$  с введенным скалярным произведением обозначим через  $R^3$ .

Пусть  $\bar{i}, \bar{j}, \bar{k}$  — ортонормированный базис в  $R^3$ ;  $0, \bar{i}, \bar{j}, \bar{k}$  — прямоугольная система координат (рис. 1.7),

$$|\bar{i}| = |\bar{j}| = |\bar{k}| = 1, \\ \bar{i} \perp \bar{j}, \quad \bar{j} \perp \bar{k}, \quad \bar{k} \perp \bar{i}.$$

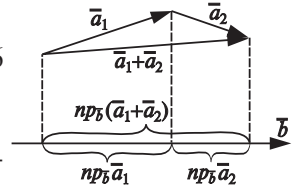


Рис. 1.6

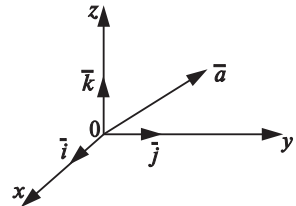


Рис. 1.7

Координаты вектора  $\vec{a} = (x, y, z)$  — это проекции  $\vec{a}$  на оси координат.

Основные формулы в координатах:

$$1) \vec{a} = (x_1, y_1, z_1), \vec{b} = (x_2, y_2, z_2) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (\vec{a}, \vec{b}) = x_1 x_2 + y_1 y_2 + z_1 z_2;$$

$$2) |\vec{a}| = \sqrt{x_1^2 + y_1^2 + z_1^2};$$

$$3) \cos(\vec{a}, \vec{b}) = \frac{x_1 x_2 + y_1 y_2 + z_1 z_2}{\sqrt{x_1^2 + y_1^2 + z_1^2} \cdot \sqrt{x_2^2 + y_2^2 + z_2^2}},$$

$$\vec{a} \perp \vec{b} \Leftrightarrow x_1 x_2 + y_1 y_2 + z_1 z_2 = 0;$$

$$4) M_1(x_1, y_1, z_1), M_2(x_2, y_2, z_2) \Rightarrow |\overline{M_1 M_2}| = \\ = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}.$$

**Задача.** Доказать, что диагонали четырехугольника с вершинами  $A(1, 2, 3)$ ,  $B(7, 3, 2)$ ,  $C(-3, 0, 6)$ ,  $D(9, 2, 4)$  перпендикулярны.

*Решение.*

$$\overline{AC} = (-4, -2, 3), \quad \overline{BD} = (2, -1, 2) \Rightarrow (\overline{AC}, \overline{BD}) = -8 + 2 + 6 = 0 \Rightarrow \overline{AC} \perp \overline{BD}.$$

## 1.4. Векторное и смешанное произведение

Определение и свойства векторного произведения. Приложения векторного произведения. Определение и свойства смешанного произведения. Приложения смешанного произведения.

### 1.4.1. Определение и свойства векторного произведения

**ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1.** Векторным произведением векторов  $\vec{a}$ ,  $\vec{b}$  называется вектор  $\vec{c}$  такой, что:

$$1) |\vec{c}| = |\vec{a}| |\vec{b}| \sin(\vec{a}, \vec{b}),$$

$$2) \vec{c} \perp \vec{a}, \vec{c} \perp \vec{b},$$

3)  $\vec{a}$ ,  $\vec{b}$ ,  $\vec{c}$  образуют правую тройку, т. е. если смотреть с конца вектора  $\vec{c}$ , то кратчайший поворот от  $\vec{a}$  к  $\vec{b}$  происходит против часовой стрелки (рис. 1.8).

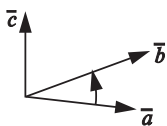


Рис. 1.8

Обозначение:

$$\bar{c} = [\bar{a}, \bar{b}] = \bar{a} \times \bar{b}.$$

Свойства векторного произведения:

1)  $[\bar{a}, \bar{b}] = \bar{0} \Leftrightarrow \bar{a}, \bar{b}$  — коллинеарные.

Доказательство:

$$[\bar{a}, \bar{b}] = \bar{0} \Leftrightarrow \sin(\widehat{\bar{a}, \bar{b}}) = 0 \Leftrightarrow \bar{a} = \lambda \bar{b} \Leftrightarrow \bar{a}, \bar{b} \text{ — коллинеарные;}$$

2)  $[\bar{a}, \bar{b}] = -[\bar{b}, \bar{a}]$  — вытекает из рис. 1.9;

3) примем без доказательства:

$$[\bar{a}_1 + \bar{a}_2, \bar{b}] = [\bar{a}_1, \bar{b}] + [\bar{a}_2, \bar{b}].$$

4)  $[\lambda \bar{a}, \bar{b}] = \lambda [\bar{a}, \bar{b}] = [\bar{a}, \lambda \bar{b}]$  — доказать самостоятельно.

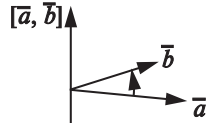


Рис. 1.9

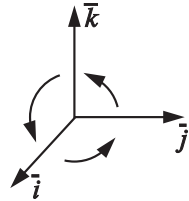


Рис. 1.10

### Вычисление векторного произведения в прямоугольной системе координат

Имеем очевидные равенства (рис. 1.10):

$$\begin{aligned} [\bar{i}, \bar{i}] &= \bar{0}, & [\bar{j}, \bar{j}] &= \bar{0}, & [\bar{k}, \bar{k}] &= \bar{0}, \\ [\bar{i}, \bar{j}] &= \bar{k}, & [\bar{j}, \bar{k}] &= \bar{i}, & [\bar{k}, \bar{i}] &= \bar{j}, \\ [\bar{j}, \bar{i}] &= -\bar{k}, & [\bar{k}, \bar{j}] &= -\bar{i}, & [\bar{i}, \bar{k}] &= -\bar{j}. \end{aligned}$$

Если

$$\bar{a} = x_1 \bar{i} + y_1 \bar{j} + z_1 \bar{k}, \quad \bar{b} = x_2 \bar{i} + y_2 \bar{j} + z_2 \bar{k},$$

то, используя векторные произведения базисных векторов и свойства 3), 4), получим

$$\begin{aligned} [\bar{a}, \bar{b}] &= [x_1 \bar{i} + y_1 \bar{j} + z_1 \bar{k}, x_2 \bar{i} + y_2 \bar{j} + z_2 \bar{k}] = x_1 x_2 [\bar{i}, \bar{i}] + y_1 x_2 [\bar{j}, \bar{i}] + z_1 x_2 [\bar{k}, \bar{i}] + \\ &+ x_1 y_2 [\bar{i}, \bar{j}] + y_1 y_2 [\bar{j}, \bar{j}] + z_1 y_2 [\bar{k}, \bar{j}] + x_1 z_2 [\bar{i}, \bar{k}] + y_1 z_2 [\bar{j}, \bar{k}] + z_1 z_2 [\bar{k}, \bar{k}] = \\ &= (y_1 z_2 - z_1 y_2) \bar{i} + (z_1 x_2 - x_1 z_2) \bar{j} + (x_1 y_2 - y_1 x_2) \bar{k} = \\ &= \bar{i} \begin{vmatrix} y_1 & z_1 \\ y_2 & z_2 \end{vmatrix} - \bar{j} \begin{vmatrix} x_1 & z_1 \\ x_2 & z_2 \end{vmatrix} + \bar{k} \begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \end{vmatrix}. \end{aligned}$$

Итак, если  $\vec{a} = (x_1, y_1, z_1)$ ,  $\vec{b} = (x_2, y_2, z_2)$ , то

$$[\vec{a}, \vec{b}] = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \end{vmatrix}.$$

### 1.4.2. Приложения векторного произведения

1. Вычисление площадей параллелограмма и треугольника (рис. 1.11):

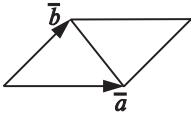


Рис. 1.11

$$S_{\text{пар}} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \sin(\widehat{\vec{a}, \vec{b}}) = |[\vec{a}, \vec{b}]|,$$

$$S_{\text{тр}} = \frac{1}{2} S_{\text{пар}} = \frac{1}{2} |[\vec{a}, \vec{b}]|.$$

2. Векторное произведение позволяет проверить коллинеарность двух векторов:

$$\vec{a} \text{ коллинеарен } \vec{b} \Leftrightarrow [\vec{a}, \vec{b}] = \vec{0}.$$

3. Векторное произведение позволяет по двум заданным векторам указать вектор, им перпендикулярный.

**Задача.** Найти площадь параллелограмма, построенного на векторах  $\vec{a} = 2\vec{m} + \vec{n}$ ,  $\vec{b} = \vec{m} + 2\vec{n}$ , если  $|\vec{m}| = |\vec{n}| = 1$ ,  $(\vec{m}, \vec{n}) = 30^\circ$ .

**Решение.**  $S_{\text{пар}} = |[\vec{a}, \vec{b}]|$ . Используя свойства векторного произведения, получим

$$\begin{aligned} [\vec{a}, \vec{b}] &= [2\vec{m} + \vec{n}, \vec{m} + 2\vec{n}] = 2[\vec{m}, \vec{m}] + [\vec{n}, \vec{m}] + 4[\vec{m}, \vec{n}] + 2[\vec{n}, \vec{n}] = \\ &= -[\vec{m}, \vec{n}] + 4[\vec{m}, \vec{n}] = 3[\vec{m}, \vec{n}]. \end{aligned}$$

Поэтому

$$S_{\text{пар}} = |[\vec{a}, \vec{b}]| = 3|[\vec{m}, \vec{n}]| = 3|\vec{m}||\vec{n}| \sin(\widehat{\vec{m}, \vec{n}}) = \frac{3}{2}.$$

### 1.4.3. Определение и свойства смешанного произведения

**ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2.** Смешанным произведением трех векторов  $\vec{a}$ ,  $\vec{b}$ ,  $\vec{c}$  называется число  $\langle \vec{a}, \vec{b}, \vec{c} \rangle$ , равное

$$\langle \vec{a}, \vec{b}, \vec{c} \rangle = ([\vec{a}, \vec{b}], \vec{c}).$$

Геометрический смысл смешанного произведения:

$\langle \vec{a}, \vec{b}, \vec{c} \rangle = V_{\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}}$  — объем параллелепипеда, построенного на векторах  $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ , если векторы  $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$  образуют правую тройку;

$\langle \vec{a}, \vec{b}, \vec{c} \rangle = -V_{\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}}$  — если  $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$  образуют левую тройку.

*Доказательство.* Для определенности  $[\vec{a}, \vec{b}]$  рассмотрим случай правой тройки векторов  $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$  (рис. 1.12).

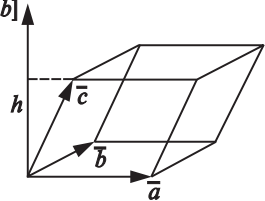


Рис. 1.12

### Вычисление смешанного произведения в прямоугольной системе координат

Пусть в прямоугольной системе координат

$$\vec{a} = (x_1, y_1, z_1), \quad \vec{b} = (x_2, y_2, z_2), \quad \vec{c} = (x_3, y_3, z_3).$$

Тогда

$$[\vec{a}, \vec{b}] = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \end{vmatrix} = \left\{ \begin{vmatrix} y_1 & z_1 \\ y_2 & z_2 \end{vmatrix}, - \begin{vmatrix} x_1 & z_1 \\ x_2 & z_2 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix} \right\},$$

$$\langle \vec{a}, \vec{b}, \vec{c} \rangle = ([\vec{a}, \vec{b}], \vec{c}) = x_3 \begin{vmatrix} y_1 & z_1 \\ y_2 & z_2 \end{vmatrix} - y_3 \begin{vmatrix} x_1 & z_1 \\ x_2 & z_2 \end{vmatrix} + z_3 \begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix}.$$

Итак,

$$\langle \vec{a}, \vec{b}, \vec{c} \rangle = \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix}.$$

*Свойства смешанного произведения:*

- 1)  $\langle \vec{a}, \vec{b}, \vec{c} \rangle > 0 \Leftrightarrow \vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$  образуют правую тройку;
- 2)  $\langle \vec{a}, \vec{b}, \vec{c} \rangle = \langle \vec{b}, \vec{c}, \vec{a} \rangle = \langle \vec{c}, \vec{a}, \vec{b} \rangle$  — это вытекает из геометрического смысла смешанного произведения;
- 3)  $\langle \vec{a}, \vec{b}, \vec{c} \rangle = -\langle \vec{b}, \vec{a}, \vec{c} \rangle = -\langle \vec{c}, \vec{b}, \vec{a} \rangle$  — доказать самостоятельно.

#### 1.4.4. Приложения смешанного произведения

1. Вычисление объемов параллелепипеда и пирамиды:

$$V_{\text{пар}} = |\langle \vec{a}, \vec{b}, \vec{c} \rangle|,$$

$$V_{\text{пир}} = \frac{1}{3} S_{\text{тр}} \cdot h = \frac{1}{6} S_{\text{пар}} \cdot h = \frac{1}{6} |\langle \vec{a}, \vec{b}, \vec{c} \rangle|.$$

2. Смешанное произведение позволяет проверить компланарность трех векторов:

$$\bar{a}, \bar{b}, \bar{c} \text{ компланарны} \Leftrightarrow V_{\text{пар}} = 0 \Leftrightarrow \langle \bar{a}, \bar{b}, \bar{c} \rangle = 0.$$

3. Смешанное произведение позволяет выяснить, когда 4 точки лежат в одной плоскости:

$A(x_1, y_1, z_1)$ ,  $B(x_2, y_2, z_2)$ ,  $C(x_3, y_3, z_3)$ ,  $D(x_4, y_4, z_4)$  лежат в одной плоскости  $\Leftrightarrow \overline{AB}, \overline{AC}, \overline{AD}$  — компланарны  $\Leftrightarrow$

$$\langle \overline{AB}, \overline{AC}, \overline{AD} \rangle = 0 \Leftrightarrow \begin{vmatrix} x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ x_3 - x_1 & y_3 - y_1 & z_3 - z_1 \\ x_4 - x_1 & y_4 - y_1 & z_4 - z_1 \end{vmatrix}.$$

Векторное и смешанное произведение применяются в механике и физике. Поэтому очень важно в совершенстве овладеть этими понятиями.

## 1.5. Прямая и гиперплоскость

Прямая в  $R^n$ . Гиперплоскость в  $R^n$ . Взаимное расположение прямой и гиперплоскости. Расстояние от точки до гиперплоскости.

### 1.5.1. Прямая в $R^n$

Будем рассматривать  $n$ -мерное пространство действительных чисел

$$R^n\{\bar{x}\} \quad \bar{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n), \quad x_i \in R$$

со стандартным ортонормированным базисом

$$\bar{e}_1 = (1, 0, \dots, 0), \quad \bar{e}_2 = (0, 1, \dots, 0), \quad \dots, \quad \bar{e}_n = (0, 0, \dots, 1)$$

и скалярным произведением

$$(\bar{x}, \bar{y}) = x_1 y_1 + x_2 y_2 + \dots + x_n y_n.$$

Вектор с координатами  $(0, 0, \dots, 0)$  назовем точкой 0. Эта точка вместе с базисом, отложенным от этой точки, будут образовывать прямоугольную систему координат в  $R^n$ . Под произвольной точкой  $M \in R^n$  с координатами  $(x_1, x_2, \dots, x_n)$  мы будем понимать радиус-вектор  $\overline{0M} = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ .

**ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1.** Прямой  $l$  в пространстве  $R^n$ , проходящей через точку  $M_0$  параллельно вектору  $\vec{a}$ , называется множество всех точек  $M \in R^n$ , для которых вектор  $\overline{M_0M}$  коллинеарен  $\vec{a}$  (рис. 1.13).

$$M(x_1, x_2, \dots, x_n) \in l \Leftrightarrow \overline{M_0M} \parallel \vec{a} \Leftrightarrow$$

$$\overline{M_0M} = t\vec{a} \Leftrightarrow \vec{r}_M - \vec{r}_{M_0} = t\vec{a}.$$

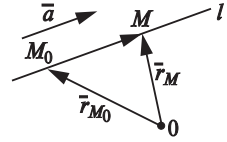


Рис. 1.13

Отсюда  $\vec{r}_M = \vec{r}_{M_0} + t\vec{a}$  — векторное уравнение прямой  $|t \in R|$ .

Записывая векторное уравнение прямой в координатах, получим параметрические уравнения прямой:

$$\begin{cases} x_1 = x_1^0 + ta_1, \\ x_2 = x_2^0 + ta_2, \\ \dots \dots \dots \\ x_n = x_n^0 + ta_n, \end{cases} \quad t \in R$$

Выражая из каждого уравнения параметр  $t$ , получим канонические уравнения

$$\frac{x_1 - x_1^0}{a_1} = \frac{x_2 - x_2^0}{a_2} = \dots = \frac{x_n - x_n^0}{a_n}.$$

**ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2.** Под углом между прямыми  $l_1$  и  $l_2$  понимается угол между их направляющими векторами  $\vec{a}_1, \vec{a}_2$ :  $(l_1, l_2) = (\vec{a}_1, \vec{a}_2)$ .

**Задача 1.** Написать уравнение прямой, проходящей через точку  $M_0(1, -1)$  параллельно  $\vec{a} = (1, 0)$ .

*Решение.* Напишем каноническое уравнение

$$\frac{x-1}{1} = \frac{y+1}{0} \Rightarrow y+1=0.$$

**Задача 2.** Написать уравнение прямой, проходящей через две точки  $M_1(x_1, y_1), M_2(x_2, y_2)$ .

*Решение.* Вектор  $\overline{M_1M_2} = (x_2 - x_1, y_2 - y_1)$  можно взять в качестве направляющего, поэтому уравнение имеет вид

$$\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1}.$$

### 1.5.2. Гиперплоскость в $R^n$

Пусть в  $R^n$  заданы точка  $M_0(x_1^0, \dots, x_n^0)$  и вектор  $\vec{n} = (A_1, A_2, \dots, A_n)$ .

**ОПРЕДЕЛЕНИЕ 3.** Гиперплоскостью  $\pi$  в  $R^n$ , проходящей через точку  $M_0$  перпендикулярно вектору  $\vec{n}$ , называется множество всех точек  $M \in R^n$ , для которых вектор  $\overline{M_0M} \perp \vec{n}$ . Вектор  $\vec{n}$  называется нормальным вектором плоскости  $\pi$ .

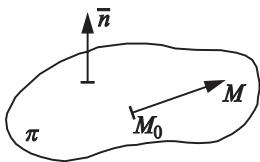


Рис. 1.14

Выведем уравнение плоскости  $\pi$ :

$$M(x_1, x_2, \dots, x_n) \in \pi \Leftrightarrow \overline{M_0M} \perp \vec{n} \Leftrightarrow (\overline{M_0M}, \vec{n}) = 0 \Leftrightarrow$$

$$A_1(x_1 - x_1^0) + A_2(x_2 - x_2^0) + \dots + A_n(x_n - x_n^0) = 0$$

— линейное уравнение гиперплоскости (рис. 1.14).

Это уравнение можно записать так:

$$A_1x_1 + A_2x_2 + \dots + A_nx_n + b = 0,$$

где

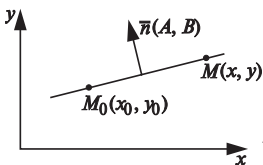
$$b = -(A_1x_1^0 + A_2x_2^0 + \dots + A_nx_n^0) = \text{const.}$$

**ОПРЕДЕЛЕНИЕ 4.** Углом между плоскостями  $\pi_1$  и  $\pi_2$  называется угол между их нормальными векторами  $\vec{n}_1, \vec{n}_2$ :

$$(\pi_1, \pi_2) = (\vec{n}_1, \vec{n}_2).$$

#### Частные случаи

1.  $n = 2, R^2$ .



$$A(x - x_0) + B(y - y_0) = 0$$

или

$$Ax + By + C = 0$$

— линейные уравнения гиперплоскости (прямой) в  $R^2$  (рис. 1.15).

Рис. 1.15

Проведем исследование уравнения  $Ax + By + C = 0$ :

1)  $B = 0 \Rightarrow Ax + C = 0 \Rightarrow$

$$x = -\frac{C}{A};$$

2)  $B \neq 0 \Rightarrow y = -\frac{A}{B}x - \frac{C}{B} = kx + b; y = kx + b$  — уравнение прямой с

угловым коэффициентом (рис. 1.16).



Здесь  $\operatorname{tg} \varphi = \frac{y_1 - b}{x_1} = k$ , так как  $y_1 = kx_1 + b_1$ . Итак,

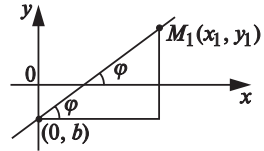


Рис. 1.16

угловой коэффициент  $k$  — это тангенс угла наклона прямой к положительному направлению оси  $Ox$ .

**Задача 3.** Найти угол между прямыми, заданными уравнениями с угловыми коэффициентами (рис. 1.17).

$$\begin{aligned} \varphi = (\hat{l}_1, \hat{l}_2) = \varphi_2 - \varphi_1 &\Rightarrow \operatorname{tg} \varphi = \operatorname{tg} (\varphi_2 - \varphi_1) = \\ &= \frac{\operatorname{tg} \varphi_2 - \operatorname{tg} \varphi_1}{1 + \operatorname{tg} \varphi_1 \operatorname{tg} \varphi_2} = \frac{k_2 - k_1}{1 + k_1 k_2}. \end{aligned}$$

Итак,  $\operatorname{tg} (\hat{l}_1, \hat{l}_2) = \frac{k_2 - k_1}{1 + k_2 k_1}$ . В частности,

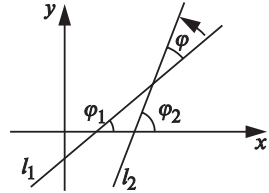


Рис. 1.17

$$l_1 \perp l_2 \Leftrightarrow k_1 k_2 = -1.$$

2.  $n = 3$ ,  $R^3$  (рис. 1.18).

$$\left. \begin{aligned} A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) &= 0 \\ \text{или} \\ Ax + By + Cz + D &= 0 \end{aligned} \right\}$$

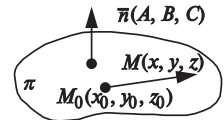


Рис. 1.18

— линейные уравнения плоскости в  $R^3$ .

**Задача 4.** Написать уравнение плоскости в  $R^3$ , проходящей через точку и два неколлинеарных вектора (рис. 1.19).

**Решение.**  $M \in \pi \Leftrightarrow \overrightarrow{M_0 M}, \vec{a}, \vec{b}$  — компланарные векторы. Если три вектора лежат в одной плоскости, то их смешанное произведение равно нулю. Из этого условия и получаем уравнение плоскости при данных условиях:

$$\langle \overrightarrow{M_0 M}, \vec{a}, \vec{b} \rangle = 0 \Leftrightarrow$$

$$\begin{vmatrix} x - x_0 & y - y_0 & z - z_0 \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix} = 0.$$

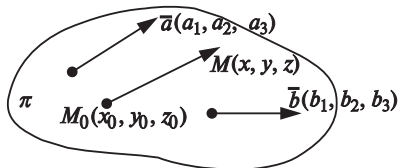


Рис. 1.19

### 1.5.3. Взаимное расположение прямой и гиперплоскости

Даны прямая  $l$ , проходящая через точку  $M_0(x_1^0, x_2^0, \dots, x_n^0)$  параллельно вектору  $\vec{a} (a_1, a_2, \dots, a_n)$ , и гиперплоскость  $\pi: A_1x_1 + A_2x_2 + \dots + A_nx_n + b = 0$  с нормальным вектором  $\vec{n} = (A_1, A_2, \dots, A_n)$ .

1. Прямая  $l$  и гиперплоскость  $\pi$  пересекаются в одной точке, если прямая не параллельна плоскости, т.е.  $(\vec{a}, \vec{n}) \neq 0$ .

Точку пересечения гиперплоскости и прямой  $M_1$  можно найти, решив линейную систему из  $n+1$  уравнения с  $n+1$  неизвестными  $x_1, x_2, \dots, x_n, t$ :

$$\begin{cases} A_1x_1 + A_2x_2 + \dots + A_nx_n + b = 0, \\ x_1 = x_1^0 + a_1t, \\ x_2 = x_2^0 + a_2t, \\ \dots \dots \dots \\ x_n = x_n^0 + a_nt. \end{cases}$$

$$\Rightarrow a_1(x_1^0 + a_1t) + a_2(x_2^0 + a_2t) + \dots + a_n(x_n^0 + a_nt) + b = 0.$$

Пусть  $t_1$  — решение последнего уравнения. Тогда точка пересечения  $\pi$  и  $l$  имеет координаты  $x_1 = x_1^0 + a_1t, \dots, x_n = x_n^0 + a_nt$ .

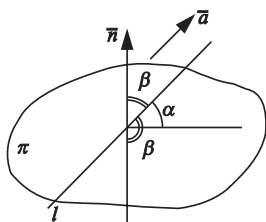


Рис. 1.20

**Задача 5.** Найти угол между прямой и гиперплоскостью (рис. 1.20).

**Решение.**  $\alpha = (\hat{l}, \pi), \quad \beta = (\hat{n}, \vec{a})$ .

$$\beta \leq \frac{\pi}{2} \Rightarrow \alpha = \frac{\pi}{2} - \beta \Rightarrow \sin \alpha = \cos \beta = |\cos \beta|.$$

$$\beta > \frac{\pi}{2} \Rightarrow \alpha = \beta - \frac{\pi}{2} \Rightarrow \sin \alpha = -\cos \beta = |\cos \beta|.$$

$$\text{Итак, всегда } \sin \alpha = |\cos \beta| = \frac{|(\vec{a}, \vec{n})|}{|\vec{a}||\vec{n}|}.$$



Рис. 1.21

2. Прямая  $l$  параллельна гиперплоскости  $\pi \Leftrightarrow M_0 \notin \pi, \quad \vec{a} \perp \vec{n} \Leftrightarrow (\vec{a}, \vec{n}) = 0, \quad M_0 \notin \pi$ .

3. Прямая  $l$  принадлежит гиперплоскости  $\pi \Leftrightarrow \vec{a} \perp \vec{n}, \quad M_0 \in \pi \Leftrightarrow (\vec{a}, \vec{n}) = 0, \quad M_0 \in \pi$ .

## 1.5.4. Расстояние от точки до гиперплоскости

Пусть нам даны гиперплоскость  $\pi$

$$A_1x_1 + A_2x_2 + \dots + A_nx_n + b = 0$$

с нормальным вектором  $\vec{n} = (A_1, A_2, \dots, A_n)$  и точка  $M_0(x_1^0, x_2^0, \dots, x_n^0) \notin \pi$ . Под расстоянием от точки  $M_0$  до плоскости  $\pi$  мы будем понимать длину перпендикуляра  $M_0M'$ :  $|\overline{M_0M'}| = \rho(M_0, \pi)$  (рис. 1.22).

Имеем

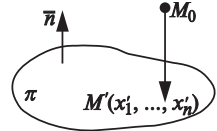


Рис. 1.22

$$|(\vec{n}, \overline{M_0M'})| = |\vec{n}| |\overline{M_0M'}| \cos(\vec{n}, \overline{M_0M'}) = |\vec{n}| |\overline{M_0M'}| \Rightarrow$$

$$\begin{aligned} \rho(M_0, \pi) = |\overline{M_0M'}| &= \frac{|A_1(x'_1 - x_1^0) + \dots + A_n(x'_n - x_n^0)|}{|\vec{n}|} = \\ &= \frac{|(A_1x_1^0 + A_2x_2^0 + \dots + A_nx_n^0 + b) - (A_1x'_1 + A_2x'_2 + \dots + A_nx'_n + b)|}{|\vec{n}|} = \\ &= \frac{|A_1x_1^0 + A_2x_2^0 + \dots + A_nx_n^0 + b|}{|\vec{n}|}. \end{aligned}$$

Итак, окончательно,

$$\rho(M_0, \pi) = \frac{|A_1x_1^0 + A_2x_2^0 + \dots + A_nx_n^0 + b|}{|\vec{n}|}.$$

**Задача 6.** Показать, что прямые  $l_1: x + 2y + 4 = 0$  и  $l_2: 2x + 4y - 3 = 0$  параллельны, и найти расстояние между ними.

$$\text{Решение. } l_1 \parallel l_2 \Leftrightarrow \vec{n}_1 = (1, 2) \parallel \vec{n}_2 = (2, 4) \quad \left( \frac{1}{2} = \frac{2}{4} \right).$$

Точка  $M_0(0, -2) \in l_1$ . Очевидно, что расстояние

$$\rho(l_1, l_2) = \rho(M_0, l_2) = \frac{|2 \cdot 0 + 4 \cdot (-2) - 3|}{\sqrt{4 + 16}} = \frac{11}{2\sqrt{5}}.$$

Умение аналитически описывать прямую и плоскость дает возможность моделировать эти геометрические объекты, не прибегая к их натуральному воспроизведению.

## 1.6. Матрицы и операции над ними

Основные определения. Операции над матрицами. Определитель квадратной матрицы. Обратная матрица.

### 1.6.1. Основные определения

**ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1.** Матрицей  $A$  размера  $m \times n$  называется прямоугольная таблица чисел, расположенных в  $m$  строках и  $n$  столбцах

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}.$$

Числа  $a_{ij}$  ( $i = 1, \dots, m$ ;  $j = 1, \dots, n$ ) называются элементами матрицы  $A$ . Первый индекс  $i$  указывает номер строки, а второй  $j$  — номер столбца, на пересечении которых расположен элемент  $a_{ij}$ . Сокращенное обозначение матрицы  $A = (a_{ij})_{m \times n}$ . Матрица  $A = (a_{ij})$  размера  $n \times n$  называется квадратной. Матрица размера  $m \times 1$  называется вектором-столбцом:

$$A = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_m \end{pmatrix}.$$

Нулевая матрица — это матрица, все элементы которой равны 0. Единичная матрица порядка  $n$  — это квадратная матрица  $n$ -го порядка вида

$$E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}.$$

Понятие матрицы оказалось очень удобным для компактной записи и обработки объемной информации. Матрицы и матричные обозначения применяются почти во всех разделах математики и, в частности, в теории линейных систем, численных методах, дифференциальных уравнениях, теории вероятностей. Понятие матрицы было введено в работах английских математиков У. Гамильтона

и А. Кэли в середине XIX в. Основы теории созданы немецкими математиками К. Вейерштрассом и Ф. Фробениусом (вторая половина XIX в. и начало XX в.)

### 1.6.2. Операции над матрицами

#### 1. Равенство матриц.

**ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2.** Две матрицы  $A = (a_{ij})$ ,  $B = (b_{ij})$  совпадают  $[A = B]$ , если совпадают их размеры и соответствующие элементы равны, т. е. при всех  $i, j$   $a_{ij} = b_{ij}$ .

#### 2. Сложение матриц.

**ОПРЕДЕЛЕНИЕ 3.** Суммой двух матриц  $A = (a_{ij})_{m \times n}$  и  $B = (b_{ij})_{m \times n}$  одинаковых размеров называется матрица  $C = (c_{ij})_{m \times n} = A + B$  тех же размеров, элементы которой определяются равенствами  $c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$ .

Например,

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix} \Rightarrow C = A + B = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 5 \\ 5 & 5 & 4 \end{pmatrix}.$$

#### 3. Умножение матрицы на число.

**ОПРЕДЕЛЕНИЕ 4.** Произведением матрицы  $A = (a_{ij})_{m \times n}$  на число  $\lambda \in R$  называется матрица  $B = (b_{ij})_{m \times n} = \lambda A$ , элементы которой определяются равенствами  $b_{ij} = \lambda a_{ij}$ .

#### 4. Умножение матриц.

**ОПРЕДЕЛЕНИЕ 5.** Произведением матрицы  $A = (a_{ij})_{m \times k}$  на матрицу  $B = (b_{ij})_{k \times n}$  называется матрица  $C = (c_{ij})_{m \times n} = A \cdot B$  размера  $m \times n$ , элементы которой  $c_{ij}$  определяются равенством

$$c_{ij} = a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + \dots + a_{ik}b_{kj}.$$

Таким образом, элемент матрицы  $C = A \cdot B$ , расположенный в  $i$ -й строке и  $j$ -м столбце, равен сумме произведений элементов  $i$ -й строки матрицы  $A$  на соответствующие элементы  $j$ -го столбца матрицы  $B$ . Например,

$$\text{а) } A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}_{2 \times 3}, \quad B = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & 3 & -2 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}_{3 \times 3} \Rightarrow$$

$$C = AB = \begin{pmatrix} 2 \cdot 2 + 3 \cdot 1 + 1 \cdot 0 & 2 \cdot 1 + 3 \cdot 3 + 1 \cdot 2 & 2 \cdot (-1) + 3 \cdot (-2) + 1 \cdot 1 \\ -1 \cdot 2 + 0 \cdot 1 + 1 \cdot 0 & -1 \cdot 1 + 0 \cdot 3 + 1 \cdot 2 & 1 \cdot (-1) + 0 \cdot (-2) + 1 \cdot 1 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 7 & 13 & -7 \\ -2 & 1 & 0 \end{pmatrix}_{2 \times 3}.$$

$$\text{б) } A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow AB = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = BA,$$

т. е. произведение матриц не обладает свойством коммутативности.

### 5. Транспонированные матрицы.

**ОПРЕДЕЛЕНИЕ 6.** Транспонированием матрицы  $A$  называется замена строк этой матрицы ее столбцами с сохранением их номеров. Полученная матрица обозначается через  $A'$ . Например,

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 1 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}_{3 \times 2} \Rightarrow A' = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 2 & 1 & 4 \end{pmatrix}_{2 \times 3}.$$

Квадратная матрица называется симметричной, если  $A = A'$ , т. е. для элементов выполнены равенства  $a_{ij} = a_{ji}$ .

### 1.6.3. Определитель квадратной матрицы

Определитель (число) квадратной матрицы порядка  $n$   $A = (a_{ij})_{n \times n}$  обозначается символами

$$\det A = |A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

Вычисление определителя будет дано индуктивно по порядку матрицы. Для матрицы 2-го порядка ее определитель положим равным

$$|A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12}.$$

**ОПРЕДЕЛЕНИЕ 7.** Алгебраическим дополнением  $A_{ij}$  элемента  $a_{ij}$  называется определитель  $n-1$  порядка, полученный из  $|A|$  вычеркиванием  $i$ -й строки и  $j$ -го столбца, на пересечении которых стоит элемент  $a_{ij}$ , взятый со знаком  $(-1)^{i+j}$ . Например, для

$$|A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}, \quad A_{11} = (-1)^{1+1} \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix},$$

$$A_{12} = (-1)^{1+2} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix}, \quad A_{32} = (-1)^{3+2} \begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{21} & a_{23} \end{vmatrix}.$$

**ОПРЕДЕЛЕНИЕ 8.** Определитель  $|A|$   $n$ -го порядка положим равным

$$|A| = a_{11}A_{11} + a_{12}A_{12} + \dots + a_{1n}A_{1n}.$$

Такое разложение называется разложением по первой строке. Оно сводит вычисление определителя  $n$ -го порядка к вычислению определителей  $n-1$ -го порядка и т. д., до определителей 2-го порядка.

Можно доказать, что определитель можно вычислять путем разложения по любой строке или столбцу

$$|A| = a_{i1}A_{i1} + a_{i2}A_{i2} + \dots + a_{in}A_{in} = a_{1j}A_{1j} + a_{2j}A_{2j} + \dots + a_{nj}A_{nj}. \quad (1)$$

Например, разлагая по 1 строке, получим

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & 4 & 2 \\ 0 & 2 & 1 \end{vmatrix} = 1 \cdot (-1)^{1+1} \begin{vmatrix} 4 & 2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} + 2 \cdot (-1)^{1+2} \begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} + 3 \cdot (-1)^{1+3} \begin{vmatrix} -1 & 4 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} =$$

$$= (4-4) - 2(-1-0) + 3(-2-0) = -4.$$

При вычислении определителей полезными бывают свойства определителей:

1) при транспонировании значение определителя не меняется:  $|A| = |A'|$ ;

2) если в определителе две строки (два столбца) пропорциональны, то он равен 0. В частности, определитель равен 0, если две строки (два столбца) совпадают или одна строка (столбец) нулевая;

3) если поменять местами две строки (два столбца), то определитель изменит свой знак на противоположный.

4) если строку (столбец) умножить на одно и то же число, то определитель умножится на это число;

5) если к строке (столбцу) прибавить другую строку (столбец), умноженную на число, то определитель не изменится.

### 1.6.4. Обратная матрица

**ОПРЕДЕЛЕНИЕ 9.** Если  $A$  квадратная матрица, то матрица  $B$ , такая, что

$$AB = BA = E \quad (E — \text{единичная}),$$

называется обратной для  $A$  и обозначается  $A^{-1}$ .

Таким образом, по определению  $AA^{-1} = A^{-1}A = E$ .

**Теорема 1.** Для того чтобы квадратная матрица  $A$  имела обратную, необходимо и достаточно, чтобы  $|A| \neq 0$ .

Алгоритм нахождения  $A^{-1}$  сводится к следующим пунктам.

1. Составляется вспомогательная матрица  $\tilde{A}$  из алгебраических дополнений  $A_{ij}$  и определителя  $|A|$ :

$$\tilde{A} = \frac{1}{|A|} \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & \dots & A_{1n} \\ A_{21} & A_{22} & \dots & A_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ A_{n1} & A_{n2} & \dots & A_{nn} \end{pmatrix}.$$

2. Полученная матрица транспонируется:

$$A^{-1} = \tilde{A}' = \frac{1}{|A|} \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & \dots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \dots & A_{n2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ A_{1n} & A_{2n} & \dots & A_{nn} \end{pmatrix}.$$

Используя разложение (1), легко убедиться, что матрица  $A^{-1}$  обратная для  $A$ .

**Пример.** Найти обратную матрицу для

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}.$$

*Решение.*  $|A| = \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} = 5 \neq 0;$



$$\tilde{A} = \frac{1}{5} \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \Rightarrow A^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{5} & \frac{1}{5} \\ -\frac{3}{5} & \frac{2}{5} \end{pmatrix}.$$

### 1.7. Решение систем линейных уравнений. Основные понятия

Основные понятия. Матричная запись линейной системы. Геометрическая интерпретация. Структура общего решения линейной системы. Правило Крамера. Матричный метод.

При исследовании количественных характеристик физических явлений мы прежде всего вскрываем простейшие связи между ними — линейные. Так естественно возникают линейные системы. Например, в статистических явлениях механики, электротехники, гидравлики и других зависимость между физическими компонентами (сопротивление, напряжение, давление, движение рычага и др.) нередко является линейной. Именно поэтому система линейных уравнений

$$\begin{cases} a_{11}x + a_{12}y = b_1 \\ a_{21}x + a_{22}y = b_2 \end{cases}$$

выражает:

- а) в механике — равновесие системы сил;
- б) в электромеханике — зависимость между величиной тока и активным сопротивлением в электрической цепи;
- в) в строительном деле — зависимость между силами и деформациями в элементах конструкции.

Линейные системы, описывая качественно различные явления, вскрывают поразительное единство материального мира. Поэтому решение линейных систем всегда было в центре внимания математиков. В 1750 г. швейцарским математиком Г. Крамером, на основе только что созданной теории определителей был предложен метод исследования линейных систем, у которых число уравнений совпадает с числом неизвестных, носящий теперь название правила Крамера. Через 100 лет немецким математиком Л. Кронекером и итальянским математиком Капелли на основе понятия ранга матрицы было проведено полное исследование произвольной линейной системы. И если на принципиальные вопросы, касающиеся числа решений линейной системы, научились давать ответы сравнительно давно, то численные методы решения линейных систем и сейчас интенсивно развиваются, потому что клас-



Если считать вектор-столбец из неизвестных  $\bar{x}$  вектором пространства  $R^n$ , то каждое уравнение системы является уравнением гиперплоскости в  $R^n$ . Поэтому решить систему (1) — это значит выяснить взаимное расположение  $m$  гиперплоскостей в  $R^n$ .

### 1.7.2. Структура общего решения линейной системы

Наряду с неоднородной системой  $A\bar{x} = \bar{b}$ , рассмотрим однородную систему

$$A\bar{x} = \bar{0} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}. \quad (2)$$

Множество решений однородной системы (2) назовем ядром системы  $A\bar{x} = \bar{b}$  и обозначим через

$$\ker A = \{\bar{x} \in R^n \mid A\bar{x} = \bar{0}\}.$$

**Теорема 1.**  $\ker A$  — линейное пространство.

*Доказательство.* Если  $\bar{x}_1, \bar{x}_2 \in \ker A$ , то  $A(\bar{x}_1 + \bar{x}_2) = A\bar{x}_1 + A\bar{x}_2 = \bar{0} + \bar{0}$ . Значит,  $\bar{x}_1 + \bar{x}_2 \in \ker A$ . Аналогично  $\forall \lambda \in R$  и  $\bar{x} \in \ker A$   $A(\lambda\bar{x}) = \lambda A\bar{x} = \lambda\bar{0} = \bar{0}$  и  $\lambda\bar{x} \in \ker A$ . Теорема доказана.

Так как  $\ker A \subset R^n$ , то ядро системы естественно назвать подпространством  $R^n$ .

**Теорема 2.** Если  $\bar{x}^0$  — какое-либо частное решение неоднородной системы  $A\bar{x} = \bar{b}$ , то произвольное решение  $\bar{x}$  неоднородной системы можно записать в виде  $\bar{x} = \bar{x}^0 + \bar{u}$ , где  $\bar{u} \in \ker A$ .

*Доказательство.* Сначала покажем, что  $\forall \bar{u} \in \ker A$  вектор  $\bar{x} = \bar{x}^0 + \bar{u}$  является решением неоднородной системы. Действительно,

$$A\bar{x} = A(\bar{x}^0 + \bar{u}) = A\bar{x}^0 + A\bar{u} = \bar{b} + \bar{0} = \bar{b}.$$

Пусть  $\bar{x}$  — произвольное решение неоднородной системы. Обозначим  $\bar{x} - \bar{x}^0 = \bar{u}$ . Имеем

$$A\bar{u} = A(\bar{x} - \bar{x}^0) = A\bar{x} - A\bar{x}^0 = \bar{b} - \bar{b} = \bar{0}.$$

Значит,  $\bar{u} \in \ker A$  и  $\bar{x} = \bar{x}^0 + \bar{u}$ . Теорема доказана.

Результаты этого пункта геометрически можно проинтерпретировать так. Так как нулевой вектор является решением (2), то  $\ker A$  естественно считать плоскостью в  $R^n$ , проходящей через начало координат.



$$\Delta_n = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & b_2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & b_n \end{vmatrix}.$$

Правило Крамера заключается в следующем:

1) если  $\Delta \neq 0$ , то система (3) имеет единственное решение

$$x_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta}, \quad x_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta}, \quad \dots, \quad x_n = \frac{\Delta_n}{\Delta};$$

2) если  $\Delta = 0$  и хотя бы один из определителей  $\Delta_1, \dots, \Delta_n$  не равен 0, то (3) несовместна;

3) если  $\Delta = \Delta_1 = \Delta_2 = \dots = \Delta_n = 0$ , то система (3) неопределенна.

#### 1.7.4. Матричный метод

Систему (3) можно записать в матричном виде

$$A\bar{x} = \bar{b},$$

где  $A = (a_{ij})_{n \times n}$  — квадратная матрица  $n$ -го порядка.

Если  $|A| \neq 0$ , то, согласно правилу Крамера, система имеет единственное решение. Это решение  $\bar{x}$  можно найти с помощью обратной матрицы

$$\bar{x} = A^{-1}\bar{b}.$$

Действительно,

$$A\bar{x} = A(A^{-1}\bar{b}) = (AA^{-1})\bar{b} = E\bar{b} = \bar{b},$$

так как

$$E\bar{b} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix} = \bar{b}.$$

Здесь следует также отметить, что если развернуть правую часть представленного решения через обратную матрицу с учетом ее выражения через алгебраические дополнения основной матрицы данной линейной системы, то мы получим формулы Крамера.

**Пример.** Решить матричным способом систему

$$\begin{cases} x + y = 1, \\ x - y = 3. \end{cases}$$

Имеем

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = -2 \neq 0.$$

Находим алгебраические дополнения:

$$A_{11} = -1, \quad A_{12} = -1, \quad A_{21} = -1, \quad A_{22} = 1.$$

### Записываем вспомогательную и обратную матрицы

$$\tilde{A} = -\frac{1}{2} \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}, \quad A^{-1} = -\frac{1}{2} \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

Тогда решение имеет вид

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1+3 \\ 1-3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix},$$

$$x = 2, \quad y = -1.$$

## 1.8. Метод Гаусса практического решения систем линейных уравнений

Метод Гаусса. Ранг матрицы. Теорема Кронекера – Капелли.

### 1.8.1. Метод Гаусса

Переходим к исследованию общих линейных систем. Рассмотрим систему из  $m$  линейных уравнений и  $n$  неизвестных:

[illegible]

Наряду с матрицей  $A$  составим так называемую расширенную матрицу системы (1) из коэффициентов при неизвестных и правых частей:

$$A_1 = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} & b_2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} & b_m \end{pmatrix}.$$

Метод Гаусса или метод исключения неизвестных состоит в приведении расширенной матрицы  $A_1$  с помощью элементарных преобразований над ее строками к диагональному виду

$$\left( \begin{array}{cccc|c} & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & & & & \\ & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ & & \cdot & & \\ 0 & & & & \end{array} \right) \text{ или } \left( \begin{array}{cccc|c} & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ & & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & & & & \\ & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ & & \cdot & & \end{array} \right).$$

К элементарным преобразованиям над строками относятся следующие:

- 1) перемена местами двух строк;
- 2) умножение строки на число, отличное от 0;
- 3) прибавление к строке другой строки, умноженной на произвольное число;
- 4) выбрасывание нулевой строки.

Расширенной матрице, приведенной к диагональному виду, соответствует линейная система, эквивалентная данной, решение которой не вызывает затруднений. Реализацию метода Гаусса рассмотрим на примере. Переход от  $A_1$  при помощи элементарных преобразований будем обозначать значком эквивалентности « $\sim$ ».

**Пример.** Решить систему с помощью метода Гаусса:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 = -2, \\ 4x_1 - 3x_2 + x_3 = 1, \\ 2x_1 + x_2 - x_3 = 1; \end{cases} \quad A_1 = \left( \begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & -2 \\ 4 & -3 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & -1 & 1 \end{array} \right).$$

Ко второй строке прибавим первую, умноженную на  $-4$ , к третьей — первую, умноженную на  $-2$ :

$$A_1 \sim \left( \begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & -2 \\ 0 & -7 & 5 & 9 \\ 0 & -1 & 1 & 5 \end{array} \right) \sim \left( \begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & -2 \\ 0 & -7 & 5 & 9 \\ 0 & 1 & -1 & -5 \end{array} \right).$$

Поменяем местами вторую и третью строки:

$$A_1 \sim \left( \begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & -2 \\ 0 & 1 & -1 & -5 \\ 0 & -7 & 5 & 9 \end{array} \right).$$

К третьей строке прибавим вторую, умноженную на 7:

$$A_1 \sim \left( \begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & -2 \\ 0 & 1 & -1 & -5 \\ 0 & 0 & -2 & -26 \end{array} \right) \sim .$$

Полученной диагональной матрице соответствует эквивалентная система

$$\begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 = -2, \\ x_2 - x_3 = -5, \\ x_3 = 13 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = 3, \\ x_2 = 8, \\ x_3 = 13. \end{cases}$$

### 1.8.2. Ранг матрицы

**ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1.** Минором  $k$ -го порядка матрицы  $A = (a_{ij})_{m \times n}$  называется определитель, составленный из элементов, расположенных на пересечении каких-либо  $k$  строк и  $k$  столбцов ( $k \leq n$ ,  $k \leq m$ ).

Следует обратить внимание, что данное понятие минора  $k$ -го порядка обобщает введенное ранее определение алгебраического дополнения  $A_{ij}$  элемента  $a_{ij}$  квадратной матрицы  $A$ . Сравнивая эти два определения, необходимо отметить очевидную связь между ними:

$$A_{ij} = (-1)^{i+j} M_j^i,$$

где  $M_j^i$  — определитель матрицы, которая получается из матрицы  $A$  путем вычеркивания  $i$ -й строки и  $j$ -го столбца. Таким образом, определитель  $M_j^i$  можно назвать минором элемента  $a_{ij}$  квадратной матрицы  $A$ .

Рангом матрицы  $A$  называется наибольший порядок минора этой матрицы, отличного от 0. Всякий отличный от 0 минор, порядок которого равен рангу этой матрицы, называется базисным минором. Ранг матрицы будем обозначать через  $\text{rang } A$ ;  $\text{rang } A = r$  означает, что матрица имеет минор порядка  $r$ , отличный от 0, а все миноры порядка  $r+1$  или равны 0, или не существуют.



При вычислении ранга матрицы полезно пользоваться элементарными преобразованиями как над строками, так и над столбцами.

**Пример.** Определить ранг матрицы

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 5 & 7 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 5 \end{pmatrix}.$$

Вычислим определитель данной матрицы путем разложения по элементам первой строки. При этом воспользуемся отмеченной здесь связью между минорами и алгебраическими дополнениями:

$$\det A = a_{11}M_1^1 - a_{12}M_2^1 + a_{13}M_3^1 = 3 \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 5 \end{vmatrix} - 5 \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 5 \end{vmatrix} + 7 \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = 3 \cdot 1 - 5 \cdot 2 + 7 \cdot 1 = 0.$$

Как видим, определитель данной матрицы равен нулю, но миноры второго порядка отличны от нуля. Следовательно, ранг матрицы  $A$ :  $\text{rang } A = 2$ .

### 1.8.3. Теорема Кронекера – Капелли

Система (1) совместна, т. е. имеет хотя бы одно решение, тогда и только тогда, когда  $\text{rang } A = \text{rang } A_1$ , причем

- 1) если  $\text{rang } A \neq \text{rang } A_1$ , то (1) несовместна;
- 2) если  $\text{rang } A = \text{rang } A_1 = r < n$  (числу неизвестных), то (1) неопределенна;
- 3) если  $\text{rang } A = \text{rang } A_1 = n$ , то (1) имеет единственное решение.

Отметим, что однородная система всегда совместна, так как имеет нулевое решение. Для нее справедливо

**СЛЕДСТВИЕ.** Размерность пространства решений  $\ker A$  однородной линейной системы  $A\bar{x} = \bar{0}$  равна  $n - r$ .

Из сформулированной теоремы вытекает алгоритм решения системы (4).

Пусть  $\text{rang } A = \text{rang } A_1$ . В матрице  $A$  выделяем базисный минор порядка  $r$ . С этим минором связаны  $r$  уравнений и  $r$  неизвестных системы (1). Эти уравнения и неизвестные назовем базисными; все остальные уравнения системы отбросим, а все остальные  $n - r$  неизвестных в базисных уравнениях перенесем направо. Получим систему из  $r$  базисных уравнений с  $r$  базисными неизвестными. Так как ее определитель, являясь базисным минором, отличен от 0, то по правилу Крамера полученная система имеет единственное решение. Это решение,

зависящее от  $n - r$  произвольных постоянных, соответствующих небазисным неизвестным, и будет общим решением исходной системы (1). Этот алгоритм мы будем применять к эквивалентной ступенчатой системе, полученной из исходной с помощью метода Гаусса.

**Пример.** Найти размерность и базис пространства решений однородной линейной системы

$$\begin{cases} x_1 + x_2 - 3x_3 + 2x_4 = 0, \\ 2x_1 - 3x_2 + x_3 - x_4 = 0, \\ 4x_1 - x_2 - 5x_3 + 3x_4 = 0. \end{cases}$$

*Решение.* Составляем расширенную матрицу

$$A_1 = \left( \begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & -3 & 2 & 0 \\ 2 & -3 & 1 & -1 & 0 \\ 4 & -1 & -5 & 3 & 0 \end{array} \right).$$

С помощью метода Гаусса преобразуем эту матрицу к ступенчатому виду. Для этого прибавим ко второй строке первую, умноженную на  $-2$ , а к третьей — первую, умноженную на  $-4$ :

$$A_1 \sim \left( \begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & -3 & 2 & 0 \\ 0 & -5 & 7 & -5 & 0 \\ 0 & -5 & 7 & -5 & 0 \end{array} \right).$$

Прибавим к третьей строке вторую, умноженную на  $-1$ , и отбросив нулевую строку, получим ступенчатую матрицу

$$A_1 \sim \left( \begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & -3 & 2 & 0 \\ 0 & -5 & 7 & -5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right) \sim \left( \begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & -3 & 2 & 0 \\ 0 & -5 & 7 & -5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right).$$

Так как минор

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 5 \end{vmatrix} = 5 \neq 0,$$

то  $\text{rang } A = \text{rang } A_1 = 2$ .

Полученной матрице соответствует система

$$\begin{cases} x_1 + x_2 - 3x_3 + 2x_4 = 0, \\ 5x_2 - 7x_3 + 5x_4 = 0. \end{cases}$$

В качестве базисных неизвестных возьмем  $x_1$  и  $x_2$ . Тогда

$$\begin{cases} x_1 = \frac{8}{5}x_3 - x_4, \\ x_2 = \frac{7}{5}x_3 - x_4. \end{cases}$$

Это и есть общее решение системы, зависящее от двух произвольных постоянных  $x_3, x_4$ . Положим  $x_3 = u, x_4 = v$  и запишем его так:

$$\bar{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{8}{5}u - v \\ \frac{7}{5}u - v \\ u \\ v \end{pmatrix} = u \begin{pmatrix} \frac{8}{5} \\ \frac{7}{5} \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + v \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad u, v \in \mathbb{R}.$$

Окончательно, пространство решений — это двумерное пространство (двумерная плоскость в  $\mathbb{R}^4$ ) с базисом  $\bar{a}_1 = \left(\frac{8}{5}, \frac{7}{5}, 1, 0\right)$  и  $\bar{a}_2 = (-1, -1, 0, 1)$ .

## 1.9. Линейные операторы

Определение и примеры линейных операторов. Матрица линейного оператора. Самосопряженный оператор. Действия над линейными операторами.

### 1.9.1. Определение и примеры линейных операторов

В математическом анализе изучаются функции, аргументом и значением которых являются действительные числа. Мы будем изучать функции, аргументом и значением которых будут векторы  $n$ -мерного

линейного пространства  $R^n$ . При этом мы ограничимся простейшим типом таких функций, а именно линейными, которые будем называть линейными преобразованиями или линейными операторами. Линейные операторы имеют особое значение в линейной алгебре и ее приложениях.

**ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1.** Пусть каждому вектору  $\bar{x} \in R^n$  поставлен в соответствие единственный вектор  $\bar{y} \in R^n$ . Функция  $\bar{y} = A(\bar{x})$  называется преобразованием или оператором из  $R^n$  в  $R^n$ . При этом вектор  $\bar{x}$  называется прообразом, а  $\bar{y}$  — образом оператора.

Оператор  $A$  называется линейным, если  $\forall \bar{x}_1, \bar{x}_2 \in R^n, \lambda \in R$  выполняются равенства:

$$1) A(\bar{x}_1 + \bar{x}_2) = A\bar{x}_1 + A\bar{x}_2,$$

$$2) A(\lambda\bar{x}_1) = \lambda A\bar{x}_1.$$

**Примеры.**

1. Тожественный (или единичный) оператор — это линейный оператор, действующий по правилу

$$I \bar{x} = \bar{x}.$$

2. Оператор подобия. Пусть  $k \in R, \bar{x} \in R^n$ ,

$$A\bar{x} = k\bar{x}.$$

Оператор  $A$  линейный:

$$A(\bar{x}_1 + \bar{x}_2) = k(\bar{x}_1 + \bar{x}_2) = k\bar{x}_1 + k\bar{x}_2 = A\bar{x}_1 + A\bar{x}_2;$$

$$A(\lambda\bar{x}_1) = k(\lambda\bar{x}_1) = \lambda(k\bar{x}_1) = \lambda A\bar{x}_1.$$

3. Оператор сдвига на вектор:  $A\bar{x} = \bar{x} + \bar{x}_0$ .

Он является линейным тогда и только тогда, когда  $\bar{x}_0 = \bar{0}$ , т. е.  $A\bar{x} = \bar{x}$ . В самом деле,

$$A(\bar{x}_1 + \bar{x}_2) = \bar{x}_1 + \bar{x}_2 + \bar{x}_0 = A\bar{x}_1 + A\bar{x}_2 = \bar{x}_1 + \bar{x}_2 + 2\bar{x}_0 \Leftrightarrow \bar{x}_0 = \bar{0}.$$

4. Оператор поворота в  $R^2$  на угол  $\varphi$  вокруг начала координат (рис. 1.23). Этот оператор является линейным. В самом деле,

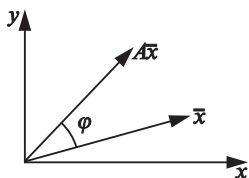


Рис. 1.23

$A(\bar{x}_1 + \bar{x}_2)$  означает, что векторы  $\bar{x}_1$  и  $\bar{x}_2$  сначала складываются, а затем их сумма поворачивается на угол  $\varphi$ . Сумма означает, что векторы  $\bar{x}_1$  и  $\bar{x}_2$  сначала поворачиваются на угол  $\varphi$ , а затем складываются. Ясно, что результат один и тот же. Аналогично проверяется равенство

$$A(\lambda\bar{x}_1) = \lambda A\bar{x}_1.$$

$$A = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & \lambda_j \end{pmatrix}$$

называется диагональным. Его геометрический смысл состоит в том, что он растягивает вектор  $\vec{x}$  по осям координат в  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ , соответственно раз:  $\vec{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n) \Rightarrow A\vec{x} = (\lambda_1 x_1, \lambda_2 x_2, \dots, \lambda_n x_n)$ .

4. Матрица оператора поворота. Пусть  $0, \vec{i}, \vec{j}$  — прямоугольная система координат в  $R^2$  (рис. 1.24). Разлагая  $A\vec{i}, A\vec{j}$  по базису  $\vec{i}, \vec{j}$  получим

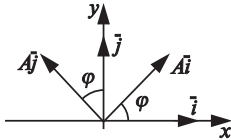


Рис. 1.24

$$\begin{aligned} A\vec{i} &= \cos \varphi \cdot \vec{i} + \sin \varphi \cdot \vec{j}, \\ A\vec{j} &= -\sin \varphi \cdot \vec{i} + \cos \varphi \cdot \vec{j}, \end{aligned} \Rightarrow$$

$$A = \begin{pmatrix} \cos \varphi & \sin \varphi \\ -\sin \varphi & \cos \varphi \end{pmatrix}.$$

**Теорема 1.** Если  $(I)$  — матрица линейного оператора  $A$  в базисе  $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \dots, \vec{e}_n$ , то для  $\forall \vec{x} = x_1 \vec{e}_1 + x_2 \vec{e}_2 + \dots + x_n \vec{e}_n \in R^n$

$$A(\vec{x}) = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = A\vec{x}.$$

Данное утверждение открывает широкие возможности практической реализации преобразования векторных величин. Поэтому раскроем его содержание без использования математической символики.

Если  $(I)$  есть матрица линейного преобразования  $A$  а базисе  $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \dots, \vec{e}_n$ , то преобразование любого вектора  $\vec{x}$ , представленного в данном пространстве в виде разложения по базису  $\vec{x} = x_1 \vec{e}_1 + x_2 \vec{e}_2 + \dots + x_n \vec{e}_n$ , можно осуществить путем умножения матрицы  $A$  на вектор-столбец из заданных координат данного вектора.

Сказанное подтверждается приведенными выше примерами. В общем виде рассмотрим доказательство для двумерного пространства.

*Доказательство.* Пусть  $n = 2$  и  $A: R^2 \rightarrow R^2$ ,

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$$

в базисе  $\vec{e}_1, \vec{e}_2$ . Тогда  $\forall \vec{x} = x_1 \vec{e}_1 + x_2 \vec{e}_2$  из свойств линейности

$$\begin{aligned} A\vec{x} &= A(x_1 \vec{e}_1 + x_2 \vec{e}_2) = x_1 A\vec{e}_1 + x_2 A\vec{e}_2 = x_1(a_{11}\vec{e}_1 + a_{21}\vec{e}_2) + x_2(a_{12}\vec{e}_1 + a_{22}\vec{e}_2) = \\ &= (x_1 a_{11} + x_2 a_{12})\vec{e}_1 + (x_1 a_{21} + x_2 a_{22})\vec{e}_2 = \begin{pmatrix} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Итак, при преобразовании вектора, заданного координатами в некотором базисе, линейным оператором матрица оператора в этом базисе умножается на вектор-столбец из координат.

### 1.9.3. Самонапряженный оператор

**ОПРЕДЕЛЕНИЕ 3.** Линейный оператор  $A: R^n \rightarrow R^n$  называется самонапряженным, если в ортонормированном базисе его матрица  $A = (a_{ij})_{n \times n}$  является симметричной, т. е.  $a_{ij} = a_{ji}$  для всех  $i, j$ .

**Теорема 2.** Если  $A: R^n \rightarrow R^n$  — самосопряженный линейный оператор, то  $\forall \bar{x}, \bar{y} \in R^n$

$$(A\bar{x}, \bar{y}) = (\bar{x}, A\bar{y}),$$

где  $(\cdot, \cdot)$  — скалярное произведение в  $R^n$ .

*Доказательство для  $n=2$ .* Пусть в ортонормированном базисе  $i, j$   $R^2$  матрица оператора  $A$  симметричная, т. е.

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} \end{pmatrix}, \quad \bar{x} = x_1 \bar{i} + x_2 \bar{j}, \quad \bar{y} = y_1 \bar{i} + y_2 \bar{j}.$$

Тогда

$$\begin{aligned} (A\bar{x}, \bar{y}) &= \left( \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} \right) = \left( \begin{pmatrix} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 \\ a_{12}x_1 + a_{22}x_2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} \right) = \\ &= (a_{11}x_1 + a_{12}x_2)y_1 + (a_{12}x_1 + a_{22}x_2)y_2 = (a_{11}y_1 + a_{12}y_2)x_1 + (a_{12}y_1 + a_{22}y_2)x_2 = \\ &= \left( \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} a_{11}y_1 + a_{12}y_2 \\ a_{12}y_1 + a_{22}y_2 \end{pmatrix} \right) = \left( \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} \right) = (\bar{x}, A\bar{y}). \end{aligned}$$

### 1.9.4. Действия над операторами

**1. Сложение операторов.** Суммой линейных операторов  $A$  и  $B$  в  $R^n$  называется линейный оператор  $C = A + B$  такой, что для  $\forall \bar{x} \in R^n$

$$C\bar{x} = (A + B)\bar{x} = A\bar{x} + B\bar{x}.$$

Нетрудно показать, что матрица оператора  $C$  в некотором базисе равна сумме матриц операторов  $A$  и  $B$  в этом базисе.

**2. Умножение оператора на число.** Произведением линейного оператора  $A$  на число  $\lambda \in R$  называется линейный оператор  $B = \lambda A$  такой, что для  $\forall \bar{x} \in R^n$

$$B\bar{x} = (\lambda A)\bar{x} = \lambda(A\bar{x}).$$

Матрица оператора  $\lambda A$  равна произведению  $\lambda$  на матрицу оператора  $A$ .

**3. Умножение операторов.** Произведением линейных операторов  $A$  и  $B$  называется линейный оператор  $C = AB$  такой, что для  $\forall \bar{x} \in R^n$

$$C\bar{x} = (AB)\bar{x} = A(B\bar{x}),$$

т. е. сначала вектор  $\bar{x}$  преобразуется в вектор  $\bar{y} = B\bar{x}$ , а затем — в вектор  $\bar{z} = A\bar{y}$ .

При перемножении операторов их матрицы перемножаются. Поэтому в общем случае  $AB \neq BA$ .

**Задача.** Даны два линейных преобразования:

$$\begin{cases} x'_1 = 5x_1 - x_2 + 3x_3, \\ x'_2 = x_1 - 2x_2, \\ x'_3 = 7x_2 - x_3; \end{cases} \quad \begin{cases} x''_1 = 2x'_1 + x'_3, \\ x''_2 = x'_2 - 5x'_3, \\ x''_3 = 2x'_1. \end{cases}$$

Средствами матричного исчисления найти преобразование, выражающее  $x''_1, x''_2, x''_3$  через  $x_1, x_2, x_3$ .

**Решение.** Перепишем каждое из преобразований в матричном виде:  $\bar{x}' = B\bar{x}$ ,  $\bar{x}'' = A\bar{x}'$ . Отсюда  $\bar{x}'' = A\bar{x}' = AB\bar{x}$ . Следовательно, нужно найти матрицу произведения операторов  $AB$ :

$$AB = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -5 \\ 2 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5 & -1 & 3 \\ 1 & -2 & 0 \\ 0 & 7 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 & 5 & 5 \\ 1 & -37 & 5 \\ 10 & -2 & 6 \end{pmatrix}.$$

Поэтому

$$\begin{pmatrix} x''_1 \\ x''_2 \\ x''_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 & 5 & 5 \\ 1 & -37 & 5 \\ 10 & -2 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}.$$

**4. Обратный оператор.** Линейный оператор  $A^{-1}$  называется обратным к линейному оператору  $A$ , если  $A \cdot A^{-1} = A^{-1} \cdot A = E$ .

Матрица оператора  $A^{-1}$  является обратной к матрице оператора  $A$ .



## 1.10. Собственные векторы и собственные значения линейного оператора

Собственные векторы и собственные значения линейного оператора.  
Условие диагональности линейного оператора. Диагональность само-  
сопряженного оператора.

### 1.10.1. Собственные векторы и собственные значения линейного оператора

Ненулевой вектор  $\bar{x} \in R^n$  называется собственным вектором линейного оператора  $A$ , если существует такое число  $\lambda$ , что выполняется равенство  $A\bar{x} = \lambda\bar{x}$ . Число  $\lambda$  называется собственным значением оператора  $A$ , отвечающим собственному вектору  $\bar{x}$ .

Множество собственных значений линейного оператора называется его спектром.

Рассмотрим матрицу оператора в некотором базисе:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}.$$

Тогда соотношение  $A\bar{x} = \lambda\bar{x}$  или  $(A - \lambda E)\bar{x} = \bar{0}$  эквивалентно следующему:

$$\begin{pmatrix} a_{11} - \lambda & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} - \lambda & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} - \lambda \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Это есть однородная система  $n$ -го порядка, всегда имеющая нулевое решение  $\bar{x} = \bar{0}$ . По правилу Крамера она будет иметь ненулевое решение тогда и только тогда, когда ее определитель равен 0, т. е.

$$\begin{vmatrix} a_{11} - \lambda & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} - \lambda & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} - \lambda \end{vmatrix} = 0. \quad (1)$$

Итак, собственные числа  $\lambda$  являются корнями алгебраического уравнения  $n$ -го порядка (1), которое называется характеристическим



$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = t \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$  — одномерное линейное пространство собственных векторов с базисом  $\bar{a}_2 = (1, 2)$ .

Отметим, что векторы  $\bar{a}_1, \bar{a}_2$  в  $R^2$  образуют базис (векторы  $\bar{a}_1$  и  $\bar{a}_2$  неколлинеарны). Так как  $A\bar{a}_1 = \bar{a}_1$ ,  $A\bar{a}_2 = 13\bar{a}_2$ , то матрица оператора  $A$  в этом базисе будет диагональной:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 13 \end{pmatrix}.$$

### 1.10.2. Условие диагональности линейного оператора

**Теорема 1.** *Линейный оператор  $A$  в  $R^n$  приводится к диагональному виду тогда и только тогда, когда его собственные векторы образуют базис в  $R^n$ .*

*Доказательство.* Необходимость ( $\Rightarrow$ ). Пусть в базисе  $\bar{e}_1, \bar{e}_2, \dots, \bar{e}_n$  матрица оператора  $A$  диагональная:

$$A = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & \lambda_n \end{pmatrix}.$$

Тогда  $A\bar{e}_1 = \lambda_1\bar{e}_1$ ,  $A\bar{e}_2 = \lambda_2\bar{e}_2$ , ...,  $A\bar{e}_n = \lambda_n\bar{e}_n$ , т. е. базис  $\bar{e}_1, \dots, \bar{e}_n$  состоит из собственных векторов, отвечающих собственным значениям  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ .

Достаточность ( $\Leftarrow$ ). Пусть  $\bar{e}_1, \bar{e}_2, \dots, \bar{e}_n$  — базис из собственных векторов, отвечающих собственным значениям  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ .

Тогда  $A\bar{e}_1 = \lambda_1\bar{e}_1$ , ...,  $A\bar{e}_n = \lambda_n\bar{e}_n$  и

$$A = \begin{pmatrix} \lambda & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & \lambda \end{pmatrix}.$$

Отметим, что не всякий линейный оператор приводится к диагональному виду, так как не всякий линейный оператор имеет хотя бы один собственный вектор. Примером такого оператора является оператор поворота в  $R^2$  на угол  $0 < \varphi < \pi$ . Действительно, геометрически

существование собственного вектора означает, что существует вектор, который растягивается оператором в  $\lambda$  раз, а оператор поворота все векторы не растягивает, а поворачивает.

Укажем достаточное условие приводимости оператора к диагональному виду.

**Теорема 2.** Если линейный оператор  $A$  в  $R^n$  имеет  $n$  различных собственных значений, то собственные векторы, отвечающие им, образуют базис в  $R^n$ , и матрица оператора в этом базисе диагональная.

*Доказательство для  $n=2$ .* Пусть  $\lambda_1 \neq \lambda_2$  — собственные значения, а  $\bar{e}_1, \bar{e}_2$  — собственные векторы оператора  $A$  в  $R^2$ . Покажем, что эти векторы линейно независимы. Пусть

$$c_1 \bar{e}_1 + c_2 \bar{e}_2 = \bar{0} \Rightarrow \bar{0} = A(c_1 \bar{e}_1 + c_2 \bar{e}_2) = c_1 A\bar{e}_1 + c_2 A\bar{e}_2$$

и

$$c_1 A\bar{e}_1 + c_2 A\bar{e}_2 = \lambda_1 c_1 \bar{e}_1 + \lambda_2 c_2 \bar{e}_2 = \bar{0}.$$

Отсюда

$$(\lambda_1 - \lambda_2)c_2 \bar{e}_2 = \bar{0}, \quad \lambda_1 \neq \lambda_2.$$

Значит,  $c_2 = 0$ . Аналогично  $c_1 = 0$ . Теорема доказана.

**Теорема 3.** Для любого самосопряженного оператора  $A$  в  $R^n$  существует ортонормированный базис из собственных векторов, в котором его матрица является диагональной.

Доказательство в общем случае является очень сложным. Мы проведем его для  $n=2$ , т. е. для оператора в  $R^2$ , матрица которого в ортонормированном базисе  $\bar{i}, \bar{j}$  имеет вид

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} \end{pmatrix}, \quad a_{12} \neq 0$$

(иначе оператор уже диагональный).

1. оператор  $A$  имеет 2 различных собственных значения:

$$\begin{vmatrix} a_{11} - \lambda & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} - \lambda \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow \lambda^2 - (a_{11} + a_{22})\lambda + a_{11}a_{22} - a_{12}^2 = 0 \Rightarrow$$

дискриминант

$$D = (a_{11} + a_{22})^2 - 4(a_{11}a_{22} - a_{12}^2) = (a_{11} - a_{22})^2 + 4a_{12}^2 > 0,$$

следовательно, корни действительные и различные.

2. Собственные векторы, отвечающие различным собственным значениям, ортогональны:

$$\begin{aligned}
 A\bar{e}_1 &= \lambda_1 \bar{e}_1, \quad \lambda_1 + \lambda_2 \Rightarrow (\lambda_1 - \lambda_2)(\bar{e}_1, \bar{e}_2) = \lambda_1(\bar{e}_1, \bar{e}_2) - \lambda_2(\bar{e}_1, \bar{e}_2) = A\bar{e}_2 = \lambda_2 \bar{e}_2, \\
 A\bar{e}_2 &= \lambda_2 \bar{e}_2, \\
 &= (\lambda_1 \bar{e}_1, \bar{e}_2) - (\bar{e}_1, \lambda_2 \bar{e}_2) = (A\bar{e}_1, \bar{e}_2) - (\bar{e}_1, A\bar{e}_2) = 0
 \end{aligned}$$

в силу теоремы 2 предыдущей лекции. Значит,  $(\bar{e}_1, \bar{e}_2) = 0$ .

Из теоремы 2 и доказанных фактов вытекают все утверждения теоремы 3 для  $n = 2$ .

### 1.11. Кривые и поверхности второго порядка

Кривые второго порядка. Поверхности второго порядка.

Кривые второго порядка (эллипс, гипербола, парабола) как конические сечения были известны уже математикам Древней Греции. С помощью этих кривых решались некоторые задачи на построение, оказавшиеся недоступными при использовании простейших чертежных инструментов — циркуля и линейки. Дальнейшие успехи теории кривых второго порядка связаны с созданием в XVII в. нового геометрического метода — метода координат.

Интерес к этим кривым всегда поддерживался тем, что эти кривые часто встречаются в различных явлениях природы и в нашей деятельности. В науке они приобрели особенное значение после того, как немецкий астроном И. Кеплер открыл из наблюдений, а английский ученый И. Ньютон теоретически обосновал законы движения планет, один из которых утверждает, что планеты и кометы Солнечной системы движутся по коническим сечениям, в одном из фокусов которых находится Солнце. Следующие примеры относятся к отдельным типам конических сечений: параболу описывает снаряд или камень, брошенный наклонно к горизонту; в некоторых механизмах пользуются зубчатыми колесами эллиптической формы; гипербола служит графиком обратной пропорциональности, часто наблюдающейся в природе (например, закон Бойля — Мариотта). Очень многообразные применения в естествознании и технике имеют поверхности второго порядка.

#### 1.11.1. Кривые второго порядка

**ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1.** Кривой второго порядка называется множество всех точек  $M(x, y) \in R^2$ , удовлетворяющих уравнению

$$a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 + b_1x + b_2y + b_0 = 0. \quad (1)$$

**Канонические уравнения кривых второго порядка**

1. Эллипс (рис. 1.25).

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \quad \text{— центрально-симметричная ограниченная кривая}$$

с полуосями  $a$  и  $b$ , пересекающая оси координат в точках  $(0, \pm b)$ ,  $(\pm a, 0)$ . При  $a = b$  получаем уравнение окружности (рис. 1.26).

Если положить  $\frac{x}{a} = \cos t$ ,  $\frac{y}{b} = \sin t$ , получим параметрические уравнения эллипса

$$\begin{cases} x = a \cos t, \\ y = b \sin t, \end{cases} \quad 0 \leq t \leq 2\pi.$$

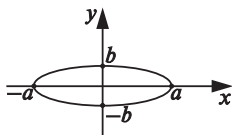


Рис. 1.25

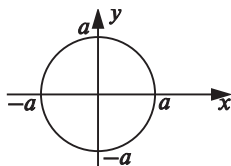


Рис. 1.26

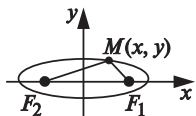


Рис. 1.27

Характеристическое свойство эллипса: эллипсом называется геометрическое место точек  $M(x, y) \in R^2$ , сумма расстояний которых от двух данных точек  $F_1(c, 0)$ ,  $F_2(-c, 0)$  ( $c = \sqrt{a^2 - b^2}$ ,  $a > b$ ), называемых фокусами, есть число постоянное, равное  $2a$  (рис. 1.27):

$$|\overline{MF_1}| + |\overline{MF_2}| = 2a \Leftrightarrow \sqrt{(c-x)^2 + y^2} + \sqrt{(c+x)^2 + y^2} = 2a \Leftrightarrow \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

2. Гипербола (рис. 1.28).

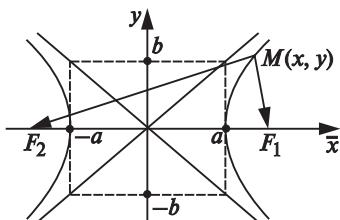


Рис. 1.28

$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$  — центрально-симметричная неограниченная кривая, пересекающая ось  $Ox$  в точках  $(\pm a, 0)$ , ветви которой приближаются при  $x \rightarrow \pm\infty$  к двум прямым  $\frac{x}{a} - \frac{y}{b} = 0$  и  $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 0$ , называемым асимптотами гиперболы.

Характеристическое свойство гиперболы: гиперболой называется геометрическое место точек  $M(x, y) \in R^2$ , модуль разности расстояний от которых до двух фиксированных точек  $F_1(c, 0)$  и  $F_2(-c, 0)$ , ( $c = \sqrt{a^2 + b^2}$ ), называемых фокусами, постоянен и равен  $2a$ .

$$\begin{aligned} \left| |\overline{MF_1}| - |\overline{MF_2}| \right| = 2a &\Leftrightarrow \sqrt{(x+c)^2 + y^2} - \sqrt{(x-c)^2 + y^2} = \\ &= \pm 2a \Leftrightarrow \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1. \end{aligned}$$

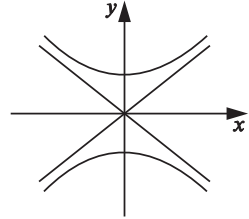


Рис. 1.29

$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = -1$  — сопряженная гипербола (рис. 1.29).

3. Парабола (рис. 1.30).

$y^2 = 2px$  — симметричная относительно оси  $OX$ , неограниченная кривая с вершиной в точке  $(0, 0)$ .

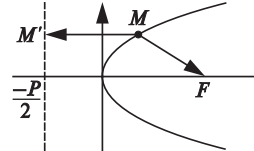


Рис. 1.30

Характеристическое свойство параболы: параболой называется геометрическое место

точек, равноудаленных от фиксированной точки  $F\left(\frac{P}{2}, 0\right)$ , называемой фокусом, и фиксированной прямой  $x = -\frac{P}{2}$ , называемой директрисой:

$$|\overline{MF}| = |\overline{MM'}| \Leftrightarrow \sqrt{\left(x - \frac{P}{2}\right)^2 + y^2} = \sqrt{\left(x + \frac{P}{2}\right)^2} \Leftrightarrow y^2 = 2px.$$

4. Пара пересекающихся прямых (рис. 1.31).

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 0 \Leftrightarrow \frac{x}{a} - \frac{y}{b} = 0, \quad \frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 0.$$

5. Пара параллельных прямых (рис. 1.32).

$$x^2 = a^2 \quad \text{или} \quad y^2 = b^2.$$

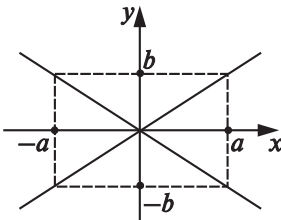


Рис. 1.31

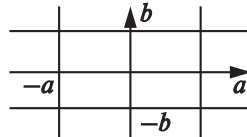


Рис. 1.32

6. Пара совпадающих прямых.

$$x^2 = 0 \text{ — ось } OY, \text{ или } y^2 = 0 \text{ — ось } OX.$$

7. Точка.

$$x^2 + y^2 = 0 \Leftrightarrow x = 0, y = 0.$$

8. Пустое множество.

$$x^2 + y^2 + 1 = 0.$$

### 1.11.2. Поверхности второго порядка

**ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2.** Поверхностью второго порядка называется множество всех точек  $M(x, y, z) \in R^3$ , удовлетворяющих уравнению

$$a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 + 2a_{13}xz + 2a_{23}yz + a_{33}z^2 + b_1x + b_2y + b_3z + b_0 = 0. \quad (2)$$

#### Канонические уравнения поверхностей второго порядка

1. Эллипсоид (рис. 1.33).

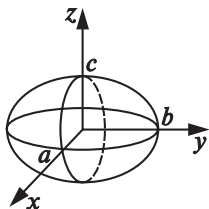


Рис. 1.33

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1 \text{ — центрально-симметричная}$$

ограниченная поверхность, пересекающая оси координат в точках  $(\pm a, 0, 0)$ ,  $(0, \pm b, 0)$ ,  $(0, 0, \pm c)$ , лежащая в прямоугольном параллелепипеде  $-a \leq x \leq a$ ,  $-b \leq y \leq b$ ,  $-c \leq z \leq c$ . Все плоские сечения эллипсоида являются эллипсами. При  $a = b = c$  получаем уравнение сферы

$$x^2 + y^2 + z^2 = a^2.$$

2. Гиперболоиды.

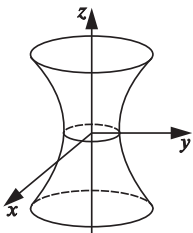


Рис. 1.34

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1 \text{ — однополостный гиперболоид}$$

(рис. 1.34), неограниченная центрально-симметричная поверхность. Плоскости  $z = c$  пересекают его по эллипсам, плоскости  $x = c$  и  $y = c$  — по гиперболам. Поверхность гиперболоида можно составить из прямых. Это свойство однополостного гиперболоида было использовано известным советским инженером Шуховым при строительстве первой московской телебашни.



$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = -1 \text{ — двуполостный гиперboloид (рис. 1.35), неограниченная центрально-симметричная поверхность. Плоскости } z = c \text{ пересекают его по эллипсам, плоскости } x = c, y = c \text{ — по гиперболам.}$$

### 3. Параболоиды.

$$2z = \frac{x^2}{p} + \frac{y^2}{q} \text{ — эллиптический параболоид } (p, q > 0) \text{ (рис. 1.36), неограниченная поверхность с осью симметрии } Oz, \text{ расположенная в полупространстве } z \geq 0. \text{ Сечения его плоскостями } z = c \text{ — эллипсы, а } x = c, y = c \text{ — параболы.}$$

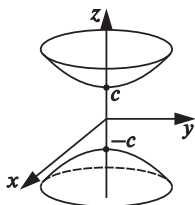


Рис. 1.35

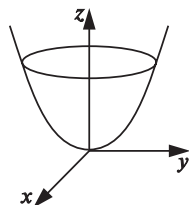


Рис. 1.36

$$2z = \frac{x^2}{p} - \frac{y^2}{q} \text{ — гиперболический параболоид (рис. 1.37), неограниченная поверхность с осью симметрии } Oz. \text{ Сечения его плоскостями } z = c \text{ — гиперболы, а } x = c, y = c \text{ — параболы.}$$

$z = c$  — гиперболы, а  $x = c, y = c$  — параболы.

### 4. Конус (рис. 1.38).

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 0 \text{ — неограниченная центрально-симметричная поверхность с центром в начале координат. Сечения его плоскостями } z = c \text{ — эллипсы, } x = c, y = c \text{ — гиперболы.}$$

$z = c$  — эллипсы,  $x = c, y = c$  — гиперболы.

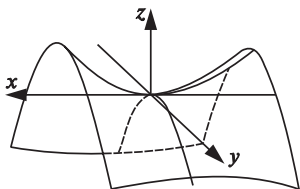


Рис. 1.37

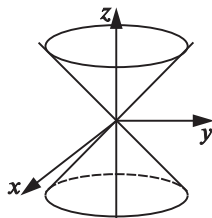


Рис. 1.38

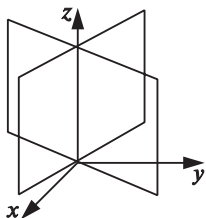


Рис. 1.39

5. Пара пересекающихся плоскостей (рис. 1.39).

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 0.$$

$$\frac{x}{a} - \frac{y}{b} = 0 \quad \text{или} \quad \frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 0.$$

6. Пара параллельных плоскостей (рис. 1.40).

$$x^2 = a^2.$$

$$x = a,$$

$$x = -a.$$

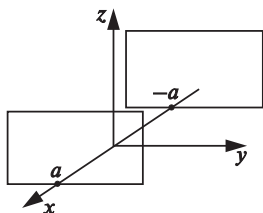


Рис. 1.40

7. Пара совпадающих плоскостей.

$$x^2 = 0 \text{ — плоскость } yOz.$$

8. Цилиндры. Поверхность называется цилиндрической, если она получена движением прямой (образующей) параллельно фиксированной прямой по плоской кривой (направляющей).

$F(x, y) = 0$  — уравнение цилиндрической поверхности с образующей, параллельной оси  $Oz$  и направляющей, лежащей в плоскости  $xOy$  и задаваемой уравнением  $F(x, y) = 0$ .

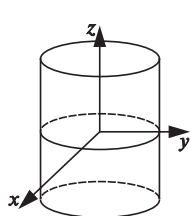


Рис. 1.41

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \text{ — эллиптический цилиндр (рис. 1.41).}$$

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 \text{ — гиперболический цилиндр (рис. 1.42).}$$

$$y^2 = 2px \text{ — параболический цилиндр (рис. 1.43).}$$

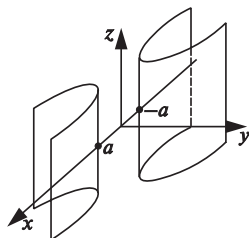


Рис. 1.42

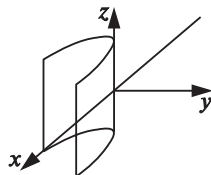


Рис. 1.43

9. Прямая.

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 0 \Leftrightarrow x = 0, y = 0 \text{ — ось } Oz.$$

10. Точка.

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 0 \Leftrightarrow x = 0, y = 0, z = 0 \text{ — начало координат.}$$

11. Пустое множество.

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = -1 \text{ или } \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = -1.$$

## 1.12. Классификация кривых и поверхностей второго порядка

Классификация кривых второго порядка. Классификация поверхностей второго порядка

### 1.12.1. Классификация кривых второго порядка

**Теорема 1.** *Всякая кривая второго порядка*

$$a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 + b_1x + b_2y + b_0 = 0 \quad (1)$$

*является или эллипсом, или гиперболой, или параболой, или парой пересекающихся прямых, или парой параллельных прямых, или парой совпадающих прямых, или точкой, или пустым множеством.*

Суть доказательства теоремы состоит в переходе к такой прямоугольной системе координат, в которой (1) имеет канонический вид.

Переход к этой системе координат в  $R^2$  осуществляется путем поворота исходной системы координат и ее параллельного переноса.

Сначала рассмотрим частный случай (1), когда  $a_{12} = 0$ . Для приведения (1) к каноническому виду достаточно выделить полные квадраты отдельно у членов, содержащих  $x$  и  $y$ .

Пример.  $x^2 - 4x + 4y^2 - 8y - 8 = 0 \Rightarrow (x^2 - 4x) + 4(y^2 - 2y) - 8 = 0 \Rightarrow$   
 $(x^2 - 2 \cdot 2x + 4 - 4) + 4(y^2 - 2 \cdot y \cdot 1 + 1 - 1) - 8 = 0 \Rightarrow (x - 2)^2 + 4(y - 1)^2 = 16 \Rightarrow$   

$$\frac{(x - 2)^2}{4^2} + \frac{(y - 1)^2}{2^2} = 1.$$

В последнем уравнении сделаем замену

$$\begin{cases} x' = x - 2, \\ y' = y - 1, \end{cases}$$

т. е. с помощью параллельного переноса перейдем к новой системе координат с центром в точке  $O'(2, 1)$ . В этой системе координат уравнение рассматриваемой кривой примет канонический вид

$$\frac{(x')^2}{4^2} + \frac{(y')^2}{2^2} = 1.$$

Это эллипс с полуосями  $a = 4$ ,  $b = 2$ .

При рассмотрении общего случая исследуем квадратичную форму

$$a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 \quad (2)$$

и постараемся избавиться от произведения  $xy$ .

По квадратичной форме (2) выпишем симметричную матрицу

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} \end{pmatrix},$$

которая в  $R^2$  определяет самосопряженный оператор. Оператор  $A$  и квадратичная форма связаны соотношением

$$a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 = \left( A \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \right).$$

Действительно,

$$\begin{aligned} \left( A \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \right) &= \left( \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \right) = \\ &= (a_{11}x + a_{12}y)x + (a_{12}x + a_{22}y)y = a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2. \end{aligned}$$

Пусть  $\bar{e}_1, \bar{e}_2$  — ортонормированный базис из собственных векторов оператора  $A$ ;  $\lambda_1, \lambda_2$  — собственные значения. Если

$$\bar{e}_1 = \alpha_{11}\bar{i} + \alpha_{21}\bar{j}, \quad \bar{e}_2 = \alpha_{12}\bar{i} + \alpha_{22}\bar{j},$$

то положим

$$B = \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} \end{pmatrix},$$

причем векторы  $\bar{e}_1$  и  $\bar{e}_2$  возьмем в таком порядке, что  $|B| > 0$ . Тогда переход от прямоугольной системы координат  $(0, \bar{i}, \bar{j})$  к прямоугольной системе координат  $(0, \bar{e}_1, \bar{e}_2)$  будет осуществляться путем поворота (рис. 1.44).

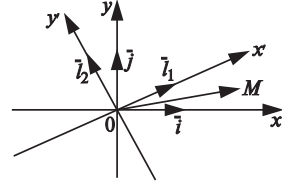


Рис. 1.44

Пусть  $(x, y)$  и  $(x', y')$  — координаты точки  $M$  в базисе  $\bar{i}, \bar{j}$  и  $\bar{e}_1, \bar{e}_2$  соответственно.

Покажем, что переход от старых координат к новым осуществляется по формуле

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = B \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}; \quad (3)$$

$$\begin{aligned} \overline{OM} &= x\bar{i} + y\bar{j} = x'\bar{e}_1 + y'\bar{e}_2 = x'(\alpha_{11}\bar{i} + \alpha_{21}\bar{j}) + y'(\alpha_{12}\bar{i} + \alpha_{22}\bar{j}) = \\ &= (x'\alpha_{11} + y'\alpha_{12})\bar{i} + (x'\alpha_{21} + y'\alpha_{22})\bar{j}, \end{aligned}$$

т. е.

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha_{11}x' + \alpha_{12}y' \\ \alpha_{21}x' + \alpha_{22}y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = B \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}.$$

Покажем, что в новых координатах квадратичная форма не будет содержать произведения  $x'y'$ :

$$\begin{aligned} a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 &= \left( A \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \right) = (A\overline{OM}, \overline{OM}) = \\ &= (A(x'\bar{e}_1 + y'\bar{e}_2), x'\bar{e}_1 + y'\bar{e}_2) = (x'A\bar{e}_1 + y'A\bar{e}_2, x'\bar{e}_1 + y'\bar{e}_2) = \\ &= (x'\lambda_1\bar{e}_1 + y'\lambda_2\bar{e}_2, x'\bar{e}_1 + y'\bar{e}_2) = (x')^2\lambda_1(\bar{e}_1, \bar{e}_1) + x'y'\lambda_1(\bar{e}_1, \bar{e}_2) + \\ &+ (x'y')\lambda_2(\bar{e}_1, \bar{e}_2) + (y')^2\lambda_2(\bar{e}_1, \bar{e}_2) = \lambda_1(x')^2 + \lambda_2(y')^2 = \left( \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} \right). \end{aligned}$$

Итак, после поворота (3) квадратичная форма (2) запишется в виде

$$\lambda_1(x')^2 + \lambda_2(y')^2,$$

где  $\lambda_1, \lambda_2$  — собственные значения оператора  $A$ , и мы свели задачу к уже рассмотренному частному случаю.

**Пример.** Привести к каноническому виду уравнение кривой

$$2xy - \sqrt{2}x - \sqrt{2}y = 0.$$

1. Запишем матрицу квадратичной формы и найдем ее собственные значения и собственные векторы:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{vmatrix} -\lambda & 1 \\ 1 & -\lambda \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow \lambda^2 - 1 = 0 \Rightarrow \lambda_1 = 1, \lambda_2 = -1;$$

$$\lambda_1 = 1 \Rightarrow \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow x - y = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = t \\ y = t \end{cases} \Rightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = t \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix};$$

$$\lambda_2 = -1 \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow x + y = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = -t \\ y = t \end{cases} \Rightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = t \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Итак, векторы  $\bar{a}_1 = (1, 1)$ ,  $\bar{a}_2 = (-1, 1)$  образуют базис из собственных векторов, отвечающих собственным значениям  $\lambda_1 = 1$ ,  $\lambda_2 = -1$ .

2. Получим из собственных векторов  $\bar{a}_1$ ,  $\bar{a}_2$  единичные векторы и запишем матрицу поворота  $B$  так, чтобы  $|B| > 0$ :

$$\bar{e}_1 = \frac{\bar{a}_1}{|\bar{a}_1|} = \frac{1}{\sqrt{2}}(1, 1), \quad \bar{e}_2 = \frac{\bar{a}_2}{|\bar{a}_2|} = \frac{1}{\sqrt{2}}(-1, 1),$$

$$B = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}, \quad |B| = 1 > 0.$$

3. С помощью матрицы поворота  $B$  осуществим в уравнении кривой переход от старых координат к новым, используя (3):

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{x' - y'}{\sqrt{2}} \\ \frac{x' + y'}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} \Rightarrow 2xy - \sqrt{2}x - \sqrt{2}y =$$

$$2\left(\frac{x' - y'}{\sqrt{2}}\right)\left(\frac{x' + y'}{\sqrt{2}}\right) - \sqrt{2}\left(\frac{x' - y'}{\sqrt{2}}\right) - \sqrt{2}\left(\frac{x' + y'}{\sqrt{2}}\right) = (x')^2 - (y')^2 - 2x' = 0.$$

4. Выделим полные квадраты у членов, содержащих  $x'$  и  $y'$ :

$$(x')^2 - 2x' + 1 - 1 - (y')^2 = 0 \Rightarrow$$

$$(x' - 1)^2 - (y')^2 = 1.$$

Сделаем замену  $x'' = x' - 1$ ,  $y'' = y' \Rightarrow$   
 $(x'')^2 - (y'')^2 = 1.$

Получаем каноническое уравнение гиперболы с асимптотами  $x'' = y''$ ,  $x'' = -y''$  (рис. 1.45).

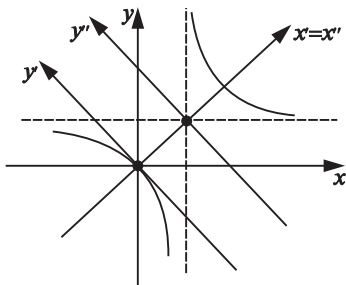


Рис. 1.45

### 1.12.2. Классификация поверхностей второго порядка

**Теорема 2.** *Всякая поверхность второго порядка в  $R^3$  является или эллипсоидом, или однополостным гиперболоидом, или двуполостным гиперболоидом, или эллиптическим параболоидом, или гиперболическим параболоидом, или конусом, или эллиптическим цилиндром, или гиперболическим цилиндром, или параболическим цилиндром, или парой пересекающихся плоскостей, или парой параллельных плоскостей, или парой совпадающих плоскостей, или прямой, или точкой, или пустым множеством.*

Приведение уравнения поверхности второго порядка

$$a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 + 2a_{31}xz + 2a_{23}yz + a_{33}z^2 + b_1x + b_2y + b_3z + b_0 = 0$$

к каноническому виду осуществляется так же, как в двумерном случае. Матрица квадратичной формы здесь имеет вид

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}.$$

## ГЛАВА 2

# ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ ФУНКЦИЙ ОДНОЙ ПЕРЕМЕННОЙ

---

### 2.1. Введение в математический анализ

Элементы теории множеств. Действительные числа. Понятие предела числовой последовательности. Арифметические действия с последовательностями, имеющими предел.

Математический анализ — часть математики, в которой функции и их обобщения изучаются на основе теории пределов. В него входят дифференциальное исчисление, интегральное исчисление, теория обыкновенных дифференциальных уравнений, теория дифференциальных уравнений с частными производными и т. д. Современная теория чисел и теория вероятностей применяют и развивают методы математического анализа.

Все же термин «математический анализ» часто употребляется для наименования только основ математического анализа, объединяющих в себе теорию действительного числа, теорию пределов, теорию рядов, дифференциальное и интегральное исчисление и их непосредственные приложения.

При изучении явлений природы и общества, технических процессов мы сталкиваемся с изменением величин, с функциональной зависимостью одной из величин от другой. Поэтому понятие о переменной величине является основным в математическом анализе, отсюда — его объективная важность как средства изучения функций.

Под переменной величиной мы будем понимать величину, которая принимает хотя бы два различных значения. Величина, которая не меняет своего значения, называется постоянной.

#### 2.1.1. Множества вещественных чисел

Основным в математике является также понятие множества, т. е. совокупности каких-либо объектов произвольной природы. Объекты, входящие в данное множество, будем называть элементами множества.



Обозначения: множества  $A, B, \dots, X, Y$ , элементы  $a, b, \dots, x, y$ ,  $x \in A$  ( $x$  принадлежит  $A$ ),  $A \subset B$  ( $A$  — подмножество  $B$ ),  $\emptyset$  — пустое множество.

Множество натуральных чисел  $N = \{1, 2, \dots, n, \dots\}$  появилось в связи со счетом предметов. Затем под влиянием потребностей практики, развития самой математики были введены целые числа  $Z = \{\dots, -1, 0, 1, \dots\}$  и рациональные числа  $Q = \left\{\frac{m}{n}\right\}$ , где  $m, n \in Z$ ,  $n \neq 0$ , причем

дробь  $\frac{m}{n}$  несократима. Введение рациональных чисел, однако, не решило важной практической задачи измерения отрезков. Например, диагональ квадрата со стороной 1 есть  $\sqrt{2}$ . В связи с этим появились иррациональные числа. Рациональные и иррациональные числа называются действительными или вещественными.

### Неравенства для абсолютных величин.

Неравенство  $|a| < \varepsilon$  эквивалентно неравенствам  $-\varepsilon < a < \varepsilon$ , если  $|a - b| < \varepsilon \Rightarrow b - \varepsilon < a < b + \varepsilon$ .

Справедливы следующие неравенства.

1.  $|a + b| \leq |a| + |b|$ .

2.  $|a - b| \geq |a| - |b|$ .

*Доказательство.* 1.  $a + b \geq 0 \Rightarrow |a + b| = a + b$ , но  $a \leq |a|$ ,  $b \leq |b| \Rightarrow |a + b| \leq |a| + |b|$ .

$a + b \leq 0 \Rightarrow |a + b| = -a - b$ , но  $-a \leq |-a| = |a|$ ,  $-b \leq |-b| = |b| \Rightarrow |a + b| \leq |a| + |b|$ .

2.  $|a - b| \geq |a| - |b|$ .

$$a = (a - b) + b \Rightarrow |a| \leq |a - b| + |b| \Rightarrow |a - b| \geq |a| - |b|.$$

### Отрезок, интервал, ограниченное множество.

Пусть числа  $a, b$  удовлетворяют неравенству  $a < b$ .

Множество  $x: a \leq x \leq b$  — отрезок  $[a, b]$ .

Множество  $x: a < x < b$  — интервал (открытый отрезок)  $(a, b)$ .

Множества  $x: a \leq x < b$ ,  $a < x \leq b$  — полуинтервалы.

Часто встречаются бесконечные интервалы:  $[a, \infty)$ ,  $(a, \infty)$ ,  $(-\infty, \infty)$ . Произвольный интервал  $(a, b)$ , содержащий точку  $c: a < c < b$ , называется окрестностью  $c$ . В частности, интервал  $c - \varepsilon, c + \varepsilon$  ( $\varepsilon > 0$ ) — окрестность  $c$ .

Пусть  $X = \{x\}$  — произвольное множество действительных чисел. Говорят, что  $X$  ограничено сверху, если существует  $(\exists)$  действительное

число  $M$  такое, что для любого  $(\forall)x \in X: x \leq M$ , и ограничено снизу, если  $\exists m: \forall x \in X \quad x \geq m$ . Множество  $X$  ограничено, если оно ограничено и снизу, и сверху, т. е.  $\exists M: \forall x \in X \quad |x| \leq M$ .

### 2.1.2. Понятие предела числовой последовательности

Пусть натуральному числу  $n = 1, 2, \dots$  по некоторому правилу или закону поставлено в соответствие действительное число  $x_n$ . Тогда говорят, что задана числовая последовательность  $x_1, x_2, \dots$

$$\{x_n\} = \{x_1, x_2, \dots\}.$$

Говорят также, что переменная  $x_n$  пробегает значения последовательно  $\{x_n\}$ .

**Примеры.**

$$1. \left\{1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \dots\right\} = \left\{\frac{1}{n}\right\}.$$

$$2. \{-1, 2, -3, 4, \dots\} = \{(-1)^n n\}.$$

**ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1.** Число  $a$  называется пределом последовательности  $\{x_n\}$ , если  $\forall \varepsilon > 0 \exists$  зависящее от  $\varepsilon$  положительное число  $N_0 = N_0(\varepsilon)$  такое, что  $|x_n - a| < \varepsilon$  для всех  $n > N_0$ . Символически сходимость последовательности  $\{x_n\}$  к числу  $a$  записывается равенством

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a \quad \text{или} \quad x_n \rightarrow a, \quad n \rightarrow \infty.$$

Если  $x_n = a \quad \forall n \in N$ , то, очевидно,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a.$$

**Примеры.**

$$1. \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} = 0. \quad \text{В самом деле, зададим } \varepsilon > 0. \quad \text{Тогда} \quad \left| \frac{1}{n} - 0 \right| = \frac{1}{n} < \varepsilon \quad \text{или} \quad \frac{1}{\varepsilon} < n \Rightarrow n_0 = \frac{1}{\varepsilon}.$$

$$\text{Поэтому} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} = 0.$$

Неравенство  $|x_n - a| < \varepsilon$  эквивалентно следующим неравенствам:  $-\varepsilon < x_n - a < \varepsilon$  или  $a - \varepsilon < x_n < a + \varepsilon$ , т. е.  $x_n \in \varepsilon$  — окрестности:  $x_n \in (a - \varepsilon, a + \varepsilon)$ .

Таким образом, определение предела можно дать так:  $a$  — предел числовой последовательности  $\{x_n\}$ , если  $\forall \varepsilon > 0 \exists n_0$ : все точки  $x_n$  с  $n > n_0$  попадут в  $\varepsilon$ -окрестность точки  $a$ :  $x_n \in (a - \varepsilon, a + \varepsilon)$ .

**Теорема 1.** Если переменная  $x_n$  имеет предел, то он единственный.

*Доказательство.* Пусть

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a \Rightarrow \forall \varepsilon > 0 \exists n_1: n > n_1 \quad |x_n - a| < \frac{\varepsilon}{2},$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = b \Rightarrow \forall \varepsilon > 0 \exists n_2: n > n_2 \quad |x_n - b| < \frac{\varepsilon}{2}$$

$$|a - b| = |a - x_n - (b - x_n)| \leq |a - x_n| + |b - x_n| < \varepsilon, \quad n > n_0 = \max(n_1, n_2) \Rightarrow a = b.$$

**Теорема 2.** Если последовательность  $\{x_n\}$  имеет предел, то она ограничена.

*Доказательство.* Пусть  $\lim x_n = a$  и пусть

$$\exists n_0 = n_0(1): |x_n - a| < 1 \quad (n > n_0).$$

Но  $|x_n| - |a| < |x_n - a| \Rightarrow |x_n| < 1 + |a| \quad \forall n > n_0$ .

Пусть  $M = \max\{1 + |a|, |x_1|, |x_2|, \dots, |x_{n_0}|\} \Rightarrow M \geq |x_n| \quad \forall n$ .

### 2.1.3. Арифметические действия с последовательностями, имеющими предел

Пусть заданы две последовательности:  $\{x_n\}, \{y_n\}$ . Рассмотрим последовательности  $\{x_n + y_n\}, \{x_n - y_n\}, \{x_n y_n\}, \left\{\frac{x_n}{y_n}\right\}$ .

Справедливы следующие утверждения.

1.  $\lim_{n \rightarrow \infty} (x_n \pm y_n) = \lim x_n \pm \lim y_n$ .
2.  $\lim_{n \rightarrow \infty} (x_n y_n) = \lim x_n \cdot \lim y_n$ .
3.  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_n}{y_n} = \frac{\lim x_n}{\lim y_n}$ , если  $\lim y_n \neq 0$ .

*Доказательство.*

$$1. \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a \Rightarrow \forall \varepsilon > 0 \exists n_1: |x_n - a| < \frac{\varepsilon}{2}, \\ \lim_{n \rightarrow \infty} y_n = b \Rightarrow \forall \varepsilon > 0 \exists n_2: |y_n - b| < \frac{\varepsilon}{2} \Rightarrow (n_0 = \max(n_1, n_2));$$

$$|x_n - y_n - (a \pm b)| \leq |x_n - a| + |y_n - b| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

**Пример.**  $x_n = (-1)^n$  — нет предела,

$y_n = (-1)^{n+1}$  — нет предела, но  $\lim (x_n + y_n) = 0$ ;  $\lim x_n y_n = -1$ .

## 2.2. Числовые последовательности

О неопределенностях. Монотонные последовательности. Число  $e$ . Верхняя и нижняя границы множеств. Теорема Больцано – Вейерштрасса.

### 2.2.1. О неопределенностях

При изучении теорем о пределах последовательностей мы не рассматривали последовательности, имеющие бесконечно большие пределы, а также случай, когда при отыскании предела частного предел стоящей в знаменателе последовательности равен нулю.

**Примеры.**

$$1. x_n = n^2 + n \rightarrow +\infty, \quad x_n + y_n = n \rightarrow \infty, \\ y_n = -n^2 \rightarrow -\infty,$$

$$2. x_n = n^2 + n \rightarrow +\infty, \quad x_n + y_n = 3, \\ y_n = -n^2 + 3 \rightarrow -\infty,$$

$$3. x_n = n^2 \rightarrow \infty, \quad x_n + y_n = \frac{1}{n} \rightarrow 0, \\ y_n = -n^2 + \frac{1}{n} \rightarrow -\infty,$$

$$4. x_n = n^2 \rightarrow +\infty, \quad x_n + y_n = (-1)^n \rightarrow \infty \text{ — не имеет предела.} \\ y_n = -n^2 + (-1)^n \rightarrow -\infty,$$

Рассмотренные примеры показывают, что сумма двух бесконечно больших последовательностей разных знаков может стремиться к любому числу, к бесконечности, а также вообще не иметь предела.

В этом случае говорят, что имеет место неопределенность вида  $(\infty, -\infty)$ . Аналогично могут встречаться другие неопределенности:

если  $x_n \rightarrow \infty$ ,  $y_n \rightarrow \infty$ , то  $\frac{x_n}{y_n} \rightarrow \left(\frac{\infty}{\infty}\right)$ ;

если  $x_n \rightarrow 0$ ,  $y_n \rightarrow 0$ , то  $\frac{x_n}{y_n} \rightarrow \left(\frac{0}{0}\right)$ ;

если  $x_n \rightarrow 0$ ,  $y_n \rightarrow \infty$ , то  $x_n \cdot y_n(0, \infty)$ .

Пример.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_m n^m + \dots + a_1 n + a_0}{b_k n^k + \dots + b_1 n + b_0} = \left(\frac{\infty}{\infty}\right).$$

а)  $m = k$ :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_m n^m + \dots + a_1 n + a_0}{b_k n^k + \dots + b_1 n + b_0} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_m + \dots + a_1 \frac{1}{n^{m-1}} + a_0 \frac{1}{n^m}}{b_k + \dots + b_1 \frac{1}{n^{k-1}} + b_0 \frac{1}{n^k}} = \frac{a_m}{b_k}.$$

б)  $m > k$ :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_m n^m + \dots + a_1 n + a_0}{b_k n^k + \dots + b_1 n + b_0} = \infty.$$

в)  $m < k$ :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_m n^m + \dots + a_1 n + a_0}{b_k n^k + \dots + b_1 n + b_0} = 0.$$

### 2.2.2. Монотонные последовательности. Определение

Последовательность  $\{x_n\}$  называется неубывающей (невозрастающей), если  $\forall n \in N$

$$x_n \leq x_{n+1} \quad (x_n \geq x_{n+1}).$$

Неубывающие (невозрастающие) последовательности называются монотонными.

**Теорема.** *Монотонная ограниченная последовательность всегда имеет предел.* Данное утверждение — наглядно очевидное, и мы, принимая его без доказательства, рассмотрим пример его использования при построении алгоритма вычисления предела бесконечной числовой последовательности, которая сходится к иррациональному числу  $e$ .

2.2.3. Число  $e$ 

Рассмотрим последовательность

$$\{x_n\} = \left\{ \left( 1 + \frac{1}{n} \right)^n \right\}.$$

Покажем, что эта последовательность — возрастающая и ограниченная сверху. По формуле бинома Ньютона

$$\begin{aligned} x_n &= \left( 1 + \frac{1}{n} \right)^n = 1 + n \cdot \frac{1}{n} + \dots + \frac{n(n-1) \dots (n-k+1)}{k!} \cdot \frac{1}{n^k} + \dots + \frac{n(n-1) \dots 1}{n!} \cdot \frac{1}{n^n} = \\ &= 2 + \frac{1}{2!} n(n-1) \cdot \frac{1}{n^2} + \dots + \frac{1}{k!} \frac{n(n-1) \dots (n-k+1)}{n^k} + \dots + \frac{1}{n!} \frac{n(n-1) \dots (n-n+1)}{n^n} = \\ &= 2 + \frac{1}{2!} \left( 1 - \frac{1}{n} \right) + \dots + \frac{1}{k!} \left( 1 - \frac{1}{n} \right) \dots \left( 1 - \frac{k-1}{n} \right) + \dots + \frac{1}{n!} \left( 1 - \frac{1}{n} \right) \dots \left( 1 - \frac{n-1}{n} \right). \end{aligned}$$

Как видим,  $x_n \geq 2 \quad \forall n$ .

Докажем, что последовательность ограничена сверху.

$$\begin{aligned} x_n &\leq 2 + \frac{1}{2!} + \dots + \frac{+1}{n!} \leq 2 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{+1}{2^{k-1}} + \dots + \frac{+1}{2^{n-1}} \leq 1 + \left( 1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{+1}{2^n} + \dots \right) = \\ &= 1 + \frac{1}{1 - \frac{1}{2}} = 3. \end{aligned}$$

Покажем, что последовательность возрастающая:

$$x_{n+1} = 2 + \frac{1}{2!} \left( 1 - \frac{1}{n+1} \right) + \dots + \frac{1}{(n+1)!} \left( 1 - \frac{1}{n+1} \right) \dots \left( 1 - \frac{n}{n+1} \right) > x_n,$$

так как каждое слагаемое больше, кроме того, у  $x_{n+1}$  на одно слагаемое больше. По предыдущей теореме существует  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n$ :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left( 1 + \frac{1}{n} \right)^n = e,$$

$$2 < e < 3, \quad e = 2,718281828\dots$$

Число  $e$  было впервые предложено Эйлером.

## 2.2.4. Верхние и нижние грани множеств

Если произвольное множество действительных чисел  $E$  конечно, то среди его элементов есть наибольший ( $\max_{x \in E} E$ ) и наименьший ( $\min_{x \in E} E$ ). Однако это не всегда так, если  $E$  — бесконечное множество.

Например,

$$E = (a, b),$$

$$N = \{1, 2, 3, \dots\}.$$

Возникает вопрос о введении в  $E$  чисел, которые заменяли бы по возможности  $\max E$  и  $\min E$ . Такими числами (конечными или бесконечными) являются точная верхняя грань

$$\sup E = \sup_{x \in E} x = M$$

и точная нижняя грань

$$\inf E = \inf_{x \in E} x = m.$$

ОПРЕДЕЛЕНИЕ.  $M = \sup E$  ( $m = \inf E$ ), если:

1)  $x \leq M$  ( $m \leq x$ )  $\forall x \in E$ ;

2) для любого конечного  $M_1 < M$  ( $m_1 > m$ )  $\exists x_1 \in E$ :  $M_1 < x_1 \leq M$  ( $m_1 > x_1 \geq m$ ).

Пример.  $E = \left\{ \frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \dots \right\} = \left\{ \frac{n}{n+1} \right\}$ ;  $\min E = \frac{1}{2}$ , но нет  $\max$ , так как  $\frac{1}{2} < \frac{2}{3} < \frac{3}{4} < \dots$ .

Но все же это множество ограничено сверху числом 1,  $\sup E = 1$ , в самом деле:

$$1) \frac{n}{n+1} < 1 \quad \forall n;$$

$$2) \forall M_1 < 1 \quad \exists n_1: M_1 < \frac{n_1}{n_1+1} < 1.$$

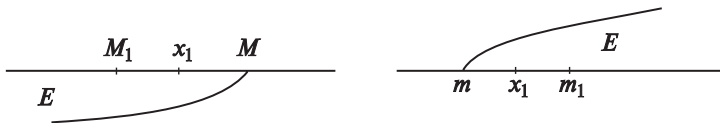


Рис. 2.1

Всякое множество  $F$  имеет точные верхнюю и нижнюю границы. Если  $E$  ограничено сверху, то  $\sup E < \infty$ ; если не ограничено, то  $\sup E = \infty$ . Аналогично, если  $E$  ограничено снизу, то  $\inf E > -\infty$ ; если не ограничено снизу, то  $\inf E = -\infty$ .

### 2.2.5. Теорема Больцано – Вейерштрасса

Пусть задана произвольная числовая последовательность  $\{x_n\}$ . Выберем из нее бесконечное множество элементов с номерами  $n_1 < n_2 < \dots$ . Тогда получим новую последовательность  $\{x_{n_k}\}$ , которая называется подпоследовательностью  $\{x_n\}$ . Если  $\{x_n\}$  сходится к конечному числу или к  $\pm\infty$ , то, очевидно, любая подпоследовательность также сходится к тому же числу.

Последовательность  $\{x_n\} = \{1, -1, +1, \dots\}$  не сходится. Однако ее подпоследовательность  $\{1, 1, 1, \dots\}$  сходится к 1.

**Теорема.** Из всякой ограниченной последовательности  $\{x_n\}$  можно выделить подпоследовательность  $\{x_{n_k}\}$ , сходящуюся к некоторому числу.

### 2.3. Функции. Предел функции

Функция: определение, способы задания. Предел функции. Основные теоремы о пределах.

1. Пусть  $E$  — множество чисел и пусть каждому  $x \in E$  по некоторому закону поставлено в соответствие одно число  $y$ , тогда говорят, что на множестве  $E$  задана однозначная функция

$$y = f(x).$$

Множество  $E$  называется областью задания или определения  $f(x)$ .  $x$  — независимая переменная,  $y$  — зависимая.

Множество  $E_1$  всех значений  $y = f(x)$ , где  $x \in E$ , называется образом множества  $E$ , или областью значений.

Если

$$E \xrightarrow{f} E_1 \xrightarrow{F} E_2,$$

то  $z = F(f(x))$  называют сложной функцией (суперпозицией  $f$  и  $F$ ),  $z$  определена на множестве  $E$ .

Функция может быть задана графически, аналитически или таблицей. Функция  $y = f(x)$  называется четной, если  $f(-x) = f(x)$ . Ее график симметричен относительно оси  $OY$ . Функция  $y = f(x)$  нечетна, если  $f(-x) = -f(x)$ . Ее график симметричен относительно биссектрисы 1-го и 3-го координатных углов.

Функция  $f(x)$  называется периодической (с периодом  $T > 0$ ), если  $f(x + T) = f(x) \quad \forall x$ .



2. Важнейшим средством изучения функции является понятие предела, являющееся основным понятием математического анализа.

**ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1.** Число  $A$  называется пределом функции  $f(x)$  в точке  $a$ , если она определена в некоторой окрестности  $a$ , за исключением, может быть, самой точки  $a$ , и если для всякого, сколь угодно малого положительного числа  $\varepsilon > 0$  можно окружить точку  $a$  интервалом  $|x - a| < \delta$ , во всех точках которого выполняется неравенство  $|f(x) - A| < \varepsilon$ .

Символически это записывается так:

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = A \quad (f(x) \rightarrow A).$$

Смысл этого определения в следующем: если  $x$  приближается к  $a$  по любому закону, оставаясь не равным  $a$ , то соответствующее значение  $f(x)$  становится сколь угодно близким к  $A$ .

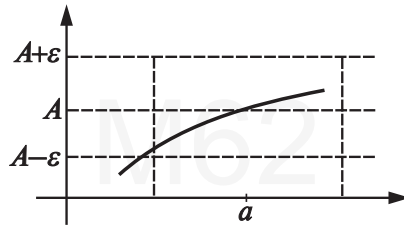


Рис. 2.2

Пример 1.  $y = f(x) = \frac{x^2 - 4}{x - 2}, \quad x \neq 2.$

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 4}{x - 2} = \lim_{x \rightarrow 2} (x + 2) = 4,$$

так как для нас неважно, определена ли функция при  $x = 2$ .

Пример 2. Предел функции  $y = \sin \frac{1}{x}$  при  $x \rightarrow 0$  не существует, так как  $f(x)$  бесконечное число раз меняет знак при  $x \rightarrow 0$  и бесконечное число раз принимает значения  $\pm 1$  (рис. 2.3).

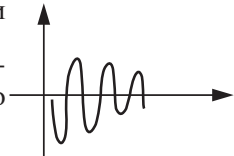


Рис. 2.3

**ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2.** Число  $A$  называется пределом функции  $f(x)$  при  $x \rightarrow \infty$ , т. е.  $A = \lim_{x \rightarrow \infty} f(x)$ , если  $\forall \varepsilon > 0 \exists M > 0$ :  $|f(x) - A| < \varepsilon \quad \forall x: |x| > M$ .

3. Изучим теперь свойства функций, имеющих предел.

**Теорема 1.** Если  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = A$ , где  $A$  — конечное число, то в некоторой окрестности точки  $a$  функция  $f(x)$  ограничена, т. е. существует число  $M > 0$  такое, что  $|f(x)| \leq M \quad \forall x \in U(a), x \neq a$ .

*Доказательство.* Пусть  $\varepsilon = 1 \Rightarrow \exists \delta, \forall x: |x - a| < \delta, |f(x) - A| \leq |f(x) - A| < 1$ . Следовательно,  $|f(x)| \leq 1 + |A| = M$ .

**Теорема 2.** Пусть заданы функции  $u(x), z(x), v(x)$ , причем  $u \leq z \leq v$ ;  $\lim_{x \rightarrow a} u = \lim_{x \rightarrow a} v = A$ . Тогда  $\lim_{x \rightarrow a} z = A$ .

*Доказательство.*

$$u \leq z \leq v \Rightarrow u - A \leq z - A \leq v - A.$$

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta_1: |u - A| < \varepsilon, |x - a| < \delta_1 \Rightarrow -\varepsilon < u - A < \varepsilon;$$

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta_2: |v - A| < \varepsilon, |x - a| < \delta_2 \Rightarrow -\varepsilon < v - A < \varepsilon.$$

$$\delta = \min(\delta_1, \delta_2) \Rightarrow |x - a| < \delta: -\varepsilon < z - A < \varepsilon \Rightarrow \lim_{x \rightarrow a} z = A.$$

**Теорема 3.** Пусть при  $x \rightarrow a \quad y \geq 0$  и  $\lim_{x \rightarrow a} y = A$ . Тогда  $A \geq 0$ .

*Доказательство.* Пусть  $A < 0$ . При любом  $\varepsilon > 0 \quad A - \varepsilon < y < A + \varepsilon$  при  $-\delta < x - a < \delta$ . При достаточно малом  $\varepsilon \quad A + \varepsilon < 0$ , следовательно,  $y < 0$ . Получили противоречие.

**Теорема 4.** Пусть  $\lim_{x \rightarrow a} u(x) = A, \lim_{x \rightarrow a} v(x) = B$  и  $u \leq v$ . Тогда  $A \leq B$ .

*Доказательство.* Предположим противное:  $A > B$ . Далее,

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta_1: A - \varepsilon < u(x) < A + \varepsilon,$$

$$\exists \delta_2: B - \varepsilon < v(x) < B + \varepsilon.$$

Пусть  $\delta = \min(\delta_1, \delta_2)$ . Для достаточно малого  $\varepsilon \quad A - \varepsilon > B + \varepsilon$

$$\left(0 < \varepsilon < \frac{A - B}{2}\right) \Rightarrow v(x) < B + \varepsilon < A - \varepsilon < u(x) \Rightarrow v(x) < u(x).$$

Получили противоречие.

## 2.4. Непрерывность функции

Определения непрерывности функции. Первый замечательный предел.  
Второй замечательный предел.

### 2.4.1. Определения непрерывности функции

Рассмотрим функцию  $y = f(x)$ , рис 2.4. Пусть  $\Delta x$  — приращение независимой переменной. Тогда

$$\Delta f = \Delta y = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)$$

— приращение функции в точке  $x_0$ , соответствующее приращению аргумента  $\Delta x$ .

Пусть  $\Delta x \rightarrow 0$ , тогда для рассматриваемой функции  $\Delta y \rightarrow 0$ .

Рассмотрим функцию  $y = F(x)$ , рис. 2.5. Здесь  $F(x_0) = AB$ . Пусть  $\Delta x \rightarrow 0$ , но

$$\Delta F = F(x_0 + \Delta x) - F(x_0) \not\rightarrow 0.$$

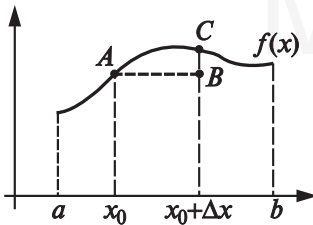


Рис. 2.4

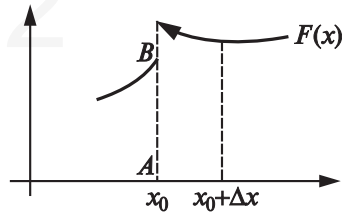


Рис. 2.5

**ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1.** Функция  $y = f(x)$ , заданная на  $[a, b]$ , называется непрерывной в точке  $x_0 \in [a, b]$ , если приращение ее в этой точке, соответствующее  $\Delta x$ , стремится к нулю при любом способе стремления к нулю  $\Delta x$ , т. е.

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \Delta y = 0. \quad (1)$$

Если для функции  $f(x)$  не выполнено условие (1), то она называется разрывной в точке  $x$ .

Функция, непрерывная в любой точке отрезка (интервала), называется непрерывной на этом отрезке (интервале).

Положим  $x = x_0 + \Delta x$ . Тогда получим следующее эквивалентное определение непрерывности функции  $f(x)$  в точке  $x_0$ .

**ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2.** Функция  $y = f(x)$  непрерывна в точке  $x_0$ , если она определена в некоторой окрестности этой точки и в точке  $x_0$  и

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0), \quad (2)$$

т. е.  $\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0: |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon \quad \forall x: |x - x_0| < \delta$ .

Равенство (2) можно записать также в виде

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(\lim_{x \rightarrow x_0} x).$$

Оно показывает, что под знаком непрерывной функции можно переходить к пределу.

**Примеры.** 1. Постоянная  $y = C$ , очевидно, есть функция, непрерывная в каждой точке  $x$ . В самом деле,  $\Delta y = 0$  для  $\forall \Delta x$ , т. е.

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \Delta y = 0.$$

2.  $y = x$  — непрерывна  $\forall x$ , так как  $\Delta y = \Delta x$  и  $\Delta y \rightarrow 0$  при  $\Delta x \rightarrow 0$ .

3.  $y = \sin x$ . Докажем ее непрерывность, пользуясь определением 2.

$$\sin x - \sin x_0 = 2 \sin \frac{x - x_0}{2} \cdot \cos \frac{x + x_0}{2} \Rightarrow$$

$$|\sin x - \sin x_0| = 2 \left| \sin \frac{x - x_0}{2} \right| \cdot \left| \cos \frac{x + x_0}{2} \right| \leq 2 \left| \sin \frac{x - x_0}{2} \right|;$$

$$|\sin \alpha| \leq |\alpha| \quad \forall \alpha \Rightarrow |\sin x - \sin x_0| < |x - x_0| < \varepsilon,$$

если  $|x - x_0| < \varepsilon$ .

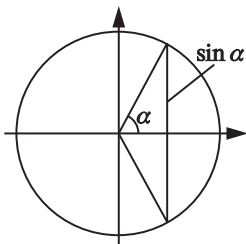


Рис. 2.6

Аналогично рассматривая каждую основную элементарную функцию, можно доказать, что она непрерывна в каждой точке, в которой она определена. Т. е. простейшие элементарные функции  $y = C$ ,  $y = x^n$ ,  $y = \log_a x$ ,  $y = a^x$ ,  $\sin x$ ,  $\cos x$ ,  $\operatorname{tg} x$ ,  $\arcsin x$ ,  $\arccos x$ ,  $\operatorname{arctg} x$  непрерывны.

## 2.4.2. Первый замечательный предел

**Теорема.**

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1.$$

*Доказательство.* Функция  $y = \sin x$  непрерывна  $\Rightarrow \sin x \rightarrow \sin 0 = 0$ , при  $x \rightarrow 0$ , следовательно,  $\frac{\sin x}{x} \rightarrow \left(\frac{0}{0}\right)$ , при  $x \rightarrow 0$ . Раскроем эту неопределенность. Из рис. 2.7 следует, что при  $0 < x < \frac{\pi}{2}$   $0 < \sin x < x < \operatorname{tg} x$ , так как

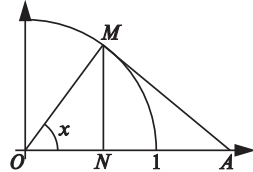


Рис. 2.7

$MN = \sin x$ ,  $AM = \operatorname{tg} x$ ,  $OM = 1$  ( $AM \perp OM$ ), а угол  $x$  равен длине дуги окружности единичного радиуса  $OM$ .

Тогда при условии  $\sin x > 0$ :

$$1 < \frac{x}{\sin x} < \frac{\operatorname{tg} x}{\sin x}, \text{ или } 1 < \frac{x}{\sin x} < \frac{1}{\cos x} \Rightarrow 1 > \frac{\sin x}{x} > \cos x. \quad (3)$$

Неравенства (3) верны и для  $-\frac{\pi}{2} < x < 0$ , так как  $\cos x$  и  $\frac{\sin x}{x}$  четные функции. Далее,  $\cos x$  — непрерывная функция, следовательно,

$$\lim_{x \rightarrow 0} \cos x = \cos 0 = 1.$$

Тогда по теореме о переходе к пределу в неравенствах

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1.$$

Теорема доказана.

## 2.4.3. Второй замечательный предел

**Теорема.**

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e.$$

*Доказательство.* Было установлено, что

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e,$$

где  $n$  — целые числа. Пусть  $x \rightarrow \infty$ , принимая как целые, так и дробные значения.

$$n \leq x < n+1 \Rightarrow$$

$$\frac{1}{n} \geq \frac{1}{x} > \frac{1}{n+1} \quad \text{и} \quad 1 + \frac{1}{n} \geq 1 + \frac{1}{x} > 1 + \frac{1}{n+1},$$

$$\left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1} > \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x > \left(1 + \frac{1}{n+1}\right)^n.$$

Пусть  $x \rightarrow \infty$ , тогда  $n \rightarrow \infty$ , при этом

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \left(1 + \frac{1}{n}\right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right) = e \cdot 1 = e;$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n+1}\right)^n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\left(1 + \frac{1}{n+1}\right)^{n+1}}{1 + \frac{1}{n+1}} = \frac{\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n+1}\right)^{n+1}}{\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n+1}\right)} = \frac{e}{1} = e.$$

Следовательно,  $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e$ .

Замечание. Если положить  $\frac{1}{x} = \alpha$ , то при  $x \rightarrow \infty$  и  $\alpha \rightarrow 0$

$$\lim_{\alpha \rightarrow 0} (1 + \alpha)^{\frac{1}{\alpha}} = e.$$

## 2.5. Бесконечно малые и бесконечно большие функции

Бесконечно малые функции и их свойства. Теоремы о пределах функций. Бесконечно большие функции, их связь с бесконечно малыми.

### 2.5.1. Бесконечно малые функции и их свойства

**ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1.** Функция  $\alpha = \alpha(x)$  называется бесконечно малой при  $x \rightarrow a$  или  $x \rightarrow \infty$ , если

$$\lim_{x \rightarrow a} \alpha(x) = 0 \quad \text{или} \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \alpha(x) = 0,$$

т. е.  $\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0: |\alpha(x)| < \varepsilon \quad |x - a| < \delta$ .

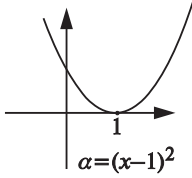


Рис. 2.8

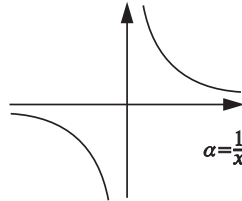


Рис. 2.9

**Теорема 1.** Алгебраическая сумма двух, трех и вообще конечного числа бесконечно малых есть функция бесконечно малая.

*Доказательство.* Докажем теорему для случая двух слагаемых. Пусть  $u(x) = \alpha(x) + \beta(x)$ , где  $\lim_{x \rightarrow a} \alpha(x) = 0$ ,  $\lim_{x \rightarrow a} \beta(x) = 0$ .

Тогда

$$\begin{aligned} \forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta_1: \quad \forall x: |x - a| < \delta_1 \quad |\alpha(x)| < \frac{\varepsilon}{2}, \\ \exists \delta_2: \quad \forall x: |x - a| < \delta_2 \quad |\beta(x)| < \frac{\varepsilon}{2}. \end{aligned}$$

Пусть  $\delta = \min(\delta_1, \delta_2)$ . Имеем:

$$|u| = |\alpha(x) + \beta(x)| \leq |\alpha(x)| + |\beta(x)| < \varepsilon \quad \forall x: |x - a| < \delta.$$

**Теорема 2.** Произведение бесконечно малой функции  $\alpha = \alpha(x)$  на ограниченную функцию  $z(x)$  при  $x \rightarrow a$  есть бесконечно малая функция.

*Доказательство.* Для  $M > 0 \exists$  окрестность точки  $a$  такая, что

$$|z| < M \quad \forall x: |x - a| < \delta_1.$$

Далее,

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta_2: |x - a| < \delta_2 \quad |\alpha(x)| < \frac{\varepsilon}{M}.$$

Пусть  $\delta = \min(\delta_1, \delta_2)$ , тогда  $|\alpha(x) \cdot z(x)| < \frac{\varepsilon}{M} \cdot M = \varepsilon \quad \forall x: |x - a| < \delta$ .

**Следствие 1.** Если  $\lim \alpha(x) = 0$ ,  $\lim \beta(x) = 0$ , то  $\lim \alpha(x) \cdot \beta(x) = 0$ , так как  $\beta(x)$  — величина ограниченная. Это справедливо для любого конечного числа сомножителей.

**Теорема 3.** Частное  $\frac{\alpha(x)}{z(x)}$  от деления бесконечно малой функции  $\alpha(x)$  на  $z(x)$ , предел которой отличен от нуля, есть величина бесконечно малая.

*Доказательство.* Пусть  $\lim_{x \rightarrow a} \alpha(x) = 0$ . Покажем, что функция  $\frac{1}{z(x)}$  ограничена. Пусть  $\lim_{x \rightarrow a} z(x) = b$ . Возьмем  $0 < \varepsilon < |b|$ , тогда  $\exists \delta: |z(x) - b| = |b - z(x)| < \varepsilon$ , т. е.

$$|b| - |z(x)| < \varepsilon \Rightarrow |z(x)| > |b| - \varepsilon > 0 \Rightarrow \left| \frac{1}{z(x)} \right| = \frac{1}{|z(x)|} < \frac{1}{|b| - \varepsilon} = M.$$

Тогда  $\alpha(x) \cdot \frac{1}{z(x)}$  — бесконечно малая функция.

**Теорема 4.** Если  $f(x) = A + \alpha(x)$ , то  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = A$ . Обратно, если  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = A$ , то  $f(x) = A + \alpha(x)$ , где  $\alpha(x)$  — бесконечно малая функция.

*Доказательство.* Пусть  $f(x) = A + \alpha(x) \Rightarrow |f(x) - A| = |\alpha(x)|$ , но

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta: |x - a| < \delta \quad |\alpha(x)| < \varepsilon \Rightarrow |f(x) - A| < \varepsilon \Rightarrow \lim_{x \rightarrow a} f(x) = A.$$

Обратно, пусть  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = A \Rightarrow |f(x) - A| < \varepsilon \Rightarrow f(x) - A = \alpha(x)$  — бесконечно малая и  $f(x) = A + \alpha(x)$ .

### 2.5.2. Теоремы о пределах функций

**Теорема 1.** Предел алгебраической суммы конечного числа слагаемых равен сумме их пределов:

$$\lim_{x \rightarrow a} (f_1(x) + f_2(x) + \dots + f_n(x)) = \lim_{x \rightarrow a} f_1(x) + \lim_{x \rightarrow a} f_2(x) + \dots + \lim_{x \rightarrow a} f_n(x).$$

*Доказательство.* Докажем теорему для случая двух слагаемых. Пусть  $\lim_{x \rightarrow a} f_1(x) = A_1$ ,  $\lim_{x \rightarrow a} f_2(x) = A_2$ . Тогда

$$f_1(x) = A_1 + \alpha_1(x), \quad f_2(x) = A_2 + \alpha_2(x) \Rightarrow$$

$$f_1(x) + f_2(x) = (A_1 + A_2) + (\alpha_1(x) + \alpha_2(x)).$$

Функция  $\alpha_1(x) + \alpha_2(x)$  — бесконечно малая, следовательно,

$$\lim_{x \rightarrow a} (f_1(x) + f_2(x)) = A_1 + A_2 = \lim_{x \rightarrow a} f_1(x) + \lim_{x \rightarrow a} f_2(x).$$



Пример 1.

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 + 2x}{x^2} = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{2}{x}\right) = \lim_{x \rightarrow \infty} 1 + \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2}{x} = 1 + 0 = 1.$$

**Теорема 2.** Предел произведения конечного числа функций равен произведению их пределов:

$$\lim_{x \rightarrow a} f_1(x) \cdot f_2(x) \cdot \dots \cdot f_n(x) = \lim_{x \rightarrow a} f_1(x) \cdot \lim_{x \rightarrow a} f_2(x) \cdot \dots \cdot \lim_{x \rightarrow a} f_n(x).$$

*Доказательство.* Докажем теорему для случая двух сомножителей.

Пусть  $\lim_{x \rightarrow a} f_1(x) = A_1$ ,  $\lim_{x \rightarrow a} f_2(x) = A_2$ , тогда  $f_1(x) = A_1 + \alpha_1(x)$ ,  $f_2(x) = A_2 + \alpha_2(x)$  и  $f_1(x) \cdot f_2(x) = A_1 A_2 + A_1 \alpha_2(x) + A_2 \alpha_1(x) + \alpha_1(x) \alpha_2(x)$ .

Так как  $A_1 \alpha_2(x) + A_2 \alpha_1(x) + \alpha_1(x) \cdot \alpha_2(x)$  — бесконечно малая функция, то

$$\lim_{x \rightarrow a} f_1(x) \cdot f_2(x) = A_1 A_2 = \lim_{x \rightarrow a} f_1(x) \cdot \lim_{x \rightarrow a} f_2(x).$$

**Следствие.** Постоянный множитель можно выносить за знак предела.

Пример.

$$\lim_{x \rightarrow 2} 5x^3 = 5 \lim_{x \rightarrow 2} x^3 = 5 \cdot 8 = 40.$$

**Теорема 3.** Предел частного двух функций равен частному их пределов, если предел знаменателя отличен от нуля:

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f_1(x)}{f_2(x)} = \frac{\lim_{x \rightarrow a} f_1(x)}{\lim_{x \rightarrow a} f_2(x)}, \text{ если } \lim_{x \rightarrow a} f_2(x) \neq 0.$$

*Доказательство.* Пусть  $\lim_{x \rightarrow a} f_1(x) = A_1$ ,  $\lim_{x \rightarrow a} f_2(x) = A_2$ .

Тогда  $f_1(x) = A_1 + \alpha_1(x)$ ,  $f_2(x) = A_2 + \alpha_2(x)$  и

$$\begin{aligned} \frac{f_1(x)}{f_2(x)} &= \frac{A_1 + \alpha_1(x)}{A_2 + \alpha_2(x)} = \frac{A_1}{A_2} + \left( \frac{A_1 + \alpha_1(x)}{A_2 + \alpha_2(x)} - \frac{A_1}{A_2} \right) = \\ &= \frac{A_1}{A_2} + \frac{A_2(A_1 + \alpha_1(x)) - A_1(A_2 + \alpha_2(x))}{A_2(A_2 + \alpha_2(x))} = \frac{A_1}{A_2} + \frac{A_2 \alpha_1(x) - A_1 \alpha_2(x)}{A_2(A_2 + \alpha_2(x))}, \end{aligned}$$

где дробь  $\frac{A_2 \alpha_1(x) - A_1 \alpha_2(x)}{A_2(A_2 + \alpha_2(x))}$  есть бесконечно малая функция.

Следовательно,

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f_1(x)}{f_2(x)} = \frac{A_1}{A_2} = \frac{\lim_{x \rightarrow a} f_1(x)}{\lim_{x \rightarrow a} f_2(x)}.$$

**Примеры.**

$$1. \lim_{x \rightarrow 1} \frac{3x+5}{4x-2} = \frac{8}{2} = 4.$$

$$2. \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2-4}{x-2} = \lim_{x \rightarrow 2} (x+2) = 4.$$

### 2.5.3. Бесконечно большие функции

**ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1.** Функция  $f(x)$  называется бесконечно большой при  $x \rightarrow \infty$ , если  $\forall M > 0 \exists N > 0$ , что при  $x > N$   $|f(x)| > M$ .

**Пример.**  $y = x^2$  — бесконечно большая функция при  $x \rightarrow \infty$ .

Аналогично определяется бесконечно большая функция при  $x \rightarrow a$ .

Пишут:  $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \infty$  ( $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \infty$ ).

Если функция  $f(x)$  положительна для всех достаточно больших  $x$ , то она стремится к  $+\infty$ , если отрицательна, то  $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = -\infty$ .

Связь между бесконечно большими и бесконечно малыми функциями устанавливается следующей теоремой.

**Теорема 1.** Если функция  $f(x)$  — бесконечно большая при  $x \rightarrow \infty$ , то  $\frac{1}{f(x)}$  бесконечно малая функция.

**Доказательство.** Выберем  $\varepsilon > 0$ . Так как функция  $f(x)$  — бесконечно большая, то  $\exists N: |f(x)| > \frac{1}{\varepsilon}$  при  $x > N$  тогда  $\left| \frac{1}{f(x)} \right| < \varepsilon$  для тех же  $x$ , т. е.

$\frac{1}{f(x)}$  — бесконечно малая функция.

**Теорема 2.** Если  $f(x)$  — бесконечно малая функция при  $x \rightarrow a$  и не обращается в нуль при достаточно близких к  $a$   $x$ , то  $\frac{1}{f(x)}$  — бесконечно большая.

Доказательство теоремы аналогично доказательству теоремы 1.

## 2.6. Сравнение бесконечно малых

Сравнение бесконечно малых. Свойства непрерывных в точке функций. Классификация точек разрыва. Свойства функций, непрерывных на отрезке.

### 2.6.1. Сравнение бесконечно малых

**ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1.** Если отношение бесконечно малых функций  $\frac{\beta}{\alpha}$  имеет конечный и отличный от нуля предел, то  $\beta$  и  $\alpha$  называются бесконечно малыми одного порядка. Символически это записывается следующим образом:  $\alpha = O(\beta)$ .

**Пример.**  $\alpha = x$ ,  $\beta = 3x$ ,  $(x \rightarrow 0)$ ;  $\alpha = O(\beta)$ .

**ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2.** Если  $\lim \frac{\beta}{\alpha} = 0$   $\left( \lim \frac{\alpha}{\beta} = \infty \right)$ , то  $\beta$  называется бесконечно малой высшего порядка, чем  $\alpha$ :  $\beta = o(\alpha)$ .

**Пример.**  $\beta = x$ ,  $\alpha = x^3$   $(x \rightarrow 0)$ .

**ОПРЕДЕЛЕНИЕ 3.** Функция  $\beta$  называется бесконечно малой  $k$ -го порядка относительно  $\alpha$ , если  $\beta$  и  $\alpha^k$  — бесконечно малые одного порядка, т. е.  $\lim \frac{\beta}{\alpha^k} = A \neq 0$ .

**Пример.**  $\alpha = x$ ,  $\beta = x^3$ ,  $x \rightarrow 0$ .

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\beta}{\alpha^3} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^3}{x^3} = 1.$$

**ОПРЕДЕЛЕНИЕ 4.** Если  $\lim \frac{\beta}{\alpha} = 1$ , то бесконечно малые  $\alpha$  и  $\beta$  эквивалентны:  $\alpha \sim \beta$ .

**Пример.**  $x \sim \sin x$ ,  $x \sim \tg x$ ,  $x \sim \ln(1+x)$ .

**Теорема.** Пусть  $\alpha \sim \alpha_1$ ,  $\beta \sim \beta_1$ , тогда

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{\alpha}{\beta} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{\alpha_1}{\beta_1}.$$

*Доказательство.* Представим отношение  $\frac{\alpha}{\beta}$  в следующем виде:

$$\frac{\alpha}{\beta} = \frac{\alpha \cdot \beta_1 \cdot \alpha_1}{\beta \cdot \alpha_1 \cdot \beta_1}; \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\alpha}{\alpha_1} = 1, \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\beta_1}{\beta} = 1 \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\alpha}{\beta} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\alpha_1}{\beta_1}.$$

Таким образом, при вычислении пределов бесконечно малые можно заменять эквивалентными.

**Примеры.**

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 3x}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{3x}{x} = 3; \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 \sin \frac{2x}{2}}{x^2} = \frac{1}{2}.$$

### 2.6.2. Свойства функций, непрерывных в точке

Напомним: функция  $f(x)$  непрерывна в точке  $x_0$ , если

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0) \quad \text{или} \quad \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \Delta y = 0.$$

Из основных теорем о пределах вытекают следующие теоремы о свойствах непрерывных функций.

**Теорема 1.** Если  $f(x)$  и  $\varphi(x)$  непрерывны в точке  $x = a$ , то в этой точке непрерывны их сумма, разность, произведение и частное (при  $\varphi(a) \neq 0$ ).

В самом деле, в рассматриваемом случае

$$f(a) = \lim_{x \rightarrow a} f(x), \quad \varphi(a) = \lim_{x \rightarrow a} \varphi(x).$$

**Теорема 2.** Пусть задана функция  $f(u)$ , непрерывная в точке  $u = A$ , и функция  $u = \varphi(x)$ , непрерывная в точке  $x = a$ , и пусть  $\varphi(a) = A$ . Тогда сложная функция  $F(x) = f(\varphi(x))$  непрерывна в точке  $x = a$ .

*Доказательство.* Функция  $f(x)$  непрерывна в  $A$ , следовательно, определена в некоторой окрестности этой точки. Поэтому

$$\lim_{x \rightarrow a} F(x) = \lim_{x \rightarrow a} f(\varphi(x)) = \lim_{u \rightarrow A} f(u) = f(A) = f(\varphi(a)) = F(a).$$

Здесь  $u = \varphi(x)$  и учтена непрерывность функции  $\varphi$  в точке  $x = a$ :

$$\varphi(x) \xrightarrow{x \rightarrow a} \varphi(a) = A.$$

**Примеры.**

1)  $P(x) = a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \dots + a_n$  непрерывна  $\forall x$ ;

$$2) y = \cos x = \sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right), \text{ где } u = \frac{\pi}{2} - x \text{ — непрерывна;}$$

$$3) y = \operatorname{tg} x = \frac{\sin x}{\cos x}, \quad x \neq \frac{\pi}{2} + \pi k, \quad k = 0, \pm 1, \dots;$$

$$4) y = \sin^3 x^5.$$

Из свойств предела функции следует также теорема:

**Теорема 3.** Если функция  $f(x)$  непрерывна в точке  $a$ , то существует окрестность  $u(a)$  этой точки, на которой  $f(x)$  ограничена.

### 2.6.3. Классификация точек разрыва

Рассмотрим различные случаи предельного перехода к точке  $x_0$  слева и справа:

$$x \rightarrow x_0 - 0,$$

$$x \rightarrow x_0 + 0.$$

Для непрерывной в точке  $x_0$  функции имеют место следующие равенства:

$$\lim_{x \rightarrow x_0 - 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0 + 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0). \quad (1)$$

Если функция такова, что для нее существуют конечные пределы

$$\lim_{x \rightarrow x_0 - 0} f(x), \quad \lim_{x \rightarrow x_0 + 0} f(x),$$

но равенства (1) не выполняются, то, очевидно,  $f(x)$  разрывна в точке  $x_0$ . В этом случае говорят, что  $f(x)$  имеет в точке  $x_0$  разрыв 1-го рода.

Если  $\lim_{x \rightarrow x_0 - 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0 + 0} f(x) \neq f(x_0)$ , то  $x_0$  — точка устранимого разрыва.

Если у функции  $f(x)$  не существует правостороннего или левостороннего предела в точке  $x_0$ , или эти пределы равны  $\infty$ , то говорят о разрыве 2-го рода.

**Примеры.**

$$1) f(x) = \begin{cases} x \sin \frac{1}{x}, & x \neq 0, \\ 0, & x = 0; \end{cases}$$

$$2) f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x}, & x \neq 0, \\ 2, & x = 0. \end{cases}$$

#### 2.6.4. Свойства функций, непрерывных на отрезке

Функция  $f(x)$  называется непрерывной на отрезке  $[a, b]$ , если она непрерывна во всех точках  $(a, b)$ , а в точке  $a$  непрерывна справа, в точке  $b$  — слева.

**Теорема 1.** Если функция  $f(x)$  непрерывна на  $[a, b]$ , то она ограничена на нем, т. е.  $\exists k > 0: |f(x)| \leq k \quad \forall x \in [a, b]$ .

**Теорема 2** (Вейерштрасса). Если функция  $f(x)$  определена и непрерывна на  $[a, b]$ , то она достигает в этом промежутке своих точных верхней и нижней грани, т. е. существуют точки  $\alpha, \beta \in [a, b]$  такие, что  $f(\alpha) \leq f(x) \leq f(\beta)$  или  $\inf_{x \in [a, b]} f(x) = f(\alpha), \quad \sup_{x \in [a, b]} f(x) = f(\beta)$ . По теореме 1

$f(x)$  ограничена. Следовательно, существуют конечные  $\inf$  и  $\sup$ :  $\inf f(x) \leq \sup f(x)$ .

**Теорема 3.** Если  $f(x)$  определена и непрерывна на  $[a, b]$  и числа  $f(a)$  и  $f(b)$  отличны от нуля и имеют разные знаки, то на  $(a, b)$  имеется, по крайней мере, одна точка  $C$  такая, что  $f(c) = 0$ .

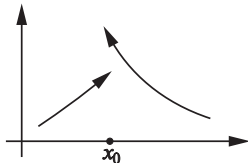


Рис. 2.10

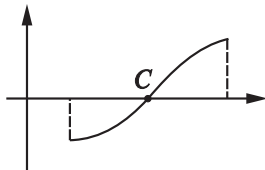


Рис. 2.11

**Следствие.** Если  $f(x)$  непрерывна на  $[a, b]$ ,  $f(a) = A$ ,  $f(b) = B$  ( $A \neq B$ ) и  $A < C < B$ , то  $\exists c: f(c) = C$ , т. е. непрерывная на  $[a, b]$  функция принимает все промежуточные значения между ее значениями на концах  $[a, b]$ .

**Доказательство.**  $F(x) = f(x) - C$  непрерывна на  $[a, b]$ ,  $f(a) - C > 0$ ,  $f(b) - C < 0 \Rightarrow \exists c: f(c) - C = 0 \Rightarrow f(c) = C$ .

## 2.7. Введение в дифференциальное исчисление функций одной переменной. Производная

Производная, ее геометрический смысл. Механический смысл производной. Дифференцируемость и ее связь с непрерывностью. Производные элементарных функций.

Дифференциальное исчисление — раздел математики, в котором изучаются понятия производной и дифференциала и способы их применения к исследованию функций. Развитие дифференциального исчисления тесно связано с развитием интегрального исчисления. Вместе они составляют основу математического анализа, имеющего чрезвычайное значение для естествознания и техники. В общих чертах построение дифференциального и интегрального исчислений было заложено в трудах механиков И. Ньютона и Г. Лейбница во второй половине XVII века. Имя и труды выдающегося английского ученого Исаака Ньютона (1643–1727), заложившего основы современного естествознания и классической физики, широко известны. Немецкий ученый Готфрид Вильгельм Лейбниц (1646–1716) независимо от И. Ньютона начал разработку дифференциального и интегрального исчисления при проведении научных исследований, которые относятся к механике, теории упругости и теории колебаний. Создание дифференциального исчисления явилось началом периода бурного развития математики и связанных с ними прикладных наук.

Дифференциальное исчисление основано на понятиях действительного числа, функции, предела и непрерывности — важнейших понятиях математики, с которыми мы познакомились на предыдущих лекциях.

Основные понятия дифференциального исчисления — производная и дифференциал — и разработанный в дифференциальном исчислении аппарат, связанный с ними, доставляют средства для исследования функций.

### 2.7.1. Производная

Производной от функции  $f(x)$  в точке  $x$  называется предел отношения ее приращения  $\Delta y$  в этой точке к соответствующему приращению аргумента  $\Delta x$ , когда  $\Delta x \rightarrow 0$ :

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}. \quad (1)$$

Обозначения:  $\frac{dy}{dx}$ ,  $y'$ ,  $\frac{df(x)}{dx}$ .

Для одной и той же функции производные можно вычислять в разных точках. В каждой точке  $x$ , для которой существует предел (1),  $f'(x)$  определяется как предел. Процесс нахождения производных — дифференцирование.

**Геометрический смысл производной.** Пусть  $M_0$  — фиксированная точка,  $M_0M_1$ ,  $M_0M_2$  — секущие. Если  $M_1 \rightarrow M_0$  по кривой, то секущая занимает различные положения:  $M_0M_1$ ,  $M_0M_2$ . Предельное положение секущей, когда  $M_1 \rightarrow M_0$  (с любой стороны), называется касательной к кривой в точке  $M_0$  (рис. 2.12).

Пусть точка  $M_0$  имеет координаты  $x$ ,  $y$ ,  $M_1$  —  $x + \Delta x$ ,  $y + \Delta y$ ,  $y + \Delta y = f(x + \Delta x)$ . Имеем:  $\operatorname{tg} \varphi = \frac{\Delta y}{\Delta x}$ . Если  $\Delta x \rightarrow 0$ , то  $M_1 \rightarrow M_0$  и угол  $\varphi$  меняется. Если  $\angle \varphi \rightarrow \angle \alpha$ , то прямая, проходящая через  $M_0$  и составляющая  $\angle \alpha$  с осью  $OX$ , и будет касательной. При этом

$$\operatorname{tg} \alpha = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \operatorname{tg} \varphi = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = f'(x).$$

Итак,  $f'(x) = \operatorname{tg} \alpha$ . Таким образом, значение производной  $f'(x)$  в точке  $x$  есть тангенс угла, который образует касательная к графику функции в данной точке  $M[x, f(x)]$  с положительным направлением оси  $OX$  (рис. 2.13).

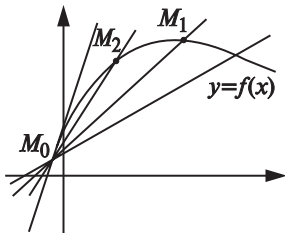


Рис. 2.12

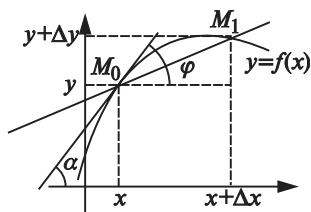


Рис. 2.13

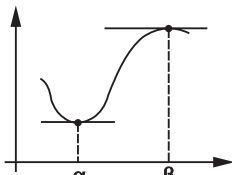


Рис. 2.14

Если  $\operatorname{tg} \alpha = 0$ , то касательная в точках  $x = \alpha$ ,  $x = \beta$  параллельна оси  $OX$ .



### 2.7.2. Механический смысл производной

Пусть материальная точка движется прямолинейно по закону  $S = f(t)$ , где  $t$  — время,  $S$  — путь. Пусть  $t = t_0$ . Найдём скорость точки при  $t = t_0$ . Рассмотрим  $t_0 + \Delta t$ . Тогда  $S(t_0 + \Delta t) = f(t_0 + \Delta t)$ ,

$$v_{\text{ср}} = \frac{f(t_0 + \Delta t) - f(t_0)}{\Delta t} = \frac{\Delta S}{\Delta t}.$$

Если  $\Delta t$  меняется, то  $v_{\text{ср}}$  — функция от  $t$ . Скоростью  $v_0$  в данный момент  $t_0$  называется предел средней скорости  $v_{\text{ср}}$  при  $\Delta t \rightarrow 0$ , т. е.

$$v_0 = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta S}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{f(t_0 + \Delta t) - f(t_0)}{\Delta t} = f'(t).$$

Таким образом, механический смысл производной заключается в следующем: производная функции  $f(x)$  в данной точке  $x_0$  есть скорость изменения функции в данной точке.

### 2.7.3. Дифференцируемость

**ОПРЕДЕЛЕНИЕ.** Функция, имеющая производную в точке  $x = x_0$ , называется дифференцируемой в этой точке. Если существует производная  $f'(x)$  во всех точках  $[a, b]$ , то функция называется дифференцируемой на  $[a, b]$ .

**Теорема.** Если  $y = f(x)$  дифференцируема в некоторой точке  $x = x_0$ , то она непрерывна в этой точке.

*Доказательство.* В соответствии с определением непрерывности, достаточно показать, что  $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \Delta y = 0$ .

$$\text{Имеем } \Delta y = \frac{\Delta y}{\Delta x} \cdot \Delta x; \quad \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \Delta y = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} \cdot \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \Delta x = f'(x_0) \cdot 0 = 0.$$

Из теоремы следует, что в точках разрыва функция не может иметь производной. Обратное неверно.

$$\lim_{x \rightarrow 0-0} |x| = \lim_{x \rightarrow 0+0} |x| = 0.$$

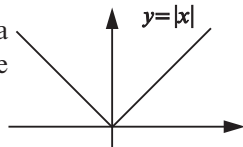


Рис. 2.15

Покажем, что при  $x = 0$   $y = |x|$  не имеет производной:  $\Delta x = x - x_0 = x$ .

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0+0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{x \rightarrow 0+0} \frac{|x|}{x} = 1;$$

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0-0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = -1, \text{ следовательно, } \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$$

не существует, и следовательно, функция  $y = |x|$  не имеет касательной в точке  $x = 0$ .

### 2.7.4. Производные элементарных функций

1.  $C' = 0$ .

$$y = C; \quad x + \Delta x \rightarrow y + \Delta y = C; \quad C' = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{C - C}{\Delta x} = 0.$$

2.  $(x^n)' = nx^{n-1}$ .

$$y = x^n \quad (n \text{ — целое число}),$$

тогда

$$\begin{aligned} \frac{(x + \Delta x)^n - x^n}{\Delta x} &= \frac{1}{\Delta x} \left[ x^n + nx^{n-1}\Delta x + \frac{n(n-1)}{2!} x^{n-2}\Delta x^2 + \dots + \Delta x^n - x^n \right] = \\ &= nx^{n-1} + \frac{n(n-1)}{2!} x^{n-2}\Delta x + \dots + \frac{\Delta x^n}{\Delta x} \xrightarrow{\Delta x \rightarrow 0} nx^{n-1}. \end{aligned}$$

Для дальнейшего покажем, что справедливы формулы

$$(u \pm v)' = u' \pm v', \quad (2)$$

$$(uv)' = uv' + u'v, \quad (3)$$

$$\left( \frac{u}{v} \right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2} \quad (v \neq 0). \quad (4)$$

Имеем  $\Delta x \rightarrow x + \Delta x \rightarrow u + \Delta u, \quad v + \Delta v$ ;

$$\Delta(u \pm v) = [(u \pm \Delta u) \pm (v + \Delta v)] - (u \pm v) = \Delta u \pm \Delta v;$$

$$(u \pm v)' = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta(u \pm v)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta u}{\Delta x} \pm \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta v}{\Delta x} = u' \pm v'.$$

Далее,

$$\Delta(uv) = (u + \Delta u)(v + \Delta v) - uv = u\Delta v + v\Delta u + \Delta u\Delta v;$$

$$(uv)' = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta(uv)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{u\Delta v + v\Delta u + \Delta u\Delta v}{\Delta x} = uv' + vu' + \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \Delta u \cdot \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta v}{\Delta x}.$$

Но  $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \Delta u = 0$ , так как функция  $u$  непрерывна, как функция, имеющая предел, и  $\Delta u \rightarrow 0$ . Поэтому  $(uv)' = u'v + uv'$ .

Далее,

$$\begin{aligned} \left(\frac{u}{v}\right)' &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \left(\frac{u + \Delta u}{v + \Delta v} - \frac{u}{v}\right) \cdot \frac{1}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{v\Delta u - u\Delta v}{(v + \Delta v)v\Delta x} = \\ &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{v \frac{\Delta u}{\Delta x} - u \frac{\Delta v}{\Delta x}}{(v + \Delta v)v} = \frac{u'v - uv'}{v^2}, \end{aligned}$$

так как  $\Delta v \rightarrow 0$  при  $\Delta x \rightarrow 0$ , потому что  $v$  имеет производную, и следовательно, непрерывна.

$$3. (\sin x)' = \cos x.$$

$$\begin{aligned} (\sin x)' &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\sin(x + \Delta x) - \sin x}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{2 \sin \frac{\Delta x}{2} \cdot \cos\left(x + \frac{\Delta x}{2}\right)}{\Delta x} = \\ &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\sin \frac{\Delta x}{2}}{\frac{\Delta x}{2}} \cdot \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \cos\left(x + \frac{\Delta x}{2}\right) = 1 \cdot \cos x. \end{aligned}$$

Аналогично:

$$4. (\cos x)' = -\sin x.$$

$$5. (\operatorname{tg} x)' = \frac{1}{\cos^2 x} = \sec^2 x; (\operatorname{tg} x)' = \left(\frac{\sin x}{\cos x}\right)'$$

$$6. (\operatorname{ctg} x)' = -\operatorname{cosec}^2 x = -\frac{1}{\sin^2 x}.$$

$$7. (\log_a x)' = \frac{1}{x} \log_a e = \frac{1}{x \ln a}. \quad (x > 0):$$

$$\begin{aligned} y = \log_a x; \quad \frac{\Delta y}{\Delta x} &= \frac{\log_a(x + \Delta x) - \log_a x}{\Delta x} = \frac{\log_a\left(1 + \frac{\Delta x}{x}\right)}{\Delta x} = \frac{1}{x} \frac{\log_a\left(1 + \frac{\Delta x}{x}\right)}{\frac{\Delta x}{x}} = \\ &= \frac{1}{x} \log_a\left(1 + \frac{\Delta x}{x}\right)^{\frac{x}{\Delta x}} \xrightarrow{\Delta x \rightarrow 0} \frac{1}{x} \log_a e = \frac{1}{x \ln a}. \end{aligned}$$

В частности,

$$8. (\ln x)' = \frac{1}{x}.$$

## 2.8. Производные сложных, обратных, логарифмических функций

Производная сложной функции. Обратная функция и ее производная. Производные элементарных функций и степенно-показательных выражений.

### 2.8.1. Производная сложной функции

**Теорема.** Если функция  $u = \varphi(x)$  имеет производную в точке  $x$ , а функция  $y = f(u)$  — в точке  $u$ , то сложная функция  $y = F(x) = f[\varphi(x)]$  имеет производную по  $x$  в точке  $x$  и  $F'(x) = f'(u)\varphi'(x)$ .

*Доказательство.* Зададим  $\Delta x \neq 0$ , тогда  $\Delta u = \varphi(x + \Delta x) - \varphi(x)$ . Если  $\Delta u \neq 0$ , то

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\Delta y}{\Delta u} \cdot \frac{\Delta u}{\Delta x}.$$

При  $\Delta x \rightarrow 0$ ,  $\Delta u \rightarrow 0$  (в силу непрерывности  $\varphi(x)$ , как имеющей производную). Поэтому  $y'_x = y'_u \cdot u'_x$ .

Таким образом, производная сложной функции равна произведению производной данной функции по промежуточному аргументу на производную промежуточного аргумента.

### 2.8.2. Обратная функция

Рассмотрим функцию  $y = x^3$ ,  $x \in [-1, 2]$  (рис. 2.16). Область значений этой функции есть отрезок  $[-1, 8]$ . Функция  $x = \sqrt[3]{y}$ , отображающая отрезок  $[-1, 8]$  в  $[-1, 2]$ , называется обратной к функции  $y = x^3$ . Некоторые функции не имеют обратных. Например,  $y = x^2$ , при  $x \in (-\infty, \infty)$ , т. к. каждому значению  $y > 0$  соответствуют два значения  $x = \pm\sqrt{y}$ . Если  $y = f(x)$ , то обратную функцию можно обозначить через  $x = f^{-1}(y)$ .

**ОПРЕДЕЛЕНИЕ.** Функция  $y = f(x)$  называется возрастающей на некотором сегменте (или интервале), если для  $x_2 > x_1$   $f(x_2) > f(x_1)$ . Функция  $y = f(x)$  называется убывающей, если для  $x_2 < x_1$   $f(x_2) < f(x_1)$ .

Если  $f(x)$  является только возрастающей или убывающей на некотором сегменте, то она монотонна на нем.

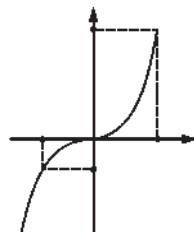


Рис. 2.16

**Теорема существования обратной функции.** Если  $y = f(x)$  непрерывна на  $[a, b]$  и монотонна на нем, то на соответствующем сегменте оси  $OY$  существует обратная функция  $x = f^{-1}(y)$ , которая также является непрерывной монотонной функцией.

#### Производная обратной функции.

**Теорема.** Пусть  $y = f(x)$  монотонна и дифференцируема в некотором интервале и имеет в точке  $x$  производную  $f'(x) \neq 0$ . Тогда обратная функция дифференцируема, и

$$[f^{-1}(y)]' = \frac{1}{f'(x)}.$$

*Доказательство.* Так как  $y = f(x)$  монотонна, дифференцируема (а значит, непрерывна), то  $x = f^{-1}(y)$  существует, монотонна и непрерывна. Зададим  $\Delta y \neq 0$ , тогда  $x = f^{-1}(y)$  получит приращение  $\Delta x$ , которое в силу монотонности отлично от нуля. Так как  $x = f^{-1}(y)$  непрерывна, то  $\Delta x \rightarrow 0$  при  $\Delta y \rightarrow 0$ , следовательно,

$$[f^{-1}(y)]' = \lim_{\Delta y \rightarrow 0} \frac{\Delta x}{\Delta y} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{1}{\frac{\Delta y}{\Delta x}} = \frac{1}{f'(x)}.$$

## 2.8.3. Производные элементарных функций

$$1. (\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}.$$

$y = \arcsin x$ . Рассмотрим функцию  $x = \sin y$ . Она монотонна и дифференцируема при  $-\frac{\pi}{2} < y < \frac{\pi}{2}$ ,  $x' = \cos y \neq 0$  — в этом интервале. Тогда

$$y'_x = \frac{1}{x'_y} = \frac{1}{\cos y} = \frac{1}{\sqrt{1-\sin^2 y}} = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}.$$

$$2. (\operatorname{arctg} x)' = \frac{1}{1+x^2}.$$

$y = \operatorname{arctg} x$ ,  $y \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ , при этом обратная функция  $x = \operatorname{tg} y$  монотонна и дифференцируема,  $\frac{dx}{dy} = \frac{1}{\cos^2 y}$ ;  $\frac{dy}{dx} = \cos^2 y = \frac{1}{1+\operatorname{tg}^2 y} = \frac{1}{1+x^2}$ .

Аналогично:

$$3. (\arccos x)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}.$$

$$4. (\operatorname{arcctg} x)' = -\frac{1}{1+x^2}.$$

$$5. (a^x)' = a^x \ln a.$$

$y = a^x$ ,  $x = \log_a y$  — обратная,

$$y'_x = \frac{1}{x'_y} = \frac{1}{\frac{1}{y \ln a}} = y \ln a = a^x \ln a.$$

В частности,

$$(e^x)' = e^x.$$

$$6. (x^\alpha)' = \alpha x^{\alpha-1} \quad (\alpha \text{ — произвольное действительное число}).$$

$$y = x^\alpha = e^{\alpha \ln x},$$

$$y' = e^{\alpha \ln x} \cdot \alpha \cdot \frac{1}{x} = x^\alpha \cdot \alpha \cdot \frac{1}{x} = \alpha x^{\alpha-1}.$$

**2.8.4. Дифференцирование степенно-показательных выражений**

Пусть  $y = u(x)^{v(x)}$ . Тогда  $\ln y = v(x) \ln u(x)$ .

Продифференцируем обе части данного соотношения:

$$\frac{y'}{y} = v'(x) \ln u(x) + v(x) \frac{1}{u(x)} u'(x) \Rightarrow y' = y \left[ v'(x) \ln u(x) + v(x) \frac{u'(x)}{u(x)} \right].$$

**Пример.**

$$y = x^x; \quad y' = y(\ln x + 1) = x^x(\ln x + 1).$$

**2.9. Дифференциал**

Дифференциал функции. Связь между существованием производной и существованием дифференциала функции. Свойства дифференциала. Дифференциал сложной функции. Инвариантность формы первого дифференциала. Геометрический смысл дифференциала. Его применение в приближенных вычислениях. Производные и дифференциалы высших порядков. Дифференцирование функций, заданных параметрически.

**2.9.1. Дифференциал функции**

Рассмотрим функцию  $y = x^2$ .

$$\Delta y = (x + \Delta x)^2 - x^2 = x^2 + 2x\Delta x + \Delta x^2 - x^2 = 2x\Delta x + (\Delta x)^2.$$

Таким образом, первое слагаемое линейно относительно  $\Delta x$ .  $(\Delta x)^2$  — бесконечно малая более высокого порядка, чем  $2x\Delta x$ :

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{(\Delta x)^2}{2x\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta x}{2x} = 0.$$

Поэтому первое слагаемое — главная часть приращения функции.

Пусть задана функция  $y = f(x)$  и пусть

$$\Delta y = f(x + \Delta x) - f(x) = A\Delta x + \alpha(\Delta x), \quad (1)$$

где  $A$  — постоянное число, не зависящее от  $\Delta x$ , а  $\alpha(\Delta x)$  — бесконечно малая более высокого порядка, чем  $\Delta x$ , т. е.

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\alpha(\Delta x)}{\Delta x} = 0. \quad (2)$$

**ОПРЕДЕЛЕНИЕ.** Если приращение функции  $y = f(x)$  в точке  $x$  может быть представлено в виде (1), то главная часть  $A\Delta x$ , линейная относительно  $\Delta x$ , называется дифференциалом функции.

**С и м в о л и к а:**  $dy = A\Delta x$  или  $d(f(x)) = A\Delta x$ . Приращение независимой переменной  $\Delta x$  называется ее дифференциалом:  $\Delta x = dx$ .

### 2.9.2. Связь между существованием производной и существованием дифференциала функции

**Теорема 1.** Если функция  $f(x)$  имеет в точке  $x$  производную, то она имеет в этой точке и дифференциал.

*Доказательство.*

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}.$$

По теореме о представлении функции, имеющей предел,

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = f'(x) + \beta(\Delta x),$$

где  $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \beta(\Delta x) = 0$ . Но тогда  $\Delta y = f'(x)\Delta x + \beta(\Delta x) \cdot \Delta x$  и

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\beta(\Delta x)\Delta x}{\Delta x} = 0,$$

следовательно, по определению  $f(x)$  имеет в точке  $x$  дифференциал  $d(f(x)) = f'(x)\Delta x$ .

**Теорема 2.** Если  $f(x)$  имеет в точке  $x$  дифференциал, то она имеет в этой точке и производную.

*Доказательство.*  $\Delta y = A\Delta x + \alpha(\Delta x) \Rightarrow \frac{\Delta y}{\Delta x} = A + \frac{\alpha(\Delta x)}{\Delta x} \Rightarrow$

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = A + 0 = A \Rightarrow A = f'(x).$$



Итак,  $dy = f'(x)\Delta x = f'(x)dx$ . Следовательно,  $f'(x) = \frac{dy}{dx}$ , т. е. производная равна отношению ее дифференциала к дифференциалу независимой переменной.

**З а м е ч а н и е.** На основании вышеизложенного можно ввести второе определение производной как отношение дифференциалов:

$$y'(x) = \frac{dy}{dx}.$$

### 2.9.3. Свойства дифференциала

Пусть  $u(x)$  и  $v(x)$  — дифференцируемые функции. Тогда

$$d(u + v) = du + dv,$$

$$d(uv) = u dv + v du,$$

$$d\left(\frac{u}{v}\right) = \frac{v du - u dv}{v^2}.$$

В самом деле, например,

$$d\left(\frac{u}{v}\right) = \left(\frac{u}{v}\right)' dx = \frac{u'v - v'u}{v^2} = \frac{(u'dx)v - (v'dx)u}{v^2} = \frac{du \cdot v - dv \cdot u}{v^2}.$$

### 2.9.4. Дифференциал сложной функции

Пусть  $y = f(x)$ ,  $x = \varphi(t)$ , т. е.  $y = f[\varphi(t)]$ . Тогда

$$dy = y'_t dt = y'_x \cdot x'_t \cdot dt = y'_x dx = f'(x)dx.$$

Таким образом, дифференциал сложной функции  $y = f[\varphi(t)]$  имеет тот же вид  $dy = f'(x)dx$ , какой он имел бы в случае, если бы промежуточный аргумент был независимой переменной.

**П р и м е р.**  $y = \sin \sqrt{x}$ , или  $y = \sin u$ ,  $u = \sqrt{x}$ ,  $dy = \cos \sqrt{x} \cdot \frac{1}{2\sqrt{x}} dx$ , следовательно,  $dy = \cos u du = \cos \sqrt{x} d(\sqrt{x})$ .

### 2.9.5. Геометрический смысл дифференциала

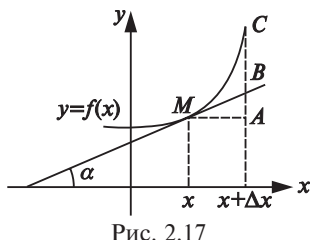


Рис. 2.17

$$AC = f(x + \Delta x) - f(x) = \Delta y.$$

$$AB = \Delta x \cdot \operatorname{tg} \alpha = f'(x) \Delta x = dy.$$

$AC$  — приращение функции,  $AB$  — приращение ординаты касательной к графику функции в точке  $x$ ,  $f(x)$ .

### Применение дифференциала в приближенных вычислениях

$$\Delta y = f'(x) dx + \alpha(\Delta x) = dy + \alpha(\Delta x).$$

При достаточно малых  $\Delta x$

$$\Delta y \approx dy. \quad (*)$$

Пусть известно значение функции и ее производной в некоторой точке  $x_0$ . Тогда

$$\Delta y = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) \approx f'(x_0) \Delta x$$

или

$$f(x_0 + \Delta x) \approx f(x_0) + f'(x_0) \Delta x.$$

Таким образом, можно вычислить приближенное значение функции в точке  $x_0 + \Delta x$ .

Пр и м е р.  $\sin 31^\circ = ?$

$$f(x) = \sin x, \quad x_0 = 30^\circ, \quad \Delta x = 1^\circ = \frac{\pi}{180}.$$

$$\begin{aligned} \sin(x_0 + \Delta x) &\approx \sin x_0 + \cos x_0 \cdot \Delta x = \sin 30^\circ + \cos 30^\circ \cdot \frac{\pi}{180} = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot 0,017 \approx \\ &\approx 0,5 + 0,85 \cdot 0,017 \approx 0,514. \end{aligned}$$

### 2.9.6. Производные и дифференциалы высших порядков

#### Производные высших порядков.

«Если первая производная позволяет нам для данного момента времени описать характер какого-либо движения, то вторая помогает проникнуть в его скрытые причины» (Томсон В., Тэт В. Введение в натуральную философию, 1867).

Пусть на интервале  $(a, b)$  задана  $f(x)$ . Ее производная, если она существует на  $(a, b)$ , есть некоторая функция  $f'(x)$ . Производная от  $f'(x)$  называется второй производной и обозначается  $f''(x)$ :

$$f''(x) = (f'(x))' \quad \text{или} \quad y'' = (y')'.$$

Вообще, производной от функции  $f(x)$  порядка  $n$  называется первая производная от производной от  $f(x)$  порядка  $n-1$ :  $f^{(n)}(x) = [f^{(n-1)}(x)]'$ . Для ее существования необходимо существование  $f^{(n-1)}$  не только в точке  $x$ , но и в ее некоей окрестности.

**Примеры.**  $(e^x)^{(n)} = e^x$ ;

$$(\sin x)' = \cos x, \quad (\cos x)' = -\sin x, \quad (\sin x)'' = -\sin x, \quad (\sin x)''' = -\cos x, \dots$$

### Дифференциалы высших порядков.

Рассмотрим функцию  $y = f(x)$ ;  $dy = f'(x)dx$ . Величину приращения  $\Delta x = dx$  можно выбирать независимо от точки  $x$ . Поэтому  $dy$  можно считать функцией только от  $x$ . Дифференциал от  $dy$  называют вторым дифференциалом или дифференциалом второго порядка:  $d^2 y = d^2 f(x)$ ,  $d^2 y = d(dy)$ .

$$d^2 y = d[f'(x)dx] = [f'(x)dx]'dx = f''(x)dx \cdot dx = f''(x)(dx)^2.$$

$$d^n y = d(d^{n-1} y) = f^{(n)}(x)(dx)^n = f^{(n)}(x)dx^n.$$

Поэтому

$$f^{(n)}(x) = \frac{d^n y}{dx^n}.$$

Последняя формула (для  $n > 1$ ) справедлива только в том случае, когда  $f(x)$  не является сложной функцией, т. е. только тогда, когда  $x$  — независимая переменная. Т. е. здесь свойство инвариантности не имеет места. Однако запись  $f^{(n)}(x) = \frac{d^n y}{dx^n}$  сохраняют, рассматривая  $\frac{d^n y}{dx^n}$  как символ, а не отношение.

**Пример.**  $y = \sin u, \quad u = \sqrt{x} \Rightarrow y = \sin \sqrt{x}$ .

$$dy = \cos u du; \quad d^2 y = d(\cos u)du + \cos u d^2 u = -\sin u (du)^2 + \cos u d^2 u =$$

$$= -\sin u (du)^2 + \cos u \cdot u'' (dx)^2 = -\sin u \left( \frac{1}{2\sqrt{x}} \right)^2 dx^2 + \cos u \left( -\frac{1}{4x^{\frac{3}{2}}} \right) (dx)^2.$$

### 2.9.7. Дифференцирование параметрически заданных функций

$$\begin{cases} x = \varphi(t), \\ y = \psi(t), \end{cases} \quad t \in (a, b).$$

Будем предполагать, что существует обратная функция от  $x = \varphi(t)$ :  $t = \varphi^{-1}(x)$ . Тогда  $y = \psi[\varphi^{-1}(x)]$ .

Будем искать  $y'_x$  через  $x'_t$ ,  $y'_t$ . В силу инвариантности формы первого дифференциала  $y'_x = \frac{dy}{dx}$ , но  $dy = y'_t dt$ ,  $dx = x'_t dt$ , следовательно,

$$y'_x = \frac{y'_t}{x'_t} \quad (x'_t \neq 0).$$

$$y''_x = \frac{d(y'_x)}{dx} = \frac{d\left(\frac{y'_t}{x'_t}\right)}{x'_t dt} = \frac{dy'_t \cdot x'_t - dx'_t \cdot y'_t}{(x'_t)^2 \cdot x'_t dt} = \frac{y''_t \cdot x'_t dt - x''_t \cdot y'_t dt}{(x'_t)^3 dt},$$

$$y''_x = \frac{y''_t \cdot x'_t - x''_t \cdot y'_t}{(x'_t)^3}.$$

## 2.10. Некоторые теоремы Ролля, Лагранжа, Коши о дифференцируемых функциях

Теорема Ролля о нулях производной. Теорема Лагранжа о конечных приращениях. Теорема Коши об отношении приращений двух функций.

### 2.10.1. Теорема Ролля о нулях производной

Если функция  $f(x)$  непрерывна на отрезке  $[a, b]$ , дифференцируема во всех внутренних точках этого отрезка и на концах отрезка обращается в нуль (т. е.  $f(a) = f(b) = 0$ ), то внутри отрезка  $[a, b]$  существует по крайней мере одна точка  $C$  такая, что  $f'(c) = 0$ .

(Между двумя нулями дифференцируемой функции есть нуль производной.)

**Доказательство.** Так как функция  $f(x)$  непрерывна на  $[a, b]$ , то она достигает на этом отрезке своего наибольшего значения  $M$  и наименьшего значения  $m$ .

Если  $M = m$ , то  $f(x) = 0$  для  $\forall x \in [a, b] \Rightarrow f'(x) = 0$  для  $\forall x$ .

Пусть  $M \neq m$ . Пусть  $f(c) = M$ , где  $c \in (a, b)$ ,  $M > 0$ . Тогда  $f(c + \Delta x) \leq f(c)$  для  $\Delta x$  любого знака, так как  $f(c)$  — наибольшее значение функции. Поэтому при  $\Delta x > 0$

$$\frac{f(c + \Delta x) - f(c)}{\Delta x} \leq 0. \quad (1)$$

При  $\Delta x < 0$

$$\frac{f(c + \Delta x) - f(c)}{\Delta x} \geq 0. \quad (2)$$

Переходя к пределу при  $\Delta x \rightarrow 0$  в (1) и (2), получим

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(c + \Delta x) - f(c)}{\Delta x} = f'(c) \leq 0,$$

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(c + \Delta x) - f(c)}{\Delta x} = f'(c) \geq 0.$$

Сравнивая два последних неравенства, видим, что  $f'(c) = 0$ .

**Геометрическая интерпретация.** Если непрерывная кривая, имеющая в каждой точке  $(a, b)$  касательную, пересекает ось  $OX$  при  $x = a$  и  $x = b$ , то найдется такая точка  $c \in (a, b)$ , в которой касательная параллельна оси  $OX$  (рис. 2.18).

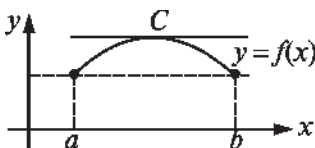


Рис. 2.18

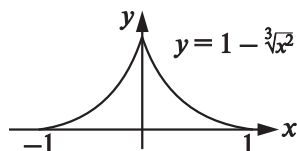


Рис. 2.19

**Замечание 1.** Теорема остается справедливой и в том случае, когда  $f(a) = f(b) \neq 0$ . Доказательство аналогично.

**Замечание 2.** Требование дифференцируемости функции в точках  $(a, b)$  существенно. Например, функция  $y = 1 - \sqrt[3]{x^2}$  непрерывна на  $[-1, 1]$ ,  $f(-1) = f(1) = 0$ . Но  $f'(x) = -\frac{2}{3\sqrt[3]{x}}$  не обращается в нуль на  $(-1, 1)$ . Это вызвано тем, что  $f'(0)$  не существует (рис. 2.19).

На графике нет точки, в которой касательная параллельна оси  $OX$ .

### 2.10.2. Теорема Лагранжа о конечных приращениях

Если  $f(x)$  непрерывна на  $[a, b]$  и дифференцируема во всех внутренних точках этого отрезка, то внутри отрезка найдется такая точка  $c$ , что

$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}. \quad (3)$$

*Доказательство.* Рассмотрим функцию  $F(x) = f(x) - f(a) - (x - a)Q$ , где  $Q = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$ .

$$F(a) = f(a) - f(a) - (a - a)Q = 0;$$

$$F(b) = f(b) - f(a) - (b - a) \frac{f(b) - f(a)}{b - a} = 0.$$

$F(x)$  вместе с  $f(x)$  дифференцируема на  $(a, b)$ . Поэтому она удовлетворяет всем условиям теоремы Ролля. Следовательно, существует точка  $c \in (a, b)$  такая, что  $F'(x) = 0$ , но

$$F'(c) = f'(c) - Q = 0 \Rightarrow f'(c) = Q,$$

т. е.  $f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$

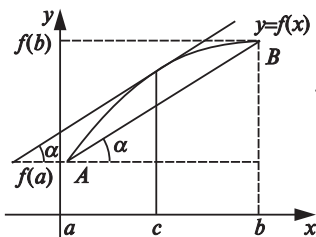


Рис. 2.20

Поясним геометрически ход рассуждений при доказательстве теоремы. Пусть график  $f(x)$  имеет вид, показанный на рис. 2.20. Соединим точки  $A[a, f(a)]$  и  $B[b, f(b)]$  хордой  $AB$ . Напишем уравнение прямой  $AB$ :

$$\frac{y - f(a)}{f(b) - f(a)} = \frac{x - a}{b - a} \Rightarrow$$

$$y - f(a) + \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - a).$$

Если из ординат графика функции  $y = f(x)$  при  $\forall x$  вычесть ординаты прямой  $AB$ , то получим новую функцию, обращающуюся в нуль при  $x = a$  и  $x = b$ . Это и есть  $F(x)$ . Из рисунка ясно, что  $Q$  — тангенс угла наклона хорды к оси  $OX$ . Поэтому теорема Лагранжа утверждает, что на  $[a, b]$  найдется такая точка, что касательная к графику функции в этой точке параллельна хорде, стягивающей точки  $A$  и  $B$ .

Формула (3) может быть переписана в виде

$$f(b) - f(a) = f'(c)(b - a). \quad (4)$$

Таким образом, приращение дифференцируемой функции на сегменте  $[a, b]$  равно приращению аргумента (длине сегмента), умноженному на значение производной в некоторой точке сегмента (формула Лагранжа).

**Пример.** Для отрезка параболы  $y = x^2$ , заключенного между точками  $A(1, 1)$  и  $B(3, 9)$ , найти такую точку на отрезке  $[1, 3]$ , в которой касательная к графику параболы параллельна хорде  $AB$ .

Пользуясь теоремой Лагранжа, можно доказать следующую теорему.

### 2.10.3. Теорема Коши об отношении приращений двух функций

Если функции  $f(x)$  и  $\varphi(x)$  непрерывны на  $[a, b]$  и дифференцируемы во всех его внутренних точках, и если при этом  $\varphi'(x) \neq 0$  на  $(a, b)$ , то найдется такая точка  $c \in (a, b)$ , что

$$\frac{f(b) - f(a)}{\varphi(b) - \varphi(a)} = \frac{f'(c)}{\varphi'(c)}.$$

*Доказательство.* Положим  $Q = \frac{f(b) - f(a)}{\varphi(b) - \varphi(a)}$  и рассмотрим

$$F(x) = f(x) - f(a) - Q[\varphi(x) - \varphi(a)],$$

$$F(a) = f(a) - f(a) - Q[\varphi(a) - \varphi(a)] = 0,$$

$$F(b) = f(b) - f(a) - \frac{f(b) - f(a)}{\varphi(b) - \varphi(a)} [\varphi(b) - \varphi(a)] = 0.$$

Ясно, что функция  $F(x)$  непрерывна на  $[a, b]$  и дифференцируема во всех его внутренних точках. Поэтому она удовлетворяет всем условиям теоремы Ролля. Следовательно, существует такая точка  $c$ , что  $F'(c) = 0$ .

Но  $F'(c) = f'(c) - Q\varphi'(c) = 0$ , следовательно,  $\frac{f'(c)}{\varphi'(c)} = Q$

и

$$\frac{f(b) - f(a)}{\varphi(b) - \varphi(a)} = \frac{f'(c)}{\varphi'(c)}.$$

## 2.11. Раскрытие неопределенностей

Правило Лопиталья. Раскрытие неопределенностей вида  $\left(\frac{\infty}{\infty}\right)$ . Раскрытие неопределенностей вида  $(0 \cdot \infty)$  и  $(\infty - \infty)$ . Раскрытие неопределенностей вида  $(0^0)$ ,  $(\infty^0)$ ,  $(1^\infty)$ .

### 2.11.1. Правило Лопиталья

Пусть функции  $f(x)$  и  $\varphi(x)$  определены на  $[a, b]$  и обращаются в нуль при  $x = x_0$ , т. е.  $f(x_0) = \varphi(x_0) = 0$ . Тогда при  $x = x_0$  не определено отношение  $\frac{f(x)}{\varphi(x)}$ , но оно определено в точках, близких к  $x_0$ . Поэтому возникает необходимость вычислить предел  $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{\varphi(x)}$ . Отыскание такого предела называют обычно раскрытием неопределенности типа  $\left(\frac{0}{0}\right)$ .

**Теорема.** Пусть  $f(x)$  и  $\varphi(x)$  — функции, дифференцируемые в некотором интервале  $(a, b)$ , причем  $\varphi'(x) \neq 0$  на  $(a, b)$ , и непрерывные на  $[a, b]$ . Пусть  $f(a) = \varphi(a) = 0$ . Тогда, если существует предел отношения  $\frac{f'(x)}{\varphi'(x)}$  при  $x \rightarrow a + 0$ , то существует и предел отношения функций  $\frac{f(x)}{\varphi(x)}$ , и имеет место равенство

$$\lim_{x \rightarrow a+0} \frac{f(x)}{\varphi(x)} = \lim_{x \rightarrow a+0} \frac{f'(x)}{\varphi'(x)}.$$

*Доказательство.* Из условий теоремы вытекает, что на промежутке  $[a, x]$ , где  $a < x < b$ , функции удовлетворяют теореме Коши. Поэтому

$$\frac{f(x)}{\varphi(x)} = \frac{f(x) - f(a)}{\varphi(x) - \varphi(a)} = \frac{f'(c)}{\varphi'(c)},$$

где  $a < c < x$ ;  $c$  зависит от  $x$ , но при  $x \rightarrow a + 0$   $c \rightarrow a + 0$ . Следовательно,

$$\lim_{x \rightarrow a+0} \frac{f(x)}{\varphi(x)} = \lim_{x \rightarrow a+0} \frac{f'(c)}{\varphi'(c)} = \lim_{x \rightarrow a+0} \frac{f'(c)}{\varphi'(c)} = \lim_{x \rightarrow a+0} \frac{f'(x)}{\varphi'(x)}.$$

Если  $\frac{f'(x)}{\varphi'(x)}$  — снова неопределенность типа  $\left(\frac{0}{0}\right)$ , то нужно снова применить правило Лопиталья.



Пример 1.

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos 2x}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 \sin 2x}{2x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 \cos 2x}{1} = 2.$$

Правило Лопиталя применимо и в том случае, когда  $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = 0$ ,  $\lim_{x \rightarrow \infty} \varphi(x) = 0$ .

Действительно, полагая  $x = \frac{1}{z}$ , видим, что  $z \rightarrow 0$  при  $x \rightarrow \infty$  и, следовательно,

$$\lim_{z \rightarrow 0} f\left(\frac{1}{z}\right) = \lim_{z \rightarrow 0} \varphi\left(\frac{1}{z}\right) = 0;$$

$$\lim_{z \rightarrow 0} \frac{f\left(\frac{1}{z}\right)}{\varphi\left(\frac{1}{z}\right)} = \lim_{z \rightarrow 0} \frac{f'\left(\frac{1}{z}\right)\left(-\frac{1}{z^2}\right)}{\varphi'\left(\frac{1}{z}\right)\left(-\frac{1}{z^2}\right)} = \lim_{z \rightarrow 0} \frac{f'\left(\frac{1}{z}\right)}{\varphi'\left(\frac{1}{z}\right)} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f'(x)}{\varphi'(x)}.$$

Пример 2.

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sin \frac{k}{x}}{\frac{1}{x}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{-\frac{k}{x^2} \cos \frac{k}{x}}{-\frac{1}{x^2}} = k \lim_{x \rightarrow \infty} \cos \frac{k}{x} = k.$$

### 2.11.2. Раскрытие неопределенностей вида $\left(\frac{\infty}{\infty}\right)$ .

Пусть  $f(x)$  и  $\varphi(x)$  стремятся к  $\infty$  при  $x \rightarrow a$  ( $x \rightarrow \infty$ ).

**Теорема.** Пусть функции  $f(x)$  и  $\varphi(x)$  дифференцируемы в окрестности точки  $a$  (при  $x \neq a$ ) и  $\varphi'(x) \neq 0$  в этой окрестности. Пусть  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \infty$ ,  $\lim_{x \rightarrow a} \varphi(x) = \infty$ . Если существует  $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(x)}{\varphi'(x)}$ , то существует и  $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{\varphi(x)}$  и

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{\varphi(x)} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(x)}{\varphi'(x)}.$$

Данная теорема доказывается в соответствии с определением предела на языке  $\varepsilon - \delta$ , с применением формулы Коши к некоторому малому промежутку  $[x, x_0]$ , где  $x_0 = a + \Delta$ . В результате простых, но остроумных преобразований, доказывается, что для любого  $\varepsilon > 0$  найдется такое  $\delta > 0$ , что

$$\left| \frac{f(x)}{g(x)} - K \right| < \varepsilon \text{ если } \left| \frac{f'(x)}{g'(x)} - K \right| < \frac{\varepsilon}{2} \text{ при } |x - a| < \delta.$$

А это и доказывает требуемое утверждение, если  $K$  конечное. Если  $K = +\infty$ , то проведенное доказательство теоремы можно применить и в этом случае, если поменять ролями функции  $f$  и  $g$ :

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{g'(x)}{f'(x)} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{g(x)}{f(x)} = 0.$$

З а м е ч а н и е. Теорема остается справедливой и при  $x \rightarrow \infty$ .

П р и м е р 3.

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^n}{e^x} = \dots = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{n!}{e^x} = 0.$$

П р и м е р 4.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_1 x^n + a_2 x^{n-1} + \dots + a_{n+1}}{b_1 x^n + b_2 x^{n-1} + \dots + b_{n+1}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_1 n!}{b_1 n!} = \frac{a_1}{b_1}.$$

### 2.11.3. Раскрытие неопределенностей вида $(0 \cdot \infty)$ и $(\infty - \infty)$

#### Неопределенность $(0 \cdot \infty)$ .

Под раскрытием такой неопределенности понимают нахождение предела  $\lim_{x \rightarrow a} [f(x) \cdot \varphi(x)]$ , когда  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = 0$ ,  $\lim_{x \rightarrow a} \varphi(x) = \infty$ .

Воспользуемся очевидным равенством

$$\lim_{x \rightarrow a} [f(x) \cdot \varphi(x)] = \lim_{x \rightarrow a} \left[ f(x) \frac{1}{\frac{1}{\varphi(x)}} \right] = \lim_{x \rightarrow a} \left[ \varphi(x) \frac{1}{\frac{1}{f(x)}} \right].$$

Таким преобразованием мы сводим неопределенность вида  $(0 \cdot \infty)$  к неопределенности  $\left(\frac{0}{0}\right)$  или  $\left(\frac{\infty}{\infty}\right)$ .

П р и м е р 5.

$$\lim_{x \rightarrow 0} x \cdot \operatorname{ctg} 3x = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{\operatorname{tg} 3x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{\frac{3}{\cos^2 3x}} = \frac{1}{3}.$$

#### Неопределенность $(\infty - \infty)$ .

Как и в предыдущем случае, неопределенности такого вида можно раскрыть путем предварительного их преобразования к виду  $\frac{0}{0}$  или  $\frac{\infty}{\infty}$ . Покажем это на примере.

Пример 6.

$$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}-0} \left( \operatorname{tg} x - \frac{1}{\cos x} \right) = \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}-0} \frac{\sin x - 1}{\cos x} = \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}-0} \frac{\cos x}{-\sin x} = 0.$$

#### 2.11.4. Раскрытие неопределенностей вида $(0^0)$ , $(\infty^0)$ , $(1^\infty)$

Все эти неопределенности раскрываются путем логарифмирования выражения  $[f(x)]^{\varphi(x)}$ . При этом пользуются очевидным равенством

$$\lim_{x \rightarrow a} [f(x)]^{\varphi(x)} = e^{\lim_{x \rightarrow a} \varphi(x) \ln f(x)}.$$

$$(0^0) = \lim_{x \rightarrow a} [f(x)]^{\varphi(x)}, \quad \text{когда} \quad \lim_{x \rightarrow a} f(x) = 0, \quad \lim_{x \rightarrow a} \varphi(x) = 0.$$

$$(\infty^0) = \lim_{x \rightarrow a} [f(x)]^{\varphi(x)}, \quad \text{когда} \quad \lim_{x \rightarrow a} f(x) = \infty, \quad \lim_{x \rightarrow a} \varphi(x) = 0.$$

$$(1^\infty) = \lim_{x \rightarrow a} [f(x)]^{\varphi(x)}, \quad \text{когда} \quad \lim_{x \rightarrow a} f(x) = 1, \quad \lim_{x \rightarrow a} \varphi(x) = \infty.$$

Пример 7.

$$\lim_{x \rightarrow 0} x^{\sin x} = \lim_{x \rightarrow 0} e^{\sin x \ln x} = e^{\lim_{x \rightarrow 0} [\sin x \cdot \ln x]};$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \sin x \cdot \ln x = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln x}{\frac{1}{\sin x}} = 0,$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} x^{\sin x} = e^0 = 1.$$

Пример 8.

$$\lim_{x \rightarrow \infty} (1+x)^{\frac{1}{x}} = 1.$$

Пример 9.

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left( 1 + \frac{1}{x} \right)^{x^2} = \infty.$$

## 2.12. Формула Тейлора и ее приложения

Формула Тейлора. Применение формулы Тейлора к вычислению значений функции. Разложение функций по формуле Тейлора.

### 2.12.1. Формула Тейлора

Пусть функция  $f(x)$  имеет все производные, до порядка  $n+1$  включительно, на некотором промежутке, содержащем точку  $a$ . Найдем многочлен  $P_n(x)$  степени не выше  $n$ , обладающий свойством:

$$P_n(a) = f(a), \quad P'_n(a) = f'(a), \quad P''_n(a) = f''(a), \quad \dots, \quad P^{(n)}_n(a) = f^{(n)}(a). \quad (1)$$

Естественно ожидать, что такой многочлен будет в некотором смысле близок к  $f(x)$ .

Будем искать  $P_n(x)$  в виде

$$P_n(x) = c_0 + c_1(x-a) + c_2(x-a)^2 + \dots + c_n(x-a)^n, \quad (2)$$

где коэффициенты  $c_i$  подлежат определению так, чтобы выполнялись условия (1). Найдем производные  $P'_n(x)$ :

$$P'_n(x) = c_1 - 2c_2(x-a) + 3c_3(x-a)^2 + \dots + nc_n(x-a)^{n-1},$$

$$P''_n(x) = 2c_2 + 3 \cdot 2c_3(x-a) + \dots + n(n-1)c_n(x-a)^{n-2},$$

$$\dots \dots \dots$$

$$P^{(n)}_n(x) = n(n-1)(n-2) \dots \cdot 2 \cdot 1 \cdot c_n.$$

И запишем уравнения для определения коэффициентов многочлена:

$$P_n(a) = c_0 = f(a) \qquad c_0 = f(a),$$

$$P'_n(a) = c_1 = f'(a) \qquad c_1 = f'(a),$$

$$P''_n(a) = 2c_2 = f''(a) \qquad \Rightarrow \quad c_2 = \frac{f''(a)}{2!},$$

$$\dots \dots \dots$$

$$P^{(n)}_n(a) = n(n-1) \dots \cdot 2 \cdot 1 c_n = f^{(n)}(a) \qquad c_n = \frac{f^{(n)}(a)}{n!}.$$

Таким образом,

$$P_n(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \frac{f'''(a)}{3!}(x-a)^3 + \dots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n.$$

Обозначим через  $R_n(x)$  разность  $f(x)$  и  $P_n(x)$ :  $R_n(x) = f(x) - P_n(x)$ , рис. 2.21. Тогда  $f(x) = P_n(x) + R_n(x)$  или

$$f(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n + R_n(x).$$

$R_n(x)$  называется остаточным членом. Для тех  $x$ , для которых остаточный член мал, многочлен  $P_n(x)$  дает хорошее приближение функции. Погрешность от замены функции  $f(x)$  многочленом  $P_n(x)$  в точке  $x$  равна значению  $R_n(x)$  в этой точке.

Попытаемся связать  $R_n(x)$  и  $f(x)$ . Будем искать  $R_n(x)$  в виде

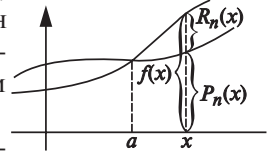


Рис. 2.21

$$R_n(x) = \frac{(x-a)^{n+1}}{(n+1)!}Q,$$

где  $Q$  — некоторая величина, которую при заданной структуре остаточного члена нужно определить так, чтобы остаточный член  $R_n(x)$  давал верхнюю оценку погрешности при замене данной функции  $f(x)$  полученным выше многочленом. Тогда при заданной степени многочлена будет известна степень точности приближенного вычисления функции  $f(x)$  на отрезке  $[a, x]$ .

При заданной форме остаточного члена формула (3) примет вид

$$f(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n + \frac{(x-a)^{n+1}}{(n+1)!}Q.$$

Для определения переменной величины  $Q$  введем вспомогательную функцию

$$F(t) = f(x) - f(t) - f'(t)(x-t) - \dots - \frac{f^{(n)}(t)}{n!}(x-t)^n - \frac{(x-t)^{n+1}}{(n+1)!}Q, \quad (4)$$

которая является функцией погрешностей формулы Тейлора, дополненной остаточным членом и записанной для некоторой точки  $t$  на отрезке  $[a, x]$ . Как следует из формулы (4), на концах данного отрезка  $F(a)=0$ ,  $F(x)=0$ . Следовательно, согласно теореме Ролля, на данном отрезке существует точка  $\xi$ , в которой производная  $F'(\xi)=0$ . Поэтому неизвестную пока величину  $Q$  определим из условия равенства нулю этой производной в некоторой промежуточной точке  $\xi$ .

Запишем выражение для производной:

$$F'(t) = -f'(t) - f''(t)(x-t) + f'(t) - \frac{f'''(t)}{2!}(x-t)^2 + f''(t)(x-t) - \dots \\ - \frac{f^{(n+1)}(t)}{n!}(x-t)^n + \frac{f^{(n)}(t)}{(n-1)!}(x-t)^{n-1} + \frac{(x-t)^n}{n!}Q.$$

После уничтожения подобных членов получим

$$F'(t) = -\frac{f^{(n+1)}(t)}{n!}(x-t)^n + \frac{(x-t)^n}{n!}Q. \quad (5)$$

$$F'(\xi) = -\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{n!}(x-\xi)^n + \frac{(x-\xi)^n}{n!}Q = 0.$$

Следовательно,  $Q = f^{(n+1)}(\xi)$ . Тогда

$$R_n(x) = \frac{(x-a)^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+1)}(\xi) = \frac{(x-a)^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+1)}[a + \theta(x-a)],$$

где  $0 < \theta < 1$ ,  $a \leq \xi \leq x$ .

Говорят, что остаточный член записан в форме Лагранжа. Формула

$$f(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n + \\ + \frac{(x-a)^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+1)}(\xi),$$

где  $a \leq \xi \leq x$ , называется формулой Тейлора для функции  $f(x)$  с остаточным членом в форме Лагранжа. Если  $x = 0$ , то формула приобретает вид

$$f(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n + \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}x^{n+1},$$

где  $0 \leq \xi \leq x$ . Это формула Маклорена.

### 2.12.2. Применение формулы Тейлора к вычислению значений функции

1. Разложим по формуле Тейлора функцию  $e^x$ :

$$\begin{array}{ll} f(x) = e^x, & f(0) = 1, \\ f'(x) = e^x, & f'(0) = 1, \\ \dots & \dots \\ f^{(n)}(x) = e^x, & f^{(n)}(0) = 1, \end{array}$$

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots + \frac{x^n}{n!} + \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} e^\xi,$$

где  $0 \leq \xi \leq x$ . Пусть  $|x| \leq 1$ . Тогда при  $n = 8$  получим оценку остаточного члена:

$$|R_n(x)| = \left| \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} e^\xi \right| \leq \frac{3}{9!} < 10^{-5}.$$

Поэтому, если взять первые 8 членов разложения  $e^x$  при  $|x| \leq 1$ , то мы получим число  $e^x$  с точностью до 5 знаков после запятой.

Например,

$$e = 1 + 1 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} + \frac{1}{5!} + \frac{1}{6!} + \frac{1}{7!} + \frac{1}{8!}.$$

Проводя вычисления с 6 знаками после запятой, а затем округляя результат, получим:  $e \approx 2,71828$ .

Можно показать, что  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} e^x = 0$  для любых фиксированных  $x$ .

Поэтому для любого  $x$  мы можем вычислить  $e^x$  с любой степенью точности, если взять достаточно большое число членов.

### 2.12.3. Разложение функций по формуле Тейлора

#### Разложение функции $\sin x$ .

Для функций  $f(x) = \sin x$  и  $f(x) = \cos x$  путем последовательного дифференцирования можно вывести общее выражение для  $n$ -ой производной:  $f^{(n)}(x) = f\left(x + n\frac{\pi}{2}\right)$ . Действительно,

$$\begin{aligned} f(x) &= \sin x, & f(0) &= 0, \\ f'(x) &= \cos x = \sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right), & f'(0) &= 1, \\ f''(x) &= -\sin x = \sin\left(x + 2\frac{\pi}{2}\right), & f''(0) &= 0, \\ f'''(x) &= -\cos x = \sin\left(x + 3\frac{\pi}{2}\right), & f'''(0) &= -1, \\ &\dots\dots\dots & & \dots\dots\dots \\ f^{(n)}(x) &= \sin\left(x + n\frac{\pi}{2}\right), & f^{(n)}(0) &= \sin\left(n\frac{\pi}{2}\right), \\ f^{(n+1)}(x) &= \sin\left(x + (n+1)\frac{\pi}{2}\right), & f^{(n+1)}(\xi) &= \sin\left(\xi + (n+1)\frac{\pi}{2}\right); \end{aligned}$$

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \dots + \frac{x^n}{n!} \sin n \frac{\pi}{2} + \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} \sin \left[ \xi + (n+1) \frac{\pi}{2} \right],$$

где  $0 \leq \xi \leq x$ . Очевидно, что  $\sin \left[ \xi + (n+1) \frac{\pi}{2} \right] \leq 1 \quad \forall x$ . Можно показать,

что  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} = 0$  при любом фиксированном  $x$ . Поэтому полученная формула позволяет для любого  $x$  вычислить  $\sin x$  с любой степенью точности.

Вычислим, например,  $\sin 20^\circ$ , ограничившись 2 членами разложения:

$$\sin 20^\circ \approx \frac{\pi}{9} - \frac{\pi^3}{9^3 \cdot 3!} \approx 0,342.$$

Оценим ошибку:

$$|R_3| = \left| \left( \frac{\pi}{9} \right)^4 \frac{1}{4!} \sin(\xi + 2\pi) \right| \leq \left( \frac{\pi}{9} \right)^4 \frac{1}{4!} \approx 0,00062 < 0,001.$$

Таким образом,  $\sin 20^\circ = 0,342$  с точностью до 0,001.

### Разложение функции $y = \cos x$ .

$$\begin{aligned} f(x) &= \cos x, & f(0) &= 1, \\ f'(x) &= -\sin x = \cos \left( x + \frac{\pi}{2} \right), & f'(0) &= 0, \\ f''(x) &= -\cos x = \cos \left( x + 2 \frac{\pi}{2} \right), & f''(0) &= -1, \\ &\dots\dots\dots & & \dots\dots\dots \\ f^{(n)}(x) &= \cos \left( x + n \frac{\pi}{2} \right), & f^{(n)}(0) &= \cos n \frac{\pi}{2}, \\ f^{(n+1)}(x) &= \cos \left[ x + (n+1) \frac{\pi}{2} \right], & f^{(n+1)}(\xi) &= \cos \left[ \xi + (n+1) \frac{\pi}{2} \right], \\ \cos x &= 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \dots + \frac{x^n}{n!} \cos n \frac{\pi}{2} + \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} \cos \left[ \xi + (n+1) \frac{\pi}{2} \right]. \end{aligned}$$

Вновь  $R_n(x) \rightarrow 0$  при  $n \rightarrow \infty$ .



## 2.13. Исследование функций с помощью производных.

### Возрастание и убывание функций. Исследование функций на экстремум

Условия возрастания и убывания функций. Точки экстремума. Необходимые условия экстремума. Достаточный признак экстремума. Достаточный признак существования экстремума, основанный на знаке второй производной.

#### 2.13.1. Условия возрастания и убывания функций

**ОПРЕДЕЛЕНИЕ.** Функция  $f(x)$  называется возрастающей (убывающей) на  $[a, b]$  (на  $(a, b)$ ), если для  $\forall x_2 > x_1$  на этом отрезке (интервале) имеет место неравенство  $f(x_2) > f(x_1)$  ( $f(x_2) < f(x_1)$ ).

**Теорема.** 1) если функция  $f(x)$  возрастает на отрезке  $[a, b]$  и дифференцируема на нем, то  $f'(x) \geq 0$  для  $\forall x \in [a, b]$ ;

2) если  $f(x)$  непрерывна на  $[a, b]$  и дифференцируема на  $(a, b)$ , и во всех точках этого промежутка выполнено неравенство  $f'(x) > 0$ , то функция  $f(x)$  возрастает на  $[a, b]$ .

*Доказательство.* 1. Пусть  $f(x)$  возрастает. Тогда при  $\Delta x > 0$   $f(x + \Delta x) > f(x)$  и при  $\Delta x < 0$   $f(x + \Delta x) < f(x)$ . В обоих случаях

$$\frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} > 0.$$

Поэтому

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} \geq 0.$$

2. Пусть  $f'(x) > 0$  на  $(a, b)$ . Выберем два любых значения  $x_1$  и  $x_2$ . По теореме Лагранжа  $f(x_2) - f(x_1) = f'(c)(x_2 - x_1) > 0$ , так как  $f'(c) > 0$ . Таким образом,  $f(x_2) > f(x_1) \Rightarrow f(x)$  возрастает на  $[a, b]$ .

Аналогично доказывается следующая теорема.

**Теорема 2.** 1) если  $f(x)$  убывает на  $[a, b]$  и дифференцируема на нем, то  $f'(x) \leq 0$ ;

2) если непрерывная на  $[a, b]$  функция  $f(x)$  дифференцируема на  $(a, b)$  и  $f'(x) < 0$ , то  $f(x)$  убывает на  $[a, b]$ .

**Геометрическая иллюстрация.**

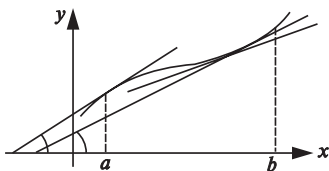


Рис. 2.22

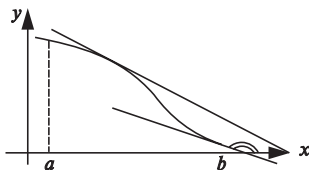


Рис. 2.23

Если  $f(x)$  возрастает, то угол, составленный касательной с положительным направлением оси  $OX$ , — острый (в некоторых точках касательная может быть параллельна оси  $OX$ ).

### 2.13.2. Точки экстремума. Необходимые условия экстремума

**ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1.** Функция  $y = f(x)$  имеет в точке  $x = x_1$  локальный максимум, если существует такая окрестность точки  $x_1$ , что  $f(x) < f(x_1)$  для любого  $x$  из этой окрестности.

**ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2.** Функция  $f(x)$  имеет в точке  $x = x_2$  минимум, если существует такая окрестность точки  $x_2$ , что  $f(x) > f(x_2)$  для всех точек  $x$  из этой окрестности.

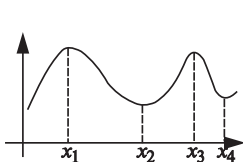


Рис. 2.24

$x_1, x_3$  — точки максимума,

$x_2, x_4$  — точки минимума.

Максимумы и минимумы — точки экстремума.

З а м е ч а н и я. 1. Функция, определенная на отрезке  $[a, b]$ , может достигать  $\max$  и  $\min$  только внутри этого отрезка.

2. Если  $f(x)$  имеет  $\max$  в точке  $x_1$ , это не значит, что она в этой точке имеет наибольшее значение во всей области определения, а означает только, что ее значение в точке  $x_1$  больше значений во всех точках, достаточно близких к точке  $x_1$ .

### Необходимые условия экстремума.

**Теорема.** Если дифференцируемая в точке  $x_1$  функция имеет в этой точке  $\max$  (или  $\min$ ), то  $f'(x_1) = 0$ .

*Доказательство.* Пусть в точке  $x_1$   $f(x)$  имеет  $\max$ . Тогда, по определению, существует такая окрестность точки  $x_1$ , что  $f(x) < f(x_1)$  для любого  $x$  из нее. Пусть  $\Delta x$  достаточно мало, тогда  $f(x_1 + \Delta x) < f(x_1)$  при  $\Delta x$  любого знака.

$$\text{При } \Delta x > 0 \quad \frac{f(x_1 + \Delta x) - f(x_1)}{\Delta x} > 0.$$

$$\text{При } \Delta x < 0 \quad \frac{f(x_1 + \Delta x) - f(x_1)}{\Delta x} < 0.$$

$$\text{Следовательно, } \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x_1 + \Delta x) - f(x_1)}{\Delta x} = f'(x_1) \leq 0 \Rightarrow f'(x_1) = 0.$$

Аналогично доказывается утверждение для минимума.

Однако  $f(x)$  может иметь экстремум и в тех точках, где она не дифференцируема.

$$y = 1 - \sqrt[3]{x^2}, \quad y' = -\frac{2}{3\sqrt[3]{x}}.$$

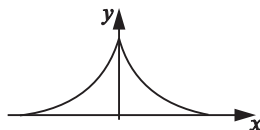


Рис. 2.25

При  $x = 0$  —  $\max$ , но  $f'(x)$  в этой точке не существует (рис. 2.25).

Итак, если функция  $y = f(x)$  в некоторой точке  $x$  имеет экстремум, то производная  $f'(x)$  в этой точке равна 0 или не существует.

Точки, в которых производная равна нулю или не существует, называются критическими точками первого рода.

**З а м е ч а н и е.** Равенство производной нулю есть только необходимое условие экстремума, но не достаточное. Например, для функции  $y = x^3$  в точке 0,  $y' = 3x^2$  обращается в 0, но ясно, что эта функция не имеет экстремума в точке 0.

### 2.13.3. Достаточный признак экстремума

**Теорема 1.** Если непрерывная функция  $y = f(x)$  имеет производную во всех точках некоторого интервала, содержащего критическую точку (за исключением, может быть, самой точки) и если при переходе аргумента через эту точку слева направо производная  $f'(x)$  меняет знак с  $(-)$  на  $(+)$ , то это точка минимума, если с  $(+)$  на  $(-)$  — точка максимума.

**Доказательство.** Пусть для определенности производная меняет знак с  $(+)$  на  $(-)$ . Тогда слева от  $x = x_0$  производная положительна, а справа — отрицательна. Следовательно, существует такое число  $h > 0$ , что на  $[x_0 - h, x_0]$  возрастает, а на  $[x_0, x_0 + h]$  убывает. Поэтому значения функции в точке  $x_0$  больше, чем ее значения во всех остальных точках отрезка  $[x_0 - h, x_0 + h]$ , а это и означает, что в точке  $x = x_0$   $f(x)$  имеет максимум.

Аналогично доказательство для случая минимума.

**З а м е ч а н и е.** Если при переходе через точку  $x_0$  производная не меняет знака, то в этой точке функция не имеет ни минимума, ни максимума.

**П р и м е р.** Исследовать на экстремум функцию  $y = \frac{x^2 - 2x + 2}{x - 1}$ .

### 2.13.4. Достаточный признак существования экстремума, основанный на знаке 2-й производной

**Теорема 2.** Пусть в точке  $x = x_0$  первая производная функции обращается в нуль. Если в этой точке существует и отлична от 0 вторая производная  $f''(x_0)$ , то в точке  $x = x_0$  функция  $f(x)$  имеет  $\max$ , если  $f''(x_0) < 0$ , и  $\min$ , если  $f''(x_0) > 0$ .

*Доказательство.* Пусть  $f'(x_0) = 0$ ,  $f''(x_0) < 0$ . Тогда, по определению,

$$f''(x_0) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f'(x_0 + \Delta x) - f'(x_0)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f'(x_0 + \Delta x)}{\Delta x}.$$

Так как  $f''(x_0) < 0$ , то и  $\frac{f'(x_0 + \Delta x)}{\Delta x} < 0$  при достаточно малых  $\Delta x$ . При  $\Delta x > 0$   $f'(x_0 + \Delta x) < 0$ , а при  $\Delta x < 0$   $f'(x_0 + \Delta x) > 0$ . Следовательно, при переходе через  $x = x_0$   $f'(x)$  меняет знак с (+) на (−). Следовательно, по теореме 1  $f(x)$  имеет максимум в точке  $x = x_0$ .

*Замечание.* Если  $f'(x_0) = 0$  и  $f''(x_0) = 0$ , то ничего сказать нельзя. В этом случае приходится обращаться к первому достаточному признаку.

## 2.14. Наибольшее и наименьшее значение функции на отрезке. Выпуклость, вогнутость. Точки перегиба

Наибольшее и наименьшее значение функции на отрезке. Выпуклость и вогнутость функции. Точки перегиба. Необходимое условие существования точек перегиба. Достаточное условие.

### 2.14.1. Наибольшее и наименьшее значение функции на отрезке

Пусть функция  $f(x)$  непрерывна на отрезке  $[a, b]$ . Тогда эта функция достигает своего наибольшего и наименьшего значения на  $[a, b]$ . Очевидно, она может достигать наибольшего и наименьшего значения либо в точках экстремума, либо на концах отрезка  $[a, b]$ . Отсюда получаем правило отыскания наибольшего и наименьшего значений.

1. Отыскиваем критические точки  $f(x)$  на  $(a, b)$ .
2. Вычисляем значения  $f(x)$  на концах  $[a, b]$  и в критических точках.
3. Выбираем из всех значений наибольшее и наименьшее.

**Задача.** Открытый жестяной бак с квадратным основанием должен вмещать  $V$  литров. При каких размерах бака на его изготовление потребуется наименьшее количество жести?

**Решение.** Пусть  $x$  — сторона основания бака ( $\infty > x > 0$ ). Тогда  $\frac{V}{x^2}$  — высота бака. Поверхность бака

$$S = x^2 + 4x \frac{V}{x^2} = x^2 + \frac{4V}{x};$$

$$S' = 2x - \frac{4V}{x^2}; \quad S' = 0 \Rightarrow x = \sqrt[3]{2V};$$

$$S'' = 2 + \frac{8V}{x^3} > 0 \quad \text{при} \quad x = \sqrt[3]{2V}.$$

Следовательно, в точке  $x = \sqrt[3]{2V}$   $S$  имеет наименьшее значение. Найдем отношение высоты бака  $H$  к стороне основания:

$$H = \frac{V}{x^2}; \quad \frac{H}{x} = \frac{V}{x^3} = \frac{V}{2V} = \frac{1}{2}.$$

### 2.14.2. Выпуклость и вогнутость графика функции

График дифференцируемой на  $(a, b)$  функции называется выпуклым на  $(a, b)$ , если он расположен ниже любой своей касательной на этом интервале (рис. 2.26), и вогнутым, если он расположен выше любой своей касательной (рис. 2.27).

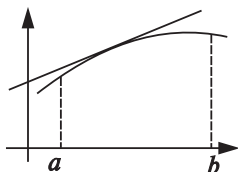


Рис. 2.26

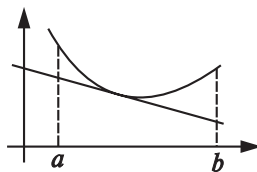


Рис. 2.27

График одной и той же функции в одних интервалах может быть выпуклым, а в других — вогнутым (рис. 2.28).

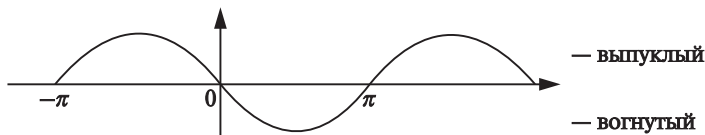


Рис. 2.28

**Теорема 1.** Пусть функция  $y = f(x)$  имеет вторую производную  $f''(x)$  во всех точках  $(a, b)$ . Тогда если  $f''(x) > 0 \quad \forall x \in (a, b)$ , то график функции вогнут, а если  $f''(x) < 0$ , то график выпуклый.

*Доказательство.* Пусть  $f''(x) < 0$ . Докажем, что график функции  $f(x)$  выпуклый. Пусть  $x_0$  — произвольная точка  $\in (a, b)$ . Напишем уравнение касательной к графику функции:

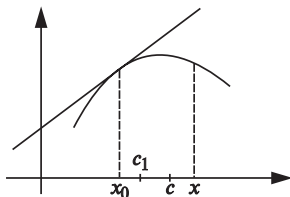


Рис. 2.29

$$y - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0) \Rightarrow$$

$$y = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0).$$

Найдем разность абсцисс графика функции и касательной в произвольной точке  $x$ .

$$Y - y = f(x_0) - f(x) + f'(x_0)(x - x_0).$$

По теореме Лагранжа  $f(x_0) - f(x) = f'(x)(x_0 - x)$ , поэтому

$$Y - y = f'(x)(x_0 - x) + f'(x_0)(x - x_0) = (x - x_0)[f'(x_0) - f'(x)],$$

где  $c$  заключено между  $x_0$  и  $x$ . Разность  $f'(x_0) - f'(x)$  вновь преобразуем по формуле Лагранжа:

$$f'(x_0) - f'(c) = f''(c_1)(x_0 - c),$$

где  $x_0 \leq c_1 \leq c$  и

$$Y - y = f''(c_1)(x - x_0)(x_0 - c).$$

Очевидно,  $x - x_0$  и  $x_0 - c$  имеют разные знаки, поэтому  $(x - x_0)(x_0 - c) < 0$ ,  $f''(c_1) < 0$  по условию. Следовательно,

$$Y - y > 0 \Rightarrow Y > y.$$

Таким образом, ордината касательной больше ординаты графика в любой точке  $x$ . По определению график функции является выпуклым на  $(a, b)$ .

Аналогично доказывается теорема для случая  $f''(x) > 0$ .

### 2.14.3. Точки перегиба. Необходимое условие существования точек перегиба. Достаточное условие

**ОПРЕДЕЛЕНИЕ.** Точка графика функции, отделяющая его выпуклую часть от вогнутой, называется точкой перегиба.

**Теорема 2** (необходимое условие существования точки перегиба). Если  $x = x_0$  — точка перегиба графика функции, то  $f''(x_0) = 0$ .

*Доказательство.* В предположении противного  $f''(x_0) \neq 0$ . Пусть например,  $f''(x_0) > 0$ ; в некоторой окрестности точки  $f''(x_0) > 0$ , но тогда по теореме 1 график  $f(x)$  вогнут в этой окрестности. Последнее противоречит предположению о том, что  $x_0$  — абсцисса точки перегиба.

**Теорема 3** (достаточное условие существования точки перегиба). *Если вторая производная  $f''(x)$  непрерывной функции меняет знак при переходе через точку  $x = x_0$ , то точка с абсциссой  $x = x_0$  — точка перегиба графика функции.*

*Доказательство.* Пусть  $f''(x_0) < 0$  при  $x < x_0$  и  $f''(x_0) > 0$  при  $x > x_0$ , тогда слева от  $x_0$  график выпуклый, а справа — вогнутый. Следовательно, точка с координатами  $(x_0, f(x_0))$  — точка перегиба.

Так же, как и в случае исследования на экстремум, перегиб может быть и в тех точках, где вторая производная не существует.

Таким образом, точки перегиба (их абсциссы) нужно искать среди тех точек, в которых производная  $y'' = f''(x)$  равна нулю или не существует. Такие точки называются критическими точками второго рода.

## 2.15. Асимптоты. План исследования функций и построения графиков

Асимптоты графика функции. Общая схема исследования функции и построения ее графика. Дифференциал длины дуги.

### 2.15.1. Асимптоты графика функции

Рассмотрим графики функций, ветви которых удаляются в бесконечность в вертикальном, наклонном или в горизонтальном направлении. Характерным для многих таких функций является то, что точки графика при удалении на бесконечность асимптотически (неограниченно) приближаются к некоторым прямолинейным границам, которые называются асимптотами.

Асимптотой графика функции называется прямая линия, обладающая тем свойством, что расстояние от переменной точки на графике функции до этой прямой стремится к 0 при неограниченном удалении точки в бесконечность.

**Вертикальные асимптоты.** Пусть при  $x \rightarrow x_0 - 0$  функция неограниченно возрастает по абсолютной величине, т. е. пусть  $\lim_{x \rightarrow x_0 - 0} |f(x)| = \infty$  или  $\lim_{x \rightarrow x_0 + 0} |f(x)| = \infty$ . Тогда прямая  $x = x_0$  по определению является асимптотой.

Итак, для отыскания вертикальной асимптоты графика функции  $y = f(x)$  нужно найти такую точку  $x_0$ , в которой  $f(x)$  терпит бесконечный разрыв. Тогда  $x = x_0$  — вертикальная асимптота.

Пример 1.  $f(x) = x^2 + \frac{1}{x+2}$ .

$$\lim_{x \rightarrow -2-0} f(x) = -\infty;$$

$$\lim_{x \rightarrow -2+0} f(x) = +\infty.$$

Таким образом, вертикальная прямая с уравнением  $x = -2$  — вертикальная асимптота.

Пример 2.  $y = e^{\frac{1}{x-1}}$ .

$$\lim_{x \rightarrow 1-0} e^{\frac{1}{x-1}} = \langle e^{-\infty} \rangle = 0,$$

$$\lim_{x \rightarrow 1+0} e^{\frac{1}{x-1}} = \langle e^{\infty} \rangle = \infty.$$

Здесь  $x = 1$  — вертикальная асимптота.

**Наклонные асимптоты.** Пусть кривая  $y = f(x)$  имеет наклонную асимптоту  $y = kx + b$ . Найдём  $k$  и  $b$ .

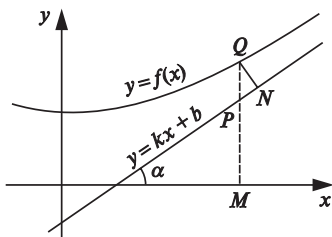


Рис. 2.30

Рассмотрим случай, когда  $x \rightarrow +\infty$ . По определению асимптоты  $NQ \rightarrow 0$  по мере  $x \rightarrow \infty$ . Поэтому  $PQ = \frac{NQ}{\cos \alpha}$ .

Но  $PQ = f(x) - kx - b$ .

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - kx - b] =$$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} x \left[ \frac{f(x)}{x} - k - \frac{b}{x} \right] = 0.$$

Так как первый сомножитель стремится к  $\infty$ , то  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left[ \frac{f(x)}{x} - k - \frac{b}{x} \right] = 0$ .

Но  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{b}{x} = 0 \Rightarrow \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = k$ . Зная  $k$ , можем найти  $b$  из равенства

$$0 = \lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - kx - b), \text{ т. е. } b = \lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - kx].$$



Аналогичные формулы имеют место и для  $x \rightarrow -\infty$ . Отметим, что при  $x \rightarrow \infty$  и  $x \rightarrow -\infty$   $k$  и  $b$  могут быть разными. Соответственно различают левую и правую наклонные асимптоты. Если хотя бы один из пределов  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x}$  или  $\lim_{x \rightarrow \infty} (f(x) - kx)$  не существует, то кривая асимптоты не имеет.

Примеры.

$$1. y = \frac{x^2 + x - 1}{2x + 1}.$$

$$k_1 = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2 + x - 1}{(2x + 1)x} = \frac{1}{2};$$

$$k_2 = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x} = \frac{1}{2}.$$

$$b_1 = b_2 = \lim_{x \rightarrow \infty} \left( f(x) - \frac{1}{2}x \right) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x - 2}{2(2x + 1)} = \frac{1}{4}.$$

$$y = \frac{1}{2}x + \frac{1}{4} \text{ — левая и правая асимптота.}$$

$$2. y = xe^{-x}.$$

$$k_1 = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{xe^{-x}}{x} = 0, \quad b_1 = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x}{e^x} = 0 \Rightarrow$$

$y = 0$  — горизонтальная асимптота.

### 2.15.2. Общая схема исследования функции и построения ее графика

1. Нахождение области определения функции, интервалов непрерывности и точек разрыва.
2. Нахождение асимптот графика функции.
3. Нахождение интервалов монотонности и экстремумов.
4. Нахождение интервалов выпуклости, вогнутости и точек перегиба.
5. Исследование функции на четность, периодичность.
6. Точки пересечения с осями координат.
7. Построение графика.

## 2.15.3. Дифференциал длины дуги

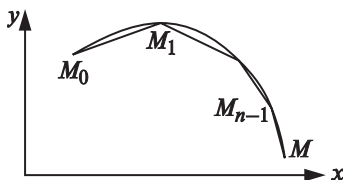


Рис. 2.31

Пусть дуга кривой  $M_0M$  есть график функции  $y = f(x)$ , определенной на  $(a, b)$ . Определим длину дуги кривой. Для этого разобьем кривую точками  $M_0, M_1, M_2, \dots, M_{n-1}, M$  на  $n$  частей. Соединив точки между собой, получим ломаную линию, вписанную в дугу  $M_0M$ . Обозначим ее длину через  $P_n$ .

**ОПРЕДЕЛЕНИЕ.** Длиной  $S$  кривой  $M_0M$  называется предел, к которому стремится длина ломаной  $P_n$  при неограниченном увеличении числа ее звеньев и при стремлении наибольшего звена к нулю, если такой предел существует и не зависит от способа выбора вершин ломаной  $M_0, M_1, \dots, M_{n-1}, M$ .

Можно доказать следующие **утверждения**.

1. Если на  $[a, b]$   $f(x)$  и  $f'(x)$  непрерывны, то дуга кривой  $y = f(x)$ , заключенная между точками  $[a, f(a)]$  и  $[b, f(b)]$ , имеет вполне определенную длину.

2. При перечисленных условиях на  $f(x)$  отношение длины любой дуги кривой к длине стягивающей ее хорды стремится к 1 при стремлении длины хорды к 0:

$$\lim_{M_0M \rightarrow 0} \frac{\overset{\sim}{M_0M}}{M_0M} = 1.$$

На основе этих двух теорем можно вывести формулу для дифференциала длины дуги кривой.

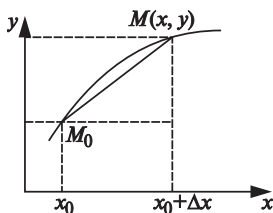


Рис. 2.32

Пусть кривая на плоскости задана уравнением  $y = f(x)$ , где  $f(x)$  — дифференцируемая функция,  $M_0(x_0, y_0)$  — фиксированная точка на кривой.

Обозначим через  $S$  длину дуги  $\overset{\sim}{M_0M}$ . Тогда  $S = S(x)$ . Найдем  $S'(x)$ . Пусть  $x_0$  получило приращение  $\Delta x$ . Имеем:  $\overset{\sim}{M_0M} = \sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2}$ ;  $\Delta S$  — длина дуги  $\overset{\sim}{M_0M}$ ,

$$\frac{\overset{\sim}{M_0M}}{\Delta S} = \frac{\sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2}}{\Delta S} = \frac{\sqrt{1 + (\Delta y / \Delta x)^2}}{\Delta S / \Delta x}. \quad (*)$$

Перейдем к пределу в обеих частях равенства (\*) при  $\Delta x \rightarrow 0$  и воспользуемся тем, что  $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \overline{M_0 M} = 0$  и  $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\overline{M_0 M}}{\Delta S} = 1$ ,

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{dy}{dx}; \quad \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta S}{\Delta x} = \frac{dS}{dx}.$$

В результате получим

$$1 = \frac{\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \sqrt{1 + \left(\frac{\Delta y}{\Delta x}\right)^2}}{\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta S}{\Delta x}} = \frac{\sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}}{\frac{dS}{dx}}.$$

Таким образом,  $\frac{dS}{dx} = \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}$ ;  $dS = \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2} dx = \sqrt{dx^2 + dy^2}$ .

Мы получили выражение для дифференциала длины дуги в случае, когда кривая задана в виде  $y = f(x)$ . Однако эта формула остается справедливой и для случая параметрического задания кривой:

$$\begin{aligned} y &= y(t), & x &= x(t); \\ dx &= x'(t)dt; & dy &= y'(t)dt; \\ dS &= \sqrt{[x'(t)]^2 + [y'(t)]^2} dt. \end{aligned}$$

Если кривая задана в полярных координатах уравнением  $\rho = \rho(\varphi)$ , то рассматривая уравнения  $x = \rho \cos \varphi$ ,  $y = \rho \sin \varphi$  как параметрические с параметром  $\varphi$ , получим

$$\begin{aligned} \frac{dx}{d\varphi} &= \frac{d\rho}{d\varphi} \cos \varphi - \rho \sin \varphi; \\ \frac{dy}{d\varphi} &= \frac{d\rho}{d\varphi} \sin \varphi + \rho \cos \varphi; \\ \left(\frac{dx}{d\varphi}\right)^2 + \left(\frac{dy}{d\varphi}\right)^2 &= \left(\frac{d\rho}{d\varphi}\right)^2 + \rho^2; \\ dS &= \sqrt{\rho^2 + \left(\frac{d\rho}{d\varphi}\right)^2} d\varphi. \end{aligned}$$

## 2.16. Кривизна плоской кривой

Кривизна. Вычисление кривизны кривой. Радиус кривизны. Окружность кривизны. Центр кривизны. Эволюта и эвольвента.

### 2.16.1. Кривизна

Одним из элементов, характеризующих форму кривой, является степень ее искривленности, изогнутости.

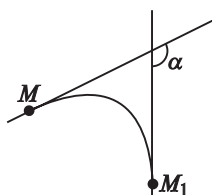


Рис. 2.33

Пусть кривая имеет в каждой точке касательную. Проведем в двух точках кривой касательные к ней и обозначим через  $\alpha$  угол поворота касательной при переходе от  $M$  к  $M_1$ , угол считаем положительным. Этот угол называется углом смежности.

Средней кривизной дуги  $\overset{\frown}{MM_1}$  называется отношение угла смежности  $\alpha$  к длине дуги:

$$K_{\text{ср}} = \frac{\alpha}{\text{дл. } \overset{\frown}{MM_1}}.$$

Для некоторых кривых средняя кривизна есть величина постоянная, например, для окружности радиуса  $R$   $K_{\text{ср}} = \frac{\alpha}{R\alpha} = \frac{1}{R}$ . Однако в общем случае средняя кривизна может быть разной для разных участков дуги (чем больше изогнута кривая, тем больше кривизна).

**ОПРЕДЕЛЕНИЕ.** Кривизной дуги в точке  $M$  называется предел средней кривизны дуги  $\overset{\frown}{MM_1}$  при условии, что точка  $M_1$  неограниченно приближается по кривой к точке  $M$ :

$$K = \lim_{M_1 \rightarrow M} K_{\text{ср}}.$$

В частности, кривизна окружности радиуса  $R$  в любой точке равна  $\frac{1}{R}$ . Легко видеть, что кривизна прямой равна 0.

### 2.16.2. Вычисление кривизны кривой

Пусть кривая задана уравнением  $y = f(x)$ , где  $f(x)$  — дважды дифференцируемая функция,  $M(x, y)$  — точка на кривой. Вычислим кривизну в этой точке. Проведем касательные к кривой в точках  $M(x, y)$

и  $M_1(x + \Delta x, y + \Delta y)$ .  $\varphi$  и  $\varphi + \Delta\varphi$  — углы наклона этих касательных,  $\Delta S$  — длина дуги  $MM_1$ .

По определению

$$K_{\text{ср}} = \frac{|\Delta\varphi|}{|\Delta S|} = \left| \frac{\Delta\varphi}{\Delta S} \right|,$$

так как  $|\Delta\varphi|$  — угол смежности. Тогда

$$K = \lim_{\Delta S \rightarrow 0} \left| \frac{\Delta\varphi}{\Delta S} \right|.$$

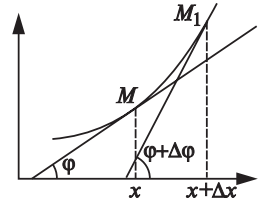


Рис. 2.34

Здесь следует также отметить, что  $\Delta\varphi$  — это угол поворота касательной при перемещении точки касания по дуге кривой на величину  $\Delta S$ . Поэтому можно дать и наглядно очевидное определение кривизны кривой следующим образом: *кривизна кривой есть угловая скорость вращения касательной при перемещении точки касания по кривой.*

Так как  $\varphi$  и  $S$  являются функциями от  $x$ , то

$$K = \left| \frac{d\varphi}{dS} \right| = \left| \frac{\frac{d\varphi}{dx}}{\frac{dS}{dx}} \right|.$$

Заметим теперь, что  $\operatorname{tg} \varphi = \frac{dy}{dx} \Rightarrow \varphi = \operatorname{arctg} \frac{dy}{dx}$ ;

$$\frac{d\varphi}{dx} = \frac{d\left(\operatorname{arctg} \frac{dy}{dx}\right)}{dx} = \frac{1}{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2} \cdot \left(\frac{dy}{dx}\right)' = \frac{\frac{d^2 y}{dx^2}}{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}.$$

$\frac{dS}{dx}$  было вычислено ранее:

$$\frac{dS}{dx} = \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}.$$

Итак,

$$\frac{d\varphi}{dS} = \frac{\frac{d^2 y}{dx^2}}{\left[1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right]^{\frac{3}{2}}}, \quad K = \frac{\left|\frac{d^2 y}{dx^2}\right|}{\left[1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right]^{\frac{3}{2}}} = \frac{|y''|}{[1 + (y')^2]^{\frac{3}{2}}}.$$

**Пример 1.** Найти кривизну параболы  $y^2 = 2px$  в точке с координатами  $(0, 0)$ .

**Вычисление кривизны кривой, заданной параметрически.** Если линия задана параметрически:  $x = x(t)$ ,  $y = y(t)$ , то

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y'_t}{x'_t}, \quad \frac{d^2y}{dx^2} = \frac{y''_t x'_t - x''_t y'_t}{(x'_t)^3};$$

$$K = \frac{|y''_t x'_t - x''_t y'_t|}{(x'_t)^3 \left( \sqrt{\frac{(x'_t)^2 + (y'_t)^2}{(x'_t)^2}} \right)^3} = \frac{|y''_t x'_t - x''_t y'_t|}{[(x'_t)^2 + (y'_t)^2]^{\frac{3}{2}}}.$$

**Пример 2.** Найти кривизну кривой  $y = t^3$ ,  $x = t^2$  в точке  $(1, 1)$ .

### 2.16.3. Радиус кривизны. Окружность кривизны. Центр кривизны

**ОПРЕДЕЛЕНИЕ.** Величина, обратная кривизне  $K$ , называется радиусом кривизны данной линии в рассматриваемой точке:

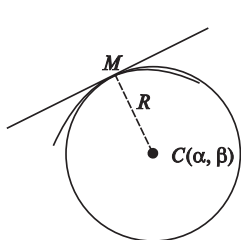


Рис. 2.35

$$R = \frac{1}{K} = \frac{[1 + (y')^2]^{\frac{3}{2}}}{|y''|}.$$

Построим в точке  $M$  нормаль к кривой, направленную в сторону вогнутости кривой и отложим на ней отрезок  $MC$ , равный радиусу кривизны  $R$  в точке  $M$ . Точка  $C$  называется центром кривизны, а окружность радиуса  $R$  с центром в этой точке — окружностью кривизны (рис. 2.35).

Из определения окружности кривизны вытекает, что в точке  $M$  линия и ее окружность кривизны имеют общую касательную.

Пусть линия задана уравнением  $y = f(x)$ . Запишем уравнение нормали к линии  $y = f(x)$  в точке  $(x, f(x))$ :

$$Y - y = -\frac{1}{y'}(X - x).$$

Точка  $C$  лежит на этой линии, поэтому

$$\beta - y = -\frac{1}{y'}(\alpha - x). \quad (1)$$

Кроме того,  $|CM| = R$ , поэтому  $\sqrt{(\alpha - x)^2 + (\beta - y)^2} = R$  или

$$(\alpha - x)^2 + (\beta - y)^2 = R^2. \quad (2)$$

Решая совместно систему уравнений (1) – (2), получим:

$$\begin{cases} (\beta - y)^2 = \frac{1}{(y')^2}(\alpha - x)^2 \\ (\beta - y)^2 = R^2 - (\alpha - x)^2 \end{cases} \Rightarrow (\alpha - x)^2 \left[ 1 + \frac{1}{(y')^2} \right] = R^2,$$

или

$$\alpha = x \pm \frac{y'}{\sqrt{1 + (y')^2}} R, \quad \beta = y \mp \frac{1}{\sqrt{1 + (y')^2}} R.$$

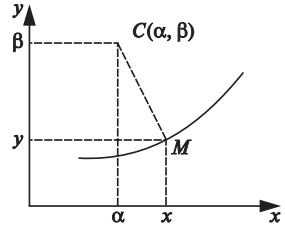


Рис. 2.36

Подставим вместо  $R$  его выражение

$$R = \frac{(1 + (y')^2)^{\frac{3}{2}}}{|y''|}.$$

Тогда  $\alpha = x \pm \frac{y'(1 + (y')^2)}{|y''|}; \quad \beta = y \mp \frac{(1 + (y')^2)}{|y''|}.$

Чтобы узнать, какие знаки брать в последних формулах, рассмотрим два случая.

1.  $y'' > 0$ ; тогда кривая вогнута, рис. 2.36,  $\beta > y$  и поэтому нужно брать нижние знаки. При этом  $|y''| = y''$ ,

$$\alpha = x - \frac{y'(1 + (y')^2)}{y''}; \quad \beta = y + \frac{(1 + (y')^2)}{y''}. \quad (3)$$

2.  $y'' < 0$ ; тогда нужно брать верхние знаки, но  $|y''| = -y''$ . Поэтому формулы (3) остаются справедливыми и в этом случае.

#### 2.16.4. Эволюта и эвольвента

Если точка  $M$  перемещается по данной кривой, то соответствующий ей центр кривизны также описывает некоторую кривую. Множество всех центров кривизны данной кривой называется ее эволютой. Сама линия по отношению к своей эволюте — эвольвента (развертка).

Уравнения (3) можно рассматривать как параметрические уравнения эволюты. Если из них исключить параметр  $x$ , то получим уравнение эволюты на плоскости  $\{\alpha, \beta\}$ .

**Пример.**  $y = \frac{x^2}{2}$ . Написать уравнение эволюты.

**Свойства эволюты и эвольвенты.**

1. Нормаль к эвольвенте является касательной к эволюте в соответствующей точке, рис. 2.37, где точки  $P_1, P_2, P_3$  находятся на эвольвенте, а точки  $M_1, M_2, M_3$  на эволюте и являются центрами кривизны эвольвенты в показанных точках  $P_1, P_2, P_3$ . В соответствии с данным свойством точки  $M_1, M_2, M_3$  являются точками касания к эволюте радиусов кривизны  $M_1P_1, M_2P_2, M_3P_3$ .

2. Если на некотором участке эвольвенты радиус кривизны меняется монотонно, то приращение радиуса кривизны на этом участке равно по абсолютной величине длине дуги соответствующего участка эволюты:  $M_1M_2 = M_2P_2 - M_1P_1$ .

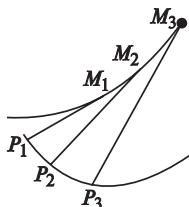


Рис. 2.37

При помощи этих свойств можно восстановить эвольвенту по эволюте. Представим себе, что на эволюте накинута гибкая нерастяжимая нить от конца эволюты  $M_3$  через точки  $M_2, M_1$ , до заданной точки  $P_1$  эвольвенты. Если к концу нити в точке  $P_1$  прикрепить карандаш и разворачивать нить вправо в натянутом состоянии, то карандаш опишет эвольвенту и пройдет через точки  $P_2, P_3$ .

## 2.17. Комплексные числа

**Комплексные числа.** Определение, геометрическое изображение. Тригонометрическая форма комплексного числа. Действия над комплексными числами. Показательная функция в комплексной области. Формула Эйлера. Некоторые сведения о многочленах.

Постепенное расширение области натуральных чисел до совокупности всех действительных чисел было вызвано необходимостью сделать выполнимыми во всех случаях без исключения известные операции деления, вычитания, установления соответствия между числами и отрезками и др. Аналогично этому, введение комплексных чисел обусловлено, например, требованием, чтобы всякому алгебраическому уравнению можно было приписать вполне определенное решение.

Чтобы получить решение квадратного уравнения  $x^2 + 1 = 0$ , необходимо ввести новые символы  $+i$  и  $-i$  при условии, что  $i^2 = -1$ .



Читатель, безусловно, имеет знакомство с комплексными числами. Тем не менее мы здесь обращаем внимание на одно особенно важное соотношение, связанное с геометрическим и тригонометрическим способами изображения комплексных чисел, и приводим необходимые сведения о корнях многочлена.

### 2.17.1. Комплексные числа. Определение, геометрическое изображение

**ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1.** Комплексным числом называется выражение вида  $z = a + bi$ , где  $a$  и  $b$  — действительные числа,  $i$  — мнимая единица:  $i = \sqrt{-1}$ ,  $i^2 = -1$ .  $a$  — действительная часть числа  $z$  ( $a = \operatorname{Re} z$ ),  $b$  — мнимая часть ( $b = \operatorname{Im} z$ ). Если  $a = 0$ , то число  $z = ib$  — чисто мнимое, если  $b = 0$ , то  $z = a$  — действительное число.

Два комплексных числа,  $z = a + bi$  и  $\bar{z} = a - bi$ , отличающиеся только знаком мнимой части, называются сопряженными.

Комплексные числа  $z_1 = a_1 + ib_1$ ,  $z_2 = a_2 + ib_2$  называются равными, если  $a_1 = a_2$ ,  $b_1 = b_2$ . Комплексное число  $z = 0$ , если  $a = 0$ ,  $b = 0$ .

### 2.17.2. Геометрическое изображение комплексных чисел

Как известно, каждой паре чисел  $a$  и  $b$  можно поставить в соответствие некоторую точку плоскости или вектор с координатами  $\{a, b\}$ . В соответствии с этим, удобно каждому комплексному числу  $z = a + bi$  поставить в соответствие точку  $A(a, b)$  плоскости  $XOY$  или вектор  $OA$ . Если  $b = 0$ , то комплексное число лежит на оси  $OX$ ;  $OX$  — действительная ось. Если  $a = 0$ , то число чисто мнимое, лежит на оси  $OY$ .  $OY$  — мнимая ось. Плоскость  $XOY$  здесь — комплексная плоскость.

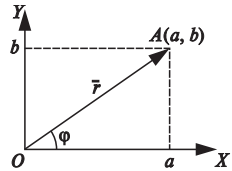


Рис. 2.38

**2. Тригонометрическая форма комплексного числа.** Обозначим через  $r$  и  $\varphi$  полярные координаты точки  $A(a, b)$ , считая начало координат полюсом, а положительное направление оси  $OX$  — полярной осью. Тогда

$$a = r \cos \varphi, \quad b = r \sin \varphi,$$

$$z = a + bi = r(\cos \varphi + i \sin \varphi)$$

— тригонометрическая форма записи комплексного числа.  $r$  — модуль комплексного числа,  $\varphi$  — аргумент:

$$r = |z|, \quad \varphi = \arg z$$

$$r = \sqrt{a^2 + b^2}, \quad \varphi = \operatorname{arctg} \frac{b}{a}.$$

Аргумент, очевидно, вычисляется с точностью до  $2\pi k$ . Сопряженные числа имеют одинаковый модуль и отличающийся знаком аргумент:

$$|z| = |\bar{z}|, \quad \arg z = -\arg \bar{z}.$$

Действительное число также может быть записано в тригонометрической форме:

$$\begin{aligned} A &= |A|(\cos 0 + i \sin 0), & A > 0, \\ A &= |A|(\cos \pi + i \sin \pi), & A < 0. \end{aligned}$$

### 2.17.3. Действия над комплексными числами

**Сложение.** Суммой двух комплексных чисел  $z_1 = a_1 + b_1 i$ ,  $z_2 = a_2 + b_2 i$  называется комплексное число, определяемое равенством:

$$z_1 + z_2 = (a_1 + a_2) + (b_1 + b_2)i. \quad (1)$$

Из (1) следует, что сложение комплексных чисел, изображенных векторами, производится по правилам сложения векторов.

**Вычитание.** Разностью комплексных чисел  $z_1 = a_1 + b_1 i$  и  $z_2 = a_2 + b_2 i$  называется число, определенное равенством

$$z_1 - z_2 = (a_1 - a_2) + i(b_1 - b_2).$$

**Умножение** комплексных чисел производится по правилу умножения многочленов с учетом того, что  $i^2 = -1$ :

$$\begin{aligned} z_1 \cdot z_2 &= (a_1 + ib_1)(a_2 + ib_2) = a_1 a_2 + ib_1 a_2 + ia_1 b_2 - b_1 b_2 = \\ &= (a_1 a_2 - b_1 b_2) + i(a_1 b_2 + a_2 b_1). \end{aligned}$$

Пусть комплексные числа заданы в тригонометрической форме:

$$z_1 = r_1(\cos \varphi_1 + i \sin \varphi_1),$$

$$z_2 = r_2(\cos \varphi_2 + i \sin \varphi_2),$$

$$\begin{aligned} z_1 z_2 &= r_1 r_2 [(\cos \varphi_1 \cos \varphi_2 - \sin \varphi_1 \sin \varphi_2) + i(\sin \varphi_1 \cos \varphi_2 + \cos \varphi_1 \sin \varphi_2)] = \\ &= r_1 r_2 [\cos(\varphi_1 + \varphi_2) + i \sin(\varphi_1 + \varphi_2)]. \end{aligned} \quad (2)$$

Если числа  $z$  и  $\bar{z}$  сопряженные, то

$$z\bar{z} = (a + bi)(a - bi) = a^2 + b^2 = |z|^2.$$

**Деление.** Пусть требуется разделить два комплексных числа:

$$\begin{aligned} z_1 &= a_1 + b_1 i, & z_2 &= a_2 + b_2 i; \\ \frac{z_1}{z_2} &= \frac{a_1 + b_1 i}{a_2 + b_2 i} = \frac{(a_1 + b_1 i)(a_2 - b_2 i)}{a_2^2 + b_2^2} = \frac{a_1 a_2 + b_1 b_2}{a_2^2 + b_2^2} + i \frac{a_2 b_1 - a_1 b_2}{a_2^2 + b_2^2}. \end{aligned}$$

**Возведение комплексного числа в степень и извлечение корня из комплексного числа.** Пусть требуется возвести комплексное число  $z = a + bi$  в степень  $n$ . Представим  $z$  в тригонометрической форме:  $z = r(\cos \varphi + i \sin \varphi)$ . По формуле (2)

$$z^n = r^n(\cos n\varphi + i \sin n\varphi)$$

— формула Муавра.

Корнем  $n$ -й степени из комплексного числа  $z$  называется такое комплексное число,  $n$ -я степень которого равна  $z$ .

Пусть  $z = r(\cos \varphi + i \sin \varphi)$ .

$$\sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{r(\cos \varphi + i \sin \varphi)} = \rho(\cos \psi + i \sin \psi);$$

$$\rho^n(\cos n\psi + i \sin n\psi) = r(\cos \varphi + i \sin \varphi).$$

Поэтому

$$\rho = \sqrt[n]{r}, \quad n\psi = \varphi + 2\pi k;$$

$$\psi = \frac{\varphi + 2\pi k}{n}, \quad k = 0, 1, 2, \dots, n-1.$$

Окончательно,

$$\sqrt[n]{r(\cos \varphi + i \sin \varphi)} = \sqrt[n]{r} \cos \left[ \left( \frac{\varphi + 2\pi k}{n} \right) + i \sin \left( \frac{\varphi + 2\pi k}{n} \right) \right].$$

**Пример.** Найти все значения кубического корня из 1.

#### 2.17.4. Показательная функция в комплексной области

По аналогии с показательной функцией действительного переменного рассмотрим функцию  $w = e^z$ , где  $z = x + iy$ . По определению,

$$e^{x+iy} = e^x(\cos y + i \sin y). \quad (3)$$

Пользуясь определением функции  $e^z$ , можно доказать справедливость следующих ее свойств.

$$1. e^{z_1 + z_2} = e^{z_1} e^{z_2}.$$

$$2. e^{z_1 - z_2} = \frac{e^{z_1}}{e^{z_2}}.$$

$$3. (e^z)^m = e^{mz}.$$

$$4. e^{z+2\pi i} = e^z.$$

Действительно,

$$e^{z+2\pi i} = e^z \cdot e^{2\pi i} = e^z \cdot e^0 (\cos 2\pi + i \sin 2\pi) = e^z.$$

Полагая в формуле (3)  $x=0$ , получим

$$e^{iy} = \cos y + i \sin y. \quad (4)$$

(4) — формула Эйлера.

### 2.17.5. Некоторые сведения о многочленах

Многочленом  $n$ -й степени с действительными коэффициентами называется выражение вида

$$P(x) = A_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \dots + a_{n-1} x + a_n.$$

Корнем многочлена называется всякое число  $\alpha$ , действительное или комплексное, обращающее многочлен в 0, т. е.  $P(\alpha) = 0$ .

При использовании основной теоремы алгебры легко доказывается следующая теорема.

**Теорема 1.** *Всякий многочлен  $n$ -й степени может быть представлен в виде произведения коэффициента при старшей степени и  $n$  линейных сомножителей вида  $x - \alpha$ :*

$$P(x) = A_0(x - \alpha_1)(x - \alpha_2) \dots (x - \alpha_n).$$

Числа  $\alpha_i$  являются корнями многочлена. Таким образом, каждый многочлен имеет ровно  $n$  корней, если каждый корень считать столько раз, какова его кратность.

**Теорема 2.** *Если коэффициенты многочлена действительны, то вместе с комплексным корнем  $a + bi$  он имеет и сопряженный корень  $a - bi$ .*

Пусть в разложении есть множитель  $[x - (a + bi)]^k$ , и множитель  $[x - (a - bi)]^k$ . Перемножив их, получим

$$\{[x - (a + bi)][x - (a - bi)]\}^k = [x^2 - 2ax + b^2 + a^2]^k = (x^2 + px + q)^k.$$

Таким образом, произведение линейных множителей, соответствующих комплексно-сопряженным корням, можно заменить квадратным трехчленом с действительными коэффициентами.

Итак, для любого действительного многочлена можно получить разложение

$$P(x) = A_0(x - x_1)^{k_1}(x - x_2)^{k_2} \dots (x^2 + p_1x + q_1)^{m_1}(x^2 + p_2x + q_2)^{m_2} \dots,$$

где  $k_1 + k_2 + \dots + 2(m_1 + m_2 + \dots) = n$ .

## 2.18. Приближенное решение уравнений

Метод хорд. Метод касательных (метод Ньютона). Комбинированный метод. Метод итераций.

Пусть требуется найти действительные корни уравнения  $f(x) = 0$ , т. е. такие действительные значения  $x$ , при которых  $f(x)$  обращается в 0. Будем считать, что  $f(x)$  непрерывна и имеет первую и вторую производные.

Нахождение корней уравнения состоит из двух этапов:

- 1) отделение корней графическим методом;
- 2) уточнение найденных значений.

Для отделения корней применяют один из следующих приемов. Либо строят график функции и тогда точки пересечения графика с осью  $OX$  дадут приближенные значения корней, либо преобразуют уравнение к виду  $f_1(x) = f_2(x)$  так, чтобы графики функций  $y = f_1(x)$  и  $y = f_2(x)$  легко строились. Абсциссы точек пересечения этих графиков дадут приближенные значения корней.

Для уточнения найденных значений применяются различные методы.

### 2.18.1. Метод хорд

Пусть графическим методом найдено, что корень уравнения находится на отрезке  $[a, b]$  (рис. 2.39). Отрезок будем считать столь малым, что на нем выполнены условия:

- 1) на концах отрезка функция принимает значения разных знаков;
- 2)  $f'(x)$  сохраняет знак на  $[a, b]$ ;
- 3)  $f''(x)$  сохраняет знак на  $[a, b]$ .

При этом график функции имеет один из видов, показанных на рис. 2.39.

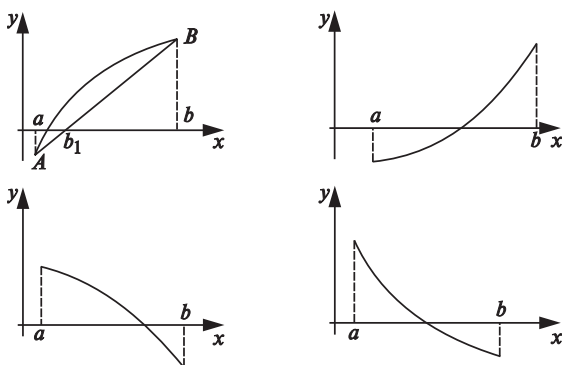


Рис. 2.39

Метод хорд состоит в следующем. Проведем хорду  $AB$  и найдем абсциссу точки ее пересечения с осью  $OX$ . Для этого составим уравнение прямой  $AB$ :

$$\frac{x-a}{b-a} = \frac{y-f(a)}{f(b)-f(a)} \quad \text{или} \quad \frac{x-b}{a-b} = \frac{y-f(b)}{f(a)-f(b)}.$$

При  $y=0$  найдем:

$$x = a - f(a) \frac{b-a}{f(b)-f(a)} \quad \text{или} \quad x = b - f(b) \frac{a-b}{f(a)-f(b)}.$$

Найденное значение  $x$  является приближенным значением искомого корня, обозначим его через  $x_1$ . Поскольку  $f(x_1)$  не равно нулю, то для вычисления следующего приближения  $x_2$  нужно повторить вычисления, заменив отрезок  $[a, b]$  на  $[a_1, b_1]$  следующим образом:

если знак  $f(x_1)$  такой же, как и знак  $f(b)$  (если  $f(x_1) \cdot f(b) > 0$ ), то  $a_1 = a, b_1 = b$ ;

если знак  $f(x_1)$  противоположен знаку  $f(b)$  (если  $f(x_1) \cdot f(b) < 0$ ), то  $a_1 = x_1, b_1 = b$ .

Вычисления новых приближений прекращаются, когда вновь найденное приближение отличается от предыдущего на достаточно малую величину

$$|x_n - x_{n-1}| \leq \varepsilon,$$

где  $\varepsilon$  — заданная точность вычисления искомого корня.

### 2.18.2. Метод касательных (метод Ньютона)

Если искомый корень находится на отрезке  $[a, b]$  и  $f(a) < 0$ , а функция  $f(x)$  на данном отрезке выпуклая, т. е.  $f''(x) < 0$  на  $[a, b]$ , рис. 2.40, то для вычисления первого приближенного значения корня  $x_1$  проведем касательную к графику функции в точке  $a$ . Пересечение этой касательной с осью  $OX$  дает приближенное значение корня ( $x_1$ ). Чтобы найти точку  $x_1$ , напомним уравнение касательной к графику функции в точке с координатами  $(a, f(a))$ :

$$y - f(a) = f'(a)(x - a).$$

При  $y = 0$  имеем

$$x_1 = a - \frac{f(a)}{f'(a)}.$$

Как видно из приведенного на рис. 2.40 графика, при таком вычислении приближенного значения корня мы последовательно приближаемся к корню слева. Поэтому для следующего приближения вместо  $a$  задаем  $a_1 = x_1$ .

Проведя теперь касательную в точке  $A_1(a_1, f(a_1))$ , получим новое приближение корня. Повторяя этот процесс несколько раз, мы получим корень с любой степенью точности.

Заметим, что если бы касательная была проведена не в точке  $A$ , а в точке  $B$ , то она могла бы пересечь ось абсцисс в точке, лежащей вне отрезка  $[a, b]$ . Таким образом, касательную нужно проводить в том конце дуги, в котором знаки функции и ее второй производной совпадают.

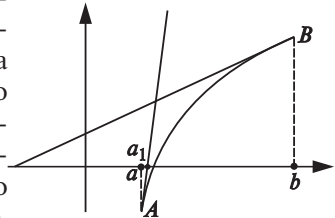


Рис. 2.40

### 2.18.3. Комбинированный метод

Для ускорения процесса отыскания корня применяют комбинированный метод хорд и касательных. Пусть  $f(a) \cdot f(b) < 0$ , а  $f'(x)$  и  $f''(x)$  сохраняют постоянные знаки на отрезке  $[a, b]$ , причем  $f'(x) > 0$ ;  $f''(x) > 0$ , рис. 2.41. Заметим, что к данному случаю можно свести все другие, если заменить уравнение  $f(x) = 0$  равносильным ему уравнением  $-f(x) = 0$  или  $\pm f(z) = 0$ , где  $z = -x$ .

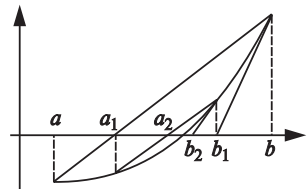


Рис. 2.41

Как следует из приведенного графика, в данном случае методом хорд последовательно вычисляются  $x_n$  с избытком. Поэтому при каждом переходе к следующему  $(n+1)$ -му этапу вычисления задаются новые границы отрезка  $a_n = x_n$ ,  $b_n = x_n$ . Найдем первое приближение по методу хорд и по методу касательных:

$$a_1 = a - f(a) \frac{b-a}{f(b)-f(a)},$$

$$b_1 = b - \frac{f(b)}{f'(b)}.$$

К отрезку  $[a_1, b_1]$  вновь применим метод хорд и метод касательных. И т. д. Будем получать приближения корня слева и справа по формулам

$$a_n = a_{n-1} - f(a_{n-1}) \frac{b_{n-1} - a_{n-1}}{f(b_{n-1}) - f(a_{n-1})},$$

$$b_n = b_{n-1} - \frac{f(b_{n-1})}{f'(b_{n-1})}.$$

При любом  $n$  корень уравнения  $f(x)=0$  содержится между  $a_n$  и  $b_n$ .

Пусть  $x = x_0$  — истинное значение корня. Очевидно,

$$|x_0 - a_n| < |a_n - b_n|,$$

$$|x_0 - b_n| < |a_n - b_n|.$$

Таким образом, погрешность не превышает разности между приближениями корня слева и справа.

Если задана точность  $\varepsilon$ , с которой нужно вычислить корень  $x_0$ , то вычисления проводят до тех пор, пока разность  $|a_n - b_n|$  не будет меньше  $\varepsilon$ . После этого принимают  $x_0 \approx \frac{a_n + b_n}{2}$ .

#### 2.18.4. Метод итераций

Пусть корень уравнения  $f(x)=0$  отделен и находится на отрезке  $[a, b]$ , причем этот отрезок достаточно мал. Предположим, что уравнение  $f(x)=0$  удалось переписать в виде  $f_1(x) = f_2(x)$ , причем функция  $f_1(x)$  такова, что корень уравнения  $f_1(x) = t$  может быть найден с большой степенью точности. Вычисление корня уравнения  $f(x)=0$  тогда проводится следующим образом. Берем  $x = x_0 \in [a, b]$ , вычисляем  $f_2(x_0)$  и находим  $x_1$  как решение уравнения

$$f_1(x) = f_2(x).$$



Далее:  $x_2$  находим как решение уравнения  $f_1(x) = f_2(x_1)$  и т. д.

$$f_1(x_n) = f_2(x_{n-1}).$$

Особенно удобно представлять уравнение в виде

$$x = f_2(x).$$

Тогда последовательные приближения находятся по формулам

$$x_1 = f_2(x_0), \quad x_2 = f_2(x_1), \quad \dots, \quad x_n = f_2(x_{n-1}).$$

Можно показать, что последовательные приближения сходятся к корню  $\xi$  уравнения ( $x_n \rightarrow \xi$ ) если на выбранном промежутке  $[a, b]$  выполнено условие:  $|f'_2(x)| \leq q < 1$ .

Укажем способ выбора функции  $f_2(x)$ . Заменим уравнение  $f(x) = 0$  эквивалентным уравнением

$$x = x - \lambda f(x),$$

где число  $\lambda$  выбирается так, чтобы  $\frac{d}{dx}[x - \lambda f(x)]$  была малой по абсолютной величине на  $[a, b]$  ( $b - a$  достаточно мало). Например, можно находить  $\lambda$  из условия  $1 - \lambda f'(x_0)$ , где  $x_0$  — первое приближение корня.

**Пример.** Привести уравнение  $2x - \ln x - 4 = 0$  при начальном приближении корня  $x_0 = 2,5$  к виду, удобному для применения метода итераций.

**Решение.** Здесь  $f(x) = 2x - \ln x - 4$ ,  $f'(x) = 2 - \frac{1}{x}$ . Перепишем уравнение в эквивалентном виде:

$$x = x - \lambda(2x - \ln x - 4).$$

Вычисляем производную правой части и приравняем ее к нулю при  $x = 2,5$ , тогда  $\lambda = 0,5$  и  $x = 2 + \frac{1}{2} \ln x$ .

### 2.18.5. Фортран-программа вычисления корней заданного уравнения на заданном отрезке

Современный компьютер предоставляет нам чрезвычайно большие вычислительные возможности. Поэтому актуальность всех изложенных выше методов решения трансцендентных уравнений снизилась и уходит в прошлое. Используются они теперь, если требуется найти нужное решение быстро (хотя бы приближенно) с помощью калькулятора.

Если функция  $f(x)$  определена и не имеет точек разрыва на данном отрезке  $[a, b]$ , и требуется найти все корни уравнения

$$f(x) = 0$$

на заданном отрезке  $[a, b]$ , то это можно сделать путем непосредственного последовательного вычисления функции в точках  $x_1 = a, x_2, x_3, \dots, x_n = b$  с шагом  $\Delta x$  на всем отрезке  $[a, b]$  и выделения в качестве корней точек  $x_k$ , при переходе которых функция меняет знак. Для обнаружения этих точек достаточно проверять знак произведения двух последовательных значений функции  $f(x_{k-1}) \cdot f(x_k)$ , которое меньше нуля, если корень между этими точками, или равно нулю, если корень совпадает с одной из этих точек.

Например, если требуется вычислить корни с точностью до четвертого знака после запятой, то нужно задать  $\Delta x = 0,0001$ . Ниже приведен текст Фортран-программы, где в качестве примера задано уравнение

$$x - \exp(-x) = 0.$$

Значения функции  $f(x)$  вычисляются в цикле с параметром цикла  $x$  и шагом  $dx = \Delta x = 0,0001$ . При всех вычислениях на каждом этапе цикла имеются только два значения функции: предыдущее  $Yp = f(x)$  и получаемое  $Y = f(x + dx)$ . Причем первое значение функции  $f(x)$  при  $x = a$  вычисляется перед циклом и ему присваивается имя  $Yp$ . Затем в цикле каждому вновь вычисленному  $Y(x)$  после выяснения знака произведения  $Y \cdot Yp$  присваивается имя  $Yp$ .

```

PROGRAM Korn1
OPEN(11, FILE='KORNI.txt')
a=0.; b=20.; dx=0.0001; x=a; Yp=f(x)
a=a+dx; k=1 ! k — номер найденного корня
DO x=a, b, dx
    Y=f(x); Znak=Y*Yp
    IF(Znak) Then
! Запись корня на экран
WRITE(*, '(2x,A,I4,3x,A,F8.4)') 'k=', k, 'x=', x
! Запись корня в файл
WRITE(11, '(2x,A,I4,3x,A,F8.4)') 'k=', k, 'x=', x
CALL SLEEPqq(500) ! Пауза 0.5 секунды
k=k+1
EndIF
Yp=Y
ENDDO

```

K=k-1

```
WRITE(*, '(2x,A,I4)') 'NUMBER of the found roots   k=',k
      END PROGRAM Korni
      FUNCTION f(x)
f=x-Exp(-x)
      END FUNCTION F
```

Рассмотренный способ иллюстрирует возможность вычислить корень с помощью компьютера с любой заданной точностью. В данном примере корень только один:  $x = 0,5672$ .

Представленные выше методы тоже полезно знать. Если, например, при решении данного уравнения использовать метод касательных, то уже в первом приближении мы получим  $x_1 = 0,5$ . В данном случае при  $x = a$  и функция, и ее вторая производная одного знака:

$$f(0) = -1, \quad f''(0) = -1.$$

Поэтому нужно записать уравнение касательной на левой границе данного отрезка. Тогда получим

$$f(0) + f'(0)(x_1 - 0) = 0 \Rightarrow -1 + 2x_1 = 0 \Rightarrow x_1 = 0,5.$$

Для вычисления второго приближения потребуется калькулятор:

$$f(x_1) + f'(x_1)(x_2 - x_1) = 0 \Rightarrow x_2 = 0,5 - \frac{0,5 - e^{-0,5}}{1 + e^{-0,5}} = 0,5663.$$

Как видим, при использовании метода касательных (Ньютона) необходимо четко знать, на каком конце отрезка нужно проводить касательную. Тогда процесс вычислений сходится, и очень быстро.

## 2.19. Интерполирование

Постановки задачи. Интерполяционный многочлен Лагранжа. Интерполяционный многочлен Ньютона. Численное дифференцирование.

### 2.19.1. Постановки задачи

Пусть известно, что между переменными  $x$  и  $y$  существует функциональная зависимость  $y = f(x)$ , и на основании эксперимента установлены значения этой функции  $y_0, y_1, \dots, y_n$  при некоторых значениях аргумента  $x_0, x_1, \dots, x_n$ , принадлежащих отрезку  $[a, b]$ . Т. е.  $y_0 = f(x_0)$ ,  $y_1 = f(x_1)$ , ...,  $y_n = f(x_n)$ . Требуется найти многочлен  $P_n(x)$  степени не



### 2.19.2. Интерполяционный многочлен Лагранжа

Многочлен  $P_n(x)$  будем искать в виде

$$P_n(x) = c_0(x-x_1)(x-x_2) \dots (x-x_n) + c_1(x-x_0)(x-x_2) \dots (x-x_n) + \dots + c_n(x-x_0)(x-x_1) \dots (x-x_{n-1}). \quad (3)$$

Определим коэффициенты  $c_0, c_1, \dots, c_n$  так, чтобы выполнялись условия (1). При  $x = x_0$  получим

$$y_0 = c_0(x_0-x_1)(x_0-x_2) \dots (x_0-x_n) \Rightarrow c_0 = \frac{y_0}{(x_0-x_1)(x_0-x_2) \dots (x_0-x_n)}.$$

При  $x = x_1$

$$y_1 = c_1(x_1-x_0)(x_1-x_2) \dots (x_1-x_n) \Rightarrow c_1 = \frac{y_1}{(x_1-x_0)(x_1-x_2) \dots (x_1-x_n)}.$$

.....

При  $x = x_n$

$$y_n = c_n(x_n-x_0)(x_n-x_1) \dots (x_n-x_{n-1}) \Rightarrow c_n = \frac{y_n}{(x_n-x_0)(x_n-x_1) \dots (x_n-x_{n-1})}.$$

Таким образом, подставляя  $c_i$  в (3), получим

$$P_n(x) = \frac{(x-x_1)(x-x_2) \dots (x-x_n)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2) \dots (x_0-x_n)} y_0 + \frac{(x-x_0)(x-x_2) \dots (x-x_n)}{(x_1-x_0)(x_1-x_2) \dots (x_1-x_n)} y_1 + \dots + \frac{(x-x_0)(x-x_1) \dots (x-x_{n-1})}{(x_n-x_0)(x_n-x_1) \dots (x_n-x_{n-1})} y_n. \quad (4)$$

(4) — интерполяционный многочлен Лагранжа.

Пример 1.  $x_0 = 0, x_1 = 1, x_2 = 2; y_0 = 3, y_1 = 4, y_2 = 15.$

$$P_2(x) = 5x^2 - 4x + 3.$$

### 2.19.3. Интерполяционный многочлен Ньютона

Пусть вновь известны значения  $y_0, y_1, \dots, y_n$  функции  $f(x)$  в узлах интерполяции  $x_0, x_1, \dots, x_n$ , причем узлы интерполяции равно отстоят друг от друга на расстояние  $h$  (шаг интерполяции):

$$x_0, x_1 = x_0 + h, x_2 = x_1 + h = x_0 + 2h, \dots, x_n = x_0 + nh.$$

Введем понятие конечных разностей  $k$ -го порядка.

Разности 1-го порядка:

$$\Delta y_0 = y_1 - y_0, \quad \Delta y_1 = y_2 - y_1, \quad \Delta y_2 = y_3 - y_2, \quad \dots, \quad \Delta y_{n-1} = y_n - y_{n-1}.$$

Разности 2-го порядка:

$$\Delta^2 y_0 = \Delta y_1 - \Delta y_0, \quad \Delta^2 y_1 = \Delta y_2 - \Delta y_1, \quad \dots$$

.....

$$\Delta^k y_0 = \Delta^{k-1} y_1 - \Delta^{k-1} y_0;$$

.....

$$\Delta^n y_0 = \Delta^{n-1} y_1 - \Delta^{n-1} y_0.$$

Отметим, что для нахождения конечных разностей удобно составить таблицу.

$x$	$y$	$\Delta y$	$\Delta^2 y$	$\Delta^3 y$	$\Delta^4 y$
$x_0$	$y_0$	$\Delta y_0$	$\Delta^2 y_0$		
$x_1 = x_0 + h$	$y_1$	$\Delta y_1$	$\Delta^2 y_1$	$\Delta^3 y_0$	
$x_2 = x_0 + 2h$	$y_2$	$\Delta y_2$	$\Delta^2 y_2$	$\Delta^3 y_1$	$\Delta^4 y_0$
$x_3 = x_0 + 3h$	$y_3$	$\Delta y_3$			
$x_4 = x_0 + 4h$	$y_4$				
...	...	...	...	...	...

Это диагональная таблица разностей с шагом  $h$ . Покажем, как составляется интерполяционный многочлен Ньютона.

Для двух узлов  $(x_0, x_1; y_0, y_1)$

$$P_1(x) = y_0 + \Delta y_0 \frac{x - x_0}{h};$$

$$P_1(x_0) = y_0, \quad P_1(x_1) = y_0 + (y_1 - y_0) \frac{x_1 - x_0}{x_1 - x_0} = y_1.$$

Для трех узлов  $(x_0, x_1, x_2; y_0, y_1, y_2)$

$$P_2(x) = y_0 + \Delta y_0 \frac{x - x_0}{h} + \frac{\Delta^2 y_0}{2!} \frac{x - x_0}{h} \left( \frac{x - x_0}{h} - 1 \right);$$

$$P_2(x_0) = y_0, \quad P_2(x_1) = y_1,$$

$$P_2(x_2) = y_0 + (y_1 - y_0) \frac{x_2 - x_0}{h} + \frac{\Delta^2 y_0}{2!} \frac{2h}{h} \left( \frac{2h}{h} - 1 \right) = y_2;$$

$$P_3(x) = y_0 + \Delta y_0 \frac{x-x_0}{h} + \frac{\Delta^2 y_0}{2!} \frac{x-x_0}{h} \left( \frac{x-x_0}{h} - 1 \right) + \frac{\Delta^3 y_0}{3!} \frac{(x-x_0)}{h} \times \\ \times \left( \frac{x-x_0}{h} - 1 \right) \left( \frac{x-x_0}{h} - 2 \right)$$

и т. д.

$$P_n(x) = y_0 + \Delta y_0 \frac{x-x_0}{h} + \frac{\Delta^2 y_0}{2!} \frac{(x-x_0)}{h} \left( \frac{x-x_0}{h} - 1 \right) \dots + \\ + \frac{\Delta^n y_0}{n!} \frac{x-x_0}{h} \left( \frac{x-x_0}{h} - 1 \right) \dots \left( \frac{x-x_0}{h} - (n-1) \right). \quad (5)$$

Можно проверить, что  $P_n(x_i) = y_i$  ( $i = 0, 1, \dots, n$ ).

Вводя обозначение  $\frac{x-x_0}{h} = t$ , многочлен  $P_n(x)$  можно переписать в более удобной форме:

$$P_n(t) = y_0 + \Delta y_0 t + \frac{\Delta^2 y_0}{2!} t(t-1) + \frac{\Delta^3 y_0}{3!} t(t-1)(t-2) \dots + \\ + \frac{\Delta^n y_0}{n!} t(t-1) \dots (t-n+1). \quad (6)$$

Оценим ошибку, которую мы допускаем, пользуясь приближенным равенством

$$f(x) \approx P_n(x).$$

Положим  $R_n(x) = f(x) - P_n(x)$ . Можно показать, что

$$R_n(x) \approx \frac{\Delta^{n+1} y_0}{(n+1)!} t(t-1) \dots (t-n). \quad (7)$$

**З а м е ч а н и е 1.** Справедливо следующее утверждение: если разности  $n$ -го порядка для функции  $f(x)$  постоянны, то эта функция — многочлен  $n$ -й степени. Таким образом, в этом случае имеет место точное равенство  $f(x) = P_n(x)$ .

**З а м е ч а н и е 2.** Для одних и тех же равноотстоящих узлов интерполяции многочлены Лагранжа и Ньютона совпадают, хотя они записаны в разной форме.

**З а м е ч а н и е 3.** Интерполяционный многочлен Ньютона в настоящее время очень широко используется при разработке численных методов решения дифференциальных уравнений для записи производных в конечных разностях и при аппроксимации граничных условий.

**П р и м е р 2.** Для примера 1 составить многочлен Ньютона.

### 2.19.4. Численное дифференцирование

Пусть значения некоторой неизвестной функции  $f(x)$  заданы таблицей и требуется найти значение производной этой функции в некоторой точке  $x$ . Поступают следующим образом: составляют многочлен Лагранжа или Ньютона, если узлы равноотстоящие, и полагают  $f'(x) \approx P'_n(x)$ .

Пусть, например, для  $f(x)$  составлен многочлен Ньютона

$$f(x) \approx P_n(x_0 + th) = y_0 + \Delta y_0 t + \frac{\Delta^2 y_0}{2!} t(t-1) + \dots + \frac{\Delta^n y_0}{n!} t(t-1) \dots (t-n+1),$$

где  $t = \frac{x - x_0}{h}$ .

По правилу дифференцирования сложной функции

$$\frac{dP_n}{dt} = \frac{dP_n}{dx} \cdot \frac{dx}{dt} \Rightarrow \frac{dP_n}{dx} = \frac{dP_n}{dt} \cdot \left( \frac{dx}{dt} \right)^{-1},$$

но  $\frac{dx}{dt} = h$ .

Итак,

$$f'(x) \approx \frac{1}{h} \cdot \frac{dP_n}{dt}. \quad (8)$$

Аналогично имеем

$$\begin{aligned} f''(x) &\approx \frac{1}{h^2} \frac{d^2 P_n}{dt^2}, \\ &\dots \dots \dots \\ f^{(n)}(x) &\approx \frac{1}{h^k} \frac{d^k P_n}{dt^k}. \end{aligned}$$

Распишем равенство (8) более подробно:

$$f'(x) \approx \frac{1}{h} \left[ \Delta y_0 + \frac{\Delta^2 y_0}{2!} (2t-1) + \frac{\Delta^3 y_0}{3!} (3t^2 - 6t + 2) + \dots \right].$$

Аналогичные формулы можно записать для производных высшего порядка.

**Пример 3.** Вычислить  $f'(0,5)$ .

**Замечание.** Чем выше порядок производной, тем более высокого порядка разности участвуют в ее вычислении, и тем больше ошибка.



## ГЛАВА 3

# ИНТЕГРАЛЬНОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ ФУНКЦИЙ ОДНОЙ ПЕРЕМЕННОЙ

---

### 3.1. Неопределенный интеграл и его свойства.

#### Основные методы интегрирования

Понятие первообразной и неопределенного интеграла. Таблица основных интегралов. Некоторые свойства неопределенного интеграла. Основные методы интегрирования.

Интегральное исчисление — раздел математики, в котором изучаются понятия интеграла, его свойства и методы вычислений. Интегральное исчисление непрерывно связано с дифференциальным исчислением и составляет вместе с ним основу математического анализа. Основные понятия и теория дифференциального и интегрального исчислений, прежде всего связь операций дифференцирования и интегрирования, а также их применения к решению прикладных задач, были разработаны в трудах И. Ньютона и Г. Лейбница в конце XVII в. Их исследования явились началом интенсивного развития математического анализа. Существенную роль в его создании в XVIII в. сыграли работы Л. Эйлера, Я. и И. Бернулли, Ж. Лагранжа. В XIX в. в связи с появлением понятия предела интегральное исчисление приобрело логически законченную форму.

С помощью интегрального исчисления стало возможным решать единым методом многие теоретические и прикладные задачи, как новые, которые ранее не поддавались решению, так и старые, требовавшие прежде специальных искусственных приемов.

Основными понятиями интегрального исчисления являются два тесно связанных понятия интеграла: неопределенного и определенного.

#### 3.1.1. Понятие первообразной и неопределенного интеграла

Основная задача дифференциального исчисления состояла в отыскании по функции  $f(x)$  ее производной  $f'(x)$ . Однако часто приходится решать обратную задачу: для данной функции  $f(x)$  найти такую функцию  $F(x)$ , что

$$F'(x) = f(x). \quad (1)$$

Иногда задача ставится в равносильной форме: по функции  $f(x)$  найти такую функцию  $F(x)$ , что

$$dF(x) = f(x) dx. \quad (2)$$

**ОПРЕДЕЛЕНИЕ.** Функция  $F(x)$  называется первообразной от функции  $f(x)$  на  $[a, b]$ , если эти функции связаны соотношениями (1) или (2) на  $[a, b]$ .

**Теорема 1.** *Всякая непрерывная на отрезке  $[a, b]$  функция имеет на этом отрезке первообразную.*

**Теорема 2.** *Если функция  $F(x)$  есть первообразная от функции  $f(x)$  на  $[a, b]$ , то всякая другая первообразная  $F_1(x)$  от этой функции на  $[a, b]$  отличается от  $F(x)$  на постоянную, т. е.*

$$F_1(x) = F(x) + C, \quad C = \text{const.}$$

*Доказательство.* Пусть  $F_1(x)$  и  $F(x)$  — первообразные для  $f(x)$  на  $[a, b]$ . Тогда  $F_1'(x) = F'(x)$  на  $[a, b]$ . Но если две функции на отрезке  $[a, b]$  имеют равные производные, то их разность есть величина постоянная. Таким образом,  $F_1(x) - F(x) = C$ ,  $F_1(x) = F(x) + C$ .

Итак, если функция  $f(x)$  имеет первообразную, то она имеет их бесконечно много и все первообразные функции  $f(x)$  отличаются на произвольную постоянную.

**ОПРЕДЕЛЕНИЕ.** Если  $F(x)$  есть первообразная от функции  $f(x)$ , то выражение  $F(x) + C$ , где  $C$  — произвольная постоянная, называется неопределенным интегралом от функции  $f(x)$  и обозначается символом  $\int f(x) dx$ :

$$\int f(x) dx = F(x) + C. \quad (3)$$

$f(x)$  — подынтегральная функция,  $f(x) dx$  — подынтегральное выражение,  $x$  — переменная интегрирования. Действие отыскания неопределенного интеграла от функции  $f(x)$  называется ее интегрированием.

Из определения неопределенного интеграла вытекают следующие его свойства.

1.  $(\int f(x) dx)' = f(x)$ .
2.  $d(\int f(x) dx) = f(x) dx$ .
3.  $\int dF(x) = F(x) + C$ .

Действительно,  $dF(x) = f(x) dx$ . Поэтому последнее равенство совпадает с (3). Например,  $\int dx = x + C$ ,  $\int d(\text{tg } x) = \text{tg } x + C$ .

Из равенства (3) легко выводится геометрический смысл неопределенного интеграла. Неопределенный интеграл есть семейство кривых, получающихся сдвигом какой-либо одной из них параллельно самой себе вдоль оси  $OY$  (рис. 3.1).

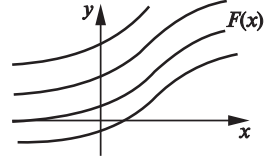


Рис. 3.1

### 3.1.2. Таблица основных интегралов

1.  $\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C.$
2.  $\int \frac{dx}{x} = \ln|x| + C.$
3.  $\int \sin x dx = -\cos x + C.$
4.  $\int \cos x dx = \sin x + C.$
5.  $\int \frac{dx}{\cos^2 x} = \operatorname{tg} x + C.$
6.  $\int \frac{dx}{\sin^2 x} = -\operatorname{ctg} x + C.$
7.  $\int \frac{dx}{a^2 + x^2} = \frac{1}{a} \operatorname{arctg} \frac{x}{a} + C.$
8.  $\int \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = \operatorname{arcsin} \frac{x}{a} + C = -\operatorname{arccos} \frac{x}{a} + C.$
9.  $\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C.$
10.  $\int \frac{dx}{a^2 - x^2} = \frac{1}{2a} \ln \left| \frac{a+x}{a-x} \right| + C.$
11.  $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 + A}} = \ln|x + \sqrt{x^2 + A}| + C.$
12.  $\int \frac{dx}{\cos x} = \ln \left| \operatorname{tg} \left( \frac{x}{2} + \frac{\pi}{4} \right) \right| + C.$
13.  $\int \frac{dx}{\sin x} = \ln \left| \operatorname{tg} \frac{x}{2} \right| + C.$

Справедливость приведенных формул проверяется непосредственным дифференцированием.

### 3.1.3. Некоторые свойства неопределенного интеграла

$$1. \int [f(x) \pm \varphi(x)] dx = \int f(x) dx \pm \int \varphi(x) dx.$$

*Доказательство.* Найдем производные от левой и правой частей:

$$f(x) \pm \varphi(x) = f(x) \pm \varphi(x).$$

$$2. \int kf(x) dx = k \int f(x) dx.$$

$$3. \text{ Если } \int f(x) dx = F(x) + C, \text{ то}$$

$$\int f(ax+b) dx = \frac{1}{a} F(ax+b) + C.$$

**Примеры.**

$$1. \int \left( 2x - \operatorname{tg} x + \frac{3}{x} \right) dx.$$

$$2. \int \left[ \frac{1}{\sqrt[3]{x}} + \cos(2x+3) \right] dx.$$

### 3.1.4. Основные методы интегрирования

**Метод разложения** состоит в разложении подынтегральной функции на сумму функций, от каждой из которых интеграл берется.

**Примеры.**

$$1. \int \frac{2x+3}{x-1} dx = \int \left( 2 + \frac{5}{x-1} \right) dx = 2x + 5 \ln|x-1| + C.$$

$$2. \int \frac{dx}{\sin^2 x \cdot \cos^2 x} = \int \frac{\sin^2 x + \cos^2 x}{\sin^2 x \cdot \cos^2 x} dx = \int \frac{dx}{\cos^2 x} + \int \frac{dx}{\sin^2 x}.$$

**Интегрирование методом замены переменной (способом подстановки).**

Иногда удобно вместо переменной интегрирования  $x$  ввести новую переменную  $t$ . Пусть новая переменная введена по правилу  $x = \varphi(t)$ , где  $\varphi(t)$  — непрерывно дифференцируемая функция, имеющая непрерывную обратную. Покажем, что имеет место равенство

$$\int f(x) dx = \int f[\varphi(t)] \varphi'(t) dt. \quad (4)$$

Для этого возьмем дифференциал от обеих частей равенства:

$$\begin{aligned}d\int f(x)dx &= f(x)dx, \\d\int f[\varphi(t)]\varphi'(t)dt &= f[\varphi(t)]\varphi'(t)dt.\end{aligned}$$

Но  $dx = d[\varphi(t)] = \varphi'(t)dt$ , поэтому  $f(x)dx = f[\varphi(t)]\varphi'(t)dt$ . Если интеграл, стоящий в правой части равенства (4), найден, то

$$\int f(x)dx = \int f[\varphi(t)]\varphi'(t)dt = \Phi(t) + C.$$

Но  $t = \varphi^{-1}(x)$ , поэтому

$$\int f(x)dx = \Phi[\varphi^{-1}(x)] + C.$$

Пр и м е р.  $\int \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = \left| \begin{matrix} x = at \\ dx = a dt \end{matrix} \right| = \int \frac{adt}{\sqrt{a^2 - a^2 t^2}} = \int \frac{dt}{\sqrt{1 - t^2}}.$

**Метод подведения под знак дифференциала.**

$$\int f[\varphi(x)]\varphi'(x)dx = \int f(t)dt,$$

где  $t = \varphi(x)$ .

Пр и м е р ы.

$$1. \int \operatorname{tg} x dx = \int \frac{\sin x}{\cos x} dx = -\int \frac{d(\cos x)}{\cos x} = -\ln|\cos x| + C.$$

$$2. \int \arcsin x \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \int \arcsin x d(\arcsin x).$$

### 3.2. Интегрирование по частям. Интегрирование некоторых функций, содержащих квадратный трехчлен

Интегрирование по частям. Интегрирование некоторых частей функций, содержащих квадратный трехчлен.

#### 3.2.1. Интегрирование по частям

Пусть  $u$  и  $v$  — дифференцируемые функции от  $x$ .

$$d(uv) = u dv + v du.$$

Интегрируя обе части последнего равенства, получим

$$uv = \int u dv + \int v du$$

или

$$\int u dv = uv - \int v du. \quad (1)$$

(1) — формула интегрирования по частям. Эта формула применяется в тех случаях, когда задачи отыскания функции  $v$  по ее дифференциалу и вычисления  $\int v du$  в совокупности оказываются более простыми, чем задача вычисления  $\int u dv$ .

**Пример.**  $\int x \cos x dx = \left| \begin{array}{l} x = u, \quad dx = du, \\ \cos x dx = dv, \quad v = \sin x \end{array} \right| = x \sin x - \int \sin x dx =$   
 $= x \sin x + \cos x + C.$

Заметим, что если бы мы положили  $u = \cos x$ ,  $x dx = dv$ , то пришли бы к более сложному интегралу  $\int (\sin x) \frac{x^2}{2} dx$ , чем исходный. Иногда для достижения окончательного результата интегрирование по частям нужно применять несколько раз.

Можно выделить несколько типов интегралов, которые вычисляются многократным, вообще говоря, интегрированием по частям и для которых способ выбора  $u$  и  $v$  известен.

$$\text{I. } \int P_n(x) e^{kx} dx, \int P_n(x) \sin ax dx, \int P_n(x) \cos bx dx.$$

Здесь  $u = P_n(x)$ ,  $dv = e^{kx} (\sin ax, \cos bx)$ . Интегрировать по частям придется столько раз, какова степень  $P_n(x)$ .

$$\text{Пример. } J = \int (x^2 - x + 1) e^{2x} dx = \left| \begin{array}{l} x^2 - x + 1 = u, \quad (2x - 1) dx = du, \\ e^{2x} dx = dv, \quad v = \frac{1}{2} e^{2x} \end{array} \right| =$$

$$= \frac{1}{2} (x^2 - x + 1) e^{2x} - \frac{1}{2} \int (2x - 1) e^{2x} dx = \left| \begin{array}{l} 2x - 1 = u, \quad 2 dx = du, \\ e^{2x} dx = dv, \quad v = \frac{1}{2} e^{2x} \end{array} \right| = \dots$$

II. Интегралы вида

$$\int P_n(x) \ln x dx, \quad \int P_n(x) \arcsin x dx,$$

$$\int P_n(x) \arccos x dx, \quad \int P_n(x) \operatorname{arctg} x dx.$$

Здесь в качестве  $u$  берем функцию, являющуюся множителем при  $P(x)$ .

**Пример.**

$$\int (x^2 + 3x + 2) \ln x dx = \left| \begin{array}{l} \ln x = u, \quad \frac{dx}{x} = du, \\ (x^2 + 3x + 2) dx = dv, \quad v = \frac{x^3}{3} + \frac{3x^2}{2} + 2x \end{array} \right|.$$

III. Интегралы вида

$$\int e^{kx} \cos bx \, dx, \quad \int e^{kx} \sin bx \, dx$$

вычисляются двукратным интегрированием по частям. Здесь все равно, что брать за  $u$  и за  $dv$ , но оба раза нужно выбирать за  $u$  функцию одного и того же типа (либо  $e^{kx}$ , либо тригонометрическую).

Пример.

$$\int e^x \sin 2x \, dx.$$

### 3.2.2. Интегрирование некоторых функций, содержащих квадратный трехчлен

$$I. J = \int \frac{dx}{ax^2 + bx + c}.$$

Выделим полный квадрат в знаменателе:

$$\begin{aligned} ax^2 + bx + c &= a \left[ x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} \right] = a \left[ x^2 + 2 \frac{b}{2a}x + \frac{c}{a} \right] = \\ &= a \left[ \left( x + \frac{b}{2a} \right)^2 + \left( \frac{c}{a} - \frac{b^2}{4a^2} \right) \right] = a \left[ \left( x + \frac{b}{2a} \right)^2 \pm k^2 \right], \end{aligned}$$

где  $\frac{c}{a} - \frac{b^2}{4a^2} = \pm k^2$  и знак (+) или (−) берется в зависимости от того, комплексные или действительные корни у квадратного трехчлена  $ax^2 + bx + c$ .

$$J = \frac{1}{a} \int \frac{dx}{\left( x + \frac{b}{2a} \right)^2 \pm k^2}.$$

Сделаем замену  $x + \frac{b}{2a} = t$ ,  $dx = dt$ . Пришли к табличному интегралу

$$J = \frac{1}{a} \int \frac{dt}{t^2 \pm k^2}.$$

Пример.

$$\int \frac{dx}{x^2 + x + 1} = \int \frac{dx}{\left( x + \frac{1}{2} \right)^2 + \frac{3}{4}} = \int \frac{dt}{t^2 + \frac{3}{4}} = \frac{2}{\sqrt{3}} \arctg \frac{2t}{\sqrt{3}} + C = \frac{2}{\sqrt{3}} \arctg \frac{2x+1}{\sqrt{3}} + C.$$

$$\text{II. } J = \int \frac{Ax+B}{ax^2+bx+c} dx.$$

Произведем тождественное преобразование подынтегрального выражения. Сначала выделим в числителе производную знаменателя:

$$\int \frac{\frac{A}{2a}(2ax+b) + \left(B - \frac{Ab}{2a}\right)}{ax^2+bx+c} dx = \frac{A}{2a} \int \frac{(2ax+b) dx}{ax^2+bx+c} + \left(B - \frac{Ab}{2a}\right) \int \frac{dx}{ax^2+bx+c}.$$

Второй интеграл мы уже умеем вычислять. В первом интеграле сделаем замену  $ax^2+bx+c=t$ ,  $(2ax+b)dx=dt$ .

$$\int \frac{2ax+b}{ax^2+bx+c} dx = \int \frac{dt}{t} = \ln|t| + C = \ln|ax^2+bx+c| + C.$$

$$\text{Пример. } \int \frac{x+2}{x^2-2x-3} dx.$$

$$\text{III. } \int \frac{dx}{\sqrt{ax^2+bx+c}}.$$

Выделяя полный квадрат в знаменателе под знаком корня и производя замену  $x + \frac{b}{2a} = t$ , приходим к интегралу вида  $\int \frac{dt}{\sqrt{t^2 \pm k^2}}$  при  $a > 0$

или  $\int \frac{dt}{\sqrt{k^2 - t^2}}$  при  $a < 0$ . Оба интеграла табличные.

$$\begin{aligned} \text{IV. } \int \frac{Ax+B}{\sqrt{ax^2+bx+c}} dx &= \int \frac{\frac{A}{2a}(2ax+b) + \left(B - \frac{Ab}{2a}\right)}{\sqrt{ax^2+bx+c}} dx = \\ &= \frac{A}{2a} \int \frac{(2ax+b)dx}{\sqrt{ax^2+bx+c}} + \left(B - \frac{Ab}{2a}\right) \int \frac{dx}{\sqrt{ax^2+bx+c}}. \end{aligned}$$

Второй из этих интегралов уже рассмотрен. В первом сделаем замену  $ax^2+bx+c=t$ ,  $(2ax+b)dx=dt$ :

$$\int \frac{dt}{\sqrt{t}} = 2\sqrt{t} + C = 2\sqrt{ax^2+bx+c} + C.$$

$$\text{Пример. } \int \frac{2x+1}{\sqrt{x^2+4x-3}} dx.$$



V. Интегралы вида  $\int \frac{dx}{(mx+n)\sqrt{ax^2+bx+c}}$  подстановкой  $t = \frac{1}{mx+n}$  ( $mx+n = \frac{1}{t}$ ) приводятся к интегралам рассмотренных типов.

Рассмотрим интегралы вида  $\int \sqrt{x^2 + A} dx$ ,  $\int \sqrt{a^2 - x^2} dx$ .

$$J = \int \sqrt{x^2 + A} dx = \int \frac{x^2 + A}{\sqrt{x^2 + A}} dx = A \int \frac{dx}{\sqrt{x^2 + A}} + \int x \cdot \frac{x}{\sqrt{x^2 + A}} dx =$$

$$= \left| \begin{array}{l} x = u \\ dx = du \end{array} \right| \frac{x}{\sqrt{x^2 + A}} dx = dv, \quad v = \sqrt{x^2 + A} \Big| = A \ln |x + \sqrt{x^2 + A}| + x\sqrt{x^2 + A} - J \Rightarrow$$

$$\Rightarrow J = \frac{A}{2} \ln |x + \sqrt{x^2 + A}| + \frac{x}{2} \sqrt{x^2 + A} + C.$$

$$J_1 = \int \sqrt{a^2 - x^2} dx = \frac{x}{2} \sqrt{a^2 - x^2} + \frac{a^2}{2} \arcsin \frac{x}{a} + C.$$

### 3.3. Интегрирование рациональных дробей

Определение рациональной дроби. Интегрирование простейших рациональных дробей. Разложение рациональной дроби на простейшие. Метод неопределенных коэффициентов. Правила интегрирования рациональных дробей.

#### 3.3.1. Определение рациональной дроби.

##### Интегрирование простейших рациональных дробей

Рациональной дробью называется выражение вида

$$R(x) = \frac{P_m(x)}{Q_n(x)},$$

где  $P_m$  — многочлен степени  $m$ , а  $Q_n$  — многочлен степени  $n$ . Если  $m < n$ , то дробь правильная,  $m \geq n$  — дробь неправильная.

Всякая неправильная дробь может быть представлена в виде суммы многочлена и правильной рациональной дроби. Для этого нужно числитель разделить на знаменатель (выделить целую часть).

Пусть

$$P_m(x) = Q_n(x) \cdot L(x) + r(x),$$

где  $L(x)$  — частное от деления, а  $r(x)$  — остаток.

Тогда

$$\frac{P_m(x)}{Q_n(x)} = L(x) + \frac{r(x)}{Q_n(x)},$$

где степень  $r(x)$  меньше степени  $Q_n(x)$ . Тогда

$$\int R(x) dx = \int L(x) dx + \int \frac{r(x)}{Q_n(x)} dx.$$

Таким образом, нужно научиться интегрировать правильную дробь.

Как будет показано ниже, интегрирование правильной рациональной дроби может быть сведено к интегрированию алгебраической суммы так называемых простейших дробей следующих четырех видов.

$$\text{I. } \int \frac{A}{x-\alpha} dx. \quad \text{II. } \int \frac{A}{(x-\alpha)^n} dx.$$

$$\text{III. } \int \frac{Mx+N}{x^2+px+q} dx. \quad \text{IV. } \int \frac{Mx+N}{(x^2+px+q)^n} dx.$$

$$\left(\frac{p^2}{4} - q\right) < 0.$$

Покажем, как они интегрируются.

$$\text{I. } \int \frac{A}{x-\alpha} dx = A \int \frac{dx}{x-\alpha} = A \int \frac{d(x-\alpha)}{x-\alpha} = A \ln|x-\alpha| + C.$$

$$\text{II. } \int \frac{A}{(x-\alpha)^n} dx = A \int \frac{d(x-\alpha)}{(x-\alpha)^n} = A \frac{(x-\alpha)^{1-n}}{1-n} + C.$$

$$\text{III. } \int \frac{Mx+N}{x^2+px+q} dx \text{ — уже умеем интегрировать.}$$

$$\begin{aligned} \text{IV. } \int \frac{Mx+N}{(x^2+px+q)^n} dx &= \int \frac{\frac{M}{2}(2x+p) + \left(N - \frac{Mp}{2}\right)}{(x^2+px+q)^n} dx = \\ &= \frac{M}{2} \underbrace{\int \frac{2x+p}{(x^2+px+q)^n} dx}_J + \left(N - \frac{Mp}{2}\right) \underbrace{\int \frac{dx}{(x^2+px+q)^n}}_{J_n} \end{aligned}$$

$$x^2 + px + q = t, \quad (2x+p)dx = dt \Rightarrow$$

$$J = \int \frac{dt}{t^n} = \frac{1}{1-n} \frac{1}{t^{n-1}} + C = \frac{1}{1-n} \frac{1}{(x^2 + px + q)^{n-1}} + C.$$

$$J_n = \int \frac{dx}{(x^2 + px + q)^n} = \int \frac{dx}{\left[ \left( x + \frac{p}{2} \right)^2 + q - \frac{p^2}{4} \right]^n} = \int \frac{dt}{[t^2 + m^2]^n}$$

$$\left( \begin{array}{l} \left( x + \frac{p}{2} \right) = t, \quad dx = dt, \\ q - \frac{p^2}{4} = m^2 \end{array} \right).$$

$$\begin{aligned} J_n &= \int \frac{dt}{[t^2 + m^2]^n} = \frac{1}{m^2} \int \frac{m^2 + t^2 - t^2}{[t^2 + m^2]^n} dt = \frac{1}{m^2} \int \frac{dt}{\underbrace{[t^2 + m^2]^{n-1}}_{J_{n-1}}} - \frac{1}{m^2} \int \frac{t^2 dt}{[t^2 + m^2]^n} = \\ &= \frac{1}{m^2} J_{n-1} - \frac{1}{m^2} \int \frac{t^2 dt}{[t^2 + m^2]^n} = \end{aligned}$$

$$= \left| \begin{array}{l} t = u, \\ \frac{t}{(t^2 + m^2)^n} dt = dv, \quad v = \frac{1}{2} \int \frac{2t dt}{[t^2 + m^2]^n} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{(+1-n)(t^2 + m^2)^{n-1}} \end{array} \right| =$$

$$= \frac{1}{m^2} J_{n-1} + \frac{1}{m^2} \left[ \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{n-1} \cdot \frac{t}{(t^2 + m^2)^{n-1}} - \frac{1}{2(-1+n)} \int \frac{dt}{\underbrace{(t^2 + m^2)^{n-1}}_{J_{n-1}}} \right];$$

$$J_n = \frac{1}{m^2} J_{n-1} + \frac{t}{m^2 2(n-1)(t^2 + m^2)^{n-1}} - \frac{1}{2m^2(n-1)} J_{n-1};$$

$$J_n = \frac{1}{m^2} \left[ \frac{t}{2(n-1)(t^2 + m^2)^{n-1}} + \frac{2n-3}{2n-2} J_{n-1} \right]. \quad (1)$$

Формула (1) — формула приведения. Используя эту формулу, можно свести вычисление интеграла  $\int \frac{dt}{(t^2 + m^2)^n}$  к вычислению табличного интеграла

$$\int \frac{dt}{t^2 + m^2} = \frac{1}{m} \operatorname{arctg} \frac{t}{m} + C.$$

Пр и м е р.  $\int \frac{dt}{(t^2 + 4)^3}.$

### 3.3.2. Разложение рациональной дроби на простейшие

Как было показано выше, многочлен  $n$ -й степени может быть разложен в произведение линейных и квадратичных множителей:

$$Q_n(x) = (x - \alpha_1)^{k_1} (x - \alpha_2)^{k_2} \dots (x - \alpha_s)^{k_s} (x^2 + p_1x + q_1)^{l_1} \dots (x^2 + p_vx + q_v)^{l_v}.$$

**Теорема.** Правильную рациональную дробь  $\frac{P_m(x)}{Q_n(x)}$  можно единственным образом представить в виде

$$\begin{aligned} \frac{P_m(x)}{Q_n(x)} = & \frac{A_1}{x - \alpha_1} + \frac{A_2}{(x - \alpha_1)^2} + \dots + \frac{Ak_1}{(x - \alpha_1)^{k_1}} + \frac{B_1}{x - \alpha_2} + \frac{B_2}{(x - \alpha_2)^2} + \dots + \\ & + \frac{Bk_2}{(x - \alpha_2)^{k_2}} + \dots + \frac{C_1}{x - \alpha_s} + \frac{C_2}{(x - \alpha_s)^2} + \dots + \frac{Ck_s}{(x - \alpha_s)^{k_s}} + \\ & + \frac{M_1x + N_1}{x^2 + p_1x + q_1} + \frac{M_2x + N_2}{(x^2 + p_1x + q_1)^2} + \dots + \frac{M_{l_1}x + N_{l_1}}{(x^2 + p_1x + q_1)^{l_1}} + \\ & + \frac{E_1x + F_1}{x^2 + p_vx + q_v} + \frac{E_2x + F_2}{(x^2 + p_vx + q_v)^2} + \dots + \frac{E_{l_v}x + F_{l_v}}{(x^2 + p_vx + q_v)^{l_v}}. \end{aligned} \quad (2)$$

Здесь  $A_i, B_i, C_i, M_i, N_i, E_i, F_i$  — действительные числа, которые могут быть найдены методом неопределенных коэффициентов.

Из формулы (2) видно, что линейным множителям в знаменателе соответствуют простейшие дроби типа I и II, а квадратичным — дроби типа III и IV, причем каждому множителю соответствует столько дробей, какова его кратность.

### 3.3.3. Метод неопределенных коэффициентов

Рассмотрим на примере, как применяется этот метод.

$$\frac{2x^2 + 41x - 91}{(x-1)(x+3)(x-4)} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x+3} + \frac{C}{x-4};$$

$$2x^2 + 41x - 91 = A(x-2)(x-3) + B(x-1)(x-3) + C(x-1)(x-2).$$

$$2x^2 + 41x - 91 = Ax^2 - 2Ax - 3Ax + 6A + Bx^2 - Bx - 3Bx + 3B + \\ + Cx^2 - Cx - 2Cx + 2C.$$

$$\left. \begin{array}{l} x^2: 2 = A + B + C \\ x^1: 41 = -5A - 4B - 3C \\ x^0: -91 = 6A + 3B + 2C \end{array} \right\} \Rightarrow A = 4, B = -7, C = 5;$$

$$\int \frac{2x^2 + 41x - 91}{(x-1)(x+3)(x-4)} dx = 4 \int \frac{dx}{x-1} - 7 \int \frac{dx}{x+3} + 5 \int \frac{dx}{x-4}.$$

### 3.3.4. Правила интегрирования рациональных дробей

1. Если рациональная дробь неправильная, выделить целую часть.
2. Разложить знаменатель дроби на множители.
3. Представить дробь в виде суммы простейших дробей с неопределенными коэффициентами.
4. Найти коэффициенты.
5. Вычислить интегралы от простейших дробей.

### 3.4. Метод Остроградского. Интегралы от иррациональных функций

Метод Остроградского. Интегралы от некоторых иррациональных функций.

#### 3.4.1. Метод Остроградского

Если дробь  $\frac{P(x)}{Q(x)}$  — правильная и многочлен  $Q(x)$  имеет кратные корни (действительные и комплексные), то

$$\int \frac{P(x)}{Q(x)} dx = \frac{P_1(x)}{Q_1(x)} + \int \frac{P_2(x)}{Q_2(x)} dx,$$

где  $Q_1(x)$  — наибольший общий делитель  $Q(x)$  и его производной  $Q'(x)$ , а  $Q_2(x) = Q(x) : Q_1(x)$ . Степени многочленов с неопределенными коэффициентами  $P_1(x)$  и  $P_2(x)$  на 1 меньше степеней  $Q_1(x)$  и  $Q_2(x)$  соответственно. Практически  $Q_1(x)$  получают следующим образом. Разложим  $Q(x)$  на множители. Если среди сомножителей есть скобки в степени, большей 1, то уменьшим показатели их степени на 1 и перемножим новые скобки. Это и будет  $Q_1(x)$ . Все остальное —  $Q_2(x)$ .

Пример.

$$\int \frac{x^2 + x - 1}{(x-1)^3(x^2 + x + 1)^2} dx = \frac{Ax^3 + Bx^2 + Cx + D}{(x-1)^2(x^2 + x + 1)} + \int \frac{Mx^2 + Nx + \varepsilon}{(x-1)(x^2 + x + 1)} dx.$$

Далее дифференцируем обе части равенства и находим все коэффициенты методом неопределенных коэффициентов.

#### 3.4.2. Интегралы от некоторых иррациональных функций

Иррациональной функцией называется функция, которая содержит переменную интегрирования по знакам радикала.

Выше мы научились интегрировать в конечном виде рациональные функции. В дальнейшем, основным приемом интегрирования тех или других классов функций будет отыскание таких подстановок, которые привели бы подынтегральное выражение к рациональному виду и дали бы возможность представить интеграл в конечном виде.

Этот прием называется методом рационализации подынтегральной функции.

Не от всякой иррациональной функции интеграл выражается в конечном виде через элементарные функции. Рассмотрим те интегралы, подынтегральная функция в которых допускает рационализацию.

$$1. \int R(x, \sqrt[n]{ax+b}) dx.$$

Здесь запись  $R(x, \sqrt[n]{ax+b})$  означает, что над величинами  $x, \sqrt[n]{ax+b}$  производятся только рациональные операции (сложение, вычитание, умножение, деление).

Этот интеграл сводится к интегралу от рационального выражения с помощью подстановки

$$ax+b = z^n; \quad dx = \frac{nz^{n-1}}{a} dz, \quad x = \frac{z^n - b}{a}.$$

Тогда

$$\int R(x, \sqrt[n]{ax+b}) dx = \int R\left(\frac{z^n - b}{a}, z\right) \frac{nz^{n-1}}{a} dz.$$

Пример.

$$\int \frac{x - \sqrt{x}}{\sqrt{x} + 1} dx = \left| \begin{array}{l} x = z^2, \\ dx = 2z dz \end{array} \right| = \int \frac{z^2 - z}{z + 1} 2z dz.$$

$$2. \int R\left(x, \left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{\frac{p_1}{q_1}}, \left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{\frac{p_2}{q_2}}, \dots, \left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{\frac{p_k}{q_k}}\right) dx.$$

Этот интеграл приводится к интегралу от рациональной функции заменой

$$\frac{ax+b}{cx+d} = z^S,$$

где  $S$  — наименьшее общее кратное чисел  $q_1, q_2, \dots, q_k$  (общий знаменатель дробей  $\frac{p_1}{q_1}, \frac{p_2}{q_2}, \dots, \frac{p_k}{q_k}$ ).

Пример.

$$\int \frac{\sqrt{x+1} + x}{\sqrt[3]{x+1} - 2} dx = \left| \begin{array}{l} x+1 = z^6, \\ dx = 6z^5 dz \end{array} \right| = \int \frac{z^3 + z^6 - 1}{z^2 - 2} \cdot 6z^5 dz.$$

После выделения целой части получим

$$\begin{aligned} 6 \int \left( z^9 + 2z^7 + z^6 + 4z^5 + 2z^4 + 8z^3 + 4z^2 + 16z + 8 + \frac{32z+15}{z^2-2} \right) dz = \\ = 6 \left( \frac{z^{10}}{10} + \frac{z^8}{4} + \frac{z^7}{7} + \frac{2z^6}{3} + \frac{2z^5}{5} + 2z^4 + \frac{4z^3}{3} + 8z^2 + 8z \right) + \\ + 96 \int \frac{d(z^2-2)}{z^2-2} + 90 \int \frac{dz}{z^2-2} = \dots \end{aligned}$$

$$3. \int \frac{P_n(x)}{\sqrt{ax^2+bx+c}} dx = Q_{n-1}(x) \sqrt{ax^2+bx+c} + \lambda \int \frac{dx}{\sqrt{ax^2+bx+c}},$$

где  $Q_{n-1}(x)$  — некоторый многочлен степени  $n-1$ , а  $\lambda$  — число, подлежащее определению.

Пример.

$$\int x^2 \sqrt{x^2+4} dx = \int \frac{x^2(x^2+4)}{\sqrt{x^2+4}} dx = (Ax^3 + Bx^2 + Cx + D) \sqrt{x^2+4} + \lambda \int \frac{dx}{\sqrt{x^2+4}};$$

$$\begin{aligned} x^2 \sqrt{x^2+4} &= (3Ax^2 + 2Bx + C) \sqrt{x^2+4} + \\ &+ (Ax^3 + Bx^2 + Cx + D) \frac{x}{\sqrt{x^2+4}} + \frac{\lambda}{\sqrt{x^2+4}}; \end{aligned}$$

$$A = \frac{1}{4}, \quad B = 0, \quad C = \frac{1}{2}, \quad D = 0, \quad \lambda = -2.$$

$$\begin{aligned} \int x^2 \sqrt{x^2+4} dx &= \left( \frac{1}{4}x^3 + \frac{1}{2}x \right) \sqrt{x^2+4} - 2 \int \frac{dx}{\sqrt{x^2+4}} = \\ &= \left( \frac{1}{4}x^3 + \frac{1}{2}x \right) \sqrt{x^2+4} - 2 \ln|x + \sqrt{x^2+4}| + C. \end{aligned}$$



### 3.5. Интегрирование тригонометрических функций. Универсальная тригонометрическая подстановка

Универсальная тригонометрическая подстановка. Методы интегрирования некоторых специальных классов тригонометрических функций.

#### 3.5.1. Универсальная тригонометрическая подстановка

Рассмотрим интеграл вида

$$\int R(\sin x, \cos x) dx,$$

где  $R$  — рациональная функция  $\sin x$  и  $\cos x$ . Покажем, что с помощью подстановки  $\operatorname{tg} \frac{x}{2} = t$  этот интеграл всегда приводится к интегралу от рациональной функции. Имеем

$$\sin x = 2 \sin \frac{x}{2} \cos \frac{x}{2} = \frac{2 \sin \frac{x}{2} \cos \frac{x}{2}}{\sin^2 \frac{x}{2} + \cos^2 \frac{x}{2}} = \frac{2 \operatorname{tg} \frac{x}{2}}{1 + \operatorname{tg}^2 \frac{x}{2}} = \frac{2t}{1+t^2}.$$

$$\cos x = \frac{\cos^2 \frac{x}{2} - \sin^2 \frac{x}{2}}{\cos^2 \frac{x}{2} + \sin^2 \frac{x}{2}} = \frac{1 - \operatorname{tg}^2 \frac{x}{2}}{1 + \operatorname{tg}^2 \frac{x}{2}} = \frac{1-t^2}{1+t^2}.$$

$$\frac{x}{2} = \operatorname{arctg} t \Rightarrow 2 \operatorname{arctg} t, \quad dx = \frac{2dt}{1+t^2}.$$

$$\int R(\sin x, \cos x) dx = \int R\left(\frac{2t}{1+t^2}; \frac{1-t^2}{1+t^2}\right) \frac{2dt}{1+t^2}.$$

Пример 1.  $\int \frac{dx}{\sin x} = \int \frac{\frac{2dt}{1+t^2}}{\frac{2t}{1+t^2}} = \int \frac{dt}{t} = \ln|t| + C = \ln\left|\operatorname{tg} \frac{x}{2}\right| + C.$

Аналогично

$$\int \frac{dx}{\cos x} = \ln\left|\operatorname{tg}\left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{4}\right)\right| + C.$$

Пример 2.

$$\int \frac{dx}{3+5 \cos x} = 2 \int \frac{dt}{8-2t^2} = \frac{1}{4} \ln \left| \frac{2+t}{2-t} \right| + C = \frac{1}{4} \ln \left| \frac{2 + \operatorname{tg} \frac{x}{2}}{2 - \operatorname{tg} \frac{x}{2}} \right| + C.$$

Итак, с помощью указанной подстановки можно проинтегрировать любую функцию вида  $R(\sin x, \cos x)$ . Поэтому подстановка называется универсальной. Однако ее применение иногда приводит к слишком сложным рациональным функциям. Поэтому полезно знать и другие методы интегрирования тригонометрических функций.

### 3.5.2. Методы интегрирования некоторых специальных классов тригонометрических функций

1.  $\int R(\sin x) \cdot \cos x \, dx$ .

Здесь используется подстановка  $\sin x = t$ ;  $\cos x \, dx = dt$ .

Пример.

$$\int \frac{\cos^3 x}{2 + \sin x} \, dx = \int \frac{1 - \sin^2 x}{2 + \sin x} \cos x \, dx = \int \frac{1 - t^2}{2 + t} \, dt = \int (2 - t) \, dt - 3 \int \frac{dt}{2 + t} = \dots$$

2.  $\int R(\cos x) \sin x \, dx$ .

Здесь используется подстановка  $t = \cos x$ ;  $dt = -\sin x \, dx$ .

3.  $\int R(\operatorname{tg} x) \, dx$ .

Подстановка  $\operatorname{tg} x = t$ ,  $dx = \frac{dt}{1+t^2}$ .

Пример 1.  $\int \operatorname{tg}^3 x \, dx = \left| \operatorname{tg} x = t, \, dx = \frac{dt}{1+t^2} \right| = \int \frac{t^3}{1+t^2} \, dt = \int t \, dt - \int \frac{t \, dt}{t^2 + 1} =$

$$= \frac{t^2}{2} - \frac{1}{2} \int \frac{d(t^2 + 1)}{t^2 + 1} = \frac{t^2}{2} - \frac{1}{2} \ln |t^2 + 1| + C = \frac{\operatorname{tg}^2 x}{2} - \frac{1}{2} \ln |\operatorname{tg}^2 x + 1| + C.$$

Пример 2.  $\int \frac{\operatorname{tg} x}{1 + \operatorname{tg} x} \, dx = \int \frac{t}{1+t} \cdot \frac{dt}{1+t^2}.$

4.  $\int R(\sin x, \cos x) dx$ , где  $\sin x$  и  $\cos x$  входят только в четных степенях, берется подстановкой  $\operatorname{tg} x = t$ ;

$$\cos^2 x = \frac{1}{1 + \operatorname{tg}^2 x} = \frac{1}{1 + t^2}; \quad \sin^2 x = \frac{\operatorname{tg}^2 x}{1 + \operatorname{tg}^2 x} = \frac{t^2}{1 + t^2}.$$

Пр и м е р.  $\int \frac{dx}{4 - \sin^2 x} = \int \frac{dt}{4 + 3t^2}.$

5.  $\int \sin^m x \cdot \cos^n x dx = J,$

где  $m$  или  $n$  — нечетное. Пусть  $m = 2k + 1$ .

$$J = \int \sin^{2k+1} x \cos^n x dx = -\int (1 - \cos^2 x)^k \cos^n x d(\cos x) = -\int (1 - t^2)^k t^n dt,$$

где  $t = \cos x$ .

Пр и м е р.  $\int \frac{\sin^3 x}{\cos^2 x} dx = -\int \frac{1 - \cos^2 x}{\cos^2 x} d(\cos x) = -\int \frac{1 - t^2}{t^2} dt = \int dt - \int \frac{dt}{t^2} =$   
 $= t + \frac{1}{t} + C = \cos x + \frac{1}{\cos x} + C.$

6.  $\int \sin^m x \cos^n x$ , где  $m$  и  $n$  — четные неотрицательные числа,  $m = 2k$ ,  $n = 2p$ .

Формулы понижения степени имеют вид

$$(\sin x)^{2k} = (\sin^2 x)^k = \left( \frac{1 - \cos 2x}{2} \right)^k;$$

$$(\cos x)^{2p} = (\cos^2 x)^p = \left( \frac{1 + \cos 2x}{2} \right)^p.$$

Подставляя полученные выражения под знак интеграла и возводя в степени  $k$  и  $p$ , получим  $\cos 2x$  в четных и нечетных степенях. Нечетные степени интегрируются, как было указано выше, а с четными степенями вновь проделываем ту же процедуру. Таким образом, дойдем до интегралов вида  $\int \cos kx dx$ , которые легко вычисляются.

П р и м е р.  $\int \cos^4 x \, dx = \int \left( \frac{1 + \cos 2x}{2} \right)^2 dx = \frac{1}{4} \int (1 + 2 \cos 2x + \cos^2 2x) \, dx =$

$$= \frac{1}{4} + \frac{1}{4} \sin 2x + \int \frac{1 + \cos 4x}{2} dx = \dots$$

7.  $\int \frac{dx}{\sin^m x \cos^n x}$ , где  $m$  и  $n$  — целые числа одинаковой четности.

$$J = \int (\operatorname{cosec} x)^m (\sec x)^{n-2} d(\operatorname{tg} x) \Rightarrow \operatorname{tg} x = t.$$

П р и м е р.  $\int \frac{dx}{\sin x \cos^3 x} = \int \frac{1}{\sin x} \cdot \frac{1}{\cos x} d(\operatorname{tg} x) =$

$$= \int \left( \frac{1}{\operatorname{tg}^2 x} + 1 \right)^{\frac{1}{2}} (\operatorname{tg}^2 x + 1)^{\frac{1}{2}} d(\operatorname{tg} x) = \int \frac{t^2 + 1}{t} dt = \dots$$

8.  $\int \sin mx \cdot \cos nx \, dx$ ,  $\int \sin mx \cdot \sin nx \, dx$ ,  $\int \cos mx \cdot \cos nx \, dx$  вычисляются с использованием следующих формул:

$$\sin mx \cdot \cos nx = \frac{1}{2} [\sin (m+n)x + \sin (m-n)x],$$

$$\cos mx \cdot \cos nx = \frac{1}{2} [\cos (m+n)x + \cos (m-n)x],$$

$$\sin mx \cdot \sin nx = \frac{1}{2} [\cos (m-n)x - \cos (m+n)x].$$

П р и м е р.  $\int \sin 2x \cdot \cos 3x \, dx = \frac{1}{2} \int (\sin 5x - \sin x) \, dx =$

$$= \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{5} (-\cos 5x) + \frac{1}{2} \cos x + C.$$

### 3.6. Тригонометрические подстановки

Тригонометрические подстановки. О функциях, интегралы от которых не выражаются через элементарные функции.

#### 3.6.1. Тригонометрические подстановки

Рассмотрим интеграл вида

$$J = \int R(x, \sqrt{ax^2 + bx + c}) dx,$$

где  $a \neq 0$ ,  $b^2 - 4ac \neq 0$ . Покажем, что этот интеграл может быть преобразован к интегралу вида

$$\int R(\cos t, \sin t) dx.$$

В квадратном трехчлене  $ax^2 + bx + c$  выделим полный квадрат:

$$ax^2 + bx + c = a \left( x - \frac{b}{2a} \right)^2 + c - \frac{b^2}{4a}.$$

Положим  $x - \frac{b}{2a} = z$ ,  $dx = dz$ , тогда

$$\sqrt{ax^2 + bx + c} = \sqrt{az^2 + \left( c - \frac{b^2}{4a} \right)}.$$

Рассмотрим возможные случаи.

$$1. \ a > 0; \ c - \frac{b^2}{4a} < 0.$$

Тогда  $a = m^2$ ,  $-c + \frac{b^2}{4a} = n^2$  и  $\sqrt{m^2 z^2 - n^2} = \sqrt{ax^2 + bx + c}$ .

$$2. \ a > 0; \ c - \frac{b^2}{4a} > 0.$$

Здесь  $a = m^2$ ,  $c - \frac{b^2}{4a} = n^2$  и  $\sqrt{ax^2 + bx + c} = \sqrt{m^2 z^2 + n^2}$ .

$$3. \ a < 0; \ c - \frac{b^2}{4a} > 0.$$

Тогда  $a = -m^2$ ,  $c - \frac{b^2}{4a} = n^2$  и  $\sqrt{ax^2 + bx + c} = \sqrt{n^2 - m^2 z^2}$ .

$$4. \ a < 0, \ c - \frac{b^2}{4a} < 0.$$

В этом случае  $\sqrt{ax^2 + bx + c}$  есть комплексное число при любом  $x$ .

Таким образом, наш интеграл преобразуется к интегралу одного из следующих типов.

$$\text{I. } \int R(z, \sqrt{m^2 z^2 - n^2}) dz.$$

$$\text{II. } \int R(z, \sqrt{m^2 z^2 + n^2}) dz.$$

$$\text{III. } \int R(z, \sqrt{n^2 - m^2 z^2}) dz.$$

Для вычисления каждого из этих интегралов используется тригонометрическая подстановка, позволяющая свести его к интегралу от рациональной функции от  $\sin t$  и  $\cos t$ .

$$\text{I. } \int R(z, \sqrt{n^2 - m^2 z^2}) dz.$$

Здесь используется подстановка  $z = \frac{n}{m} \sin t$ .

$$\text{Тогда } \sqrt{n^2 - m^2 z^2} = n \sqrt{1 - \sin^2 t} = n \cos t; \quad dz = \frac{n}{m} \cos t \, dt.$$

$$\text{II. } \int R(z, \sqrt{n^2 + m^2 z^2}) dz$$

вычисляется с помощью подстановки  $z = \frac{n}{m} \operatorname{tg} t$ .

$$\text{Тогда } \sqrt{n^2 + m^2 z^2} = n \sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 t} = n \sec t; \quad dz = \frac{n}{m} \sec^2 t \, dt.$$

$$\text{III. } \int R(z, \sqrt{m^2 z^2 - n^2}) dz.$$

Подстановка  $z = \frac{n}{m} \sec t$ . В этом случае

$$\sqrt{m^2 z^2 - n^2} = n \sqrt{\sec^2 t - 1} = n \operatorname{tg} t; \quad dz = \frac{n}{m} \frac{\sin t}{\cos^2 t} dt.$$

Таким образом, в каждом из рассмотренных случаев тригонометрическая подстановка позволяет избавиться от радикала под знаком интеграла.

Примеры.

$$1. \int \frac{dx}{(\sqrt{4+x^2})^3} = \left| \begin{array}{l} x = 2 \operatorname{tg} t \\ dx = \frac{2dt}{\cos^2 t} \end{array} \right| = \int \frac{2dt}{\cos^2 t (\sqrt{4+4 \operatorname{tg}^2 t})^3} = \frac{2}{8} \int \frac{dt}{\cos^2 t \cdot \sec^3 t} =$$

$$= \frac{1}{4} \int \cos t \, dt = \frac{1}{4} \sin t + C = \frac{1}{4} \sin \left( \operatorname{arctg} \frac{x}{2} \right) + C.$$

$$2. \int \sqrt{3-2x-x^2} \, dx = \int \sqrt{4-(x+1)^2} \, dx = \left| \begin{array}{l} x+1 = 2 \sin t \\ dx = 2 \cos t \, dt \end{array} \right| = 4 \int \cos t \cdot \cos t \, dt =$$

$$= 4 \int \cos^2 t \, dt = 2 \int (1 + \cos 2t) \, dt = 2t + \sin 2t + C = \left| t = \frac{\operatorname{arcsin} \frac{x+1}{2}}{2} \right| =$$

$$= 2 \operatorname{arcsin} \frac{x+1}{2} + \frac{x+1}{2} \sqrt{3-2x-x^2} + C.$$

### 3.6.2. О функциях, интегралы которых не выражаются через элементарные функции

Как уже отмечалось выше, всякая непрерывная на  $(a, b)$  функция имеет на этом интервале первообразную. Однако не всякая первообразная выражается в конечном виде через элементарные функции.

$$\int e^{-x^2} dx, \quad \int \frac{\sin x}{x} dx, \quad \int \frac{\cos x}{x} dx, \quad \int \sqrt{1-k^2 \sin^2 x} dx, \quad \int \frac{dx}{\ln x}$$

— первообразные от этих функций существуют, но не могут быть представлены в виде комбинации конечного числа элементарных функций. Тем не менее они хорошо изучены и составлены таблицы их значений. Позже мы познакомимся с методами (приближенными) вычисления таких интегралов.

### 3.7. Определенный интеграл: постановка задачи, существование, свойства

Задачи, приводящие к понятию определенного интеграла. Площадь криволинейной трапеции. Интегральная сумма. Определенный интеграл. Теорема существования определенного интеграла. Свойства определенного интеграла.

#### 3.7.1. Задачи, приводящие к понятию определенного интеграла

К понятию определенного интеграла приводят очень многие задачи механики, физики и техники. С его помощью вычисляются площади фигур, ограниченных кривыми, длины дуг, объемы тел, площади поверхностей, работа, скорость, ускорение и т. д.

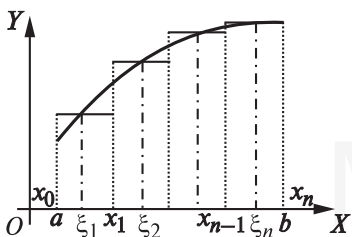


Рис. 3.2

Пусть на  $[a, b]$  задана непрерывная функция  $f(x) \geq 0$ . Поставим задачу о вычислении площади криволинейной трапеции, ограниченной графиком функции  $y = f(x)$ , осью  $OX$ , прямыми  $x = a$ ,  $x = b$  (рис. 3.2).

Разобьем отрезок  $[a, b]$  на  $n$  частей точками

$$x_0 = a, x_1, x_2, \dots, x_{n-1}, x_n = b.$$

Проведем через точки деления прямые, параллельные оси  $OY$ . Тогда трапеция разобьется на  $n$  частей, каждая из которых в свою очередь является криволинейной трапецией.

$$S = \Delta S_1 + \Delta S_2 + \dots + \Delta S_n,$$

$$S = \sum_{i=1}^n \Delta S_i.$$

Вычислить  $\Delta S_i$  не трудно. Для этого выберем точки  $x_{i-1} \leq \xi_i \leq x_i$  и проведем ординаты  $f(\xi_i)$ . Заменим каждую криволинейную трапецию с основанием  $[x_{i-1}, x_i]$  прямоугольником с тем же основанием и высотой  $f(\xi_i)$ . Примем площадь этого прямоугольника за приближенное значение площади трапеции. Обозначим  $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$ . Тогда

$$\Delta S_i \approx f(\xi_i) \Delta x_i, \quad S \approx \sum_{i=1}^n f(\xi_i) \Delta x_i.$$



Таким образом, мы приняли за приближенное значение площади трапеции площадь ступенчатой фигуры, построенной описанным выше образом. Ясно, что чем больше число частей разбиения отрезка  $[a, b]$ , тем меньше площадь ступенчатой фигуры отличается от площади криволинейной трапеции. Следовательно, за площадь криволинейной трапеции естественно принять

$$\lim_{\substack{n \rightarrow \infty \\ \max \Delta x_i \rightarrow 0}} \sum_{i=1}^n f(\xi_i) \Delta x_i = S. \quad (1)$$

Таким образом, мы пришли к необходимости вычислять пределы сумм вида (1). К нахождению таких пределов приводит целый ряд как математических, так и прикладных задач. Поэтому мы займемся изучением таких пределов, отвлекаясь от конкретного содержания задач.

### 3.7.2. Интегральная сумма. Определенный интеграл

Пусть на  $[a, b]$  задана непрерывная функция  $f(x)$ . Разобьем  $[a, b]$  на  $n$  частей точками  $x_0 = a, x_1, x_2, \dots, x_n = b$ . В каждом из отрезков  $[x_{i-1}, x_i]$  выберем точку  $x_{i-1} < \xi_i < x_i$  и вычислим  $f(\xi_i)$ . Умножим  $f(\xi_i)$  на  $\Delta x_i$  и вычислим сумму таких произведений

$$S_n = f(\xi_1) \Delta x_1 + f(\xi_2) \Delta x_2 + \dots + f(\xi_n) \Delta x_n. \quad (2)$$

Сумма вида (2) называется интегральной суммой для функции  $f(x)$  на отрезке  $[a, b]$ .

**ОПРЕДЕЛЕНИЕ.** Если существует предел интегральной суммы (2) при неограниченном увеличении числа отрезков разбиения ( $n \rightarrow \infty$ ) и при стремлении длины наибольшего отрезка разбиения к нулю ( $\max \Delta x_i \rightarrow 0$ ), который не зависит ни от способа разбиения отрезка  $[a, b]$ , ни от способа выбора точек  $\xi_i$ , то такой предел называется определенным интегралом от функции  $f(x)$  на отрезке  $[a, b]$  и обозначается символом  $\int_a^b f(x) dx$ :

$$\int_a^b f(x) dx = \lim_{\substack{n \rightarrow \infty \\ \max \Delta x_i \rightarrow 0}} \sum_{i=1}^n f(\xi_i) \Delta x_i. \quad (3)$$

Числа  $a$  и  $b$  — пределы интегрирования,  $x$  — переменная интегрирования,  $f(x)$  — подынтегральная функция.

Сравнивая формулы (3) и (1), видим, что если  $f(x) \geq 0$ , то  $\int_a^b f(x)dx$  — площадь криволинейной трапеции, ограниченной графиком  $f(x)$ , прямыми  $x = a$ ,  $x = b$  и осью  $OX$ . Это и есть геометрический смысл определенного интеграла.

### 3.7.3. Теорема существования определенного интеграла

Всякая непрерывная на отрезке  $[a, b]$  функция интегрируема на нем.

Можно показать, что интегрируема и ограниченная на  $[a, b]$  функция, имеющая на нем конечное число точек разрыва.

При введении понятия определенного интеграла мы предполагали, что  $a < b$ . Если  $a > b$ , то по определению полагают

$$\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx,$$

т. е. при перестановке пределов интегрирования интеграл меняет знак на противоположный.

По определению считают, что

$$\int_a^a f(x)dx = 0.$$

### 3.7.4. Свойства определенного интеграла

1. Постоянный множитель можно выносить за знак интеграла:

$$\int_a^b kf(x)dx = k \int_a^b f(x)dx.$$

*Доказательство.*

$$\int_a^b kf(x)dx = \lim_{\substack{n \rightarrow \infty \\ \max \Delta x_i \rightarrow 0}} \sum_{i=1}^n kf(\xi_i)\Delta x_i = k \lim_{\substack{n \rightarrow \infty \\ \max \Delta x_i \rightarrow 0}} \sum_{i=1}^n f(\xi_i)\Delta x_i = k \int_a^b f(x)dx.$$

$$2. \int_a^b [f(x) \pm \varphi(x)] dx = \int_a^b f(x) dx \pm \int_a^b \varphi(x) dx.$$

Доказательство аналогично.

3. Если отрезок  $[a, b]$  разбит на две части  $[a, c]$  и  $[c, b]$ , то

$$\int_a^b f(x) dx = \int_a^c f(x) dx + \int_c^b f(x) dx.$$

*Доказательство.* Так как предел интегральной суммы не зависит от способа разбиения отрезка  $[a, b]$ , то при составлении интегральной суммы включим точку  $c$  в точки разбиения:  $c = x_k$ . Тогда

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^n f(\xi_i) \Delta x_i &= \sum_{i=1}^k f(\xi_i) \Delta x_i + \sum_{i=k+1}^n f(\xi_i) \Delta x_i; \\ \int_a^b f(x) dx &= \lim_{\substack{n \rightarrow \infty \\ \max \Delta x_i \rightarrow 0}} \sum_{i=1}^n f(\xi_i) \Delta x_i = \lim_{\substack{n \rightarrow \infty \\ \max \Delta x_i \rightarrow 0}} \sum_{i=1}^k f(\xi_i) \Delta x_i + \\ &+ \lim_{\substack{n \rightarrow \infty \\ \max \Delta x_i \rightarrow 0}} \sum_{i=k+1}^n f(\xi_i) \Delta x_i = \int_a^c f(x) dx + \int_c^b f(x) dx. \end{aligned}$$

*Замечание.* Свойство 3 было сформулировано для случая, когда  $a < c < b$ . Однако оно остается справедливым и для случая, когда  $c \notin [a, b]$ . Пусть, например,  $c < a < b$ . Тогда

$$\int_c^b f(x) dx = \int_c^a f(x) dx + \int_a^b f(x) dx.$$

Но  $\int_c^a f(x) dx = -\int_a^c f(x) dx$ . Поэтому

$$\int_c^b f(x) dx = -\int_a^c f(x) dx + \int_a^b f(x) dx \Rightarrow \int_c^b f(x) dx = \int_a^c f(x) dx + \int_a^b f(x) dx.$$

4. Если  $f(x) \geq 0$  на  $[a, b]$ , то  $\int_a^b f(x) dx \geq 0$  на  $[a, b]$ .

*Доказательство.*  $f(\xi_i) \geq 0, \Delta x_i > 0 \Rightarrow \sum_{i=1}^n f(\xi_i) \Delta x_i \geq 0 \Rightarrow$

$$\lim_{\substack{n \rightarrow \infty \\ \max \Delta x_i \rightarrow 0}} \sum_{i=1}^n f(\xi_i) \Delta x_i \geq 0.$$

$$5. f(x) \geq 0, \varphi(x) \geq 0, f(x) \geq \varphi(x) \Rightarrow \int_a^b f(x) dx \geq \int_a^b \varphi(x) dx.$$

*Доказательство.*  $f(x) - \varphi(x) \geq 0 \Rightarrow \int_a^b (f(x) - \varphi(x)) dx \geq 0 \Rightarrow$

$$\int_a^b f(x) dx \geq \int_a^b \varphi(x) dx.$$

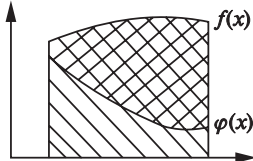


Рис. 3.3

На рис. 3.3 дана геометрическая интерпретация данного свойства — одна трапеция содержит другую.

**Следствия.**

$$-|f(x)| \leq f(x) \leq |f(x)| \Rightarrow -\int_a^b |f| dx \leq \int_a^b f dx \leq \int_a^b |f| dx,$$

$$\left| \int_a^b f dx \right| \leq \int_a^b |f| dx.$$

6. Если  $m$  и  $M$  — наименьшее и наибольшее значения функции на  $[a, b]$ , то

$$m(b-a) \leq \int_a^b f(x) dx \leq M(b-a).$$

*Доказательство.* Так как  $m \leq f(x) \leq M$ , то

$$\int_a^b m dx \leq \int_a^b f(x) dx \leq \int_a^b M dx$$

и

$$m(b-a) \leq \int_a^b f(x) dx \leq M(b-a).$$

### 3.8. Определенный интеграл: теорема о среднем, формула Ньютона – Лейбница, замена переменной, интегрирование по частям

Теорема о среднем значении определенного интеграла. Вычисление определенного интеграла. Формула Ньютона – Лейбница. Замена переменных в определенном интеграле. Интегрирование по частям в определенном интеграле.

#### 3.8.1. Теорема о среднем значении определенного интеграла

Если  $f(x)$  непрерывна на  $[a, b]$ , то на  $[a, b]$  найдется такая точка  $c$ , что

$$\int_a^b f(x) dx = f(c)(b-a). \quad (1)$$

*Доказательство.* Так как  $f(x)$  непрерывна на  $[a, b]$ , то она ограничена, поэтому  $m \leq f(x) \leq M$ , следовательно, выполнено неравенство

$$m(b-a) \leq \int_a^b f(x) dx \leq M(b-a)$$

(свойство 6 определенного интеграла). Обозначим  $\mu = \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx$ .

Тогда из последнего неравенства вытекает, что

$$m \leq \mu \leq M.$$

По свойству непрерывных функций существует такое  $c$ :  $a \leq c \leq b$ , что  $f(c) = \mu$  и называется средним значением функции на отрезке  $[a, b]$ :

$$f(c) = \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx \Rightarrow \int_a^b f(x) dx = f(c)(b-a).$$

**Геометрическая интерпретация.** Площадь криволинейной трапеции равна площади прямоугольника с тем же основанием и высотой, равной ординате кривой в некоторой промежуточной точке  $c$  (рис. 3.4).

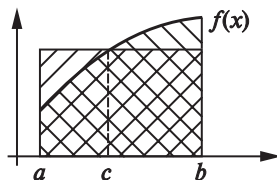


Рис. 3.4

## 3.8.2. Вычисление определенного интеграла.

## Формула Ньютона – Лейбница

Пусть в определенном интеграле  $\int_a^b f(x)dx$ , где  $f(x)$  — непрерывная функция, нижний предел закреплён, верхний предел меняется. Тогда будет меняться и значение определенного интеграла, т. е. он будет функцией переменного верхнего предела.

Обозначим переменный верхний предел через  $x$ , а переменную интегрирования через  $t$ . Тогда

$$\Phi(x) = \int_a^x f(t) dt.$$

Если  $f(x) \geq 0$ , то  $\Phi(x)$  — переменная площадь криволинейной трапеции. Она меняется при изменении  $x$  (рис. 3.5).

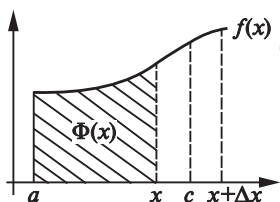


Рис. 3.5

Найдем производную  $\Phi(x)$  по  $x$ . Для этого дадим  $x$  приращение  $\Delta x$ :

$$\Phi(x + \Delta x) = \int_a^{x+\Delta x} f(t) dt = \Phi(x) + \int_x^{x+\Delta x} f(t) dt,$$

$$\Delta\Phi = \Phi(x + \Delta x) - \Phi(x) = \int_x^{x+\Delta x} f(t) dt.$$

Применим к интегралу  $\int_x^{x+\Delta x} f(t) dt$  теорему о среднем значении:

$$\int_x^{x+\Delta x} f(t) dt = f(c) \Delta x,$$

где  $x \leq c \leq x + \Delta x$ . Тогда  $\frac{\Delta\Phi}{\Delta x} = f(c)$ . При  $\Delta x \rightarrow 0$   $c \rightarrow x$ ;

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta\Phi}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} f(c) = f(x)$$

(в силу непрерывности функции  $f(x)$ ). Окончательно,

$$\Phi'(x) = f(x).$$

Таким образом, производная определенного интеграла по переменному верхнему пределу равна подынтегральной функции, в которую вместо переменной интегрирования подставлено значение верхнего предела.

**З а м е ч а н и е.** Мы попутно доказали, что всякая непрерывная функция имеет первообразную. Действительно, из равенства (2) следует, что  $\Phi(x)$  есть первообразная для  $f(x)$ .

**Теорема.** Если  $F(x)$  есть какая-либо первообразная от непрерывной функции  $f(x)$ , то

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a). \quad (3)$$

*Доказательство.* Пусть  $F(x)$  — какая-либо первообразная для  $f(x)$ .

Так как  $\Phi(x) = \int_a^x f(x)dx$  также первообразная, а все первообразные отличаются на постоянную, то

$$\int_a^x f(t)dt = F(x) + C.$$

Найдем  $C$ . При  $x = a$  имеем

$$\int_a^a f(t)dt = 0 = F(a) + C;$$

поэтому  $C = -F(a)$ ,

$$\int_a^x f(t)dt = F(x) - F(a).$$

При  $x = b$  получаем формулу (3). Иногда ее записывают в виде

$$\int_a^b f(x)dx = F(x)|_a^b = F(b) - F(a).$$

Таким образом, определенный интеграл равен приращению первообразной на отрезке интегрирования.

Формула (3) была получена И. Ньютоном и Г. Лейбницем. С ее открытием математика получила практический удобный метод вычисления интеграла, и только тогда интеграл получил то значение в решении прикладных задач, которое он имеет сейчас. Пределы же интегральных сумм считал еще Архимед, а Иоганн Кеплер в свое время опубликовал книгу «Новая стереометрия винных бочек» в которой привел результаты вычисления объемов тел вращения с помощью интегральных сумм.

**З а м е ч а н и е.** Для разрывных подынтегральных функций формула Ньютона – Лейбница может не иметь места.

### 3.8.3. Замена переменной в определенном интеграле

Для вычисления определенного интеграла, так же, как и для вычисления неопределенного интеграла, удобно прибегать к замене переменной.

**Теорема.** Пусть дан интеграл

$$\int_a^b f(x) dx,$$

где  $f(x)$  непрерывна на  $[a, b]$ .

Введем новую переменную по формуле  $x = \varphi(t)$ . Пусть числа  $\alpha$  и  $\beta$  таковы, что:

- 1)  $\varphi(\alpha) = a, \varphi(\beta) = b$ ;
- 2)  $\varphi(t)$  и  $\varphi'(t)$  непрерывны на  $[\alpha, \beta]$ ;
- 3)  $f[\varphi(t)]$  определена и непрерывна на  $[\alpha, \beta]$ .

Тогда

$$\int_a^b f(x) dx = \int_{\alpha}^{\beta} f[\varphi(t)] \varphi'(t) dt.$$

**Доказательство.** Если  $F(x)$  — какая-либо первообразная для  $f(x)$ , то

$$\int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a). \quad (4)$$

По формуле, которая была выведена для неопределенного интеграла,

$$\int f[\varphi(t)] \varphi'(t) dt = F[\varphi(t)] + C.$$



Поэтому

$$\int_{\alpha}^{\beta} f[\varphi(t)]\varphi'(t) dt = F[\varphi(t)] \Big|_{\alpha}^{\beta} = F[\varphi(\alpha)] - F[\varphi(\beta)] = F(b) - F(a). \quad (5)$$

Так как правые части в (4) и (5) совпадают, то равны и их левые части, поэтому

$$\int_a^b f(x) dx = \int_{\alpha}^{\beta} f[\varphi(t)]\varphi'(t) dt.$$

**Пример 1.**

$$\int_0^1 \sqrt{1-x^2} dx = \left| \begin{array}{l} x = \sin t; \quad dx = \cos t dt, \\ 0 = \sin \alpha \Rightarrow \alpha = 0, \\ 1 = \sin \beta \Rightarrow \beta = \frac{\pi}{2} \end{array} \right| = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 t dt.$$

**Пример 2.**

$$\int_0^{\ln 2} \sqrt{e^x - 1} dx = \left| \begin{array}{l} e^x - 1 = t^2, \quad x = \ln(t^2 + 1) \\ \alpha = 0, \\ \beta = 1, \end{array} \right| \quad dx = \frac{2t dt}{t^2 + 1} \quad \left| \begin{array}{l} = \int_0^1 \frac{2t^2 dt}{t^2 + 1} \end{array} \right|.$$

### 3.8.4. Интегрирование по частям в определенном интеграле

Пусть  $u(x)$  и  $v(x)$  — дифференцируемые на  $[a, b]$  функции.

$$d(uv) = u dv + v du,$$

$$\int_a^b d(uv) = \int_a^b u dv + \int_a^b v du.$$

$$\text{Но } \int_a^b d(uv) = (uv) \Big|_a^b \Rightarrow \int_a^b u dv = uv \Big|_a^b - \int_a^b v du.$$

**Пример.**

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} x \cos x dx = x \sin x \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x dx = x \sin x \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} + \cos x \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi}{2} - 1.$$

### 3.9. Геометрические приложения определенного интеграла

Вычисление площадей плоских фигур в прямоугольных координатах. Вычисление площадей для случая задания их границ уравнениями в параметрической форме. Вычисление площади криволинейного сектора в полярных координатах.

#### 3.9.1. Вычисление площадей плоских фигур в прямоугольных координатах

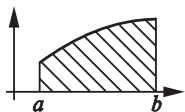


Рис. 3.6

1. Пусть  $f(x) \geq 0$  — непрерывная на  $[a, b]$  функция. Тогда

$$S = \int_a^b f(x) dx.$$

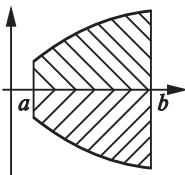


Рис. 3.7

2. Если  $f(x) \leq 0$  на  $[a, b]$ , то из соображений симметрии

$$S = -\int_a^b f(x) dx.$$

3. Если  $f(x)$  меняет знак на  $[a, b]$ , то разбиваем отрезок  $[a, b]$  на сумму отрезков, на каждом из которых знак функции  $f(x)$  постоянен.

$$\int_a^b f dx = \int_a^c f dx + \int_c^d f dx + \int_d^b f dx.$$

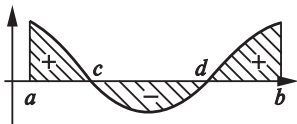


Рис. 3.8

Тогда  $\int_a^b f dx$  дает разность площадей, лежа-

щих ниже выше оси  $OX$ . Чтобы получить площадь в обычном смысле, нужно на тех отрезках, где  $f(x) \leq 0$ , заменить ее на  $-f(x)$ , т. е.

$$S = \int_a^c f dx - \int_c^d f dx + \int_d^b f dx = \int_a^b |f| dx.$$

4. Если нужно вычислить площадь, ограниченную кривыми  $y = f_1(x)$ ,  $y = f_2(x)$  ( $f_2(x) \geq f_1(x)$ ) на  $[a, b]$ , то вычисляют ее как разность площадей криволинейных трапеций (рис. 3.9):

$$S = \int_a^b f_2(x) dx - \int_a^b f_1(x) dx.$$

Мы рассмотрели случай, когда  $f_2(x) \geq f_1(x) \geq 0$ . Однако для любых  $f_1(x)$  и  $f_2(x)$  таких, что  $f_2(x) \geq f_1(x)$ , имеет место формула

$$S = \int_a^b [f_2(x) - f_1(x)] dx.$$

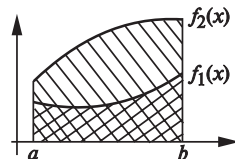


Рис. 3.9

**Примеры.** Вычислить площадь, ограниченную синусоидой  $y = \sin x$  и осью  $OX$  при  $x \in [0, 2\pi]$ .

$$S = \int_0^{\pi} \sin x dx - \int_{\pi}^{2\pi} \sin x dx = 4 \text{ (ед}^2\text{)}.$$

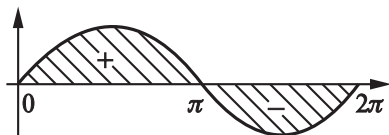


Рис. 3.10

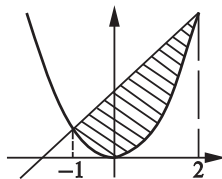


Рис. 3.11

Вычислить площадь, ограниченную параболой  $y^2 = x$  и прямой  $y = x - 2$ .

Здесь удобнее рассматривать  $x$  как функцию от  $y$ , т. е. поменять местами обозначения аргумента и функции. Тогда  $y = x^2$ ,  $x = y - 2 \Rightarrow y = x + 2$ ,

$$S = \int_{-1}^2 (x + 2 - x^2) dx.$$

### 3.9.2. Вычисление площадей для случая задания их границ уравнениями в параметрической форме

Пусть криволинейная трапеция ограничена кривой, заданной уравнениями в параметрической форме:  $x = \varphi(t)$ ,  $y = \psi(t)$ , где  $t \in [\alpha, \beta]$ . Пусть на отрезке  $[a, b]$  эти уравнения определяют некоторую кривую  $y = f(x)$  ( $\varphi(\alpha) = a$ ,  $\varphi(\beta) = b$ ).

$$S = \int_a^b f(x) dx = \int_a^b y dx.$$

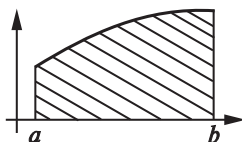


Рис. 3.12

В последнем интеграле сделаем замену переменных  $x = \varphi(t)$ . Тогда

$$y = f(x) = f[\varphi(t)] = \psi(t), \quad dx = \varphi'(t)dt,$$

и искомая формула примет вид

$$S = \int_{\alpha}^{\beta} \psi(t) \varphi'(t) dt.$$

**Пример.** Вычислить площадь, ограниченную одной аркой циклоиды

$$x = a(t - \sin t), \quad y = a(1 - \cos t).$$



Рис. 3.13

Циклоида — это траектория, описываемая точкой окружности радиуса  $a$ , которая катится без скольжения по прямой — по оси  $Ox$ .

$$S = \int_0^{2\pi a} y dx = \int_0^{2\pi} a^2 (1 - \cos t)^2 dt = 3\pi a^2.$$

### 3.9.3. Вычисление площади криволинейного сектора в полярных координатах

Пусть кривая в полярных координатах задана уравнением  $\rho = f(\varphi)$ , где  $f(\varphi)$  — непрерывная функция на  $[\alpha, \beta]$ . Определим площадь сектора  $OAB$ . Для этого разобьем  $OAB$  на  $n$  частей радиусами-векторами  $\varphi_0 = \alpha, \varphi_1, \dots, \varphi_n = \beta$ . Обозначим через  $\Delta\varphi_i = \varphi_i - \varphi_{i-1}$  углы между радиусами-векторами. Обозначим через  $\rho_i = f(\bar{\varphi}_i)$  радиус-вектор, заключенный между  $f(\varphi_i)$  и  $f(\varphi_{i-1})$  и соответствующий какому-либо углу  $\varphi_{i-1} < \bar{\varphi}_i < \varphi_i$ . За площадь сектора, соответствующего углу  $\Delta\varphi_i$ , примем приближенно площадь кругового сектора с тем же углом и радиусом  $\bar{\rho}_i$ :

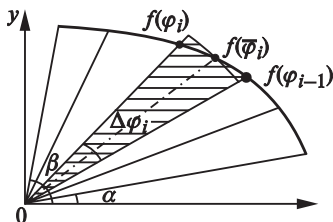


Рис. 3.14

$$\Delta S_i \approx \frac{1}{2} \bar{\rho}_i^2 \cdot \Delta\varphi_i.$$

Тогда

$$S = \sum_{i=1}^n \Delta S_i \approx \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n f^2(\bar{\varphi}_i) \Delta\varphi_i.$$

Эта сумма является интегральной суммой для функции  $\frac{1}{2}f^2(\varphi)$  на  $[\alpha, \beta]$  и ее предел при  $\max \Delta\varphi_i \rightarrow 0$  есть определенный интеграл. Поэтому искомая площадь равна

$$S = \frac{1}{2} \int_{\alpha}^{\beta} \rho^2 d\varphi = \frac{1}{2} \int_{\alpha}^{\beta} [f(\varphi)]^2 d\varphi.$$

**Пример.** Вычислить площадь, ограниченную кардиоидой  $r = a(1 + \cos\varphi)$ .

$$S = \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} r^2 d\varphi = \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} a^2 (1 + \cos\varphi)^2 d\varphi = \frac{3}{2} \pi a^2 \text{ (ед}^2\text{)}.$$

### 3.10. Вычисление длины дуги кривой

Вычисление длины дуги в декартовых координатах. Вычисление длины дуги в случае параметрического задания кривой. Длина дуги в полярных координатах.

#### 3.10.1. Вычисление длины дуги в декартовых координатах

Пусть в прямоугольных координатах на плоскости задана дуга уравнением  $y = f(x)$ . Найдем длину части этой дуги, заключенной между вертикальными прямыми  $x = a$ ,  $x = b$ . Вспомним определение длины дуги. Разобьем  $[a, b]$  на  $n$  частей точками  $x_0 = a$ ,  $x_1$ ,  $x_2$ , ...,  $x_n = b$ . Положим  $A = f(a)$ ,  $M_1 = f(x_1)$ , ...,  $M_{n-1} = f(x_{n-1})$ ,  $B = f(b)$ . Соединим точки  $A$ , ...,  $B$  отрезками прямой и получим ломаную  $AM_1M_2 \dots M_{n-1}B$ , вписанную в дугу  $AB$ . Длины ее звеньев обозначим через  $\Delta S_1$ ,  $\Delta S_2$ , ...,  $\Delta S_n$ . Тогда длина ломаной

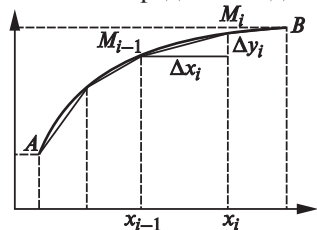


Рис. 3.15

$$S_n = \sum_{i=1}^n \Delta S_i.$$

Длиной дуги называется предел, к которому стремится длина вписанной ломаной, когда длина ее наибольшего звена стремится к 0:

$$S = \lim_{\max \Delta S_i \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n \Delta S_i. \quad (1)$$

Покажем, что если функция  $y = f(x)$  непрерывно дифференцируема на  $[a, b]$ , то этот предел существует, и параллельно укажем способ вычисления длины дуги.

По теореме Пифагора

$$\Delta S_i = \sqrt{(\Delta y_i)^2 + (\Delta x_i)^2} = \sqrt{1 + \left(\frac{\Delta y_i}{\Delta x_i}\right)^2} \Delta x_i,$$

где  $\Delta y_i = f(x_i) - f(x_{i-1})$ ,  $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$ .

Воспользуемся формулой конечных приращений:

$$\frac{\Delta y_i}{\Delta x_i} = \frac{f(x_i) - f(x_{i-1})}{x_i - x_{i-1}} = \frac{f'(\xi_i)(x_i - x_{i-1})}{x_i - x_{i-1}} = f'(\xi_i),$$

где  $x_{i-1} \leq \xi_i \leq x_i$ .

Тогда

$$\Delta S_i = \sqrt{1 + [f'(\xi_i)]^2} \Delta x_i, \quad S_n = \sum_{i=1}^n \sqrt{1 + [f'(\xi_i)]^2} \Delta x_i. \quad (2)$$

Таким образом,  $S_n$  есть интегральная сумма для функции  $\sqrt{1 + [f'(x)]^2}$  на  $[a, b]$ . Так как  $f'(x)$  непрерывна, то непрерывна и  $\sqrt{1 + [f'(x)]^2}$ , и, следовательно, существует предел интегральной суммы (2). Согласно (1)

$$S = \lim_{\max \Delta S_i \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n \sqrt{1 + [f'(\xi_i)]^2} \Delta x_i = \int_a^b \sqrt{1 + [f'(x)]^2} dx.$$

Итак, окончательно:

$$S = \int_a^b \sqrt{1 + [f'(x)]^2} dx.$$

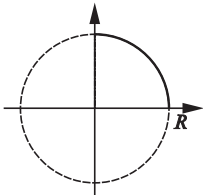


Рис. 3.16

**Пример.** Вычислить длину окружности  $x^2 + y^2 = R^2$ .

Вычислим длину 1/4 части:

$$\frac{1}{4}S = \int_0^R \sqrt{1 + (y')^2} dx = \int_0^R \sqrt{1 + \frac{x^2}{R^2 - x^2}} dx = \frac{\pi R}{2};$$

$$S = 2\pi R.$$

**3.10.2. Вычисление длины дуги в случае параметрического задания кривой**

Пусть кривая задана параметрическими уравнениями  $x = \varphi(t)$ ,  $y = \psi(t)$ , где  $t \in [\alpha, \beta]$ . Пусть на  $[\alpha, \beta]$  функции  $\varphi(t)$  и  $\psi(t)$  непрерывно дифференцируемы, причем  $\varphi'(t) \neq 0$  на  $[\alpha, \beta]$ . В этом случае параметрические уравнения определяют некоторую функцию  $y = f(x)$  на  $[a, b]$ , где  $a = \varphi(\alpha)$ ,  $b = \varphi(\beta)$ . Длина дуги кривой, заключенной между прямыми  $x = a$ ,  $x = b$ , вычисляется по формуле

$$S = \int_a^b \sqrt{1 + [f'(x)]^2} dx.$$

Сделаем замену переменных:

$$x = \varphi(t), \quad dx = \varphi'(t)dt, \quad f'(x) = \frac{\psi'(t)}{\varphi'(t)}.$$

Тогда

$$S = \int_{\alpha}^{\beta} \sqrt{1 + \left[ \frac{\psi'(t)}{\varphi'(t)} \right]^2} \varphi'(t) dt = \int_{\alpha}^{\beta} \sqrt{[\varphi'(t)]^2 + \psi'(t)^2} dt.$$

**Пример.** Вычислить длину дуги астроида  $x = a \cos^3 t$ ,  $y = a \sin^3 t$ .

Астроида симметрична относительно координатных осей, поэтому считаем  $1/4$  длины ее дуги. При этом параметр  $t$  меняется от 0 до  $\frac{\pi}{2}$ .

$$x'_t = -3a \cdot \cos^2 t \cdot \sin t, \quad y'_t = 3a \sin^2 t \cdot \cos t,$$

$$S = 4 \int_0^{\frac{\pi}{2}} 3a \cos t \sin t dt = 6a.$$

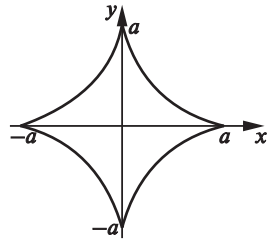


Рис. 3.17

**3.10.3. Длина дуги кривой в полярных координатах**

Пусть в полярных координатах задано уравнение кривой

$$\rho = f(\varphi), \quad \text{где } \varphi \in [\alpha, \beta].$$

Перейдем от полярных координат к декартовым:

$$x = \rho \cos \varphi, \quad y = \rho \sin \varphi. \quad (3)$$

Выражая  $\rho$  через  $\varphi$  и подставляя в (3), получим

$$x = \rho(\varphi) \cos \varphi, \quad y = \rho(\varphi) \sin \varphi.$$

Последние соотношения можно рассматривать как параметрическое задание кривой. Тогда

$$S = \int_{\alpha}^{\beta} \sqrt{(x'_{\varphi})^2 + (y'_{\varphi})^2} d\varphi,$$

$$x'_{\varphi}{}^2 + y'_{\varphi}{}^2 = (\rho' \cos \varphi - \rho \sin \varphi)^2 + (\rho' \sin \varphi + \rho \cos \varphi)^2 = \rho'^2 + \rho^2.$$

Таким образом,

$$S = \int_{\alpha}^{\beta} \sqrt{\rho^2 + \rho'^2} d\varphi.$$

### 3.11. Вычисление объема. Механические приложения определенного интеграла

Вычисление объема тела по известным поперечным сечениям. Объем тела вращения. Вычисление работы переменной силы. Задача на вычисление давления.

#### 3.11.1. Вычисление объема тела по известным поперечным сечениям

Рассмотрим некоторое тело, объем которого нужно определить. Предположим, что нам известна площадь каждого сечения этого тела плоскостью, перпендикулярной некоторой оси (оси  $OX$ ). Эти сечения называются поперечными. Таким образом, площадь поперечного сечения есть функция одного аргумента  $x$ . Обозначим ее  $S(x)$ . Через  $a$  и  $b$  обозначим абсциссы крайних сечений тела. Разобьем  $[a, b]$  на  $n$  частей точками  $x_0 = a, x_1, x_2, \dots, x_n = b$ . На каждом участке  $[x_{i-1}, x_i]$  выберем точку  $\xi_i$ :  $x_{i-1} < \xi_i < x_i$ . Через точки деления  $x_i$  проведем плоскости перпендикулярно оси  $OX$ . При этом тело разобьется на  $n$  слоев. Через точки  $\xi_i$  также проведем сечения.

С одной стороны,

$$V = \sum_{i=1}^n \Delta V_i,$$

где  $\Delta V_i$  — объем  $i$ -го слоя. Объем  $i$ -го слоя можно считать приближенно равным объему прямого цилиндра с образующей, параллельной



оси  $OX$  и направляющей, совпадающей с контуром сечения тела, соответствующего абсциссе  $\xi = \xi_i$ :

$$\Delta V_i \approx S(\xi_i) \cdot \Delta x_i.$$

Тогда

$$V \approx \sum_{i=1}^n S(\xi_i) \Delta x_i.$$

За объем тела принимается

$$V = \lim_{\max \Delta x_i \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n S(\xi_i) \Delta x_i.$$

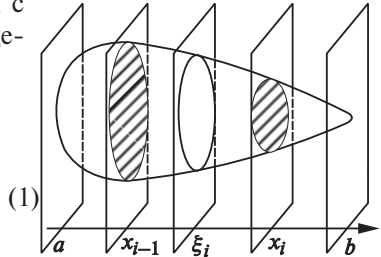


Рис. 3.18

Сумма (1) есть интегральная сумма для функции  $S(x)$  на  $[a, b]$ . Поэтому

$$V = \int_a^b S(x) dx. \quad (2)$$

**Пример.** Определить объем эллипсоида  $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$ .

**Решение.** Сечение эллипсоида плоскостью, перпендикулярной оси  $OX$  и пересекающей ее в точке  $x$ , будет представлять собой эллипс

$$\frac{y^2}{\left(b\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}}\right)^2} + \frac{z^2}{\left(c\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}}\right)^2} = 1.$$

Площадь эллипса  $\frac{x^2}{m^2} + \frac{y^2}{n^2} = 1$  с полуосями  $m$  и  $n$  легко вычисляется и равна  $\pi mn$ . У нас  $m = b\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}}$ ,  $n = c\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}}$ . Поэтому  $S(x) = \pi bc \left(1 - \frac{x^2}{a^2}\right)$ .

Следовательно,

$$V = \pi bc \int_{-a}^a \left(1 - \frac{x^2}{a^2}\right) dx = \frac{4}{3} \pi abc.$$

Если  $a = b = c = R$ , то получим шар,  $V = \frac{4}{3} \pi R^3$ .

### 3.11.2. Объем тела вращения

Рассмотрим криволинейную трапецию с основанием  $[a, b]$ , ограниченную непрерывной кривой  $y = f(x)$ , и найдем объем тела, образованного вращением этой трапеции вокруг оси  $OX$ . Каждое поперечное сечение — круг, следовательно, его площадь  $S(x) = \pi[f(x)]^2$ . Тогда по формуле (2)

$$V = \pi \int_a^b [f(x)]^2 dx.$$

Если тело вращения получено вращением криволинейной трапеции вокруг оси  $OY$ , то можно показать, что объем тела может быть найден по формуле

$$V = 2\pi \int_a^b x f(x) dx.$$

**Пример.** Найти объем тела, полученного вращением параболы  $y = x^2$ ,  $x \in [0, 1]$  вокруг оси  $OX$  и оси  $OY$ .

$$V_1 = \pi \int_0^1 x^4 dx = \frac{\pi}{5}; \quad V_2 = 2\pi \int_0^1 x \cdot x^2 dx = \frac{\pi}{2}.$$

### 3.11.3. Вычисление работы переменной силы

Пусть под действием переменной силы  $F$  материальная точка движется по прямой  $OX$  от точки  $x = a$  до  $x = b$ , причем направление силы совпадает с направлением движения. Если  $F = \text{const}$ , то работа силы

$$A = F(b - a).$$

У нас же  $F = F(x)$ .

Разобьем  $[a, b]$  на  $n$  частей точками  $x_0 = a, x_1, \dots, x_{n-1}, x_n = b$ . В каждой части выберем  $\xi_i$ :  $x_{i-1} < \xi_i < x_i$ . Заменяем работу силы на участке  $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$  приближенно работой постоянной силы  $F(\xi_i)$ . Тогда

$$\Delta A_i = F(\xi_i) \Delta x_i,$$

$$A_n = \sum_{i=1}^n \Delta A_i = \sum_{i=1}^n F(\xi_i) \Delta x_i.$$

$A_n$  — интегральная сумма для  $F(x)$  на  $[a, b]$ . Предел этой суммы при  $\max \Delta x_i \rightarrow 0$  существует и равен работе силы на  $[a, b]$ :

$$A = \lim_{\max \Delta x_i \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n F(\xi_i) \Delta x_i = \int_a^b F(x) dx.$$

**Пример.** Удлинение пружины  $\Delta l$  пропорционально приложенной силе  $F$

$$\Delta l = kF,$$

где  $l$  — ее первоначальная длина,  $k$  — коэффициент жесткости пружины и задан равным 0,001 м/Н. Вычислить работу силы  $F$  при растяжении данной пружины на 5 см.

*Решение.* Пусть  $U$  — перемещение точки приложения силы  $F$  к концу пружины. Тогда для каждого фиксированного положения при статическом (достаточно медленном, когда можно пренебречь силами инерции пружины) растяжении пружины имеем

$$\Delta l = u, \quad F = \frac{u}{k}.$$

На последующем удлинении пружины на  $du$  совершается работа

$$dA = Fdu.$$

Вся работа при совершении заданного удлинения  $\Delta l$  будет

$$A = \int_0^{\Delta l} Fdu = \int_0^{\Delta l} \frac{u}{k} du = \frac{u^2}{2k} \Big|_0^{\Delta l} = \frac{1}{2} F(\Delta l) \Delta l.$$

Таким образом, при статическом нагружении пружины силой  $F$  работа равна половине произведения окончательного значения этой силы на окончательное значение перемещения точки приложения силы. Данный вывод носит название теоремы Клапейрона.

С учетом условий данного примера получим

$$F(\Delta l) = \frac{0,05}{0,001} \text{ Н} = 50 \text{ Н} \quad A = \frac{1}{2} \cdot 50 \cdot 0,05 \text{ Н} \cdot \text{м} = 1,25.$$

### 3.11.4. Задача на вычисление силы Архимеда

Рассмотрим задачу о вычислении выталкивающей силы, действующей на тело, погруженное в жидкость (силы Архимеда). В качестве примера возьмем пирамиду со стороной  $b$  квадратного основания и высотой  $H$ , погруженную в жидкость вершиной вниз на всю высоту  $H$ . Так что плоскость основания находится на уровне поверхности жидкости. Введем координатную ось  $x$ , направленную вниз с началом отсчета на поверхности жидкости. Тогда давление жидкости  $p$  на поверхность пирамиды определяется по формуле

$$p = \rho g x,$$

где  $\rho$  — плотность жидкости;  $g$  — ускорение свободного падения.

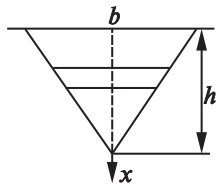


Рис. 3.19

Выделим четырехгранный пояс поверхности пирамиды двумя плоскостями  $x_1 = x$  и  $x_2 = x + dx$  (рис. 3.19). Сила давления  $dP$  на каждую грань этого пояса равна произведению давления  $p$  на площадь поверхности одной грани пояса:

$$dP = pb(x) \frac{dx}{\sin \theta}, \quad b(x) = 2(H - x) \operatorname{ctg} \theta,$$

где  $b(x)$  — размер стороны поперечного сечения пирамиды,  $\theta$  — угол между внешней нормалью к поверхности боковой грани и осью  $x$ , он равен двугранному углу при основании пирамиды. Выталкивающая сила  $dF_a$ , обусловленная силами давления на грани этого пояса, равна сумме проекций сил давления  $dP$  на вертикаль:

$$dF_a = 4dP \cos \theta = 4\rho g x \cdot b(x) \operatorname{ctg} \theta \cdot dx.$$

Теперь можно вычислить всю силу  $F_a$ , создаваемую давлением жидкости на грани пирамиды:

$$F_a = \int_0^H 8\rho g \operatorname{ctg}^2 \theta \cdot x(H - x) dx = \frac{4}{3} \rho g \operatorname{ctg}^2 \theta \cdot H^3, \Rightarrow$$

$$\operatorname{ctg} \theta = \frac{b}{2H}, \quad F_a = \frac{1}{3} \rho g b^2 H.$$

Еще раз подтверждается, что выталкивающая сила равна весу вытесненной жидкости.

### 3.12. Несобственные интегралы

Интегралы с бесконечными пределами (несобственные интегралы первого рода). Теоремы сравнения для несобственных интегралов первого рода. Интегралы от разрывных функций (интегралы второго рода). Теоремы сравнения для несобственных интегралов второго рода.

«Интегральное исчисление немного бы стоило, если бы первообразная не разыскивалась в конечном виде, но всегда требовала бы тоже перехода к пределу; в этом случае не было бы никакого прогресса... Вся огромная заслуга Ньютона и Лейбница состояла именно в конечной выразимости результата фактически невыполнимой операции... С тех

пор минуло более 250 лет и по пути Ньютона и Лейбница прошло немало сильных людей. Никто из них не смог продолжать дело основоположников анализа бесконечно малых и не мог указать другого метода выражать в конечном виде результат суммирования бесконечно малых... Лишь на долю Коши, сильнейшего аналитика XIX века, выпала честь дать особый прием, названный им исчислением вычетов, с помощью которого во многих случаях, там, где отказывает испытанный метод первообразных Ньютона и Лейбница, можно выражать в конечном виде результат суммирования бесконечно большого числа бесконечно малых слагаемых» (Лужин Н. Н. Исаак Ньютон как математик и натуралист (1943)).

### 3.12.1. Интегралы с бесконечными пределами (несобственные интегралы первого рода)

Пусть функция  $f(x)$  определена и непрерывна при всех значениях  $x$  таких, что  $a \leq x < +\infty$ . Рассмотрим интеграл

$$J(b) = \int_a^b f(x) dx.$$

При изменении  $b$  этот интеграл меняется и является непрерывной функцией  $b$ . Рассмотрим вопрос о поведении этого интеграла при  $b \rightarrow \infty$ .

**ОПРЕДЕЛЕНИЕ.** Если существует конечный предел

$$\lim_{b \rightarrow \infty} J(b) = \lim_{b \rightarrow \infty} \int_a^b f(x) dx,$$

то этот предел называется несобственным интегралом 1-го рода от  $a$  до  $+\infty$  и обозначается символом

$$\int_a^{\infty} f(x) dx.$$

Таким образом,

$$\int_a^{\infty} f(x) dx = \lim_{b \rightarrow \infty} \int_a^b f(x) dx.$$

В этом случае говорят, что  $\int_a^{\infty} f(x)dx$  существует или сходится. Если  $\lim_{b \rightarrow \infty} \int_a^b f(x)dx$  не существует или бесконечен, то говорят, что несобственный интеграл расходится.

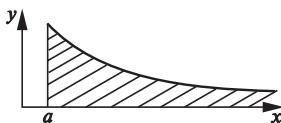


Рис. 3.20

При  $f(x) \geq 0$  несобственный интеграл выражает площадь бесконечной криволинейной трапеции.

Аналогичным образом определяется интеграл  $\int_{-\infty}^a f(x)dx$ :

$$\int_{-\infty}^a f(x)dx = \lim_{c \rightarrow -\infty} \int_c^a f(x)dx.$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = \int_{-\infty}^a f(x)dx + \int_d^{\infty} f(x)dx.$$

Пример 1.  $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{1+x^2} = \int_{-\infty}^d \frac{dx}{1+x^2} + \int_d^{\infty} \frac{dx}{1+x^2}.$

$$\int_{-\infty}^d \frac{dx}{1+x^2} = \lim_{c \rightarrow -\infty} \int_c^d \frac{dx}{1+x^2} = \lim_{c \rightarrow -\infty} (\arctg d - \arctg c) = \arctg d + \frac{\pi}{2},$$

$$\int_d^{\infty} \frac{dx}{1+x^2} = \frac{\pi}{2} - \arctg d,$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{1+x^2} = \pi.$$

Пример 2.  $\int_1^{\infty} \frac{dx}{x^p}.$

1)  $p > 1$ :  $\lim_{b \rightarrow \infty} \int_1^b \frac{dx}{x^p} = \lim_{b \rightarrow \infty} \left( \frac{x^{1-p}}{1-p} \right) \Big|_1^b = \lim_{b \rightarrow \infty} \left( \frac{b^{1-p}}{1-p} - \frac{1}{1-p} \right) = \frac{1}{p-1};$

$$2) \quad p < 1: \quad \lim_{b \rightarrow \infty} \int_1^b \frac{dx}{x^p} = \infty;$$

$$3) \quad p = 1: \quad \lim_{b \rightarrow \infty} \int_1^b \frac{dx}{x} = \lim_{b \rightarrow \infty} \ln b = \infty.$$

Вывод: при  $p > 1$  интеграл сходится, при  $p \leq 1$  — расходится.

### 3.12.2. Теоремы сравнения для несобственных интегралов первого рода

Иногда не нужно вычислять несобственный интеграл, а достаточно установить его сходимость или расходимость. Для этого полезны следующие теоремы.

**Теорема 1.** Если для  $\forall x \geq a$  выполнены неравенства

$$0 \leq f(x) \leq \varphi(x)$$

и если  $\int_a^\infty \varphi(x) dx$  сходится, то сходится и интеграл  $\int_a^\infty f(x) dx$ , и при этом

$$\int_a^\infty f(x) dx \leq \int_a^\infty \varphi(x) dx.$$

**Пример.** Исследовать на сходимость интеграл  $\int_1^\infty \frac{x dx}{\sqrt{x^5 + 1}}$ .

**Теорема 2.** Если в условиях теоремы 1  $\int_a^\infty f(x) dx$  расходится, то расходится и интеграл  $\int_a^\infty \varphi(x) dx$ .

**Пример.** Исследовать на сходимость интеграл  $\int_1^\infty \frac{1 + e^x}{x} dx$ .

**Теорема 3.** Если  $|f(x)| \leq F(x)$  при  $x \geq a$  и интеграл  $\int_a^\infty F(x) dx$  сходится, то интеграл  $\int_a^\infty f(x) dx$  также сходится.

**Теорема 4.** Если  $f(x) \geq 0$  и  $\lim_{x \rightarrow \infty} \{f(x)x^m\} = A \neq \infty$ ,  $A \neq 0$ , т. е.  $f(x) \sim \frac{A}{x^m}$

при  $x \rightarrow \infty$ , то:

1) при  $m > 1$  интеграл  $\int_a^\infty f(x)dx$  сходится;

2) при  $m \leq 1$  интеграл  $\int_a^\infty f(x)dx$  расходится.

**Пример.** Исследовать на сходимость интеграл

$$\int_1^\infty \frac{dx}{\sqrt{x^3 + 1}}.$$

### 3.12.3. Интегралы от неограниченных функций (интегралы второго рода)

Пусть функция  $y = f(x)$  определена на отрезке  $[a, b]$ , а при  $x \rightarrow b$  не ограничена. Тогда точка  $b$  называется *особой точкой*, а интеграл от функции, неограниченной при  $x \rightarrow b$ , определяется следующим образом:

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_a^{b-\varepsilon} f(x)dx.$$

Если предел существует, то интеграл называется *сходящимся*.

Аналогично определяется интеграл от функции, разрывной на левом конце промежутка:

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{a+\varepsilon}^b f(x)dx.$$

Если  $f(x)$  терпит разрыв в точке  $c$  ( $a < c < b$ ), то

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx,$$

если оба интеграла справа существуют.

**Пример.** Исследовать на сходимость интеграл

$$\int_a^b \frac{dx}{(b-x)^\alpha}.$$



1)  $\alpha = 1$ :

$$\int_a^b \frac{dx}{(b-x)^\alpha} = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_a^{b-\varepsilon} \frac{dx}{(b-x)^\alpha} = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \ln|b-x| \Big|_a^{b-\varepsilon} = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \ln \left| \frac{\varepsilon}{b-a} \right| = \infty;$$

2)  $\alpha > 1$  — расходится;

3)  $\alpha < 1$  — сходится.

### 3.12.4. Теоремы сравнения для несобственных интегралов второго рода

**Теорема 5.** Если на  $[a, b)$   $f(x)$  и  $\varphi(x)$  непрерывны и терпят разрыв в точке  $b$ , и если  $0 \leq f(x) \leq \varphi(x)$ , то из сходимости на  $[a, b)$   $\int_a^b \varphi(x) dx$  следует сходимость  $\int_a^b f(x) dx$ , а из расходимости  $\int_a^b f(x) dx$  следует расходимость  $\int_a^b \varphi(x) dx$ .

Пример.  $\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x} + 4x^3}.$

Так как на  $[0, 1]$   $\frac{1}{\sqrt{x} + 4x^3} < \frac{1}{\sqrt{x}}$ , а  $\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x}}$  — сходится, то и данный интеграл сходится.

**Теорема 6.** Если  $|f(x)| \leq F(x)$  и  $\int_a^b F(x) dx$  сходится, то интеграл  $\int_a^b f(x) dx$  тоже сходится.

**Теорема 7.** Если  $f(x) \geq 0$  и  $\lim_{x \rightarrow b} \{f(x)|b-x|_m\} = A \neq \infty, \neq 0$ , т. е.  $f(x) \sim \frac{A}{|b-x|^m}$  при  $x \rightarrow b$ , то

1) при  $m < 1$  интеграл  $\int_a^b f(x) dx$  сходится;

2) при  $m \geq 1$  интеграл расходится.

### 3.13. Приближенные методы вычисления определенных интегралов

Постановка задачи. Формула прямоугольников. Формула трапеций. Формула парабол (формула Симпсона). Приближенное вычисление интегралов с использованием формулы Тейлора.

#### 3.13.1. Постановка задачи

Пусть требуется вычислить  $\int_a^b f(x)dx$ , где  $f(x)$  — непрерывная функ-

ция. Если может быть найдена первообразная от  $f(x)$ , то можно воспользоваться формулой Ньютона — Лейбница. Если же первообразная не может быть найдена (интеграл не берущийся), или функция  $f(x)$  задана графически или таблично, то прибегают к приближенным формулам, точность которых может быть сделана сколь угодно большой.

Приближенные методы основаны на геометрическом истолковании  $\int_a^b f(x)dx$  как площади соответствующей криволинейной трапеции.

Суть приближенного вычисления интеграла заключается в том, что кривая  $y = f(x)$  заменяется новой, достаточно «близкой» к ней кривой, для которой площадь криволинейной трапеции легко вычисляется. Тогда искомая площадь (т. е. искомый интеграл) приближенно равна площади криволинейной трапеции, ограниченной новой кривой.

В зависимости от выбора новой кривой получаются различные приближенные формулы интегрирования.

#### 3.13.2. Формула прямоугольников

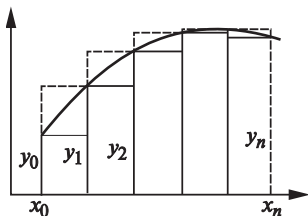


Рис. 3.21

Итак, пусть на  $[a, b]$  задана непрерывная функция  $f(x)$ . Для простоты будем считать, что  $f(x) > 0$  на  $[a, b]$ . Нужно вычислить  $\int_a^b f(x)dx$ . Разделим отрезок  $[a, b]$  на  $n$  равных частей точками  $x_0, x_1, \dots, x_n$ . Положим  $h = \frac{b-a}{n}$ . Обозначим через  $y_0, y_1, \dots, y_n$  значения функции  $f(x)$  в точках  $x_0, x_1, \dots, x_n$ :

$$y_0 = f(x_0), \quad y_1 = f(x_1), \quad \dots, \quad y_n = f(x_n).$$

Составим суммы

$$y_0h + y_1h + \dots + y_{n-1}h, \quad (1)$$

$$y_1h + y_2h + \dots + y_nh. \quad (2)$$

Первая из этих сумм выражает площадь ступенчатой фигуры, состоящей из «входящих» прямоугольников, а вторая — из «выходящих». Обе суммы, (1) и (2), являются интегральными для функции  $f(x)$  на  $[a, b]$ , поэтому имеют место приближенные равенства

$$\int_a^b f(x)dx \approx h(y_0 + y_1 + \dots + y_{n-1}), \quad (3)$$

$$\int_a^b f(x)dx \approx h(y_1 + y_2 + \dots + y_n).$$

Формулы (3) — формулы прямоугольников.

Эти формулы остаются справедливыми и для знакопеременной на  $[a, b]$  функции  $f(x)$ .

Чем больше  $n$ , тем больше точность формул (3).

### 3.13.3. Формула трапеций

Естественно предположить, что более точное значение определенного интеграла будет получено в том случае, когда кривая  $y = f(x)$  заменяется не ступенчатой линией, а вписанной ломаной. Тогда площадь криволинейной трапеции заменится суммой площадей прямолинейных трапеций, ограниченных сверху хордами  $A_0A_1$ ,  $A_1A_2$ , ...,  $A_{n-1}B$ . Площади этих трапеций равны соответственно  $\frac{y_0 + y_1}{2} \cdot h$ ,  $\frac{y_1 + y_2}{2} \cdot h$ ,

...,  $\frac{y_{n-1} + y_n}{2} \cdot h$ , поэтому

$$\int_a^b f(x)dx \approx \frac{y_0 + y_1}{2} \cdot h + \frac{y_1 + y_2}{2} \cdot h + \dots + \frac{y_{n-1} + y_n}{2} \cdot h,$$

или

$$\int_a^b f(x)dx \approx h \left( \frac{y_0 + y_n}{2} + y_1 + y_2 + \dots + y_{n-1} \right). \quad (4)$$

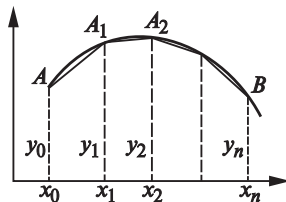


Рис. 3.22

(4) — формула трапеций. При вычислении интеграла по формуле трапеций обычно поступают следующим образом:

1) вычисляют значения интегралов  $J_n$  и  $J_{2n}$  для числа точек деления  $n$  и  $2n$ ;

2) сравнивают результаты вычислений и оставляют все первые совпадающие знаки.

### 3.13.4. Формула парабол (формула Симпсона)

Этот метод приближенного вычисления определенного интеграла основан на замене графика подынтегральной функции не хордами, как в предыдущих методах, а дугами парабол, оси которых параллельны оси  $OY$ , т. е. дугами парабол вида  $y = Ax^2 + Bx + C$ . Разобьем отрезок  $[a, b]$  на  $2n$  равных частей точками  $x_0, x_1, \dots, x_{2n}$ . Площадь криволинейной трапеции, соответствующей двум первым отрезкам, заменим площадью криволинейной трапеции, ограниченной параболой  $y = Ax^2 + Bx + C$ , проходящей через точки  $M, M_1, M_2$ . Если парабола  $y = Ax^2 + Bx + C$  проходит через три заданные точки, то коэффициенты  $A, B, C$  могут быть однозначно определены по координатам этих точек. Аналогичные параболы строим и для других пар отрезков. Сумма площадей построенных параболических трапеций и даст приближенное значение интеграла  $\int_a^b f(x)dx$ .

Уравнения парабол, проходящих через три заданные точки с координатами  $(x_{2k}, y_{2k}), (x_{2k+1}, y_{2k+1}), (x_{2k+2}, y_{2k+2}), k = 0, 2, \dots, n$ , можно записать с использованием интерполяционной формулы Ньютона. Например, уравнение параболы, проходящей через первые три точки, будет

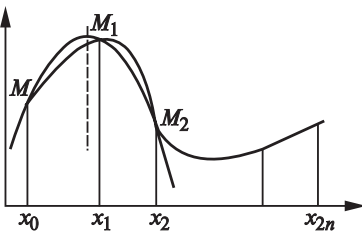


Рис. 3.23

$$y(x) = y_0 + \frac{y_1 - y_0}{h}(x - x_0) + \frac{y_0 - 2y_1 + y_2}{2h^2}(x - x_0)(x - x_1),$$

$$y_0 = f(x_0), \quad y_1 = f(x_1), \quad y_2 = f(x_2), \quad h = \frac{b - a}{2n}.$$

Тогда

$$\int_{x_0}^{x_2} y(x) dx = \frac{h}{3}(y_0 + 4y_1 + y_2).$$

Аналогичным образом получаются выражения для всех следующих частичных отрезков интегрирования, объединенных попарно:

$$\int_{x_2}^{x_4} f(x) dx \approx \frac{h}{3}(y_2 + 4y_3 + y_4),$$

.....

$$\int_{x_{2n-2}}^{x_{2n}} f(x) dx \approx \frac{h}{3}(y_{2n-2} + 4y_{2n-1} + y_{2n}).$$

Складывая данные соотношения, получим

$$\int_a^b f(x) dx \approx \frac{h}{3}(y_0 + 4y_1 + 2y_2 + 4y_3 + \dots + 2y_{2n-2} + 4y_{2n-1} + y_{2n}),$$

или

$$\int_a^b f(x) dx \approx \frac{h}{3}[y_0 + y_{2n} + 2(y_2 + y_4 + \dots + y_{2n-2}) + 4(y_1 + y_3 + \dots + y_{2n-1})], \quad (6)$$

где  $h = \frac{b-a}{2n}$ .

(6) — формула Симпсона.

При вычислении интеграла по методу Симпсона поступают следующим образом:

- 1) вычисляют  $J_{2n}$  и  $J_{4n}$ ;
- 2) сравнивают результаты вычислений и оставляют первые совпадающие знаки.

**З а м е ч а н и е.** При одном и том же числе точек деления отрезка формула Симпсона дает более точный результат, чем формула прямоугольников и трапеций.

## ГЛАВА 4

# ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ ФУНКЦИЙ МНОГИХ ПЕРЕМЕННЫХ

---

### 4.1. Основные понятия и определения. Функции двух переменных и области их определения. График функции двух переменных.

#### Предел и непрерывность

До сих пор мы изучали совместное изменение двух переменных, из которых одна зависела от другой: значением независимой переменной уже вполне определялось значение зависимой переменной или функции. В инженерной практике нередки, однако, случаи, когда независимых переменных оказывается несколько, и для определения значения функции необходимо предварительно установить значения, совместно принимаемые всеми этими независимыми переменными.

1. Так, например, по закону Ома, напряжение  $U$  в цепи электрического тока связано с сопротивлением  $R$  цепи и с силой тока  $I$  зависимостью  $U = RI$ . Если  $U$  и  $R$  считать данными, то отсюда определится  $I$  как функция от  $U$  и  $R$ :

$$I = \frac{U}{R}.$$

2. Пусть температура массы газа, находящегося под поршнем цилиндра, не постоянна: тогда объем  $V$  и давление  $P$  одного моля газа связаны с ее температурой  $T$ , так называемой, формулой Клапейрона

$$PV = RT \quad (R = \text{const}).$$

Отсюда, считая, например,  $V$  и  $T$  независимыми переменными, функцию  $P$  можно выразить через них так:

$$P = \frac{RT}{V}.$$

3. Изучая физическое состояние какого-нибудь тела, часто приходится наблюдать изменение его свойств от точки к точке. Таковы плотность, температура, электрический потенциал и т. п. Все эти величины суть «функции точки» или, если угодно, функции от координат  $x$ ,  $y$ ,  $z$  точки. Если физическое состояние тела меняется во времени, то к этим

независимым переменным присоединяется еще и время,  $t$ . В этом случае мы имеем дело с функциями от четырех независимых переменных.

Уточнение понятия функции в случае нескольких независимых переменных начнем с простейшего случая, когда этих переменных две.

#### 4.1.1. Функции двух переменных и области их определения

**ОПРЕДЕЛЕНИЕ.** Функцией двух переменных называется правило, по которому каждой паре чисел  $(x, y) \in M$  соответствует число  $z \in L$  при условии, что любое число  $z \in L$  соответствует хотя бы одной паре  $(x, y) \in M$ .

$x$  и  $y$  — независимые переменные,  $M$  — область определения функции,  $L$  — множество значений функции,  $z$  — зависимая переменная. Функциональная зависимость между  $z$  и  $x, y$  обозначается, аналогично случаю одной независимой переменной, так:

$$z = f(x, y).$$

Способы задания функции двух переменных — табличный и аналитический. При аналитическом способе задания область определения функции часто не задается и ее приходится отыскивать. Например,

$$z = \sqrt{1 - x^2 - y^2} \Rightarrow 1 - x^2 - y^2 \geq 0 \Rightarrow x^2 + y^2 \leq 1.$$

$$z = \arcsin(x^2 + y^2 - 2);$$

$$-1 \leq x^2 + y^2 - 2 \leq 1 \Rightarrow 1 \leq x^2 + y^2 \leq 3.$$

Так как каждой паре чисел  $x, y$  соответствует единственная точка плоскости  $P(x, y)$ , то функцию двух переменных можно рассматривать как функцию точки и писать  $z = f(P)$ .

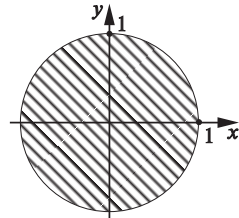


Рис. 4.1

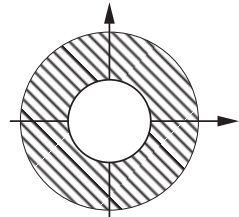


Рис. 4.2

#### 4.1.2. График функции двух переменных

Графиком функции двух переменных является в общем случае поверхность. Действительно, пусть  $G$  — область определения функции. Каждой точке  $P(x, y)$  из этой области соответствует единственная

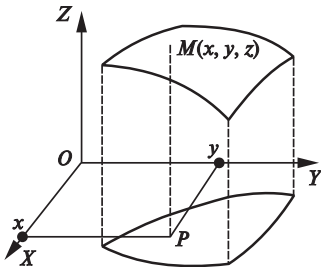


Рис. 4.3

точка  $M(x, y, z)$  некоторой поверхности, где  $z = f(P) = f(x, y)$ . Проекция этой точки на плоскость  $XOY$  совпадает с  $P$ .

Если поверхность является графиком функции двух переменных, то уравнение  $z = f(x, y)$ , определяющее эту поверхность, называется уравнением поверхности. Так, верхняя часть сферы  $x^2 + y^2 + z^2 = 1$  является графиком функции  $z = \sqrt{1 - x^2 - y^2}$ .

#### 4.1.3. Предел и непрерывность

Введем понятие окрестности точки. Для функции одной переменной под окрестностью точки понимается интервал, содержащий эту точку. При введении понятия предела для функции  $z = f(x, y)$  окрестность точки определяется на плоскости  $XOY$ .

Окрестностью точки  $P_0(x_0, y_0)$  называется множество всех внутренних точек круга с центром в этой точке.  $\delta$ -окрестностью будем называть круг радиуса  $\delta$  за исключением точек его границы.

Число  $A$  называется пределом функции двух переменных  $z = f(x, y) = f(P)$  при  $P \rightarrow P_0$ , если  $\forall \varepsilon > 0$  найдется такая  $\delta$ -окрестность точки  $P_0$ , что для любой точки  $P(x, y)$  из этой окрестности (за исключением, может быть, самой точки  $P_0$ ) имеет место неравенство

$$|f(P) - A| < \varepsilon \quad \text{или} \quad |f(x, y) - A| < \varepsilon,$$

как только  $|P_0 P| < \delta$  или  $|x - x_0| < \delta$ ,  $|y - y_0| < \delta$ .

При этом пишут

$$\lim_{P \rightarrow P_0} f(P) = A \quad \text{или} \quad \lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ y \rightarrow y_0}} f(x, y) = A.$$

**Пример 1.** Найти

$$\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} \frac{x^2 + y^2}{\sqrt{x^2 + y^2} + 1}.$$

Здесь  $P(x, y) \rightarrow P(0, 0)$ , т. е.  $\rho \rightarrow 0$  ( $\rho$  — расстояние от  $P(x, y)$  до начала координат). Но  $\rho = \sqrt{x^2 + y^2}$ .



Тогда

$$\lim_{P \rightarrow P_0} \frac{x^2 + y^2}{\sqrt{x^2 + y^2 + 1} - 1} = \lim_{\rho \rightarrow 0} \frac{\rho^2}{\sqrt{\rho^2 + 1} - 1} = \lim_{\rho \rightarrow 0} \frac{\rho^2(\sqrt{\rho^2 + 1} + 1)}{\rho^2 + 1 - 1} = 2.$$

Пример 2. Найти  $\lim_{P \rightarrow P_0(0, 0)} \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2}$ .

Если  $y = 0, x \rightarrow 0$  (по оси  $OX$ ), то  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 - 0}{x^2 + 0} = 1$ .

Если  $x = 0, y \rightarrow 0$  (по оси  $OY$ ), то  $\lim_{y \rightarrow 0} \frac{0 - y^2}{0 + y^2} = -1$ .

Таким образом, функция  $z = \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2}$  не имеет предела при приближении к началу координат.

**ОПРЕДЕЛЕНИЕ.** Функция  $z = f(P)$  называется непрерывной в точке  $P_0$ , если

$$\lim_{P \rightarrow P_0} f(P) = f(P_0), \quad (1)$$

причем этот предел не зависит от способа стремления  $P$  к  $P_0$ .

Функция  $f(P)$  должна быть определена в точке  $P_0$ , так как иначе нельзя было бы перейти к пределу. Точка  $P_0$  называется точкой непрерывности функции  $f(P)$ .

Если в некоторой точке  $P_0(x_0, y_0)$  не выполняется условие (1), то  $P_0(x_0, y_0)$  — точка разрыва функции. Например:

1)  $z = f(x, y)$  определена во всех точках некоторой окрестности  $P_0(x_0, y_0)$ , за исключением точки  $P_0$ ;

2)  $z = f(x, y)$  определена во всех точках окрестности точки  $P_0$ , но не существует предела  $f(x, y)$  при  $x \rightarrow x_0, y \rightarrow y_0$ .

Точки разрыва могут быть не только изолированными  $\left( z = \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2} \right)$ ,

но и могут заполнять собой линии поверхности. Например,

$$\frac{x^2 + y^2}{x^2 - y^2} \sim y = \pm x; \quad \frac{x + y + z}{xy - z} \sim z = xy \quad \text{— гиперболический параболоид;}$$

$$\frac{1}{x^2 + y^2 - 1} \sim x^2 + y^2 = 1; \quad \frac{1}{x^2 + y^2 - z^2} \sim z^2 = x^2 + y^2 \quad \text{— конус.}$$

Рассматривая разности  $x - x_0$ ,  $y - y_0$  как приращения  $\Delta x$ ,  $\Delta y$  независимых переменных, а разность  $f(x, y) - f(x_0, y_0)$  как приращение функции, можно сказать, что функция непрерывна, если бесконечно малым приращениям аргумента отвечает бесконечно малое приращение функции.

Определенная выше непрерывность функции в точке есть непрерывность по совокупности переменных. Если она имеет место, то

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x, y) = f(x_0, y), \quad \lim_{y \rightarrow y_0} f(x, y) = f(x, y_0).$$

## 4.2. Частные производные. Дифференциал

Свойства непрерывных в замкнутой и ограниченной области функций. Частные производные 1-го порядка. Геометрический смысл частных производных функции двух переменных. Полное приращение функции и полный дифференциал.

### 4.2.1. Свойства непрерывных в замкнутой и ограниченной области функций

Функция  $z = f(x, y)$ , непрерывная в замкнутой ограниченной области  $G$ , обладает следующими свойствами.

1. В области  $G$  найдется по крайней мере одна точка  $N_0(x_0, y_0)$  такая, что для всех других точек области справедливо неравенство

$$f(x_0, y_0) \geq f(x, y),$$

и по крайней мере одна точка  $N_1(x_1, y_1)$  такая, что

$$f(x_1, y_1) \leq f(x, y)$$

для всех других точек области.

Значение  $f(x_0, y_0) = M$  — наибольшее значение функции в области  $G$ , значение  $f(x_1, y_1) = m$  — наименьшее значение функции в этой области.

Таким образом, непрерывная функция в замкнутой ограниченной области  $G$  достигает по крайней мере один раз своего наибольшего значения  $M$  и наименьшего значения  $m$ .

2. Если  $M$  и  $m$  — наибольшее и наименьшее значения функции  $f(x, y)$  в области  $G$ , то для  $\forall \mu: M > \mu > m$  найдется в области такая точка  $N^*(x^*, y^*)$ , что  $f(x^*, y^*) = \mu$ .

**Следствие.** Если  $f(x, y)$  непрерывна в замкнутой ограниченной области и принимает в ней как положительные, так и отрицательные значения, то внутри области найдутся точки, в которых  $f(x, y) = 0$ .

#### 4.2.2. Частные производные первого порядка

Пусть задана функция  $z = f(x, y)$ . Пусть  $y = y_0$ , а  $x_0$  получает приращение  $\Delta x$ . Тогда функция получит приращение, которое назовем частным приращением по переменной  $x$  и обозначим  $\Delta_x z$ :

$$\Delta_x z = f(x_0 + \Delta x, y_0) - f(x_0, y_0).$$

**ОПРЕДЕЛЕНИЕ.** Частной производной 1-го порядка функции  $z = f(x, y)$  в точке  $(x_0, y_0)$  по переменной  $x$  называется предел отношения частного приращения функции в этой точке к вызвавшему его приращению аргумента при стремлении последнего к 0:

$$f'_x(x_0, y_0) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta_x z}{\Delta x}.$$

Аналогично вводятся понятия частного приращения и частной производной функции  $z = f(x, y)$  по переменной  $y$ :

$$\Delta_y z = f(x_0, y_0 + \Delta y) - f(x_0, y_0),$$

$$f'_y(x_0, y_0) = \lim_{\Delta y \rightarrow 0} \frac{\Delta_y z}{\Delta y}.$$

Так как производные зависят от точки  $P(x, y)$ , то их можно рассматривать как функции двух переменных. Для частных производных по  $x$  и  $y$  употребляют следующие обозначения:

$$f'_x(x, y), \quad f'_y(x, y); \quad z'_x, \quad z'_y; \quad \frac{\partial z}{\partial x}, \quad \frac{\partial z}{\partial y}.$$

Аналогично вводятся понятия частных производных для функций большего числа переменных.

Из определения частной производной следует, что правила и формулы дифференцирования, выведенные для производных функции одной переменной, сохраняются для частных производных функций нескольких переменных.

Пример.  $f(x, y) = x^2 + y - \sqrt{x^2 + y^2}$ .

$$f'_x = 2x - \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}; \quad f'_y = 1 - \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}}.$$

#### 4.2.3. Геометрический смысл частных производных функции двух переменных

Графиком функции  $z = f(x, y)$  является некоторая поверхность. Рассмотрим точку  $P_0(x_0, y_0)$  в плоскости  $XOY$  и соответствующую ей точку  $M_0(x_0, y_0, z_0)$  на поверхности. Рассмотрим плоскую кривую  $AM_0B$ , которая получится при сечении поверхности плоскостью  $y = y_0$ .

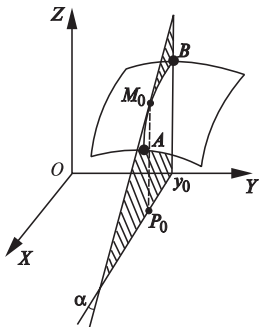


Рис. 4.4

Эту кривую можно рассматривать как график функции одной переменной  $z = f(x, y_0)$  в плоскости  $y = y_0$ . Но тогда, согласно геометрическому смыслу производной функции одной переменной,  $\frac{\partial f(x, y_0)}{\partial x} = \operatorname{tg} \alpha$ , где  $\alpha$  — угол

наклона касательной в точке  $M_0$  к линии пересечения поверхности  $z = f(x, y)$  плоскостью  $y = y_0$ , (к линии  $AM_0B$ , показанной на рис. 4.4). Аналогично выясняется геометри-

ческий смысл частной производной  $\frac{\partial z}{\partial y}$ .

#### 4.2.4. Полное приращение функции и полный дифференциал

Рассмотрим функцию  $z = f(x, y)$ . Пусть независимые переменные получили приращения  $\Delta x, \Delta y$ . Тогда приращение функции имеет вид

$$\Delta z = f(x + \Delta x, y + \Delta y) - f(x, y).$$

Геометрически полное приращение функции  $f(x, y)$  определяет приращение координаты  $z$  при переходе из точки  $P(x, y)$  в точку  $P_1(x + \Delta x, y + \Delta y)$ .

Например, для функции  $z = xy$

$$\begin{aligned}\Delta z &= (x + \Delta x)(y + \Delta y) - xy = xy + y\Delta x + x\Delta y + \Delta x\Delta y - xy = \\ &= y\Delta x + x\Delta y + \Delta x\Delta y.\end{aligned}$$

Заметим, что  $\Delta x\Delta y$  стремится к 0 быстрее, чем первые два слагаемых.

**ОПРЕДЕЛЕНИЕ.** Функция  $z = f(x, y)$  называется дифференцируемой в точке  $P(x, y)$ , если ее полное приращение можно представить в виде

$$\Delta z = A\Delta x + B\Delta y + \omega(\Delta x, \Delta y),$$

где  $\omega(\Delta x, \Delta y)$  — бесконечно малая более высокого порядка, чем  $\rho = \sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2}$ ;  $A, B$  — постоянные (не зависящие от  $\Delta x, \Delta y$ ).

Главная часть приращения, линейная относительно  $\Delta x, \Delta y$ , называется полным дифференциалом

$$dz = A\Delta x + B\Delta y;$$

$A, B$  — функции от  $x, y$ .

**Теорема.** Если функция  $z = f(x, y)$  в точке  $P(x, y)$  дифференцируема, т. е. имеет дифференциал  $dz = A\Delta x + B\Delta y$ , то она имеет в точке  $P(x, y)$  частные производные  $\frac{\partial z}{\partial x}$  и  $\frac{\partial z}{\partial y}$  и  $\frac{\partial z}{\partial x} = A, \frac{\partial z}{\partial y} = B$ .

*Доказательство.* По определению

$$\Delta z = A\Delta x + B\Delta y + \omega(\Delta x, \Delta y)$$

для любых  $\Delta x, \Delta y$ . Пусть  $\Delta y = 0, \Delta x \neq 0$ , тогда  $\Delta z = \Delta_x z$  и  $\Delta_x z = A\Delta x + \omega$ . Поэтому

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta_x z}{\Delta x} = A + \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\omega}{\Delta x}.$$

Так как  $\Delta y = 0$ , то  $\rho = \sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2} = |\Delta x|$ , следовательно,

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\omega}{\Delta x} = \pm \lim_{|\Delta x| \rightarrow 0} \frac{\omega}{|\Delta x|} = \pm \frac{\omega}{\rho} = 0.$$

Таким образом,  $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta_x z}{\Delta x} = A = \frac{\partial z}{\partial x}$ .

Аналогично для  $\Delta x = 0, \Delta y \neq 0$  получаем

$$\lim_{\Delta y \rightarrow 0} \frac{\Delta_y z}{\Delta y} = B = \frac{\partial z}{\partial y}.$$

Таким образом, если функция  $z = f(x, y)$  дифференцируема в точке, то ее полный дифференциал имеет вид

$$dz = \frac{\partial z}{\partial x} \Delta x + \frac{\partial z}{\partial y} \Delta y.$$

Обратное утверждение, вообще говоря, неверно, однако имеет место следующая теорема.

**Теорема.** Если частные производные  $\frac{\partial z}{\partial x}$  и  $\frac{\partial z}{\partial y}$  непрерывны в некоторой окрестности точки  $P(x, y)$ , то функция  $z = f(x, y)$  дифференцируема в точке  $P(x, y)$ .

Приращения независимых переменных называют их дифференциалами и обозначают  $dx$ ,  $dy$ ; тогда

$$dz = \frac{\partial z}{\partial x} dx + \frac{\partial z}{\partial y} dy.$$

**Пример.**  $z = x^3 y^2$ .

$$dz = 3x^2 y^2 dx + 2yx^3 dy.$$

#### 4.3. Применение полного дифференциала к приближенным вычислениям. Производные сложных и неявных функций

Приложение полного дифференциала к приближенным вычислениям. Дифференцирование сложных функций. Неявные функции и их дифференцирование.

##### 4.3.1. Приложение полного дифференциала к приближенным вычислениям

Полным дифференциалом функции нескольких переменных можно воспользоваться для приближенных вычислений. Пусть дана дифференцируемая функция  $z = f(x, y)$ . Ее полное приращение выражается формулой

$$\Delta z = f'_x(x, y)\Delta x + f'_y(x, y)\Delta y + \omega(\Delta x, \Delta y).$$

Здесь  $\omega(\Delta x, \Delta y)$  стремится к нулю быстрее, чем  $\rho = \sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2}$ . Поэтому при малых  $\rho$ , т. е. при малых  $|\Delta x|$  и  $|\Delta y|$ , слагаемым  $\omega(\Delta x, \Delta y)$  можно пренебречь и писать

$$\Delta z \approx f'_x(x, y)\Delta x + f'_y(x, y)\Delta y, \quad (1)$$

т. е. приращение функции можно заменить ее полным дифференциалом. Так как  $z = f(x, y)$ , то

$$\Delta z = f(x + \Delta x, y + \Delta y) - f(x, y).$$

Подставляя это выражение для  $\Delta z$  в формулу (1), получим

$$f(x + \Delta x, y + \Delta y) - f(x, y) \approx f'_x(x, y)\Delta x + f'_y(x, y)\Delta y,$$

откуда

$$f(x + \Delta x, y + \Delta y) \approx f(x, y) + f'_x(x, y)\Delta x + f'_y(x, y)\Delta y. \quad (2)$$

Формулой (2) можно пользоваться для приближенных вычислений значений функции двух переменных в точке  $(x + \Delta x, y + \Delta y)$ , если известны значения функции и ее частных производных в самой точке  $(x, y)$ .

**Пример.** Найти  $\sqrt{(4,05)^2 + (2,93)^2}$ .

$$z = \sqrt{x^2 + y^2}; \quad x = 4, \quad y = 3, \quad \Delta x = 0,05; \quad \Delta y = -0,07.$$

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}, \quad \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}}.$$

$$\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)_{x=4, y=3} = \frac{4}{5}; \quad \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)_{x=4, y=3} = \frac{3}{5}.$$

$$\sqrt{(4,05)^2 + (2,93)^2} \approx \sqrt{4^2 + 3^2} + \frac{4}{5} \cdot 0,05 + \frac{3}{5} \cdot (-0,07) \approx 4,998.$$

#### 4.3.2. Дифференцирование сложных функций

Пусть дана функция двух переменных  $z = f(x, y)$ , причем аргументы этой функции являются функциями одной переменной  $t$ :  $x = x(t)$ ,  $y = y(t)$ . Тогда  $z$  есть сложная функция одной независимой переменной  $t$ . Поставим задачу найти производную этой сложной функции  $\frac{dz}{dt}$ ,

зная частные производные  $\frac{\partial z}{\partial x}$  и  $\frac{\partial z}{\partial y}$  и производные  $\frac{dx}{dt}$  и  $\frac{dy}{dt}$ . При

решении этой задачи будем предполагать, что функции  $x = x(t)$  и  $y = y(t)$  имеют производные в точке  $t$ , а функция  $z = f(x, y)$  в соответствующей точке  $(x, y)$  дифференцируема.

Пусть независимая переменная  $t$  получает приращение  $\Delta t$ ; тогда переменные  $x$  и  $y$  получают соответственно приращения  $\Delta x$  и  $\Delta y$ , а функция  $z$  — приращение  $\Delta z$ . Так как функция  $z$  по предположению дифференцируема, то ее полное приращение  $\Delta z$  может быть представлено в виде

$$\Delta z = \frac{\partial z}{\partial x} \Delta x + \frac{\partial z}{\partial y} \Delta y + o(\Delta x, \Delta y), \quad (3)$$

причем  $\lim_{\rho \rightarrow 0} \frac{o}{\rho} = 0$ , где  $\rho = \sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2}$ . Разделив обе части равенства (3)

на  $\Delta t$  и переходя к пределу при  $\Delta t \rightarrow 0$ , получим

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta z}{\Delta t} = \frac{\partial z}{\partial x} \cdot \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta x}{\Delta t} + \frac{\partial z}{\partial y} \cdot \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta t} + \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{o}{\Delta t}. \quad (4)$$

Если каждый из пределов, стоящих в правой части этого равенства, существует, то существует и предел, стоящий в левой части этого равенства, т. е. производная  $\frac{dz}{dt}$ ; но  $\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{dx}{dt}$  и  $\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta t} = \frac{dy}{dt}$  существуют по предположению.

Найдем

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{o}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \left( \frac{o}{\rho} \cdot \frac{\rho}{\Delta t} \right) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{o}{\rho} \cdot \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\rho}{\Delta t}.$$

Рассмотрим сначала

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\rho}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2}}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \sqrt{\left(\frac{\Delta x}{\Delta t}\right)^2 + \left(\frac{\Delta y}{\Delta t}\right)^2} = \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2}.$$

Этот предел существует, т. к. существуют производные  $\frac{dx}{dt}$  и  $\frac{dy}{dt}$ .

Прежде чем находить  $\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{o}{\Delta t}$ , отметим, что при  $\Delta t \rightarrow 0$  также и  $\rho \rightarrow 0$ .

Но тогда  $\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{o}{\rho} = \lim_{\rho \rightarrow 0} \frac{o}{\rho} = 0$  и, следовательно,

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{o}{\Delta t} = 0 \cdot \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2} = 0.$$



Учитывая это, формулу (4) можно записать в следующем виде:

$$\frac{dz}{dt} = \frac{\partial z}{\partial x} \cdot \frac{dx}{dt} + \frac{\partial z}{\partial y} \cdot \frac{dy}{dt}. \quad (5)$$

Пример.  $z = x^y$ ,  $x = \sin t$ ,  $y = t^2$ .

По формуле (5) можем записать

$$\frac{dz}{dt} = y \cdot x^{y-1} \cdot \cos t + x^y \ln x \cdot 2t = t^2 (\sin t)^{t^2-1} \cdot \cos t + (\sin t)^{t^2} \cdot \ln (\sin t) \cdot 2t.$$

Рассмотрим теперь функцию  $z = f(x, y)$  при условии, что  $y = y(x)$ . Здесь переменная  $z$  есть функция одной переменной  $x$ :  $z = f(x, y(x))$ . Этот случай сводится к предыдущему, причем роль переменной  $t$  играет  $x$ . По формуле (5) имеем

$$\frac{dz}{dx} = \frac{\partial z}{\partial x} \cdot \frac{dx}{dx} + \frac{\partial z}{\partial y} \cdot \frac{dy}{dx}.$$

Но  $\frac{dx}{dx} = 1$ , и поэтому

$$\frac{dz}{dx} = \frac{\partial z}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial y} \cdot \frac{dy}{dx}. \quad (6)$$

Формула (6) носит название формулы полной производной.

Пример.  $z = \arcsin xy$ ,  $y = \ln x$ .

$$\frac{dz}{dx} = \frac{y}{\sqrt{1-(xy)^2}} + \frac{x}{\sqrt{1-(xy)^2}} \cdot \frac{1}{x}.$$

Предположим теперь, что  $z = f(x, y)$ , причем  $x = x(u, v)$  и  $y = y(u, v)$ . Тогда  $z$  есть сложная функция двух независимых переменных  $u$  и  $v$ . Пользуясь формулой (5), можем найти частные производные  $\frac{\partial z}{\partial u}$  и  $\frac{\partial z}{\partial v}$  этой сложной функции:

$$\begin{aligned} \frac{\partial z}{\partial u} &= \frac{\partial z}{\partial x} \cdot \frac{\partial x}{\partial u} + \frac{\partial z}{\partial y} \cdot \frac{\partial y}{\partial u}; \\ \frac{\partial z}{\partial v} &= \frac{\partial z}{\partial x} \cdot \frac{\partial x}{\partial v} + \frac{\partial z}{\partial y} \cdot \frac{\partial y}{\partial v}. \end{aligned}$$

Пр и м е р.  $z = \operatorname{arctg} \frac{x}{y}$ ,  $x = u \sin v$ ,  $y = u \cos v$ .

$$\frac{\partial z}{\partial u} = \frac{1}{y \left( 1 + \frac{x^2}{y^2} \right)} \cdot \sin v + \left( -\frac{x}{y^2} \right) \cdot \frac{1}{1 + \frac{x^2}{y^2}} \cdot \cos v.$$

$$\frac{\partial z}{\partial v} = \frac{1}{y \left( 1 + \frac{x^2}{y^2} \right)} \cdot u \cdot \cos v + \left( -\frac{x}{y^2} \right) \frac{1}{1 + \frac{x^2}{y^2}} (-u \sin v).$$

#### 4.3.3. Неявные функции и их дифференцирование

Пусть дано уравнение

$$F(x, y) = 0, \quad (7)$$

где  $F(x, y)$  — функция двух переменных. Если каждому значению  $x$ , принадлежащему некоторому множеству  $M$ , соответствует единственное значение  $y$ , которое совместно с  $x$  удовлетворяет уравнению (7), то говорят, что это уравнение определяет на множестве  $M$  неявную функцию  $y = \varphi(x)$ .

Таким образом, для неявной функции  $y = \varphi(x)$ , определенной уравнением (7), имеет место тождество  $F[x, \varphi(x)] \equiv 0$ .

Не следует однако думать, что всякую неявную функцию можно представить в виде явной элементарной функции. Например, уравнение

$$2^y - 2y + x^2 - 1 = 0$$

задает неявную функцию  $y$ , так как существуют пары значений  $x$  и  $y$ , удовлетворяющие данному уравнению. Но это уравнение нельзя разрешить относительно  $y$  так, чтобы  $y$  выражался через элементарные функции от аргумента  $x$ .

**Теорема существования неявной функции.** Если функция  $F(x, y)$  и ее частные производные  $F'_x(x, y)$  и  $F'_y(x, y)$  определены и непрерывны в некоторой окрестности точки  $P_0(x_0, y_0)$ , и при этом  $F(x_0, y_0) = 0$ , а  $F'_y(x_0, y_0) \neq 0$ , то уравнение  $F(x, y) = 0$  определяет в некоторой окрестности точки  $P_0(x_0, y_0)$  единственную неявную функцию  $y = y(x)$ , непрерывную и дифференцируемую в некотором интервале, содержащем точку  $x_0$ , причем  $y(x_0) = y_0$ .

Пусть уравнение (7) определяет неявную функцию  $y = y(x)$ , для которой в окрестности точки  $P_0(x_0, y_0)$  имеет место тождество  $F(x, y(x)) \equiv 0$  относительно  $x$ .

Так как производная функции, тождественно равной нулю, также равна нулю, то полная производная  $\frac{dF}{dx} = 0$ . Но в силу соотношения (6) имеем

$$\frac{dF}{dx} = \frac{\partial F}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial y} \cdot \frac{dy}{dx}$$

и поэтому

$$\frac{\partial F}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial y} \cdot \frac{dy}{dx} = 0,$$

откуда

$$\frac{dy}{dx} = - \frac{\frac{\partial F}{\partial x}}{\frac{\partial F}{\partial y}}.$$

Пример.  $x^2 - 2x + 3y^2 + xy - 1 = 0$ .

$$F(x, y) = x^2 - 2x + 3y^2 + xy - 1;$$

$$\frac{dy}{dx} = - \frac{2x - 2 + y}{6y + x}.$$

#### 4.4. Частные производные и дифференциалы высших порядков.

##### Формула Тейлора для функции двух переменных

Частные производные высших порядков. Дифференциалы высших порядков. Формула Тейлора для функции двух переменных.

##### 4.4.1. Частные производные высших порядков

Пусть задана функция двух переменных  $z = f(x, y)$ . Частные производные  $\frac{\partial z}{\partial x} = f'_x(x, y)$  и  $\frac{\partial z}{\partial y} = f'_y(x, y)$ , вообще говоря, являются функциями переменных  $x$  и  $y$ . Поэтому от них можно снова находить частные производные. При этом частных производных второго порядка от

функции двух переменных — четыре, так как каждую из функций  $\frac{\partial z}{\partial x}$  и  $\frac{\partial z}{\partial y}$  можно дифференцировать как по  $x$ , так и по  $y$ .

Вторые частные производные обозначают так:

$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = f''_{xx}(x, y)$ , здесь  $f$  дифференцируется последовательно два раза по  $x$ ;

$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = f''_{xy}(x, y)$ , здесь  $f$  сначала дифференцируется по  $x$ , а потом результат дифференцируется по  $y$ ;

$\frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} = f''_{yx}(x, y)$ , здесь  $f$  сначала дифференцируется по  $y$ , а потом результат дифференцируется по  $x$ ;

$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = f''_{yy}(x, y)$ , здесь  $f$  дифференцируется последовательно два раза по  $y$ .

Производные второго порядка можно снова дифференцировать как по  $x$ , так и по  $y$ . Получим частные производные третьего порядка. Их будет, очевидно, уже восемь:

$$\frac{\partial^3 z}{\partial x^3}, \quad \frac{\partial^3 z}{\partial x^2 \partial y}, \quad \frac{\partial^3 z}{\partial x \partial y \partial x}, \quad \frac{\partial^3 z}{\partial x \partial y^2}, \quad \frac{\partial^3 z}{\partial y \partial x^2}, \quad \dots$$

Вообще, частная производная  $n$ -го порядка есть первая производная от производной  $(n-1)$ -го порядка. Например, производная  $\frac{\partial^n z}{\partial x^p \partial y^{n-p}}$  есть производная  $n$ -го порядка; здесь функция  $z$  сначала  $p$  раз дифференцируется по  $x$ , а потом  $n-p$  раз по  $y$ .

**Пример.** Вычислить частные производные второго порядка от функции  $f(x, y) = x^2 y + y^3$ .

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 2xy, \quad \frac{\partial f}{\partial y} = x^2 + 3y^2; \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 2y, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 6y, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = 2x, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = 2x.$$

Естественно поставить вопрос, зависит ли результат дифференцирования функции нескольких переменных от порядка дифференцирования по разным переменным. Справедлива следующая теорема.

**Теорема.** Если функция  $z = f(x, y)$  и ее частные производные  $f'_x, f'_y, f''_{xy}, f''_{yx}$  определены и непрерывны в точке  $M(x, y)$  и в некоторой ее окрестности, то в этой точке

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} \quad (f''_{xy} = f''_{yx}).$$

#### 4.4.2. Дифференциалы высших порядков

Дифференциалом второго порядка функции  $z = f(x, y)$  называется дифференциал от дифференциала (первого порядка) этой функции:

$$d^2 z = d(dz).$$

Аналогично определяется дифференциал высшего порядка, например,  $d^3 z = d(d^2 z)$ .

Если  $z = f(x, y)$ , где  $x, y$  — независимые переменные и  $f$  имеет непрерывные частные производные второго порядка, то

$$d^2 z = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} dx^2 + 2 \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} dx dy + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} dy^2.$$

Вообще, справедлива символическая формула

$$d^n z = \left( dx \frac{\partial}{\partial x} + dy \frac{\partial}{\partial y} \right)^n z.$$

**Пример.** Для функции  $z = 2x^2 - 3xy - y^2$  вычислить дифференциалы первого и второго порядков.

$$\frac{\partial z}{\partial x} = 4x - 3y, \quad \frac{\partial z}{\partial y} = -3x - 2y, \quad \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = 4, \quad \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = -2, \quad \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = -3.$$

$$dz = (4x - 3y)dx + (-3x - 2y)dy,$$

$$d^2 z = 4dx^2 - 6dx dy - 2dy^2.$$

Здесь можно поступить и по-другому. Возьмем дифференциал от первого дифференциала, помня, что  $dx$  и  $dy$  не зависят от  $x, y$ :

$$d^2 z = (4dx - 3dy)dx - (3dx + 2dy)dy = 4dx^2 - 6dx dy - 2dy^2.$$

#### 4.4.3. Формула Тейлора для функции двух переменных

Пусть функция двух переменных  $z = f(x, y)$  непрерывна вместе со всеми своими частными производными до  $n+1$ -го порядка включительно в некоторой окрестности точки  $M(a, b)$ . Тогда, аналогично тому, как это было в случае функции одного переменного, функцию двух переменных можно представить в виде суммы многочлена  $n$ -го порядка по степеням  $(x-a)$  и  $(y-b)$  и некоторого остаточного члена.

Применим формулу Тейлора для функции  $f(x, y)$  одного переменного  $y$ , считая  $x$  постоянным (ограничимся членами второго порядка).

$$f(x, y) = f(x, b) + \frac{y-b}{1} f'_y(x, b) + \frac{(y-b)^2}{1 \cdot 2} f''_{yy}(x, b) + \frac{(y-b)^3}{1 \cdot 2 \cdot 3} f'''_{yyy}(x, \eta_1), \quad (1)$$

где  $\eta_1 = b + \theta_1(y-b)$ ,  $0 < \theta_1 < 1$ . Функции  $f(x, b)$ ,  $f'_y(x, b)$ ,  $f''_{yy}(x, b)$  разложим по формуле Тейлора по степеням  $(x-a)$ , ограничиваясь смешанными производными до третьего порядка включительно:

$$f(x, b) = f(a, b) + \frac{x-a}{1} f'_x(a, b) + \frac{(x-a)^2}{1 \cdot 2} f''_{xx}(a, b) + \frac{(x-a)^3}{1 \cdot 2 \cdot 3} f'''_{xxx}(\xi_1, b), \quad (2)$$

где  $\xi_1 = x + \theta_2(x-a)$ ,  $0 < \theta_2 < 1$ ;

$$f'_y(x, b) = f'_y(a, b) + \frac{x-a}{1} f''_{yx}(a, b) + \frac{(x-a)^2}{1 \cdot 2} f'''_{yxx}(\xi_2, b), \quad (3)$$

где  $\xi_2 = x + \theta_3(x-a)$ ,  $0 < \theta_3 < 1$ ;

$$f''_{yy}(x, b) = f''_{yy}(a, b) + \frac{x-a}{1} f'''_{yyx}(\xi_3, b), \quad (4)$$

где  $\xi_3 = x + \theta_4(x-a)$ ,  $0 < \theta_4 < 1$ .

Подставляя выражения (2), (3), (4) в формулу (1), получим

$$\begin{aligned} f(x, y) = & f(a, b) + \frac{x-a}{1!} f'_x(a, b) + \frac{(x-a)^2}{2!} f''_{xx}(a, b) + \frac{(x-a)^3}{3!} f'''_{xxx}(\xi_1, b) + \\ & + \frac{y-b}{1!} \left[ f'_y(a, b) + \frac{x-a}{1!} f''_{yx}(a, b) + \frac{(x-a)^2}{2!} f'''_{yxx}(\xi_2, b) \right] + \\ & + \frac{(y-b)^2}{2!} \left[ f''_{yy}(a, b) + \frac{x-a}{1!} f'''_{yyx}(\xi_3, b) \right] + \frac{(y-b)^3}{3!} f'''_{yyy}(x, \eta_1). \end{aligned}$$

Отсюда

$$\begin{aligned} f(x, y) = & f(a, b) + (x-a)f'_x(a, b) + (y-b)f'_y(a, b) + \frac{1}{2!}[(x-a)^2 f''_{xx}(a, b) + \\ & + 2(x-a)(y-b)f''_{xy}(a, b) + (y-b)^2 f''_{yy}(a, b)] + \frac{1}{3!}[(x-a)^3 f'''_{xxx}(\xi_1, b) + \\ & + 3(x-a)^2(y-b)f'''_{xxy}(\xi_2, b) + 3(x-a)(y-b)^2 f'''_{xyy}(\xi_3, b) + (y-b)^3 f'''_{yyy}(a, \eta_1)]. \quad (5) \end{aligned}$$

Это и есть формула Тейлора при  $n=2$ . Выражение

$$\begin{aligned} R_2 = & \frac{1}{3!}[(x-a)^3 f'''_{xxx}(\xi_1, b) + 3(x-a)^2(y-b)f'''_{xxy}(\xi_2, b) + \\ & + 3(x-a)(y-b)^2 f'''_{xyy}(\xi_3, b) + (y-b)^3 f'''_{yyy}(a, \eta_1)] \end{aligned}$$

называется остаточным членом. Вводя обозначения  $x-a=\Delta x$ ,  $y-b=\Delta y$ ,  $\Delta\rho=\sqrt{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2}$ , перепишем формулу Тейлора в виде

$$\begin{aligned} f(x, y) = & f(a, b) + \Delta x f'_x(a, b) + \Delta y f'_y(a, b) + \frac{1}{2!}[\Delta x^2 f''_{xx}(a, b) + \\ & + 2\Delta x \Delta y f''_{xy}(a, b) + \Delta y^2 f''_{yy}(a, b)] + R_2. \end{aligned}$$

Можно показать при этом, что  $R_2 = a_0 \Delta\rho^3$ , где  $a_0 = \text{const}$ .

Аналогичная формула имеет место для любого  $n$ .

#### 4.5. Экстремум функции двух переменных

Определение экстремума функции двух переменных. Необходимые условия существования экстремума. Достаточные условия существования экстремума. Примеры исследования функций на экстремум.

##### 4.5.1. Определение экстремума функции двух переменных

**ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1.** Функция  $z = f(x, y)$  имеет максимум в точке  $M_0(x, y)$ , если  $f(x_0, y_0) > f(x, y)$  для всех точек  $(x, y)$ , достаточно близких к  $(x_0, y_0)$  и отличных от нее.

**ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2.** Функция  $z = f(x, y)$  имеет минимум в точке  $M_0(x_0, y_0)$ , если  $f(x_0, y_0) < f(x, y)$  для всех точек  $(x, y)$ , достаточно близких к точке  $(x_0, y_0)$  и отличных от нее.

Максимум и минимум функции называются экстремумами.

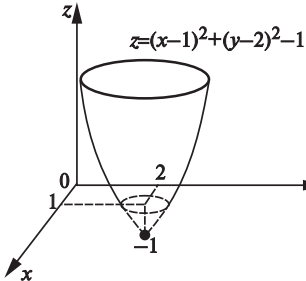


Рис. 4.5

**Пример.**

Функция  $z = (x-1)^2 + (y-2)^2 - 1$  достигает минимума при  $x=1$ ,  $y=2$ . Действительно,  $f(1, 2) = -1$ , и так как  $(x-1)^2$  и  $(y-2)^2$  всегда положительны при  $x \neq 1$ ,  $y \neq 2$ , то  $(x-1)^2 + (y-2)^2 - 1 > -1$ , т. е.  $f(x, y) > f(1, 2)$ .

#### 4.5.2. Необходимые условия существования экстремума

**Теорема.** Если функция  $z = f(x, y)$  достигает экстремума при  $x = x_0$ ,  $y = y_0$ , то каждая частная производная первого порядка от  $z$  или обращается в нуль при этих значениях аргументов, или не существует.

*Доказательство.* Пусть  $y = y_0$ . Тогда  $f(x, y_0)$  является функцией одного переменного  $x$ . Так как при  $x = x_0$  она имеет экстремум, то

$$\left( \frac{\partial z}{\partial x} \right)_{x=x_0, y=y_0}$$

или равно 0, или не существует. Аналогично  $\left( \frac{\partial z}{\partial y} \right)_{x=x_0, y=y_0}$  или обращается

в 0, или не существует.

Эта теорема не является достаточной, так как еще не гарантирует наличие экстремума. Например, функция  $z = x^2 - y^2$  имеет  $\frac{\partial z}{\partial x} = 2x$ ,  $\frac{\partial z}{\partial y} = -2y$ . Частные производные равны 0 в начале координат, однако экстремума нет, так как в сколь угодно близких к началу координат точках  $z$  принимает как положительные, так и отрицательные значения.

Точки, в которых частные производные  $\frac{\partial z}{\partial x}$ ,  $\frac{\partial z}{\partial y}$  равны 0 или не существуют, называются критическими точками.



### 4.5.3. Достаточные условия существования экстремума

Введем следующие обозначения:

$$\left( \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \right)_{\substack{x=x_0 \\ y=y_0}} = A, \quad \left( \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} \right)_{\substack{x=x_0 \\ y=y_0}} = B, \quad \left( \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \right)_{\substack{x=x_0 \\ y=y_0}} = C.$$

**Теорема (достаточные условия существования экстремума).** Пусть в некоторой области, содержащей точку  $M_0(x_0, y_0)$ , функция  $f(x, y)$  имеет непрерывные производные до третьего порядка включительно; пусть, кроме того, точка  $M_0(x_0, y_0)$  является критической для функции  $f(x, y)$ , т. е.

$$\frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial y} = 0.$$

Тогда при  $x = x_0, y = y_0$ :

1)  $f(x, y)$  имеет экстремум, если

$$AC - B^2 > 0,$$

а именно:

максимум, если  $A < 0$ ,

минимум, если  $A > 0$ ;

2) функция  $f(x, y)$  не имеет экстремума, если

$$AC - B^2 < 0;$$

3) если  $AC - B^2 = 0$ , то экстремум может быть и может не быть (в этом случае нужно дополнительное исследование).

### 4.5.4. Примеры исследования функций на экстремум

**Пример.** Исследовать на максимум и минимум функцию

$$z = x^2 - xy + y^2 + 3x - 2y + 1.$$

**Решение.** 1. Находим критические точки

$$\frac{\partial z}{\partial x} = 2x - y + 3, \quad \frac{\partial z}{\partial y} = -x + 2y - 2.$$

Решая систему уравнений

$$\begin{cases} 2x - y + 3 = 0, \\ -x + 2y - 2 = 0, \end{cases}$$

получаем

$$x = -\frac{4}{3}, \quad y = \frac{1}{3}.$$

2. Находим производные второго порядка в критической точке  $\left(-\frac{4}{3}, \frac{1}{3}\right)$  и определяем характер критической точки:

$$A = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = 2, \quad B = \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = -1, \quad C = \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 2,$$

$$AC - B^2 = 3 > 0.$$

Следовательно, в точке  $\left(-\frac{4}{3}, \frac{1}{3}\right)$  данная функция имеет минимум,

а именно

$$z_{\min} = -\frac{4}{3}.$$

**Пример.** Исследовать на экстремум функцию

$$z = x^3 + y^3 - 3xy.$$

*Решение.* 1. Найдем критические точки, пользуясь необходимыми условиями экстремума:

$$\begin{cases} \frac{\partial z}{\partial x} = 3x^2 - 3y = 0, \\ \frac{\partial z}{\partial y} = 3y^2 - 3x = 0. \end{cases}$$

Отсюда получаем две критические точки:

$$x_1 = 1, \quad y_1 = 1; \quad x_2 = 0, \quad y_2 = 0.$$

2. Найдем производные второго порядка:

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = 6x, \quad \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = -3, \quad \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 6y.$$

3. Исследуем характер первой критической точки:

$$A = \left(\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}\right)_{\substack{x=1 \\ y=1}} = 6, \quad B = \left(\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}\right)_{\substack{x=1 \\ y=1}} = -3, \quad C = \left(\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}\right)_{\substack{x=1 \\ y=1}} = 6,$$

$$AC - B^2 = 27 > 0, \quad A = 6 > 0.$$

Следовательно, в точке  $(1, 1)$  данная функция имеет минимум

$$z_{\min} = -1.$$

4. Исследуем характер второй критической точки  $(0, 0)$ :

$$A = 0, \quad B = -3, \quad C = 0;$$

$$AC - B^2 = -9 < 0.$$

Следовательно, в точке  $(0, 0)$  функция не имеет ни максимума, ни минимума.

#### **4.6. Наибольшее и наименьшее значения функции двух переменных. Условный экстремум. Необходимые условия**

Наибольшее и наименьшее значения функции двух переменных в замкнутой области. Пример исследования функции на наибольшее и наименьшее значения. Условный экстремум. Уравнение связи. Необходимые условия существования экстремума.

##### **4.6.1. Наибольшее и наименьшее значения функции двух переменных в ограниченной замкнутой области**

Пусть функция  $z = f(x, y)$  непрерывна в ограниченной замкнутой области  $G$  и дифференцируема внутри нее. Тогда она имеет в этой области наименьшее и наибольшее значения, которые достигаются либо внутри области, либо на ее границе. Таким образом, точки, в которых функция имеет наибольшее и наименьшее значения, являются либо точками экстремума, либо граничными точками области.

##### **Правило нахождения наибольшего и наименьшего значения**

Для того чтобы найти наибольшее и наименьшее значения функции в ограниченной замкнутой области  $G$ , следует найти значения функции в критических точках, а также наибольшее и наименьшее значения на границе, а затем из всех этих значений выбрать наибольшее и наименьшее.

#### 4.6.2. Пример исследования функции на наибольшее и наименьшее значения

Найти наибольшее и наименьшее значения

$$z = x^2 + y^2 - xy + x + y$$

в области  $x \leq 0$ ,  $y \leq 0$ ,  $x + y \geq -3$ .

*Решение.* Находим критические точки:

$$\begin{cases} \frac{\partial z}{\partial x} = 2x - y + 1 = 0 \\ \frac{\partial z}{\partial y} = 2y - x + 1 = 0. \end{cases}$$

Таким образом, критическая точка имеет координаты  $(-1, -1)$ . Значение функции в этой точке  $z(M) = -1$ .

Исследуем функцию на границе области.

$x = 0$ . Здесь

$$z = y^2 + y, \quad -3 \leq y \leq 0.$$

$$z' = 2y + 1 = 0 \Rightarrow y = -\frac{1}{2};$$

$$z\left(-\frac{1}{2}\right) = -\frac{1}{4}; \quad z(-3) = 6, \quad z(0) = 0.$$

Таким образом,

$$z\left(0, -\frac{1}{2}\right) = -\frac{1}{4}, \quad z(0, -3) = 6, \quad z(0, 0) = 0.$$

$y = 0$ . На этой прямой имеем:  $z = x^2 + x$ ;  $-3 \leq x \leq 0$ .

$$z' = 2x + 1 = 0 \Rightarrow x = -\frac{1}{2};$$

$$z\left(-\frac{1}{2}, 0\right) = -\frac{1}{4}; \quad z(-3, 0) = 6.$$

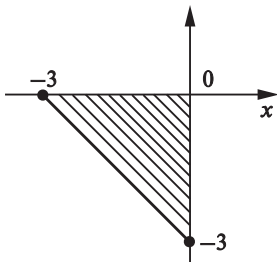


Рис. 4.6

$x + y = -3$ . Здесь  $y = -3 - x$  и функция  $z = f(x, y)$  принимает вид

$$z = x^2 + (3 + x)^2 + (3 + x)x + x - 3 - x = 3x^2 + 9x + 6.$$

$$z' = 6x + 9 = 0 \Rightarrow x = -\frac{3}{2} \Rightarrow y = -3 + \frac{3}{2} = -\frac{3}{2};$$

$$z\left(-\frac{3}{2}, -\frac{3}{2}\right) = -\frac{3}{4},$$

$$z(0, -3) = 6,$$

$$z(-3, 0) = 6.$$

Итак, окончательно, наибольшее значение функция  $z = f(x, y)$  принимает в точке  $(0, -3)$  и в точке  $(-3, 0)$ :  $z = 6$ . Наименьшее значение функция  $z$  принимает в точке  $(-1, -1)$ :

$$z = -1.$$

#### 4.6.3. Условный экстремум. Уравнение связи

Рассмотрим следующую задачу: из данного куска жести площадью  $2a$  надо сделать закрытую коробку в форме параллелепипеда, имеющую наибольший объем.

Пусть дана ширина, высота коробки соответственно  $x, y, z$ . Задача сводится к нахождению максимума функции

$$v = xyz$$

при условии, что

$$2xy + 2xz + 2yz = 2a.$$

Это задача на условный экстремум: переменные  $x, y, z$  связаны условием  $2xy + 2xz + 2yz = 2a$  (уравнением связи).

Пусть требуется найти экстремумы функции

$$z = f(x, y) \tag{1}$$

при условии

$$\varphi(x, y) = 0. \tag{2}$$

Так как есть уравнение связи (2), то из двух переменных  $x$  и  $y$  независимым будет только одна (например  $x$ ), т. к.  $y$  определяется из уравнения (2) как функция от  $x$ . Если уравнение (2) можно разрешить, то, подставляя в равенство (1)  $y = y(x)$ , мы получим функцию одной переменной  $x$ , которая легко исследуется на экстремум.

Но можно и не разрешать уравнение (2) относительно  $y$ .

#### 4.6.4. Необходимые условия условного экстремума

Ясно, что при тех значениях  $x$ , при которых функция  $f(x, y)$  имеет экстремум, ее производная  $\frac{dz}{dx}$  равна 0. Найдем  $\frac{dz}{dx}$  из уравнения (1), помня, что  $y$  есть функция от  $x$ :

$$\frac{dz}{dx} = \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y} \cdot \frac{dy}{dx}.$$

Следовательно, в точках экстремума

$$\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y} \cdot \frac{dy}{dx} = 0. \quad (3)$$

Из равенства (2) получим

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x} + \frac{\partial \varphi}{\partial y} \frac{dy}{dx} = 0. \quad (4)$$

Умножим члены равенства (4) на некоторый коэффициент  $\lambda$  и сложим с членами равенства (3):

$$\left( \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y} \frac{dy}{dx} \right) + \lambda \left( \frac{\partial \varphi}{\partial x} + \frac{\partial \varphi}{\partial y} \frac{dy}{dx} \right) = 0$$

или

$$\left( \frac{\partial f}{\partial x} + \lambda \frac{\partial \varphi}{\partial x} \right) + \left( \frac{\partial f}{\partial y} + \lambda \frac{\partial \varphi}{\partial y} \right) \frac{dy}{dx} = 0. \quad (5)$$

Последнее равенство выполнено во всех точках экстремума. Подберем  $\lambda$  так, чтобы для всех  $x, y$ , при которых функция  $z = f(x, y)$  имеет экстремум, вторая скобка в равенстве (5) обратилась в 0:

$$\frac{\partial f}{\partial y} + \lambda \frac{\partial \varphi}{\partial y} = 0.$$

(Для определенности предположим, что в критических точках  $\frac{\partial \varphi}{\partial y}$  не равна 0.) Но тогда

$$\frac{\partial f}{\partial x} + \lambda \frac{\partial \varphi}{\partial x} = 0.$$

Таким образом, в точках экстремума удовлетворяются три уравнения:

$$\begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x} + \lambda \frac{\partial \varphi}{\partial x} = 0, \\ \frac{\partial f}{\partial y} + \lambda \frac{\partial \varphi}{\partial y} = 0, \\ \varphi(x, y) = 0 \end{cases} \quad (6)$$

с тремя неизвестными  $x$ ,  $y$ ,  $\lambda$ . Из этих уравнений определяем  $x$ ,  $y$  и  $\lambda$ , которое играло только вспомогательную роль и в дальнейшем нам не требуется.

Из вывода следует, что система (6) дает лишь необходимые условия существования экстремума.

Заметим, что левые части уравнений (6) — это частные производные функции

$$F(x, y, \lambda) = f(x, y) + \lambda \varphi(x, y)$$

по переменным  $x$ ,  $y$ ,  $\lambda$ .

Функция  $F(x, y, \lambda)$  называется *функцией Лагранжа*, а число  $\lambda$  — *множителем Лагранжа*.

#### 4.7. Достаточные условия существования условного экстремума.

##### Метод наименьших квадратов

Достаточные условия существования условного экстремума. Пример решения задачи на отыскание условного экстремума. Метод наименьших квадратов.

##### 4.7.1. Достаточные условия существования условного экстремума

Итак, для отыскания точек, в которых возможен условный экстремум, необходимо составить функцию Лагранжа и найти критические точки для этой функции. Вопрос о существовании и характере условного экстремума решается с помощью достаточного признака для функции Лагранжа. Таким образом, чтобы найти условный экстремум, нужно найти обычный экстремум для функции Лагранжа, используя при этом уравнение связи  $\varphi(x, y) = 0$ .

**З а м е ч а н и е.** Иногда удобно при проверке достаточных условий экстремума пользоваться критерием, основанным на знаке второго дифференциала функции Лагранжа. Этот критерий формулируется следующим образом: пусть в критической точке  $d^2F > 0$ , тогда эта точка условного минимума. Если  $d^2F < 0$ , то имеем точку условного максимума. Здесь

$$d^2F = \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} (dx)^2 + 2 \frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y} dx dy + \frac{\partial^2 F}{\partial y^2} (dy)^2,$$

где дифференциалы  $dx$  и  $dy$  связаны соотношением

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x} dx + \frac{\partial \varphi}{\partial y} dy = 0.$$

Рассмотренный метод распространяется на исследование условного экстремума функции любого числа переменных при наличии одного или нескольких уравнений связи. Здесь приходится вводить в функцию Лагранжа столько неопределенных множителей, сколько имеется уравнений связи.

#### 4.7.2. Пример решения задачи на отыскание условного экстремума

Найти экстремум функции  $z = 6 - 4x - 3y$  при условии, что  $x^2 + y^2 = 1$ .

*Решение.* Геометрически задача сводится к нахождению наибольшего и наименьшего значения координаты  $z$  плоскости  $z = 6 - 4x - 3y$  в точках ее пересечения с цилиндром  $x^2 + y^2 = 1$ .

Составим функцию Лагранжа

$$F(x, y, \lambda) = 6 - 4x - 3y + \lambda(x^2 + y^2 - 1).$$

Вычислим производные этой функции по переменным  $x$ ,  $y$  и  $\lambda$ :

$$\begin{aligned}\frac{\partial F}{\partial x} &= -4 + 2\lambda x, \\ \frac{\partial F}{\partial y} &= -3 + 2\lambda y, \\ \frac{\partial F}{\partial \lambda} &= x^2 + y^2 - 1.\end{aligned}$$

Приравняв эти производные к нулю, получим систему уравнений для отыскания координат критической точки

$$\begin{cases} -4 + 2\lambda x = 0, \\ -3 + 2\lambda y = 0, \\ x^2 + y^2 - 1 = 0. \end{cases}$$

Решив эту систему, получим координаты двух критических точек

$$x_1 = \frac{4}{5}, \quad y_1 = \frac{3}{5}, \quad \lambda_1 = \frac{5}{2}; \quad x_2 = -\frac{4}{5}, \quad y_2 = -\frac{3}{5}, \quad \lambda_2 = -\frac{5}{2}.$$

Проверим достаточные условия экстремума:

$$A = \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} = 2\lambda, \quad B = \frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y} = 0, \quad C = \frac{\partial^2 F}{\partial y^2} = 2\lambda.$$



Для первой точки

$$AC - B^2 = 4\lambda^2 > 0, \quad A = 2\lambda = 5 > 0.$$

Таким образом, точка с координатами  $\left(\frac{4}{5}, \frac{3}{5}\right)$  является точкой условного минимума функции  $z = 6 - 4x - 3y$ .

Для второй точки

$$AC - B^2 = 4\lambda^2 > 0, \quad A = 2\lambda = -5 < 0.$$

Т. е. точка с координатами  $x_2 = -\frac{4}{5}$ ,  $y_2 = -\frac{3}{5}$  является точкой условного максимума рассматриваемой функции.

#### 4.7.3. Метод наименьших квадратов

Метод наименьших квадратов широко используется при обработке экспериментальных данных в тех случаях, когда теория дает закон, определяющий уравнение связи между физическими величинами, но с некоторыми неопределенными параметрами (коэффициентами), для определения которых проводятся эксперименты. Например, удлинение  $\Delta l$  линейного образца с начальной длиной  $l_0$  и начальной температурой  $T_0$  прямо пропорционально приращению его температуры  $T$ :

$$\Delta l = \alpha l_0 (T - T_0)$$

где  $\alpha$  — коэффициент линейного расширения, который определяется экспериментально.

В соответствии с законом Гука имеет место линейная связь между напряжениями и деформациями упругого деформируемого тела. В общем случае линейной связи двух физических величин  $x$ ,  $y$  дается соотношение

$$Y(x) = ax + b,$$

с двумя параметрами  $a$ ,  $b$ , для определения которых проводятся эксперименты и для заданной последовательности  $x_1, x_2, \dots, x_n$  определяют соответствующие им значения  $y_1, y_2, \dots, y_n$ . Полученные результаты записываются в таблицу

$x$	$x_1$	$x_2$	$x_3$	$\dots$	$x_n$
$y$	$y_1$	$y_2$	$y_3$	$\dots$	$y_n$

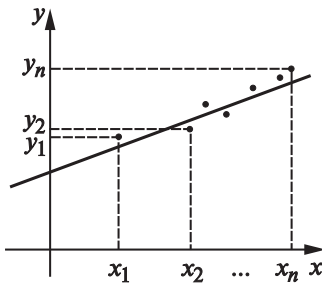


Рис. 4.7

Если полученные данные рассматривать как координаты точек на плоскости  $x, y$  и нанести эти точки на график, то в результате получится, что все эти точки на одной прямой не находятся (рис. 4.7). Объясняется это неизбежностью наличия погрешностей эксперимента. Поэтому неизвестные коэффициенты однозначно не определяются. При небольшом количестве точек для их определения прямую линию можно провести на данном графике по линейке и вычислить  $a, b$  по углу наклона проведенной прямой и отсекаемому отрезку на оси  $y$ .

Для более объективного определения параметров  $a, b$  обычно используется метод наименьших квадратов. Методом наименьших квадратов неизвестные величины  $a, b$  определяются так, чтобы сумма квадратов отклонений всех точек, полученных экспериментально, от

прямой (1)  $\sum_{i=1}^n (ax_i + b - y_i)^2$  имела наименьшее значение.

Поскольку  $x_i$  и  $y_i$  нам заданы, то  $\sum_{i=1}^n (ax_i + b - y_i)^2$  есть функция переменных  $a$  и  $b$ :  $f(a, b)$ .

$$f(a, b) = (ax_1 + b - y_1)^2 + (ax_2 + b - y_2)^2 + \dots + (ax_n + b - y_n)^2. \quad (2)$$

Для нахождения параметров  $a$  и  $b$  воспользуемся необходимыми условиями экстремума функции двух переменных:  $\frac{\partial f}{\partial a} = 0, \frac{\partial f}{\partial b} = 0$ .

Дифференцируя равенство (2) по переменным  $a$  и  $b$  и приравнявая результаты к нулю, получим

$$2 \sum_{i=1}^n (ax_i + b - y_i) x_i = 0,$$

$$2 \sum_{i=1}^n (ax_i + b - y_i) = 0.$$

Таким образом, параметры  $a$  и  $b$  определяются из следующей системы уравнений:

$$\begin{cases} a \sum_{i=1}^n x_i^2 + b \sum_{i=1}^n x_i = \sum_{i=1}^n x_i y_i, \\ a \sum_{i=1}^n x_i + bn = \sum_{i=1}^n y_i. \end{cases} \quad (3)$$

Легко проверить, что определитель системы (3) отличен от 0, поэтому такая система имеет единственное решение.

Покажем, что для найденных значений  $a$  и  $b$  функция  $f(a, b)$  имеет минимум:

$$A = \frac{\partial^2 f}{\partial a^2} = 2 \sum_{i=1}^n x_i^2; \quad C = \frac{\partial^2 f}{\partial b^2} = 2n; \quad B = \frac{\partial^2 f}{\partial a \partial b} = 2 \sum_{i=1}^n x_i.$$

$$\Delta = AC - B^2 = 4n \sum_{i=1}^n x_i^2 - 4 \left( \sum_{i=1}^n x_i \right)^2 = 4 \sum_{\substack{i,j \\ i < j}} (x_i - x_j)^2 > 0, \quad A > 0.$$

Таким образом, согласно достаточному условию существования экстремума, функция  $f(a, b)$  имеет минимум.

Подставляя найденные значения  $a$  и  $b$  в равенство (1), получим линейную функцию, наилучшим образом отражающую зависимость между величинами  $x$  и  $y$ , найденными экспериментально.

**Пример.** Пусть на основании эксперимента получены четыре значения искомой линейной функции  $y$  при четырех значениях аргумента, которые записаны в таблице.

$x$	1	2	3	5
$y$	3	4	2,5	0,5

Составляем выражение  $f(a, b)$ :

$$f(a, b) = \sum_{i=1}^n [ax_i + b - y_i], \quad n = 4.$$

Для составления системы (3) для определения коэффициентов  $a$  и  $b$  предварительно вычисляем

$$\sum_{i=1}^n x_i y_i = 21, \quad \sum_{i=1}^n x_i^2 = 39, \quad \sum_{i=1}^n x_i = 11, \quad \sum_{i=1}^n y_i = 10.$$

Система (3) принимает вид

$$\begin{cases} 21 - 39a - 11b = 0, \\ 10 - 11a - 4b = 0. \end{cases}$$

Решая эту систему, находим  $a = -\frac{26}{35}$ ,  $b = \frac{159}{35}$ . Искомая прямая есть

$$Y = -\frac{26}{35}x + \frac{159}{35}.$$

#### 4.8. Векторная функция скалярного аргумента

Задачи, приводящие к понятию векторной функции скалярного аргумента. Предел и производная векторной функции. Механический смысл первой и второй производных векторной функции скалярного аргумента.

##### 4.8.1. Задачи, приводящие к понятию векторной функции скалярного аргумента

Исаак Ньютон в своих трудах неоднократно указывал на тесную связь между механикой и математикой. Он подчеркивал, что многие основные понятия математики родились из практической механики, имеющей в своей основе непосредственную практическую деятельность людей.

За три столетия, отделяющие нас от эпохи Ньютона, сохранилась главная задача физико-математических наук — объяснение и точное описание явлений природы.

До сих пор мы занимались изучением тех процессов и явлений, которые описываются скалярной функцией одного или нескольких скалярных аргументов, т. е. функциональной зависимостью вида

$$y = f(x) \text{ или } y = f(x_1, x_2, \dots, x_n).$$

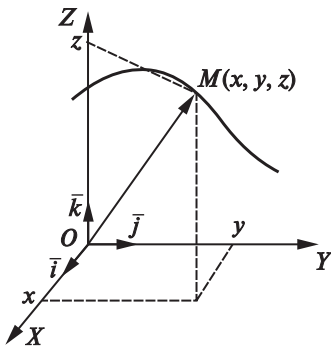


Рис. 4.8

Аналогично можно дать понятие векторной функции скалярного аргумента. Обратимся к простейшей механической модели, которая приведет нас к такому понятию. Пусть материальная точка  $M$  перемещается в пространстве. Рассмотрим в пространстве декартову прямоугольную систему координат  $OXYZ$  и обозначим через  $x, y, z$  координаты точки  $M$ . Рассмотрим вектор  $\overrightarrow{OM} = \vec{r}$ , начало которого совпадает с началом координат, а конец с

точкой  $M(x, y, z)$ . Такой вектор назовем радиус-вектором. Выразим этот вектор через его проекции на оси координат

$$\vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}. \quad (1)$$

Пусть закон движения точки  $M$  задан, т. е. пусть координаты точки  $x, y, z$  являются функциями времени  $t$ :

$$x = \varphi(t), \quad y = \psi(t), \quad z = \eta(t). \quad (2)$$

Тогда формулу (1) можно переписать так:

$$\vec{r} = \varphi(t)\vec{i} + \psi(t)\vec{j} + \eta(t)\vec{k} \quad (1')$$

или коротко

$$\vec{r} = \vec{r}(t). \quad (1'')$$

Говорят, что формулы (1') и (1'') определяют векторную функцию скалярного аргумента  $t$ .

При изменении параметра  $t$  вектор  $\vec{r}(t)$  меняется по величине и направлению, а точка  $M$ , конец вектора  $\vec{r}$ , опишет в пространстве некоторую линию, которую называют годографом вектора  $\vec{r} = \vec{r}(t)$ . Уравнения (1') и (1'') называют векторным уравнением линии в пространстве. Уравнение (2) называют параметрическим уравнением линии в пространстве.

Уравнение (1') можно рассматривать как математическую модель движения материальной точки.

Как показывает практика, уравнением вида (1'') могут быть описаны многие физические процессы. Поэтому мы займемся более подробным изучением свойств векторной функции скалярного аргумента, отвлекшись от конкретного содержания задач.

#### 4.8.2. Предел и производная векторной функции скалярного аргумента

Допустим, что

$$\lim_{t \rightarrow t_0} \varphi(t) = \varphi_0,$$

$$\lim_{t \rightarrow t_0} \psi(t) = \psi_0,$$

$$\lim_{t \rightarrow t_0} \eta(t) = \eta_0.$$

Тогда говорят, что вектор  $\bar{r}_0 = \varphi_0 \bar{i} + \psi_0 \bar{j} + \eta_0 \bar{k}$  есть предел вектора  $\bar{r}(t)$  при  $t \rightarrow t_0$  и пишут:

$$\lim_{t \rightarrow t_0} \bar{r}(t) = \bar{r}_0.$$

Из последнего соотношения вытекают очевидные равенства

$$\lim_{t \rightarrow t_0} |\bar{r}(t) - \bar{r}_0| = \lim_{t \rightarrow t_0} \sqrt{(\varphi(t) - \varphi_0)^2 + (\psi(t) - \psi_0)^2 + (\eta(t) - \eta_0)^2} = 0;$$

$$\lim_{t \rightarrow t_0} |\bar{r}(t)| = |\bar{r}_0|.$$

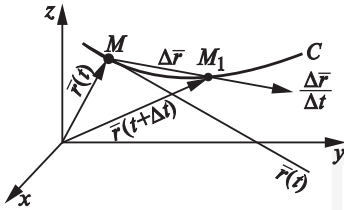


Рис. 4.9

Перейдем теперь к вопросу о производной векторной функции. Пусть векторная функция (1') является радиус-вектором точки  $M(x, y, z)$ , т. е.  $\bar{r}(t) = \overline{OM}$ . При изменении параметра  $t$  точка  $M$  описывает годограф  $C$ . Будем считать, что функции  $\varphi, \psi, \eta$  дифференцируемы по  $t$ . Выберем и зафиксируем значение параметра  $t$ . Ему соответствует точка  $M$  и вектор  $\bar{r}(t)$ .

Рассмотрим другое значение параметра  $t + \Delta t$ . Ему соответствует точка  $M_1$  и вектор  $\bar{r}(t + \Delta t)$ . Рассмотрим вектор  $\Delta \bar{r} = \overline{MM_1}$ . Очевидно,  $\Delta \bar{r} = \bar{r}(t + \Delta t) - \bar{r}(t)$  — приращение вектор-функции  $\bar{r}(t)$  в точке  $t$ . Рассмотрим отношение  $\frac{\Delta \bar{r}}{\Delta t}$ . Это вектор, коллинеарный вектору  $\Delta \bar{r}$ , так

как отличается от него множителем  $\frac{1}{\Delta t}$ .

Производной вектор-функции  $\bar{r}(t)$  в точке  $t$  по скалярному аргументу  $t$  называется новый вектор, равный пределу отношения приращения вектор-функции  $\Delta \bar{r}$  к приращению аргумента  $\Delta t$  при условии, что  $\Delta t \rightarrow 0$ . Таким образом, по определению,

$$\frac{d\bar{r}}{dt} = \bar{r}'(t) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \bar{r}}{\Delta t}. \quad (3)$$

Выразим производную вектор-функции через ее проекции на оси координат.

Имеем

$$\begin{aligned}\frac{\overline{\Delta r}}{\Delta t} &= \frac{\bar{r}(t + \Delta t) - \bar{r}(t)}{\Delta t} = \frac{\varphi(t + \Delta t) - \varphi(t)}{\Delta t} \bar{i} + \frac{\psi(t + \Delta t) - \psi(t)}{\Delta t} \bar{j} + \frac{\eta(t + \Delta t) - \eta(t)}{\Delta t} \bar{k}; \\ \bar{r}'(t) &= \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \bar{r}}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\varphi(t + \Delta t) - \varphi(t)}{\Delta t} \bar{i} + \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\psi(t + \Delta t) - \psi(t)}{\Delta t} \bar{j} + \\ &+ \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\eta(t + \Delta t) - \eta(t)}{\Delta t} \bar{k} = \varphi'(t) \bar{i} + \psi'(t) \bar{j} + \eta'(t) \bar{k}.\end{aligned}$$

Итак,

$$\bar{r}'(t) = \varphi'(t) \bar{i} + \psi'(t) \bar{j} + \eta'(t) \bar{k}. \quad (4)$$

Выясним направление вектора  $\bar{r}'(t)$ . Так как при  $\Delta t \rightarrow 0$  точка  $M_1$  приближается к точке  $M$ , то направление секущей  $MM_1$  в пределе дает направление касательной. Следовательно, вектор  $\bar{r}'(t)$  направлен по касательной к кривой в точке  $M$ . Согласно равенству (4) длина вектора  $\bar{r}'(t)$  определяется формулой

$$|\bar{r}'(t)| = \sqrt{[\varphi'(t)]^2 + [\psi'(t)]^2 + [\eta'(t)]^2}. \quad (5)$$

Согласно формуле (4) производная  $\bar{r}'(t)$  также является вектор-функцией аргумента  $t$ . Для этой вектор-функции можно в свою очередь определить производную, которую будем называть производной второго порядка функции  $\bar{r}(t)$  и обозначать  $\bar{r}''(t)$ . Итак,

$$\bar{r}''(t) = \frac{d}{dt} [\bar{r}'(t)] = \varphi''(t) \bar{i} + \psi''(t) \bar{j} + \eta''(t) \bar{k}.$$

#### 4.8.3. Механический смысл первой и второй производных векторной функции скалярного аргумента

Пусть материальная точка движется по годографу вектора  $\bar{r} = \bar{r}(t)$ , причем параметр  $t$  означает время движения. Скоростью  $\bar{v} = \bar{v}(t)$  движения материальной точки в момент  $t$  называется вектор, направленный по касательной к траектории в сторону движения и равный по модулю  $\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta S}{\Delta t}$ , где  $\Delta S$  — путь, пройденный точкой за промежуток времени  $\Delta t$ .

Как было показано выше, вектор  $\bar{r}'(t)$  направлен по касательной к годографу вектора  $\bar{r}(t)$ . При этом  $\frac{\overline{\Delta r}}{\Delta t}$ , а следовательно, и вектор  $\bar{r}'(t)$  направлен в сторону движения точки. Таким образом, векторы  $\bar{r}'(t)$  и  $\bar{v}(t)$  имеют одинаковые направления. Покажем, что равны и модули этих векторов.

Действительно, обозначив через  $\Delta S$  длину дуги  $\overset{\sim}{MM_1}$ , а через  $|\overline{\Delta r}|$  длину хорды  $M_1M$ , получим

$$\left| \frac{\overline{\Delta r}}{\Delta t} \right| = \left| \frac{\overline{\Delta r} \cdot \Delta S}{\Delta S \cdot \Delta t} \right| = \frac{|\overline{\Delta r}|}{\Delta S} \cdot \frac{\Delta S}{\Delta t}.$$

Как было показано ранее, в случае дифференцируемых функций  $\phi(t)$ ,  $\psi(t)$ ,  $\eta(t)$  предел отношения длины дуги к длине стягивающей ее хорды при стремлении длины дуги к 0 равен 1. Но тогда

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{|\overline{\Delta r}|}{\Delta S} = \lim_{\Delta S \rightarrow 0} \frac{|\overline{\Delta r}|}{\Delta S} = 1.$$

Поэтому

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \left| \frac{\overline{\Delta r}}{\Delta t} \right| = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{|\overline{\Delta r}|}{\Delta S} \cdot \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta S}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta S}{\Delta t}.$$

$$\text{Но } \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \left| \frac{\overline{\Delta r}}{\Delta t} \right| = |\bar{r}'(t)|, \text{ а } \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta S}{\Delta t} = |\bar{v}(t)|.$$

Итак,

$$|\bar{r}'(t)| = |\bar{v}(t)|.$$

Таким образом, производная  $\bar{r}'(t)$  вектор-функции  $r(t)$  равна скорости движения материальной точки в данный момент времени  $t$ . В этом заключается механический смысл первой производной векторной функции скалярного аргумента.

По определению,

$$\bar{r}''(t) = \frac{d}{dt} [\bar{r}'(t)].$$

$$\text{Но } \bar{r}'(t) = \bar{v}(t) \Rightarrow \bar{r}''(t) = \frac{d\bar{v}(t)}{dt}.$$

Вектор  $\bar{a}(t)$ , равный производной скорости по времени, называется ускорением.



Таким образом, вторая производная вектор-функции равна ускорению движения материальной точки в данный момент времени  $t$ . В этом заключается механический смысл второй производной.

#### 4.9. Геометрический смысл полного дифференциала

Уравнения касательной прямой и нормальной плоскости к пространственной кривой. Касательная плоскость и нормаль к поверхности. Геометрический смысл полного дифференциала функции двух переменных.

##### 4.9.1. Уравнения касательной прямой и нормальной плоскости к пространственной кривой

На предыдущей лекции было показано, что вектор  $\vec{r}(t)$  направлен по касательной к годографу радиуса-вектора  $\overline{OM} = \vec{r}(t)$ . Пусть пространственная кривая задана параметрическими уравнениями  $x = \varphi(t)$ ,  $y = \psi(t)$ ,  $z = \eta(t)$ .

Найдем уравнения касательной к этой кривой в некоторой ее точке  $M_0(x_0, y_0, z_0)$ , соответствующей параметру  $t = t_0$ .

Очевидно, эти уравнения имеют вид

$$\frac{x - x_0}{m} = \frac{y - y_0}{n} = \frac{z - z_0}{p},$$

где  $m, n, p$  — проекции направляющего вектора прямой. Так как вектор  $\vec{r}'(t_0) = \varphi'(t_0)\vec{i} + \psi'(t_0)\vec{j} + \eta'(t_0)\vec{k}$  направлен по касательной к кривой в точке  $M_0$ , то его проекции могут быть приняты за проекции направляющего вектора. Тогда искомые уравнения примут вид

$$\frac{x - x_0}{\varphi'(t_0)} = \frac{y - y_0}{\psi'(t_0)} = \frac{z - z_0}{\eta'(t_0)}.$$

Нормальной плоскостью к пространственной кривой называется плоскость, перпендикулярная к касательной прямой и проходящая через точку касания.

Пусть  $M_0(x_0, y_0, z_0)$  — точка касания. Уравнение плоскости, проходящей через точку  $M_0$ , имеет вид

$$A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0,$$

где  $A, B, C$  — проекции нормального вектора  $\vec{N} = (A, B, C)$  этой плоскости. Из определения нормальной плоскости следует, что за вектор  $\vec{N}$

можно принять вектор  $\vec{r}'(t_0) = (\varphi'(t_0), \psi'(t_0), \eta'(t_0))$ . Поэтому уравнение нормальной плоскости имеет вид

$$\varphi'(t_0)(x - x_0) + \psi'(t_0)(y - y_0) + \eta'(t_0)(z - z_0) = 0.$$

**Пример.** Найти уравнения касательной прямой и нормальной плоскости к винтовой линии  $x = 2 \cos t$ ,  $y = 2 \sin t$ ,  $z = \frac{t}{\pi}$  в точке  $M_0$ , соответствующей значению параметра  $t_0 = \frac{\pi}{2}$ .

*Решение.*  $x_0 = 0$ ,  $y_0 = 2$ ,  $z_0 = \frac{1}{2}$ ;

$$x'(t_0) = -2 \sin \frac{\pi}{2} = -2; \quad y'(t_0) = 2 \cos \frac{\pi}{2} = 0; \quad z'(t_0) = \frac{1}{\pi}.$$

$$\frac{x-0}{-2} = \frac{y-2}{0} = \frac{z-\frac{1}{2}}{\frac{1}{\pi}} \Rightarrow x = \pi - 2\pi z, \quad y = 2$$

— уравнения касательной прямой;

$$-2x + \frac{1}{\pi} \left( z - \frac{1}{2} \right) = 0$$

— уравнение нормальной плоскости.

#### 4.9.2. Касательная плоскость и нормаль к поверхности

Касательной плоскостью к поверхности в точке  $M_0$  (точке касания) называется плоскость, в которой лежат все касательные в точке  $M_0$  к различным кривым, проведенным на поверхности через эту точку.

Нормалью к поверхности называется перпендикуляр к касательной плоскости в точке касания.

Уравнение плоскости имеет вид

$$A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0,$$

где вектор с координатами  $A$ ,  $B$ ,  $C$  перпендикулярен плоскости.

Пусть поверхность задана уравнением  $z = f(x, y)$ ;  $M_0(x_0, y_0, z_0)$  — точка, лежащая на ней. Рассмотрим линию  $L$ , лежащую на поверхности и проходящую через точку  $M_0(x_0, y_0, z_0)$ . Ее параметрические уравнения  $x = x(t)$ ,  $y = y(t)$ ,  $z = z(t)$  причем  $x_0 = x(t_0)$ ,  $y_0 = y(t_0)$ ,  $z_0 = z(t_0)$ .

Уравнение поверхности можно переписать в виде

$$F(x, y, z) = z - f(x, y) = 0. \quad (1)$$

Так как точка  $M_0$  принадлежит поверхности, то  $z_0 - f(x_0, y_0) = 0$ . Про- дифференцируем равенство (1) по  $t$ :

$$\frac{\partial F}{\partial x} \cdot x'(t) + \frac{\partial F}{\partial y} \cdot y'(t) + \frac{\partial F}{\partial z} \cdot z'(t) = 0.$$

При  $t = t_0$  получим

$$F'_x(x_0, y_0, z_0) \cdot x'(t_0) + F'_y(x_0, y_0, z_0) \cdot y'(t_0) + F'_z(x_0, y_0, z_0) \cdot z'(t_0) = 0.$$

Отсюда следует, что вектор

$$\bar{r}'(t_0) = x'(t_0) \cdot \bar{i} + y'(t_0) \cdot \bar{j} + z'(t_0) \cdot \bar{k}$$

перпендикулярен вектору с координатами  $F'_x, F'_y, F'_z$ . Но вектор  $\bar{r}'(t_0)$  направлен по касательной к линии  $L$  в точке  $M_0$ . Следовательно, в качестве нормального вектора к касательной плоскости можно взять вектор с координатами  $F'_x, F'_y, F'_z$ . Заметим, что

$$\frac{\partial F}{\partial x} = -f'_x, \quad \frac{\partial F}{\partial y} = -f'_y, \quad \frac{\partial F}{\partial z} = 1.$$

Поэтому уравнение касательной плоскости имеет вид

$$z - z_0 = f'_x(x_0, y_0)(x - x_0) + f'_y(x_0, y_0)(y - y_0).$$

Вектор  $\{-f'_x, -f'_y, 1\}$  направлен по нормали к поверхности, следовательно, он перпендикулярен к касательной прямой, проведенной к поверхности в точке  $M_0$ , поэтому уравнения нормали в точке  $M_0$  имеют вид

$$\frac{x - x_0}{-f'_x(x_0, y_0)} = \frac{y - y_0}{-f'_y(x_0, y_0)} = \frac{z - z_0}{1}.$$

#### 4.9.3. Геометрический смысл полного дифференциала функции двух переменных

Пусть функция  $z = f(x, y)$  имеет в точке  $P_0(x_0, y_0)$  дифференциал

$$dz = f'_x(x_0, y_0) \Delta x + f'_y(x_0, y_0) \Delta y \text{ или}$$

$$dz = f'_x(x_0, y_0)(x - x_0) + f'_y(x_0, y_0)(y - y_0). \quad (2)$$

Рассмотрим уравнение касательной плоскости

$$Z - z_0 = f'_x(x_0, y_0)(x - x_0) + f'_y(x_0, y_0)(y - y_0). \quad (3)$$

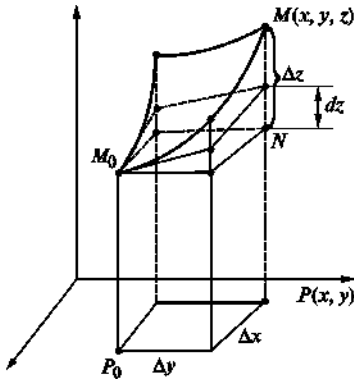


Рис. 4.10

(Мы обозначили через  $Z$  аппликату точки касательной плоскости, чтобы отличить ее от аппликаты  $z$  точки поверхности.) Мы видим, что правая часть этого уравнения совпадает с правой частью выражения (2) для дифференциала  $dz$ . Следовательно, и левые части этих равенств равны. Но в равенстве (2) левая часть есть дифференциал функции  $z = f(x, y)$  в точке  $P_0(x_0, y_0)$ , а в уравнении (3) левая часть есть приращение аппликаты касательной плоскости.

Таким образом, геометрический смысл дифференциала функции двух переменных заключается в следующем: дифференциал функции двух переменных равен приращению аппликаты касательной плоскости.

## ГЛАВА 5

# ИНТЕГРАЛЬНОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ ФУНКЦИЙ МНОГИХ ПЕРЕМЕННЫХ

---

### 5.1. Интегралы, зависящие от параметра

Дифференцирование интегралов, зависящих от параметра. Формула Лейбница. Применение интегралов, зависящих от параметра к вычислению некоторых «неберущихся» интегралов. Интегрирование по параметру интегралов, зависящих от параметра.

#### 5.1.1. Дифференцирование интегралов, зависящих от параметра. Формула Лейбница

Пусть дан интеграл

$$J(\alpha) = \int_a^b f(x, \alpha) dx,$$

где  $x$  — переменная интегрирования, а  $\alpha$  — некоторый параметр. Если параметр  $\alpha$  будет меняться, то будет меняться и значение интеграла. Таким образом, интеграл является функцией параметра  $\alpha$ .

Предположим, что функция  $f(x, \alpha)$  непрерывна вместе со своей частной производной  $f'_\alpha(x, \alpha)$  в области  $a \leq x \leq b$ ,  $c \leq \alpha \leq d$ . Найдем производную функции  $J(\alpha)$  по параметру  $\alpha$ :

$$J'_\alpha = \lim_{\Delta\alpha \rightarrow 0} \frac{J(\alpha + \Delta\alpha) - J(\alpha)}{\Delta\alpha}.$$

Заметим, что

$$\frac{1}{\Delta\alpha} \left[ \int_a^b f(x, \alpha + \Delta\alpha) dx - \int_a^b f(x, \alpha) dx \right] = \int_a^b \frac{f(x, \alpha + \Delta\alpha) - f(x, \alpha)}{\Delta\alpha} dx.$$

Применяя к подынтегральной функции теорему о среднем значении, можем записать

$$\frac{f(x, \alpha + \Delta\alpha) - f(x, \alpha)}{\Delta\alpha} = f'_\alpha(x, \alpha + \theta\Delta\alpha), \quad 0 < \theta < 1.$$

Так как функция  $f'_\alpha(x, \alpha + \theta \Delta\alpha)$  непрерывна в замкнутой области, то

$$f'_\alpha(x, \alpha + \theta \Delta\alpha) = f'(x, \alpha) + \varepsilon,$$

где  $\varepsilon$  — величина, зависящая от  $x, \alpha, \Delta\alpha$ , стремится к 0 при  $\Delta\alpha \rightarrow 0$ . Таким образом,

$$\frac{J(\alpha + \Delta\alpha) - J(\alpha)}{\Delta\alpha} = \int_a^b f'_\alpha(x, \alpha) dx + \int_a^b \varepsilon dx.$$

Переходя к пределу в обеих частях последнего равенства при  $\Delta\alpha \rightarrow 0$ , получим

$$J'_\alpha(\alpha) = \int_a^b f'_\alpha(x, \alpha) dx; \quad \left[ \int_a^b f(x, \alpha) dx \right]'_\alpha = \int_a^b f'_\alpha(x, \alpha) dx.$$

Последняя формула носит название формулы Лейбница.

Предположим теперь, что в интеграле не только подынтегральная функция, но и пределы интегрирования зависят от  $\alpha$ :

$$J(\alpha) = \varphi[\alpha, a(\alpha), b(\alpha)] = \int_{a(\alpha)}^{b(\alpha)} f(x, \alpha) dx.$$

Функция  $\varphi[\alpha, a(\alpha), b(\alpha)]$  является сложной функцией  $\alpha$ . Поэтому для вычисления ее производной применим правило дифференцирования сложной функции:

$$J'(\alpha) = \frac{\partial \varphi}{\partial \alpha} + \frac{\partial \varphi}{\partial a} \cdot \frac{da}{d\alpha} + \frac{\partial \varphi}{\partial b} \cdot \frac{db}{d\alpha}. \quad (1)$$

Так как производная определенного интеграла с переменным верхним пределом по этому пределу равна значению подынтегральной функции, в которую вместо переменной интегрирования подставлено значение верхнего предела, то

$$\frac{\partial \varphi}{\partial b} = \frac{\partial}{\partial b} \int_a^b f(x, \alpha) dx = f[b(\alpha), \alpha],$$

$$\frac{\partial \varphi}{\partial a} = \frac{\partial}{\partial a} \int_a^b f(x, \alpha) dx = -\frac{\partial}{\partial a} \int_b^a f(x, \alpha) = -f[a(\alpha), \alpha].$$

По формуле Лейбница

$$\frac{\partial \varphi}{\partial \alpha} = \int_a^b f'_\alpha(x, \alpha) dx.$$

Подставляя полученные выражения в формулу (1), получим

$$J'(\alpha) = \int_{a(\alpha)}^{b(\alpha)} f'_\alpha(x, \alpha) d\alpha + f[b(\alpha), \alpha] \frac{db}{d\alpha} - f[a(\alpha), \alpha] \frac{da}{d\alpha}.$$

Пример.  $\int_{\sin \alpha}^{\alpha^2} \frac{\sin \alpha x}{x} dx = J(\alpha).$

$$\begin{aligned} J'(\alpha) &= \int_{\sin \alpha}^{\alpha^2} \cos \alpha x dx + \sin \alpha^3 \cdot \frac{1}{\alpha^2} \cdot 2\alpha - \frac{\sin(\alpha \sin \alpha)}{\sin \alpha} \cdot \cos \alpha = \\ &= \frac{1}{\alpha} \sin \alpha x \Big|_{\sin \alpha}^{\alpha^2} + \frac{2 \sin \alpha^3}{\alpha} - \frac{\sin(\alpha \sin \alpha)}{\operatorname{tg} \alpha} = \\ &= \frac{1}{\alpha} \sin \alpha^3 - \frac{1}{\alpha} \sin(\alpha \sin \alpha) + \frac{2 \sin \alpha^3}{\alpha} - \frac{\sin(\alpha \sin \alpha)}{\operatorname{tg} \alpha}. \end{aligned}$$

### 5.1.2. Применение интегралов, зависящих от параметра, к вычислению некоторых «неберущихся» интегралов

Формула Лейбница была выведена нами в предположении, что пределы интегрирования  $a$  и  $b$  конечны. Однако эта формула справедлива и в том случае, когда  $b = \infty$ , если  $\int_a^\infty f'_\alpha(x, \alpha) dx$  сходится при  $\forall \alpha$ . Последнее будет выполнено, если существует такая функция  $\varphi(x)$ , что  $|f'_\alpha(x, \alpha)| \leq \varphi(x)$  и  $\int_a^\infty \varphi(x) dx$  сходится.

Рассмотрим  $J(\alpha) = \int_0^\infty e^{-x} \frac{\sin \alpha x}{x} dx$ ; этот интеграл непосредственно не

вычисляется.

Имеем

$$J'_\alpha = \int_0^\infty \left[ e^{-x} \frac{\sin \alpha x}{x} \right]'_{-\alpha} dx = \int_0^\infty \left[ e^{-x} \frac{\cos \alpha x \cdot x}{x} \right] dx = \int_0^\infty e^{-x} \cos \alpha x dx.$$

Для вычисления последнего интеграла дважды применим метод интегрирования по частям. Получим

$$\int_0^\infty e^{-x} \cos \alpha x = \frac{1}{1 + \alpha^2},$$

т. е.

$$J'_\alpha = \frac{1}{1 + \alpha^2} \Rightarrow J(\alpha) = \arctg \alpha + C.$$

Найдем значение постоянной  $C$ :

$$J(0) = \int_0^\infty e^{-x} \frac{\sin 0 \cdot x}{x} dx = 0 \Rightarrow \arctg 0 + C \Rightarrow C = 0.$$

Таким образом, окончательно получаем  $\int_0^\infty e^{-x} \frac{\sin \alpha x}{x} dx = \arctg \alpha$ .

### 5.1.3. Интегрирование по параметру интегралов, зависящих от параметра

**Теорема.** Пусть функция  $f(x, \alpha)$  непрерывна по  $x$  и  $\alpha$  в прямоугольнике  $a \leq x \leq b$ ,  $c \leq \alpha \leq d$ . Тогда

$$\int_c^d J(\alpha) d\alpha = \int_c^d \left\{ \int_a^b f(x, \alpha) dx \right\} d\alpha = \int_a^b \left\{ \int_c^d f(x, \alpha) d\alpha \right\} dx \quad (2)$$

или

$$\int_c^d J(\alpha) d\alpha = \int_c^d d\alpha \int_a^b f(x, \alpha) dx = \int_a^b dx \int_c^d f(x, \alpha) d\alpha.$$

Для доказательства формулы (2) докажем более общее утверждение. Пусть  $c < \gamma < d$ . Покажем, что

$$\int_c^\gamma d\alpha \int_a^b f(x, \alpha) dx = \int_a^b dx \int_c^\gamma f(x, \alpha) d\alpha. \quad (3)$$



Возьмем производную от обеих частей равенства (3). Производная от левой части равенства вычисляется по правилу дифференцирования функции с переменным верхним пределом, при этом получаем

$$\left[ \int_c^\gamma d\alpha \int_a^b f(x, \alpha) dx \right]' = \int_a^b f(x, \gamma) dx.$$

Положим  $\varphi(x, \gamma) = \int_c^\gamma f(x, \alpha) d\alpha$ . Тогда интеграл в правой части равенства (3) примет вид

$$\int_a^b \varphi(x, \gamma) dx.$$

Производную последнего интеграла вычислим по теореме Лейбница.

$$\left[ \int_a^b \varphi(x, \gamma) dx \right]' = \int_a^b \varphi'_\gamma(x, \gamma) dx = \int_a^b f(x, \gamma) dx.$$

Производные от левой и правой части равенства (3) совпали, следовательно,

$$\int_c^\gamma d\alpha \int_a^b f(x, \alpha) dx = \int_a^b dx \int_c^\gamma f(x, \alpha) d\alpha + C. \quad (4)$$

Полагая в (4)  $\gamma = C$ , получим, что  $C = 0$ . Положив в равенстве (3)  $\gamma = d$ , убеждаемся в справедливости равенства (2).

Теорема доказана.

## 5.2. Интеграл Пуассона. Гамма-функция

Интеграл Пуассона. Гамма-функция и ее свойства.

### 5.2.1. Интеграл Пуассона

Интегралом Пуассона называется несобственный интеграл  $\int_0^\infty e^{-x^2} dx$ .

Этот интеграл имеет многочисленные приложения в различных разделах математики, механики, физики. К необходимости его вычисления

приводит, например решение уравнения теплопроводности. Он возникает также при решении задач математической статистики.

Значение интеграла Пуассона не может быть найдено с использованием формулы Ньютона – Лейбница, поскольку первообразная от функции  $e^{-x^2}$  не выражается через элементарные функции. Мы воспользуемся здесь для вычисления этого интеграла свойствами интегралов, зависящих от параметра.

Положим  $x = \lambda t$ , где  $\lambda > 0$ . Тогда  $dx = \lambda dt$ ;

$$J = \int_0^{\infty} e^{-x^2} dx = \lambda \int_0^{\infty} e^{-\lambda^2 t^2} dt.$$

Умножим обе части последнего равенства на  $e^{-\lambda^2} d\lambda$ :

$$J \cdot e^{-\lambda^2} d\lambda = e^{-\lambda^2} d\lambda \int_0^{\infty} e^{-\lambda^2 t^2} dt. \quad (1)$$

Проинтегрируем обе части равенства (1) по  $\lambda$  в пределах от 0 до  $\infty$ . Будем иметь

$$J \cdot \int_0^{\infty} e^{-\lambda^2} d\lambda = J^2 = \int_0^{\infty} e^{-\lambda^2} \cdot \lambda d\lambda \int_0^{\infty} e^{-\lambda^2 t^2} dt. \quad (2)$$

Согласно доказанной ранее теореме, в равенстве (2) изменим порядок интегрирования и получим

$$\begin{aligned} J^2 &= \int_0^{\infty} dt \int_0^{\infty} e^{-(1+t^2)\lambda^2} \cdot \lambda d\lambda = \int_0^{\infty} \left[ -\frac{1}{2(1+t^2)} e^{-(1+t^2)\lambda^2} \right]_0^{\infty} dt = \frac{1}{2} \int_0^{\infty} \frac{dt}{1+t^2} = \\ &= \frac{1}{2} \operatorname{arctg} t \Big|_0^{\infty} = \frac{\pi}{4}. \end{aligned}$$

Таким образом, окончательно имеем

$$J = \frac{\sqrt{\pi}}{2}.$$

### 5.2.2. Гамма-функция и ее свойства

Гамма-функцией (или интегралом Эйлера второго рода) называется интеграл вида

$$\Gamma(p) = \int_0^{\infty} e^{-x} x^{p-1} dx. \quad (3)$$

Интеграл (3) — функция параметра  $p$  — является несобственным, так как верхний предел равен бесконечности и, кроме того, потому что при  $x \rightarrow 0$  и  $p < 1$  подынтегральная функция неограниченно возрастает.

Покажем, что этот несобственный интеграл существует (сходится) при  $p > 0$ . Представим его в виде суммы

$$\int_0^{\infty} x^{p-1} e^{-x} dx = \int_0^1 x^{p-1} e^{-x} dx + \int_1^{\infty} x^{p-1} e^{-x} dx.$$

Первый интеграл правой части сходится, так как

$$0 < \int_0^1 x^{p-1} e^{-x} dx < \int_0^1 x^{p-1} dx = \frac{1}{p}.$$

Второй интеграл также сходится. Действительно, пусть  $n$  — целое число такое, что  $n > p-1$ . Тогда, очевидно,

$$0 < \int_1^{\infty} x^{p-1} e^{-x} dx < \int_1^{\infty} x^n e^{-x} dx.$$

Последний интеграл сходится и вычисляется путем интегрирования по частям с учетом того, что

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^k}{e^x} = 0 \quad (4)$$

при любом целом положительном  $k$ . Итак, интеграл (3) определяет некоторую функцию. Эта функция часто используется в приложениях математики.

Найдем значения  $\Gamma(p)$  при целых  $p$ . При  $p = 1$  имеем

$$\Gamma(1) = \int_0^{\infty} e^{-x} dx = 1. \quad (5)$$

Пусть целое  $p > 1$ . Вычислим  $\Gamma(p+1)$  путем интегрирования по частям:

$$\begin{aligned} \Gamma(p+1) &= \int_0^{\infty} x^p e^{-x} dx = \left| \begin{array}{ll} x^p = u, & px^{p-1} dx = du, \\ e^{-x} dx = dv, & v = -e^{-x} \end{array} \right| = \\ &= -e^{-x} px^{p-1} \Big|_0^{\infty} + p \int_0^{\infty} x^{p-1} e^{-x} dx = p\Gamma(p). \end{aligned} \quad (6)$$

Из этого следует  $\Gamma(p) = \frac{\Gamma(p+1)}{p}$ .

На основании (6) и (5) находим при  $p = n$

$$\Gamma(n) = (n-1)! \quad (7)$$

Полагая в формуле (7)  $n=1$ , находим, что  $0! = \Gamma(1) = 1$ . Функция  $\Gamma(p)$  дает возможность распространить понятие факториала  $n!$ , определенного лишь для натуральных значений  $n$ , на область любых положительных значений аргумента. Из формулы (6) следует, что если  $p \rightarrow 0$ , то  $\Gamma(p) = \frac{\Gamma(p+1)}{p} \rightarrow +\infty$ , т. е.  $\Gamma(0) = +\infty$ .

После  $n$ -кратного применения формулы (6) получаем соотношение

$$\Gamma(p+n) = (p+n-1)(p+n-2) \dots (p+1) \cdot \Gamma(p). \quad (8)$$

При  $p = -n+1$  из формулы (6) следует, что

$$\Gamma(-n) = \frac{\Gamma(-n+1)}{-n} = \frac{\Gamma(-n+2)}{n(n-1)} = -\frac{\Gamma(-n+3)}{n(n-1)(n-2)} = \dots = (-1)^n \frac{\Gamma(0)}{n!} = (-1)^n \cdot \infty,$$

т. е.  $\Gamma(-n) = (-1)^n \cdot \infty$  ( $n = 1, 2, 3, \dots$ ).

Вообще, функцию  $\Gamma(p)$  можно распространить на случай отрицательных значений аргумента  $p$ . Так как  $\Gamma(p) = \frac{\Gamma(p+1)}{p}$ , то  $\Gamma(p+1)$  имеет смысл при  $-1 < p < 0$ .

Если  $-n < p < -(n-1)$ , то из формулы (8) следует, что

$$\Gamma(p) = \frac{\Gamma(p+n)}{p(p+1)(p+2) \dots (p+n-1)}.$$

С помощью подстановки  $p+n = \alpha$ , откуда  $p = -n + \alpha$ , последняя формула преобразуется к виду

$$\Gamma(\alpha - n) = \frac{(-1)^n \Gamma(\alpha)}{(1-\alpha)(2-\alpha) \dots (n-\alpha)},$$

и для  $-n < p < -(n-1)$  знак  $\Gamma(p)$  определяется множителем  $(-1)^n$ . Можно показать, что перечисленные свойства функции  $\Gamma(p)$  позволяют вычислить ее значения для любого  $p$ . Значения  $\Gamma(p)$ -функции табулированы. Эта таблица находит самые разнообразные приложения.

### 5.3. Двойной интеграл

Задача об объеме, приводящая к понятию двойного интеграла. Определение двойного интеграла. Теорема существования. Свойства двойного интеграла. Вычисление двойного интеграла в декартовых координатах.

Понятие кратного интеграла является естественным обобщением понятия обыкновенного определенного интеграла на случай функции нескольких переменных. Эти понятия возникли и развивались параллельно и находят широкие сферы применения.

Кратные интегралы применяются в геометрии (вычисление площадей плоских фигур и поверхностей, объемов тел), механике (вычисление статистических моментов, координат центра тяжести, моментов инерции тел), физике и многих других разделах науки.

С понятием кратного интеграла, его свойствами, способами вычисления и сферами применения мы и познакомимся в этом разделе.

#### 5.3.1. Задача об объеме, приводящая к понятию двойного интеграла

Пусть  $\sigma$  — некоторая область в плоскости  $XOY$ , ограниченная замкнутым контуром  $l$ . Рассмотрим тело, ограниченное областью  $\sigma$ , цилиндрической поверхностью с направляющей  $l$  и образующей, параллельной оси  $OZ$ , и частью поверхности  $S$ , имеющей уравнение  $z = f(x, y)$ , где  $f$  — функция, определенная, непрерывная и неотрицательная в  $\sigma$ .

Поставим задачу определить объем полученного тела. Для этого поступим следующим образом: разобьем  $\sigma$  на малые площадки  $\Delta\sigma_i$

( $i = 1, 2, \dots, n$ ),  $\sum_{i=1}^n \Delta\sigma_i = \sigma$ . На каждой пло-

щадке построим цилиндр, ограниченный сверху частью поверхности  $S$ , проектирующейся в  $\Delta\sigma_i$ . Полученные  $n$  цилиндрических столбиков имеют объемы  $\Delta V_i$ , при-

чем  $\sum_{i=1}^n \Delta V_i = V$ .

Рассмотрим теперь цилиндр с основанием  $\Delta\sigma_i$  и с высотой  $z_i = f(x_i, y_i)$ , ( $x_i, y_i \in \Delta\sigma_i$ ). Объем такого цилиндра, равный произведению площади основа-

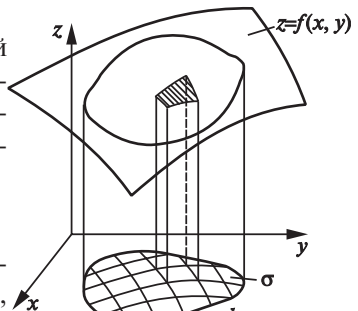


Рис. 5.1

ния  $\Delta\sigma_i$  на высоту  $f(x_i, y_i)$ , примем за приближенное значение объема столбика

$$\Delta V_i \approx f(x_i, y_i) \Delta\sigma_i.$$

Тогда сумма  $V_n$  этих элементарных объемов будет приближенным выражением искомого объема:

$$V_n = \sum_{i=1}^n \Delta V_i \approx \sum_{i=1}^n f(x_i, y_i) \Delta\sigma_i.$$

За  $V$  примем предел, к которому стремится выписанная сумма, при условии, что число площадок  $\Delta\sigma_i$  неограниченно увеличивается, а сами площадки стягиваются в точку:

$$V = \lim_{\substack{n \rightarrow \infty \\ \text{diam } \Delta\sigma_i \rightarrow 0}} \sum_{i=1}^n f(x_i, y_i) \Delta\sigma_i. \quad (1)$$

Итак, задача о вычислении объема привела к необходимости вычисления предела интегральной суммы (1).

### 5.3.2. Определение двойного интеграла. Теорема существования

Если максимальный размер элементарных площадок  $\Delta\sigma_1$  стремится к нулю, а  $n \rightarrow \infty$ , и существует предел интегральной суммы (1), который не зависит ни от способа разбиения области  $\sigma$ , ни от выбора точек  $(x_i, y_i)$ , то он называется двойным интегралом от функции  $f(P) = f(x, y)$  по области  $\sigma$ :

$$\iint_{(\sigma)} f(x, y) d\sigma = \lim_{\substack{n \rightarrow \infty \\ \text{diam } \Delta\sigma_i \rightarrow 0}} \sum_{i=1}^n f(x_i, y_i) \Delta\sigma_i.$$

Здесь  $\sigma$  — область интегрирования,  $f(x, y)$  — подынтегральная функция,  $d\sigma$  — элемент площади.

Возвращаясь к задаче об объеме, видим, что объем цилиндрического тела численно равен двойному интегралу от аппликаты  $z = f(x, y)$  по области  $\sigma$ :

$$V = \iint_{(\sigma)} f(x, y) d\sigma.$$

В этом состоит геометрический смысл двойного интеграла.

З а м е ч а н и е. Если  $f(x, y) \equiv 1$ , то  $\iint_{(\sigma)} d\sigma = \sigma$ , где  $\sigma$  — площадь области.

$$\sum_{i=1}^n f(x_i, y_i) \Delta\sigma_i = \sum_{i=1}^n \Delta\sigma_i = \sigma,$$

т. е.

$$\lim_{\substack{n \rightarrow \infty \\ \text{diam } \Delta\sigma_i \rightarrow 0}} \sum_{i=1}^n \Delta\sigma_i = \sigma = \iint_{(\sigma)} d\sigma.$$

**Теорема существования.** Для всякой функции  $f(x, y)$ , непрерывной в ограниченной и замкнутой области  $\sigma$ , существует двойной интеграл по этой области, т. е. существует предел интегральной суммы, не зависящий ни от способа разбиения области  $\sigma$ , ни от выбора точек  $P_i(x_i, y_i)$ .

Из теоремы существования следует, что область  $\sigma$  можно разбивать на прямоугольники  $\Delta\sigma_i = \Delta x_i \cdot \Delta y_i$  со сторонами  $\Delta x_i$  и  $\Delta y_i$  прямыми, параллельными осям координат.

В связи с этим часто пишут, что

$$\iint_{(\sigma)} f(x, y) dx dy = \lim_{\substack{n \rightarrow \infty \\ \text{diam } \Delta\sigma_i \rightarrow 0}} \sum_{i=1}^n f(x_i, y_i) \Delta x_i \Delta y_i.$$

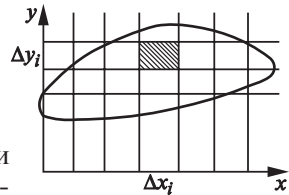


Рис. 5.2

Погрешностью, которая возникает здесь при замене прямоугольных кусков на границе области на прямоугольники, можно пренебречь.

### 5.3.3. Свойства двойного интеграл

Легко заметить, что конструктивно двойной интеграл определяется точно так же, как и определенный интеграл. Поэтому его свойства вполне аналогичны свойствам определенного интеграла.

1.  $\iint_{(\sigma)} k f(x, y) d\sigma = k \iint_{(\sigma)} f(x, y) d\sigma.$
2.  $\iint_{(\sigma)} f_1(x, y) d\sigma + \iint_{(\sigma)} f_2(x, y) d\sigma = \iint_{(\sigma)} [f_1(x, y) + f_2(x, y)] d\sigma.$
3. Если  $f(x, y) \geq 0$  в области  $\sigma$ , то
 
$$\iint_{(\sigma)} f(x, y) d\sigma \geq 0.$$

4. Если  $f(x, y) \geq \varphi(x, y)$  в области  $\sigma$ , то

$$\iint_{(\sigma)} f(x, y) d\sigma \geq \iint_{(\sigma)} \varphi(x, y) d\sigma.$$

5. **Теорема о среднем.** Если  $f(x, y)$  непрерывна в замкнутой ограниченной области  $\sigma$ , то  $\exists P_0(x_0, y_0) \in \sigma$  такая, что

$$\iint_{(\sigma)} f(x, y) d\sigma = f(x_0, y_0) \cdot \sigma.$$

Геометрический смысл: если  $f(x, y) \geq 0$ , то объем цилиндрического тела равен объему цилиндра с тем же основанием и высотой, равной значению подынтегральной функции в некоторой точке  $P_0(x_0, y_0) \in \sigma$ .

6. Свойство аддитивности. Если область  $\sigma$  разбита на несколько частей  $\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_k$ , то

$$\iint_{(\sigma)} f(x, y) d\sigma = \iint_{(\sigma_1)} f(x, y) d\sigma + \iint_{(\sigma_2)} f(x, y) d\sigma + \dots + \iint_{(\sigma_k)} f(x, y) d\sigma.$$

### 5.3.4. Вычисление двойного интеграла в декартовых координатах

Пусть для простоты  $f(x, y) \geq 0$ , а область интегрирования ограничена двумя вертикальными прямыми и графиками функций  $y = \varphi_1(x)$ ,  $y = \varphi_2(x)$ ,  $\varphi_2(x) \geq \varphi_1(x)$ .

С одной стороны, объем тела, ограниченного поверхностью  $z = f(x, y)$ , равен двойному интегралу:

$$V = \iint_{(\sigma)} f(x, y) d\sigma,$$

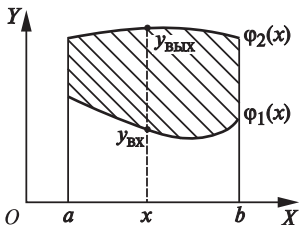


Рис. 5.3

но, с другой, его можно вычислить и с помощью определенного интеграла по координате  $x$ , если определить площади  $S(x)$  сечений данного тела плоскостями, перпендикулярными оси  $x$  (см. 3.11.1):

$$V = \int_a^b S(x) dx, \quad (2)$$

где  $S(x)$  — площадь сечения тела плоскостью, перпендикулярной оси  $OX$  (рис. 5.4).



Но

$$S(x) = \int_{y_{\text{вх}}}^{y_{\text{вых}}} f(x, y) dy.$$

Здесь  $x$  фиксировано.

Подставим теперь  $S(x)$  в определенный интеграл (2):

$$V = \int_a^b \left\{ \int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x, y) dy \right\} dx = \int_a^b dx \int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x, y) dy. \quad (3)$$

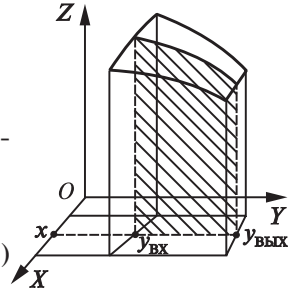


Рис. 5.4

Итак, для вычисления двойного интеграла нужно сначала вычислить обычный интеграл:

$$S(x) = \int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x, y) dy,$$

считая  $x$  постоянным. Этот интеграл будет функцией от  $x$ . Затем нужно вычислить

$$\int_a^b S(x) dx,$$

где  $a, b$  — пределы изменения  $x$ .

Если область интегрирования имеет вид, изображенный на рис. 5.5, где  $\varphi_2(y) \geq \varphi_1(y)$ , то

$$\iint_{(\sigma)} f(x, y) d\sigma = \int_a^b dy \int_{\varphi_1(y)}^{\varphi_2(y)} f(x, y) dx. \quad (4)$$

Интегралы в правых частях формул (3) и (4) называются повторными или двукратными.

Если область интегрирования более сложная, то ее разбивают на более простые и пользуются свойством аддитивности.

Если область интегрирования — прямоугольник, ограниченный прямыми  $x = a$ ,  $x = b$ ,  $y = c$ ,  $y = d$ , то

$$\iint_{(\sigma)} f(x, y) d\sigma = \int_a^b dx \int_c^d f(x, y) dy = \int_c^d dy \int_a^b f(x, y) dx.$$

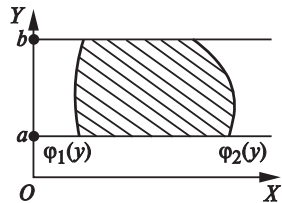


Рис. 5.5

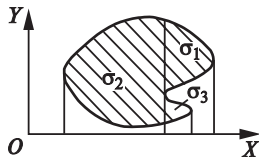


Рис. 5.6

Пример. Вычислить  $\iint_{(\sigma)} (x^2 + y^2) d\sigma$ ,

где область  $\sigma$  ограничена прямыми  $y=0$ ,

$$x=2, y=\frac{x}{2}.$$

Решение.

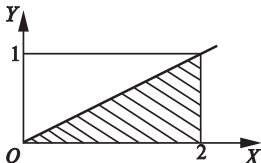


Рис. 5.7

$$\begin{aligned} \iint_{(\sigma)} (x^2 + y^2) d\sigma &= \int_0^2 dx \int_0^{\frac{x}{2}} (x^2 + y^2) dy = \\ &= \int_0^2 dx \left( x^2 y + \frac{y^3}{3} \right) \bigg|_0^{\frac{x}{2}} = \int_0^2 \frac{13}{24} x^3 dx = \frac{13}{6}. \end{aligned}$$

#### 5.4. Замена переменных в двойном интеграле

Замена переменных в двойном интеграле. Двойной интеграл в полярных координатах.

##### 5.4.1. Замена переменных в двойном интеграле

Пусть в плоскости  $XOY$  задана область  $D$ , ограниченная линией  $l$ . Пусть координаты  $x, y$  являются функциями новых переменных  $u$  и  $v$ :

$$x = \varphi(u, v), \quad y = \psi(u, v), \quad (1)$$

причем функции  $\varphi(u, v)$ ,  $\psi(u, v)$  однозначны, непрерывны и имеют непрерывные производные в некоторой области  $D'$ . Тогда по формулам (1) каждой паре значений  $u, v$  ставится в соответствие пара значений  $x, y$ . Предположим далее, что по каждой паре значений  $x, y$  из  $D$  мы можем по уравнениям (1) найти значения  $u, v$ . Тогда по области  $D$  мы можем построить область  $D'$ , лежащую в плоскости  $UOV$  и ограниченную линией  $l'$ . Здесь каждой точке области  $D$  соответствует некоторая определенная точка области  $D'$  и обратно, каждой точке из  $D'$  соответствует точка из  $D$ . Говорят, что между областями  $D$  и  $D'$  установлено взаимно однозначное соответствие.

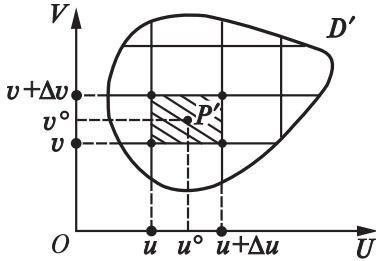


Рис. 5.8

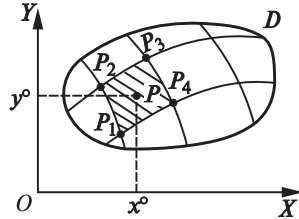


Рис. 5.9

Каждой точке  $P(x^0, y^0)$  из области  $D$  соответствует точка  $P'(u^0, v^0)$  из области  $D'$ . Рассмотрим в области  $D'$  линии  $u = \text{const}$ ,  $v = \text{const}$ . В области  $D$  этим линиям будут соответствовать, вообще говоря, некоторые кривые. Будем считать, что  $D'$  разбита на прямоугольники линиями  $u = \text{const}$  и  $v = \text{const}$ . (При этом прямоугольники, прилегающие к границе области, мы не рассматриваем.) Тогда область  $D$  разобьется на некоторые криволинейные четырехугольники. Рассмотрим в плоскости  $D'$  прямоугольную площадку  $\Delta S'$ , ограниченную прямыми  $u = \text{const}$ ,  $u + \Delta u = \text{const}$ ,  $v = \text{const}$ ,  $v + \Delta v = \text{const}$ , и соответствующую ей нелинейную площадку  $\Delta S$  в  $D$ . Площади этих площадок обозначим также через  $\Delta S$  и  $\Delta S'$ . Очевидно, что

$$\Delta S' = \Delta u \cdot \Delta v.$$

Пусть в области  $D$  задана непрерывная функция  $z = f(x, y)$ . Тогда в  $D'$  также задана непрерывная функция

$$z = F(u, v) = f[\varphi(u, v), \psi(u, v)].$$

Если мы рассматриваем интегральные суммы для  $f(x, y)$  в  $D$ , то, очевидно,

$$\sum_{i=1}^n f(x_i, y_i) \Delta S_i = \sum_{i=1}^n F(u_i, v_i) \Delta S'_i. \quad (2)$$

Если бы удалось выразить  $\Delta S$  через  $\Delta S'$ , то мы выразили бы интегральную сумму для  $f$  через интегральную сумму для  $F$ .

Для этого вычислим  $\Delta S$ , т. е. площадь криволинейного четырехугольника в области  $D$ . Координаты его вершин:

$$\begin{aligned} P_1(x_1, y_1): & \quad x_1 = \varphi(u, v), & y_1 = \psi(u, v); \\ P_2(x_2, y_2): & \quad x_2 = \varphi(u, v + \Delta v), & y_2 = \psi(u, v + \Delta v); \\ P_3(x_3, y_3): & \quad x_3 = \varphi(u + \Delta u, v + \Delta v), & y_3 = \psi(u + \Delta u, v + \Delta v); \\ P_4(x_4, y_4): & \quad x_4 = \varphi(u + \Delta u, v), & y_4 = \psi(u + \Delta u, v). \end{aligned} \quad (3)$$

При вычислении площади  $\Delta S$  будем считать линии  $P_1P_2$ ,  $P_2P_3$ ,  $P_3P_4$  и  $P_4P_1$  попарно параллельными, а приращение функции будем заменять ее дифференциалом, т. е. пренебрегать бесконечно малыми более высокого порядка, чем  $\Delta u$  и  $\Delta v$ . Тогда формулы (3) примут вид

$$\begin{aligned}x_1 &= \varphi(u, v), & y_1 &= \psi(u, v), \\x_2 &= \varphi(u, v) + \frac{\partial \varphi}{\partial v} \Delta v, & y_2 &= \psi(u, v) + \frac{\partial \psi}{\partial v} \Delta v, \\x_3 &= \varphi(u, v) + \frac{\partial \varphi}{\partial u} \Delta u + \frac{\partial \varphi}{\partial v} \Delta v, & y_3 &= \psi(u, v) + \frac{\partial \psi}{\partial u} \Delta u + \frac{\partial \psi}{\partial v} \Delta v, \\x_4 &= \varphi(u, v) + \frac{\partial \varphi}{\partial u} \Delta u, & y_4 &= \psi(u, v) + \frac{\partial \psi}{\partial u} \Delta u.\end{aligned}$$

При сделанных допущениях криволинейный четырехугольник будет параллелограммом, площадь которого равна модулю векторного произведения  $[P_2P_1, P_2P_3]$ :

$$\begin{aligned}\Delta S &\approx |(x_3 - x_2)(y_3 - y_1) - (x_3 - x_1)(y_3 - y_2)| = \\&= \left| \frac{\partial \varphi}{\partial u} \Delta u \left( \frac{\partial \psi}{\partial u} \Delta u + \frac{\partial \psi}{\partial v} \Delta v \right) - \left( \frac{\partial \varphi}{\partial u} \Delta u + \frac{\partial \varphi}{\partial v} \Delta v \right) \frac{\partial \psi}{\partial u} \Delta u \right| = \\&= \left| \frac{\partial \varphi}{\partial u} \cdot \frac{\partial \psi}{\partial v} \Delta u \Delta v - \frac{\partial \varphi}{\partial v} \cdot \frac{\partial \psi}{\partial u} \Delta v \Delta u \right| = \left\| \begin{array}{cc} \frac{\partial \varphi}{\partial u} & \frac{\partial \varphi}{\partial v} \\ \frac{\partial \psi}{\partial u} & \frac{\partial \psi}{\partial v} \end{array} \right\| \Delta u \Delta v.\end{aligned}$$

Определитель

$$J = \begin{vmatrix} \varphi'_u & \varphi'_v \\ \psi'_u & \psi'_v \end{vmatrix}$$

называется якобианом функций  $\varphi(u, v)$ ,  $\psi(u, v)$ . Итак,  $\Delta S \approx |J| \Delta S'$ . При  $\Delta S \rightarrow 0$  это равенство становится точным. С учетом последнего соотношения равенство (2) приобретает вид

$$\sum_{i=1}^n f(x_i, y_i) \Delta S_i \approx \sum_{i=1}^n F(u_i, v_i) |J| \Delta S_i.$$

После перехода к пределу при  $n \rightarrow \infty$  и  $\text{diam } \Delta S_i \rightarrow 0$  получим:

$$\iint_{(D)} f(x, y) dx dy = \iint_{(D')} F(u, v) |J| du dv. \quad (4)$$

Формула (4) позволяет свести вычисление интеграла по области  $D$  к вычислению интеграла по области  $D'$ , что часто упрощает задачу.

#### 5.4.2. Двойной интеграл в полярных координатах

Наиболее часто в приложениях встречается замена, позволяющая переходить от декартовых координат к полярным. Пусть граница области интегрирования  $D$  пересекается прямой, проходящей через начало координат, не более чем в двух точках, и ограничена кривыми  $\rho = \Phi_1(\theta)$ ,  $\rho = \Phi_2(\theta)$ .

Пусть в области  $D$  задана функция  $f(x, y)$  и нужно вычислить

$$\iint_D f(x, y) dx dy.$$

Координаты  $x, y$  любой точки области  $D$  связаны с ее полярными координатами  $\rho$  и  $\theta$  следующим образом:

$$x = \rho \cos \theta, \quad y = \rho \sin \theta. \quad (6)$$

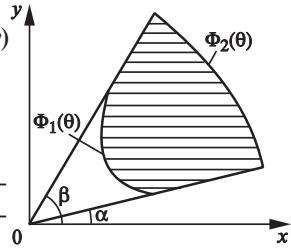


Рис. 5.10

Формулы (5) определяют замену переменных с якобианом  $J$ :

$$|J| = \left\| \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial \theta} & \frac{\partial x}{\partial \rho} \\ \frac{\partial y}{\partial \theta} & \frac{\partial y}{\partial \rho} \end{vmatrix} \right\| = \left\| \begin{vmatrix} -\rho \sin \theta & \cos \theta \\ \rho \cos \theta & \sin \theta \end{vmatrix} \right\| = \left| -\rho(\sin^2 \theta + \cos^2 \theta) \right| = \rho.$$

Таким образом, в полярных координатах получим

$$\iint_{(D)} f(x, y) dx dy = \int_{\alpha}^{\beta} d\theta \int_{\Phi_1(\theta)}^{\Phi_2(\theta)} [f(\rho \cos \theta, \rho \sin \theta)] \rho d\rho.$$

**Пример.** Вычислить

$$\iint_{(D)} \sqrt{4 - x^2 - y^2} dx dy,$$

если  $D$  — круг радиуса 2 с центром в начале координат.

Сделаем замену  $x = \rho \cos \theta$ ,  $y = \rho \sin \theta$ . Тогда

$$\iint_{(D)} \sqrt{4-x^2-y^2} \, dx dy = \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^2 \sqrt{4-\rho^2} \, \rho d\rho = 2\pi \left( -\frac{(4-\rho^2)^{\frac{3}{2}}}{3} \right) \bigg|_0^2 = \frac{16\pi}{3}.$$

### 5.5. Приложения двойного интеграла

Масса плоской фигуры. Статические моменты, центр тяжести плоской фигуры. Площадь поверхности.

Мы уже отметили два приложения двойного интеграла.

1. Объем тела

$$V = \iint_{(\sigma)} f(x, y) \, dx dy.$$

2. Площадь области

$$\sigma = \iint_{(\sigma)} d\sigma = \left( \iint_{(\sigma)} \rho \, d\rho d\theta \right).$$

#### 5.5.1. Масса плоской фигуры

Пусть в плоскости  $XOY$  задана материальная площадка  $\sigma$  с поверхностной плотностью  $\gamma(x, y)$ . Под плотностью  $\gamma(x, y)$  здесь понимается предел, к которому стремится отношение массы  $\Delta m$  элемента площадки, окружающей точку  $(x, y)$  к площади этого элемента площадки, когда  $\text{diam } \Delta\sigma \rightarrow 0$ :

$$\gamma(x, y) = \lim_{\text{diam } \Delta\sigma \rightarrow 0} \frac{\Delta m}{\Delta\sigma}.$$

Разобьем площадку  $\sigma$  на  $n$  частей  $\Delta\sigma_1, \Delta\sigma_2, \dots, \Delta\sigma_n$ ; в каждой из площадок  $\Delta\sigma_i$  выберем точку  $P_i(x_i, y_i)$  и будем считать плотность на всей площадке  $\Delta\sigma_i$  постоянной и равной  $\gamma(x_i, y_i)$ . Тогда

$$\Delta m_i \approx \gamma(x_i, y_i) \Delta\sigma_i, \quad (1)$$

где  $\Delta m_i$  — масса площадки  $\Delta\sigma_i$ . Пользуясь (1), запишем

$$m = \sum_{i=1}^n \Delta m_i \approx \sum_{i=1}^n \gamma(x_i, y_i) \Delta\sigma_i. \quad (2)$$

За массу  $m$  пластинки примем предел, к которому стремится интегральная сумма (2) при стремлении  $\text{diam } \Delta\sigma_i \rightarrow 0$  и при  $n \rightarrow \infty$ :

$$m = \lim_{\substack{n \rightarrow \infty \\ \text{diam } \Delta\sigma_i \rightarrow 0}} \sum_{i=1}^n \gamma(x_i, y_i) \Delta\sigma_i = \iint_{(\sigma)} \gamma(x, y) d\sigma.$$

### 5.5.2. Статические моменты, центр тяжести плоской фигуры

Под статическим моментом  $S_x$  материальной точки  $P(x, y)$ , расположенной в плоскости  $XOY$  и имеющей массу  $m$ , относительно оси  $OX$  понимают произведение массы точки на ее ординату:

$$S_x = m \cdot y.$$

Аналогично

$$S_y = m \cdot x.$$

Если точек много, то под статическим моментом системы точек понимают сумму их статических моментов.

Пусть вновь задана материальная площадка  $\sigma$  с поверхностной плотностью  $\gamma(x, y)$ . Для определения ее статических моментов поступим следующим образом: разобьем ее на части  $\Delta\sigma_i$ ; в каждой из этих частей выберем точку с координатами  $P_i(x_i, y_i)$  и вычислим в ней плотность  $\gamma(x_i, y_i)$ . За массу кусочка  $\Delta\sigma_i$  приближенно примем

$$\Delta m_i \approx \gamma(x_i, y_i) \Delta\sigma_i.$$

Заменим каждую площадку  $\Delta\sigma_i$  материальной точкой  $(x_i, y_i)$  и массой  $\Delta m_i$ , равной массе площадки. Статические моменты этой точки относительно осей дадут приближенные значения статических моментов  $\Delta S_x^i$  и  $\Delta S_y^i$  площадки  $\Delta\sigma_i$ :

$$\Delta S_x^i \approx y_i \Delta m_i \approx y_i \gamma(x_i, y_i) \Delta\sigma_i;$$

$$\Delta S_y^i \approx x_i \Delta m_i \approx x_i \gamma(x_i, y_i) \Delta\sigma_i.$$

Так как статический момент всей площадки равен сумме статических моментов малых площадок  $\Delta\sigma_i$ , то мы получим следующие приближенные равенства:

$$S_x \approx \sum_{i=1}^n y_i \gamma(x_i, y_i) \Delta\sigma_i,$$

$$S_y \approx \sum_{i=1}^n x_i \gamma(x_i, y_i) \Delta\sigma_i.$$

За точное значение статического момента принимаем предел, к которому стремятся интегральные суммы при неограниченном увеличении числа площадок и при стягивании каждой из них в точку:

$$S_x = \lim_{\substack{n \rightarrow \infty \\ \text{diam } \Delta\sigma_i \rightarrow 0}} \sum_{i=1}^n y_i \gamma(x_i, y_i) \Delta\sigma_i = \iint_{(\sigma)} y \gamma(x, y) d\sigma,$$

$$S_y = \lim_{\substack{n \rightarrow \infty \\ \text{diam } \Delta\sigma_i \rightarrow 0}} \sum_{i=1}^n x_i \gamma(x_i, y_i) \Delta\sigma_i = \iint_{(\sigma)} x \gamma(x, y) d\sigma.$$

Как известно из механики, координаты  $\bar{x}$  и  $\bar{y}$  центра тяжести материальной пластинки определяются по следующим формулам:

$$\begin{aligned} \bar{x} &= \frac{S_y}{m}, & \bar{y} &= \frac{S_x}{m} \Rightarrow \\ \bar{x} &= \frac{\iint_{\sigma} x \gamma(x, y) d\sigma}{\iint_{\sigma} \gamma(x, y) d\sigma}; & \bar{y} &= \frac{\iint_{\sigma} y \gamma(x, y) d\sigma}{\iint_{\sigma} \gamma(x, y) d\sigma}. \end{aligned}$$

Если пластинка однородная, т. е.  $\gamma(x, y) \equiv \gamma_0$ , то

$$\begin{aligned} \bar{x} &= \frac{\gamma_0 \iint_{\sigma} x d\sigma}{\gamma_0 \iint_{\sigma} d\sigma} = \frac{\iint_{\sigma} x d\sigma}{\iint_{\sigma} d\sigma}; \\ \bar{y} &= \frac{\iint_{\sigma} y d\sigma}{\iint_{\sigma} d\sigma}. \end{aligned}$$

**Пример.** Найти координаты центра тяжести однородной площадки, ограниченной параболой  $y = 4 - x^2$  и осью  $OX$ .

**Решение.** Так как фигура симметрична относительно оси  $OY$ , то  $\bar{x} = 0$ . Так как пластинка однородная, то по формуле (3)

$$\bar{y} = \frac{\iint_{\sigma} y dx dy}{\iint_{\sigma} dx dy} = \frac{\int_{-2}^2 dx \int_0^{4-x^2} y dy}{\int_{-2}^2 dx \int_0^{4-x^2} dy} = \frac{\frac{1}{2} \int_{-2}^2 (4-x^2)^2 dx}{\int_{-2}^2 (4-x^2) dx} = \frac{\frac{1}{2} \int_{-2}^2 (4-8x^2+x^4) dx}{\left(4x - \frac{x^3}{3}\right) \Big|_{-2}^2} = \frac{\frac{256}{3}}{\frac{32}{3}} = \frac{8}{5}.$$



### 5.5.3. Площадь поверхности

Пусть в области  $\sigma$  задана непрерывная функция  $f(x, y)$ . Нужно определить площадь поверхности, определяемой уравнением  $z = f(x, y)$ ;  $f(x, y)$  предполагается непрерывной вместе с частными производными 1-го порядка.

**Лемма.** Пусть  $\sigma$  — площадь проекции некоторой плоской фигуры с площадью  $\Omega$  на некоторую плоскость, тогда

$$\sigma = \Omega \cos \varphi,$$

где  $\varphi$  — угол между плоскостью фигуры и плоскостью проекции.

*Доказательство.* Этот факт известен для треугольников и, следовательно, он справедлив для многоугольников. Для доказательства леммы достаточно вписать в нашу фигуру многоугольник и перейти к пределу при неограниченном увеличении числа его сторон.

Для вычисления площади поверхности  $S$  разобьем  $\sigma$  на  $n$  площадок. Через  $\Delta S_i$  обозначим ту часть поверхности, которая проектируется в  $\Delta \sigma_i$ . Выберем в  $\Delta \sigma_i$  точку  $P_i(x_i, y_i)$  и через точку  $M_i$  с координатой  $z_i = f(x_i, y_i)$  проведем к поверхности  $S$  касательную плоскость  $\Omega$ . Рассмотрим ту ее часть, которая проектируется в  $\Delta \sigma_i$ . Обозначим ее  $\Delta \Omega_i$ . По лемме

$$\Delta \Omega_i = \frac{\Delta \sigma_i}{\cos \gamma_i},$$

где  $\gamma_i$  — угол между площадкой  $\Delta \sigma_i$  и  $\Delta \Omega_i$ , который равен углу между нормалью к поверхности и осью  $OZ$ . Согласно 4.9.2,

$$\cos \gamma_i = \frac{1}{\sqrt{1 + f_x'^2(x_i, y_i) + f_y'^2(x_i, y_i)}},$$

поэтому

$$\Delta \Omega_i = \sqrt{1 + f_x'^2(x_i, y_i) + f_y'^2(x_i, y_i)} \Delta \sigma_i. \quad (4)$$

За площадь  $S$  поверхности примем предел

$$S = \lim_{\substack{n \rightarrow \infty \\ \text{diam } \Delta \sigma_i \rightarrow 0}} \sum_{i=1}^n \Delta \Omega_i = \lim_{\substack{n \rightarrow \infty \\ \text{diam } \Delta \sigma_i \rightarrow 0}} \sum_{i=1}^n \sqrt{1 + f_x'^2(x_i, y_i) + f_y'^2(x_i, y_i)} \Delta \sigma_i.$$

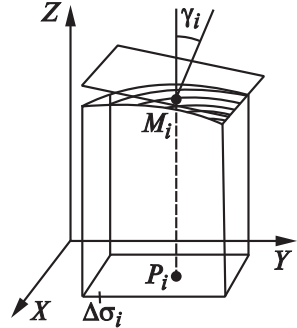


Рис. 5.11

Это выражение есть интегральная сумма для функции  $\sqrt{1+f_x'^2+f_y'^2}$ , которая интегрируема, так как  $f'_x$  и  $f'_y$  по предположению непрерывны. Следовательно,

$$S = \iint_{\sigma} \sqrt{1+f_x'^2(x, y)+f_y'^2(x, y)} d\sigma.$$

**Пример.** Определить площадь поверхности той части параболоида вращения  $z = x^2 + y^2$ , которая вырезается цилиндром  $x^2 + y^2 = 4$ . Здесь  $f(x, y) = x^2 + y^2$ ,  $\sigma$  — окружность с центром в точке  $(0, 0)$  радиуса 2:

$f'_x = 2x, \quad f'_y = 2y,$   
 $S = \iint_{\sigma} \sqrt{1+4x^2+4y^2} dx dy.$  Вычисление интеграла  
 проведем в полярных координатах:  $x = \rho \cos \theta,$   
 $y = \rho \sin \theta.$

$$S = \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^2 \sqrt{1+4\rho^2} \rho d\rho = \frac{\pi}{6} (17\sqrt{17} - 1).$$

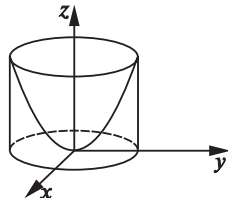


Рис. 5.12

## 5.6. Тройной интеграл

Определение тройного интеграла. Теорема существования. Свойства тройного интеграла. Вычисление тройного интеграла в декартовых координатах. Вычисление тройного интеграла в цилиндрических координатах. Тройной интеграл в сферических координатах.

### 5.6.1. Определение тройного интеграла. Теорема существования

Пусть в пространстве задана область  $V$ , объем которой равен  $V$ . Пусть в каждой точке этой области определена функция  $u = f(P) = f(x, y, z)$ . Выполним следующие действия.

1. Разобьем область  $V$  на  $n$  частей  $\Delta V_1, \Delta V_2, \dots, \Delta V_n$  таких, что

$$\sum_{i=1}^n \Delta V_i = V.$$

2. В каждом малом элементе  $\Delta V_i$  выберем точку  $P_i(x_i, y_i, z_i)$ .

3. Составим сумму

$$\sum_1^n f(P_i) \Delta V_i = \sum_1^n f(x_i, y_i, z_i) \Delta V_i,$$

которая называется интегральной суммой.

4. Рассмотрим

$$\lim_{\substack{n \rightarrow \infty \\ \text{diam } \Delta V_i \rightarrow 0}} \sum_1^n f(x_i, y_i, z_i) \Delta V_i.$$

Если этот предел существует и не зависит ни от способа разбиения ни от выбора точек  $P_i$ , то он называется тройным интегралом

$$\iiint_V f(x, y, z) dV.$$

**Теорема существования.** Для всякой функции  $u = f(x, y, z)$ , непрерывной в замкнутой ограниченной области  $V$ , существует тройной интеграл, т. е. существует предел интегральных сумм при неограниченном увеличении числа малых элементов  $\Delta V_i$  и при стягивании каждого из них в точку, который не зависит ни от способа разбиения объема  $V$  на части  $\Delta V_i$ , ни от способа выбора точек  $P_i(x_i, y_i, z_i)$ .

### 5.6.2. Свойства тройного интеграла

$$1. \iiint_V k f(x, y, z) dV = k \iiint_V f(x, y, z) dV.$$

$$2. \iiint_V [f(x, y, z) + \varphi(x, y, z)] dV = \iiint_V f(x, y, z) dV + \iiint_V \varphi(x, y, z) dV.$$

3. Если в области интегрирования  $f(x, y, z) \geq 0$ , то

$$\iiint_V f(x, y, z) dV \geq 0.$$

4. Если в области интегрирования  $f(x, y, z) \geq \varphi(x, y, z)$ , то

$$\iiint_V f(x, y, z) dV \geq \iiint_V \varphi(x, y, z) dV.$$

**5. Теорема о среднем значении.** Если функция  $f(x, y, z)$  непрерывна в замкнутой ограниченной области  $V$ , то в этой области существует такая точка  $P_0(x_0, y_0, z_0)$ , что

$$\iiint_V f(x, y, z) dV = f(x_0, y_0, z_0) \cdot V,$$

где  $V$  — объем области.

**6. Свойство аддитивности.**

$$\iiint_V f dV = \iiint_{V_1} f dV + \iiint_{V_2} f dV + \dots + \iiint_{V_k} f dV,$$

где  $V_1 + V_2 + \dots + V_k = V$ .

### 5.6.3. Вычисление тройного интеграла в декартовых координатах

Пусть областью интегрирования является тело, ограниченное сверху и снизу, соответственно, поверхностями  $z = h(x, y)$ ,  $z = g(x, y)$ . Пусть это тело проектируется на плоскости  $XOY$  в область  $\sigma$ , ограниченную кривыми  $y = \varphi_1(x)$ ,  $y = \varphi_2(x)$  [ $\varphi_2(x) \geq \varphi_1(x)$ ] и прямыми  $x = a$ ,  $x = b$ . Тогда, как можно показать, в случае непрерывной функции  $f(x, y, z)$

$$\iiint_V f(x, y, z) dV = \iint_{\sigma} d\sigma \int_{g(x, y)}^{h(x, y)} f(x, y, z) dz.$$

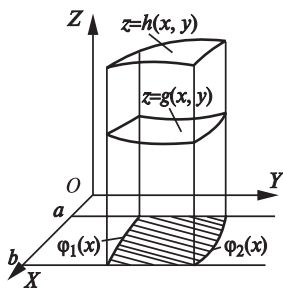


Рис. 5.13

Для того, чтобы вычислить тройной интеграл, нужно сначала вычислить интеграл

$$\int_{g(x, y)}^{h(x, y)} f(x, y, z) dz,$$

считая  $x$  и  $y$  постоянными. При этом получим функцию от  $x$  и  $y$ . Ее нужно проинтегрировать по области  $\sigma$ . Пользуясь формулой для вычисления двойного интеграла, получим

$$\iiint_V f(x, y, z) dz = \int_a^b dx \int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} dy \int_{g(x, y)}^{h(x, y)} f(x, y, z) dz.$$

**Пример.** Вычислить  $\iiint_V z dV$ , где  $V$  — пирамида, ограниченная плоскостями  $x=0$ ,  $y=0$ ,  $z=0$ ,  $x+y+z=1$ .

$$\begin{aligned}\iiint_V z dV &= \int_0^1 dx \int_0^{1-x} dy \int_0^{1-x-y} z dz = \\ &= \int_0^1 dx \int_0^{1-x} \frac{(1-x-y)^2}{2} dy = \int_0^1 \frac{(1-x)^3}{6} dx = \frac{1}{24}.\end{aligned}$$

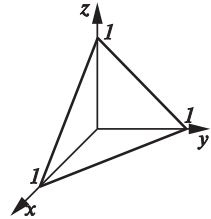


Рис. 5.14

#### 5.6.4. Вычисление тройного интеграла в цилиндрических координатах

Пусть задана точка  $M$  в системе координат  $OXYZ$ . Спроектируем ее на плоскость  $OXY$ . Тогда положение точки в пространстве можно задать, определив полярные координаты  $r$  и  $\varphi$  точки  $N$  в плоскости  $OXY$  и аппликату  $z$  точки  $M$ . Числа  $r$ ,  $\varphi$ ,  $z$  называются цилиндрическими координатами точки  $M$ . Переход от декартовых координат к цилиндрическим осуществляется по формулам (рис. 5.15)

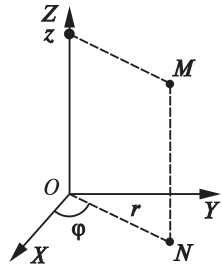


Рис. 5.15

$$\begin{aligned}x &= r \cos \varphi, \\ y &= r \sin \varphi, \\ z &= z.\end{aligned}\quad (*)$$

Пусть теперь проекция  $\sigma$  области интегрирования  $V$  на плоскость  $OXY$  такова, что интеграл по ней удобнее брать в полярных координатах, тогда делают замену переменных (\*) и

$$\iiint_V f(x, y, z) dV = \int_{\alpha}^{\beta} d\varphi \int_{r_1(\varphi)}^{r_2(\varphi)} r dr \int_{g(r \cos \varphi, r \sin \varphi)}^{h(r \cos \varphi, r \sin \varphi)} f(r \cos \varphi, r \sin \varphi, z) dz,$$

поскольку здесь  $dV = r dr d\varphi dz$ .

## 5.6.5. Тройной интеграл в сферических координатах

Положение точки в пространстве можно задать также числами  $\varphi$ ,  $\psi$ ,  $r$ , где  $\varphi$  — полярный угол проекции точки  $M$  на плоскость  $OXY$ ,  $\psi$  — угол, который составляет радиус-вектор точки  $M$  с плоскостью  $OXY$  (отклонение радиуса-вектора от плоскости  $OXY$ ),  $r$  — радиус-вектор точки  $M$ . Здесь

$$0 \leq \varphi \leq 2\pi,$$

$$-\frac{\pi}{2} \leq \psi \leq \frac{\pi}{2},$$

$$0 \leq r < \infty.$$

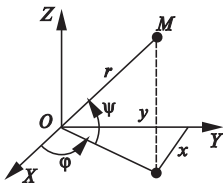


Рис. 5.16

Декартовы координаты точки  $M$  связаны с ее сферическими координатами, очевидно, соотношениями  $x = r \cos \psi \cos \varphi$ ,  $y = r \cos \psi \sin \varphi$ ,  $z = r \sin \psi$ , рис. 5.16.

Можно показать, что  $dx dy dz = r^2 \cos \psi d\varphi d\psi dr$  и

$$\iiint_V f(x, y, z) dx dy dz = \iiint_{V'} f[r \cos \psi \cos \varphi, r \cos \psi \sin \varphi, r \sin \psi] r^2 \cos \psi d\varphi d\psi dr.$$

**Пример.** Переходя к сферическим координатам, вычислить

$$\iiint_V \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} dx dy dz,$$

где  $V$  — шар радиуса  $R$ .

**Решение.** Для шара пределы изменения сферических координат будут следующими:

$$0 \leq \varphi \leq 2\pi, \quad -\frac{\pi}{2} \leq \psi \leq \frac{\pi}{2}, \quad 0 \leq r \leq R.$$

Поэтому

$$\iiint_V \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} dx dy dz = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} d\psi \int_0^R r^2 \cos \psi dr = \pi R^4.$$

### 5.7. Приложения тройного интеграла

Вычисление объема тела. Вычисление массы тела. Статические моменты и центр тяжести тела.

#### 5.7.1. Вычисление объема тела

Если подынтегральная функция в тройном интеграле тождественно равна 1, то есть  $f(x, y, z) \equiv 1$ , то

$$\iiint_V f(x, y, z) dV = \iiint_V dV = V,$$

где  $V$  — объем тела.

Последнее соотношение доказывается непосредственным рассмотрением интегральных сумм.

**Пример.** Вычислить объем тела, ограниченного поверхностями

$$z = 1 - x^2 - y^2, \quad z = 0.$$

*Решение.*

$$\begin{aligned} V &= \iiint dx dy dz = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^1 r dr \int_0^{1-r^2} dz = \\ &= 2\pi \int_0^1 r(1-r^2) dr = 2\pi \left( \frac{r^2}{2} - \frac{r^4}{4} \right) \Big|_0^1 = \frac{\pi}{2}. \end{aligned}$$

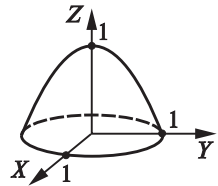


Рис. 5.17

#### 5.7.2. Вычисление массы тела

Пусть в пространстве  $OXYZ$  задано материальное тело. Рассмотрим его малую часть  $\Delta V$ , содержащую точку  $P(x, y, z)$ . Пусть масса этой части равна  $\Delta m$ . Средней плотностью тела называется отношение его массы к объему, т. е.  $\frac{\Delta m}{\Delta V}$ . Если существует предел этого отношения

при стягивании тела в точку  $P(x, y, z)$ , то он называется плотностью тела в точке  $P$ . Плотность является функцией  $x, y, z$  и обозначается  $\rho(x, y, z)$ .

Разобьем теперь наше тело на части  $\Delta V_i$ , в каждой из них выберем точку  $P_i(x_i, y_i, z_i)$  и положим плотность кусочка  $\Delta V_i$  постоянной и равной  $\rho(x_i, y_i, z_i)$ . Тогда

$$\Delta m_i \approx \rho(x_i, y_i, z_i) \Delta V_i,$$

$$m = \sum_{i=1}^n \Delta m_i \approx \sum_{i=1}^n \rho(x_i, y_i, z_i) \Delta V_i.$$

Предел интегральной суммы, записанной справа, при стремлении числа частей разбиения к  $\infty$  и при стягивании каждой из них в точку равен

$$m = \iiint_V \rho(x, y, z) dz.$$

**Пример.** Вычислить массу прямого кругового цилиндра высоты  $H$  и радиуса  $R$ , если плотность в каждой его точке пропорциональна расстоянию  $r$  от этой точки до оси цилиндра с коэффициентом пропорциональности  $\rho_0$ .

**Решение.** Выберем систему координат так, как показано на рис. 5.18.

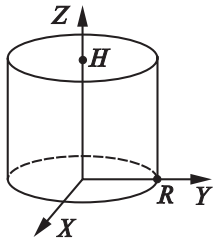


Рис. 5.18

$$m = \rho_0 \iiint_V r dV.$$

Вычислим интеграл в цилиндрических координатах:

$$m = \rho_0 \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^R r dr \int_0^H z dz = \frac{2\pi R^3 H}{3} \rho_0.$$

### 5.7.3. Статические моменты и центр тяжести тела

Статическим моментом точки относительно плоскости называется произведение ее массы  $m$  на расстояние до плоскости. Пусть задано тело с плотностью  $\gamma(x, y, z)$ . Тогда статические моменты  $S_{xy}$ ,  $S_{xz}$ ,  $S_{yz}$  его относительно плоскостей  $OXY$ ,  $OXZ$ ,  $OYZ$  вычисляются по следующим формулам:



$$S_{xy} = \iiint_V z\rho(x, y, z) dV,$$

$$S_{xz} = \iiint_V y\rho(x, y, z) dV,$$

$$S_{yz} = \iiint_V x\rho(x, y, z) dV.$$

Координаты центра масс  $\bar{x}$ ,  $\bar{y}$ ,  $\bar{z}$  материального тела определяются формулами

$$\bar{x} = \frac{S_{yz}}{m} = \frac{\iiint_V x\rho(x, y, z) dV}{\iiint_V \rho(x, y, z) dV},$$

$$\bar{y} = \frac{S_{xz}}{m} = \frac{\iiint_V y\rho(x, y, z) dV}{\iiint_V \rho(x, y, z) dV},$$

$$\bar{z} = \frac{S_{xy}}{m} = \frac{\iiint_V z\rho(x, y, z) dV}{\iiint_V \rho(x, y, z) dV}.$$

Если тело однородное, т. е.  $\rho(x, y, z) \equiv \rho_0$ , то

$$\bar{x} = \frac{\iiint_V x dV}{V},$$

$$\bar{y} = \frac{\iiint_V y dV}{V},$$

$$\bar{z} = \frac{\iiint_V z dV}{V},$$

где  $V$  — объем тела.

### 5.8. Криволинейный интеграл второго рода

Задачи, приводящие к криволинейному интегралу. Определение криволинейного интеграла. Теорема существования. Вычисление криволинейного интеграла. Свойства криволинейного интеграла.

#### 5.8.1. Задачи, приводящие к криволинейному интегралу

Пусть точка  $P(x, y)$  движется вдоль некоторой кривой  $L$  от точки  $M$  к точке  $N$ . К точке  $P$  приложена сила  $\vec{F}(P)$ , которая меняется по величине и направлению при перемещении точки  $P$ , т. е. является функцией точки  $P$ . Вычислим работу силы  $\vec{F}$  по перемещению точки  $P$  от  $M$  к  $N$ . Для этого разобьем дугу  $MN$  на  $n$  частей точками  $M_0 = M$ ,

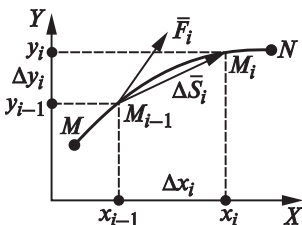


Рис. 5.19

$M_1, \dots, M_n = N$  и обозначим через  $\overline{\Delta S}_i$  вектор  $\overline{M_{i-1}M_i}$ . Величину силы  $\vec{F}$  в точке  $P_i(\tilde{x}_i, \tilde{y}_i) \in [M_{i-1}, M_i]$  обозначим  $\vec{F}_i$ . Тогда скалярное произведение  $(\vec{F}_i, \overline{\Delta S}_i)$  можно рассматривать как приближенное значение работы силы  $\vec{F}$  вдоль дуги  $M_{i-1}M_i$ :

$$A_i \approx (\vec{F}_i, \overline{\Delta S}_i).$$

Пусть  $\vec{F}(P) = \vec{F}(x, y) = X(x, y)\vec{i} + Y(x, y)\vec{j}$ , где  $X(x, y)$  и  $Y(x, y)$  — проекции вектора  $\vec{F}(P)$  на оси  $OX$  и  $OY$ . Вектор  $\overline{\Delta S}_i$  можно в координатной форме представить так:

$$\overline{\Delta S}_i = \Delta x_i \vec{i} + \Delta y_i \vec{j}.$$

Тогда

$$\begin{aligned} A_i &\approx X(\tilde{x}_i, \tilde{y}_i) \Delta x_i + Y(\tilde{x}_i, \tilde{y}_i) \Delta y_i, \\ A &= \sum_{i=1}^n A_i \approx \sum_{i=1}^n [X(\tilde{x}_i, \tilde{y}_i) \Delta x_i + Y(\tilde{x}_i, \tilde{y}_i) \Delta y_i]. \end{aligned} \quad (1)$$

Если существует предел суммы, стоящей справа в (1), при  $\Delta x_i \rightarrow 0$  и  $\Delta y_i \rightarrow 0$ , то этот предел выражает работу силы  $\vec{F}$  по перемещению точки  $P$  вдоль кривой  $L$  от точки  $M$  к точке  $N$ .

**5.8.2. Определение криволинейного интеграла. Теорема существования**

Если существует предел суммы (1) при  $n \rightarrow \infty$ ,  $\Delta x_i, \Delta y_i \rightarrow 0$ , который не зависит ни от способа разбиения дуги на части, ни от выбора точек  $P_i(\tilde{x}_i, \tilde{y}_i)$ , то он называется криволинейным интегралом второго рода или криволинейным интегралом по координатам и обозначается:

$$\int_L X(x, y) dx + Y(x, y) dy = \int_{(M)}^{(N)} X(x, y) dx + Y(x, y) dy.$$

Таким образом,

$$\lim_{\substack{n \rightarrow \infty \\ \Delta x_i \rightarrow 0 \\ \Delta y_i \rightarrow 0}} \sum_{i=1}^n [X(\tilde{x}_i, \tilde{y}_i) \Delta x_i + Y(\tilde{x}_i, \tilde{y}_i) \Delta y_i] = \int_L X(x, y) dx + Y(x, y) dy.$$

Если бы кривая располагалась в пространстве, а функция  $\bar{F}$  была соответственно функцией координат  $x, y, z$  точки  $P$ , то мы пришли бы к интегралу от трех функций:

$$\int_L X(x, y, z) dx + Y(x, y, z) dy + Z(x, y, z) dz.$$

**З а м е ч а н и е.** Следует обратить внимание, что при составлении интегральных сумм и введении понятия криволинейного интеграла второго рода подынтегральные функции умножаются не на длину дуги частичного отрезка кривой линии, а на проекцию этого участка кривой на ось  $x$  или  $y$ , т. е. на  $dx$  или  $dy$ .

Наряду с этим при решении таких задач, как вычисление длины плоской или пространственной кривой линии, вычислении массы материальной кривой и многих других, вводится понятие и определение криволинейного интеграла первого рода, при этом подынтегральная функция умножается на дифференциал  $ds$  длины дуги кривой  $L$ , по длине которой проводится интегрирование:

$$I = \int_{(L)} f(M) ds, \quad M(x, y, z) \in L.$$

Пусть кривая  $L$  задана в параметрической форме уравнениями  $x = \varphi(t)$ ,  $y = \psi(t)$ , где  $t \in [\alpha, \beta]$ .

**Теорема существования.** Пусть функции  $\varphi(t)$  и  $\psi(t)$  непрерывно дифференцируемы на  $[\alpha, \beta]$ , а функции  $X[\varphi(t), \psi(t)]$ ,  $Y[\varphi(t), \psi(t)]$  непрерывны на  $[\alpha, \beta]$  как функции  $t$ , тогда для функций  $X(x, y)$  и  $Y(x, y)$  существует предел интегральной суммы (1), который не зависит от способа разбиения дуги и от способа выбора точек  $\tilde{x}_i$ ,  $\tilde{y}_i$ .

Криволинейный интеграл впервые был рассмотрен Клеро (1743).

### 5.8.3. Вычисление криволинейного интеграла

Пусть точки  $\alpha = t_0, t_1, t_2, \dots, t_n = \beta$  таковы, что

$$\begin{aligned} x_0 &= \varphi(t_0) = \varphi(\alpha), & y_0 &= \psi(t_0) = \psi(\alpha), \\ x_1 &= \varphi(t_1), & y_1 &= \psi(t_1), \\ &\dots\dots\dots & & \dots\dots\dots \\ x_n &= \varphi(t_n) = \varphi(\beta); & y_n &= \psi(t_n) = \psi(\beta). \end{aligned}$$

Интегральную сумму по дуге  $L$  запишем в виде

$$\sum_1^n X(\tilde{x}_i, \tilde{y}_i) \Delta x_i + \sum_1^n Y(\tilde{x}_i, \tilde{y}_i) \Delta y_i.$$

Имеем:  $\Delta x_i = \varphi(t_i) - \varphi(t_{i-1}) = \varphi'(\tau_i) \Delta t_i$ , где  $t_{i-1} \leq \tau_i \leq t_i$ . Т. к. точки  $\tilde{x}_i$  мы можем выбирать произвольно, то будем считать их выбранными таким образом, что  $\tilde{x}_i = \varphi(\tau_i)$ . Тогда

$$\sum_1^n X(\tilde{x}_i, \tilde{y}_i) \Delta x_i = \sum_1^n X[\varphi(\tau_i), \psi(\tau_i)] \varphi'(\tau_i) \Delta t_i. \quad (2)$$

Справа стоит интегральная сумма для непрерывной функции  $X[\varphi(t), \psi(t)] \varphi'(t)$  на отрезке  $[\alpha, \beta]$ .

Переходя к пределу в обеих частях равенства (2) при  $\Delta x_i \rightarrow 0$ , получим

$$\int_L X(x, y) dx = \int_{\alpha}^{\beta} X[\varphi(t), \psi(t)] \varphi'(t) dt.$$

Аналогично

$$\int_L Y(x, y) dy = \int_{\alpha}^{\beta} Y[\varphi(t), \psi(t)] \psi'(t) dt.$$

Окончательно получаем формулу для вычисления криволинейного интеграла по дуге  $L$ :

$$\int_L X(x, y) dx + Y(x, y) dy = \int_{\alpha}^{\beta} \{X[\varphi(t), \psi(t)] \varphi'(t) + Y[\varphi(t), \psi(t)] \psi'(t)\} dt.$$

Если кривая задана в пространстве уравнениями  $x = \varphi(t)$ ,  $y = \psi(t)$ ,  $z = \eta(t)$  при  $t \in [\alpha, \beta]$ , то

$$\begin{aligned} & \int_L X(x, y, z) dx + Y(x, y, z) dy + Z(x, y, z) dz = \\ & = \int_{\alpha}^{\beta} \{X[\varphi(t), \psi(t), \eta(t)] \varphi'(t) + Y[\varphi(t), \psi(t), \eta(t)] \psi'(t) + Z[\varphi(t), \psi(t), \eta(t)] \eta'(t)\} dt. \end{aligned}$$

#### 5.8.4. Свойства криволинейного интеграла

$$1. \int_{(M)}^{(N)} = - \int_{(N)}^{(M)}.$$

Значение криволинейного интеграла зависит от направления, в котором проходится кривая  $L$ . При изменении направления знак интеграла меняется на противоположный.

2. Если кривая  $L$  состоит из нескольких кривых  $L_1, L_2, \dots, L_k$ , и интеграл по каждой кривой  $L_i$  существует, то существует и интеграл по кривой  $L$ , и он равен

$$\int_L = \int_{L_1} + \int_{L_2} + \dots + \int_{L_k}.$$

**Пример.** Вычислить интеграл

$$J = \int_{(M)}^{(N)} 2xy dx + y^2 dy + z^2 dz,$$

где  $MN$  — один виток винтовой линии  $x = \cos t$ ,  $y = \sin t$ ,  $z = 2t$  от точки  $M(1, 0, 0)$  до точки  $N(1, 0, 4\pi)$ .

**Решение.** Здесь  $t$  меняется от 0 до  $2\pi$ .

$$\begin{aligned} J &= \int_0^{2\pi} [2 \cos t \cdot \sin t (-\sin t) + \sin^2 t \cdot \cos t + 4t^2 \cdot 2] dt = \\ &= \int_0^{2\pi} (-\sin^2 t \cdot \cos t + 8t^2) dt = \left( -\frac{\sin^3 t}{3} + \frac{8}{3} t^3 \right) \Big|_0^{2\pi} = \frac{64}{3} \pi^3. \end{aligned}$$

**Пример.** Вычислить интеграл

$$J = \int_{MN} (x^2 + y^2) dx + 2xy dy$$

вдоль параболы  $y = x^2$  от точки  $(-1, 1)$  до точки  $(1, 1)$ .

**Решение.** Здесь  $x = x$ ,  $y = x^2$  и  $x$  можно рассматривать как параметр.

$$J = \int_{-1}^1 (x^2 + x^4 + 2x \cdot x^2 \cdot 2x) dx = \int_{-1}^1 (x^2 + 4x^4) dx = \left( \frac{x^3}{3} + 4 \frac{x^5}{5} \right) \Big|_{-1}^1 = 2 \frac{4}{15}.$$

## 5.9. Формула Грина – Остроградского. Независимость криволинейного интеграла от пути интегрирования

Формула Грина – Остроградского. Независимость криволинейного интеграла от пути интегрирования

### 5.9.1. Формула Остроградского – Грина

Рассмотрим в плоскости  $XOY$  область  $\sigma$ , ограниченную некоторой кривой  $L$ . Пусть в этой области заданы функции  $P(x, y)$  и  $Q(x, y)$ , непрерывные вместе со своими частными производными  $\frac{\partial P}{\partial x}$  и  $\frac{\partial Q}{\partial y}$ . Тогда имеет место следующая формула:

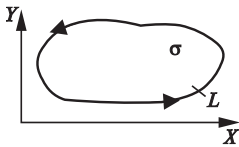


Рис. 5.20

$$\iint_{\sigma} \left( \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) d\sigma = \oint_L P(x, y) dx + Q(x, y) dy,$$

где двойной интеграл берется по области  $\sigma$  и криволинейный — вдоль контура  $L$ , ограничивающего  $\sigma$ , при этом контур  $L$  обходится в положительном направлении, т. е. так, что область  $\sigma$  остается слева.

Эта формула была получена знаменитым русским математиком М. В. Остроградским (1801–1861) и английским физиком и математиком Д. Грином (1793–1841). Она является частным случаем более общей формулы, полученной Остроградским, с которой мы познакомимся позже.

**Доказательство.** Предположим, что область  $\sigma$  имеет вид, изображенный на рис. 5.21.

Рассмотрим сначала

$$J_1 = \iint_{\sigma} \frac{\partial P}{\partial y} d\sigma = \int_a^b dx \int_{\varphi(x)}^{\psi(x)} \frac{\partial P}{\partial y} dy.$$

Так как при постоянном  $x$   $P(x, y)$  есть одна из первообразных для  $\frac{\partial P}{\partial y}$ , то

$$\int_{\varphi(x)}^{\psi(x)} \frac{\partial P}{\partial y} dy = P(x, y) \Big|_{\varphi(x)}^{\psi(x)} = P(x, \psi(x)) - P(x, \varphi(x)),$$

т. е.

$$J_1 = \int_a^b P(x, \psi(x)) dx - \int_a^b P(x, \varphi(x)) dx.$$

Но по способу вычисления криволинейного интеграла

$$\begin{aligned} \int_a^b P(x, \psi(x)) dx &= \int_{A\tilde{m}B} P(x, y) dx = - \int_{B\tilde{m}A} P(x, y) dx, \\ - \int_a^b P(x, \varphi(x)) dx &= - \int_{A\tilde{n}B} P(x, y) dx. \end{aligned}$$

Дуги  $A\tilde{n}B$  и  $B\tilde{m}A$  дают в совокупности границу  $L$  области  $\sigma$ , проходящую в положительном направлении, поэтому

$$J_1 = - \oint_L P(x, y) dx = \iint_{\sigma} \frac{\partial P}{\partial y} d\sigma. \quad (1)$$

Аналогично показывается, что

$$\iint_{\sigma} \frac{\partial Q}{\partial x} d\sigma = \oint_L Q(x, y) dy. \quad (2)$$

Вычитая почленно равенства (1) и (2), получим

$$\iint_{\sigma} \left( \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) d\sigma = \oint_L Q(x, y) dy + P(x, y) dx.$$

Доказанная формула может быть применена для вычисления площади плоской области при помощи криволинейного интеграла. Положим  $P(x, y) \equiv 0$ ,  $Q(x, y) \equiv x$ . Тогда формула примет вид

$$\iint_{\sigma} d\sigma = \oint_L x dy.$$

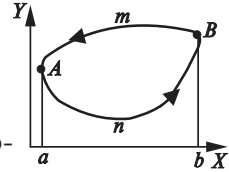


Рис. 5.21

Так как слева стоит площадь области  $\sigma$ , то получаем формулу

$$\sigma = \oint_L x dy.$$

Аналогично, полагая  $Q(x, y) \equiv 0$ ,  $P(x, y) = -y$ , получим

$$\sigma = -\oint_L y dx.$$

**Пример.** Вычислить площадь фигуры, ограниченной эллипсом

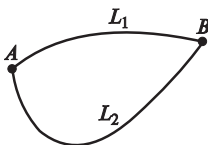
$$x = a \cos t, \quad y = b \sin t.$$

*Решение.* Если обход эллипса совершается против часовой стрелки, так, чтобы область, ограниченная им, оставалась слева, то  $0 \leq \varphi \leq 2\pi$ .

$$\sigma = \int_0^{2\pi} a \cos t \cdot b \cos t dt = ab \int_0^{2\pi} \cos^2 t dt = ab \int_0^{2\pi} \frac{1 + \cos 2t}{2} dt = \pi ab.$$

### 5.9.2. Независимость криволинейного интеграла от пути интегрирования

Пусть функции  $P(x, y)$  и  $Q(x, y)$  непрерывны вместе с частными производными  $\frac{\partial P}{\partial y}$  и  $\frac{\partial Q}{\partial x}$  в некоторой области  $G$  плоскости  $XOY$ . Рассмотрим в  $G$  две произвольные точки  $A$  и  $B$  (рис. 5.22). Эти точки можно соединить различными линиями, лежащими в  $G$ . Нетрудно проверить, что интегралы



$$\int_{L_1} P dx + Q dy, \quad \text{и} \quad \int_{L_2} P dx + Q dy,$$

Рис. 5.22

вообще говоря, различны.

Ставится вопрос: когда интеграл  $\int_L P dx + Q dy$  принимает одинаковое значение на любой кривой  $L$ , соединяющей точки  $A$  и  $B$ , т. е. когда интеграл не зависит от пути интегрирования.

**Теорема 1.** Для того, чтобы криволинейный интеграл  $\int_L P dx + Q dy$  в некоторой области  $G$  не зависел от пути интегрирования, необходимо



и достаточно, чтобы интеграл по любому замкнутому контуру, лежащему в  $G$ , был равен 0.

**Доказательство. Достаточность.** Пусть интеграл по  $\forall$  замкнутому контуру в области  $G$  равен 0. Пусть  $A$  и  $B$  — любые точки  $\in G$ . Соединим эти точки в  $G$  произвольными путями  $AnB$  и  $AmB$ .

По условию

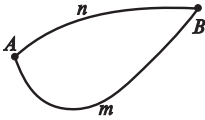


Рис. 5.23

$$\int_{AmBnA} Pdx + Qdy = \int_{AmB} + \int_{BnA} = 0.$$

Таким образом,

$$\int_{AmB} Pdx + Qdy = - \int_{BnA} Pdx + Qdy = \int_{AnB} Pdx + Qdy.$$

**Необходимость.** Пусть интеграл не зависит от пути интегрирования, тогда

$$\int_{AnB} Pdx + Qdy = \int_{AmB} Pdx + Qdy,$$

т. е.

$$\int_{AnB} Pdx + Qdy - \int_{AmB} Pdx + Qdy = 0,$$

но

$$\int_{AmB} = - \int_{BmA}$$

т. е.

$$\int_{AnB} + \int_{BmA} = 0,$$

но

$$0 = \int_{AnB} + \int_{BnA} = \int_{AnBnA} Pdx + Qdy.$$

Теорема доказана.

**Теорема 2.** Для того, чтобы криволинейный интеграл  $\int_L Pdx + Qdy$  не зависел от пути интегрирования в односвязной области  $G$ , необходимо и достаточно, чтобы в каждой точке этой области  $\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}$ .

**Достаточность.** Пусть в области  $G$   $\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}$ . По формуле Остроградского – Грина

$$\iint_{\sigma} \left( \frac{\partial Q}{\partial x} + \frac{\partial P}{\partial y} \right) d\sigma = \oint_L P dx + Q dy, \quad (3)$$

где  $\sigma$  — площадка, ограниченная контуром  $L$ . Эта площадка целиком принадлежит  $G$  в силу односвязности. Так как везде в  $G$   $\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}$ , то интеграл слева в (3) равен 0, следовательно, и интеграл по контуру  $L$  равен 0. Таким образом, интеграл по любому замкнутому контуру равен 0 и, следовательно, по теореме 1 интеграл не зависит от пути интегрирования.

**Необходимость.** Пусть интеграл  $\int_L P dx + Q dy$  не зависит от пути интегрирования. Покажем, что  $\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}$  в  $G$ . Пусть это не так. Тогда есть точка  $(x_0, y_0)$ , что  $\frac{\partial P(x_0, y_0)}{\partial y} \neq \frac{\partial Q(x_0, y_0)}{\partial x}$ . Пусть, например,  $-\frac{\partial P(x_0, y_0)}{\partial y} + \frac{\partial Q(x_0, y_0)}{\partial x} > 0$ . В силу непрерывности  $\frac{\partial P}{\partial y}$  и  $\frac{\partial Q}{\partial x}$  существует окрестность точки  $(x_0, y_0)$ , в которой имеет место неравенство  $-\frac{\partial P}{\partial y} + \frac{\partial Q}{\partial x} > 0$ . Рассмотрим круг  $\sigma$  столь малого радиуса, что он целиком содержится в этой окрестности. За контур  $L$  примем окружность, ограничивающую этот круг. В силу свойства (3) двойного интеграла и по формуле Остроградского – Грина

$$\oint_L P dx + Q dy = \iint_{\sigma} \left( \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) d\sigma > 0.$$

Таким образом, интеграл по замкнутому контуру отличен от 0, а это противоречит утверждению теоремы 1. Теорема доказана.

Вспомним, что условие  $\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}$  является необходимым и достаточным условием того, чтобы выражение  $P(x, y)dx + Q(x, y)dy$  было дифференциалом  $du$  некоторой функции  $u(x, y)$ . Если функция  $u(x, y)$

известна, то для вычисления криволинейного интеграла можно воспользоваться формулой

$$\int_{(x_1, y_1)}^{(x_2, y_2)} P(x, y) dx + Q(x, y) dy = u(x_2, y_2) - u(x_1, y_1),$$

где  $(x_1, y_1)$  и  $(x_2, y_2)$  — начальная конечная точка пути интегрирования.

### 5.10. Криволинейный и поверхностный интегралы первого рода

Криволинейный интеграл по длине дуги. Вычисление массы кривой. Интеграл по площади поверхности (поверхностный интеграл первого рода). Вычисление поверхностного интеграла первого рода.

#### 5.10.1. Криволинейный интеграл по длине дуги. Вычисление массы кривой

Пусть в плоскости  $XOY$  задана дуга  $l$ , соединяющая точки  $A$  и  $B$ . Пусть в точках дуги определена непрерывная функция  $f(x, y)$ . Разобьем дугу  $AB$  на  $n$  частей точками  $A_0 = A, A_1, \dots, A_n = B$ . Длину дуги  $A_i A_{i+1}$  ( $i = 0, 1, \dots, n-1$ ) обозначим через  $\Delta l_i$ . На каждой из дуг  $A_i A_{i+1}$  выберем точку  $M_i(x_i, y_i)$  и составим сумму

$$\sum_{i=0}^{n-1} f(M_i) \Delta l_i = \sum_{i=0}^{n-1} f(x_i, y_i) \Delta l_i.$$

Если существует предел этой суммы при условии, что все  $\Delta l_i \rightarrow 0$ , который не зависит ни от способа разбиения дуги на части, ни от выбора точек  $M_i(x_i, y_i)$ , то он называется криволинейным интегралом по длине дуги, или криволинейным интегралом первого рода:

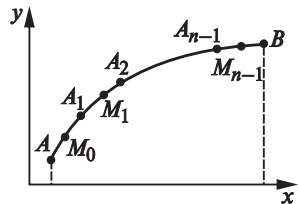


Рис. 5.24

$$\int_{AB} f(x, y) dl = \lim_{\substack{n \rightarrow \infty \\ \Delta l_i \rightarrow 0}} \sum_{i=0}^{n-1} f(x_i, y_i) \Delta l_i.$$

Отметим, что в отличие от криволинейного интеграла второго рода криволинейный интеграл по длине дуги не зависит от выбора направления на кривой.

Можно показать, что вычисление криволинейного интеграла по длине дуги сводится к вычислению определенного интеграла по следующему правилу.

Если дуга АВ задана уравнением  $y = \varphi(x)$ ,  $x \in [a, b]$ , то

$$\int_{AB} f(x, y) dl = \int_a^b f[x, \varphi(x)] \sqrt{1 + \varphi'^2(x)} dx.$$

Физический смысл: если  $f(x, y)$  — плотность точек кривой, то

$$\int_{AB} f(x, y) dl$$

выражает массу дуги.

**Пример.** Найти массу дуги кривой  $y = \ln x$  между точками с абсциссами  $x = 1$ ,  $x = 2$ , если плотность  $\rho = x^2$ .

$$\begin{aligned} m = \int_{AB} \rho(x, y) dl &= \int_{AB} x^2 dl = \int_1^2 x^2 \sqrt{1 + (\ln x)^2} dx = \int_1^2 x^2 \sqrt{1 + \frac{1}{x^2}} dx = \\ &= \int_1^2 x \sqrt{1 + x^2} dx = \frac{1}{3} (5\sqrt{5} - 2\sqrt{2}). \end{aligned}$$

### 5.10.2. Интеграл по площади поверхности (поверхностный интеграл первого рода)

Рассмотрение функций нескольких переменных естественно приводит к дальнейшему обобщению понятия интеграла — к поверхностным интегралам, которые конструктивно вводятся так же, как криволинейные интегралы.

Пусть на поверхности  $S$ , ограниченной замкнутой кривой  $L$ , задана функция  $f(M) = f(x, y, z)$ .

1. Разобьем  $S$  на  $n$  частей  $\Delta S_1, \Delta S_2, \dots, \Delta S_n$ .

2. На  $\forall$  площадке разбиения  $\Delta S_i$  выберем произвольно точку  $M_i(x_i, y_i, z_i)$  и вычислим

$$f(M_i) \Delta S_i = f(x_i, y_i, z_i) \Delta S_i \quad (i = 1, 2, \dots, n).$$

3. Составим сумму

$$\sum_{i=1}^n f(M_i) \Delta S_i = \sum_{i=1}^n f(x_i, y_i, z_i) \Delta S_i. \quad (1)$$

(1) — интегральная сумма.

**ОПРЕДЕЛЕНИЕ.** Если существует предел суммы (1) при  $n \rightarrow \infty$ ,  $\Delta S_i \rightarrow 0$ , который не зависит ни от способа разбиения, ни от выбора точек  $M_i$ , то он называется интегралом по площади поверхности:

$$\iint_S f(x, y, z) dS = \lim_{\substack{n \rightarrow \infty \\ \max \Delta S_i \rightarrow 0}} \sum_{i=1}^n f(x_i, y_i, z_i) \Delta S_i. \quad (2)$$

Если  $\rho(x, y, z)$  — поверхностная плотность, то масса поверхности  $S$  есть

$$m = \iint_S \rho(x, y, z) dS.$$

В этом состоит физический смысл интеграла.

Интеграл (2) обладает теми же свойствами, что и двойной.

1. Если  $S = S_1 + S_2$ , то

$$\iint_S = \iint_{S_1} + \iint_{S_2}.$$

2. Если  $f(x, y, z) \geq 0$ , то

$$\iint_S f(x, y, z) dS \geq 0.$$

Пусть поверхность площади  $S$  задана уравнением  $z = \varphi(x, y)$ , где  $\varphi(x, y)$  — непрерывная вместе с частными производными 1-го порядка функция.

**Теорема существования.** Для всякой непрерывной функции  $f(x, y, z)$  существует поверхностный интеграл первого рода.

### 5.10.3. Вычисление поверхностного интеграла первого рода

Пусть  $\sigma$  — проекция поверхности  $S$  на плоскость  $XOY$ , а  $u = f(x, y, z)$  — непрерывная функция, определенная во всех точках поверхности  $S$ . Разобьем  $\sigma$  на части  $\Delta\sigma_1, \Delta\sigma_2, \dots, \Delta\sigma_n$ . Тогда  $S$  разобьется на части  $\Delta S_1, \Delta S_2, \dots, \Delta S_n$ , при этом  $\Delta S_i$  — часть поверхности, которая проектируется в  $\Delta\sigma_i$ .

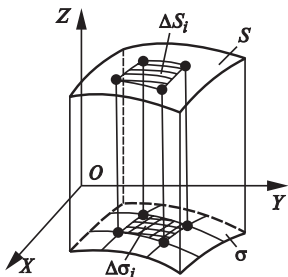


Рис. 5.25

$$\Delta S_i = \iint_{(\Delta \sigma_i)} \sqrt{1 + \varphi_x'^2(x, y) + \varphi_y'^2(x, y)} d\sigma.$$

По теореме о среднем

$$\Delta S_i = \sqrt{1 + \varphi_x'^2(x_i, y_i) + \varphi_y'^2(x_i, y_i)} \Delta \sigma_i,$$

где  $x_i, y_i$  — координаты некоторой точки  $P_i(x_i, y_i) \in \Delta \sigma_i$ . Возьмем в каждой части  $\Delta S_i$  точку  $M_i(x_i, y_i, z_i)$ , где  $z_i = \varphi(x_i, y_i)$ .

Для данного разбиения поверхности  $S$  на части и для данного выбора точек  $M_i$  составим интегральную сумму

$$\sum_{i=1}^n f(x_i, y_i, z_i) \Delta S_i = \sum_{i=1}^n f(x_i, y_i, \varphi(x_i, y_i)) \sqrt{1 + \varphi_x'^2(x_i, y_i) + \varphi_y'^2(x_i, y_i)} \Delta \sigma_i. \quad (3)$$

Перейдем к пределу при  $n \rightarrow \infty$ , считая, что  $\Delta \sigma_i \rightarrow 0$ . Сумма (3) является интегральной суммой по области  $\sigma$  для непрерывной функции  $f(x, y, \varphi(x, y)) \sqrt{1 + \varphi_x'^2 + \varphi_y'^2}$ . Поэтому ее предел есть двойной интеграл по области  $\sigma$ :

$$\iint_{\sigma} f(x, y, \varphi(x, y)) \sqrt{1 + \varphi_x'^2(x, y) + \varphi_y'^2(x, y)} d\sigma.$$

Но, с другой стороны,

$$\lim_{\substack{n \rightarrow \infty \\ \Delta S_i \rightarrow 0}} \sum_{i=1}^n f(x_i, y_i, z_i) \Delta S_i = \iint_S f(x, y, z) dS.$$

Таким образом, окончательно,

$$\iint_S f(x, y, z) dS = \iint_{\sigma} f(x, y, \varphi(x, y)) \sqrt{1 + \varphi_x'^2(x, y) + \varphi_y'^2(x, y)} d\sigma.$$

**Пример.** Вычислить массу  $m$  части  $S$  параболоида вращения  $z = \frac{1}{2}(x^2 + y^2)$ , вырезанную цилиндром  $x^2 + y^2 = 4$ , если плотность в каждой точке пропорциональна квадрату расстояния от этой точки до оси  $OZ$ .

### 5.11. Поверхностные интегралы второго рода

Задача о потоке жидкости. Определение поверхностного интеграла второго рода. Вычисление поверхностного интеграла второго рода.

#### 5.11.1. Задача о потоке жидкости через поверхность

Рассмотрим движение жидкости в пространстве. Пусть скорость  $\vec{v}$  частицы, протекающей через данную точку  $M$  пространства, зависит только от этой точки, т. е.

$$\vec{v} = \vec{v}(x, y, z)$$

или

$$\vec{v} = v_x(x, y, z)\vec{i} + v_y(x, y, z)\vec{j} + v_z(x, y, z)\vec{k}.$$

Вычислим поток жидкости через поверхность  $S$  за единицу времени, считая, что плотность жидкости  $\rho = 1$ .

1. Пусть  $\vec{v} = \text{const}$ , а поверхность  $S$  — плоская площадка. За единицу времени частицы жидкости, находящиеся на площадке  $S$ , переместятся в направлении  $\vec{v}$  на расстояние, равное по длине  $|\vec{v}|$ , т. е. будут на площадке  $S_1$ . Количество жидкости, которое пройдет за единицу времени через  $S$ , численно равно объему цилиндра:  $\Pi = S \cdot h$ , где  $h$  — высота.

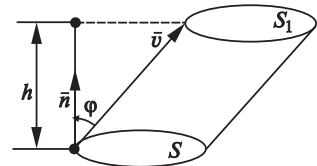


Рис. 5.26

Пусть  $\vec{n}$  — единичный вектор нормали к  $S$ . Угол между векторами  $\vec{n}$  и  $\vec{v}$  обозначим через  $\varphi$ . Тогда

$$h = |\vec{v}| \cos \varphi = |\vec{v}| \cdot |\vec{n}| \cos \varphi = (\vec{v}, \vec{n}).$$

Таким образом,

$$\Pi = (\vec{v}, \vec{n})S. \quad (1)$$

2. Пусть  $\vec{v} = \vec{v}(x, y, z)$ , а  $S$  — произвольная поверхность. Пусть в произвольной точке  $M$  этой поверхности определен единичный нормальный вектор  $\vec{n} = \cos \alpha \cdot \vec{i} + \cos \beta \cdot \vec{j} + \cos \gamma \cdot \vec{k}$ , направляющие косинусы которого являются непрерывными функциями координат точек поверхности.

Найдем количество жидкости  $\Pi$ , протекающей в единицу времени через эту поверхность. Поскольку  $\vec{v}$  меняется от точки к точке по величине и направлению, то непосредственно применить формулу (1) нельзя. Поэтому разобьем поверхность  $S$  на  $n$  частей  $\Delta S_1, \Delta S_2, \dots, \Delta S_n$  и выберем

в каждой части точку  $M_i(x_i, y_i, z_i)$ . Пусть  $\bar{n}_i = \bar{i} \cos \alpha_i + \bar{j} \cos \beta_i + \bar{k} \cos \gamma_i$  — единичный вектор нормали к поверхности  $S$  в точке  $M_i$ .

Будем считать, что в пределах  $\Delta S_i$  скорость  $\bar{v} = \text{const}$  и равна ее значению  $\bar{v}_i$  в точке  $M_i$ :

$$\bar{v}_i = v_x(x_i, y_i, z_i)\bar{i} + v_y(x_i, y_i, z_i)\bar{j} + v_z(x_i, y_i, z_i)\bar{k}.$$

Будем также предполагать, что область  $\Delta S_i$  практически плоская. Тогда

$$\begin{aligned} \Delta \Pi_i &\approx (\bar{v}_i, \bar{n}_i) \Delta S_i \Rightarrow \\ \Pi &= \sum_{i=1}^n \Delta \Pi_i \approx \sum_{i=1}^n (\bar{v}, \bar{n}_i) \Delta S_i. \end{aligned}$$

За количество жидкости, протекающей через поверхность  $S$  в единицу времени, принимается предел, к которому стремится правая часть последнего равенства при  $n \rightarrow \infty$  и  $\max \Delta S_i \rightarrow 0$ :

$$\Pi = \lim_{\substack{n \rightarrow \infty \\ \max \Delta S_i \rightarrow 0}} \sum_{i=1}^n (\bar{v}, \bar{n}_i) \Delta S_i.$$

Расписывая скалярное произведение  $(\bar{v}, \bar{n}_i)$  в координатной форме, получим

$$\Pi = \lim_{\substack{n \rightarrow \infty \\ \max \Delta S_i \rightarrow 0}} \sum_{i=1}^n [v_x \cos \alpha_i + v_y \cos \beta_i + v_z \cos \gamma_i] \Delta S_i. \quad (2)$$

В равенстве (2) справа записана интегральная сумма для непрерывной функции  $v_x(x, y, z) \cos \alpha + v_y(x, y, z) \cos \beta + v_z \cos \gamma$ . Поэтому

$$\Pi = \iint_S (\bar{v}, \bar{n}) dS = \iint_S (v_x \cos \alpha + v_y \cos \beta + v_z \cos \gamma) dS. \quad (3)$$

Итак, количество жидкости, протекающей в единицу времени через данную поверхность  $S$ , или, как говорят, поток жидкости через эту поверхность есть интеграл по поверхности  $S$ , определенный в соответствии с формулой (3).

### 5.11.2. Определение поверхностного интеграла второго рода

Пусть  $\bar{F} = P(x, y, z)\bar{i} + Q(x, y, z)\bar{j} + R(x, y, z)\bar{k}$  — некоторая вектор-функция в пространстве,  $S$  — некоторая поверхность. Предположим, что в каждой точке поверхности  $S$  определен единичный вектор



$\vec{n} = \cos\alpha \cdot \vec{i} + \cos\beta \cdot \vec{j} + \cos\gamma \cdot \vec{k}$ , направляющие косинусы которого являются непрерывными функциями координат точки поверхности.

Интеграл

$$\Pi = \iint_S (\vec{F}, \vec{n}) dS = \iint_S [P(x, y, z) \cos\alpha + Q(x, y, z) \cos\beta + R(x, y, z) \cos\gamma] dS$$

называется потоком вектора  $\vec{F}$  через поверхность  $S$  (или поверхностным интегралом второго рода).

### 5.11.3. Вычисление поверхностного интеграла второго рода

Пусть  $\vec{F} = R(x, y, z)\vec{k}$ , а поверхность  $S$  имеет уравнение  $z = \varphi(x, y)$ . Рассмотрим

$$\Pi = \iint_S R(x, y, z) \cos\gamma dS.$$

Пусть вектор единичной нормали к поверхности образует с осью  $OZ$  острый угол;  $\cos\gamma = \cos(\vec{n}, \hat{OZ})$ . Как известно,  $\vec{n} = (-\varphi'_x, -\varphi'_y, 1)$ . Поэтому

$$\cos\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 + \varphi'^2_x + \varphi'^2_y}}.$$

Тогда

$$\Pi = \iint_S R(x, y, z) \cos\gamma dS = \iint_{\sigma_{xy}} R(x, y, \varphi(x, y)) \frac{1}{\sqrt{1 + \varphi'^2_x + \varphi'^2_y}} \sqrt{1 + \varphi'^2_x + \varphi'^2_y} dx dy,$$

где  $\sigma_{xy}$  — проекция поверхности  $S$  на плоскость  $XOY$ . Если единичная нормаль образует с осью  $OZ$  тупой угол ( $\cos\gamma < 0$ ), то

$$\iint_S R(x, y, z) \cos\gamma dS = - \iint_{\sigma_{xy}} R(x, y, \varphi(x, y)) dx dy. \quad (4)$$

Аналогичные формулы имеют место для  $\iint_S P(x, y, z) \cos\alpha dS$  и

$\iint_S Q(x, y, z) \cos\beta dS$ , а именно:

$$\iint_S P(x, y, z) \cos\alpha dS = \iint_{\sigma_{yz}} P(\psi(y, z), y, z) dy dz \quad (x = \psi(y, z)), \quad (5)$$

$$\iint_S Q(x, y, z) \cos\beta dS = \iint_{\sigma_{xz}} Q(x, \eta(x, z), z) dx dz \quad (y = \eta(x, z)). \quad (6)$$

Пользуясь соотношениями (4), (5) и (6), поверхностный интеграл второго рода можно записать в виде

$$\begin{aligned} & \iint_S [P(x, y, z) \cos \alpha + Q(x, y, z) \cos \beta + R(x, y, z) \cos \gamma] dS = \\ & = \iint_{\sigma_{yz}} P dy dz + \iint_{\sigma_{xz}} Q dx dz + \iint_{\sigma_{xy}} R dx dy \quad (\cos \alpha, \cos \beta, \cos \gamma > 0). \end{aligned}$$

Поэтому можно сказать, что поверхностный интеграл второго рода — интеграл по координатам.

Заметим, что если единичный вектор нормали меняет направление на противоположное, то знак потока тоже изменяется, так как меняются знаки направляющих косинусов.

**Пример.** Вычислить поток векторной функции  $\vec{F} = x^2 \vec{i} + y^2 \vec{j} + z^2 \vec{k}$  через поверхность одной четверти полусферы  $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$ , лежащую в первом октанте ( $z \geq 0$ ).

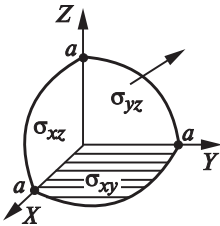


Рис. 5.27

$$\begin{aligned} z &= \sqrt{a^2 - x^2 - y^2}; \\ \Pi &= \iint_S (x^2 \cos \alpha + y^2 \cos \beta + z^2 \cos \gamma) dS = \\ &= \iint_{\sigma_{yz}} (a^2 - y^2 - z^2) dy dz + \iint_{\sigma_{xz}} (a^2 - x^2 - z^2) dx dz = \\ &= \iint_{\sigma_{xy}} (a^2 - x^2 - y^2) dx dy = 3 \iint_{\sigma_{xy}} (a^2 - x^2 - y^2) dx dy = \\ &= 3 \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int_0^a r(a^2 - r^2) dr = \frac{3\pi}{2} \left( \frac{a^2 r^2}{2} - \frac{r^4}{4} \right) \bigg|_0^a = \frac{3\pi a^4}{8}. \end{aligned}$$

#### 6.1. Скалярное поле

Определение и примеры скалярных полей. Производная по направлению. Градиент скалярного поля. Взаимное расположение градиента и поверхности уровня.

##### *6.1.1. Определение и примеры скалярных полей*

Понятие поля лежит в основе представлений современной математики и физики. В физических задачах чаще всего встречаются величины двух типов: скаляры и векторы. В соответствии с этим будем рассматривать два типа полей — скалярные и векторные.

**ОПРЕДЕЛЕНИЕ.** Часть пространства (или все пространство), каждой точке  $P$  которой соответствует определенное значение некоторой скалярной величины  $U$ , называется скалярным полем.

Например, неоднородное тело, каждой точке которого соответствует определенное значение плотности, можно рассматривать как скалярное поле. Другими примерами скалярных полей являются поле распределения температуры в данном теле, поле распределения электрического потенциала и т. д. Во всех случаях будем предполагать, что скалярная величина  $U$  не зависит от времени, а зависит только от положения точки  $P$  в пространстве. Иными словами, величина  $U$  рассматривается как функция точки  $P$ , т. е.  $U = U(P)$ . Эта функция называется функцией поля. Если в некоторой системе координат  $Oxuz$  точка  $P$  имеет координаты  $x$ ,  $y$  и  $z$ , то

$$U = U(P) = U(x, y, z).$$

Обратно, всякая функция трех переменных  $U(x, y, z)$  задает некоторое скалярное поле.

Скалярное поле геометрически изображается с помощью поверхностей уровня.

Поверхностью уровня скалярного поля называется множество всех точек пространства, в которых функция поля имеет одно и то же значение  $C$ . Уравнение поверхности уровня имеет вид

$$U(x, y, z) = C = \text{const.}$$

Придавая  $C$  различные значения, получим семейство поверхностей уровня.

Пусть, например, поле задано функцией  $U = x^2 + y^2 + z^2$ , тогда поверхностями уровня служат сферы  $x^2 + y^2 + z^2 = C$  с центром в начале координат.

Если скалярное поле — поле распределения температуры в некоторой части пространства, то поверхностями уровня этого поля являются так называемые изотермические поверхности, т. е. поверхности, на каждой из которых температура постоянна.

Наряду со скалярными полями в пространстве рассматривают плоские скалярные поля. Плоское скалярное поле определяется как часть плоскости, каждой точке  $P$  которой соответствует определенное значение скалярной величины  $z$ . Функция плоского скалярного поля зависит от двух переменных:  $z = z(x, y)$ .

Плоские скалярные поля изображаются геометрически с помощью линий уровня. Линии уровня — множества точек плоскости, в которых функция плоского поля принимает одно и то же значение:  $z(x, y) = C$ .

Например, для плоского скалярного поля, заданного функцией  $z = x^2 - y^2$ , линиями гиперболы, при  $C = 0$  получим  $x^2 - y^2 = 0$ , или  $(x - y)(x + y) = 0$ . Это значит, что асимптоты гипербол  $x - y = 0$  и  $x + y = 0$  также относятся к числу линий уровня рассматриваемого поля.

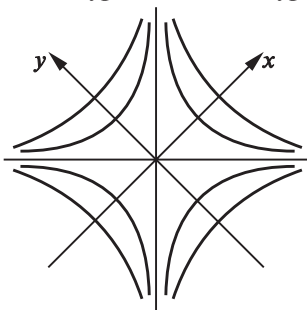


Рис. 6.1

### 6.1.2. Производная по направлению

Пусть  $U = u(x, y, z)$  — дифференцируемая функция скалярного поля,  $P(x, y, z)$  — точка,  $l$  — луч, выходящий из  $P$  в направлении единичного вектора

$$\vec{n} = \cos\alpha \cdot \vec{i} + \cos\beta \cdot \vec{j} + \cos\gamma \cdot \vec{k}.$$

Пусть  $P_1(x + \Delta x, y + \Delta y, z + \Delta z)$  — другая точка этого луча. Приращение функции  $U$  в направлении  $l$

$$\Delta_l U = U(x + \Delta x, y + \Delta y, z + \Delta z) - U(x, y, z).$$

Пусть  $\Delta l = PP_1$ .

Производной функции  $U = U(x, y, z)$  по направлению  $l$  называется предел отношения  $\Delta_l U$  к  $\Delta l$  при условии, что  $\Delta l$  стремится к 0:

$$\frac{\partial U}{\partial l} = \lim_{\Delta l \rightarrow 0} \frac{\Delta_l U}{\Delta l}.$$

Если  $\frac{\partial U}{\partial l} > 0$ , то в этом направлении функция  $U(x, y, z)$  возрастает, если  $\frac{\partial U}{\partial l} < 0$ , то  $U(x, y, z)$  убывает. Таким образом,  $\frac{\partial U}{\partial l}$  — скорость изменения функции  $U(x, y, z)$  в этом направлении.

Выведем формулу для вычисления  $\frac{\partial U}{\partial l}$ .

Заметим, что  $\Delta x = \Delta l \cos \alpha$ ,  $\Delta y = \Delta l \cos \beta$ ,  $\Delta z = \Delta l \cos \gamma$ . Функция  $U(x, y, z)$  дифференцируема, поэтому

$$\Delta_l U = U'_x(x, y, z)\Delta x + U'_y(x, y, z)\Delta y + U'_z(x, y, z)\Delta z + \omega,$$

где

$$\lim_{\rho \rightarrow 0} \frac{\omega}{\rho} = 0, \quad \rho = \sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2 + \Delta z^2}.$$

В нашем случае  $\rho = \Delta l$ , поэтому

$$\begin{aligned} \Delta_l U &= U'_x \Delta l \cos \alpha + U'_y \Delta l \cos \beta + U'_z \Delta l \cos \gamma + \omega, \\ \frac{\partial U}{\partial l} &= \lim_{\Delta l \rightarrow 0} \frac{\Delta_l U}{\Delta l} = \lim_{\Delta l \rightarrow 0} [U'_x \cos \alpha + U'_y \cos \beta + U'_z \cos \gamma] + \lim_{\Delta l \rightarrow 0} \frac{\omega}{\Delta l} \Rightarrow \\ \frac{\partial U}{\partial l} &= U'_x \cos \alpha + U'_y \cos \beta + U'_z \cos \gamma. \end{aligned} \quad (1)$$

Из формулы (1) следует, что если вектор  $\vec{n}$  совпадает с  $\vec{i}$ ,  $\vec{j}$  или  $\vec{k}$ , то производная по направлению  $\vec{n}$  совпадает с соответствующей частной производной этой функции:

$$\vec{n} = \vec{i} \Rightarrow \cos \alpha = 1, \quad \cos \beta = \cos \gamma = 0 \Rightarrow \frac{\partial U}{\partial l} = U'_x(x, y, z).$$

**Пример.** Найти производную функции  $U = x^2 - 2xz + y^2$  в точке  $P_1(1, 2, -1)$  по направлению от  $P_1$  к  $P_2(2, 4, -3)$ .

Если поле плоское, то

$$\frac{\partial U}{\partial l} = U'_x(x, y) \cos \alpha + U'_y(x, y) \cos \beta = U'_x \cos \alpha + U'_y \sin \alpha.$$

### 6.1.3. Градиент скалярного поля

Градиентом в точке  $P(x, y, z)$  скалярного поля, заданного дифференцируемой функцией  $U(x, y, z)$  называется вектор

$$\overline{\text{grad } U} = U'_x \bar{i} + U'_y \bar{j} + U'_z \bar{k}$$

или

$$\overline{\text{grad } U} = \frac{\partial U}{\partial x} \bar{i} + \frac{\partial U}{\partial y} \bar{j} + \frac{\partial U}{\partial z} \bar{k}.$$

**Пример.** Найти градиент функции  $U = x^2 + 2y^2 - z^2 - 5$  в точке  $P_0(2, -1, 1)$ .

Установим связь между градиентом производной по направлению.

**Теорема.**

$$\text{Пр}_{\bar{n}} \overline{\text{grad } U} = \frac{\partial U}{\partial l} \quad \left( \bar{n} = \frac{\bar{l}}{|\bar{l}|} \right).$$

*Доказательство.* Пусть  $U = U(x, y, z)$ . Имеем

$$\text{Пр}_{\bar{n}} \overline{\text{grad } U} = (\bar{n}, \overline{\text{grad } U}),$$

но

$$\overline{\text{grad } U} = U'_x \bar{i} + U'_y \bar{j} + U'_z \bar{k},$$

следовательно,

$$\text{Пр}_{\bar{n}} \overline{\text{grad } U} = U'_x \cos \alpha + U'_y \cos \beta + U'_z \cos \gamma.$$

Так как  $\frac{\partial U}{\partial l}$  выражает скорость изменения скалярного поля в этом направлении, то и  $\text{Пр}_{\bar{n}} \overline{\text{grad } U}$  есть скорость изменения скалярного поля в направлении  $\bar{n}$ . Пусть  $\varphi = (\bar{n}, \overline{\text{grad } U})$ . Тогда

$$\text{Пр}_{\bar{n}} \overline{\text{grad } U} = |\overline{\text{grad } U}| \cdot \cos \varphi \Rightarrow \frac{\partial U}{\partial l} = |\overline{\text{grad } U}| \cdot \cos \varphi.$$

Таким образом, если направления  $\bar{n}$  и  $\overline{\text{grad } U}$  совпадают ( $\varphi = 0$ ), то производная по направлению  $\frac{\partial U}{\partial l}$  имеет наибольшее значение, равное модулю градиента  $|\overline{\text{grad } U}|$ .

$\overline{\text{grad } U}$  — вектор, указывающий направление наибольшего возрастания поля в данной точке и имеющий модуль, равный скорости этого возрастания. Это свойство градиента используется в ряде численных методов решения задач оптимизации.

#### 6.1.4. Градиент функции перпендикулярен к поверхности уровня

Выясним взаимное расположение градиента функции  $U$  в точке  $P_0(x_0, y_0, z_0)$  и поверхности уровня, проходящей через эту точку ( $U(x, y, z) = C_0$ ).

Пусть  $L$  кривая, лежащая на поверхности уровня и проходящая через точку  $P_0$ . Ее уравнения  $x = x(t)$ ,  $y = y(t)$ ,  $z = z(t)$ , где  $x(t)$ ,  $y(t)$ ,  $z(t)$  дифференцируемы и  $x_0 = x(t_0)$ ,  $y_0 = y(t_0)$ ,  $z_0 = z(t_0)$ .

$$L \in \text{поверхности} \Rightarrow$$

$$U[x(t), y(t), z(t)] - C_0 = 0.$$

Продифференцируем обе части последнего равенства по  $t$ :

$$\frac{\partial U}{\partial x} x'(t) + \frac{\partial U}{\partial y} y'(t) + \frac{\partial U}{\partial z} z'(t) = 0.$$

При  $t = t_0$  получим

$$U'_x(x_0, y_0, z_0) x'(t_0) + U'_y(x_0, y_0, z_0) y'(t_0) + U'_z(x_0, y_0, z_0) z'(t_0) = 0.$$

Далее,

$$\bar{r}'(t_0) = x'(t_0)\bar{i} + y'(t_0)\bar{j} + z'(t_0)\bar{k}$$

(вектор, направленный по касательной к кривой  $L$ ), поэтому

$$(\text{grad } U(P_0), \bar{r}'(t_0)) = 0,$$

следовательно,  $\text{grad } U(P_0) \perp \bar{r}'(t_0)$ .

Таким образом, все касательные, проведенные в точке  $P_0$  к линиям, лежащим на поверхности уровня и проходящим через точку  $P_0$ , расположены в одной плоскости, перпендикулярной вектору  $\text{grad } U(P_0)$  (при условии, что  $\text{grad } U(P_0) \neq 0$ ).

## 6.2. Векторное поле

Определение векторного поля. Векторные линии. Формула Остроградского – Гаусса. Дивергенция векторного поля и ее физический смысл.

### 6.2.1. Определение векторного поля

Векторным полем называется область пространства или плоскости, каждой точке  $M$  которой поставлен в соответствие вектор

$$\vec{F} = \vec{F}(M) = P(x, y, z)\vec{i} + Q(x, y, z)\vec{j} + R(x, y, z)\vec{k}.$$

Векторное поле на плоскости задается векторной функцией двух переменных

$$\vec{F} = P(x, y)\vec{i} + Q(x, y)\vec{j}.$$

**Пример.** Пусть в начале координат помещена масса  $m$ . Она создает поле сил тяготения, т. е. в каждой точке пространства на помещенную в ней единичную массу, согласно закону Ньютона, действует сила, равная  $\frac{km}{|\vec{r}|^2}$ , направленная к началу координат. (Здесь  $k = \text{const}$ ,  $\vec{r}$  — радиус-вектор точки  $M$ :  $\vec{r} = \overrightarrow{OM}$ .) Таким образом,

$$\vec{F} = -\frac{km}{|\vec{r}|^2}\vec{r}^0, \quad \vec{r}^0 = \frac{\vec{r}}{|\vec{r}|}.$$

### 6.2.2. Векторные линии

Векторными линиями называются линии, касательные к которым в каждой точке совпадают с направлением вектора  $\vec{F}$  в данной точке. Векторные линии находятся из системы уравнений

$$\frac{dx}{P(x, y, z)} = \frac{dy}{Q(x, y, z)} = \frac{dz}{R(x, y, z)}.$$

Так, для векторного поля скоростей движущейся жидкости векторными линиями являются траектории, по которым движутся частицы жидкости и называется линиями тока. Для электростатического поля векторные линии — силовые линии.

**Пример.** Найти векторные линии поля

$$\vec{F} = -\omega y\vec{i} + \omega x\vec{j},$$

где  $\omega = \text{const}$ .



Решение.

$$\begin{aligned}\frac{dx}{-\omega y} &= \frac{dy}{\omega x}; & \omega x dx &= -\omega y dy; \Rightarrow \\ \frac{x^2}{2} &= -\frac{y^2}{2} + C \Rightarrow\end{aligned}$$

векторные линии — окружности с уравнениями  $x^2 + y^2 = 2C$ .

### 6.2.3. Формула Остроградского — Гаусса

Пусть

$$\vec{F} = P(x, y, z)\vec{i} + Q(x, y, z)\vec{j} + R(x, y, z)\vec{k},$$

$S$  — поверхность, в каждой точке которой определен единичный вектор нормали  $\vec{n} = \cos\alpha \cdot \vec{i} + \cos\beta \cdot \vec{j} + \cos\gamma \cdot \vec{k}$ , направляющие косинусы которого являются непрерывными функциями координат точки поверхности. Поток векторного поля через поверхность  $S$  называется интеграл

$$\iint_S (\vec{F}, \vec{n}) dS = \iint_S (P \cos\alpha + Q \cos\beta + R \cos\gamma) dS.$$

**Теорема.** Если функции  $P(x, y, z)$ ,  $Q(x, y, z)$ ,  $R(x, y, z)$  непрерывны вместе со своими частными производными первого порядка в ограниченной замкнутой области, имеющей объем  $V$ , то имеет место формула

$$\iint_S [P \cos\alpha + Q \cos\beta + R \cos\gamma] dS = \iiint_V \left( \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z} \right) dV, \quad (1)$$

где  $S$  — граница области, причем поток берется по внешней стороне этой поверхности.

Формула (1) — формула Остроградского — Гаусса.

### 6.2.4. Дивергенция векторного поля и ее физический смысл

Пусть

$$\varphi(x, y, z) = \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z}.$$

Данная функция называется дивергенцией векторного поля  $\vec{F}$  и обозначается символом  $\operatorname{div} \vec{F}$ . Для выяснения физического смысла дивергенции векторного поля сделаем следующие выкладки.

Выделим в векторном поле  $\vec{F}$  некоторый объем  $V$ , ограниченный гладкой поверхностью  $S$ . Запишем теперь выражение для потока вектора  $\vec{F}$  через всю замкнутую поверхность  $S$  и по формуле Остроградского — Гаусса от поверхностного интеграла перейдем к интегралу по объему  $V$ :

$$\iint_S (\vec{F}, \vec{n}) dS = \iiint_V \varphi(x, y, z) dV.$$

По теореме о среднем значении для тройного интеграла

$$\iiint_V \varphi(x, y, z) dV = \varphi(M_0)V,$$

где  $M_0(x_0, y_0, z_0) \in V$ . Поэтому поток  $\Phi$  вектора  $\vec{F}$  сквозь поверхность  $S$

$$\Phi = \iint_S (\vec{F}, \vec{n}) dS = \varphi(M_0)V$$

и

$$\varphi(M_0) = \frac{\iint_S (\vec{F}, \vec{n}) dS}{V}.$$

Пусть объем  $V$  стягивается в точку, тогда  $M_0 \rightarrow M$  и

$$\lim_{V \rightarrow 0} \varphi(M_0) = \lim_{V \rightarrow 0} \frac{\iint_S (\vec{F}, \vec{n}) dS}{V}.$$

В силу непрерывности частных производных  $\frac{\partial P}{\partial x}$ ,  $\frac{\partial Q}{\partial y}$ ,  $\frac{\partial R}{\partial z}$  имеем

$$\lim_{V \rightarrow 0} \varphi(M_0) = \varphi(M) = \varphi(x, y, z) = \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z}.$$

Таким образом,

$$\varphi(x, y, z) = \lim_{V \rightarrow 0} \frac{\iint_S (\vec{F}, \vec{n}) dS}{V}.$$

**ОПРЕДЕЛЕНИЕ.** Дивергенцией векторного поля  $\vec{F}$  в точке  $M(x, y, z)$  называется предел отношения потока  $\Phi$  вектора  $\vec{F}$  через поверхность, окружающую точку  $M$ , к объему  $V$ , ограниченному этой поверхностью, при условии, что объем стягивается в точку:

$$\operatorname{div} \bar{F} = \lim_{V \rightarrow 0} \frac{\iint_S (\bar{F}, \bar{n}) dS}{V}.$$

Формулу Остроградского – Гаусса можно записать в виде

$$\iint_S (\bar{F}, \bar{n}) dS = \iiint_V \operatorname{div} \bar{F} dV.$$

Пусть векторное поле — поле скоростей  $\bar{v}$  движущейся жидкости с плотностью  $\rho = 1$ .  $W$  — область, ограниченная замкнутой поверхностью  $S$ . Тогда

$$\iint_S (\bar{v}, \bar{n}) dS = \iiint_W \operatorname{div} \bar{v} dW.$$

$\iint_S (\bar{v}, \bar{n}) dS$  — количество жидкости, протекающей через  $S$  в единицу времени, точнее, алгебраическая сумма количеств вытекающей и втекающей через  $S$  жидкости (поток берется по внешней стороне поверхности, поэтому если вектор скорости  $\bar{v}$  направлен наружу, то  $(\bar{v}, \bar{n}) > 0$ , если — внутрь, то  $(\bar{v}, \bar{n}) < 0$ ).

Если

$$\iint_S (\bar{v}, \bar{n}) dS > 0,$$

то из объема  $W$  вытекает жидкости больше, чем втекает. Если же

$$\iint_S (\bar{v}, \bar{n}) dS < 0,$$

то больше жидкости втекает.

Предположим, что в некоторой точке  $M$   $\operatorname{div} \bar{v} > 0$ . В силу непрерывности частных производных  $\operatorname{div} \bar{v} > 0$  и в достаточно малой окрестности  $W$ , ограниченной сферой  $S$  с центром в точке  $M$ . Но тогда

$$\iiint_W \operatorname{div} \bar{v} dW > 0$$

и, следовательно,

$$\iint_S (\bar{v}, \bar{n}) dS > 0.$$

Поэтому из  $W$  через поверхность  $S$  жидкости вытекает больше, чем втекает. В этом случае точку  $M$  называют источником. Если  $\operatorname{div} \bar{v} < 0$ ,

то точка  $M$  — сток. Если  $\operatorname{div} \vec{v} = 0$ , то поток равен 0, следовательно, количества втекающей и вытекающей жидкости равны.

**Пример.** Для векторного поля  $\vec{F} = \vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$  вычислить его поток через произвольную замкнутую поверхность  $S$ .

*Решение.*

$$\iint_S (\vec{F}, \vec{n}) dS = \iiint_V \operatorname{div} \vec{F} dV = \iiint_V \left( \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z} \right) dV = 3V.$$

### 6.3. Формула Стокса. Ротор и циркуляция векторного поля. Оператор Гамильтона

Формула Стокса. Условия независимости криволинейного интеграла от пути интегрирования. Ротор и циркуляция векторного поля. Векторная запись формулы Стокса. Оператор Гамильтона и его применение.

#### 6.3.1. Формула Стокса. Условия независимости криволинейного интеграла от пути интегрирования

Формула Стокса является обобщением формулы Остроградского — Грина и позволяет свести вычисление криволинейного интеграла по замкнутому контуру  $L$  к вычислению потока через поверхность, ограниченную этим контуром.

**Теорема.** Пусть функции  $P(x, y, z)$ ,  $Q(x, y, z)$ ,  $R(x, y, z)$  непрерывны вместе со своими частными производными первого порядка на поверхности  $S$ , ограниченной замкнутым контуром  $L$ .

Тогда

$$\oint_L P dx + Q dy + R dz = \iint_S \left[ \left( \frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z} \right) \cos \alpha + \left( \frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x} \right) \cos \beta + \left( \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) \cos \gamma \right] dS. \quad (1)$$

Если при этом сторона поверхности выбрана (т. е. выбрано направление единичного вектора нормали), то направление обхода контура  $L$  выбирается так, чтобы поверхность оставалась слева.

Доказательство этой теоремы мы опускаем.

З а м е ч а н и е. Если поверхность  $S$  — часть плоскости, параллельной плоскости  $XOY$ , то  $dz=0$ , и мы получим формулу Грина:

$$\oint_L Pdx + Qdy = \iint_S \left( \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx dy.$$

Из формулы (1) следует, что если

$$\frac{\partial R}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial z}, \quad \frac{\partial P}{\partial z} = \frac{\partial R}{\partial x}, \quad \frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial P}{\partial y}, \quad (2)$$

то криволинейный интеграл по любой пространственной замкнутой кривой равен 0, т. е.

$$\oint_L Pdx + Qdy + Rdz = 0. \quad (3)$$

Таким образом, условия (2) являются достаточными для того, чтобы криволинейный интеграл (3) не зависел от пути интегрирования.

Как и в случае плоской кривой, можно показать, что условия (2) являются не только достаточными, но и необходимыми условиями независимости криволинейного интеграла (3) от пути интегрирования. При выполнении этих условий подынтегральное выражение есть полный дифференциал некоторой функции  $U(x, y, z)$ :

$$dU(x, y, z) = Pdx + Qdy + Rdz$$

и, следовательно, для любых двух точек  $M$  и  $N$  имеем

$$\int_{(M)}^{(N)} dU = U(N) - U(M).$$

### 6.3.2. Ротор и циркуляция векторного поля. Векторная запись формулы Стокса

Пусть дано векторное поле

$$\vec{F} = P(x, y, z)\vec{i} + Q(x, y, z)\vec{j} + R(x, y, z)\vec{k}.$$

Вектор

$$\left( \frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z} \right) \vec{i} + \left( \frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x} \right) \vec{j} + \left( \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) \vec{k} \quad (4)$$

называется ротором (или вихрем) векторного поля и обозначается  $\text{rot } \vec{F}$ . Для того чтобы запомнить выражение (4), введем определитель

$$\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ P & Q & R \end{vmatrix}.$$

Тогда

$$\text{rot } \vec{F} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ P & Q & R \end{vmatrix}.$$

Можно показать, что  $\text{rot } \vec{F}$  не зависит от системы координат, а определяется исходным векторным полем. Полю вектора  $\vec{F}$  соответствует новое векторное поле — поле его вихрей.

**Пример.** Пусть дано поле скоростей абсолютно твердого тела, вращающегося с постоянной угловой скоростью  $\omega$ . Если тело вращается вокруг оси  $OZ$ , то  $\vec{v} = -\omega y \vec{i} + \omega x \vec{j}$ .

Найдем  $\text{rot } \vec{v}$ . В данном случае  $P = -\omega y$ ,  $Q = \omega x$ ,  $R = 0$ , поэтому

$$\text{rot } \vec{v} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ -\omega y & \omega x & 0 \end{vmatrix} = \vec{k}(\omega + \omega) = 2\vec{k}\omega.$$

Итак,  $\text{rot } \vec{v} = 2\omega \vec{k}$ . Модуль вектора  $= 2\omega$ , следовательно, равен удвоенной угловой скорости, с которой тело вращается вокруг оси  $OZ$ . Отсюда происхождение названия «ротор», т. е. «вращение».

Возвратимся к формуле Стокса. Заметим, что

$$\iint_S \left[ \left( \frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z} \right) \cos \alpha + \left( \frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x} \right) \cos \beta + \left( \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) \cos \gamma \right] dS = \iint_S (\text{rot } \vec{F}, \vec{r}) dS.$$

Интеграл  $\oint Pdx + Qdy + Rdz$  называется циркуляцией векторного поля  $\vec{F}$  по замкнутому контуру  $L$  и обозначается  $\oint_L (\vec{F}, d\vec{r})$ , где  $d\vec{r} = dx \cdot \vec{i} + dy \cdot \vec{j} + dz \cdot \vec{k}$ .

Формула Стокса в векторной форме может быть записана так:

$$\oint_L (\vec{F}, d\vec{r}) = \iint_S (\text{rot } \vec{F}, \vec{n}) dS. \quad (5)$$

Соотношение (5) означает, что циркуляция вектора  $\vec{F}$  по замкнутому контуру  $L$  равна потоку ротора вектора  $\vec{F}$  через поверхность  $S$ , ограниченную контуром  $L$ .

**Пример.** Вычислить циркуляцию вектора  $\vec{F} = x^2 y \vec{i} + \vec{j} + z \cdot \vec{k}$  вдоль контура  $x^2 + y^2 = R^2$ ,  $z = 0$ , приняв в качестве поверхности полусферу  $z = \sqrt{R^2 - x^2 - y^2}$ .

*Решение.*

$$\text{rot } \vec{F} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ x^2 y & 1 & z \end{vmatrix} = -x^2 \vec{k}.$$

$$\begin{aligned} \oint_L (\vec{F}, d\vec{r}) &= \iint_S (\text{rot } \vec{F}, \vec{n}) dS = - \iint_S x^2 \cos \gamma dS = - \iint_{\sigma_{xy}} x^2 dx dy = \\ &= - \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^R r^2 \cos^2 \varphi \cdot r dr = - \frac{R^4}{4} \int_0^{2\pi} \frac{1 + \cos 2\varphi}{2} d\varphi = - \frac{\pi R^4}{4}. \end{aligned}$$

### 6.3.3. Оператор Гамильтона и его применение

Мы рассмотрели основные дифференциальные величины векторного анализа: градиент, дивергенцию и ротор. Эти величины могут быть записаны короче, если ввести символ, называемый оператором Гамильтона, или оператором  $\nabla$  («набла»).

$$\nabla = \frac{\partial}{\partial x} \vec{i} + \frac{\partial}{\partial y} \vec{j} + \frac{\partial}{\partial z} \vec{k}.$$

Будем рассматривать этот оператор условно как вектор. Установим правила действия с ним.

1. Пусть  $U(x, y, z)$  — скалярная функция. Под произведением вектора  $\nabla$  на  $U$  условимся понимать следующий вектор:

$$\nabla U = \left( \frac{\partial}{\partial x} \bar{i} + \frac{\partial}{\partial y} \bar{j} + \frac{\partial}{\partial z} \bar{k} \right) U = \frac{\partial U}{\partial x} \bar{i} + \frac{\partial U}{\partial y} \bar{j} + \frac{\partial U}{\partial z} \bar{k}.$$

Но  $\frac{\partial U}{\partial x} \bar{i} + \frac{\partial U}{\partial y} \bar{j} + \frac{\partial U}{\partial z} \bar{k} = \text{grad } U$ , следовательно,  $\nabla U = \text{grad } U$ .

2. Под скалярным произведением вектора  $\nabla$  на вектор-функцию  $\bar{F} = P\bar{i} + Q\bar{j} + R\bar{k}$  условимся понимать следующую величину:

$$(\nabla, \bar{F}) = \left( \frac{\partial}{\partial x} \bar{i} + \frac{\partial}{\partial y} \bar{j} + \frac{\partial}{\partial z} \bar{k}, P\bar{i} + Q\bar{j} + R\bar{k} \right) = \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z}.$$

Но  $\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z} = \text{div } \bar{F}$ , следовательно,  $(\nabla, \bar{F}) = \text{div } \bar{F}$ .

3. Рассмотрим, наконец, векторное произведение вектора  $\nabla$  на вектор-функцию  $\bar{F} = P\bar{i} + Q\bar{j} + R\bar{k}$ :

$$\nabla \times \bar{F} = \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ P & Q & R \end{vmatrix} = \text{rot } \bar{F}.$$

Итак, операции с вектором  $\nabla$  производятся по правилам векторной алгебры. При этом следует учесть, что произведения  $\frac{\partial}{\partial x}$ ,  $\frac{\partial}{\partial y}$ ,  $\frac{\partial}{\partial z}$  на скалярные функции заменяются частными производными этих функций по  $x$ ,  $y$ ,  $z$  соответственно.



### 6.4. Потенциальное и соленоидальное поля. Уравнение Лапласа

Потенциальное поле. Отыскание потенциала. Соленоидальное поле. Уравнение Лапласа.

#### 6.4.1. Потенциальное поле. Отыскание потенциала

Векторное поле  $\vec{F} = P(x, y, z)\vec{i} + Q(x, y, z)\vec{j} + R(x, y, z)\vec{k}$  называется безвихревым, если во всех его точках  $\text{rot } \vec{F} = 0$ .

Из условия  $\text{rot } \vec{F} = 0$  получаем

$$\frac{\partial R}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial z}, \quad \frac{\partial P}{\partial z} = \frac{\partial R}{\partial x}, \quad \frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial P}{\partial y}.$$

Но в этом случае, как было показано ранее,

$$\oint_L Pdx + Qdy + Rdz = 0$$

и поэтому

$$\int_{(M)}^{(N)} Pdx + Qdy + Rdz = \int_{(M)}^{(N)} dU = U(N) - U(M).$$

С другой стороны

$$dU = \frac{\partial U}{\partial x}dx + \frac{\partial U}{\partial y}dy + \frac{\partial U}{\partial z}dz \Rightarrow \frac{\partial U}{\partial x} = P, \quad \frac{\partial U}{\partial y} = Q, \quad \frac{\partial U}{\partial z} = R.$$

Учитывая, что

$$\text{grad } U = \frac{\partial U}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial U}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial U}{\partial z}\vec{k},$$

получим

$$\text{grad } U = P\vec{i} + Q\vec{j} + R\vec{k} = \vec{F}.$$

Таким образом, безвихревое поле является градиентом некоторой функции  $U$ . Функция  $U$ , градиент которой равен  $\vec{F}$ , называется потенциальной функцией (потенциалом) поля  $\vec{F}$ . Поле, имеющее потенциал, называется потенциальным.

Таким образом, каждое безвихревое поле имеет потенциал, т. е. является потенциальным.

Верно и обратное: всякое потенциальное поле является безвихревым. Действительно, пусть

$$\vec{F} = \frac{\partial U}{\partial x} \vec{i} + \frac{\partial U}{\partial y} \vec{j} + \frac{\partial U}{\partial z} \vec{k}.$$

$$\text{rot } F = \text{rot grad } U = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ \frac{\partial U}{\partial x} & \frac{\partial U}{\partial y} & \frac{\partial U}{\partial z} \end{vmatrix} =$$

$$\vec{i} \left( \frac{\partial^2 U}{\partial z \partial y} - \frac{\partial^2 U}{\partial y \partial z} \right) - \vec{j} \left( \frac{\partial^2 U}{\partial z \partial x} - \frac{\partial^2 U}{\partial x \partial z} \right) + \vec{k} \left( \frac{\partial^2 U}{\partial y \partial x} - \frac{\partial^2 U}{\partial x \partial y} \right) = 0.$$

Пусть  $\vec{F} = P\vec{i} + Q\vec{j} + R\vec{k}$  есть потенциальное силовое поле. Работа сил поля по перемещению единичной массы есть

$$A = \int_L Pdx + Qdy + Rdz.$$

Поскольку поле потенциально, т. е.  $Pdx + Qdy + Rdz = dU$ , то этот интеграл не зависит от пути интегрирования, при этом потенциал (при выборе пути интегрирования специальным образом), может быть найден по формуле

$$\begin{aligned} U(x, y, z) &= \int_{(x_0, y_0, z_0)}^{(x, y, z)} Pdx + Qdy + Rdz = \\ &= \int_{x_0}^x P(x, y_0, z_0) dx + \int_{y_0}^y Q(x, y, z_0) dy + \int_{z_0}^z 2(x, y, z) dz. \end{aligned}$$

Тогда работа по перемещению единичной массы из точки  $M_1(x_1, y_1, z_1)$  в точку  $M_2(x_2, y_2, z_2)$  есть

$$A = \int_{(x_1, y_1, z_1)}^{(x_2, y_2, z_2)} Pdx + Qdy + Rdz = U(x_2, y_2, z_2) - U(x_1, y_1, z_1).$$

Для плоского поля

$$A = \int_{(x_1, y_1)}^{(x_2, y_2)} P dx + Q dy = U(x_2, y_2) - U(x_1, y_1).$$

**Пример.** Рассмотрим материальную точку массы  $m$ , на которую действует сила тяжести, равная  $mg$ . Пусть точка перемещается в вертикальной плоскости:  $\vec{F} = mg\vec{j}$ .

$$P = 0, \quad Q = mg, \quad R = 0.$$

$$\text{rot } \vec{F} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ 0 & mg & 0 \end{vmatrix} = \vec{i} \cdot 0 - \vec{j} \cdot 0 + \vec{k} \cdot 0 = 0.$$

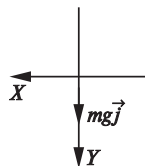


Рис. 6.2

Таким образом, поле сил тяжести потенциально. Найдем его потенциал  $U(x, y)$ :

$$dU = 0 \cdot dx + mg \cdot dy + 0 \cdot dz \Rightarrow$$

$$U(x, y) = \int_{(0,0)}^{(x,y)} mg dy = mgy.$$

#### 6.4.2. Соленоидальное поле

Пусть задано векторное поле  $\vec{F} = P\vec{i} + Q\vec{j} + R\vec{k}$ . Линию, в каждой точке которой вектор поля является касательным, называют векторной линией.

Пусть в данном векторном поле дана замкнутая кривая  $L$ , через каждую точку которой проходит векторная линия. Множество всех векторных линий, проходящих через кривую  $L$ , образует поверхность, называемую векторной трубкой.

Пусть в любой точке поля  $\text{div } \vec{F} = 0$ . Рассмотрим область  $V$ , ограниченную частью  $S$

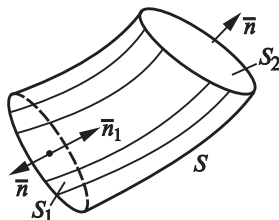


Рис. 6.3

векторной трубки и сечениями  $S_1$  и  $S_2$ . По формуле Остроградского – Гаусса

$$\iiint_V \operatorname{div} \vec{F} dV = \iint_S (\vec{F}, \vec{n}) dS + \iint_{S_1} (\vec{F}, \vec{n}) dS + \iint_{S_2} (\vec{F}, \vec{n}) dS,$$

где вектор нормали  $\vec{n}$  во всех случаях направлен наружу. Поскольку  $\operatorname{div} \vec{F} = 0$ , то

$$\iiint_V \operatorname{div} \vec{F} dV = 0 \Rightarrow \iint_S (\vec{F}, \vec{n}) dS + \iint_{S_1} (\vec{F}, \vec{n}) dS + \iint_{S_2} (\vec{F}, \vec{n}) dS = 0.$$

Заметим, что поскольку векторная трубка состоит из векторных линий, то вектор  $\vec{F}$  лежит в плоскости, касательной к  $S$  и, следовательно  $(\vec{F}, \vec{n}) = 0$ . Тогда  $\iint_S (\vec{F}, \vec{n}) dS = 0$ . Поэтому

$$\iint_{S_1} (\vec{F}, \vec{n}) dS + \iint_{S_2} (\vec{F}, \vec{n}) dS = 0,$$

или

$$-\iint_{S_1} (\vec{F}, \vec{n}) dS = \iint_{S_2} (\vec{F}, \vec{n}) dS,$$

или

$$\iint_{S_1} (\vec{F}, \vec{n}_1) dS = \iint_{S_2} (\vec{F}, \vec{n}) dS,$$

где  $\vec{n}_1 = -\vec{n}$ .

Таким образом, если векторное поле таково, что во всех его точках  $\operatorname{div} \vec{F} = 0$ , то поток вектора через любое сечение векторной трубки имеет одно и то же значение.

Если векторное поле — поле скоростей жидкости, и  $\operatorname{div} \vec{v} = 0$  (т. е. отсутствуют источники и стоки), то количество жидкости, протекающее через любое поперечное сечение векторной трубки, имеет одно и то же значение.

Векторное поле, в любой точке которого  $\operatorname{div} \vec{F} = 0$ , называется *соленоидальным* или *трубчатым*.

Пример. Найдём  $\operatorname{div}(\operatorname{rot} \bar{F})$ .

Пользуясь оператором Гамильтона, получим

$$\operatorname{div}(\operatorname{rot} \bar{F}) = \nabla \cdot (\nabla \times \bar{F}) = (\nabla \times \nabla) \cdot \bar{F} = 0.$$

Таким образом, поле вихрей всегда соленоидально (свободно от источников).

### 6.4.3. Уравнение Лапласа

Пусть задано потенциальное поле  $\bar{F}$ . Как было показано выше, такое поле всегда является полем градиента некоторой функции

$$\bar{F} = \operatorname{grad} U = \frac{\partial U}{\partial x} \bar{i} + \frac{\partial U}{\partial y} \bar{j} + \frac{\partial U}{\partial z} \bar{k}.$$

Потребуем, чтобы это поле было также и соленоидальным. Тогда

$$\operatorname{div} \operatorname{grad} U = \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial U}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{\partial U}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left( \frac{\partial U}{\partial z} \right) = \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial z^2} = 0. \quad (1)$$

Оператор  $\Delta$ , определяемый следующим образом:

$$\Delta U = \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial z^2},$$

называется *оператором Лапласа*. Используя этот оператор, уравнение (1) можем переписать в виде

$$\Delta U = 0. \quad (2)$$

Уравнение (2) — уравнение Лапласа. Функция  $U$ , являющаяся решением уравнения Лапласа, называется *гармонической функцией*.

## ОБЫКНОВЕННЫЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ

---

### 7.1. Задачи, приводящие к дифференциальным уравнениям.

#### Дифференциальные уравнения первого порядка

Задачи, приводящие к дифференциальным уравнениям. Дифференциальные уравнения первого порядка. Задача Коши. Теорема Коши. Общее решение. Особые решения.

Теория дифференциальных уравнений является частью математического анализа. Она дает мощный аппарат для исследования многообразных процессов, протекающих в природе и в технике. Дифференциальные уравнения моделируют процессы в различных объектах и устройствах, поведение которых определяется такими характеристиками переменных состояния, как скорость, ускорение, температура, давление, напряжение, радиация и т. д. Поэтому с решением дифференциальных уравнений неизбежно связаны практически все исследования по проектированию и разработке новой техники, технологических процессов, стратегических военных операций, экономических проектов, химических процессов и многие другие.

#### 7.1.1. Задачи, приводящие к дифференциальным уравнениям

При решении многих задач механики, физики, техники зачастую сразу не удастся установить связь между искомой и заданной переменными величинами. Однако бывает возможно установить зависимость между заданной переменной, искомой функцией и ее производными. При этом приходим к дифференциальным уравнениям.

**Пример.** Тело брошено на Землю вертикально вниз с начальной скоростью  $v_0$ . Определить скорость тела в момент времени  $t = t_1$ , если сопротивление движению пропорционально скорости (коэффициент пропорциональности  $k$ ).

По закону Ньютона  $F = ma$ ;  $v = v(t)$  — скорость,  $a = \frac{dv}{dt}$  — ускорение. В силу  $F$  входит сила притяжения Земли и сила сопротивления воздуха.

Тогда

$$m \frac{dv}{dt} = mg - kv^n. \quad (1)$$

Это дифференциальное уравнение 1-го порядка, т. к. в него входит первая производная.

Решение данного уравнения позволяет установить, что через некоторое время переменная скорость падения стабилизируется и становится почти постоянной, равной  $(mg/k)^{1/n}$ . Совершенно очевидно, что подобная задача возникает при проектировании парашютов, но не только парашютов. Аналогичное уравнение может описывать и процесс погружения в воду, и другие жидкости.

**Пример.** Шарик с отверстием нанизан на стержне и соединен с двумя пружинами. При малых отклонениях  $u$  от положения равновесия закон движения груза описывается уравнением

$$u'' = -\alpha^2 u.$$

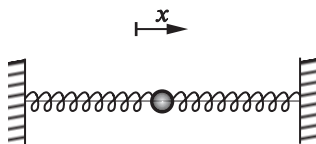


Рис. 7.1

Вновь пришли к дифференциальному уравнению. Это уравнение 2-го порядка, так как оно связывает перемещение  $u$  и его вторую производную по времени.

Решение уравнения свободных колебаний шарика позволяет определить основные характеристики колебательного процесса: частоту и период колебаний. Подобные задачи возникают при разработке многих изделий современной техники, поскольку частота собственных (свободных) колебаний упругих элементов многих конструкций включается в технический паспорт конструкции.

**ОПРЕДЕЛЕНИЕ.** Дифференциальным уравнением  $n$ -го порядка называется уравнение вида

$$F(x, y, y', \dots, y^{(n)}) = 0,$$

связывающее переменную  $x$ , искомую функцию  $y$  и ее производные до порядка  $n$  включительно.

### 7.1.2. Дифференциальные уравнения первого порядка

Дифференциальное уравнение первого порядка имеет вид

$$F(x, y, y') = 0. \quad (2)$$

Оно связывает независимую переменную  $x$ , искомую функцию  $y$  и ее производную  $y'$ .

Если за уравнения (2) можно выразить  $y'$ , то получим уравнение

$$y' = f(x, y), \quad (3)$$

которое называется уравнением, разрешенным относительно производной. Предположим, что правая часть уравнения (3)  $f(x, y)$  определена на некотором множестве  $A$  вещественной плоскости  $(x, y)$ .

**ОПРЕДЕЛЕНИЕ.** Функция  $y = y(x)$ , определенная на интервале  $(a, b)$ , называется решением уравнения (3) в этом интервале, если:

- 1)  $\exists$  производная  $y'(x) \quad \forall x \in (a, b)$ ;
- 2) функция  $y = y(x)$  обращает уравнение (3) в тождество, т. е.

$$y'(x) \equiv f(x, y(x)).$$

Это означает, что  $\forall x \in (a, b)$  точка  $(x, y(x)) \in A$ .

Из определения следует, что решение является непрерывной на всей области определения функцией.

Процесс нахождения решения называется интегрированием дифференциального уравнения. График функции  $y = y(x)$  в декартовой системе координат называется *интегральной кривой*.

Выясним геометрический смысл интегральной кривой.

Пусть точка  $M(x, y)$  лежит на интегральной кривой. Так как  $y'(x)$  есть тангенс угла наклона касательной к кривой, то в точке  $M(x, y)$   $y'(x) = f(x, y) = \operatorname{tg} \alpha$ . Таким образом, интегральная кривая проходит так,

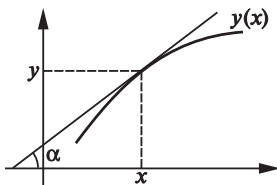


Рис. 7.2

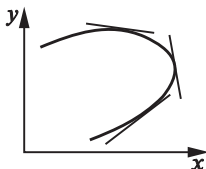


Рис. 7.3

что  $\operatorname{tg}$  угла наклона касательной к этой кривой в каждой точке ее с координатами  $(x, y)$  есть  $f(x, y)$ . Пусть задано дифференциальное уравнение (3), где  $f(x, y)$  определена в области  $A$  на плоскости  $(x, y)$ . В каждой точке  $M(x, y)$  этой области проведем отрезок, составляющий с осью  $x$  такой угол  $\alpha$ , что  $\operatorname{tg} \alpha = f(x, y)$ . Тогда говорят, что в области  $A$  построено *поле направлений*. Проинтегрировать дифференциальное уравнение — это значит геометрически построить интегральную кривую так, чтобы направление касательной в каждой ее точке совпадало с направлением отрезка поля в этой точке.

Кривая, в каждой точке которой наклон поля, определяемого дифференциальным уравнением 3, один и тот же, называется *изоклиной* этого уравнения. Уравнение изоклины имеет вид  $f(x, y) = k = \operatorname{const}$ .



**Пример.** Рассмотрим уравнение  $y' = 2x$ . Его изоклины определяются уравнением  $2x = k$ . В частности, во всех точках прямой  $x = \frac{1}{2}$  наклон поля равен 1, так как касательные ко всем интегральным кривым, пересекающим эту прямую, образуют угол  $\frac{\pi}{4}$  с положительным направлением оси  $OX$ .

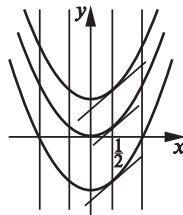


Рис. 7.4

Используя достаточно большое количество изоклин, можно получить отчетливое представление об интегральных кривых уравнения.

### 7.1.3. Задача Коши. Теорема Коши

Уравнение  $y' = 2x$  можно проинтегрировать непосредственно:

$$y = x^2 + C.$$

Таким образом, уравнение первого порядка может иметь множество решений. Для того, чтобы из множества решений выделить одно, т. е. из семейства интегральных кривых выделить одну кривую, нужно указать точку  $M_0$ , через которую эта кривая проходит. Иными словами, нужно задать значение  $y_0$ , которое принимает решение  $y = y(x)$  при  $x = x_0$ :

$$y(x_0) = y_0. \quad (4)$$

Задача отыскания решения  $y(x)$  уравнения (3), удовлетворяющего условию (4), называется *задачей Коши*. Условие (4) — начальное условие.

Однако решение задачи (3)–(4) может существовать не всегда или может быть не единственным.

**Теорема Коши** (теорема существования и единственности решения). Если правая часть  $f(x, y)$  уравнения  $y' = f(x, y)$  и  $f'_y(x, y)$  непрерывны в некоторой области  $A$  переменных  $x, y$ , то какова бы ни была внутренняя точка  $M_0(x_0, y_0) \in A$ , существует единственное решение  $y = y(x)$  уравнения, удовлетворяющее условию  $y(x_0) = y_0$ .

Как это следует из теоремы Коши, через каждую точку  $M_0(x_0, y_0) \in A$  при выполнении условий этой теоремы проходит единственная интегральная кривая уравнения. Таким образом, уравнение имеет множество решений. В рассмотренном выше примере уравнение  $y' = 2x$  имело решение  $y = x^2 + C$  для  $\forall C$ . Чтобы из этого множества интегральных кривых выделить одну, проходящую через точку  $M_0(x_0, y_0)$ , нужно задать конкретное значение  $C = C_0 = y_0 - x_0^2$ . Здесь  $y = x^2 + C$  — общее решение,  $y = x^2 + y_0 - x_0^2$  — частное решение.

### 7.1.4. Общее решение

Дадим точные определения общего и частного решений уравнения  $y' = f(x, y)$ , правая часть которого удовлетворяет условиям теоремы Коши.

**ОПРЕДЕЛЕНИЕ.** Функция  $y = \varphi(x, C)$ , зависящая от аргумента  $x$  и произвольной постоянной  $C$ , называется общим решением уравнения в области  $A$ , если она удовлетворяет следующим условиям:

1) при любых значениях произвольной постоянной  $C$   $y = \varphi(x, C)$  является решением уравнения;

2) для  $\forall$  точки  $M_0(x_0, y_0) \in A$  существует единственное значение постоянной  $C = C_0$  такое, что

$$\varphi(x_0, C_0) = y_0.$$

Всякое решение, получающееся из общего решения при конкретном значении постоянной  $C = C_0$ , называется *частным решением*.

*З а м е ч а н и е.* Если общее решение удастся найти в виде, не разрешенном относительно  $y$ , т. е. в виде

$$\Phi(x, y, C) = 0,$$

то оно называется *общим интегралом*.

### 7.1.5. Особые решения

Точки, в которых нарушаются условия теоремы Коши, называются особыми точками. Через них может не проходить ни одна интегральная кривая и в них может нарушаться единственность решения. Если линия  $y = \varphi(x)$  состоит только из особых точек и является интегральной кривой, то это *особое решение*.

Чтобы найти особое решение уравнения  $y' = f(x, y)$ , нужно найти линию, в каждой точке которой нарушается условие теоремы Коши, и проверить, будет ли функция  $y = \varphi(x)$  решением.

**П р и м е р.** Рассмотрим уравнение  $y' = \sqrt[3]{y^2}$ .

Функция  $f(x, y) = \sqrt[3]{y^2}$  непрерывна, а  $f_y(x, y) = \frac{2}{3}y^{-1/3} = \frac{2}{3\sqrt[3]{y}}$  имеет

разрыв при  $y = 0$ . Но  $y = 0$  — решение уравнения, следовательно, это особое решение.

*Особое решение не может быть получено из общего ни при каком конкретном значении  $C$ .*

## 7.2. Методы интегрирования некоторых дифференциальных уравнений первого порядка

Уравнения с разделяющимися переменными. Однородные уравнения.  
Линейные уравнения.

### 7.2.1. Уравнения с разделяющимися переменными

Уравнением с разделяющимися переменными называется уравнение вида

$$\frac{dy}{dx} = f_1(x) \cdot f_2(y), \quad (1)$$

правая часть которого представляет собой произведение двух множителей, каждый из которых является функцией только одного аргумента. Например, уравнение

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\sin y}{x^2 + x}$$

является уравнением с разделяющимися переменными, а уравнение

$$x \frac{dy}{dx} + y^2 = \operatorname{tg} x$$

таким не является.

Перепишем уравнение (1) в виде

$$\frac{dy}{f_2(y)} = f_1(x) dx. \quad (2)$$

Говорят, что в уравнении (2) переменные разделены. Предположим, что решение уравнения (2) найдено:  $y = y(x)$ . Подставив его в уравнение, получим тождество. Проинтегрируем обе части этого тождества по  $x$ :

$$\int \frac{dy}{f_2(y)} = \int f_1(x) dx + C. \quad (3)$$

(3) — общий интеграл уравнения (1).

**З а м е ч а н и е.** При делении на  $f_2(y)$  мы могли потерять решение  $y = y_0$ , где  $f_2(y_0) = 0$ . Очевидно,  $y = y_0$  есть также решение уравнения (1).

**П р и м е р.** Найти общий интеграл уравнения

$$xyy' = 1 - x^2. \quad (4)$$

Разделим в уравнении (4) переменные:

$$y \frac{dy}{dx} = \frac{1 - x^2}{x} \quad \text{или} \quad y dy = \frac{1 - x^2}{x} dx.$$

Проинтегрируем обе части последнего равенства:

$$\frac{y^2}{2} = \ln|x| - \frac{x^2}{2} + C_1. \quad (5)$$

В (5)  $C_1$  — произвольная постоянная. Положим  $C_1 = \ln C$ , где  $C > 0$ . Тогда

$$\frac{y^2}{2} + \frac{x^2}{2} = \ln C + \ln|x| \Rightarrow y^2 + x^2 = 2 \ln C |x|.$$

Окончательно:  $y^2 + x^2 = \ln C x^2$  — общий интеграл уравнения (4).

**Пример.** Найти уравнение кривой, проходящей через точку  $M_1(3, 1)$ , для которой отрезок касательной между точкой касания и осью  $OX$  делится пополам в точке пересечения с осью  $OY$ .

**Решение.** Пусть  $M(x, y)$  — точка касания. По условию  $AB = BM$ . Но тогда  $AO = ON$  и

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{MN}{AN} = \frac{y}{2x} = y'.$$

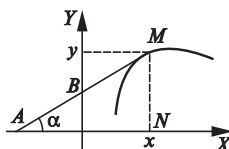


Рис. 7.5

Так как кривая должна проходить через точку  $M_1(3, 1)$ , то мы приходим к следующей задаче Коши:

найти решение уравнения  $y' = \frac{y}{2x}$ , удовлетворяю-

щее условиям  $y = 1$  при  $x = 3$ . Разделяя в уравнении переменные, получим

$$\frac{dy}{y} = \frac{dx}{2x}.$$

После интегрирования будем иметь

$$\ln|y| + \ln C = \ln \sqrt{x}.$$

Потенцируя, получим  $Cy = \sqrt{x}$ . Исходя из начальных условий, можем записать:  $C \cdot 1 = \sqrt{3} \Rightarrow C = \sqrt{3}$ . Тогда решение уравнения имеет

вид  $y = \frac{1}{\sqrt{3}} \sqrt{x}$ . Поэтому искомая кривая — парабола, имеющая урав-

нение  $y^2 = \frac{x}{3}$ .

### 7.2.2. Однородные уравнения

Дифференциальное уравнение называется однородным, если оно может быть представлено в виде

$$\frac{dy}{dx} = \Phi\left(\frac{y}{x}\right), \quad (6)$$

где правая часть — функция от отношения  $\frac{y}{x}$ .

Пример.  $\frac{dy}{dx} = \frac{P(x, y)}{Q(x, y)}$ , где  $P(x, y)$  и  $Q(x, y)$  — однородные много-

члены переменных  $x$  и  $y$  одинаковой степени однородности, т. е. такие многочлены, у которых сумма показателей степеней переменных в каждом члене одна и та же. Например, уравнение

$$\frac{dy}{dx} = \frac{x^3 + x^2 y + y^3}{y^2 x - x^3}$$

однородное, так как оба многочлена в правой части равенства имеют степень однородности 3. Действительно, это уравнение может быть приведено к виду (6)

$$\frac{dy}{dx} = \frac{x^3 + x^2 y + y^3}{y^2 x - x^3} = \frac{1 + \frac{y}{x} - \frac{y^3}{x^3}}{\frac{y^2}{x^2} - 1} = \varphi\left(\frac{y}{x}\right).$$

Однородное уравнение легко преобразуется к уравнению с разделяющимися переменными при помощи замены  $\frac{y}{x} = z(x)$  или  $y = xz$ . Тогда

$$\frac{dy}{dx} = z + x \frac{dz}{dx} \Rightarrow z + x \frac{dz}{dx} = \varphi(z). \quad (7)$$

Разделяя переменные, получим

$$\frac{dx}{x} = \frac{dz}{\varphi(z) - z}.$$

Тогда

$$\ln|x| = \int \frac{dz}{\varphi(z) - z} + C$$

— общий интеграл уравнения (7). Найдя  $z = z(x, C)$ , получим  $y = x \cdot z(x, C)$ .

Пример. Найти частное решение уравнения  $(x^2 - 3y^2)dx + 2xydy = 0$ , удовлетворяющее начальным условиям  $y = 1$  при  $x = 2$ .

Перепишем заданное уравнение в виде

$$\frac{dy}{dx} = \frac{3y^2 - x^2}{2xy} = \frac{3\left(\frac{y}{x}\right)^2 - 1}{2\frac{y}{x}}.$$

Это однородное уравнение. Полагая  $y = zx$ , получим

$$z + x \frac{dz}{dx} = \frac{3z^2 - 1}{2z} \Rightarrow x \frac{dz}{dx} = \frac{3z^2 - 1}{2z} - z = \frac{z^2 - 1}{2z}.$$

Разделим переменные:

$$\frac{dx}{x} = \frac{2zdz}{z^2 - 1} \Rightarrow \ln|x| = \ln|z^2 - 1| + \ln C_1.$$

Потенцируя, получим  $x = (z^2 - 1) \cdot C$ ,  $C = \pm C_1$ . Вспоминая, что  $z = \frac{y}{x}$ , мо-

жем записать:  $x = \left(\frac{y^2}{x^2} - 1\right) \cdot C$  — общий интеграл уравнения. Исходя из

начальных условий, найдем  $C$ . При  $x = 2$ ,  $y = 1$  будем иметь

$$2 = \left(\frac{1}{4} - 1\right) \cdot C \Rightarrow C = -\frac{8}{3}.$$

Окончательно:  $y = x \sqrt{1 - \frac{3}{8}x}$  — искомое решение.

**Пример.** Найти уравнение кривой, для которой отрезок, отсекаемый на оси ординат нормалью к любой точке кривой, равен расстоянию этой точки от начала координат.

*Решение.*  $AM$  — нормаль к кривой в точке  $M(x, y)$ . По условию  $|AO| = |OM|$ . Уравнение нормали к кривой в точке  $M(x, y)$  имеет вид

$$Y - y = -\frac{1}{y'}(X - x). \quad (8)$$

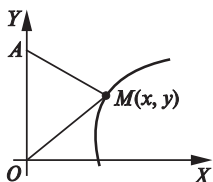


Рис. 7.6

Положив в (8)  $X = 0$ , находим

$$Y = y + \frac{x}{y'} = |OA|.$$

Очевидно,  $|OM| = \sqrt{x^2 + y^2}$ . Поэтому

$$y + \frac{x}{y'} = \sqrt{x^2 + y^2} \Rightarrow y' = \frac{dy}{dx} = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2} - y}.$$

Последнее уравнение преобразуется к виду

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{y}{x}\right)^2} - \frac{y}{x}}.$$

Это однородное уравнение. Полагая  $\frac{y}{x} = z$ ,  $\frac{dy}{dx} = \frac{dz}{dx} \cdot x + z$ , получим

$$\frac{dz}{dx} \cdot x + z = \frac{1}{\sqrt{1 + z^2} - z} \Rightarrow \frac{dz}{dx} \cdot x = \sqrt{1 + z^2}.$$

Разделяя переменные, приходим к уравнению

$$\frac{dz}{dx} = \frac{\sqrt{1+z^2}}{x} \Rightarrow \ln\left(z + \sqrt{1+z^2}\right) = \ln|x| + \ln C_1.$$

Или

$$Cx = \frac{y + \sqrt{x^2 + y^2}}{x}.$$

Из этого следует:  $C^2 x^2 = 2Cy + 1$  — семейство парабол, ось которых совпадает с осью  $OX$ .

### 7.2.3. Линейные уравнения 1-го порядка

Линейным уравнением называется дифференциальное уравнение вида

$$\frac{dy}{dx} + p(x)y = q(x), \quad (9)$$

где  $p(x)$  и  $q(x)$  — непрерывные функции.

Решение уравнения (9) будем искать в виде произведения двух непрерывно дифференцируемых функций

$$y(x) = u(x) \cdot v(x). \quad (10)$$

Тогда  $\frac{dy}{dx} = u \frac{dv}{dx} + v \frac{du}{dx}$ . Подставляя все в (9), получим

$$u \frac{dv}{dx} + v \frac{du}{dx} + pu \cdot v = q$$

или

$$u \left( \frac{dv}{dx} + pv \right) + v \frac{du}{dx} = q. \quad (11)$$

В качестве  $v(x)$  возьмем какое-либо решение уравнения

$$\frac{dv}{dx} + pv = 0. \quad (12)$$

Это уравнение с разделяющимися переменными. Интегрируем его:

$$\frac{dv}{v} = -p dx \Rightarrow v = e^{-\int p dx}.$$

Положим  $C = 1$  и подставим выражение для  $v$  в (11). Используя (12), получим

$$\frac{du}{dx} e^{-\int p dx} = q \Rightarrow u = \int e^{\int p dx} q dx + C.$$

Окончательно,

$$y = uv = \left[ \int e^{\int p(x) dx} q(x) dx + C \right] e^{-\int p(x) dx}. \quad (13)$$

Обозначим  $\int e^{\int p(x) dx} q(x) dx = \Phi(x)$ . Тогда (13) перепишется в виде

$$y(x) = \Phi(x) v(x) + C v(x). \quad (14)$$

Из (14) ясно, что (13) — общее решение уравнения (9) (так как во-первых, при  $\forall C$  это решение, а во-вторых, при заданных  $x_0$ ,  $y_0$  константу  $C$  можно определить из соотношения

$$y_0 = \Phi(x_0) v(x_0) + C v(x_0).$$

**Задача.** Обратимся к примеру 1 предыдущей лекции и решим уравнение, к которому мы пришли. Рассмотрим случай  $n = 1$ :

$$m \frac{dy}{dt} = mg - ky, \quad y = v_0 \text{ при } t = 0.$$

Перепишем это уравнение в виде

$$\frac{dy}{dt} + \frac{k}{m} y = g, \quad y|_{t=0} = v_0. \quad (15)$$

это линейное уравнение, здесь  $p(t) = \frac{k}{m}$ ,  $q(t) = g$ .

Полагая  $y = uv$ , получим

$$\begin{aligned} \frac{du}{dt} v + u \frac{dv}{dt} + \frac{k}{m} uv &= g, \\ u \left( \frac{dv}{dt} + \frac{k}{m} v \right) + v \frac{du}{dt} &= g. \end{aligned} \quad (16)$$

Из уравнения  $\frac{dv}{dt} + \frac{k}{m} v = 0$  находим  $v(t)$

Имеем

$$v(t) = e^{-\frac{k}{m} t}. \quad (17)$$



Подставляя (17) в (16), получим

$$u(t) = \int e^{\frac{k}{m}t} g dt = \frac{m}{k} e^{\frac{k}{m}t} g + C;$$

$$y(t) = u(t) v(t) = \frac{mg}{k} + C e^{-\frac{k}{m}t}.$$
(18)

С учетом начального условия закон падения тела примет вид

$$y(t) = \frac{mg}{k} + \left( v_0 - \frac{mg}{k} \right) e^{-\frac{k}{m}t}.$$

При  $t = t_1$  тело будет иметь скорость  $V_1$ :

$$V_1 = \frac{mg}{k} + \left( v_0 + \frac{mg}{k} \right) e^{-\frac{k}{m}t_1}.$$

### 7.3. Методы интегрирования некоторых дифференциальных уравнений первого порядка. Приближенное решение дифференциальных уравнений методом Эйлера

Уравнение Бернулли. Уравнение в полных дифференциалах. Приближенное решение дифференциальных уравнений первого порядка методом Эйлера.

#### 7.3.1. Уравнение Бернулли

Уравнением Бернулли называется уравнение вида

$$\frac{dy}{dx} + p(x)y = q(x)y^n,$$
(1)

где  $p(x)$  и  $q(x)$  — непрерывные функции,  $n \neq 0$ ,  $n \neq 1$ .

Разделив все члены уравнения (1) на  $y^n$ , получим

$$y^{-n} \frac{dy}{dx} + p(x)y^{-n+1} = q(x).$$
(2)

Сделаем замену переменных

$$z = y^{-n+1}.$$
(3)

Тогда

$$\frac{dz}{dx} = (-n+1)y^{-n} \frac{dy}{dx}. \quad (4)$$

Подставим (3) и (4) в (2). Приходим к линейному уравнению

$$\frac{dz}{dx} + (1-n)p(x)z = (1-n)q(x).$$

Находя решение этого уравнения и пользуясь (3), находим решение уравнения Бернулли (1).

**Пример.** Найти общее решение уравнения

$$(x + yx^2)dy - dx = 0. \quad (5)$$

Перепишем уравнение (5) в виде

$$\frac{dx}{dy} - x = yx^2. \quad (6)$$

Считая  $y$  независимой переменной, видим, что (6) — уравнение Бернулли относительно  $x(y)$ . Интегрируя по общей схеме, получим общее решение уравнения (5):

$$x = (1 - y + ce^{-y})^{-1}.$$

### 7.3.2. Уравнение в полных дифференциалах

**ОПРЕДЕЛЕНИЕ.** Уравнение

$$M(x, y)dx + N(x, y)dy = 0 \quad (7)$$

называется уравнением в полных дифференциалах, если  $M(x, y)$  и  $N(x, y)$  — дифференцируемые функции, для которых выполнено соотношение

$$\frac{\partial M}{\partial y} \equiv \frac{\partial N}{\partial x}, \quad (8)$$

причем производные  $\frac{\partial M}{\partial y}$  и  $\frac{\partial N}{\partial x}$  непрерывны в некоторой области.

**Теорема.** Для того, чтобы левая часть уравнения (7) являлась полным дифференциалом некоторой функции двух переменных  $x, y$ , необходимо и достаточно, чтобы выполнялось условие (8).

В сформулированной теореме утверждается, что при выполнении условия (8) левая часть уравнения (7) есть полный дифференциал некоторой функции  $U(x, y)$ , т. е.  $dU = Mdx + Ndy$ . Тогда уравнение (7) имеет вид  $dU(x, y) = 0$  и, следовательно, его общий интеграл есть  $U(x, y) = C$ .

Необходимость выполнения условий (8) очевидна, а приведенное ниже доказательство их достаточности дает общую схему построения искомой функции  $U(x, y)$ .

$$\text{Пусть } \frac{\partial U}{\partial x} = M(x, y),$$

тогда

$$U = \int_{x_0}^x M(x, y) dx + \varphi(y), \quad (9)$$

где  $x_0$  — абсцисса любой точки из области существования решения.

При интегрировании по  $x$  мы считаем  $y$  постоянным и поэтому произвольная постоянная интегрирования может зависеть от  $y$ . Подберем функцию  $\varphi(y)$  так, чтобы выполнялось второе из соотношений (9). Для этого продифференцируем обе части последнего равенства по  $y$  (используя при этом теорему Лейбница о дифференцировании интеграла по параметру) и результат приравняем к  $N(x, y)$ :

$$\frac{\partial U}{\partial y} = \int_{x_0}^x \frac{\partial M}{\partial y} dx + \varphi'(y) = N(x, y).$$

Но поскольку  $\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x}$ , то мы можем записать:

$$\int_{x_0}^x \frac{\partial N}{\partial x} dx + \varphi'(y) = N \Rightarrow N(x, y)|_{x_0}^x + \varphi'(y) = N(x, y),$$

или

$$\varphi'(y) = N(x_0, y) \Rightarrow \varphi(y) = \int_{y_0}^y N(x_0, y) dy + C_1.$$

Подставляя найденное  $\varphi(y)$  в выражение (9) и приравнявая это выражение к произвольной постоянной  $C$ , получим общий интеграл уравнения (7):

$$\int_{x_0}^x M(x, y) dx + \int_{y_0}^y N(x_0, y) dy = C. \quad (10)$$

Пример. Дано уравнение

$$xydx + \left(xy + \frac{1}{y}\right)dy = 0.$$

Условие (8) выполнено. Для общего решения применим формулу (10), положив  $x_0 = 0$ ,  $y_0 = 1$ , и получим

$$\int_0^x yudx + \int_1^y \left(x_0y + \frac{1}{y}\right)dy = C, \quad x^2y + 2\ln y = 2C.$$

### 7.3.3. Приближенное решение дифференциальных уравнений первого порядка методом Эйлера

Пусть дано дифференциальное уравнение

$$y' = f(x, y) \quad (11)$$

и начальное условие  $y = y_0$  при  $x = x_0$ . Требуется на отрезке  $x_0 \leq x \leq b$  построить интегральную кривую  $y = y(x)$  уравнения (11), проходящую через точку  $P_0(x_0, y_0)$ .

Уравнение (11) с заданным начальным условием можно заменить следующим интегральным соотношением:

$$y(x) = y_0 + \int_{x_0}^x f(x, y)dx.$$

Суть метода Эйлера очень простая и состоит в следующем. Если взять точку  $x_1$ , достаточно близкую к  $x_0$ , то  $y_1 = y(x_1)$  можно вычислить, заменив интеграл площадью прямоугольника с основанием  $x_1 - x_0$  и высотой  $f(x_0, y_0)$ :

$$y(x_1) = y_1 = y_0 + f(x_0, y_0)(x_1 - x_0).$$

Таким способом можно последовательно продолжить решение и записать рекуррентное соотношение

$$y_{k+1} = y_k + f(x_k, y_k)(x_{k+1} - x_k).$$

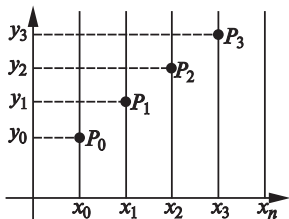


Рис. 7.7

Алгоритм решения очень простой, но при этом необходимо отметить, что на большом отрезке интегрирования погрешности приближенного вычисления интеграла заметно накапливаются. Поэтому данный метод удобно использовать, когда вычислить неизвестные значения  $y$  нужно лишь в нескольких точках по соседству с точкой  $x_0$ .

### 7.4. Дифференциальные уравнения высших порядков

Дифференциальное уравнение  $n$ -го порядка. Задача Коши, теорема Коши, общее решение. Интегрирование уравнений, допускающих понижение порядка. Задача погони.

#### 7.4.1. Дифференциальное уравнение $n$ -го порядка. Задача Коши, теорема Коши, общее решение

**ОПРЕДЕЛЕНИЕ.** Дифференциальным уравнением  $n$ -го порядка называется уравнение вида

$$F(x, y, y', y'', \dots, y^{(n)}) = 0 \quad (1)$$

или

$$y^{(n)} = f(x, y, y', \dots, y^{(n-1)}). \quad (2)$$

Всякая функция  $y(x)$ , определенная и непрерывно дифференцируемая  $n$  раз в интервале  $(a, b)$ , называется решением уравнения (1) ((2)), если она обращает уравнение (1) ((2)) в тождество

$$F(x, y(x), y'(x), \dots, y^{(n)}(x)) \equiv 0,$$

справедливое для любого  $x \in (a, b)$ .

**Геометрическое истолкование.** Всякому решению уравнения  $n$ -го порядка, так же как и решению уравнения первого порядка, соответствует на плоскости  $(x, y)$  некоторая кривая, которая называется интегральной кривой.

Подобно тому, как уравнение первого порядка задает некоторое общее свойство семейства касательных всех его интегральных кривых, каждое уравнение  $n$ -го порядка тоже выражает собой некоторое общее геометрическое свойство всех его интегральных кривых. Так, например, уравнение

$$F(x, y, y', y'') = 0$$

представляет собой связь между координатами, наклоном касательной и кривизной в каждой точке интегральной кривой.

**Задача Коши.** Для уравнения (2) задача Коши ставится следующим образом: требуется среди всех решений найти решение уравнения (2), удовлетворяющее заданным условиям:

$$\begin{aligned} y(x_0) &= y_0, \\ y'(x_0) &= y'_0, \\ &\dots \dots \dots \\ y^{(n-1)}(x_0) &= y_0^{(n-1)}, \end{aligned} \quad (4)$$

где  $y_0, y'_0, \dots, y_0^{(n-1)}$  — начальные значения решения (3);  $x_0$  — начальное значение независимой переменной; условия (4) — начальные условия.

В случае уравнения второго порядка

$$y'' = f(x, y, y')$$

задача Коши состоит в нахождении решения  $y = y(x)$ , удовлетворяющего начальным условиям  $y = y_0, y' = y'_0$  при  $x = x_0$ . С геометрической точки зрения эта задача может быть истолкована как задача нахождения такой интегральной кривой, которая проходила бы через заданную точку  $M_0(x_0, y_0)$  и имела бы в этой точке заданное направление касательной, т. е.  $\operatorname{tg} \alpha_0 = y'_0$ .

**Теорема Коши** (теорема существования и единственности решения). Если в уравнении (2) функция  $f(x, y, \dots, y^{(n-1)})$  непрерывна вместе со своими частными производными по  $y, y', \dots, y^{(n-1)}$  в некоторой области, содержащей точку  $M_0(x_0, y_0, y'_0, \dots, y_0^{(n-1)})$ , то существует и притом единственное решение уравнения (2)  $y = y(x)$ , удовлетворяющее начальным условиям

$$\begin{aligned} y(x_0) &= y_0, \\ y'(x_0) &= y'_0, \\ &\dots\dots\dots \\ y^{(n-1)}(x_0) &= y_0^{(n-1)}. \end{aligned}$$

**Общим решением** уравнения (2) называется функция  $y = \varphi(x, C_1, \dots, C_n)$ , зависящая от  $n$  произвольных постоянных и такая, что:

- 1) при любых значениях произвольных постоянных  $C_1, C_2, \dots, C_n$  она является решением уравнения;
- 2) для любой точки  $M_0(x_0, y_0, y'_0, \dots, y_0^{(n-1)})$  из области существования решения можно подобрать такие значения постоянных  $C_1^0, C_2^0, \dots, C_n^0$ , что

$$\begin{aligned} \varphi(x_0, C_1^0, \dots, C_n^0) &= y_0, \\ \varphi'(x_0, C_1^0, \dots, C_n^0) &= y'_0, \\ &\dots\dots\dots \\ \varphi^{(n-1)}(x_0, C_1^0, \dots, C_n^0) &= y_0^{(n-1)}. \end{aligned} \tag{5}$$

Всякое решение, получающееся из общего при конкретных значениях постоянных, называется **частным решением**.

Соотношение вида  $\Phi(x, y, C_1, C_2, \dots, C_n) = 0$ , неявно определяющее общее решение уравнения (2), — общий интеграл этого уравнения.

Формула общего решения  $y = \varphi(x, C_1, C_2, \dots, C_n)$  дает возможность за счет выбора соответствующих значений произвольных постоянных  $C_1, C_2, \dots, C_n$  решить любую задачу Коши для уравнения (2).

#### 7.4.2. Интегрирование уравнений, допускающих понижение порядка

Для простоты выкладок рассмотрим уравнение второго порядка

$$y'' = f(x, y, y'),$$

разрешенное относительно производной  $y''$ .

Это уравнение допускает понижение порядка, если правая часть имеет следующий вид:

$$\text{I. } y'' = f(x); \text{ II. } y'' = f(x, y'); \text{ III. } y'' = f(y, y').$$

Рассмотрим каждый из этих случаев.

I.  $y'' = f(x)$ . Введем замену  $y' = v(x)$ , тогда  $y'' = v'(x)$  и  $v'(x) = f(x)$ . Отсюда

$$v(x) = \int f(x) dx + C_1 = F(x) + C_1,$$

т. е.  $y'(x) = F(x) + C_1$ . Окончательно:

$$y(x) = \int (F(x) + C_1) dx = \int F(x) dx + C_1 x + C_2.$$

**Пример.**  $y'' = \sin x$ . Замена  $y' = v(x)$ . Тогда  $y'' = v' = \sin x$  и  $v(x) = \int \sin x dx$ . Таким образом,  $y' = -\cos x + C_1$ ,

$$y(x) = \int (-\cos x + C_1) dx = -\sin x + C_1 x + C_2.$$

II.  $y'' = f(x, y')$ . Здесь используется замена  $y' = v(x)$ . Тогда  $v'(x) = f(x, v)$ . Пусть удалось проинтегрировать последнее уравнение первого порядка:  $v = \varphi(x, C_1)$  — его общее решение. Тогда  $y' = \varphi(x, C_1)$  и  $y = \int \varphi(x, C_1) dx + C_2$ .

**Пример.** Найти частное решение уравнения  $(1+x^2)y'' - 2xy' = 0$ , удовлетворяющее начальным условиям:  $y(1) = 0$ ,  $y'(1) = 1$ .

Рассматриваемое уравнение записано в виде, не разрешенном относительно  $y''$ . Однако легко видеть, что его левая часть не содержит в явном виде  $y$ , поэтому его сразу можно отнести к случаю II.

Замена  $y' = v(x)$ . Тогда  $y'' = v'$  и уравнение можно переписать в виде

$$(1+x^2)v' - 2xv = 0.$$

Это уравнение с разделяющимися переменными, действительно

$$(1+x^2) \frac{dv}{dx} = 2xv,$$

$$\frac{dv}{v} = \frac{2x dx}{1+x^2}.$$

Интегрируя, получим

$$\ln|v| = \ln|1+x^2| + \ln|C|.$$

Отсюда  $v = C_1(1+x^2)$ , где  $C_1 = \pm C$ . Тогда остается решить последнее уравнение  $y = C_1(1+x^2)$ .

$$y(x) = \int C_1(1+x^2) dx = C_1 x + C_1 \frac{x^3}{3} + C_2.$$

Это общее решение.

Для того, чтобы найти частное решение, составим систему уравнений относительно  $C_1$  и  $C_2$ , исходя из начальных условий

$$y(1) = 0 \Rightarrow C_1 + \frac{C_1}{3} + C_2 = 0,$$

$$y'(1) = 1 \Rightarrow C_1 + C_1 + C_2 = 1.$$

Решим эту систему:

$$C_1 = \frac{3}{2}, \quad C_2 = -2.$$

Таким образом, частное решение имеет вид

$$y(x) = \frac{3}{2}x + \frac{x^3}{2} - 2.$$

III.  $y'' = f(y, y')$ .

Воспользуемся заменой  $y' = v(y)$ . Тогда

$$y'' = \frac{d(y')}{dy} = \frac{d(v(y))}{dy} = v' \cdot y' = v' \cdot v,$$

и уравнение примет вид

$$\frac{dv}{dy} v = f(y, v).$$



Пусть  $v = \varphi(y, C_1)$  — его решение. Тогда  $\frac{dy}{dx} = \varphi(y, C_1)$  — уравнение с разделяющимися переменными. Его общий интеграл —

$$\int \frac{dy}{\varphi(y, C_1)} = x + C_2.$$

## 7.5. Линейные дифференциальные уравнения

Линейные уравнения  $n$ -го порядка. Теорема Коши. Линейное однородное уравнение второго порядка. Свойства его решений. Линейное неоднородное уравнение. Метод вариации произвольных постоянных.

### 7.5.1. Линейные уравнения $n$ -го порядка. Теорема Коши

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Линейным дифференциальным уравнением  $n$ -го порядка называется уравнение вида

$$a_0(x)y^{(n)} + a_1(x)y^{(n-1)} + \dots + a_n(x)y = f(x), \quad (1)$$

которое содержит  $y^{(n)}$ ,  $y^{(n-1)}$ , ...,  $y'$ ,  $y$  только в первых степенях и не содержит их произведений.

Пусть  $a_0(x) \neq 0$  в интервале  $(\alpha, \beta)$ . Тогда

$$y^{(n)} = f(x, y, y', \dots, y^{(n-1)}).$$

Очевидно, что

$$f'_y = -\frac{a_n(x)}{a_0(x)}, \quad f'_{y'} = -\frac{a_{n-1}(x)}{a_0(x)}, \quad \dots, \quad f'_{y^{(n-1)}} = -\frac{a_1(x)}{a_0(x)}.$$

Поэтому для линейного уравнения теорема Коши формулируется следующим образом.

**Теорема 1.** Пусть функции  $a_i(x)$  и  $f(x)$  непрерывны на  $(\alpha, \beta)$ ,  $a_0(x) \neq 0$ . Тогда  $\forall x_0 \in (\alpha, \beta) \exists$  единственное решение  $y(x)$  такое, что  $y(x_0) = y_0$ ,  $y'(x_0) = y'_0$ , ...,  $y^{(n-1)}(x_0) = y_0^{(n-1)}$ .

Если в уравнении (1)  $f(x) \equiv 0 \forall x$ , то такое уравнение называется однородным. Оно имеет вид

$$a_0(x)y^{(n)} + a_1(x)y^{(n-1)} + \dots + a_{n-1}(x)y' + a_n(x)y = 0.$$

Если же  $f(x) \not\equiv 0$ ,  $x \in (\alpha, \beta)$ , то уравнения (1) называется неоднородным.

### 7.5.2. Линейное однородное уравнение второго порядка.

#### Свойства его решений

В данном разделе мы покажем, что для интегрирования линейного неоднородного уравнения

$$a_0(x)y'' + a_1(x)y' + a_2(x)y = f(x) \quad (2)$$

достаточно уметь найти общее решение однородного уравнения с той же левой частью

$$a_0(x)y'' + a_1(x)y' + a_2(x)y = 0. \quad (3)$$

Для этого потребуются определения и теоремы, которые приведены ниже без доказательства.

**Теорема 2.** Если  $y_1(x)$  и  $y_2(x)$  — два любых решения уравнения (3), то их линейная комбинация, т. е. функция  $y(x) = C_1 y_1(x) + C_2 y_2(x)$ , где  $C_1$  и  $C_2$  произвольные постоянные, также является решением этого уравнения.

**ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1.** Решения  $y_1(x)$  и  $y_2(x)$  уравнения (3) называются линейно зависимыми на  $(\alpha, \beta)$ , если существует  $\lambda \neq 0$  такое, что  $y_1(x) = \lambda y_2(x)$  на  $(\alpha, \beta)$ , и линейно независимы в противном случае.

**ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2.** Решения  $y_1(x)$  и  $y_2(x)$  уравнения (2) называются линейно независимыми на  $(\alpha, \beta)$ , если для  $\forall x \in (\alpha, \beta)$  отличен от нуля определитель

$$|W(x)| = \begin{vmatrix} y_1(x) & y_2(x) \\ y_1'(x) & y_2'(x) \end{vmatrix} = y_1 y_2' - y_1' y_2.$$

$|W(x)|$  — определитель Вронского (вронскиан).

**Теорема 3.** Определения (1) и (2) эквивалентны.

**ОПРЕДЕЛЕНИЕ 3.** Совокупность двух решений однородного уравнения (3), определенных и линейно независимых в промежутке  $(\alpha, \beta)$ , называется *фундаментальной системой* решений в этом промежутке.

**Теорема 4.** Если в уравнении (3) коэффициенты  $a_i(x)$  непрерывны на  $(\alpha, \beta)$  и  $a_0(x) \neq 0$  и решения  $y_1(x)$  и  $y_2(x)$  этого уравнения образуют фундаментальную систему на  $(\alpha, \beta)$ , то функция  $y(x) = C_1 y_1(x) + C_2 y_2(x)$  является общим решением уравнения (3).

### 7.5.3. Линейные неоднородные уравнения

Пусть  $Y(x) = C_1 y_1(x) + C_2 y_2(x)$  — общее решение однородного уравнения (3), где  $y_1$  и  $y_2$  линейно независимы.

**Теорема 5.** Если  $Y(x)$  — общее решение однородного уравнения (3), а  $\bar{y}(x)$  — какое-либо частное решение неоднородного уравнения (2), то

$$y(x) = Y(x) + \bar{y}(x) \quad (4)$$

является общим решением неоднородного уравнения (2).

*Доказательство.* По условию теоремы справедливы равенства

$$\begin{aligned} a_0(x)Y''(x) + a_1(x)Y'(x) + a_2(x)Y(x) &= 0, \\ a_0(x)\bar{y}''(x) + a_1(x)\bar{y}'(x) + a_2(x)\bar{y}(x) &= f(x). \end{aligned} \quad (5)$$

Поэтому

$$\begin{aligned} a_0(x)y''(x) + a_1(x)y'(x) + a_2(x)y(x) &= a_0(x)[Y''(x) + \bar{y}''(x)] + a_1(x)[Y'(x) + \bar{y}'(x)] + \\ &+ a_2(x)[Y(x) + \bar{y}(x)] = [a_0(x)Y''(x) + a_1(x)Y'(x) + a_2(x)Y(x)] + \\ &+ [a_0(x)\bar{y}''(x) + a_1(x)\bar{y}'(x) + a_2(x)\bar{y}(x)] = 0 + f(x) = f'(x). \end{aligned}$$

Следовательно, (5) — решение уравнения (2). Покажем, что для  $\forall y_0, y'_0$  существуют такие  $C_{10}$  и  $C_{20}$ , что

$$\begin{cases} y(x_0) = C_{10}y_1(x_0) + C_{20}y_2(x_0) + \bar{y}(x_0) = y_0, \\ y'(x_0) = C_{10}y'_1(x_0) + C_{20}y'_2(x_0) + \bar{y}'(x_0) = y'_0. \end{cases} \quad (6)$$

Систему (6) можно переписать в виде

$$\begin{cases} C_{10}y_1(x_0) + C_{20}y_2(x_0) = y_0 - \bar{y}(x_0), \\ C_{10}y'_1(x_0) + C_{20}y'_2(x_0) = y'_0 - \bar{y}'(x_0). \end{cases} \quad (7)$$

Определитель системы (7) есть  $W(x_0)$  (см. теорему 4), поэтому она имеет единственное решение. Теорема 5 доказана.

Рассмотрим один из методов отыскания частного решения неоднородного уравнения в предположении, что известны линейно независимые решения однородного уравнения.

#### 7.5.4. Метод вариации произвольных постоянных

Пусть  $y_1(x)$  и  $y_2(x)$  — известные линейно независимые решения однородного уравнения. Частное решение неоднородного уравнения будем искать в виде

$$\bar{y}(x) = C_1(x)y_1(x) + C_2(x)y_2(x), \quad (8)$$

где  $C_1(x)$  и  $C_2(x)$  — функции, подлежащие определению.

$$\bar{y}'(x) = C'_1y_1 + C_1y'_1 + C'_2y_2 + C_2y'_2.$$

Пусть  $C_1(x)$  и  $C_2(x)$  таковы, что  $C'_1y_1 + C'_2y_2 = 0$ . Тогда

$$\begin{aligned} a_0\bar{y}'' + a_1\bar{y}' + a_2\bar{y} &= \\ = C_1(a_0y''_1 + a_1y'_1 + a_2y_1) + C_2(a_0y''_2 + a_1y'_2 + a_2y_2) + a_0(C'_1y'_1 + C'_2y'_2) &= f(x). \end{aligned}$$

Так как  $y_1(x)$  и  $y_2(x)$  — решения однородного уравнения, то из последнего равенства получаем

$$a_0(C_1'y_1' + C_2'y_2') = f(x).$$

В результате для функций  $C_1(x)$  и  $C_2(x)$  получили систему уравнений

$$\begin{cases} C_1'y_1 + C_2'y_2 = 0, \\ C_1'y_1' + C_2'y_2' = \frac{f(x)}{a_0(x)}. \end{cases} \quad (9)$$

Из системы (9) находим  $C_1'$  и  $C_2'$ . Затем найдем  $C_1$  и  $C_2$ . Частное решение  $\bar{y}(x)$  имеет вид (8).

**Пример.** Найти общее решение уравнения

$$x^2 y'' - 2xy' + 2y = x^2. \quad (10)$$

Рассмотрим соответствующее однородное уравнение

$$x^2 y'' - 2xy' + 2y = 0.$$

Легко проверить, что  $y_1 = x$  и  $y_2 = x^2$  — два его решения, образующие фундаментальную систему. Действительно,

$$W(x) = \begin{vmatrix} x & x^2 \\ 1 & 2x \end{vmatrix} = 2x^2 - x^2 = x^2 \neq 0 \quad \text{при } x \neq 0.$$

$\bar{y}(x)$  ищем в виде  $\bar{y}(x) = C_1(x)x + C_2(x)x^2$ , где  $C_1(x)$  и  $C_2(x)$  находим из системы

$$\begin{cases} C_1'x + C_2'x^2 = 0, \\ C_1' + C_2' \cdot 2x = 1. \end{cases}$$

Отсюда

$$C_1' = \frac{\begin{vmatrix} 0 & x^2 \\ 1 & 2x \end{vmatrix}}{x^2} = -1, \quad C_2' = \frac{\begin{vmatrix} x & 0 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}}{x^2} = \frac{1}{x}.$$

Поэтому  $C_1(x) = -x$ ,  $C_2(x) = \ln|x|$ ,

$$\bar{y}(x) = -x \cdot x + \ln|x| \cdot x^2 = x^2(\ln|x| - 1).$$

По теореме 5 общее решение уравнения (10) имеет вид

$$y(x) = C_1x + C_2x^2 + x^2(\ln|x| - 1),$$

где  $C_1$  и  $C_2$  — произвольные постоянные.

## 7.6. Линейные уравнения второго порядка с постоянными коэффициентами

Характеристическое уравнение. Случай различных корней характеристического уравнения. Случай кратных корней характеристического уравнения. Случай комплексно-сопряженных корней характеристического уравнения. Линейные неоднородные уравнения с постоянными коэффициентами и специальными правыми частями. Уравнение гармонического осциллятора. Резонанс.

Согласно теореме 4 предыдущей лекции, для построения общего решения линейного уравнения второго порядка достаточно знать два его частных решения, образующих фундаментальную систему. В общем случае нельзя дать никаких рекомендаций по отысканию таких решений. Однако в случае, когда коэффициенты  $a_i$  являются постоянными, такие решения отыскиваются легко.

### 7.6.1. Характеристическое уравнение

Рассмотрим линейное однородное уравнение второго порядка с постоянными коэффициентами:

$$a_0 y'' + a_1 y' + a_2 y = 0. \quad (1)$$

Здесь  $a_0 \neq 0$ , поэтому уравнение (1) удобно переписать в виде

$$y'' + py' + qy = 0, \quad p = \frac{a_1}{a_0}, \quad q = \frac{a_2}{a_0}. \quad (2)$$

Решение уравнения (2) будем искать в виде  $y = e^{kx}$ . Тогда  $y' = ke^{kx}$ ,  $y'' = k^2 e^{kx}$ . Подставляя  $y$ ,  $y'$ ,  $y''$  в уравнение (2), получим

$$k^2 e^{kx} + pke^{kx} + qe^{kx} = 0.$$

Поскольку  $e^{kx} \neq 0$ , то уравнение удовлетворяется, если

$$k^2 + pk + q = 0. \quad (3)$$

Уравнение (3) называют *характеристическим уравнением* дифференциального уравнения (2).

### 7.6.2. Случай различных корней характеристического уравнения

Может реализоваться одна из следующих возможностей.

I. Корни  $k_1$  и  $k_2$  уравнения (3) действительны и различны. Тогда уравнение имеет два решения  $y_1 = e^{k_1 x}$  и  $y_2 = e^{k_2 x}$ . Эти решения линейно независимы.

Действительно,

$$\frac{y_1}{y_2} = \frac{e^{k_1 x}}{e^{k_2 x}} = e^{(k_1 - k_2)x} \neq \text{const.}$$

Поэтому по теореме 4 предыдущей лекции общее решение уравнения (2) имеет вид

$$y = C_1 e^{k_1 x} + C_2 e^{k_2 x},$$

где  $C_1$  и  $C_2$  — произвольные постоянные.

### 7.6.3. Случай кратных корней характеристического уравнения

II. Корни характеристического уравнения действительные и равные:  $k_1 = k_2$ . Покажем, что в этом случае  $y_1 = e^{k_1 x}$  и  $y_2 = x e^{k_1 x}$  — два решения уравнения (2), образующих фундаментальную систему.

Сначала покажем, что  $y_2 = x e^{k_1 x}$  — решение.

Имеем

$$\begin{aligned} y_2' &= e^{k_1 x} + x k_1 e^{k_1 x}, \\ y_2'' &= x k_1^2 e^{k_1 x} + 2 k_1 e^{k_1 x}, \\ y_2'' + p y_2' + q y_2 &= e^{k_1 x} [x k_1^2 + 2 k_1 + p x k_1 + p + q x] = \\ &= e^{k_1 x} [x(k_1^2 + p k_1 + q) + p + 2 k_1] = 0, \end{aligned}$$

поскольку  $k_1$  — решение уравнения (3) и по теореме Виетта  $p = -2k_1$ . Далее, определитель Вронского не равен нулю:

$$\begin{vmatrix} e^{k_1 x} & x e^{k_1 x} \\ k_1 e^{k_1 x} & e^{k_1 x} + x k_1 e^{k_1 x} \end{vmatrix} = e^{2k_1 x} \neq 0.$$

Как видим, решения  $y_1$  и  $y_2$  образуют фундаментальную систему и общее решение в этом случае имеет вид

$$y = C_1 e^{k_1 x} + C_2 x e^{k_1 x} = e^{k_1 x} (C_1 + C_2 x).$$

### 7.6.4. Случай комплексно-сопряженных корней характеристического уравнения

III. Корни уравнения (3) комплексно-сопряженные:

$$k_1 = a + bi, \quad k_2 = a - bi.$$

Тогда, согласно определению показательной функции комплексного аргумента, можем записать:

$$y_1 = e^{(a+bi)x} = e^{ax}(\cos bx + i \sin bx),$$

$$y_2 = e^{(a-bi)x} = e^{ax}(\cos bx - i \sin bx).$$

Здесь  $y_1$  и  $y_2$  — решения уравнения (2).

Введем действительные функции  $\bar{y}_1$  и  $\bar{y}_2$ , определенные равенствами

$$\bar{y}_1 = \frac{1}{2}(y_1 + y_2) = e^{ax} \cos bx,$$

$$\bar{y}_2 = \frac{1}{2i}(y_1 - y_2) = e^{ax} \sin bx.$$

По теореме 3 гл. 6  $\bar{y}_1$  и  $\bar{y}_2$  — решения уравнения (2),  $\frac{\bar{y}_1}{\bar{y}_2} = \operatorname{ctg} bx \neq \operatorname{const}$

$\Rightarrow \bar{y}_1, \bar{y}_2$  — линейно независимы. Поэтому общее решение уравнения (2) имеет вид

$$y = e^{ax}(C_1 \cos bx + C_2 \sin bx).$$

**Пример.** Вернемся к примеру о колебаниях шарика под действием сил упругости пружин, рис. 7.1.

Силы упругости пружин являются внутренними силами данной механической системы. Внешних воздействий, за исключением начального отклонения шарика из положения равновесия, нет. Поэтому колебания только под действием внутренних сил упругости называются свободными, а уравнение колебаний имеет вид

$$m \frac{d^2 u}{dt^2} + Cu = 0,$$

где  $m$  — масса шарика;  $C$  — коэффициент жесткости пружин;  $u$  — функция перемещений;  $t$  — время.

Характеристическое уравнение данного уравнения

$$mk^2 + C = 0$$

имеет чисто мнимые корни  $k_{1,2} = \pm i\omega$ ,  $\omega = \sqrt{m/C}$ . Поэтому общее решение имеет вид

$$u(t) = C_1 \cos \omega t + C_2 \sin \omega t.$$

Допустим, что в начальный момент времени  $t = 0$  шарик отклонили на величину  $u_0$  и отпустили с нулевой скоростью. Тогда начальные условия будут следующими:

$$u(0) = u_0, \quad u'(0) = 0.$$

После подстановки общего решения в начальные условия определяем константы  $C_1 = u_0$ ,  $C_2 = 0$  и получаем решение

$$u(t) = u_0 \cos \omega t,$$

которое описывает процесс свободных гармонических колебаний шарика с круговой частотой  $\omega$ .

### 7.6.5. Линейные неоднородные уравнения с постоянными коэффициентами и специальными правыми частями

Будем изучать неоднородное уравнение

$$y'' + py' + qy = f(x). \quad (4)$$

По теореме 5 предыдущей лекции его общее решение складывается из общего решения соответствующего однородного уравнения и частного решения неоднородного, причем в общем случае частное решение неоднородного уравнения отыскивается методом вариации произвольных постоянных. Однако можно указать некоторые важные для приложений частные случаи, когда частное решение ищется в некотором специальном виде.

I.  $f(x) = e^{\alpha x} P_n(x)$ , где  $P_n(x) = \beta_0 x^n + \beta_1 x^{n-1} + \dots + \beta_n$ .

Тогда:

1) если  $\alpha$  не является корнем характеристического уравнения (3), то  $\bar{y}$  ищем в виде  $\bar{y} = e^{\alpha x} Q_n(x)$ , где  $Q_n(x)$  — многочлен  $n$ -й степени с неопределенными коэффициентами;

2) если  $\alpha$  является корнем характеристического уравнения кратности  $r$ , то  $\bar{y} = x^r e^{\alpha x} Q_n(x)$ .

**Пример.** Найти частное решение уравнения

$$y'' - y = e^x, \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = 1.$$

Выпишем характеристическое уравнение:  $k^2 - 1 = 0 \Rightarrow k_{1,2} = \pm 1$ . Поэтому общее решение  $y_0(x)$  однородного уравнения будет

$$y_0 = C_1 e^x + C_2 e^{-x}.$$

Здесь  $\alpha = 1$ ,  $n = 0$ . Поскольку  $\alpha$  является корнем характеристического уравнения кратности 1, то частное решение неоднородного уравнения ищем в виде

$$\bar{y} = x e^x A; \quad \bar{y}' = A e^x + x e^x A, \quad \bar{y}'' = 2 A e^x + x e^x A.$$



Подставляя  $\bar{y}$ ,  $\bar{y}'$ ,  $\bar{y}''$  в исходное уравнение, получим

$$2Ae^x = e^x \Rightarrow A = \frac{1}{2}.$$

Таким образом,  $y = C_1x + C_2e^{-x} + \frac{1}{2}xe^x$  — общее решение неоднородного уравнения.

Подберем значения постоянных  $C_1$  и  $C_2$  так, чтобы выполнялись начальные условия. Искомое частное решение имеет вид

$$y_r = \frac{1}{4}(e^x - e^{-x}) + \frac{1}{2}xe^x.$$

II.  $f(x) = e^{ax}[P_n(x) \cos bx + P_m(x) \sin bx]$ .

Тогда:

1) если  $a + bi$  не является корнем характеристического уравнения, то  $\bar{y}$  ищем в виде

$$\bar{y} = e^{ax}[Q_N(x) \cos bx + G_N(x) \sin bx],$$

где  $Q_N(x)$  и  $G_N(x)$  — многочлены степени  $N = \max(n, m)$ ;

2) если  $a + bi$  является корнем характеристического уравнения, то  $\bar{y} = xe^{ax}[Q_N(x) \cos bx + G_N(x) \sin bx]$ .

### 7.6.6. Уравнение гармонического осциллятора. Резонанс

**Пример.** Найти общее решение уравнения гармонического осциллятора, находящегося под воздействием внешней гармонической силы:

$$y'' + \omega_1^2 y = r \cos \omega t. \quad (5)$$

**Решение.** Характеристическое уравнение соответствующего однородного уравнения имеет вид

$$k^2 + \omega_1^2 = 0 \Rightarrow k_{1,2} = \pm i\omega_1.$$

Тогда  $Y = C_1 \cos \omega_1 t + C_2 \sin \omega_1 t$ , где  $C_1, C_2$  произвольные постоянные. Это решение описывает свободные колебания системы, которые также называются собственными колебаниями. При отыскании частного решения неоднородного уравнения рассмотрим два случая.

1. Частота внешнего воздействия  $\omega$  не равна частоте собственных колебаний  $\omega_1$ . В этом случае частное решение ищем в виде

$$\bar{y} = A \cos \omega t.$$

Для определения неизвестной константы  $A$  подставляем его в уравнение (5):

$$(\omega_1^2 - \omega^2)A = r \Rightarrow A = \frac{r}{(\omega_1^2 - \omega^2)}.$$

В результате общее решение будет

$$y(t) = C_1 \cos \omega_1 t + C_2 \sin \omega_1 t + A \cos \omega t,$$

произвольные константы которого как обычно определяются из начальных условий.

2. Частота внешнего воздействия  $\omega$  равна частоте собственных колебаний  $\omega_1$ :  $\omega = \omega_1$ . В этом случае частное решение ищем в виде

$$\bar{y} = t(A_1 \cos \omega_1 t + A_2 \sin \omega_1 t).$$

Для определения коэффициентов подставляем это решение в (5):

$$2\omega_1(-A_1 \sin \omega_1 t + A_2 \cos \omega_1 t) = r \cos \omega_1 t,$$

$$A_1 = 0 \quad A_2 = \frac{r}{2\omega_1}.$$

В результате получаем общее решение неоднородного уравнения в данном случае:

$$y(t) = C_1 \cos \omega_1 t + C_2 \sin \omega_1 t + \frac{rt}{2\omega_1} \sin \omega_1 t.$$

Как видим, в данном случае, когда частота внешних воздействий совпадает с частотой собственных колебаний, амплитуда колебаний становится переменной во времени  $t$  и неограниченно возрастает. В этом и состоит явление резонанса.

## 7.7. Системы дифференциальных уравнений

Система в нормальной форме. Общее решение. Решение системы сведением ее к уравнению высшего порядка. Обратное сведение. Линейные системы с постоянными коэффициентами. Отыскание фундаментальной системы решений.

### 7.7.1. Система в нормальной форме. Общее решение

Во многих задачах требуется определить сразу несколько функций, связанных определенными соотношениями. Такие задачи приводят к системам дифференциальных уравнений. Мы будем изучать только системы в нормальной форме или «нормальные системы».

**ОПРЕДЕЛЕНИЕ.** Система  $n$  уравнений относительно неизвестных функций  $y_1(x)$ ,  $y_2(x)$ , ...,  $y_n(x)$ , имеющая вид

$$\begin{aligned}
 \frac{dy_1}{dx} &= f_1(x, y_1, \dots, y_n), \\
 \frac{dy_2}{dx} &= f_2(x, y_1, \dots, y_n), \\
 &\dots\dots\dots \\
 \frac{dy_n}{dx} &= f_n(x, y_1, \dots, y_n),
 \end{aligned}
 \tag{1}$$

называется системой в нормальной форме или «нормальной системой». В нормальной системе ее правые части не зависят от производных искомых функций.

Решением системы (1) называется совокупность функций  $y_1(x), \dots, y_n(x)$ , обращающих равенства (1) в тождества. Для системы (1) справедлива теорема существования и единственности решения.

**Теорема 1 (теорема Коши).** Пусть функции  $f_1, f_2, \dots, f_n$  непрерывны в некоторой области  $G$  переменных  $x, y_1, \dots, y_n$  вместе со своими частными производными  $\frac{\partial f_i}{\partial y_j}$  ( $i, j = 1, 2, \dots, n$ ). Тогда для любых значений  $x_0, y_1^0, \dots, y_n^0$  из области  $G$  существует единственное решение  $y_1(x), y_2(x), \dots, y_n(x)$ , удовлетворяющее начальным условиям  $y_1(x_0) = y_1^0, y_2(x_0) = y_2^0, \dots, y_n(x_0) = y_n^0$ .

**ОПРЕДЕЛЕНИЕ.** Общим решением нормальной системы (1) называется совокупность  $n$  функций

$$\begin{aligned}
 y_1 &= \varphi_1(x, C_1, C_2, \dots, C_n), \\
 y_2 &= \varphi_2(x, C_1, C_2, \dots, C_n), \\
 &\dots\dots\dots \\
 y_n &= \varphi_n(x, C_1, C_2, \dots, C_n)
 \end{aligned}$$

таких, что:

- 1) при  $\forall C_1, C_2, \dots, C_n$  это решение системы (1);
- 2) для  $\forall x_0, y_1^0, y_2^0, \dots, y_n^0$  из области существования решения  $\exists C_1^0, C_2^0, \dots, C_n^0$  такие, что

$$\begin{aligned}
 \varphi_1(x_0, C_1^0, \dots, C_n^0) &= y_1^0, \\
 &\dots\dots\dots \\
 \varphi_n(x_0, C_1^0, \dots, C_n^0) &= y_n^0.
 \end{aligned}$$

### 7.7.2. Решение системы уравнений путем сведения к одному уравнению высшего порядка. Обратное сведение

Чтобы раскрыть суть последующих исследований и построения общих решений систем однородных и неоднородных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами, рассмотрим пример системы двух уравнений, решение которой можно направить в уже известное нам русло.

Рассмотрим систему двух однородных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами

$$\begin{aligned}\frac{dy_1}{dx} &= y_1 + y_2, \\ \frac{dy_2}{dx} &= y_1 - y_2.\end{aligned}$$

С помощью первого уравнения выразим  $y_2$  через  $y_1$  и подставим во второе уравнение:

$$\begin{aligned}y_2 &= \frac{dy_1}{dx} - y_1, \\ \frac{d^2 y_1}{dx^2} - 2y_1 &= 0.\end{aligned}$$

Теперь мы видим, что из второго уравнения мы получаем два частных решения для функции  $y_1$ :

$$y_{11} = e^{\sqrt{2}x}, \quad y_{12} = e^{-\sqrt{2}x},$$

а с помощью первого находим два частных решения для функции  $y_2$ :

$$y_{21} = (\sqrt{2} - 1)e^{\sqrt{2}x}, \quad y_{22} = -(\sqrt{2} + 1)e^{-\sqrt{2}x}.$$

На данном этапе исследований мы можем только предположить, что общее решение будет иметь вид

$$\begin{aligned}y_1(x) &= C_1 y_{11} + C_2 y_{12}, \\ y_2(x) &= C_1 y_{21} + C_2 y_{22}.\end{aligned}$$

Поскольку преобразование системы уравнений к одному дифференциальному уравнению не всегда возможно, то рассмотрим другой путь решения, который после полученного уже решения становится достаточно очевидным.

Согласно методу Эйлера частные решения исходной системы двух уравнений будем искать в виде

$$y_1(x) = Ae^{\lambda x}, \quad y_2(x) = Be^{\lambda x}.$$

После подстановки искомых решений в дифференциальные уравнения исходной системы получаем систему двух однородных уравнений для определения коэффициентов этих решений:

$$\begin{aligned}(\lambda - 1)A - B &= 0, \\ -A + (\lambda + 1)B &= 0,\end{aligned}$$

которая имеет ненулевые решения, если определитель матрицы этих уравнений равен нулю:

$$\begin{vmatrix} \lambda - 1 & -1 \\ -1 & \lambda + 1 \end{vmatrix} = 0.$$

Таким образом, мы получили характеристическое уравнение данной системы дифференциальных уравнений и совершенно аналогично тому, как это делалось для дифференциальных уравнений второго порядка с постоянными коэффициентами.

Здесь также получаем  $\lambda_{1,2} = \pm\sqrt{2}$ . Подставим  $\lambda_1$  в систему уравнений для определения  $A$ ,  $B$ . В итоге первое уравнение дает соотношение

$$B = (\sqrt{2} - 1)A,$$

а второе выполняется при произвольных значениях  $A$ . Следовательно, первому корню характеристического уравнения соответствуют

$$A = C_1, \quad B = (\sqrt{2} - 1)C_1.$$

И аналогично получим для второго частного решения

$$A = C_2, \quad B = -(\sqrt{2} + 1)C_2.$$

Данный путь решения указывает на широкие возможности его обобщения на случай большого числа уравнений.

Покажем теперь, что дифференциальное уравнение  $n$ -го порядка

$$y^{(n)} = f(x, y, y', \dots, y^{(n-1)}) \quad (2)$$

всегда может быть записано в виде системы уравнений в нормальной форме. Действительно, положим  $y = y_1$ ,  $y' = y_2$ , ...,  $y^{(n-1)} = y_n$ . Тогда можем записать:

$$\begin{cases} \frac{dy_1}{dx} = y_2, \\ \frac{dy_2}{dx} = y_3, \\ \dots \dots \dots \\ \frac{dy_{n-1}}{dx} = y_n, \\ \frac{dy_n}{dx} = f(x, y_1, \dots, y_n). \end{cases} \quad (3)$$



$$e^{(k_1+k_2+\dots+k_n)x}.$$

**Теорема.** *Общее решение системы (4) имеет вид*

$$\begin{aligned} y_1 &= C_1y_{11} + C_2y_{21} + C_3y_{31} + \dots + C_ny_{n1}, \\ y_2 &= C_1y_{12} + C_2y_{22} + C_3y_{32} + \dots + C_ny_{n2}, \\ &\vdots \\ y_n &= C_1y_{1n} + C_2y_{2n} + C_3y_{3n} + \dots + C_ny_{nn}, \end{aligned} \quad (6)$$

Для определения произвольных постоянных необходимая система алгебраических уравнений получается из заданных начальных условий:

$$\begin{aligned} C_1 y_{11}(x_0) + C_2 y_{21}(x_0) + C_3 y_{31}(x_0) + \dots + C_n y_{n1}(x_0) &= y_1^0, \\ C_1 y_{12}(x_0) + C_2 y_{22}(x_0) + C_3 y_{32}(x_0) + \dots + C_n y_{n2}(x_0) &= y_2^0, \\ \dots & \\ C_1 y_{1n}(x_0) + C_2 y_{2n}(x_0) + C_3 y_{3n}(x_0) + \dots + C_n y_{nn}(x_0) &= y_n^0. \end{aligned} \quad (7)$$

#### 7.7.4. Построение фундаментальной системы решений. Метод Эйлера

Решения системы (5) будем искать в виде  $\bar{y} = \bar{\alpha} e^{\lambda x}$ , где  $\bar{\alpha}$  — некоторый вектор. Подставив  $\bar{y}$  в систему (5), получим  $\lambda \bar{\alpha} e^{\lambda x} = A \bar{\alpha} e^{\lambda x}$  или

$$\lambda \bar{\alpha} = A \bar{\alpha}. \quad (8)$$

Равенство (8) означает, что  $\bar{\alpha}$  должен быть собственным вектором матрицы  $A$ , соответствующим собственному значению  $\lambda$ .





Составим характеристическое уравнение

$$\det|A - \lambda I| = \begin{vmatrix} 3-\lambda & -1 & 1 \\ -1 & 5-\lambda & -1 \\ 1 & -1 & 3-\lambda \end{vmatrix} = (3-\lambda)(\lambda^2 - 8\lambda + 12) \Rightarrow$$

$$\lambda_1 = 3, \quad \lambda_2 = 6, \quad \lambda_3 = 2.$$

Найдем собственные векторы, соответствующие найденным собственным значениям. Для  $\lambda = \lambda_1 = 3$  матрица  $A - \lambda_1 I$  имеет вид

$$A - 3I = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ -1 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

В качестве компонентного первого собственного вектора возьмем алгебраические дополнения первой строки матрицы  $A - 3I$ :

$$\alpha_1^1 = -1, \quad \alpha_2^1 = -1, \quad \alpha_3^1 = -1.$$

Аналогично

$$A - 6I = \begin{pmatrix} -3 & -1 & 1 \\ -1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & -3 \end{pmatrix} \Rightarrow \alpha_1^2 = 2, \quad \alpha_2^2 = -4, \quad \alpha_3^2 = 2;$$

$$A - 2I = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & 3 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \alpha_1^3 = 2, \quad \alpha_2^3 = 0, \quad \alpha_3^3 = -1.$$

По формулам (11) получаем

$$y_1(x) = C_1 e^{3x} + C_2 e^{6x} + 2C_3 e^{2x},$$

$$y_2(x) = C_1 e^{3x} - 2C_2 e^{6x},$$

$$y_3(x) = C_1 e^{3x} + C_2 e^{6x} - C_3 e^{2x}.$$

В заключение отметим, что все корни характеристического уравнения действительные числа, если матрица  $A$  коэффициентов правых частей уравнений (4) симметричная.

### 7.8. Линейное уравнение второго порядка с переменными коэффициентами. Метод скалярной прогонки

Вводные замечания и постановка задачи. Конечно-разностный метод прогонки. Фортран программа решения краевых задач для дифференциальных уравнений второго порядка методом прогонки.

#### 7.8.1. Вводные замечания и постановка задачи

В инженерной практике, наряду с задачами Коши для обыкновенных дифференциальных уравнений, возникают и рассматриваются также краевые задачи, когда дополнительные условия, присоединяемые к дифференциальным уравнениям, задаются на концах отрезка, на котором разыскивается решение. В качестве таких примеров могут служить задача изгиба балки, задача о провисании тяжелой нити с закрепленными концами, задача о распределении напряжения по длине шелевого межэлектродного зазора, заполненного электролитом, стационарные задачи диффузии и многие другие.

Возможности численного решения данных задач при современном уровне компьютерной техники широко используются при проектировании элементов конструкций и при отработке и расчете технологических процессов. Поэтому мы предлагаем начать изучение поставленных вопросов с решения уравнения общего вида

$$\frac{d^2 y}{dx^2} + p(x) \frac{dy}{dx} - q(x)y = f(x), \quad (1)$$

которое в частных случаях имеет различный физический смысл. При этом будем учитывать, что коэффициенты уравнения могут быть заданы не только аналитическими выражениями, но и таблично, а граничные условия тоже запишем в общем виде

$$\begin{aligned} h_1 y'(0) + g_1 y(0) &= e_1, \\ h_2 y'(l) + g_2 y(l) &= e_2, \end{aligned} \quad (2)$$

где  $h_i$ ,  $g_i$ ,  $e_i$  — заданные числа, соответствующие условиям данной конкретной задачи. В разных частных случаях они имеют определенный физический смысл. Например, при рассмотрении задачи изгиба балок с шарнирными опорами на концах функция прогиба  $y(x)$  должна удовлетворять однородным условиям

$$y(0) = 0, \quad y(l) = 0.$$

Таким образом, здесь  $\alpha_i = 0$ ,  $\beta_i = 1$ ,  $\gamma_i = 0$ ,  $i = 1, 2$ . Уравнение (1) в этом случае имеет тоже простой вид

$$y''(x) = f(x),$$

но функция  $f(x)$  может быть задана разными аналитическими выражениями на разных участках длины балки, и алгоритм численного решения будет менее трудоемким, чем аналитическое решение.

Общее решение уравнения (1) с переменными коэффициентами можно выразить через элементарные функции лишь в очень редких случаях. Поэтому общая схема решения поставленной краевой задачи (1)–(2) может быть разработана лишь на основе численного метода. Мы рассмотрим наиболее эффективный метод конечных разностей с использованием метода Гаусса решения разностных уравнений, который применительно к решению систем алгебраических уравнений высокого порядка с трехдиагональной матрицей получил название метода прогонки.

### 7.8.2. Конечно-разностный метод прогонки

При использовании метода конечных разностей решения дифференциальных краевых задач поиск функции  $y(x)$  заменяется вычислением последовательности ее значений в заданных точках с координатами

$$x_1 = 0, x_2, x_3, \dots, x_N, x_{N+1} = l$$

и постоянным шагом между ними  $dx = l/N$ . Условие выполнения дифференциального уравнения во всех точках заданного отрезка  $[0, l]$  заменяется требованием его выполнения во всех внутренних точках с координатами  $x_2, x_3, \dots, x_N$ , а на концах отрезка  $x_1 = 0$  и  $x_{N+1} = l$  должны выполняться граничные условия.

При записи дифференциального уравнения во внутренних узловых точках производные заменяются конечными разностями. При замене первых и вторых производных центральными разностями получаем  $(N-1)$  алгебраических уравнений

$$\frac{y_{k-1} - 2y_k + y_{k+1}}{dx^2} + p(x_k) \frac{y_{k+1} - y_{k-1}}{2dx} - q(x_k)y_k = f(x_k),$$

$$y_k = y(x_k), \quad k = 2, 3, 4, \dots, N. \quad (3)$$

Здесь следует отметить, что запись производных в каждой точке  $x = x_k$  в виде центральных разностей соответствует квадратичной интерполяции искомой функции в окрестности точки  $x = x_k$ . Поэтому для записи производных на границах нужно тоже воспользоваться квадратичной интерполяцией. Тогда около левой границы получим следующее выражение для искомой функции

$$y(x) = y_1 + \frac{y_2 - y_1}{dx}(x - x_1) + \frac{y_1 - 2y_2 + y_3}{2dx^2}(x - x_1)(x - x_2), \quad 0 \leq x \leq x_3$$

и выражение для первой производной на левой границе

$$y'_1 = y'(0) = \frac{-3y_1 + 4y_2 - y_3}{2dx}.$$

Аналогичным образом получаем выражение для производной на правой границе, где

$$\begin{aligned} y(x) &= y_{N-2} + \frac{y_{N-1} - y_{N-2}}{dx}(x - x_{N-2}) + \\ &+ \frac{y_{N-2} - 2y_{N-1} + y_{N+1}}{2dx^2}(x - x_{N-2})(x - x_{N-1}), \\ x_{N-2} \leq x \leq x_{N+1} \quad \Rightarrow \quad y'_{N+1} &= \frac{y_{N-2} - 4y_{N-1} - 3y_{N+1}}{2dx}. \end{aligned}$$

После некоторых преобразований граничных условий и внутренних конечно-разностных уравнений (3) получаем систему  $(N+1)$  алгебраических уравнений с  $(N+1)$  неизвестными  $y_1, y_2, y_3, \dots, y_N, y_{N+1}$ :

$$\begin{aligned} A_1 y_1 - B_1 y_2 + C_1 y_3 &= d_1, \\ A_k y_{k-1} - B_k y_k + C_k y_{k+1} &= d_k, \end{aligned} \quad (4)$$

$$A_{N+1} y_{N-1} - B_{N+1} y_N + C_{N+1} y_{N+1} = d_{N+1},$$

где первая и последняя строка — граничные условия, а вторая строка это внутренние уравнения (3). Для коэффициентов этих уравнений получены следующие выражения:

$$\begin{aligned} A_1 &= g_1 - 3h_1/2dx, \quad B_1 = -2h_1/dx, \quad C_1 = -h_1/2dx, \quad d_1 = e_1, \\ A_{N+1} &= h_2/2dx, \quad B_{N+1} = 2h_2/dx, \quad C_{N+1} = g_2 + 3h_2/2dx, \quad d_2 = e_2, \\ A_k &= 1 - p_k/2dx, \quad C_k = 1 + p_k dx/2, \quad B_k = 2 + q_k dx^2, \quad d_k = f(x_k)dx^2, \\ k &= 2, 3, 4, \dots, N. \end{aligned}$$

Прежде чем сказать о сути метода прогонки решения полученной системы уравнений, преобразуем первое граничное условие, исключив из него  $y_3$  с помощью первого внутреннего уравнения, из которого можно получить

$$y_3 = C_2^{-1}(B_2 y_2 - A_2 y_1 + d_2).$$

Подставим это выражение в первое граничное условие и представим его в виде

$$\begin{aligned} y_1 &= S_1 y_2 + r_1, \\ S_1 &= \frac{B_1 - C_1 C_2^{-1} B_2}{A_1 - C_1 C_2^{-1} A_2}, \quad r_1 = \frac{d_1 - C_1 C_2^{-1} B_2}{A_1 - C_1 C_2^{-1} A_2}. \end{aligned} \quad (7)$$

Метод прогонки заключается в том, что теперь можно подставить  $y_1$  в первое внутреннее уравнение и получить аналогичное соотношение между двумя следующими переменными:

$$y_2 = S_2 y_3 + r_2,$$

затем преобразовать второе уравнение

$$y_3 = S_3 y_4 + r_3,$$

и так далее.

В результате все внутренние уравнения принимают вид

$$y_{k-1} = S_{k-1} y_k + r_{k-1}, \quad k = 2, 3, \dots, N. \quad (8)$$

Коэффициенты этих уравнений получили название прогоночных коэффициентов, поскольку для них получились рекуррентные соотношения

$$S_k = \frac{C_k}{B_k - A_k P_{k-1}}, \quad r_k = \frac{d_k - A_k q_{k-1}}{B_k - A_k P_{k-1}}, \quad k = 2, 3, \dots, N, \quad (9)$$

и вычислять их нужно последовательно в цикле от второго до последнего.

Осталось не использованным пока второе граничное условие, из которого с помощью двух последних уравнений (8) можно исключить

$$y_N = (S_N y_{N+1} + r_N), \quad y_{N-1} = S_{N-1} y_N + r_{N-1}, \Rightarrow \quad (10)$$

$$\Rightarrow y_{N-1} = S_{N-1}(S_N y_{N+1} + r_N) + r_{N-1}$$

и вычислить

$$\begin{aligned} A_{N+1}(S_{N-1}(S_N y_{N+1} + r_N) + r_{N-1}) - B_{N+1}(S_N y_{N+1} + r_N) + \\ + C_{N+1} y_{N+1} = d_{N+1}, \\ y_{N+1} = \frac{d_{N+1} + B_{N+1} r_N - A_{N+1} r_{N-1} - A_{N+1} S_{N-1} r_N}{A_{N+1} S_{N-1} S_N - B_{N+1} S_{N-1} + C_{N+1}}. \end{aligned} \quad (11)$$

После этого из уравнений (8) в обратной последовательности при  $k = N, N-1, N-1, \dots, 2$  вычисляются значения искомой функции во всех точках. Таким образом, алгоритм решения задачи в целом состоит из следующих трех блоков:

- 1) вычисление коэффициентов разностных уравнений (5), (6);
- 2) вычисление первых прогоночных коэффициентов (7) и всех последующих  $S_k, r_k$  по формулам (9);
- 3) вычисление значения искомой функции (11) на границе и всех значений  $y_k$  с помощью уравнений (8).

Как видим, все эти три процедуры являются циклическими. При этом цикл вычисления прогоночных коэффициентов называют прямой прогонкой (Direct case), а цикл вычисления значений искомой функции обратной прогонкой (Return case).

В заключение следует отметить, что в пределах нескольких страниц мы изложили метод решения краевых задач с дифференциальным уравнением второго порядка с переменными коэффициентами. Фортран-программа практической реализации решений займет еще одну страницу. Данный пример есть наглядная иллюстрация того, какие огромные возможности дает нам современный компьютер.

В этой связи интересно также отметить, что решению одного только дифференциального уравнения Бесселя

$$\frac{d^2 y}{dx^2} + \frac{1}{x} \frac{dy}{dx} + \left(1 - \frac{n^2}{x^2}\right)y = 0$$

в свое время были посвящены отдельные монографии.

### 7.8.3. Фортран-программа решения краевых задач для дифференциальных уравнений второго порядка методом прогонки

Данная программа написана как Difur.f90, но Фортран-77 обладает всеми возможностями, которые здесь использованы. Если потребуется оформить ее как Difur.for, т. е. с расширением .for, то для этого потребуется только заменить символ комментария, символы продолжения строки и сдвинуть некоторые операторы вправо, которые написаны не с 7-й позиции, а выходят за пределы поля операторов.

К числу исходных данных здесь отнесены:

N — число узловых точек;

г — длина отрезка  $[0, l]$ , на котором строится решение;

g — коэффициенты граничных условий.

Причем ввод исходных данных осуществляется оператором READ из внешнего файла с файловым указателем (ФУ) 11.

Коэффициенты уравнения  $p(x)$ ,  $q(x)$  и правая часть  $f(x)$  вычисляются как заданные функции. Эти программные единицы находятся в конце программы. В качестве тестового варианта заданы:  $p = 0$ ,  $q = 1$ ,  $f = -1$  при  $h_1 = 1$ ;  $g_1 = 0$ ;  $e_1 = 0$ ;  $h_2 = 0$ ;  $g_2 = 1$ ;  $e_2 = 2$ . Тестовое уравнение решается при всех других вариантах расчета, и результаты его решения записываются во внешний файл с ФУ = 12 в качестве второй таблицы результатов, где первая таблица соответствует заданному варианту основной программы.

Таким образом, чтобы получить решение заданного уравнения, достаточно вписать в программу выражения заданных функций  $p(x)$ ,  $q(x)$ ,  $f(x)$  и заполнить две строки файла исходных данных «ZADANO»:

101, 2.

1. 0. 0.      0. 1. 2.

eof

В первой строке здесь  $N$ ,  $l$ . Во второй строке  $h_1$ ,  $g_1$ ,  $e_1$ ,  $h_2$ ,  $g_2$ ,  $e_2$ .

Результаты расчета находятся в файле RESULT\_Y.txt. Причем при задании любого числа  $N$  узловых точек в файл результатов записываются числовые значения функции  $Y$  с шагом  $0.1l$ .

```

      PROGRAM difur
!   Differential equation: d2Y+p(x) dY-q(x) Y=f(x)
!   Boundary conditions: h1*dY+g1*Y=e1
!                       h2*dY+g2*Y=e2
      ALLOCATABLE S(:), r(:), Xk(:), Yk(:)

      OPEN(11, FILE='ZADANO.txt')
      OPEN(12, FILE='RESULT_Y.txt')
!   *****
      READ(11, *) N, eL, h1, g1, e1, h2, g2, e2 !*
      WRITE(*, ' (2x,A,I5,2x,A,F4.0,/, &
                2x,A,F4.0,2x,A,F4.0,2x,A,F4.0,/, &
                2x,A,F4.0,2x,A,F4.0,2x,A,F4.0)') , &
        'N=', N, 'eL=', eL, 'h1=', h1, 'g1=', g1, 'e1=', e1, &
        'h2=', h2, 'g2=', g2, 'e2=', e2 !*
      WRITE(12, ' (2x,A,I5,2x,A,F4.0,/, &
                2x,A,F4.0,2x,A,F4.0,2x,A,F4.0,/, &
                2x,A,F4.0,2x,A,F4.0,2x,A,F4.0)') , &
        'N=', N, 'eL=', eL, 'h1=', h1, 'g1=', g1, 'e1=', e1, &
        'h2=', h2, 'g2=', g2, 'e2=', e2
!   *****
      ALLOCATE (S(N), r(N), Xk(N), Yk(N))

      dx=eL/(N-1); A1=g1-3.*h1*0.5/dx; B1=-2.*h1/dx; C1=-0.5*h1/dx
      d1=e1; x=dx; Xk(1)=0.
      Ak=1.-p(x)*DX/2.; Ck=1+p(x)*DX/2.; Bk=2.+q(x)*DX**2
      dk=f(x)*DX**2
      S(1)=(B1-C1*Bk/Ck)/(A1-C1*Ak/Ck)
      r(1)=(d1-C1*dk/Ck)/(A1-C1*Ak/Ck)
      DO K=2, N-1
        Xk(K)=Xk(K-1)+dx; x=Xk(K)
        Ak=1.-p(x)*DX/2.; Ck=1+p(x)*DX/2.; Bk=2.+q(x)*DX**2
        dk=f(x)*DX**2
        S(K)=Ck/(Bk-Ak*S(K-1));
        r(K)=(Ak*r(K-1)-dk)/(Bk-Ak*S(K-1))
      ENDDO
!Direct RACE

```

```

! Here Ab = AN+1; Bb = BN+1; Cb = CN+1
Ab=h2*0.5/dx; Bb=2.*h2/dx; Cb=g2+1.5*h2/dx; db=e2
Chisl=db+Bb*r(N-1)-Ab*r(N-2)-Ab*S(N-2)*r(N-1)
Yk(N)=Chisl/(Ab*S(N-2)*S(N-1)-Bb*S(N-1)+Cb); Xk(N)=eL

DO K=1,N-1
Yk(N-K)=S(N-K)*Yk(N-K+1)+r(N-K)
Enddo! Reverse RACE
m=(N-1)/10
WRITE(12,*)'It is Yk(x)'
write(12,'(2x,A,F16.4,3x,A,F16.4)') &
(( 'x=',Xk(1+m*(K-1)), 'y=',Yk(1+m*(K-1))),k=1,11)

WRITE(12,*)'It is Y(x) Test'
! ***** TEST *****
DO K=1,11
x=Xk(1+m*(K-1)); Ya=1.+cosh(x)/cosh(2.)
write(12,'(2x,A,F6.2,3x,A,F16.4)') &
'x=',x,'Ya=',Ya
write(*,'(2x,A,F6.2,3x,A,F16.4)') &
'x=',x,'Ya=',Ya
CALL sleepqq(400)
Enddo

WRITE(*,*) ' PROGRAM difur is terminated!!! OK!'
PAUSE
end Program difur

FUNCTION p(x)
p=0. !9*x
RETURN
End FUNCTION p

! *****
FUNCTION q(x)
q=1. !+sin(x)
RETURN
End FUNCTION q

! *****
FUNCTION f(x)
f=-1.
RETURN
End FUNCTION f

```



$$Y''(x) + P(x)Y'(x) - Q(x)Y(x) = F(x), \quad (1)$$

где

$$P(x) = \begin{pmatrix} p_{11} & p_{12} & \dots & p_{1n} \\ p_{21} & p_{22} & \dots & p_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ p_{n1} & p_{n2} & \dots & p_{nn} \end{pmatrix}, \quad Q(x) = \begin{pmatrix} q_{11} & q_{12} & \dots & q_{1n} \\ q_{21} & q_{22} & \dots & q_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ q_{n1} & q_{n2} & \dots & q_{nn} \end{pmatrix}, \quad F(x) = \begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \\ \dots \\ f_n \end{pmatrix}.$$

Граничные условия в общем случае имеют вид

$$H_1 Y'(0) + G_1 Y(0) = e_1, \quad H_2 Y'(l) + G_2 Y(l) = e_2, \quad (2)$$

где  $H_i, G_i$  ( $i = 1, 2$ ) — квадратные матрицы  $n$ -го порядка, составленные из коэффициентов заданных граничных условий; а  $e_1, e_2$  — векторы правых частей.

### 7.9.2. Конечно-разностная аппроксимация уравнений и граничных условий

Система дифференциальных уравнений и граничные условия, представленные в векторно-матричной форме (1), (2), выглядят точно так же, как и одно дифференциальное с его граничными условиями. Причем здесь мы имеем не только внешнее сходство этих двух задач, но и совершенно одинаковые алгоритмы их решения.

В данном случае под словом алгоритм нужно иметь в виду последовательность операций, которые нужно выполнить для получения решения. Последовательность операций одинаковая. Разными являются лишь элементы, которыми здесь являются векторы и матрицы, и с которыми мы оперируем.

Для матриц и векторов тоже определены операции сложения и вычитания, операции умножения матрицы на матрицу и матрицы на вектор, а вычислению обратной величины  $1/b$  соответствует вычисление обратной матрицы  $B^{-1}$ .

Поэтому дифференциальное уравнение (1) можно также записать в конечных разностях для всех внутренних узловых точек. Тогда при использовании стандартной трехточечной схемы центральных разностей для первых и вторых производных получим

$$\frac{1}{dx^2}(Y_{k-1} - 2Y_k + Y_{k+1}) + \frac{1}{2dx}P(x_k)(Y_{k+1} - Y_{k-1}) - Q(x_k)Y_k = F(x_k), \quad (3)$$

$$Y_k = Y(x_k), \quad k = 2, 3, 4, \dots, N.$$

Совершенно аналогичные выражения можно получить и для первой производной на границах:

$$Y_1' = Y'(0) = \frac{1}{2dx}(-3Y_1 + 4Y_2 - Y_3),$$

$$Y_{N+1}' = \frac{1}{2dx}(Y_{N-2} - 4Y_{N-1} + 3Y_{N+1}).$$

После некоторых преобразований граничных условий и внутренних конечно-разностных уравнений получаем систему  $(N+1)$  алгебраических уравнений, которые совершенно аналогичны предыдущим (см. п. 7.8.2), но с матричными коэффициентами, для определения  $(N+1)$  неизвестных векторов  $Y_1, Y_2, Y_3, \dots, Y_N, Y_{N+1}$ :

$$A_1 Y_1 - B_1 Y_2 + C_1 Y_3 = d_1,$$

$$A_k Y_{k-1} - B_k Y_k + C_k Y_{k+1} = d_k, \quad k = 2, 3, 4, \dots, N, \quad (4)$$

$$A_{N+1} Y_{N-1} - B_{N+1} Y_N + C_{N+1} Y_{N+1} = d_{N+1},$$

где первая и последняя строка — граничные условия, а вторая строка это внутренние уравнения (3). Для коэффициентов этих уравнений получены следующие выражения:

$$A_1 = G_1 - (3/2dx)H_1, \quad B_1 = (-2/dx)H_1, \quad C_1 = (-1/2dx)H_1, \quad d_1 = e_1, \quad (5)$$

$$A_{N+1} = (1/2dx)H_2, \quad B_{N+1} = (2/dx)H_2, \quad C_{N+1} = G_2 + (3/2dx)H_2, \quad d_2 = e_2,$$

$$A_k = 1 - p_k/2dx, \quad C_k = 1 + p_k dx/2, \quad B_k = 2 + q_k dx^2, \quad d_k = f(x_k)dx^2, \quad (6)$$

$$k = 2, 3, 4, \dots, N.$$

Здесь следует обратить внимание, что в коэффициенты  $A_k, C_k$  разностных уравнений входит матрица  $P$  дифференциального уравнения, она без индекса, но вычисляется при  $x = x_k$ . Аналогично в матрицу  $B_k$  разностных уравнений входит матрица  $Q(x_k)$  дифференциального уравнения. Кроме того, здесь  $I$  — единичная матрица,  $dx$  — шаг между узловыми точками.

### 7.9.3. Решение конечно-разностных уравнений методом матричной прогонки

Для решения полученной системы уравнений (4) мы представим *метод матричной прогонки*, который аналогичен изложенному выше методу скалярной прогонки. Последовательность выполнения всех операций здесь повторяется полностью. И мы последовательно их переносим в этот более сложный алгоритм с учетом их преобразования применительно к векторам и матрицам.

Преобразуем первое граничное условие, исключив из него вектор  $y_3$  с помощью первого внутреннего уравнения, из которого можно получить

$$y_3 = C_2^{-1}(B_2 y_2 - A_2 y_1 + d_2).$$

Подставим это выражение в первое граничное условие и преобразуем его к виду

$$y_1 = S_1 y_2 + r_1, \quad (7)$$

$$S_1 = (A_1 - C_1 C_2^{-1} A_2)^{-1} (B_1 - C_1 C_2^{-1} B_2), \quad r_1 = (A_1 - C_1 C_2^{-1} A_2)^{-1} (d_1 - C_1 C_2^{-1} d_2),$$

Теперь можно подставить  $y_1$  в первое внутреннее уравнение и получить аналогичное соотношение между двумя следующими переменными:

$$y_2 = S_2 y_3 + r_2,$$

затем преобразовать второе уравнение

$$y_3 = S_3 y_4 + r_3,$$

и так далее. В результате все внутренние уравнения принимают вид

$$y_{k-1} = S_{k-1} y_k + r_{k-1}, \quad k = 2, 3, \dots, N. \quad (8)$$

Коэффициенты этих уравнений получили название прогоночных коэффициентов, поскольку для них получились рекуррентные соотношения

$$S_k = (B_k - A_k P_{k-1})^{-1} C_k \quad r_k = (B_k - A_k P_{k-1})^{-1} (d_k - A_k q_{k-1}),$$

$$k = 2, 3, \dots, N. \quad (9)$$

и вычислять их нужно последовательно в цикле от второго до последнего.

Осталось не использованным пока второе граничное условие, из которого с помощью двух последних уравнений (8) можно исключить

$$y_N = (S_N y_{N+1} + r_N), \quad y_{N-1} = S_{N-1} y_N + r_{N-1}, \quad \Rightarrow \quad (10)$$

$$\Rightarrow y_{N-1} = S_{N-1}(S_N y_{N+1} + r_N) + r_{N-1}$$

и вычислить

$$\begin{aligned} A_{N+1}(S_{N-1}(S_N y_{N+1} + r_N) + r_{N-1}) - B_{N+1}(S_N y_{N+1} + r_N) + \\ + C_{N+1} y_{N+1} = d_{N+1}, \\ y_{N+1} = (A_{N+1} S_{N-1} S_N - B_{N+1} S_{N-1} + C_{N+1})^{-1} \times \\ \times (d_{N+1} + B_{N+1} r_N - A_{N+1} r_{N-1} - A_{N+1} S_{N-1} r_N). \end{aligned} \quad (11)$$

После этого из уравнений (8) в обратной последовательности при  $k = N, N-1, N-1, \dots, 2$  вычисляются значения искомой функции во всех точках. Таким образом, алгоритм решения задачи в целом состоит из следующих трех блоков:

- 1) вычисление коэффициентов разностных уравнений (5),(6);
- 2) вычисление первых прогоночных коэффициентов (7) и всех последующих  $S_k, r_k$  по формулам (9);
- 3) вычисление значения искомой функции (11) на границе и всех значений  $y_k$  с помощью уравнений (8).

Как видим, все эти три процедуры являются циклическими. При этом цикл вычисления прогоночных коэффициентов называют прямой прогонкой (Direct case), а цикл вычисления значений искомой функции обратной прогонкой (Return case).

Все операции здесь нужно выполнять с векторами и матрицами. Сложение, вычитание и умножение матриц можно запрограммировать при использовании современного фортрана достаточно просто, даже не прибегая к использованию стандартных подпрограмм. Что же касается операции вычисления обратной матрицы, то здесь необходимо использовать подпрограмму. В связи с этим ниже приведена такая подпрограмма.

В заключение следует отметить, что метод прогонки обладает уникальной положительной особенностью — погрешности вычислений прогоночных коэффициентов, неизбежно возникающие на каждом шаге в результате отбрасывания остаточных разрядов чисел, при переходе к следующему шагу вычислений не возрастают, а убывают наподобие членов геометрической прогрессии. В результате метод прогонки является устойчивым по отношению к ошибкам вычислений,

и быстро получил широкое распространение при решении краевых задач по расчету температурных полей и напряжений в элементах конструкций, при расчете на устойчивость пластин и оболочек, задач переноса тепла излучением, переноса нейтронов при расчете ядерных реакторов и других.

Возможность обобщения метода прогонки на метод матричной прогонки по представленной здесь схеме применительно к решению краевых задач теории оболочек и исследованию устойчивости была впервые опубликована в работах [21, 22]. При этом следует отметить, что в отдельных случаях для обеспечения возможности применения метода матричной прогонки, необходимо преодолеть некоторые трудности. Они возникают, например, при конечно-разностной аппроксимации граничных условий и в связи с тем, что на одной границе все условия заданы для одной части вектора искомых функций, а на другой границе для другой части вектора, как, например, при решении краевых задач переноса тепла излучением [26].

#### 7.9.4. Фортран-подпрограмма вычисления обратной матрицы

Вызов данной подпрограммы осуществляется оператором

**CALL invertM(A,N,Det,V1,V2),**

где  $A$  — данная матрица, обратная матрица возвращается в этот же массив;  $N$  — порядок матрицы  $A$ ;  $Det$  — определитель матрицы  $A$ , который вычисляется при выполнении операции обращения матрицы  $A$ ;  $V1, V2$  — рабочие одномерные массивы размерности  $N$ .

До вызова данной подпрограммы размерности массивов  $A, V1, V2$  должны быть уже объявлены.

Ниже представлен текст данной подпрограммы вместе с примером ее использования для обращения матрицы 4-го порядка, элементы которой вводятся операторами присваивания.

```

      Program Example_1
      DIMENSION A(4,4),V1(4),V2(4)
      OPEN  (11,FILE='A.txt')
      A(1,1)=1.; A(1,2)=2.; A(1,3)=3.; A(1,4)=4.
      A(2,1)=0.; A(2,2)=2.; A(2,3)=3.; A(2,4)=4.
      A(3,1)=0.; A(3,2)=0.; A(3,3)=3.; A(3,4)=4.
      A(4,1)=0.; A(4,2)=0.; A(4,3)=0.; A(4,4)=4.
      WRITE(11,'(2x,4F10.4)')((A(i,j),j=1,4),I=1,4)
      WRITE(*,*)' It is given Matrix A'
      WRITE(*,'(2x,4F10.4)')((A(i,j),j=1,4),I=1,4)

```

```

WRITE(*,*)'  Press  Enter!!!'
PAUSE
CALL  invertM(A,4,Det,V1,V2)
WRITE(11,'(2x,4F10.4)')((A(i,j),j=1,4),I=1,4)
WRITE(*,*)'  It  is  reverse  Matrix'
WRITE(*,'(2x,4F10.4)')((A(i,j),j=1,4),I=1,4)
WRITE(*,'(2x,A,2x,F10.4)')'Det=',Det
End  Program  Example_1

SUBROUTINE  invertM(A,N,D,L,M)
DIMENSION  A(1),L(1),M(1)
REAL  A,L,M

D=1.0
NK=-N
DO  80  K=1,N
NK=NK+N
L(K)=K
M(K)=K
KK=NK+K
BIGA=A(KK)
DO  20  J=K,N
IZ=N*(J-1)
DO  20  I=K,N
IJ=IZ+I
10  IF (ABS(BIGA)-ABS(A(IJ)))15,20,20
15  BIGA=A(IJ)
L(K)=I
M(K)=J
20  CONTINUE
!  INTERCHANGE  ROWS
J=L(K)
IF (J-K)35,35,25
25  KI=K-N
DO  30  I=1,N
KI=KI+N
HOLD=-A(KI)
JI=KI-K+J
A(KI)=A(JI)
30  A(JI)=HOLD
!INTERCHANGE  COLUMNS
35  I=M(K)
IF (I-K)45,45,38
38  JP=N*(I-1)
DO  40  J=1,N
JK=NK+J
JI=JP+J
HOLD=-A(JK)
A(JK)=A(JI)

```

```

40  A(JI)=HOLD
!DIVIDE COLUMN BY MINUS PIVOT (VALUE OF PIVOT ELEMENT IS
!CONTAINED IN BIGA)
45  IF(BIGA)48,46,48
46  D=0.0
    RETURN
48  DO 55 I=1,N
    IF(I-K)50,55,50
50  IK=NK+I
    A(IK)=A(IK)/(-BIGA)
55  CONTINUE
!  REDUCE MATRIX
    DO 65 I=1,N
    IK=NK+I
    HOLD=A(IK)
    IJ=I-N
    DO 65 J=1,N
    IJ=IJ+N
    IF(I-K)60,65,60
60  IF(J-K)62,65,62
62  KJ=IJ-I+K
    A(IJ)=HOLD*A(KJ)+A(IJ)
65  CONTINUE
!      DIVIDE ROW BY PIVOT
    KJ=K-N
    DO 75 J=1,N
    KJ=KJ+N
    IF(J-K)70,75,70
70  A(KJ)=A(KJ)/BIGA
75  CONTINUE
!      PRODUCT OF PIVOTS
    D=D*BIGA
!      REPLACE PIVOT BY RECIPROCAL
    A(KK)=1.0/BIGA
80  CONTINUE
!  FINAL ROW AND COLUMN INTERCHANGE
    K=N
100  K=(K-1)
    IF(K)150,150,105
105  I=L(K)
    IF(I-K)120,120,108
108  JQ=N*(K-1)
    JR=N*(I-1)
    DO 110 J=1,N
    JK=JQ+J
    HOLD=A(JK)
    JI=JR+J

```



```
      A(JK)=-A(JI)
110  A(JI)=HOLD
120  J=M(K)
      IF(J-K)100,100,125
125  KI=K-N
      DO 130 I=1,N
      KI=KI+N
      HOLD=A(KI)
      JI=KI-K+J
      A(KI)=-A(JI)
130  A(JI)=HOLD
      GOTO 100
150  RETURN
      END
```

M62

## ГЛАВА 8

### ЧИСЛОВЫЕ И ФУНКЦИОНАЛЬНЫЕ РЯДЫ

---

#### 8.1. Числовые ряды. Определение, свойства, сходимость

Определение числового ряда. Сумма числового ряда, его сходимость. Геометрическая прогрессия. Простейшие свойства числовых рядов. Необходимый признак сходимости рядов.

Суммирование бесконечных геометрических прогрессий со знаменателем, меньшим 1, производилось уже в древности Архимедом. Точная теория рядов начинается с работ Гаусса (1812), Больцано (1817) и Коши (1821), где впервые дано современное определение суммы сходящегося ряда и установлены основные теоремы.

В настоящее время теория рядов лежит в основе приближенных вычислений. С использованием этой теории составлены таблицы значений функции и некоторых интегралов. Теория рядов активно используется в аналитической теории дифференциальных уравнений. Теория рядов Фурье положена в основу многих приближенных методов исследования процессов функционирования технических систем и решения многих краевых задач математической физики.

##### 8.1.1. Определение числового ряда

Пусть задана бесконечная последовательность  $u_1, u_2, \dots, u_n, \dots$ .

**ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1.** Числовым рядом называется выражение

$$u_1 + u_2 + \dots + u_n + \dots = \sum_{n=1}^{\infty} u_n. \quad (1)$$

Здесь  $u_1$  — 1-й член ряда,  $u_2$  — 2-й, ...  $u_n$  —  $n$ -й член (общий член ряда).

Ряд считается заданным, если известен его общий член.

**Примеры.**

$$\frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \dots + \frac{1}{n(n+1)} + \dots \quad \text{— общий член } u_n = \frac{1}{n(n+1)};$$

$$2 + 6 + 18 + \dots + 2 \cdot 3^{n-1} + \dots \quad \text{— общий член } u_n = 2 \cdot 3^{n-1};$$

$$1 - 1 + 1 - \dots + (-1)^{n-1} + \dots \quad \text{— общий член } u_n = (-1)^{n-1}.$$

**8.1.2. Сумма числового ряда, его сходимость**

**ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2.** Сумма  $S_n$   $n$  первых членов ряда называется  $n$ -й частичной суммой:  $S_n = u_1 + u_2 + \dots + u_n$ .

**Пример.**

$$\frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \dots + \frac{1}{n(n-1)} + \dots;$$

$$S_n = \frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \dots + \frac{1}{n(n-1)} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} = 1 - \frac{1}{n+1};$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \left( 1 - \frac{1}{n+1} \right) = 1.$$

**ОПРЕДЕЛЕНИЕ 3.** Ряд называется сходящимся, если существует конечный предел последовательности  $S_n$  его частичных сумм.

Если этот предел не существует или бесконечен, то ряд называется расходящимся.

**ОПРЕДЕЛЕНИЕ 4.** Предел  $S$  последовательности  $S_n$  сходящегося ряда называется суммой ряда.

**8.1.3. Геометрическая прогрессия**

Рассмотрим ряд вида

$$a + aq + aq^2 + \dots + aq^n + \dots \quad (2)$$

Здесь  $a$  — первый член ряда,  $q$  — его знаменатель. Ряд (2), как известно, называется геометрической прогрессией. Для нее

$$S_n = \frac{a - aq^n}{1 - q}.$$

Рассмотрим следующие случаи.

1.  $|q| < 1$ .

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \frac{a}{1 - q} \lim_{n \rightarrow \infty} (1 - q^n) = \frac{a}{1 - q},$$

так как  $\lim_{n \rightarrow \infty} q^n = 0$ .

2.  $|q| > 1$ :  $a > 1$  или  $q < -1$ :

а)  $q > 1$ ,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \infty;$$

б)  $q < -1$ , тогда  $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n$  не существует.

Итак, в этом случае ряд (2) расходится.

3.  $q = 1$ .

Ряд имеет вид  $a + a + a + \dots$  и  $S_n = na$ ,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \infty.$$

4.  $q = -1$ . Здесь  $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n$  не существует.

Итак, в случаях 3 и 4 ряд (2) расходится.

#### 8.1.4. Простейшие свойства числовых рядов

**Теорема 1.** Если ряд

$$u_1 + u_2 + \dots + u_n + \dots \quad (3)$$

сходится и имеет сумму  $S$ , то ряд

$$au_1 + au_2 + \dots + au_n + \dots \quad (4)$$

также сходится и имеет сумму  $aS$ .

*Доказательство.* Составим  $\sigma_n$ :

$$\sigma_n = au_1 + au_2 + \dots + au_n = a(u_1 + u_2 + \dots + u_n) = aS_n,$$

где  $S_n$  — частичная сумма ряда (3). Поэтому

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sigma_n = a \lim_{n \rightarrow \infty} S_n = aS.$$

**Теорема 2.** Если ряды

$$u_1 + u_2 + \dots + u_n + \dots \quad (5)$$

$$v_1 + v_2 + \dots + v_n + \dots \quad (6)$$

сходятся и имеют суммы  $S$  и  $\bar{S}$ , то ряд

$$(u_1 + v_1) + (u_2 + v_2) + \dots + (u_n + v_n) + \dots \quad (7)$$

также сходится и имеет сумму  $S + \bar{S}$ .

*Доказательство.* Составим частичную сумму ряда (7). Очевидно,

$$\sigma_n = S_n + \bar{S}_n.$$

Поэтому

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sigma_n = \lim_{n \rightarrow \infty} (S_n + \bar{S}_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} S_n + \lim_{n \rightarrow \infty} \bar{S}_n = S + \bar{S}.$$

*З а м е ч а н и е.* Аналогично доказывается, что в случае сходимости рядов (5) и (6) сходится также ряд

$$(u_1 - v_1) + (u_2 - v_2) + \dots + (u_n - v_n) + \dots$$

и его сумма есть  $S - \bar{S}$ .

Рассмотрим два ряда

$$u_1 + u_2 + \dots + u_k + u_{k+1} + \dots + u_n + \dots, \quad (8)$$

$$u_{k+1} + \dots + u_n + \dots \quad (9)$$

**Теорема 3.** Если сходится ряд (8), то сходится и ряд (9), полученный из ряда (8) отбрасыванием конечного числа  $k$  его первых членов. И обратно, если сходится ряд (9), то сходится и ряд (8).

*Доказательство.* Обозначим через  $S_n$  сумму  $n$  членов ряда (8),  $S_k$  — сумму его  $k$  членов,  $\sigma_{n-k}$  — сумму  $n-k$  членов. Очевидно,

$$\sigma_{n-k} = S_n - S_k, \quad S_n = \sigma_{n-k} + S_k.$$

Пусть  $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = S$ .

$\sigma_{n-k}$  — это частичные суммы ряда (9).

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sigma_{n-k} = \lim_{n \rightarrow \infty} (S_n - S_k) = \lim_{n \rightarrow \infty} S_n - S_k = S - S_k,$$

т. е. ряд (9) сходится.

Обратно, пусть сходится ряд (9), т. е. существует

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sigma_{n-k} = \bar{S}.$$

Тогда

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \lim_{n \rightarrow \infty} (\sigma_{n-k} + S_k) = \lim_{n \rightarrow \infty} \sigma_{n-k} + S_k = \bar{S} + S_k.$$

Таким образом, на сходимость ряда не влияет отбрасывание любого конечного числа его первых членов.

## 8.1.5. Необходимый признак сходимости рядов

**Теорема.** Если ряд  $u_1 + u_2 + \dots + u_n + \dots$  сходится, то

$$\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = 0.$$

*Доказательство.*  $u_n = S_n - S_{n-1}$ , где

$$S_n = u_1 + \dots + u_n, \quad S_{n-1} = u_1 + \dots + u_{n-1}.$$

Тогда

$$\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = \lim_{n \rightarrow \infty} S_n - \lim_{n \rightarrow \infty} S_{n-1} = 0.$$

**Следствие.** Если  $u_n$  не стремится к 0 при  $n \rightarrow \infty$ , то ряд расходится.

**Примеры.**

$$\frac{1}{2} + \frac{2}{3} + \frac{3}{4} + \dots + \frac{n}{n+1}$$

— расходящийся ряд, так как

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{n+1} = 1 \neq 0.$$

Условие  $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = 0$  является необходимым условием сходимости ряда, но не достаточным. Например, для ряда

$$\frac{1}{\sqrt{1}} + \frac{1}{\sqrt{2}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{n}} + \dots \quad \lim_{n \rightarrow \infty} u_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt{n}} = 0.$$

Но

$$\frac{1}{\sqrt{1}} > \frac{1}{\sqrt{n}}, \quad \frac{1}{\sqrt{2}} > \frac{1}{\sqrt{n}}, \quad \dots$$

Поэтому

$$S_n = \frac{1}{\sqrt{1}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{n}} > n \frac{1}{\sqrt{n}} = \sqrt{n}$$

и

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \infty.$$

Следовательно, этот ряд расходится.

## 8.2. Признаки сходимости знакоположительных рядов

Признаки сравнения рядов. Признак Даламбера. Признак Коши. Интегральный признак сходимости Коши.

Как мы уже знаем,

$$S = \lim_{n \rightarrow \infty} S_n,$$

но отыскание этого предела во многих случаях связано с большими трудностями. Сходимость или расходимость ряда во многих случаях удается установить с помощью так называемых достаточных признаков. В этой лекции мы рассмотрим достаточные признаки сходимости и расходимости рядов с положительными членами.

Прежде всего заметим следующее. Так как в знакоположительном ряде все члены положительны, то его частичные суммы  $S_1 = u_1$ ,  $S_2 = u_1 + u_2 > S_1$ , ...,  $S_n = S_{n-1} + u_n > S_{n-1}$  возрастают с увеличением номера суммы  $n$ . Таким образом, частичные суммы ряда образуют возрастающую последовательность

$$S_1, S_2, \dots, S_n, \dots$$

Возможны два случая.

1. Последовательность  $S_n$  неограничена. Тогда

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \infty$$

и, следовательно, ряд расходится.

2. При любом  $n$   $S_n < C$ . В этом случае, как известно, последовательность  $S_n$  имеет предел и, следовательно, ряд сходится.

Таким образом, при доказательстве сходимости того или иного знакоположительного ряда достаточно установить ограниченность последовательности его частичных сумм.

Рассмотрим некоторые установленные признаки сходимости и расходимости рядов.

### 8.2.1. Признаки сравнения рядов

**Теорема 1** (достаточный признак сходимости). Пусть заданы два знакоположительных ряда

$$u_1 + u_2 + \dots + u_n + \dots, \quad (u)$$

$$v_1 + v_2 + \dots + v_n + \dots, \quad (v)$$

члены которых связаны соотношениями

$$u_1 \leq v_1, \quad \dots, \quad u_n \leq v_n, \quad \dots \quad (1)$$

Если ряд (v) сходится, то сходится и ряд (u) и его сумма не превосходит суммы ряда (v).

*Доказательство.* Пусть  $S$  — сумма ряда (v),  $S_n$  — его  $n$ -я частичная сумма,  $\sigma_n$  —  $n$ -я частичная сумма ряда (u). Из (1) следует, что

$$\sigma_n \leq S_n < S \quad \text{при} \quad \forall n. \quad (2)$$

Поэтому все  $\sigma_n$  ограничены и, следовательно, ряд (u) сходится. Пусть  $\bar{S}$  его сумма. Из (2) следует, что  $\bar{S} < S$ .

**Теорема 2** (достаточный признак расходимости). *Если ряд (u) расходится, то расходится и ряд (v).*

*Доказательство.*  $S_n \geq \sigma_n$ . Так как ряд (u) расходится, и его частичные суммы возрастают, то

$$\lim \sigma_n = \infty.$$

Тогда и  $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \infty$ , и ряд (v) расходится.

Для сравнения часто используют следующие ряды.

1. Геометрическая прогрессия (сходится при  $|q| < 1$  и расходится при  $|q| \geq 1$ ).

2. Обобщенный гармонический ряд

$$\frac{1}{1^p} + \frac{1}{2^p} + \dots + \frac{1}{n^p} + \dots = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}.$$

Ниже будет показано, что при  $p > 1$  он сходится, а при  $0 \leq p \leq 1$  расходится. При  $p = 1$  получаем ряд

$$1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n} + \dots,$$

который называется *гармоническим*.

**Примеры.**

$$1. \quad \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^3} + \dots + \frac{1}{n^n} + \dots \quad (3)$$

Здесь  $\frac{1}{3^3} < \frac{1}{2^3}$ ,  $\frac{1}{4^4} < \frac{1}{2^4}$ , ...,  $\frac{1}{n^n} < \frac{1}{2^n}$ . Так как  $\frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^3} + \dots + \frac{1}{2^n} + \dots$  — сходящаяся геометрическая прогрессия, то и ряд (3) сходится.



$$2. \frac{1}{\sqrt{\ln 1}} + \frac{1}{\sqrt{\ln 2}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{\ln n}} + \dots \quad (4)$$

Здесь  $\ln n < n$ ,  $\sqrt{\ln n} < \sqrt{n}$ ,  $\frac{1}{\sqrt{\ln n}} > \frac{1}{\sqrt{n}}$ . Так как ряд  $\frac{1}{\sqrt{1}} + \frac{1}{\sqrt{2}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{n}} + \dots$  расходится, то и ряд (4) расходится.

Пусть заданы два знакоположительных ряда

$$a_1 + a_2 + \dots + a_n + \dots = \sum_{n=1}^{\infty} a_n,$$

$$b_1 + b_2 + \dots + b_n + \dots = \sum_{n=1}^{\infty} b_n.$$

**Теорема 3.** Если существует конечный и отличный от 0 предел

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n},$$

то оба ряда сходятся или расходятся одновременно.

**Пример.** Рассмотрим ряд  $1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \dots + \frac{1}{2n-1} + \dots$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2n-1} : \frac{1}{n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{2n-1} = \frac{1}{2} \neq 0.$$

Так как ряд  $\sum_1^{\infty} \frac{1}{n}$  расходится, то и данный ряд расходится.

### 8.2.2. Признак Даламбера

**Теорема.** Если для знакоположительного ряда

$$u_1 + u_2 + \dots + u_n + \dots$$

существует предел отношения последующего члена к предыдущему

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = \rho,$$

то при  $\rho < 1$  ряд сходится, при  $\rho > 1$  ряд расходится. При  $\rho = 1$  ряд может быть как сходящимся, так и расходящимся.

**Доказательство.** По определению предела  $\forall \varepsilon > 0 \quad \exists N > 0$ , при  $n \geq N$

$$\left| \frac{u_{n+1}}{u_n} - \rho \right| < \varepsilon$$

или

$$\rho - \varepsilon < \frac{u_{n+1}}{u_n} < \rho + \varepsilon.$$

1. Пусть  $\rho < 1$ . Выберем  $\varepsilon$  столь малым, что  $q = \rho + \varepsilon < 1$ . Тогда при  $n > N$  имеем:  $u_{N+1} < qu_N, u_{N+2} < qu_{N+1} < q^2 u_N, \dots$ . Рассмотрим два ряда:

$$\begin{aligned} u_N + u_{N+1} + \dots, \\ u_N + qu_N + q^2 u_N + \dots \end{aligned}$$

Так как члены первого ряда не превосходят членов второго, а второй ряд является геометрической прогрессией со знаменателем, меньшим 1, то первый ряд сходится. Но он получен из исходного ряда отбрасыванием конечного числа членов, поэтому исходный ряд сходится.

2.  $\rho > 1$ . Тогда  $u_{n+1} > u_n$  при  $n \geq N$ , т. е. члены ряда не стремятся к 0 и, следовательно, ряд расходится.

**Пример.**

$$\frac{1}{3} + \frac{3}{3^2} + \frac{5}{3^3} + \dots + \frac{2n-1}{3^n} + \dots;$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2(n+1)-1}{3^{n+1}} \cdot \frac{3^n}{2n-1} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{3} \left( \frac{2n+1}{2n-1} \right) = \frac{1}{3} < 1.$$

Ряд сходится.

### 8.2.3. Признак Коши

**Теорема.** Если существует  $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{u_n} = \rho$ , то при  $\rho < 1$  ряд сходится, а при  $\rho > 1$  — расходится. При  $\rho = 1$  ряд может быть как сходящимся, так и расходящимся.

**Пример.**

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left( \frac{2n-1}{3n+3} \right)^n;$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{u_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n-1}{3n+3} = \frac{2}{3} < 1.$$

Ряд сходится.

## 8.2.4. Интегральный признак сходимости Коши

**Теорема.** Пусть члены знакоположительного ряда

$$b_1 + b_2 + \dots + b_n + \dots$$

являются значениями при  $n = 1, 2, \dots$  некоторой непрерывной, монотонно убывающей, положительной функции  $f(x)$ , т. е. пусть

$$f(1) = b_1, \quad f(2) = b_2, \quad \dots, \quad f(n) = b_n, \quad \dots$$

Тогда рассматриваемый ряд сходится или расходится вместе с интегралом  $\int_1^{\infty} f(x) dx$ .

*Доказательство.* Площадь криволинейной трапеции, ограниченной сверху графиком функции  $f(x)$ , осью  $OX$  и прямыми  $x = 1, x = n$ , равна

$$\int_1^n f(x) dx.$$

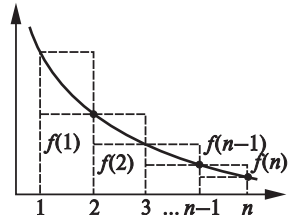


Рис. 8.1

Рассмотрим две интегральных по формулам прямоугольников:

$$f(1) \cdot 1 + f(2) \cdot 1 + \dots + f(n-1) \cdot 1 = b_1 + b_2 + \dots + b_{n-1} > \int_1^n f(x) dx,$$

$$f(2) \cdot 1 + f(3) \cdot 1 + \dots + f(n) \cdot 1 = b_2 + b_3 + \dots + b_n < \int_1^n f(x) dx.$$

Обозначая через  $S_n$   $n$ -ю частичную сумму ряда, получим

$$S_n - b_1 < \int_1^n f(x) dx < S_n - b_n. \quad (5)$$

Пусть  $\int_1^{\infty} f(x) dx$  сходится, тогда существует

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_1^n f(x) dx = J.$$

Так как  $f(x) > 0$ , то  $\int_1^n f(x) dx < J$  для  $\forall n$ . Из неравенства (5) следует:

$$S_n < b_1 + \int_1^n f(x) dx < b_1 + J.$$

Таким образом,  $S_n$  ограничена и ряд сходится.

Если  $\int_1^{\infty} f(x) dx$  расходится, т. е.  $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_1^n f(x) dx = \infty$ , то из неравенства

$$(5) S_n > b_n + \int_1^n f(x) dx \text{ следует, что последовательность } S_n \text{ неограничена,}$$

т. е. ряд расходится.

**Пример.** Так как интеграл

$$\int_1^{\infty} \frac{1}{x^p} dx$$

сходится при  $p > 1$  и расходится при  $p \leq 1$ , то это же справедливо и для ряда

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}.$$

### 8.3. Знакопеременные ряды

Знакопередающие ряды. Признак Лейбница. Общий случай знакопеременных рядов. Остаток ряда. Оценка остатка знакоположительного ряда. Оценка остатка знакопеременного ряда. Оценка остатка знакопередающего ряда, сходящегося по признаку Лейбница.

#### 8.3.1. Знакопередающие ряды

Изучение знакопеременных рядов мы начнем с частного случая так называемых знакопередающихся рядов, т. е. рядов, в которых за каждым положительным членом следует отрицательный, а за каждым отрицательным — положительный:

$$u_1 - u_2 + u_3 - u_4 + \dots + (-1)^{n-1} u_n + \dots \quad (u_n > 0).$$

**Признак Лейбница.** Пусть в знакопередающемся ряде абсолютные величины его членов убывают, т. е.

$$u_1 > u_2 > \dots > u_n > \dots$$

и  $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = 0$ , тогда ряд сходится и его сумма не превышает первого члена ряда.

*Доказательство.*

$$S_{2m} = (u_1 - u_2) + \dots + (u_{2m-1} - u_{2m}).$$

Так как  $u_1 > u_2 > \dots > u_n$ , то все скобки положительны и  $S_{2m}$  монотонно растёт. Покажем, что  $S_{2m}$  ограничена.

$$S_{2m} = u_1 - [(u_2 - u_3) + (u_3 - u_4) + \dots + u_{2m}],$$

и так как  $(u_2 - u_3) + (u_3 - u_4) + \dots + u_{2m} > 0$ , то  $S_{2m} < u_1$ .

Далее,

$$S_{2m+1} = S_{2m} + u_{2m+1}.$$

$$\lim_{m \rightarrow \infty} S_{2m+1} = \lim_{m \rightarrow \infty} S_{2m} + \lim_{m \rightarrow \infty} u_{2m+1} = \lim_{m \rightarrow \infty} S_{2m} = S \leq u_1.$$

Как видим,  $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = S$ , поэтому ряд сходится и его сумма не превосходит первого члена.

Пример.  $1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \dots$

$$1 > \frac{1}{2} > \frac{1}{3} > \dots,$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} = 0.$$

Ряд сходится по признаку Лейбница.

### 8.3.2. Общий случай знакопеременных рядов

Рассмотрим ряд, члены которого имеют произвольные знаки:

$$v_1 + v_2 + \dots + v_n + \dots \quad (1)$$

Образуем ряд

$$|v_1| + |v_2| + \dots + |v_n| + \dots \quad (2)$$

**Теорема.** Если сходится ряд (2), то сходится и ряд (1).

*Доказательство.* Составим последовательность

$$u_1 = \frac{v_1 + |v_1|}{2}, \dots, u_2 = \frac{v_2 + |v_2|}{2}, \dots, u_n = \frac{v_n + |v_n|}{2}, \dots$$

Если  $v_n > 0$ , то  $u_n = v_n = |v_n|$ . Если  $v_n < 0$ , то  $u_n = \frac{v_n - v_n}{2} = 0$ , поэтому  $u_n \leq |v_n|$ .

По признаку сходимости рядов ряд  $\sum_1^{\infty} u_n$  сходится (первый признак сравнения). Ряд

$$\frac{|v_1|}{2} + \frac{|v_2|}{2} + \dots + \frac{|v_n|}{2} + \dots$$

тоже сходится, так как представляет собой произведение  $1/2$  на сходящийся ряд. Рассмотрим теперь ряд с членами

$$\frac{v_1 + |v_1|}{2} - \frac{|v_1|}{2} = \frac{v_1}{2}, \quad \dots \quad \frac{v_n + |v_n|}{2} - \frac{|v_n|}{2} = \frac{v_n}{2}, \quad \dots$$

Так как члены этого ряда являются разностью членов двух сходящихся рядов, то этот ряд сходится. Но этот ряд есть произведение ряда (1) на  $1/2$ , следовательно, ряд (1) сходится.

Теорема доказана.

Пример.

$$1 - \frac{1}{2^2} - \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \frac{1}{5^2} + \dots + (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} \frac{1}{n^2} + \dots$$

Ряд из модулей есть гармонический ряд с  $p = 2$  и, следовательно, данный ряд сходится.

Доказанный признак сходимости является достаточным, но не необходимым. Ряд

$$1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \dots + (-1)^{n-1} \frac{1}{n} + \dots$$

сходится по признаку Лейбница, но расходится по доказанному признаку (т. е. расходится ряд из модулей).

**ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1.** Ряд называется абсолютно сходящимся, если сходится ряд из абсолютных величин его членов.

Сумма абсолютно сходящегося ряда не меняется при любой перестановке его членов.

**ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2.** Ряд называется условно сходящимся, если он сходится, а ряд из абсолютных величин его членов расходится.

**Пример.** Ряд

$$1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \dots$$

не является абсолютно сходящимся.

$$1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \frac{1}{6} + \dots = S,$$

$$1 - \frac{1}{2} - \frac{1}{4} + \frac{1}{4} - \frac{1}{6} - \frac{1}{8} + \dots = \frac{S}{2}.$$

### 8.3.3. Остаток ряда

Так как  $S = \lim_{n \rightarrow \infty} S_n$ , то при больших  $n$   $S_n \approx S$ . Разность  $S - S_n = r_n$  называется  $n$ -м остатком ряда.

$$r_n = u_{n+1} + u_{n+2} + \dots$$

Если ряд сходится, то

$$\lim_{n \rightarrow \infty} r_n = \lim_{n \rightarrow \infty} (S - S_n) = 0.$$

$r_n$  характеризует степень точности, с которой  $S_n$  приближается к  $S$ .  $\Delta S = |S - S_n| = |r_n|$  — абсолютная погрешность.

Чтобы найти  $S$  с точностью до  $\epsilon$ , нужно взять такое число членов ряда, чтобы  $|r_n| < \epsilon$ .

### 8.3.4. Оценка остатка знакоположительного ряда

Пусть заданы два ряда

$$a_1 + a_2 + \dots + a_n + \dots, \quad (a)$$

$$b_1 + b_2 + \dots + b_n + \dots, \quad (b)$$

$$a_i \geq b_i \quad \forall i. \quad (3)$$

Ряд (а) — называется мажорирующим рядом для ряда (b).

$r_n$  —  $n$ -й остаток (а),  $r'_n$  —  $n$ -й остаток (б);

$$r_n = a_{n+1} + a_{n+2} + \dots,$$

$$r'_n = b_{n+1} + b_{n+2} + \dots$$

$r_n$  и  $r'_n$  — тоже ряды. Из неравенства (3) по признаку сравнения знакоположительных рядов следует, что  $r'_n \leq r_n$ .

Таким образом, из этого следует:

*Если знакоположительный ряд (а) является мажорирующим для знакоположительного ряда (б), то  $n$ -й остаток ряда (б) не превосходит  $n$ -го остатка ряда (а).*

**Пример.** Оценить остаток  $r_n$  при  $n=3$  следующего ряда:

$$\frac{1}{2 \cdot 5} + \frac{1}{3 \cdot 5^2} + \dots + \frac{1}{(n+1)5^n} + \dots$$

Мажорирующим рядом здесь является геометрическая прогрессия;  
 $r_3 < \frac{1}{500}$ .

### 8.3.5. Оценка остатка знакопеременного ряда

Рассмотрим ряд

$$u_1 + u_2 + \dots + u_n + \dots \quad (4)$$

и ряд из модулей

$$|u_1| + |u_2| + \dots + |u_n| + \dots \quad (5)$$

**Теорема.** Пусть ряд (4) сходится абсолютно, тогда модуль его  $n$ -го остатка  $|r_n|$  не превосходит  $n$ -го остатка  $r'_n$  ряда (5).

*Доказательство.*

$$r_n = u_{n+1} + u_{n+2} + \dots,$$

$$r'_n = |u_{n+1}| + |u_{n+2}| + \dots$$

Ряды  $r_n$  и  $r'_n$  сходятся.



При  $\forall p$  имеем

$$|u_{n+1} + u_{n+2} + \dots + u_{n+p}| \leq |u_{n+1}| + |u_{n+2}| + \dots + |u_{n+p}|.$$

Переходя к пределу при  $p \rightarrow \infty$ , получим

$$\lim_{p \rightarrow \infty} |u_{n+1} + \dots + u_{n+p}| \leq \lim_{p \rightarrow \infty} \{|u_{n+1}| + \dots + |u_{n+p}|\},$$

т. е.

$$|r_n| \leq r'_n.$$

**Пример.**

$$\frac{\sin 1}{2^1} + \frac{\sin 2}{2^2} + \dots + \frac{\sin n}{2^n} + \dots \quad (6)$$

Это знакопеременный ряд, который сходится абсолютно, так как ряд

$$\frac{|\sin 1|}{2^1} + \frac{|\sin 2|}{2^2} + \dots + \frac{|\sin n|}{2^n} + \dots \quad (7)$$

мажорируется рядом

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \dots + \frac{1}{2^n} + \dots \quad (8)$$

Обозначим  $r_n$  — остаток ряда (6),  $\bar{r}_n$  — остаток ряда (7),  $r'_n$  — остаток ряда (8). Тогда  $|r_n| \leq \bar{r}_n \leq r'_n = \frac{1}{2^{n+1}} : \left(1 - \frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2^n}$ .

### 8.3.6. Оценка остатка знакочередующегося ряда, сходящегося по признаку Лейбница

**Теорема.** Если знакочередующийся ряд сходится по признаку Лейбница, то абсолютная величина его остатка не превосходит абсолютной величины первого из отброшенных членов.

*Доказательство.*

$$r_n = \pm(u_{n+1} - u_{n+2} + \dots).$$

Так как ряд сходится по признаку Лейбница, то  $|r_n|$  не превышает первого члена ряда, т. е.

$$|r_n| \leq u_{n+1}.$$

**Пример.** Сколько членов ряда

$$1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \dots$$

нужно взять, чтобы вычислить его сумму с точностью до 0,01?

$$\frac{1}{n+1} \leq \frac{1}{100} \Rightarrow n+1 \geq 100 \Rightarrow n \geq 99$$

— нужно взять 99 членов данного ряда.

## 8.4. Функциональные ряды

Понятие функционального ряда, его области сходимости, суммы. Правильно сходящиеся функциональные ряды и их свойства. Степенные ряды, интервал сходимости. Свойства степенных рядов.

### 8.4.1. Понятие функционального ряда, его области сходимости, суммы

Перейдем к изучению рядов, членами которых являются функции, определенные в некоторой области изменения аргумента  $x$ :

$$u_1(x) + u_2(x) + \dots + u_n(x) + \dots \quad (1)$$

Такие ряды называются функциональными.

Зафиксировав некоторое значение  $x = x_0$ , получим числовой ряд

$$u_1(x_0) + u_2(x_0) + \dots + u_n(x_0) + \dots \quad (2)$$

Если ряд (2) сходится, то точка  $x_0$  называется точкой сходимости ряда (1), если же ряд (2) расходится, то точка  $x_0$  — точка расходимости ряда (1).

**ОПРЕДЕЛЕНИЕ.** Совокупность всех точек сходимости функционального ряда называется областью его сходимости.

Функция  $S_n(x) = u_1(x) + u_2(x) + \dots + u_n(x)$  называется  $n$ -й частичной суммой функционального ряда (1). Из определения области сходимости следует, что в любой точке этой области существует  $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n(x) = S(x)$ .

Функция  $S(x)$  называется суммой ряда. Если функциональный ряд сходится и имеет сумму  $S(x)$ , то  $r_n(x) = S(x) - S_n(x)$  называется  $n$ -м остатком функционального ряда. Очевидно,  $\lim_{n \rightarrow \infty} r_n(x) = 0$ .

#### 8.4.2. Мажорируемые функциональные ряды и их свойства

**ОПРЕДЕЛЕНИЕ.** Ряд (1) называется мажорируемым на отрезке  $[a, b]$ , если существует такой знакоположительный ряд

$$b_1 + b_2 + \dots + b_n + \dots,$$

который сходится, и

$$|u_1(x)| \leq b_1, |u_2(x)| \leq b_2, \dots, |u_n(x)| \leq b_n, \dots$$

С целью большего удобства выговаривать назовем мажорируемый ряд правильно сходящимся на отрезке  $[a, b]$ .

Из определения правильной сходимости вытекает, что правильно сходящийся на отрезке  $[a, b]$  ряд сходится абсолютно в любой точке этого отрезка.

**ОПРЕДЕЛЕНИЕ.** Ряд (1) называется равномерно сходящимся на отрезке  $[a, b]$ , если для любого как угодно малого  $\epsilon > 0$  найдется такой номер  $N$ , что при всех  $n \geq N$  будет выполняться неравенство

$$|S(x) - S_n(x)| < \epsilon$$

для любого  $x$  из отрезка  $[a, b]$ .

Приведем без доказательства теоремы о свойствах правильно сходящихся рядов.

**Теорема 1.** *Всякий функциональный ряд, правильно сходящийся на отрезке  $[a, b]$ , сходится равномерно на этом отрезке.*

**Теорема 2.** *Если все члены правильно сходящегося на отрезке  $[a, b]$  ряда есть непрерывные функции, то сумма ряда также непрерывна на  $[a, b]$ .*

**Теорема 3.** *Если все члены правильно сходящегося на  $[a, b]$  ряда есть непрерывные функции, а  $S(x)$  — сумма этого ряда, то интеграл от  $S(x)$*

в пределах от  $\alpha$  до  $x$ , принадлежащих отрезку  $[a, b]$ , равняется сумме таких же интегралов от членов данного ряда, т. е. ряд можно почленно интегрировать:

$$\int_{\alpha}^x S(t) dt = \int_{\alpha}^x u_1(t) dt + \int_{\alpha}^x u_2(t) dt + \dots + \int_{\alpha}^x u_n(t) dt + \dots$$

**Теорема 4.** Если ряд

$$u_1(x) + u_2(x) + \dots + u_n(x) + \dots,$$

составленный из функций, имеющих непрерывные производные на  $[a, b]$ , сходится на этом отрезке к сумме  $S(x)$  и ряд

$$u'_1(x) + u'_2(x) + \dots + u'_n(x) + \dots,$$

составленный из производных его членов, сходится правильно на том же отрезке, то сумма ряда производных равна производной от суммы первоначального ряда, т. е. ряд можно почленно дифференцировать:

$$S'(x) = u'_1(x) + u'_2(x) + \dots + u'_n(x) + \dots$$

#### 8.4.3. Степенные ряды. Интервал сходимости

**ОПРЕДЕЛЕНИЕ.** Степенным рядом называется ряд вида

$$a_0 + a_1(x-a) + a_2(x-a)^2 + \dots + a_n(x-a)^n + \dots$$

При  $a=0$  этот ряд принимает вид

$$a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_nx^n + \dots \quad (3)$$

Для исследования сходимости ряда (3) составим ряд из модулей его членов

$$|a_0| + |a_1x| + |a_2x^2| + \dots + |a_nx^n| + \dots \quad (4)$$

**Теорема.** Область сходимости степенного ряда (4) есть интервал  $(-R, R)$ , к которому, в зависимости от конкретных случаев, могут быть добавлены точки  $-R$  и  $R$ . На интервале  $(-R, R)$  ряд (4) сходится абсолютно.

Ряд (4) знакоположительный, поэтому к нему можно применить признак Даламбера:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|a_{n+1}x^{n+1}|}{|a_nx^n|} = |x| \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right|.$$

Пусть существует

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \frac{1}{R}.$$

Тогда

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{|x|}{R}.$$

По признаку Даламбера ряд (4) сходится абсолютно, если  $\frac{|x|}{R} < 1$ ,

т. е. если  $|x| < R$ . Если же  $\frac{|x|}{R} > 1$ , то ряд, очевидно, расходится. При  $|x| = R$  ряд может быть как сходящимся, так и расходящимся.

Следовательно, степенной ряд (1) сходится абсолютно при  $|x| < R$ .

Интервал  $(-R, R)$  — интервал сходимости,  $R$  — радиус сходимости.

Необходимо отметить, что для определения радиуса сходимости можно пользоваться не только признаком Даламбера, но и признаком Коши.

Тогда

$$R = \frac{1}{\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|}}.$$

**Пример.** Исследуем сходимость ряда

$$\frac{x}{\sqrt{1}} + \frac{x^2}{\sqrt{2}} + \dots + \frac{x^n}{\sqrt{n}} + \dots$$

Определим радиус сходимости

$$R = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|a_n|}{|a_{n+1}|} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{\frac{n+1}{n}} = 1.$$

Итак, ряд сходится абсолютно в промежутке  $(-1, 1)$ . При  $x = 1$  получим ряд

$$\frac{1}{\sqrt{1}} + \frac{1}{\sqrt{2}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{n}} + \dots,$$

который расходится (гармонический ряд с  $p = \frac{1}{2}$ ). При  $x = -1$  получим ряд

$$-\frac{1}{\sqrt{1}} + \frac{1}{\sqrt{2}} - \dots + (-1)^n \frac{1}{\sqrt{n}} + \dots,$$

который сходится.

## 8.4.4. Свойства степенных рядов

**Теорема 5.** Пусть степенной ряд

$$a_0 + a_1x + \dots + a_nx^n + \dots \quad (5)$$

имеет интервал сходимости  $(-R, R)$ , а  $r$  — произвольное положительное число, меньшее  $R$  ( $0 < r < R$ ). Тогда ряд (5) абсолютно сходится на отрезке  $[-r, r]$ .

*Доказательство.* Рассмотрим ряд из абсолютных величин членов ряда (5):

$$|a_0| + |a_1||x| + |a_2||x|^2 + \dots + |a_n||x|^n + \dots \quad (6)$$

Для его членов справедлива оценка

$$|a_1||x| < |a_1|r, \dots, |a_n||x|^n < |a_n|r^n, \dots$$

Так как степенной ряд сходится абсолютно в любой точке своего интервала сходимости, то числовой ряд

$$|a_0| + |a_1|r + \dots + |a_n|r^n + \dots$$

сходится. Но члены ряда (6) не превосходят членов сходящегося ряда. Поэтому по определению ряд (5) сходится абсолютно.

**Теорема 6.** Сумма степенного ряда является непрерывной функцией в любой точке интервала сходимости ряда.

*Доказательство.* Пусть  $x_0 \in (-R, R)$ .  $\exists r$  такое, что  $|x_0| < r < R$ . На отрезке  $[-r, r]$  ряд является абсолютно сходящимся. Поэтому его сумма есть непрерывная функция в любой точке отрезка  $[-r, r]$ , т. е. и в точке  $x_0$ .

Рассмотрим степенной ряд

$$a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_nx^n + \dots \quad (7)$$

Так как этот ряд по теореме 5 сходится абсолютно на отрезке  $[-r, r]$ , то из теорем 3 и 4 можно получить следующие утверждения для степенного ряда.

1. Ряд (7) можно почленно дифференцировать в любой точке интервала сходимости  $(-R, R)$ :

$$(a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_nx^n + \dots)' = a_1 + 2a_2x + \dots + na_nx^{n-1} + \dots \quad (8)$$

2. Ряд (7) можно почленно интегрировать в интервале сходимости, т. е. для любого  $x \in (-R, R)$

$$\begin{aligned} \int_0^x (a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_nx^n + \dots) dx &= \int_0^x a_0 dx + \int_0^x a_1x dx + \int_0^x a_2x^2 dx + \dots \\ &+ \int_0^x a_nx^n dx + \dots = a_0x + a_1 \frac{x^2}{2} + a_2 \frac{x^3}{3} + \dots + a_n \frac{x^{n+1}}{n+1} + \dots \end{aligned} \quad (9)$$

Легко проверить, что ряды (8) и (9) имеют тот же интервал сходимости  $(-R, R)$ .

## 8.5. Степенные ряды. Ряд Тейлора. Ряд Маклорена

Степенной ряд по степеням  $(x - a)$ . Ряд Тейлора. Вывод формулы остаточного члена. Ряд Маклорена. Разложение функции  $e^x$  в ряд Маклорена.

### 8.5.1. Степенной ряд по степеням $(x - a)$

Рассмотрим ряд

$$a_0 + a_1(x-a) + a_2(x-a)^2 + \dots + a_n(x-a)^n + \dots \quad (1)$$

Такой ряд называется степенным рядом по степеням  $(x-a)$ . Можно показать, что областью сходимости ряда (1) является интервал  $(a-R, a+R)$ , где  $R$  — радиус сходимости.

Ряд (1) обладает следующими свойствами:

- а) он сходится абсолютно на интервале  $(a-R, a+R)$ ;
- б) его сумма есть непрерывная на  $(a-R, a+R)$  функция;
- в) ряд (1) можно почленно дифференцировать и интегрировать и полученные при этом ряды имеют тот же интервал сходимости. Интервал сходимости ряда (1) может быть найден с помощью признака Даламбера.

**Пример.** Найдем радиус сходимости ряда

$$\frac{x-2}{1 \cdot 2} + \frac{(x-2)^2}{2 \cdot 2^2} + \dots + \frac{(x-2)^n}{n \cdot 2^n} + \dots$$

По признаку Даламбера радиус сходимости

$$R = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|a_n|}{|a_{n+1}|} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+1)2^{n+1}}{n2^n} = 2.$$

По признаку Коши

$$R = \lim_{n \rightarrow \infty} 2n^{\frac{1}{n}} = 2 \lim_{n \rightarrow \infty} n^{\frac{1}{n}} = 2.$$

Действительно, пусть  $r_n = n^{\frac{1}{n}}$ . Тогда  $\ln r_n = \frac{\ln n}{n} \rightarrow 0$  при  $n \rightarrow \infty$ . Следовательно,  $r_n = n^{\frac{1}{n}} \rightarrow 1$  при  $n \rightarrow \infty$ .

Если  $\frac{|x-2|}{2} < 1$ , то ряд сходится абсолютно. Исследуем сходимость ряда на концах интервала. При  $x=4$  получаем гармонический ряд

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n} + \dots,$$

который расходится. При  $x=0$  получаем сходящийся ряд

$$1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + (-1)^n \frac{1}{n} + \dots$$

Итак, область сходимости рассматриваемого ряда

$$0 \leq x < 4.$$

### 8.5.2. Ряд Тейлора

Пусть непрерывная функция  $f(x)$  является суммой степенного ряда по степеням  $(x-a)$ , сходящегося на  $(a-R, a+R)$ :

$$f(x) = a_0 + a_1(x-a) + a_2(x-a)^2 + \dots + a_n(x-a)^n + \dots \quad (2)$$

Говорят, что функция  $f(x)$  разлагается в степенной ряд в окрестности точки  $a$  по степеням  $(x-a)$ .

Найдем коэффициенты разложения  $a_0, a_1, a_2, \dots, a_n, \dots$ . Воспользуемся тем, что ряд (2) можно почленно дифференцировать на интервале сходимости:





Рассмотрим функцию

$$R_n(x) = f(x) - S_n(x).$$

$R_n(x)$  называется остаточным членом ряда Тейлора.

**Теорема.** Для того, чтобы бесконечно дифференцируемая функция являлась суммой составленного для нее ряда Тейлора, необходимо и достаточно, чтобы остаточный член ряда Тейлора стремился к 0 при  $n \rightarrow \infty$ .

**Доказательство.** Докажем сначала **необходимость**. Если  $f(x)$  является суммой ряда (5), то  $R_n(x)$  — остаток ряда и, следовательно,  $R_n(x) \rightarrow 0$  при  $n \rightarrow \infty$ .

**Достаточность.** Пусть  $R_n(x) \rightarrow 0$  при  $n \rightarrow \infty$ . Тогда

$$\lim_{n \rightarrow \infty} [f(x) - S_n(x)] = 0,$$

т. е.  $f(x)$  является пределом частичных сумм ряда (5) — является суммой ряда.

### 8.5.3. Вывод формулы остаточного члена. Ряд Маклорена

Для того, чтобы применять доказанную теорему, нужно знать вид остаточного члена  $R_n(x)$ . Будем искать остаточный член в виде

$$R_n(x) = \frac{(x-a)^{n+1}}{(n+1)!} Q,$$

где  $Q$  — некоторое число, подлежащее определению. Тогда

$$f(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \dots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n + \frac{(x-a)^{n+1}}{(n+1)!} Q. \quad (6)$$

Зафиксируем  $x$ . Тогда при  $a = t$

$$F(t) = f(x) - f(t) - f'(t)(x-t) - \dots - \frac{f^{(n)}(t)}{n!}(x-t)^n - \frac{(x-t)^{n+1}}{(n+1)!} Q$$

является функцией только от  $t$ . При  $t = a$   $F(a) = 0$ , при  $t = x$   $F(x) = 0$ . Вычислим  $F'(t)$ :

$$\begin{aligned} F'(t) = & -f'(t) + f'(t) - f''(t)(x-t) + f''(t)(x-t) - \frac{f'''(t)}{2!}(x-t)^2 + \\ & + \frac{3f'''(t)}{3!}(x-t)^2 - \dots - \frac{f^{(n+1)}(t)}{n!}(x-t)^n + \frac{(n+1)(x-t)^n}{(n+1)!} Q. \end{aligned}$$

Итак,  $F(t)$  дифференцируема и на концах интервала  $[a, x]$  принимает равные (нулевые) значения. По теореме Ролля  $\exists c \in [a, x]$ , что  $F'(c) = 0$ , т. е.

$$-\frac{f^{(n+1)}(c)}{n!}(x-c)^n + \frac{(x-c)^n}{n!}Q = 0.$$

Таким образом,  $Q = f^{(n+1)}(c)$  и

$$R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(x-a)^{n+1},$$

где  $c$  заключено между  $x$  и  $a$ . Выражение остаточного члена по формуле (7) называется остаточным членом в форме Лагранжа. При  $a = 0$

$$R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}x^{n+1},$$

где  $c$  заключено между 0 и  $x$ .

Итак,

$$f(x) = f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(x-a) + \dots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n + \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(x-a)^{n+1}. \quad (8)$$

(8) — формула Тейлора. При  $a = 0$  получим формулу Маклорена.

#### 8.5.4. Разложение функции $e^x$ в ряд Маклорена

Имеем

$$f'(x) = e^x, \dots, f^{(n)}(x) = e^x;$$

$$f(0) = f'(0) = \dots = f^{(n)}(0) = f^{(n+1)}(0) = 1.$$

Запишем ряд Маклорена для  $f(x) = e^x$ :

$$1 + x + \frac{x^2}{2!} + \dots + \frac{x^n}{n!} + \dots \quad (9)$$

Определим его область сходимости:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|x|^{n+1} \cdot n!}{(n+1)! |x|^n} = |x| \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n+1} = |x| \cdot 0 < 1 \quad \forall x.$$

Т. е. область сходимости ряда — вся числовая ось.

Выясним, является ли  $e^x$  суммой ряда (9).

$$R_n(x) = \frac{e^c}{(n+1)!} x^{n+1},$$

где  $c$  заключено между 0 и  $x$ , т. е.  $c < |x|$ , тогда  $e^c < e^{|x|}$  и

$$|R_n(x)| < \frac{e^{|x|}}{(n+1)!} |x|^{n+1}.$$

Но по доказанному ряд  $\sum_0^{\infty} \frac{|x|^n}{n!}$  сходится  $\forall x$ , т. е. его общий член стремится к 0 при  $n \rightarrow \infty$ , но тогда  $R_n(x) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$ . Итак,

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \dots + \frac{x^n}{n!} + \dots$$

## 8.6. Разложение некоторых функций в степенные ряды.

### Применение степенных рядов к приближенным вычислениям

Разложение в ряд Маклорена функций  $f(x) = \sin x$ ,  $f(x) = \cos x$ . Биномиальный ряд. Разложение в ряд Маклорена функции  $f(x) = \ln(1+x)$ . Методы, применяемые для разложения функций в степенные ряды. Применение степенных рядов в приближенных вычислениях.

#### 8.6.1. Разложение в ряд Маклорена функций $f(x) = \sin x$ , $f(x) = \cos x$

Пусть  $f(x) = \sin x$ . Имеем

$$f'(x) = \cos x, \quad f''(x) = -\sin x, \quad f'''(x) = -\cos x, \quad f^{IV}(x) = \sin x, \dots$$

Таким образом,

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \dots + (-1)^{n-1} \frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!} + \dots \quad (1)$$

Поскольку

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|x|^{2n+1} \cdot (2n-1)!}{(2n+1)! |x|^{2n-1}} = |x|^2 \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2n \cdot (2n+1)} = 0,$$

то ряд (1) сходится при всех  $x$ .

Пусть  $f(x) = \cos x$ . Так как  $\cos x = (\sin x)'$ , а ряд (1) можно почленно дифференцировать в его области сходимости, то

$$\begin{aligned}\cos x &= 1 - \frac{3x^2}{3!} + \frac{5x^4}{5!} + \dots + \frac{(-1)^{n-1}}{(2n-1)!} x^{2n-2} + \dots = \\ &= 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \dots + (-1)^{n-1} \frac{x^{2n-2}}{(2n-2)!} + \dots\end{aligned}$$

### 8.6.2. Биномиальный ряд

Пусть  $f(x) = (1+x)^m$ , где  $m$  — любое действительное число.

$$f'(x) = m(1+x)^{m-1}, \quad f''(x) = m(m-1)(1+x)^{m-2}, \dots,$$

$$f^{(n)}(x) = m(m-1) \dots (m-n+1)(1+x)^{m-n}, \dots$$

$$f(0) = 1, \quad f'(0) = m, \quad f''(0) = m(m-1), \dots, \quad f^{(n)}(0) = m(m-1) \dots (m-n+1), \dots$$

Тогда

$$(1+x)^m = 1 + \frac{m}{1!}x + \frac{m(m-1)}{2!}x^2 + \dots + \frac{m(m-1) \dots (m-n+1)}{n!}x^n + \dots \quad (2)$$

Радиус сходимости определим по признаку Даламбера:

$$R = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|a_n|}{|a_{n+1}|} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|n+1|}{|m-n|} = 1.$$

Таким образом, ряд (2) сходится абсолютно при  $-1 < x < 1$ .

### 8.6.3. Разложение в ряд Маклорена функции $f(x) = \ln(1+x)$

Пусть  $f(x) = \ln(1+x)$ . Имеем

$$f'(x) = \frac{1}{1+x}, \quad f''(x) = -\frac{1}{(x+1)^2}, \quad f'''(x) = \frac{2}{(x+1)^3},$$

$$f^{IV}(x) = -\frac{2 \cdot 3}{(x+1)^4}, \dots, \quad \frac{(-1)^{n-1}(n-1)!}{(x+1)^n}, \dots$$

$$f(0) = 0, \quad f'(0) = 1, \quad f''(0) = -1!, \quad f'''(0) = 2!, \dots, \quad f^{(n)}(0) = (-1)^{n-1}(n-1)!$$

В данном случае

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \dots + \frac{(-1)^{n-1}x^n}{n} + \dots \quad (3)$$

Применяя признак Даламбера, нетрудно установить, область сходимости:  $-1 < x \leq 1$ .

Приведем еще одно разложение, справедливое при  $|x| < 1$ :

$$f(x) = \frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + \dots + x^n + \dots \quad (4)$$

#### 8.6.4. Методы, применяемые для разложения функций в степенные ряды

**Метод подстановки.** Этот метод использует пять основных разложений элементарных функций. При этом не нужно определять область сходимости.

**Пример 1.** Разложить в ряд функцию  $e^{-x^2}$ . Положим  $-x^2 = u$ . Тогда

$$e^u = 1 + u + \frac{u^2}{2!} + \dots + \frac{u^n}{n!} + \dots$$

и

$$e^{-x^2} = 1 - x^2 + \frac{x^4}{2!} - \dots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{n!} + \dots$$

— сходится при любом  $x$ .

**Пример 2.** Разложить в ряд функцию  $\frac{1}{1+x^2}$ .

Положим  $-x^2 = t$ :

$$\frac{1}{1-t} = 1 + t + t^2 + t^3 + \dots + t^n + \dots,$$

$$\frac{1}{1+x^2} = 1 - x^2 + x^4 - x^6 + \dots + (-1)^n x^{2n} + \dots, \quad -1 < x < 1.$$

**Метод почленного интегрирования и дифференцирования.** Метод дифференцирования уже был нами использован выше при разложении в ряд  $\cos x$ . Разложим в ряд функцию  $\arctg x$ .

$$\arctg x = \int_0^x \frac{dt}{1+t^2};$$

$$\frac{1}{1+t^2} = 1 - t^2 + t^4 - t^6 + \dots + (-1)^n t^{2n} + \dots, \quad -1 < t < 1.$$

$$\begin{aligned} \arctg x &= \int_0^x (1 - t^2 + t^4 - t^6 + \dots + (-1)^n t^{2n} + \dots) dt = \\ &= t \Big|_0^x - \frac{t^3}{3} \Big|_0^x + \frac{t^5}{5} \Big|_0^x - \frac{t^7}{7} \Big|_0^x + \dots + (-1)^n \frac{t^{2n+1}}{2n+1} \Big|_0^x + \dots = \\ &= x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \dots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1} + \dots \end{aligned}$$

### 8.6.5. Применение степенных рядов в приближенных вычислениях

**1. Приближенное вычисление значений функций.** Пусть необходимо вычислить значение  $e$  с точностью до 0,001.

$$e = 1 + 1 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \dots + \frac{1}{n!} + \frac{e^c}{(n+1)!},$$

где  $0 \leq c \leq x = 1$ . При каком количестве членов ряда будет достигнута нужная точность? Это будет в том случае, когда остаточный член не

превосходит 0,001, т. е.  $\frac{e^c}{(n+1)!} < 0,001$ .

$$\frac{e^c}{(n+1)!} < \frac{3}{(n+1)!} < 0,001$$

при  $n = 6$ , так как  $\frac{3}{(6+1)!} < 0,001$ .

Таким образом, необходимо взять 6 членов ряда. При этом окажется, что  $e \approx 2,718$ .

**2. Приближенное вычисление интегралов.** Вычислим значение интеграла

$$\int_0^{1/3} e^{-x^2} dx$$

с точностью 0,001. Формула Ньютона – Лейбница неприменима, так как первообразная не выражается через элементарные функции.

$$e^{-x^2} = 1 - x^2 + \frac{x^4}{2!} - \frac{x^6}{3!} + \frac{x^8}{4!} - \dots,$$

$$\int_0^{1/3} e^{-x^2} dx = x \Big|_0^{1/3} - \frac{x^3}{3} \Big|_0^{1/3} + \frac{x^5}{2! \cdot 5} \Big|_0^{1/3} - \frac{x^7}{7 \cdot 3!} \Big|_0^{1/3} + \dots =$$

$$= \frac{1}{3} - \frac{1}{3 \cdot 3^3} + \frac{1}{5 \cdot 2! 3^5} - \frac{1}{7 \cdot 3! 3^7} + \dots;$$

$$\frac{1}{3^4} = \frac{1}{81} > 0,001, \quad \frac{1}{5 \cdot 2 \cdot 3^5} = \frac{1}{2430} < 0,001.$$

В знакочередующемся ряде остаток не превышает первого из отброшенных членов, поэтому здесь достаточно взять два члена ряда и

$$\int_0^{1/3} e^{-x^2} dx \approx \frac{1}{3} - \frac{1}{81} = \frac{26}{81}.$$

### 3. Интегрирование дифференциальных уравнений с помощью рядов.

Если интегрирование дифференциального уравнения не сводится к квадратурам, то прибегают к приближенным методам интегрирования. Одним из таких методов является представление решения уравнения в виде ряда Тейлора; сумма конечного числа членов этого ряда будет приближенно равна искомому частному решению.

Пусть требуется найти частное решение дифференциального уравнения второго порядка

$$y'' = f(x, y, y') \quad (2)$$

с начальными условиями  $y(x_0) = y_0$ ,  $y'(x_0) = y'_0$ .

Допустим, что его решение  $y = y(x)$  можно представить в виде ряда Тейлора:

$$y(x) = y(x_0) + y'(x_0) \frac{(x - x_0)}{1!} + y''(x_0) \frac{(x - x_0)^2}{2!} + y'''(x_0) \frac{(x - x_0)^3}{3!} + \dots \quad (3)$$



Для определения коэффициентов ряда поступим следующим образом. Значения  $y(x_0) = y_0$  и  $y'(x_0) = y'_0$  нам известны из начальных условий. Для нахождения  $y''(x_0)$  подставим в правую часть уравнения (2) вместо  $y$  и  $y'$  их значения при  $x = x_0$ :

$$y''(x_0) = y''_0 = f(x_0, y_0, y'_0). \quad (4)$$

Для определения  $y'''(x_0)$  дифференцируем обе части равенства (2) по  $x$  и подставляем значения  $y$ ,  $y'$  и  $y''$  при  $x = x_0$ . Последовательно получаем

$$y'''(x) = \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y} y' + \frac{\partial f}{\partial y'} y'' = \Phi(x, y, y', y''), \quad (5)$$

$$y'''(x_0) = \Phi(x_0, y_0, y'_0, y''_0).$$

Дифференцируя равенство (5) еще раз и подставляя значения  $x_0$ ,  $y_0$ ,  $y'_0$ ,  $y''_0$ , найдем значение  $y^{IV}(x_0)$  и т. д. Полученные значения производных подставляем в ряд (3), который дает решение уравнения.

**П р и м е р.** Найти приближенное решение уравнения  $y'' = y \cos x + x$ , удовлетворяющего начальным условиям:  $y(0) = 1$ ,  $y'(0) = 0$ .

Ищем решение уравнения в виде ряда Маклорена:

$$y = y(0) + y'(0)x + \frac{y''(0)}{2!}x^2 + \frac{y'''(0)}{3!}x^3 + \dots$$

Принимая во внимание, что  $y = 1$  при  $x = 0$ , из данного дифференциального уравнения находим  $y''(0) = 1 \cos 0 + 0 = 1$ . Для нахождения  $y'''$  дифференцируем обе части данного уравнения:

$$y''' = y' \cos x - y \sin x + 1.$$

При  $x = 0$  получим

$$y'''(0) = y'(0) \cos 0 - y(0) \sin 0 + 1 = 0 \cdot 1 - 1 \cdot 0 + 1 = 1.$$

Подставляя найденные значения производных в ряд, для решения получим приближенное выражение в виде частичной суммы ряда

$$y(x) \approx 1 + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!}.$$

### 8.7. Ряды Фурье. Тригонометрические ряды Фурье с периодом $2\pi$

Постановка задачи. Некоторые вспомогательные утверждения. Определение коэффициентов ряда Фурье. Условия сходимости. Теорема Дирихле.

#### 8.7.1. Постановка задачи. Некоторые вспомогательные утверждения

В общем случае тригонометрический ряд имеет вид

$$\begin{aligned} \frac{a_0}{2} + a_1 \cos x + b_1 \sin x + a_2 \cos 2x + b_2 \sin 2x + \dots = \\ = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx). \end{aligned} \quad (1)$$

Если коэффициенты тригонометрического ряда определить так, чтобы его сумма равнялась функции  $f(x)$  на отрезке  $[-\pi, +\pi]$ :

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx), \quad (2)$$

то тригонометрический ряд называется рядом Фурье для функции  $f(x)$ .

В инженерной практике необходимость представления функции, заданной на отрезке  $[-\pi, +\pi]$ , в виде ряда Фурье возникает во многих случаях. Например, если она задана таблично, или она имеет точки разрыва первого рода и определена несколькими аналитическими выражениями на отдельных участках данного отрезка. В этих и многих других случаях при разложении функции в ряд Фурье значительно упрощаются все процедуры, связанные с использованием таких функций.

При этом если функция задана на некотором отрезке  $[a, b]$ , то путем замены независимой переменной можно перейти к отрезку  $[-\pi, +\pi]$  или  $[0, \pi]$ . Таким образом, разложить в ряд Фурье можно любую функцию, заданную и кусочно непрерывную на любом отрезке  $[a, b]$ . При этом лишь следует иметь в виду, что непериодическая функция, заданная на отрезке  $[a, b]$ , при разложении в ряд Фурье будет продолжена за пределы этого участка как периодическая. А в практических приложениях это свойство, навязанное данной функции, не имеет существенного значения.

Например, функция  $f(z)$  является правой частью дифференциального уравнения второго порядка, решение которого нужно найти на отрезке  $[-l, l]$  при заданных условиях на концах отрезка. Если функция  $f(z)$  не имеет простого аналитического выражения, можно сделать замену переменной  $z = lx/\pi$ , представить  $f(z)$  в виде ряда (2) и в виде такого же ряда искать решение задачи. При этом в условиях данной задачи не имеет никакого значения то обстоятельство, как будет продолжена функция  $f(z)$  за пределы данного отрезка.

Поставим задачу определения коэффициентов ряда (2) через функцию  $f(x)$ . Для этого выпишем следующую систему равенств:

$$\begin{aligned} \int_{-\pi}^{\pi} \cos kx \sin nx dx &= 0; & \int_{-\pi}^{\pi} \sin nx dx &= \int_{-\pi}^{\pi} \cos nx dx = 0; \\ \int_{-\pi}^{\pi} \cos kx \sin nx dx &= 0; \end{aligned} \quad (3)$$

$$\begin{aligned} \int_{-\pi}^{\pi} \cos kx \cos nx dx &= \begin{cases} 0 & \text{при } n \neq k, \\ \pi & \text{при } n = k; \end{cases} \\ \int_{-\pi}^{\pi} \sin kx \sin nx dx &= \begin{cases} 0 & \text{при } n \neq k, \\ \pi & \text{при } n = k. \end{cases} \end{aligned} \quad (4)$$

Докажем равенства (4):

$$\begin{aligned} \int_{-\pi}^{\pi} \cos kx \cos nx dx &= \int_{-\pi}^{\pi} \frac{\cos(k+n)x + \cos(k-n)x}{2} dx = \\ &= \begin{cases} \int_{-\pi}^{\pi} \left( \frac{1}{2} + \frac{\cos 2kx}{2} \right) dx = \pi & \text{при } n = k, \\ \int_{-\pi}^{\pi} \left( \frac{\cos(k+n)x}{2} + \frac{\cos(k-n)x}{2} \right) dx = 0 & \text{при } n \neq k. \end{cases} \end{aligned}$$

С произведением синусов получается аналогично.

### 8.7.2. Определение коэффициентов ряда Фурье

Предположим, что ряд (2) можно почленно интегрировать (это будет, например, выполнено, если ряд абсолютно сходится, т. е. если сходится числовой ряд

$$\left| \frac{a_0}{2} \right| + |a_1| + |b_1| + |a_2| + |b_2| + \dots$$

Тогда получим

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x) dx = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{a_0}{2} dx = 2\pi \frac{a_0}{2} = \pi a_0,$$

т. е.

$$a_0 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) dx. \quad (5)$$

Умножим обе части равенства (2) на  $\cos kx$  и проинтегрируем:

$$\begin{aligned} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos kx dx &= \int_{-\pi}^{\pi} \frac{a_0}{2} \cos kx dx + \\ + \sum_{n=1}^{\infty} \left( a_n \int_{-\pi}^{\pi} \cos nx \cos kx dx + b_n \int_{-\pi}^{\pi} \sin nx \cos kx dx \right) &= a_k \int_{-\pi}^{\pi} \cos^2 kx dx = a_k \pi, \end{aligned}$$

$$a_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos kx dx. \quad (6)$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin kx dx = b_k \int_{-\pi}^{\pi} \sin^2 kx dx = b_k \pi,$$

$$b_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin kx dx. \quad (7)$$

Коэффициенты (5), (6), (7) — коэффициенты ряда Фурье функции  $f(x)$ .

### 8.7.3. Условия сходимости. Теорема Дирихле

Пусть для  $2\pi$  — периодической функции  $f(x)$  по формулам (5)–(7) вычислены коэффициенты и формально построен ряд Фурье. Рассмотрим, в каком случае он будет иметь своей суммой  $f(x)$ .

**ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1.** Функция  $f(x)$  называется кусочно-монотонной на отрезке  $[a, b]$ , если отрезок можно разбить на конечное число частей так, что на каждой из них  $f(x)$  либо монотонно возрастает, либо монотонно убывает, либо остается постоянной.

**ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2.** Функция  $f(x)$  удовлетворяет условиям Дирихле на  $[a, b]$ , если она кусочно-монотонна и ограничена на отрезке  $[a, b]$ .

**Теорема Дирихле.** Пусть функция  $f(x)$  удовлетворяет на отрезке  $[-\pi, \pi]$  условиям Дирихле. Тогда ряд Фурье, формально построенный по этой функции, сходится и его сумма  $S(x)$  совпадает с  $f(x)$  во всех точках непрерывности  $f(x)$ , а в точках разрыва  $x_i$

$$S(x_i) = \frac{1}{2} \left( \lim_{x \rightarrow x_i - 0} f(x) + \lim_{x \rightarrow x_i + 0} f(x) \right),$$

т. е. равна среднему арифметическому предельных значений функции при  $x \rightarrow x_i$  слева и справа.

**Пример.** Разложить в ряд Фурье функцию  $f(x) = x$  при  $-\pi < x \leq \pi$ .

$$a_0 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} x dx = 0;$$

$$a_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} x \cos kx dx = 0;$$

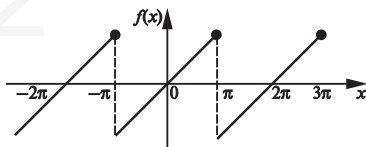


Рис. 8.2

$$\begin{aligned} b_k &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} x \sin kx dx = \frac{1}{\pi} \left[ -\frac{x \cos kx}{k} \Big|_{-\pi}^{\pi} + \frac{1}{k} \int_{-\pi}^{\pi} \cos kx dx \right] = \\ &= \frac{1}{k\pi} \left[ -\pi \cos k\pi - \pi \cos k\pi + \frac{1}{k^2} \sin kx \Big|_{-\pi}^{\pi} \right] = -\frac{2}{k} \cos k\pi = -\frac{2}{k} (-1)^k = (-1)^{k+1} \frac{2}{k}. \\ x &= 2 \left[ \sin x - \frac{1}{2} \sin 2x + \frac{1}{3} \sin 3x + \dots + (-1)^{n+1} \frac{\sin nx}{n} + \dots \right]. \end{aligned}$$

Следует обратить внимание, что при вычислении коэффициентов  $a_k$  подынтегральные функции нечетные, а пределы интегрирования симметричные. Поэтому все интегралы и соответственно коэффициенты  $a_k$  равны нулю.

Заданная функция  $f(x)$  определена на отрезке  $[-\pi, \pi]$ , а представленная в виде ряда Фурье она продолжена за пределы этого отрезка. Свойство периодичности этой функции теперь навязано свойствами тригонометрического ряда. Если это необходимо, то данное обстоятельство можно использовать. Если же нам нужна эта функция только на отрезке  $[-\pi, \pi]$ , то ее периодическое продолжение за пределы данного участка не имеют никакого значения, пусть будет и там такой же.

### 8.8. Ряды Фурье для четных и нечетных функций, для функций с периодом $2l$ , для непериодических функций

Ряды Фурье для четных и нечетных функций. Разложение в ряд Фурье функции с периодом  $2l$ . Ряд Фурье для непериодической функции.

#### 8.8.1. Ряды Фурье для четных и нечетных функций

Функция  $f(x)$  — четная, если  $f(-x) = f(x)$ . Функция  $\varphi(x)$  — нечетная, если  $\varphi(-x) = -\varphi(x)$ .

1. Произведение четной функции на четную и нечетной на нечетную есть функция четная.

Пусть  $f(x)$  — четная,  $\varphi(x)$  — четная,  $\omega(x) = f(x) \cdot \varphi(x)$ .

$$\omega(-x) = f(-x) \cdot \varphi(-x) = f(x) \cdot \varphi(x) = \omega(x).$$

Пусть  $f(x)$  — нечетная,  $\varphi(x)$  — нечетная.

$$\omega(-x) = \varphi(-x) \cdot f(-x) = [-\varphi(x)] \cdot [-f(x)] = f(x) \cdot \varphi(x) = \omega(x).$$

2. Произведение нечетной функции на четную есть функция нечетная.

Доказательство аналогично предыдущему.

3. Пусть  $\varphi(x)$  — четная функция, тогда

$$\int_{-a}^a f(x) dx = 2 \int_0^a f(x) dx.$$

*Доказательство.*

$$\int_{-a}^a f(x) dx = \int_{-a}^0 f(x) dx + \int_0^a f(x) dx; \quad -x = z, \quad dz = -dx,$$

$$\int_{-a}^0 f(x) dx = -\int_a^0 f(-z) dz = \int_0^a f(-z) dz = \int_0^a f(z) dz;$$

$$\int_{-a}^a f(x) dx = \int_0^a f(z) dz + \int_0^a f(x) dx = 2 \int_0^a f(x) dx.$$

4. Пусть  $f(x)$  нечетная функция, тогда

$$\int_{-a}^a f(x) dx = 0.$$

Доказательство аналогично предыдущему.

Пусть нужно разложить в ряд Фурье четную функцию. Имеем

$$a_0 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) dx = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(x) dx;$$

$$a_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos kx dx = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(x) \cos kx dx$$

(так как  $f(x) \cdot \cos kx$  — четная);

$$b_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin kx dx = 0$$

(так как  $f(x) \cdot \sin kx$  — нечетная).

Для нечетной функции аналогично получаем

$$a_0 = 0, \quad a_k = 0,$$

$$b_k = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(x) \sin kx dx.$$

**Пример.** Разложить в ряд Фурье функцию  $f(x) = |x|$  при  $-\pi < x \leq \pi$ .

$$a_0 = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} x dx = \frac{2}{\pi} \frac{x^2}{2} \Big|_0^{\pi} = \frac{2\pi^2}{2\pi} = \pi.$$

$$\begin{aligned}
 a_k &= \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} x \cos kx dx = \frac{2}{\pi} \left[ \frac{x}{k} \sin kx \right]_0^{\pi} - \frac{1}{k} \int_0^{\pi} \sin kx dx = \\
 &= \left( \begin{array}{l} x = u, \quad du = dx, \\ \cos kx dx = dv, \quad v = \frac{1}{k} \sin kx \end{array} \right) = \\
 &= \frac{2}{\pi k^2} [\cos kx]_0^{\pi} = \frac{2}{\pi k^2} [(-1)^k - 1];
 \end{aligned}$$

$$a_1 = -\frac{4}{\pi}, \quad a_2 = 0, \quad a_3 = -\frac{4}{\pi \cdot 3^2}, \quad a_4 = 0, \quad a_5 = -\frac{4}{\pi \cdot 5^2}, \quad \dots;$$

$$f(x) = \pi - \frac{4}{\pi} \left[ \cos x + \frac{\cos 3x}{3^2} + \frac{\cos 5x}{5^2} + \dots + \frac{\cos(2n-1)x}{[2(n-1)]^2} + \dots \right].$$

Ряд сходится на всей оси и имеет своей суммой  $f(x) = |x|$ .

### 8.8.2. Разложение функции в ряд Фурье на отрезке $[-l, l]$

Если требуется разложить в ряд Фурье функцию, заданную на отрезке  $[-l, l]$ , то полная система ортогональных тригонометрических функций на таком отрезке имеет вид

$$1, \quad \cos \frac{k\pi x}{l}, \quad \sin \frac{k\pi x}{l}, \quad k = 1, 2, 3, \dots,$$

и совершенно аналогичным образом записывается ряд Фурье для данной функции  $f(x)$  с использованием этой системы функций:

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos \frac{k\pi x}{l} + \sum_{k=1}^{\infty} b_k \sin \frac{k\pi x}{l}.$$

Обратите внимание, что представить в виде ряда Фурье можно любую функцию, удовлетворяющую условиям Дирихле, но не обязательно периодическую. Непериодическая функция становится периодической после ее разложения в ряд Фурье. Как правило, необходимость представить заданную функцию в виде ряда Фурье возникает не для того, чтобы наделить ее свойствами периодичности за пределами данного отрезка  $[-l, l]$ , а по многим другим соображениям. И для этих других целей подбирают другую полную систему ортогональных функций.



Например, только систему косинусов, или только систему синусов, каждая из которых является и полной, и ортогональной на отрезке  $[0, \pi]$ .

В данном случае коэффициенты записанного ряда Фурье определяются по такой же схеме и получаются аналогичные соотношения:

$$a_0 = \frac{1}{l} \int_{-l}^l f(x) dx.$$

Аналогично

$$a_k = \frac{1}{l} \int_{-l}^l f(x) \cos \frac{k\pi}{l} x dx;$$

$$b_k = \frac{1}{l} \int_{-l}^l f(x) \sin \frac{k\pi}{l} x dx.$$

Если функция четная, то

$$a_0 = \frac{2}{l} \int_0^l f(x) dx, \quad a_k = \frac{2}{l} \int_0^l f(x) \cos \frac{\pi k}{l} x dx, \quad b_k = 0.$$

Для нечетной функции

$$a_0 = 0, \quad a_k = 0, \quad b_k = \frac{2}{l} \int_0^l f(x) \sin \frac{\pi k}{l} x dx.$$

**Пример.** Разложить в ряд Фурье функцию  $x-1$  на промежутке  $(-1, 1)$ .

$$a_0 = \frac{1}{1} \int_{-1}^1 (x-1) dx = \frac{(x-1)^2}{2} \Big|_{-1}^1 = 0 - 2 = -2;$$

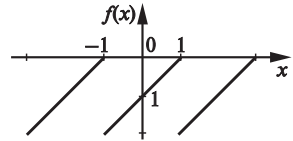


Рис. 8.3

$$\begin{aligned} a_k &= \frac{1}{1} \int_{-1}^1 (x-1) \cos k\pi x dx = \int_{-1}^1 x \cos k\pi x dx - \int_{-1}^1 \cos k\pi x dx = \\ &= \frac{x \sin k\pi x}{k\pi} \Big|_{-1}^1 - \int_{-1}^1 \frac{\sin k\pi x}{k\pi} dx - \frac{\sin k\pi x}{k\pi} \Big|_{-1}^1 = \frac{1}{k^2 \pi^2} \cos k\pi x \Big|_{-1}^1 = 0; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 b_k &= \int_{-1}^1 (x-1) \sin k\pi x dx = \int_{-1}^1 x \sin k\pi x dx - \int_{-1}^1 \sin k\pi x dx = \\
 &= -\frac{x \cos k\pi x}{k\pi} \Big|_{-1}^1 + \int_{-1}^1 \frac{\cos k\pi x}{k\pi} dx + \frac{\cos k\pi x}{k\pi} \Big|_{-1}^1 = \\
 &= -\frac{1}{k\pi} [\cos k\pi + \cos(-k\pi)] + \frac{\sin k\pi x}{k^2 \pi^2} \Big|_{-1}^1 + \frac{1}{k\pi} [\cos k\pi - \cos(-k\pi)] = -\frac{2(-1)^k}{k\pi}.
 \end{aligned}$$

Итак,  $a_0 = -2$ ,  $a_k = 0$ ,  $b_k = -\frac{2(-1)^k}{k\pi}$ ,

$$x-1 = -1 + \frac{2}{\pi} \left[ \frac{\sin \pi x}{1} - \frac{\sin 2\pi x}{2} + \frac{\sin 3\pi x}{3} - \dots + (-1)^{n-1} \frac{\sin n\pi x}{n} + \dots \right].$$

### 8.8.3. Ряд Фурье для неперiodической функции

Пусть  $f(x)$  задана на всей оси и неперiodична. Пусть стоит задача построить ряд Фурье, который имел бы  $f(x)$  своей суммой на  $(-l, l]$ . Если на  $(-l, l]$   $f(x)$  удовлетворяет условиям Дирихле, то продолжая ее периодически с периодом  $2l$  на всю ось, получим периодическую функцию  $f_1(x)$ .

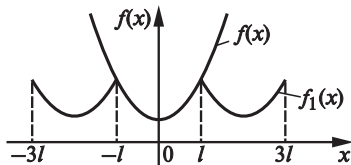


Рис. 8.4

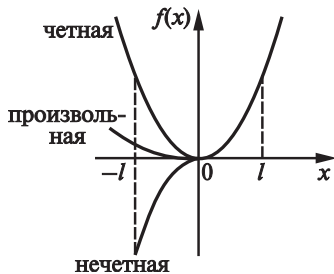


Рис. 8.5

Для  $f_1(x)$  построим ряд Фурье, который будет сводиться к  $f(x)$  на  $(-l, l]$ , т. е. во всех точках непрерывности на  $(-l, l]$  ряд Фурье будет иметь своей суммой  $f(x)$ .

Если  $f(x)$  задана на  $[0, l]$ , то сначала продолжим  $f(x)$  на  $(-l, l]$  и потом периодически на всю числовую прямую. Продолжение на  $(-l, 0)$

может быть любым, но чаще оно четное или нечетное в зависимости от того, хотим мы получить ряд по косинусам или по синусам.

Таким образом, для продолжения функции можно получить бесконечное число рядов Фурье, которые на  $(0, l]$  имеют своей суммой  $f(x)$ .

**Пример.** Разложить в ряд Фурье  $f(x)=1$  на отрезке  $(0, 1]$ .

Разложение по синусам продолжит данную функцию на всю числовую ось, как показано на рис. 8.6.:

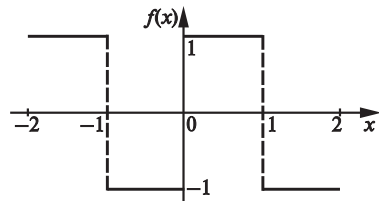


Рис. 8.6

$$\begin{aligned}
 b_k &= \frac{2}{l} \int_0^l f(x) \sin \frac{\pi k}{l} x dx = 2 \int_0^1 \sin \pi k x dx = \\
 &= -\frac{2}{\pi k} \cos \pi k \Big|_0^1 = -\frac{2}{\pi k} [(-1)^k - 1]; \\
 b_1 &= -\frac{2}{\pi}(-2) = \frac{4}{\pi}; \quad b_2 = 0, \quad b_3 = \frac{4}{3\pi}, \quad \dots, \\
 1 &= \frac{4}{\pi} \left[ \sin x + \frac{1}{3} \sin 3\pi x + \dots + \frac{\sin(2n-1)\pi x}{2n-1} + \dots \right].
 \end{aligned}$$

#### 8.8.4. Возможности применения рядов Фурье к решению дифференциальных уравнений и краевых задач

Знание теории и практики применения рядов Фурье открывает широкие возможности решения многих инженерно технических задач. Покажем это на конкретном примере.

Пусть требуется получить решение дифференциального уравнения четвертого порядка

$$\frac{d^4 y}{dx^4} + 4\alpha^4 y = 1$$

на отрезке  $[0, 1]$ , которое на концах данного отрезка должно удовлетворять следующим граничным условиям:

$$y(0) = 0, \quad y''(0) = 0, \quad y(1) = 0, \quad y''(1) = 0.$$

Такая задача возникает, например, при расчете напряженно-деформированного состояния и оценке прочности балки на упругом основании под действием равномерно распределенной поперечной нагрузки, или тонкостенного цилиндра под действием внутреннего (внешнего) давления и многих других случаях. Параметр  $\alpha$  здесь безразмерный и имеет разный физический смысл в разных задачах.

В первую очередь отметим, что общее решение данного дифференциального уравнения можно получить методом Эйлера и выразить его через тригонометрические и гиперболические функции, но этот путь достаточно трудоемкий и лучше отдать предпочтение приведенному ниже решению в рядах Фурье.

В условиях данной задачи следует обратить внимание на то, что и дифференциальное уравнение, и граничные условия содержат неизвестную функцию и производные только четного порядка. Поэтому искомое решение можно представить в виде ряда Фурье по синусам

$$y(x) = \sum B_k \sin k\pi x.$$

Граничные условия при этом удовлетворяются, и требуется определить неизвестные пока коэффициенты ряда  $B_k$ . Подставим для этого заданное выражение для  $y(x)$  в дифференциальное уравнение и представим правую часть уравнения тоже в виде ряда Фурье по синусам. В результате получим

$$\sum_{n=1}^{\infty} (n^4 \pi^4 + 4\alpha^4) B_n \sin n\pi x = \frac{4}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(2k-1)} \sin(2k-1)\pi x.$$

Приравнявая теперь коэффициенты при синусах с одинаковыми аргументами, находим все коэффициенты

$$B_{2k-1} = \frac{4}{\pi(2k-1)} \frac{1}{(2k-1)^4 \pi^4 + 4\alpha^4}, \quad B_{2k} = 0, \quad k = 1, 2, 3, \dots$$

и получаем решение данной задачи:

$$y(x) = \frac{4}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(2k-1)[(2k-1)^4 \pi^4 + 4\alpha^4]} \sin(2k-1)\pi x.$$

Как видим, решение получается достаточно просто, и также просто оно будет получено, если правая часть данного уравнения будет задано в виде любой кусочно-непрерывной и ограниченной функции на отрезке  $[0, 1]$ .

Отметим, что поэтому максимальное значение функции достигается посередине данного отрезка:

$$y_{\max} = \frac{4}{\pi} \left[ \frac{1}{[\pi^4 + 4\alpha^4]} - \frac{1}{3[81\pi^4 + 4\alpha^4]} + \frac{1}{5[125\pi^4 + 4\alpha^4]} - \dots \right].$$

Полученный ряд быстро сходится, так как его коэффициенты быстро затухают, он знакопеременный и поэтому погрешность вычислений не превосходит величину первого отброшенного члена.

M62

## ГЛАВА 9

### МЕТОДЫ МАТЕМАТИЧЕСКОГО МОДЕЛИРОВАНИЯ ФИЗИЧЕСКИХ ПРОЦЕССОВ

---

В данной главе мы рассмотрим задачи математического анализа, которые связаны с исследованием физических процессов и решением дифференциальных уравнений с частными производными. Их обычно относят к избранным главам высшей математики и называют уравнениями математической физики.

Инженеры и студенты технических вузов обычно испытывают значительные затруднения в поиске руководства по постановке и решению задач в этой обширной и важной отрасли прикладной математики. Обусловлено это тем, что авторы этой обширной и богатой литературы — математики, которые при решении задач опираются на слишком большой объем математических знаний, а математические преобразования излагают настолько сжато и с привлечением столько фактов по умолчанию, что исследования в этой области от постановки задач до заключительных выводов становятся недоступными для студентов технических вузов и инженеров.

Для подтверждения сказанного можно, например, отметить, что большинство учебных пособий по уравнениям математической физики начинаются с классификации дифференциальных уравнений. Записывается дифференциальное уравнение второго порядка в общем виде с частными производными искомой функции первого и второго порядков. Затем, путем преобразования независимых переменных, *допускающего обратное преобразование*, получают уравнение, *эквивалентное исходному уравнению*, но которое содержит только производные второго порядка с коэффициентами  $a_{ij}$ :

$$a_{ij} \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j}, \quad i, j = 1, 2.$$

Далее уравнения классифицируют по трем типам:

- 1) если коэффициенты  $a_{ij}$  одного знака, то это уравнение эллиптическое;
- 2) если коэффициенты  $a_{ij}$  разных знаков, то это уравнение гиперболического типа;

3) но если один из коэффициентов  $a_{ii}$  равен нулю, а по этой независимой переменной в уравнении осталась первая производная, то это уравнение параболического типа.

Выпишем эти уравнения всех трех типов и пронумеруем их соответственно:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + cu + f = 0, \quad (1)$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + cu + f = 0, \quad (2)$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{\partial u}{\partial t} + cu + f = 0. \quad (3)$$

Некоторая полоса отчуждения у читателя может возникнуть уже на данном этапе изучения этой теории. Действительно, уравнение продольных колебаний бруса и уравнение поперечных колебаний струны можно преобразовать к виду

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} - k^2 \frac{\partial^2 V}{\partial t^2} = 0,$$

где  $V(x, t)$  — функция продольных перемещений поперечных сечений бруса или функция поперечных перемещений точек изогнутой оси струны;  $x$  — координаты поперечных сечений, а  $t$  — время. По данной классификации это — уравнение гиперболического типа. А куда же отнести уравнение поперечных колебаний балки, которое имеет вид

$$\frac{\partial^4 V}{\partial x^4} + \beta^4 \frac{\partial^2 V}{\partial t^2} = 0,$$

где  $V(x, t)$  — функция поперечных перемещений точек изогнутой оси балки.

По физическому смыслу это совершенно одинаковые задачи, да и методы решения тоже одинаковые, а по данной классификации последнее уравнение вообще выпадает из рассмотрения.

Поэтому, не углубляясь в математическую сторону дела, мы рассмотрим в данной главе вопросы постановки и решения задач теории изгиба балок, а также теплообмена и расчета температурных полей и напряжений в элементах конструкций, которые повседневно возникают в инженерной практике.

## 9.1. Вывод дифференциального уравнения поперечных колебаний балки. Граничные и начальные условия

Основные предпосылки теории изгиба балок. Дифференциальное уравнение поперечных колебаний балки. Граничные и начальные условия.

### 9.1.1. Основные предпосылки теории изгиба балок

На рис. 9.1 показан брус, шарнирно закрепленный на концах, под действием осевой силы  $P$  и поперечной нагрузки, распределенной по всей длине или по отдельной ее части с заданной интенсивностью  $q(x, t)$ , где  $x$  координата — по оси бруса с началом отсчета на левом конце. Распределенная по длине нагрузка  $q(x, t)$  называется погонной нагрузкой. В общем случае она зависит и от времени  $t$ .

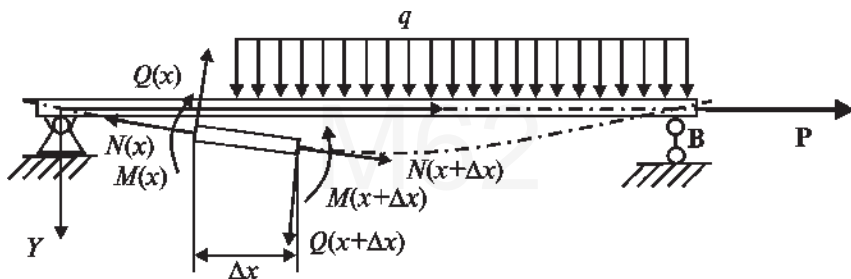


Рис. 9.1

На рис. 9.1 показана изогнутая ось бруса после приложения нагрузки, а также внутренние силы  $N(x)$ ,  $Q(x)$  и изгибающие моменты  $M(x)$ , которые возникают в поперечных сечениях при *плоском* изгибе балки.

**ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1.** Брусом называется прямолинейный элемент конструкции, размеры поперечных сечений которого (например, высота поперечных сечений  $h$ ) малы по сравнению с его длиной  $L$ ,  $h/L \ll 1$ .

**ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2.** Плоским изгибом называется такой вид напряженно-деформированного состояния бруса, в условиях которого напряжения во всех его поперечных сечениях статически эквивалентны поперечным силам и парам сил, находящимся в одной плоскости. Эта плоскость называется плоскостью изгиба.



**ОПРЕДЕЛЕНИЕ 3.** Осью бруса называется геометрическое место центров тяжести поперечных сечений. Изогнутая ось бруса при плоском изгибе находится в плоскости изгиба.

За центр приведения напряжений к силам и парам сил принимаются центры тяжести поперечных сечений бруса. При этом сумма моментов, напряжений относительно центра тяжести сечения называется изгибающим моментом, а брус, находящийся в условиях изгиба, обычно называется балкой.

Деформации при изгибе определяются на основе деформационной гипотезы, основные положения которой состоят в следующем:

- 1) совокупность точек, расположенных до изгиба в плоскости поперечного сечения бруса, после изгиба перемещается в пространстве, но по-прежнему образует плоскость, причем перпендикулярную к изогнутой оси бруса;
- 2) поперечные размеры бруса не изменяются при изгибе;
- 3) ось балки при переходе в изогнутое состояние не изменяет своей первоначальной длины, что оказывается возможным при свободном перемещении опоры в продольном направлении.

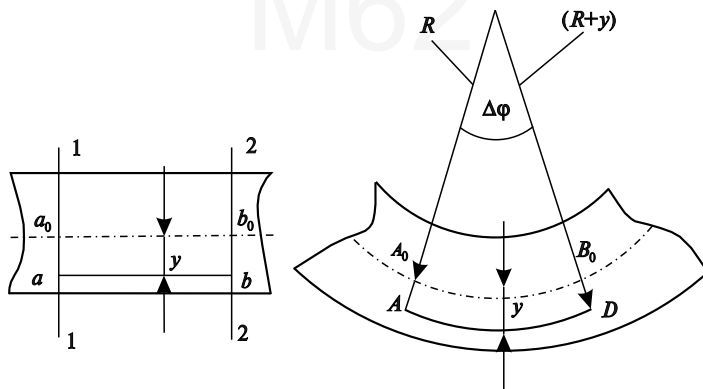


Рис. 9.2

Все эти положения можно обобщить одной формулировкой: всякое поперечное сечение бруса, перпендикулярное к его оси до изгиба, остается плоским и после изгиба, и перпендикулярным к изогнутой оси балки, поворачиваясь как жесткое целое относительно оси, перпендикулярной плоскости изгиба и проходящей через центр тяжести поперечного сечения.

Для более полного представления условий плоского изгиба можно ввести следующее определение.

**ОПРЕДЕЛЕНИЕ 4.** Ось, относительно которой происходит поворот поперечного сечения при изгибе, называется *нейтральной осью сечения*. Все нейтральные оси сечений образуют *нейтральный слой балки*. Уравнение нейтрального слоя (нейтральной плоскости) —  $Y = 0$ .

Для определения деформаций на рис. 9.2 показан элемент длины  $\Delta x$ , выделенный двумя поперечными сечениями, до изгиба и после изгиба. Прямолинейный отрезок оси  $a_0b_0$  переходит в дугу  $A_0B_0$ , длина которой остается равной длине отрезка  $a_0b_0$ . Поэтому относительное удлинение отрезка  $ab$ , отстоящего от нейтрального слоя балки на расстояние  $y$ , будет равно

$$\varepsilon_{\text{изг}} = \frac{AB - ab}{ab} = \frac{(R + y)\Delta\varphi - R\Delta\varphi}{R\Delta\varphi} = \frac{y}{R}, \quad (1)$$

где  $R$  — радиус кривизны изогнутой оси балки.

Очевидно, что представленная выше гипотеза сводится к тому, что продольные элементы при изгибе бруса находятся в условиях, близких к одноосному растяжению или сжатию. Поэтому, пренебрегая нормальными напряжениями в поперечных направлениях балки, можно записать

$$\sigma_{\text{изг}} = \frac{E y}{R}. \quad (2)$$

Теперь можно установить связь между изгибающими моментами и кривизной оси балки. Для этого достаточно записать выражение для момента

$$M = \iint_S \sigma_{\text{изг}} y dS,$$

где  $S$  — площадь поперечного сечения.

Подставив в него выражение для напряжения (2), получим

$$M = \frac{EI}{R}, \quad I = \iint_S y^2 dS, \quad (3)$$

где  $I$  — момент инерции поперечного сечения.

Возвращаясь к соотношению (2), устанавливаем непосредственную связь между напряжениями и моментами, которые возникают при изгибе

$$\sigma_{\text{изг}} = \frac{M(z)y}{I}. \quad (4)$$

Здесь следует отметить, что возникают еще напряжения  $\sigma$  от осевой силы  $\mathbf{P}$ , которые равномерно распределены по точкам поперечного сечения и создают только внутреннюю силу  $\mathbf{N} = \sigma S$ . В данном случае справедлив принцип суперпозиции, и изгибные напряжения и осевые напряжения чистого растяжения (сжатия) определяются независимо друг от друга, поскольку возникают от разного вида нагрузок.

Вертикальные перемещения точек оси на рис. 9.2 обозначены как  $V(x)$ . Таким образом, уравнение изогнутой оси можно записать в виде

$$Y = V(x). \quad (5)$$

В соответствии с рассмотренным выше определением кривизны плоской кривой радиус кривизны определяется соотношением

$$\frac{1}{R} = \left| \frac{V''(x)}{(1 + (V'(x))^2)^{3/2}} \right| = \frac{-V''(x)}{(1 + (V'(x))^2)^{3/2}},$$

где  $|V''(x)| = -V''(x)$ , поскольку ось  $y$  направлена вниз, и при положительных изгибающих моментах изогнутая ось будет выпуклой, и, следовательно, вторая производная функции прогиба отрицательная.

При изгибе балок абсолютная величина первой производной функции прогиба  $|V'(x)|$  гораздо меньше единицы, поэтому без заметных погрешностей для определения радиуса кривизны изогнутой оси балки можно принять

$$\frac{1}{R} = -V''(x).$$

Подставив выражение для радиуса кривизны в уравнение (4) получаем уравнение связи между моментами в поперечных сечениях балки и функцией поперечных перемещений, которая обычно называется функцией прогиба балки:

$$\mathbf{M} = -EI \cdot V''(x). \quad (6)$$

### 9.1.2. Дифференциальное уравнение поперечных колебаний балки

Представленные выше положения изгиба балок являются основополагающими в теории сопротивления материалов. Используя символику, принятую в сопромате, обозначим через  $Y_k$ ,  $X_k$  проекции сил на оси координат. Обозначим также буквой  $\phi$  угол между осью  $x$  и касательной к изогнутой оси балки. При записи выражений для проекций

внутренних и массовых сил на оси координат используется допущение, что углы наклона касательной малы, и можно положить

$$\sin \varphi = \operatorname{tg} \varphi, \quad \cos \varphi = 1.$$

При выводе уравнений движения выделенного элемента балки, показанного на рис. 9.1, внутренние и внешние силы дополняются силами инерции, которые направлены вверх, т. е. в сторону, противоположную направлению перемещений  $V(x, t)$  точек изогнутой оси балки. Интенсивность инерционных сил равна произведению массы элемента балки единичной длины на ускорение:

$$F_u = \rho S \frac{\partial^2 V}{\partial t^2},$$

где  $\rho$  — плотность материала,  $S$  — площадь поперечного сечения балки.

Запишем теперь уравнения движения выделенного элемента балки. По принципу Даламбера эти уравнения записываются как уравнения равновесия с учетом инерционных сил:

$$\begin{aligned} \sum X_k &= 0: [N(x + \Delta x) - N(x)] = 0, \\ \sum Y_k &= 0: [Q(x + \Delta x) - Q(x)] - \rho S \frac{\partial^2 V}{\partial t^2} \Delta x + \\ &+ \left[ N(x + \Delta x) \left( \frac{\partial V}{\partial x} + \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} \Delta x \right) - N(x) \frac{\partial V}{\partial x} \right] + q(x) \Delta x = 0, \\ \sum M_{C_2}(F_k) &= 0: [M(x + \Delta x) - M(x)] - Q(x) \Delta x = 0, \end{aligned}$$

где уравнение моментов записано относительно центра тяжести правого сечения, а моменты от инерционных сил и распределенной нагрузки отброшены как бесконечно малые более высокого порядка.

В скобках второго уравнения стоят проекции осевых сил на ось  $Y$ . Внутренняя сила  $N(x)$  перпендикулярна левому торцу выделенного элемента, а  $N(x + \Delta x)$  — правому.

Для пояснения записи их проекций рассмотрим это отдельно:

$$\begin{aligned} \operatorname{Pr}_{OY} N(x) &= -N(x) \sin \varphi = -N(x) \frac{\partial V}{\partial x}, \\ \operatorname{Pr}_{OY} N(x + \Delta x) &= N(x + \Delta x) \sin(\varphi + \Delta \varphi) = N(x + \Delta x) \left( \frac{\partial V}{\partial x} + \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} \Delta x \right). \end{aligned}$$

Если теперь эти уравнения поделить почленно на  $\Delta x$ , принимая слагаемые в скобках за один член, то при  $\Delta x \rightarrow 0$  получим дифференциальные уравнения:

$$\begin{aligned}\frac{\partial N}{\partial x} &= 0, \\ \frac{\partial Q}{\partial x} + N \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} - \rho S \frac{\partial^2 V}{\partial t^2} + q(x, t) &= 0, \\ \frac{\partial M}{\partial x} - Q &= 0.\end{aligned}$$

Как видим, из первого уравнения следует, что  $N(x) = \text{const} = N$ , и это было учтено при записи второго уравнения. С учетом уравнения (6) третье уравнение равновесия дает дифференциальную связь между поперечными силами и функцией прогиба

$$Q(x) = -EI \frac{\partial^3 V}{\partial x^3}. \quad (7)$$

Из второго уравнения получаем окончательное выражение дифференциального уравнения колебаний балки под действием осевой силы  $P$  и некоторой распределенной поперечной нагрузки  $q(x, t)$ :

$$EI \frac{\partial^4 V}{\partial x^4} - N \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \rho S \frac{\partial^2 V}{\partial t^2} - q(x, t) = 0. \quad (8)$$

### 9.1.3. Граничные и начальные условия

Полученное дифференциальное уравнение колебаний балки содержит вторую производную по времени. Поэтому при  $t = 0$  необходимо поставить два начальных условия:

$$V(x, 0) = V^0(x), \quad \frac{\partial V}{\partial t} = v^0(x). \quad (9)$$

По переменной  $x$ , в уравнении — производная четвертого порядка, поэтому на каждом конце балки в соответствии с условиями ее закрепления необходимо поставить по два граничных условия, которые называются кинематическими и статическими.

Кинематические условия соответствуют ограничению перемещения соответствующего конца, или ограничению поворота поперечного сечения над опорой:

$$V = 0, \quad \frac{\partial V}{\partial x} = 0. \quad (10)$$

Если на конце ограничены перемещения и угол поворота, то такое закрепление называется жесткой заделкой. Если ограничены только перемещения, но не ограничен поворот, то такое закрепление называется неподвижным шарниром. Если шарнир ограничивает только вертикальное (поперечное) перемещение, то он называется подвижным шарниром. Например, на рис. 9.1 слева неподвижный шарнир, а справа подвижный. На шарнирной опоре

$$V = 0, \quad \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} = 0. \quad (11)$$

Если конец свободный, но нагружен силой  $\mathbf{P}_B$  и парой сил с моментом  $m_B$ , то оба условия статические. Получаются они из уравнения равновесия элемента балки, прилегающего к границе:

$$-EI \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} = m_B, \quad -EI \frac{\partial^3 V}{\partial x^3} = \mathbf{P}_B. \quad (12)$$

Если один конец свободен или является подвижным шарниром и нагружен осевой силой  $\mathbf{P}$ , то граничное условие необходимо поставить для осевой внутренней силы  $\mathbf{N}(x)$ , как, например, в случае, показанном на рис. 9.1:

$$\mathbf{N}(L) = \mathbf{P}. \quad (13)$$

А в данном случае при  $\mathbf{N}(x) = \text{const}$ :  $\mathbf{N}(x) \equiv \mathbf{P}$ .

## 9.2. Поперечные колебания струны. Метод Фурье. Частоты и формы колебаний

Дифференциальное уравнение поперечных колебаний струны. Начальные и граничные условия. Решение задачи методом Фурье. Формы и частоты поперечных колебаний. Бесконечная струна. Метод Даламбера. Бегущие волны. Конечная струна. Бегущие волны. Колебания струны под действием заданного начального импульса.

### 9.2.1. Дифференциальное уравнение поперечных колебаний струны. Начальные и граничные условия

В дифференциальном уравнении (8) колебаний балки, первое слагаемое отражает изгибную жесткость балки. При наличии изгибной жесткости, балка сопротивляется изгибу и восстанавливает свою прямолинейную форму, если прекратить изгибающее воздействие.

Струна не обладает изгибной жесткостью (рис. 9.3). Поэтому при рассмотрении колебаний струны нужно отбросить первое слагаемое в дифференциальном уравнении (8).

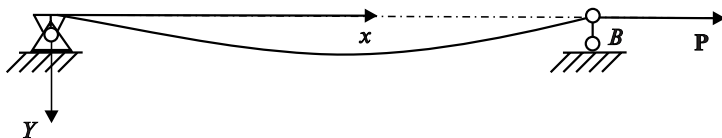


Рис. 9.3

Если кроме осевой силы **P** и закрепления концов струны нет других факторов внешнего воздействия, то уравнение поперечных колебаний струны получается из уравнения (8) при отбрасывании нагрузки  $q(x, t)$ :

$$\mathbf{P} \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} - \rho S \frac{\partial^2 V}{\partial t^2} = 0. \quad (1)$$

Здесь следует обратить внимание, что единственным фактором, который поддерживают поперечные колебания струны, является осевая сила **P**. Модуль упругости струны не оказывает влияния на ее частоты колебаний. Как мы видим теперь, они зависят только от ее длины, погонной массы и силы **P**. *Это — первый практически важный результат, который мы получили уже при выводе уравнения колебаний.*

Начальные условия здесь такие же, как и для балки:

$$V(x, 0) = V^0(x), \quad \frac{\partial V}{\partial t} = v^0(x). \quad (2)$$

Граничные условия либо ограничивают перемещения:

$$V(0, t) = 0, \quad V(l, t) = 0, \quad (3)$$

либо на одном конце они как-то заданы:

$$V(0, t) = 0, \quad V(l, t) = V_0 \psi(t), \quad (4)$$

где  $\psi(t)$  — заданная функция времени.

### 9.2.2. Решение задачи методом Фурье. Формы и частоты поперечных колебаний

Рассмотрим струну с закрепленными концами при предварительном растяжении силой **P**. В начальный момент времени ее спокойно отклонили от прямолинейного состояния, затем так же спокойно отпустили. Следовательно, граничные условиям соответствуют услови-

ям (3), а в начальных условиях функция  $v^0(x) = 0$ , а  $V^0(x)$  — некоторая произвольная функция, удовлетворяющая условиям закрепления концов.

После того как мы изучили ряды Фурье, сам собой напрашивается путь решения данной задачи в виде ряда Фурье по синусам

$$V(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} w_n(t) \sin \frac{n\pi x}{L}. \quad (5)$$

Решение в виде (5) удовлетворяет граничным условиям. Подставим его в уравнение (1) и получим систему (последовательность) обыкновенных дифференциальных уравнений для определения функций  $w_n(t)$ :

$$w_n'' + \omega_n^2 w_n = 0, \quad \omega_n = \frac{n\pi a}{L}, \quad a = \sqrt{\frac{P}{\rho S}}, \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

Корни характеристических уравнений мнимые и равны  $\pm i\omega_n$ . Поэтому с учетом начальных условий решение принимает вид

$$V(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \cos \omega_n t \cdot \sin \frac{n\pi x}{L}. \quad (6)$$

В полученном выражении параметры  $\omega_n$  называются частотами свободных или собственных колебаний (1-я, 2-я, 3-я, ... и т. д.), а функции  $\sin \frac{n\pi x}{L}$  здесь являются формами колебаний.

Если функция начальных отклонений задана, то ее можно представить в виде ряда Фурье по синусам. Напомним, что система синусов  $\sin \frac{n\pi x}{L}$  на отрезке  $[0, L]$  является *полной* системой ортогональных функций, и по этой системе функций можно разложить в ряд Фурье любую функцию. При заданных здесь начальных условиях коэффициенты  $b_n$  полученного решения будут равны коэффициентам ряда Фурье заданной функции  $V_0(x)$ . Пусть начальные отклонения заданы в виде одной полуволны синусоиды с амплитудой  $b_1 = b$ , соответствующей первой частоте и первой форме собственных колебаний. Тогда решение примет простой вид:

$$V(x, t) = b_1 \cos \omega_1 t \cdot \sin \frac{\pi x}{L}.$$

Как видим, в процессе колебаний форма начального отклонения не изменяется, и такие колебания называют «стоячими».



Одно колебание совершается за время  $t = T$  при  $\omega_1 T = 2\pi$ . Таким образом,

$$\text{период колебаний в секундах равен } T = \frac{2\pi}{\omega_1};$$

$$\text{число колебаний в секунду } n = \frac{1c}{T} = \frac{\omega_1}{2\pi} \text{ Гц.}$$

В качестве примеров по этому вопросу можно задать начальные отклонения струны в виде параболы или треугольника, симметричные относительно середины данного отрезка. Для этих функций мы получим бесконечные ряды по синусам, но амплитуды гармоник очень быстро затухают с увеличением номера  $n$ , и в результате графики функций, описывающих колебания струны, будут практически одинаковыми во всех трех случаях.

### 9.2.3. Бесконечная струна. Метод Даламбера. Бегущие волны

Путем непосредственной подстановки можно убедиться в том, что функция

$$V(x, t) = \psi(x - at) + \psi(x + at) \quad (7)$$

является решением уравнения колебаний струны

$$\frac{\partial^2 V}{\partial t^2} - a^2 \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} = 0, \quad a = \sqrt{\frac{T}{\rho S}}$$

с начальными условиями

$$V(x, 0) = 2\psi(x), \quad \frac{\partial V}{\partial t} = 0, \quad x \in [-c, c].$$

Чтобы выяснить физический смысл этого решения рассмотрим каждое слагаемое в отдельности и обозначим их соответственно  $V_1(x, t)$  и  $V_2(x, t)$ . При  $t = 0$  оба слагаемые одинаковые и равны  $\psi(x)$ . Для наглядности представим функцию  $\psi(x)$  на отрезке  $[-c, c]$  в виде параболы, симметричной относительно вертикальной оси, и построим графики трех функций  $V_1(x, t)$ ,  $V(x, t)$ ,  $V_2(x, t)$  для двух моментов времени:  $t = 0$  и  $t = t_1$ , рис. 9.4.

В начальный момент времени и при  $t < t_1$  ( $t_1 = c/a$ ) форма струны описывается одной полуволной, которая складывается из наложения двух парабол, разбегающихся в разные стороны со скоростью  $a$ .

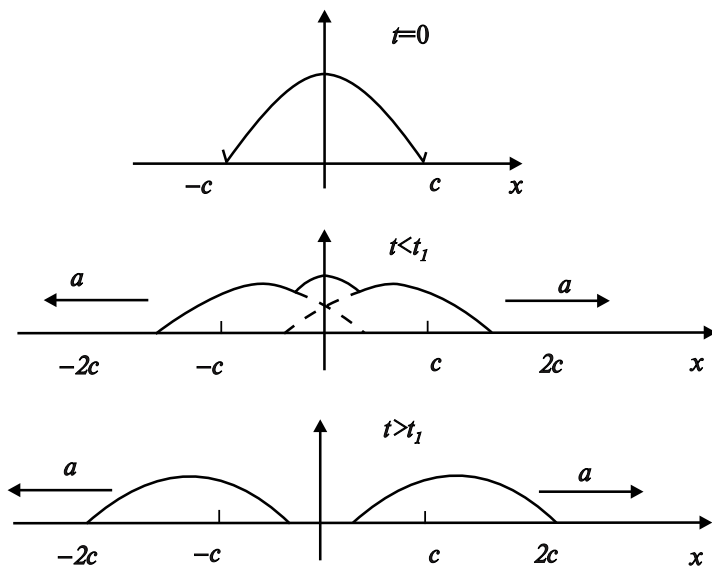


Рис. 9.4

При  $t > t_1$  эти волны уже не накладываются и уходят по оси  $x$  вправо до бесконечности и влево до бесконечности, поскольку данное решение получено без ограничения отклонений струны на всей ее длине.

Решение задачи для бесконечной струны в общем случае, когда заданы произвольные начальные условия и по перемещениям, и по скоростям, получено Даламбером и называется методом Даламбера.

#### 9.2.4. Конечная струна. Бегущие волны

В связи с решением предыдущей задачи возникает вопрос, а что произойдет с разбегающимися по струне волнами, если струна конечной длины. Рассмотрим эту задачу.

**Пример.** Пусть начальное отклонение струны задано в форме короткой полуволны в окрестности точки  $x = c$ :

$$V_0(x) = \begin{cases} 0, & 0 \leq x \leq c - \delta, \\ H \cos \frac{\pi(x - c)}{2\delta}, & c - \delta \leq x \leq c + \delta, \\ 0, & c + \delta \leq x \leq L. \end{cases} \quad (8)$$

Представим эту функцию в виде ряда Фурье

$$V_0(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin \frac{n\pi \cdot x}{L},$$

где коэффициенты  $b_n$  определяются как обычно из соотношений

$$\int_0^L V_0(x) \sin \frac{n\pi x}{L} dx = b_n \int_0^L \sin^2 \frac{n\pi x}{L} dx, \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

Слева подынтегральная функция отлична от нуля на заданном коротком отрезке, поэтому необходимо вычислить следующий интеграл:

$$\begin{aligned} & \int_{c-\delta}^{c+\delta} H \cos \frac{\pi(x-c)}{2\delta} \sin \frac{n\pi x}{L} dx = \\ &= \frac{H}{2} \int_{c-\delta}^{c+\delta} \left\{ \sin \left[ \left( \frac{n\pi}{L} + \frac{\pi}{2\delta} \right) x - \frac{\pi c}{2\delta} \right] + \sin \left[ \left( \frac{n\pi}{L} - \frac{\pi}{2\delta} \right) x + \frac{\pi c}{2\delta} \right] \right\} dx = \end{aligned}$$

(интегралы от синусов будут косинусы, которые после подстановки пределов и использования формул приведения перешли в синусы)

$$\begin{aligned} &= \frac{H}{2} \left\{ \frac{1}{\frac{n\pi}{L} + \frac{\pi}{2\delta}} \left[ \sin \left( \frac{n\pi(c+\delta)}{L} \right) + \sin \left( \frac{n\pi(c-\delta)}{L} \right) \right] \right\} + \\ &+ \frac{H}{2} \left\{ -\frac{1}{\frac{n\pi}{L} - \frac{\pi}{2\delta}} \left[ \sin \left( \frac{n\pi(c+\delta)}{L} \right) + \sin \left( \frac{n\pi(c-\delta)}{L} \right) \right] \right\} = \end{aligned}$$

(сумму синусов сворачиваем в произведение)

$$\begin{aligned} &= H \left( \frac{1}{\frac{n\pi}{L} + \frac{\pi}{2\delta}} - \frac{1}{\frac{n\pi}{L} - \frac{\pi}{2\delta}} \right) \sin \frac{n\pi c}{L} \cos \frac{n\pi \delta}{L} = \\ &= H \left( \frac{-\frac{\pi}{\delta}}{\left( \frac{n\pi}{L} \right)^2 - \left( \frac{\pi}{2\delta} \right)^2} \right) \sin \frac{n\pi c}{L} \cos \frac{n\pi \delta}{L}. \end{aligned}$$

И, наконец, подходим к завершению вычисления коэффициентов  $b_n$ :

$$H \left( \frac{-\frac{\pi}{\delta}}{\left(\frac{n\pi}{L}\right)^2 - \left(\frac{\pi}{2\delta}\right)^2} \right) \sin \frac{n\pi c}{L} \cos \frac{n\pi \delta}{L} = \frac{L}{2} b_n,$$

$$b_n = \frac{8H\delta L}{\pi(L^2 - 4n^2\delta^2)} \sin \frac{n\pi c}{L} \cos \frac{n\pi \delta}{L}. \quad (9)$$

Правильность результата при этих сложных выкладках подтверждается следующим предельным случаем.

При  $c = L/2$  и  $\delta = L/2$  все коэффициенты, за исключением первого, равны нулю. При  $n = 1$  получается неопределенность типа  $\frac{0}{0}$ . Для раскрытия этой неопределенности в выражении для  $b_1$  представим  $\delta$  как  $(L/2 - \varepsilon)$  и перейдем к пределу при  $\varepsilon \rightarrow 0$ . В результате получим  $b_1 = H$ , а заданная короткая полуволна (8) переходит в полуволну синусоиды на всем отрезке  $[0, L]$ .

Подставим теперь найденные коэффициенты ряда Фурье (9) в полученное ранее решение (6). При  $c = L/2$  коэффициенты с четными номерами равны нулю, и решение принимает вид

$$V(x, t) = \frac{8H\delta L}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{(L - 4n^2\delta^2)} \cos \frac{m\pi \delta}{L} \cos \omega_m t \cdot \sin \frac{m\pi x}{L},$$

$$\omega_m = \frac{m\pi}{L} \sqrt{\frac{T}{\rho S}}, \quad m = 2n - 1. \quad (10)$$

Для более компактной записи этого ряда здесь введено обозначение нечетных чисел:  $m = 2n - 1$ ,  $n = 1, 2, 3, \dots$

Если теперь внимательно посмотреть на полученное решение, то можно заметить, что каждый член этого ряда описывает две полуволны, разбегающиеся в разные стороны со скоростью  $a$ . Действительно, произведение синуса на косинус есть сумма синусов

$$\sin \frac{m\pi x}{L} \cos \omega_m t = \frac{1}{2} \left\{ \sin \left( \frac{m\pi}{L} (x + at) \right) + \sin \left( \frac{m\pi}{L} (x - at) \right) \right\}.$$

Суперпозиция бесконечного ряда этих синусов описывает процесс распространения волн по струне конечной длины  $L$  и периодического их отражения от границ.

Процесс колебания данной струны можно наблюдать на экране монитора компьютера, если с некоторым шагом по времени *последовательно* записывать функцию (10). Для того чтобы подобрать нужный шаг по времени, необходимо представлять масштабы времени в этом процессе и скорости распространения волн.

Здесь, в качестве примера, были приняты следующие данные:  $L = 1$  м,  $c = 0,5$  м;  $\delta = 0,2$  м;  $\rho = 7800$  кг/м<sup>3</sup>;  $d = 0,001$  м;  $T = 100$  Н,  $d$  — диаметр струны. При этих данных первая *собственная частота* — 401 1/с, скорость распространения бегущих волн — 127,76 м/с. Из этого следует, что процесс распространения волн и их отражения от границ можно проследить и описать, если в данном случае расчет функции  $V(x, t)$  проводить по формуле (10) с шагом по времени  $t$  порядка 0,0001 с, а результаты расчета выдавать на экран монитора с паузами между выдачами с любой заданной продолжительностью, например, с паузами 2 с с помощью оператора *CALL Sleepqq(2000)*, если расчет проводится с помощью Фортран программы, где в скобках 2000 — это заданная продолжительность паузы.

Результаты расчета и графики для основных моментов времени показаны на рис. 9.5. На рис. 9.5, *a* представлено начало колебательного процесса при  $t_1 = \delta/c \approx 0,0017$  с, где пунктиром показана заданная короткая полуволна, которая разделилась на две части, движущиеся

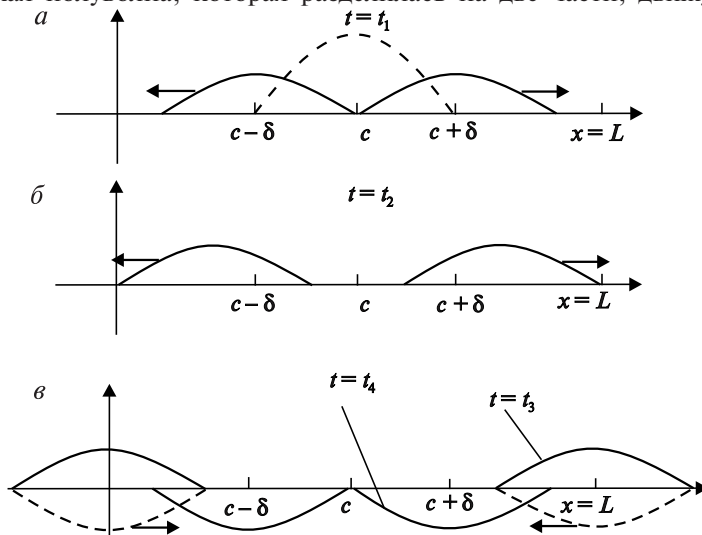


Рис. 9.5

в противоположных направлениях. В момент времени  $t_2 = (L - c - \delta)/a = (L/2 - \delta/a) \cong 0,0022$  с обе волны подошли к границам, и с этого момента начинается процесс их отражения от границ.

Процесс отражения волны от границы можно представить себе как процесс ее сложения (суперпозиции) с такой же волной, которая движется ей навстречу с такой же скоростью, но с амплитудой противоположного знака. Поэтому при  $0,0022 \leq t \leq 0,0039$  амплитуды отклонения точек около границы убывают, а в момент времени  $t_3 = 0,0039$  встречающаяся волна полностью уничтожила подошедшую волну, рис. 9.5, б и, начиная с этого момента времени, по струне распространяется встречная волна с отрицательными амплитудами отклонений.

В момент времени  $t_4 = 0,0061$  отраженные волны встречаются и продолжают свое движение до противоположных границ, снова отражаются и т. д.

### 9.2.5. Колебания струны под действием заданного начального импульса

Рассмотрим случай, когда начальные отклонения струны равны нулю, а колебания струны обусловлены ударом острым молоточком в точке  $x = c$  с импульсом  $J = mv$ , где  $m$  — масса молоточка,  $v$  — скорость молоточка при соударении.

В данном случае мы должны задать начальную скорость движения струны, которую приобретают ее точки на бесконечно малом участке длины. Поэтому можно поступить следующим образом.

Выделим  $\delta$ -окрестность  $(c - \delta, c + \delta)$  и будем считать, что все точки участка длины  $2\delta$  в начальный момент времени приобретают одинаковую скорость  $v_0$ , которую зададим из условия сохранения импульса:

$$v_0 = \frac{J}{2\delta\rho S}.$$

$$F(x) = \begin{cases} \frac{\partial V(x, 0)}{\partial t} = v_0, & x \in (c - \delta, c + \delta), \\ \frac{\partial V(x, 0)}{\partial t} = 0, & x \notin (c - \delta, c + \delta). \end{cases} \quad (11)$$

Представим теперь эту ступенчатую функцию в виде ряда Фурье по синусам:

$$F(x) = \sum_{n=1}^{\infty} B_n \sin \frac{n\pi \cdot x}{L},$$

где коэффициенты  $B_n$  определяются как обычно из соотношений

$$\int_0^L F(x) \sin \frac{n\pi x}{L} dx = B_n \int_0^L \sin^2 \frac{n\pi x}{L} dx, \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

Слева подынтегральная функция отлична от нуля на малом промежутке, поэтому

$$\int_{c-\delta}^{c+\delta} \frac{J}{2\delta\rho S} \sin \frac{n\pi x}{L} dx = B_n \frac{L}{2}, \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

Из этих соотношений получаем коэффициенты сначала в следующем виде:

$$B_n = \frac{J}{\delta\rho S} \frac{1}{n\pi} \left( \cos \frac{n\pi \cdot (c+\delta)}{L} - \cos \frac{n\pi \cdot (c-\delta)}{L} \right).$$

Теперь разность косинусов сворачиваем в произведение синусов:

$$B_n = \frac{2J}{\delta\rho S} \frac{1}{n\pi} \sin \frac{n\pi c}{L} \sin \frac{n\pi\delta}{L}. \quad (12)$$

Следует обратить внимание на использованный здесь прием замены сосредоточенного удара ступенчатой  $\delta$ -функцией с переменной интенсивностью и разложением ее в ряд Фурье. Такой способ очень часто используется при решении многих задач, когда «что-то» является точечным воздействием: сосредоточенная сила, источник тепла, сток-поглотитель и т. д.

Переходим теперь к общему решению уравнения колебания струны, представленном в виде ряда Фурье

$$V(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos \omega_n t + b_n \sin \omega_n t) \sin \frac{n\pi \cdot x}{L}.$$

Поскольку начальных отклонений нет, то коэффициенты  $a_n = 0$ , а для определения коэффициентов  $b_n$  используем второе начальное условие

$$\left. \frac{\partial V}{\partial t} \right|_{t=0} = F(x),$$

или

$$\sum_{n=1}^{\infty} b_n \omega_n \sin \frac{n\pi \cdot x}{L} = \sum_{n=1}^{\infty} B_n \sin \frac{n\pi \cdot x}{L}.$$

В результате получаем решение

$$V(x, t) = \frac{2J}{\rho S} \sum_{n=1}^{\infty} \sqrt{\frac{\rho S}{T}} \frac{L}{n^2 \pi^2} \sin \frac{n\pi c}{L} \sin \frac{n\pi \delta}{L} \sin \omega_n t \cdot \sin \frac{n\pi \cdot x}{L}.$$

Запишем его для случая  $c = L/2$ :

$$V(x, t) = \frac{2}{\pi^2} \frac{J}{\rho S} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} (-1)^{n+1} \sin \frac{n\pi \cdot \delta}{L} \sin \omega_n t \cdot \sin \frac{n\pi \cdot x}{L}, \quad m = 2n - 1.$$

Напомним, что здесь  $\rho S$  — погонная масса струны,  $T$  — сила натяжения,  $a$  — скорость бегущей волны. Поэтому множитель перед всей суммой можно задать как некоторую величину перемещения точки.

**Пример.** Пусть в условиях рассмотренной задачи начальное распределение скоростей задано функцией

$$F(x) = \begin{cases} 0, & 0 \leq x \leq c - \delta, \\ v_0 \cos \frac{\pi(x-c)}{2\delta}, & c - \delta \leq x \leq c + \delta, \\ 0, & c + \delta \leq x \leq L. \end{cases}$$

Показать, что колебания струны описываются следующим рядом:

$$V(x, t) = \frac{8v_0 \delta}{\pi^2 a} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{L^2}{n[L^2 - 4\delta^2 n^2]} \cos \frac{n\pi \delta}{L} \sin \frac{n\pi c}{L} \sin \omega_n t \cdot \sin \frac{n\pi x}{L}.$$

### 9.3. Поперечные колебания балки. Общая схема расчета свободных колебаний балки. Примеры

Постановка задачи и общая схема расчета свободных поперечных колебаний балки. Расчет частот поперечных колебаний консольной балки с упругой опорой на втором конце.

#### 9.3.1. Постановка задачи и общая схема расчета свободных поперечных колебаний балки

Вопросы постановки и решения задач по расчету частот свободных колебаний балки, которые происходят без внешнего воздействия каких-либо силовых факторов и называются собственными частотами



колебаний, рассмотрим сначала на простейшем примере шарнирной балки, рис. 9.6.

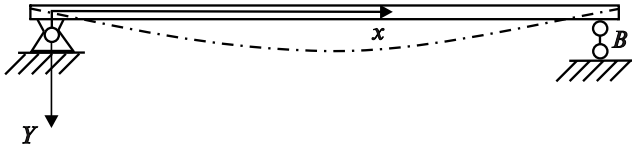


Рис. 9.6

Уравнение поперечных колебаний балки в данном случае при отсутствии внешних нагрузок имеет достаточно простой вид

$$EI \frac{\partial^4 V}{\partial x^4} + \rho S \frac{\partial^2 V}{\partial t^2} = 0. \quad (1)$$

Для определения частот колебаний можно задать произвольные начальные отклонения от прямолинейного состояния, а начальные скорости движения положить, равными нулю:

$$V(x, 0) = V^0(x), \quad \frac{\partial V}{\partial t} = 0. \quad (2)$$

Граничные условия при шарнирном закреплении концов соответствуют ограничению поперечных перемещений на обоих концах и отсутствию ограничений на углы поворота поперечных сечений на концах. Нет ограничений поворотов, следовательно, и нет напряжений, создающих изгибающие моменты в поперечных сечениях на концах. Запишем эти условия с учетом дифференциальной связи между моментами и функцией прогиба  $V(x, t)$ :

$$x = 0: \quad V = 0, \quad M = -EI \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} = 0, \quad (3)$$

$$x = L: \quad V = 0, \quad M = -EI \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} = 0.$$

Таким образом, в общем случае задача состоит в построении решения дифференциального уравнения (1) с граничными условиями (3) и начальными условиями (2). Как видим, данная краевая задача состоит в построении ненулевого решения однородного уравнения (1) с однородными граничными условиями (3). Естественно, возникает вопрос, при каких условиях существует ненулевое решение однородной краевой задачи, и вопрос сводится главным образом не к по-

строению этого решения при заданных начальных условиях, а в первую очередь, к нахождению собственных чисел данной краевой задачи, которыми являются частоты свободных колебаний данной балки с заданными условиями закрепления.

Для шарнирной балки решение можно выполнить по полной программе, и определить не только частоты, но и формы колебаний.

Поскольку колебательные процессы описываются гармоническими функциями по времени, то решение с учетом данных начальных условий (2) следует искать в виде

$$V(x, t) = w(x) \cos \omega t. \quad (4)$$

После подстановки заданного выражения (4) в уравнение (1) получаем обыкновенное дифференциальное уравнение для функции  $w(x)$ . Действительно, данное уравнение

$$\left( EI \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} - \rho S \omega^2 w \right) \cos \omega t = 0$$

обращается в тождество, если выполняется уравнение

$$EI \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} - \rho S \omega^2 w = 0. \quad (5)$$

Частные решения этого уравнения имеют вид

$$w = Ae^{\lambda x}.$$

Подставляем это выражение в уравнение (5) и получаем характеристическое уравнение

$$EI \lambda^4 - \rho S \omega^2 = 0,$$

которое имеет два корня действительных и два чисто мнимых:

$$\lambda_{1,2} = \pm \alpha, \quad \lambda_{3,4} = \pm i\alpha, \quad \alpha = \sqrt[4]{\frac{\rho S \omega^2}{EI}}.$$

Общее решение уравнения (5) представим в виде

$$w(x) = A_1 \operatorname{sh} \alpha x + A_2 \operatorname{ch} \alpha x + A_3 \sin \alpha x + A_4 \cos \alpha x.$$

Полученное решение подставляем в (4) и получаем общее решение для функции прогиба

$$V(x, t) = (A_1 \operatorname{sh} \alpha x + A_2 \operatorname{ch} \alpha x + A_3 \sin \alpha x + A_4 \cos \alpha x) \cos \omega t. \quad (6)$$

Для определения произвольных постоянных подставляем общее решение (6) в граничные условия (3). Поскольку функция  $\cos \omega t$  не равна тождественно нулю, то в итоге приходим к системе четырех однородных алгебраических уравнений для определения четырех произвольных постоянных:

$$\begin{aligned} V(0, t) = 0: & \quad A_2 + A_4 = 0, \\ \frac{\partial^2 V(0, t)}{\partial x^2} = 0: & \quad A_2 - A_4 = 0, \\ V(L, t) = 0: & \quad A_1 \operatorname{sh} \alpha L + A_2 \operatorname{ch} \alpha L + A_3 \sin \alpha L + A_4 \cos \alpha L = 0, \\ \frac{\partial^2 V(0, t)}{\partial x^2} = 0: & \quad A_1 \operatorname{sh} \alpha L + A_2 \operatorname{ch} \alpha L - A_3 \sin \alpha L - A_4 \cos \alpha L = 0. \end{aligned} \quad (7)$$

Здесь следует отметить, что коэффициенты второго и четвертого уравнений мы сократили на  $a^2$ , не равное нулю.

Из первых двух уравнений следует, что  $A_2 = A_4 = 0$ . Для определения оставшихся двух неизвестных осталось два уравнения. Чтобы существовали ненулевые решения этих двух уравнений, необходимо, чтобы их определитель равнялся нулю:

$$\begin{vmatrix} \operatorname{sh} \alpha L & \sin \alpha L \\ \operatorname{sh} \alpha L & -\sin \alpha L \end{vmatrix} = 0.$$

Таким образом, мы получили так называемое частотное уравнение для данной балки, и пришли к завершающему этапу первой половины задачи. Из полученного уравнения можно определить частоты собственных колебаний балки. Действительно, раскроем полученный определитель:

$$-2 \operatorname{sh} \alpha L \sin \alpha L = 0.$$

Гиперболический синус равен нулю только при  $\alpha = 0$ . Поэтому ненулевые решения для определения частот колебаний получаются из нулей второго синуса:

$$\alpha L = n\pi, \quad \Rightarrow \omega_n = \frac{n^2 \pi^2}{L^2} \sqrt{\frac{EI}{\rho S}}, \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

Формы колебаний, являются собственными функциями данной задачи и определяются здесь очень просто.

Подставляем найденные частоты в уравнения (7):

$$A_1 \operatorname{sh} n\pi + A_3 \sin n\pi = 0,$$

$$A_1 \operatorname{sh} n\pi + A_3 \sin n\pi = 0.$$

Как видим, эти уравнения выполняются при  $A_1 = 0$  и произвольных ненулевых значениях констант  $A_3$ :

$$A_3 \sin n\pi = 0 \quad \text{при} \quad A_3 = b_n \neq 0, \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

В результате мы определили частоты колебаний  $\omega_n$  и формы колебаний шарнирной балки и можем записать общее решение для функции  $w(x)$ :

$$w(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin \frac{n\pi x}{L}. \quad (8)$$

Данный пример шарнирной балки — это редкий случай в теории изгиба балок, когда система частных решений, удовлетворяющих и дифференциальному уравнению, и граничным условиям, может быть использована для разложения в ряд Фурье функции начального прогиба балки. Система синусов является полной на отрезке  $[0, L]$ , поэтому заданную функцию  $V_0(x)$  начального прогиба балки можно разложить в ряд Фурье именно по синусам и определить коэффициенты  $b_n$  точно так же, как это делалось при решении задач о колебаниях струны. Окончательный вид решения, описывающего весь колебательный процесс, получается таким же, как и для струны:

$$V(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \cos \omega_n t \sin \frac{n\pi x}{L}, \quad (9)$$

где  $b_n$  — коэффициенты ряда Фурье заданной функции  $V_0(x)$ .

### 9.3.2. Расчет частот поперечных колебаний консольной балки с упругой опорой на втором конце

Рассмотрим теперь типичный случай теории поперечных колебаний балки, когда аналитическое решение можно получить только для определения частотного уравнения, решить его графически и ограничиться определением только частот колебаний, а для определения функции  $V(x, t)$  нужно использовать численные методы.

Рассмотрим балку с жесткой заделкой на левом конце и с упругой опорой на правом конце (рис. 9.7). На данном этапе решения задачи

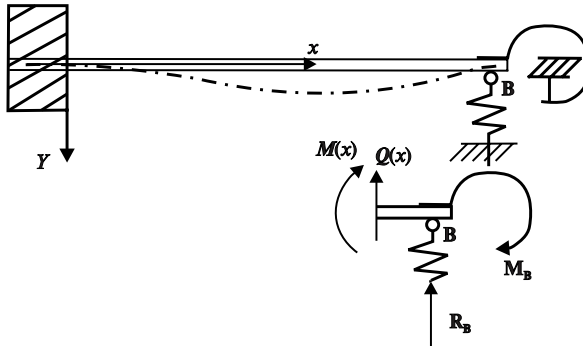


Рис. 9.7

следует напомнить, что дифференциальное уравнение колебания балок получено из уравнений равновесия внутреннего элемента балки. Поэтому оно применимо ко всем случаям закрепления балки на концах. Следовательно, и данная задача у нас решена до получения общего решения для функции  $w(x)$ :

$$V(x, t) = (A_1 \operatorname{sh} \alpha x + A_2 \operatorname{ch} \alpha x + A_3 \sin \alpha x + A_4 \cos \alpha x) \cos \omega t.$$

Для данного случая необходимо теперь получить граничные условия, соответствующие условиям закрепления балки, и продолжить решение. Жесткая заделка ограничивает перемещения и поворот поперечного сечения. Поэтому при  $x = 0$  у нас наглядно очевидные условия

$$w(0) = 0, \quad w'(0) = 0.$$

Граничные условия при  $x = L$  необходимо получить из условий равновесия элемента балки, прилегающего к границе. Такой элемент показан на рис. 9.6. Как видим, здесь возможно некоторое перемещение  $w(L)$ , но при этом перемещении возникает сила реакции упругой опоры, которая пропорциональна перемещению

$$R_B = k_y V(L, t),$$

где  $k_y$  — коэффициент жесткости упругой опоры.

Некоторый поворот балки на правом конце тоже возможен, но повороту препятствует момент  $M_B$  пружины, который пропорционален углу поворота:

$$M_B = k_\theta \frac{\partial V(L, t)}{\partial x}.$$

Таким образом, для выделенного элемента балки, прилегающего к границе, должны выполняться условия равновесия внутренних и внешних сил и моментов:

$$\mathbf{Q}(L) + \mathbf{R}_B = 0, \quad \mathbf{M}(L) + \mathbf{M}_B = 0.$$

Как внутренние, так и внешние силы выражены через функцию прогиба. Поэтому из уравнений равновесия получаются следующие граничные условия:

$$-EIw'''(L) + k_y w(L) = 0, \quad -EIw''(L) + k_\theta w'(L) = 0.$$

Подставляем теперь общее решение для функции прогиба в граничные условия и получаем систему уравнений для произвольных постоянных:

$$\begin{aligned} A_2 + A_4 &= 0, \\ A_1 + A_3 &= 0, \\ EI\alpha^3(A_1 \operatorname{ch}\alpha L + A_2 \operatorname{sh}\alpha L - A_3 \operatorname{cos}\alpha L + A_4 \operatorname{sin}\alpha L) + \\ & - k_y(A_1 \operatorname{sh}\alpha L + A_2 \operatorname{ch}\alpha L + A_3 \operatorname{sin}\alpha L + A_4 \operatorname{cos}\alpha L) = 0, \\ EI\alpha^2(A_1 \operatorname{sh}\alpha L + A_2 \operatorname{ch}\alpha L - A_3 \operatorname{sin}\alpha L - A_4 \operatorname{cos}\alpha L) + \\ & - k_\theta(A_1 \operatorname{ch}\alpha L + A_2 \operatorname{sh}\alpha L + A_3 \operatorname{cos}\alpha L - A_4 \operatorname{sin}\alpha L) = 0. \end{aligned}$$

Данная система однородных алгебраических уравнений имеет ненулевые решения, если ее определитель равен нулю. Для записи этого определителя поделим сначала третье и четвертое уравнение на  $EI$  и введем обозначения

$$\psi = \frac{k_y}{EI}, \quad \vartheta = \frac{k_\theta}{EI}.$$

Запишем теперь определитель полученной системы уравнений, опустив для сокращения записи аргументы синусов и косинусов:

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ \alpha^3 \operatorname{ch} - \psi \operatorname{sh} & \alpha^3 \operatorname{sh} - \psi \operatorname{ch} & -\alpha^3 \operatorname{cos} - \psi \operatorname{sin} & \alpha^3 \operatorname{sin} - \psi \operatorname{cos} \\ \alpha^2 \operatorname{sh} - \vartheta \operatorname{ch} & \alpha^2 \operatorname{ch} - \vartheta \operatorname{sh} & -\alpha^2 \operatorname{sin} - \vartheta \operatorname{cos} & -\alpha^2 \operatorname{cos} + \vartheta \operatorname{sin} \end{vmatrix} = 0.$$

Путем комбинации столбцов данный определитель можно преобразовать к определителю второго порядка. Для этого из четвертого столбца вычитаем второй, а из третьего — первый. В результате получим частотное уравнение

$$\begin{vmatrix} -a^3(\cos+ch) - \psi(\sin-sh) & a^3(\sin-sh) - \psi(\cos-ch) \\ -a^2(\sin+sh) - \vartheta(\cos-ch) & -a^2(\cos+ch) + \vartheta(\sin+sh) \end{vmatrix} = 0. \quad (10)$$

Прежде чем рассматривать возможности определения корней полученного частотного уравнения, рассмотрим примеры его решения в нескольких частных случаях, когда корни можно определить достаточно просто.

**Пример 1.** Консольная балка со свободным правым концом.

В этом случае коэффициенты жесткости равны нулю ( $\vartheta = 0$ ,  $\psi = 0$ ) и уравнение принимает вид

$$\begin{vmatrix} -a^3(\cos\alpha L + ch\alpha L) & a^3(\sin\alpha L - sh\alpha L) \\ -a^2(\sin\alpha L + sh\alpha L) & -a^2(\cos\alpha L + ch\alpha L) \end{vmatrix} = 0.$$

Раскрываем этот определитель и с учетом тригонометрического тождества для гиперболических функций

$$\operatorname{ch}^2\alpha L - \operatorname{sh}^2\alpha L = 1$$

получаем уравнение

$$\operatorname{ch}\alpha L \cos\alpha L + 1 = 0, \quad \text{или} \quad \cos\alpha L = -\frac{1}{\operatorname{ch}\alpha L}.$$

Тригонометрические уравнения решаются графически. Для этого построим графики левой и правой частей полученного уравнения (рис. 9.8).

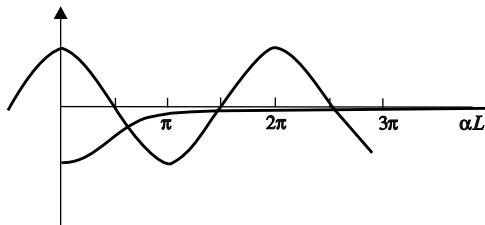


Рис. 9.8

Как видим, только при определении первого корня нужно выполнить некоторые вычисления, а все последующие практически совпадают с нулями косинуса. В результате можно записать:

$$\alpha_1 L = 1.875; \quad \alpha_{n+1} L = \frac{(2n+1)\pi}{2}, \quad n = 1, 2, 3, \dots,$$

где  $\alpha L = L^4 \sqrt{\frac{\rho S \omega^2}{EI}}$ .

**Пример 2.** На правом конце тоже жесткая заделка. В этом случае первую строку определителя (10) нужно поделить на  $\psi$ , а вторую на  $\vartheta$  и положить  $1/\psi = 0$  и  $1/\vartheta = 0$  ( $\psi = \infty$ ,  $\vartheta = \infty$ ). В результате получим уравнение, которое отличается от предыдущего только противоположным знаком в правой части:

$$\begin{vmatrix} (\sin - \text{sh}) & -(\cos - \text{ch}) \\ (\cos - \text{ch}) & (\sin + \text{sh}) \end{vmatrix} = 0, \quad \Rightarrow \quad \cos \alpha L = \frac{1}{\text{ch} \alpha L}.$$

Решение этого уравнения можно получить с помощью графика, который представлен на рис. 9.8. Если нижнюю кривую визуальнo отразить вверх, то очевидно, что получится следующее решение:

$$\alpha_n L = \frac{(2n+1)\pi}{2}, \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

**Пример 3.** На правом конце шарнирная опора. Шарнирная опора ограничивает вертикальное (поперечное) перемещение, но не ограничивает поворот конца балки. Следовательно,  $\vartheta = 0$ , а  $\psi = \infty$  ( $1/\psi = 0$ ).

В результате получаем

$$\begin{vmatrix} (\sin - \text{sh}) & (\cos - \text{ch}) \\ (\sin + \text{sh}) & (\cos + \text{ch}) \end{vmatrix} = 0, \quad \Rightarrow \quad \text{tg} \alpha L = \text{th} \alpha L.$$

Для определения корней этого уравнения достаточно вспомнить свойства этих двух тангенсов. Тангенс гиперболический монотонно возрастает и асимптотически приближается к единице. Ветви тангенса тригонометрического имеют вертикальные асимптоты, которые проходят через  $\pi/2$ ,  $3\pi/2$ ,  $5\pi/2$  и т. д. На отрезке от  $\pi/2$  до  $3\pi/2$  тангенс гиперболический можно считать равным единице. А тангенс тригонометрический на этом отрезке равен единице при  $\alpha L = 5\pi/4$ . Все последующие точки пересечения тангенсов идут с периодом  $\pi$ . Таким образом, решение можно записать в виде

$$\alpha_n L = n\pi + \frac{\pi}{4}, \quad n = 1, 2, 3, \dots$$



**Пример 4.** На правом конце — вертикальный ползун, который свободно перемещается по вертикальным направляющим элементам конструкции и не ограничивает перемещений. Следовательно, коэффициент жесткости  $\psi = 0$ . Рассмотрим случай, когда ползун, сделанный в виде «башмака», ограничивает поворот конца балки. Тогда следует положить коэффициент жесткости  $\vartheta = \infty$  ( $1/\vartheta = 0$ ). В этом случае получим

$$\begin{vmatrix} (\cos + \operatorname{ch}) & (\sin - \operatorname{sh}) \\ (\cos - \operatorname{ch}) & (\sin + \operatorname{sh}) \end{vmatrix} = 0, \Rightarrow \operatorname{tg} \alpha L = -\operatorname{th} \alpha L.$$

Для решения этого уравнения необходимо повторить только что изложенные свойства тангенсов. В данном случае первое пересечение происходит на отрезке от  $\pi/2$  до  $3\pi/2$ , а затем пересечения повторяются с периодом  $\pi$ . Поэтому решение можно записать в виде

$$\alpha_n L = \frac{(2n-1)\pi}{2} + \frac{\pi}{4}, \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

Во всех четырех рассмотренных выше примерах решения получены с помощью графиков, построенных от руки, но уточнения приведенных здесь результатов будут не более как во втором знаке после запятой.

**Замечание.** В заключение следует отметить, что при расчете на прочность балок при изгибе концы должны быть закреплены так, чтобы три степени ее свободы на плоскости были ограничены связями. Но задачи расчета частот колебаний возникают и для элементов механизмов. В этих случаях речь идет не о балках как о реальных объектах, а о применении теории изгиба балок к расчету частот колебаний прямолинейных элементов конструкций. При этом математическую теорию изгиба балок попросту называют «балочной теорией».

## 9.4. Устойчивость прямолинейных форм равновесия при сжатии.

### Динамический критерий устойчивости. Примеры

Постановка задачи и общая схема расчета. Примеры. Исследование устойчивости стержня под действием следящей силы. Исследование устойчивости стержня-стойки под действием вертикальной силы.

#### 9.4.1. Постановка задачи и общая схема расчета. Примеры

Статический метод Эйлера, который обычно излагается в теории сопротивления материалов, является эффективным при исследовании устойчивости форм равновесия стержней, пластин и оболочек и по-

звояет определить критическую величину нагрузки и смежные формы равновесия, но не дает возможность исследовать смену форм равновесия на некоторый режим движения.

Данные недостатки статического метода устраняет анализ устойчивости, проводимый на основе теории маловозмущенных движений. Суть такого подхода сводится к следующему.

На систему, находящуюся первоначально в равновесии, накладываются малые возмущения, которые переводят ее из состояния равновесия к некоторому движению, и по свойствам этого движения делается вывод об устойчивости или неустойчивости исходной формы равновесия. Эта общая характеристика динамического метода указывает на возможное многообразие формулировок критериев устойчивости.

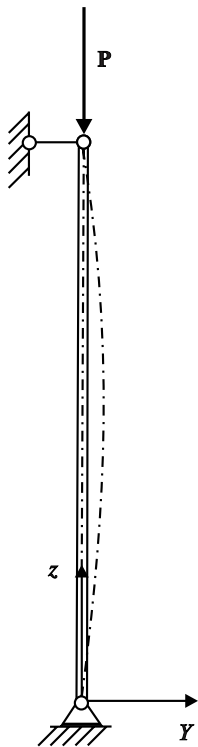


Рис. 9.9

Замечание. Возможность изгиба балки под действием осевой сжимающей силы (рис. 9.8), называется продольным изгибом, а сама балка под действием осевой сжимающей силы обычно называется стержнем. Поэтому мы несколько изменяем терминологию, использованную ранее при выводе уравнения поперечных колебаний балок, а также осевую координату здесь обозначаем буквой  $z$ , как это принято обычно в сопромате.

Применительно к задачам устойчивости упругих стержней в качестве основного невозмущенного состояния вводится состояние прямолинейного равновесия под действием заданной осевой силы, и рассматриваются поперечные колебания стержня, обусловленные малыми отклонениями в начальный момент времени.

В качестве примера использования данного метода рассмотрим простейшую задачу устойчивости прямолинейного стержня с шарнирно закрепленными концами под действием сжимающей силы  $P$  (рис. 9.9). В отличие от уравнения колебания струны в уравнение малых поперечных колебаний данного стержня сила  $P$  входит с противоположным знаком, поскольку здесь она сжимающая:

$$EI \frac{\partial^4 V(z, t)}{\partial z^4} + P \frac{\partial^2 V}{\partial z^2} + \rho S \frac{\partial^2 V(z, t)}{\partial t^2} = 0, \quad (1)$$

где  $\rho$  — плотность материала;  $S$  — площадь поперечного сечения;  $z$  — координата по оси с началом отсчета на нижней опоре.

Принимая во внимание полученные выше формы свободных колебаний шарнирного стержня (балки), представим начальные возмущения в виде малых отклонений от прямолинейного состояния:

$$V(z, 0) = \vartheta_0 \sin \frac{\pi z}{l}, \quad \left. \frac{\partial V}{\partial t} \right|_{t=0} = 0, \quad (2)$$

где  $\vartheta_0$  — некоторый малый параметр.

Решение дифференциального уравнения (1) при граничных условиях шарнирного закрепления и начальных условиях (2) имеет вид

$$V(z, t) = \vartheta(t) \sin \frac{\pi z}{l}. \quad (3)$$

Дифференциальное уравнение (1) и начальные условия (2) при подстановке выражения (3) для искомой функции прогиба принимают вид

$$\frac{\partial^2 \vartheta(t)}{\partial t^2} + \frac{\pi^2}{\rho S l^2} \left( \frac{\pi^2 EI}{l^2} - \mathbf{P} \right) \vartheta(t) = 0, \quad \vartheta(0) = \vartheta_0, \quad \left. \frac{d\vartheta}{dt} \right|_{t=0} = 0. \quad (4)$$

Как видим, в зависимости от знака выражения в круглых скобках характеристическое уравнение дифференциального уравнения (4) имеет либо чисто мнимые корни  $\pm i\omega$ , либо действительные  $\pm\lambda$ , где

$$\omega = \sqrt{\frac{\pi^2}{\rho S l^2} \left( \frac{\pi^2 EI}{l^2} - \mathbf{P} \right)}, \quad \lambda = \sqrt{\frac{\pi^2}{\rho S l^2} \left( \mathbf{P} - \frac{\pi^2 EI}{l^2} \right)}.$$

В результате с учетом начальных условий получаем два возможных решения в двух диапазонах изменения сжимающей силы  $\mathbf{P}$ :

$$\vartheta(t) = \begin{cases} \vartheta_0 \cos \omega t \sin \frac{\pi z}{l}, & \text{при } \mathbf{P} \leq \frac{\pi^2 EI}{l^2}, \\ \vartheta_0 \operatorname{ch} \lambda t \sin \frac{\pi z}{l}, & \text{при } \mathbf{P} \geq \frac{\pi^2 EI}{l^2}. \end{cases} \quad (5)$$

Первое решение соответствует гармоническим поперечным колебаниям стержня под действием сжимающей силы с частотой  $\omega(\mathbf{P})$ , а второе решение означает неограниченное отклонение стержня от прямолинейного состояния при любом (даже бесконечно малом) значении параметра начального отклонения  $\vartheta_0$ . Согласно динамическому

критерию, второе решение указывает на неустойчивость прямолинейного состояния стержня при

$$P \geq \frac{\pi^2 EI}{l^2}.$$

Полученный результат совпадает с результатом Эйлера при решении данной задачи статическим методом. И это совпадение не случайное, поскольку при критическом значении сжимающей силы  $P$  частота поперечных колебаний стержня обращается в ноль:

$$\omega(P) = 0, \quad (6)$$

и решение (5) при  $\omega=0$  и  $\lambda=0$  соответствует равновесию стержня в криволинейном состоянии.

Таким образом, если и при других граничных условиях частоты поперечных колебаний стержня с увеличением сжимающей силы  $P$  уменьшаются, и переход значений частоты  $\omega$  от действительных значений к комплексным происходит при  $\omega=0$ , то при динамическом методе исследования устойчивости уравнение (6) можно использовать для определения критической силы  $P$ . В этих случаях статический метод исследования вполне правомерен и приводит к таким же результатам. Однако в общем случае при увеличении нагрузки переход от действительных значений  $\omega$  к комплексным происходит без перехода через ноль, и статический метод Эйлера к решению таких задач неприменим.

Рассмотрим общую схему расчета на устойчивость продольно сжатых стержней при других граничных условиях. Дифференциальное уравнение (1) при заданных ненулевых начальных условиях, которые соответствуют отклонению стержня от прямолинейного состояния равновесия, описывает возмущенное движение стержня. Для исследования свойств этого движения представим решение для функции прогиба в виде

$$V(z, t) = w(z)e^{i\omega t}, \quad (7)$$

где  $w(z)$  — искомая функция, удовлетворяющая заданным граничным условиям.

Неизвестные пока значения  $\omega(P)$  определяют свойства решения и движения стержня при заданных его начальных отклонениях от прямолинейного равновесия. Действительно, уравнение (1) содержит вторую производную по времени. Поэтому при дальнейшем решении задачи мы получим уравнение для определения  $\omega$ , которое в зависимости от величины сжимающей силы  $P$ , может иметь либо действи-

тельные корни, либо комплексно сопряженные. Комплексно сопряженные корни соответствуют неограниченному отклонению стержня от прямолинейного состояния. Следовательно, задача сводится к определению критической силы  $\mathbf{P}$ , после превышения которой значения  $\omega$  становятся комплексными.

В качестве примера решения задачи по данной схеме рассмотрим случай жесткой заделки на нижнем конце и подвижного шарнира на верхнем, который нагружен сжимающей силой  $\mathbf{P}$ .

После подстановки заданного выражения (7) в уравнение (1) получаем обыкновенное дифференциальное уравнение изогнутой оси балки для определения функции  $w(z)$ :

$$EI \frac{d^4 w(z)}{dz^4} + \mathbf{P} \frac{d^2 w}{dz^2} - \rho S \omega^2 w = 0. \quad (8)$$

Частные решения уравнения (8) имеют вид

$$w(z) = Ae^{\lambda z}$$

где  $\lambda$  — корни характеристического уравнения

$$\lambda^4 + \frac{\mathbf{P}}{EI} \lambda^2 - \psi^2 = 0, \quad \psi^2 = \frac{\rho S}{EI} \omega^2.$$

Два корня этого биквадратного уравнения — действительные, а два — чисто мнимые:

$$\lambda^2 = -\frac{\mathbf{P}}{2EI} \pm \sqrt{\left(\frac{\mathbf{P}}{2EI}\right)^2 + \psi^2}, \quad \Rightarrow \quad \lambda_{12} = \pm\beta, \quad \lambda_{3,4} = \pm i\alpha,$$

$$\beta = \sqrt{\sqrt{\left(\frac{\mathbf{P}}{2EI}\right)^2 + \psi^2} - \frac{\mathbf{P}}{2EI}}, \quad \Rightarrow \quad \alpha = \sqrt{\sqrt{\left(\frac{\mathbf{P}}{2EI}\right)^2 + \psi^2} + \frac{\mathbf{P}}{2EI}}.$$

Общее решение уравнения (8) имеет вид

$$w(z) = A \sinh \beta z + B \cosh \beta z + C \sin \alpha z + D \cos \alpha z.$$

Подставив общее решение в заданные граничные условия, получаем систему алгебраических однородных уравнений для определения произвольных постоянных:

$$w(0) = B + D = 0,$$

$$w'(0) = A\beta + C\alpha = 0,$$

$$w(l) = A \operatorname{sh} \beta L + B \operatorname{ch} \beta L + C \sin \alpha L + D \cos \alpha L = 0,$$

$$w''(l) = A \beta^2 \operatorname{sh} \beta L + B \beta^2 \operatorname{ch} \beta L - C \alpha^2 \sin \alpha L - D \alpha^2 \cos \alpha L = 0.$$

Ненулевые решения этой системы однородных уравнений существуют, если определитель равен нулю. Условие равенства нулю этого определителя даст уравнение для определения частот колебаний  $\omega$

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ \beta & 0 & \alpha & 0 \\ \operatorname{sh} \beta l & \operatorname{ch} \beta l & \sin \alpha l & \cos \alpha l \\ \beta^2 \operatorname{sh} \beta l & \beta^2 \operatorname{ch} \beta l & -\alpha^2 \sin \alpha l & -\alpha^2 \cos \alpha l \end{vmatrix} = 0.$$

Для преобразования первых двух строк данного определителя вычтем второй столбец из четвертого. Затем первый столбец умножим на  $\alpha$ , третий на  $\beta$  и вычтем из третьего столбца первый. В результате получаем определитель

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ \alpha \beta & 0 & 0 & 0 \\ \alpha \operatorname{sh} \beta l & \operatorname{ch} \beta l & \beta \sin \alpha l - \alpha \operatorname{sh} \beta l & \cos \alpha l - \operatorname{ch} \beta l \\ \alpha \beta^2 \operatorname{sh} \beta l & \beta^2 \operatorname{ch} \beta l & -\beta \alpha^2 \sin \alpha l - \alpha \beta^2 \operatorname{sh} \beta l & -\alpha^2 \cos \alpha l - \beta^2 \operatorname{ch} \beta l \end{vmatrix} = 0,$$

который равен произведению диагональных миноров второго порядка, и после приведения подобных получаем следующее частотное уравнение:

$$(-\beta^3 - \beta \alpha^2) \sin \alpha l \operatorname{ch} \beta l + (\alpha^3 + \beta^2 \alpha) \cos \alpha l \operatorname{sh} \beta l = 0.$$

Поскольку  $\alpha^2 + \beta^2 \neq 0$ , то на этот множитель можно сократить, и в результате получаем уравнение

$$\beta \sin \alpha l \operatorname{ch} \beta l - \alpha \cos \alpha l \operatorname{sh} \beta l = 0,$$

которое можно представить в виде

$$\operatorname{tg} \alpha l = \frac{\alpha l}{\beta l} \operatorname{th} \beta l. \quad (9)$$

При  $\mathbf{P} = 0$ , согласно представленным выше выражениям,  $\alpha = \beta$  и уравнение (9) преобразуется в уравнение для определения частот свободных поперечных колебаний стержня

$$\operatorname{tg} \alpha l = \operatorname{th} \alpha l, \quad \alpha = \sqrt[4]{\frac{\rho S}{EI}} \omega^2, \quad (10)$$

решение которого рассмотрено в предыдущем разделе и получены следующие результаты (здесь  $l$  — длина стержня):

$$\alpha_n l = \frac{\pi}{4} + n\pi, \quad \omega_n = \frac{\pi^2(1+4n)^2}{16l^2} \sqrt{\frac{EI}{\rho S}}, \quad n = 1, 2, 3, \dots \quad (11)$$

При увеличении сжимающей силы  $P$  частоты поперечных колебаний стержня уменьшаются и при  $\omega \rightarrow 0$  уравнение (9) принимает вид

$$\operatorname{tg} \alpha l = \alpha l, \quad \alpha = \sqrt{\frac{P}{EI}}. \quad (12)$$

Полученное уравнение (12) совпадает с уравнением для определения критических сил, которое получается статическим методом.

#### 9.4.2. Исследование устойчивости стержня под действием следящей силы

Рассмотрим гибкий стержень (стойку), жестко закрепленный в основании, находящийся под действием сжимающей силы  $P$ , которая прикладывается таким способом, что при любом возможном отклонении стержня от вертикального положения она всегда будет направлена по касательной к изогнутой оси стержня (рис. 9.10). Данная сила вошла в историю теории сопротивления материалов как «следящая сила».

Вошла в историю, потому что первые результаты по исследованию устойчивости прямолинейной формы равновесия данного стержня под действием следящей силы были неправильными: «Стержень при такой силе, не вызывающей пластических деформаций, *устойчивость не теряет*» [39].

Используя результаты общей схемы исследования устойчивости, решение любой задачи можно продолжить с подстановки общего решения

$$w(z) = A \operatorname{sh} \beta z + B \operatorname{ch} \beta z + C \sin \alpha z + D \cos \alpha z$$

в граничные условия. Граничные условия в данном случае имеют простой вид. В основании данной стойки нужно записать условия жесткой заделки:

$$w(0) = 0, \quad w'(0) = 0.$$

Из уравнения равновесия элемента, прилегающего к концу, нагруженному следящей силой,

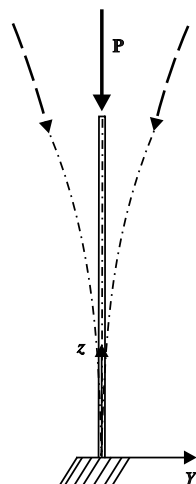


Рис. 9.10

получается, что внутренняя поперечная сила  $\mathbf{Q}(z, t)$  и изгибающий момент  $\mathbf{M}(z, t)$  равны нулю. Поэтому

$$w''(L) = 0, \quad w'''(L) = 0.$$

Таким образом, в данном случае получаем следующую систему уравнений для определения произвольных постоянных:

$$w(0) = B + D = 0,$$

$$w'(0) = A\beta + C\alpha = 0,$$

$$w''(l) = A\beta^2 \operatorname{sh}\beta L + B\beta^2 \operatorname{ch}\beta L - C\alpha^2 \sin\alpha L - D\alpha^2 \cos\alpha L = 0,$$

$$w'''(l) = A\beta^3 \operatorname{ch}\beta L + B\beta^3 \operatorname{sh}\beta L - C\alpha^3 \cos\alpha L + D\alpha^3 \sin\alpha L = 0.$$

Равенство нулю определителя системы дает частотное уравнение:

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ \beta \operatorname{sh}\beta l & \beta \operatorname{ch}\beta l & -\alpha \sin\alpha l & -\alpha \cos\alpha l \\ \beta^2 \operatorname{ch}\beta l & \beta^2 \operatorname{sh}\beta l & -\alpha^2 \cos\alpha l & \alpha^2 \sin\alpha l \end{vmatrix} = 0.$$

Из четвертого столбца вычитаем второй, а из третьего вычитаем первый. В результате получаем определитель, который равен произведению диагональных определителей второго порядка. Далее, после простых преобразований приходим к следующему уравнению:

$$\alpha^4 + \beta^4 + 2\alpha^2 \beta^2 \cos\alpha l \operatorname{ch}\beta l + \alpha\beta(\alpha^2 - \beta^2) \sin\alpha l \operatorname{sh}\beta l = 0.$$

Для дальнейших преобразований выпишем соотношения:

$$\beta = \sqrt{\left(\frac{\mathbf{P}}{2EI}\right)^2 + \psi^2} - \frac{\mathbf{P}}{2EI}, \quad \alpha = \sqrt{\left(\frac{\mathbf{P}}{2EI}\right)^2 + \psi^2} + \frac{\mathbf{P}}{2EI}.$$

$$\alpha^4 + \beta^4 = 2\left(\frac{\mathbf{P}}{2EI}\right)^2 + 2\psi^2 + 2\left(\frac{\mathbf{P}}{2EI}\right)^2 = \left(\frac{\mathbf{P}}{EI}\right)^2 + 2\psi^2.$$

$$\alpha\beta = \psi. \quad \alpha^2 - \beta^2 = \frac{\mathbf{P}}{EI}. \quad \psi^2 = \frac{\rho S}{EI} \omega^2.$$

Подставим их в полученное уравнение:

$$\left(\frac{\mathbf{P}}{EI}\right)^2 + 2\psi^2 + 2\psi^2 \cos\alpha l \operatorname{ch}\beta l + \psi \frac{\mathbf{P}}{EI} \sin\alpha l \operatorname{sh}\beta l = 0.$$



Данное уравнение можно решить графически только при подстановке последовательности числовых значений силы  $\mathbf{P}$  и определения соответствующих значений параметра частоты  $\psi$ , как корней данного уравнения. Поэтому для выполнения таких вычислений возникает необходимость ввести безразмерные величины

$$\mu = \frac{\mathbf{P}l^2}{EI}, \quad \eta = \psi l = \omega l \sqrt{\frac{\rho S}{EI}}, \quad r_2 = \alpha l, \quad r_1 = \beta l.$$

$$\mu^2 + 2\eta^2 + 2\eta^2 \cos r_2 \operatorname{ch} r_1 + \eta \mu \sin r_2 \operatorname{sh} r_1 = 0, \quad (13)$$

где

$$r_1 = \sqrt{\left(\frac{\mu}{2}\right)^2 + \eta^2} - \frac{\mu}{2}, \quad r_2 = \sqrt{\left(\frac{\mu}{2}\right)^2 + \eta^2} + \frac{\mu}{2}.$$

При отсутствии осевой силы, т. е. при  $\mu = 0$   $r_1 = r_2 = \alpha l$  уравнение (13) принимает вид

$$1 + \cos \alpha l \operatorname{ch} \alpha l = 0, \quad \alpha l = \sqrt{\eta}.$$

Данное уравнение совпадает с частотным уравнением консольной балки, рассмотренной в примере 1 предыдущего раздела, где было получено

$$\alpha_1 L = 1875; \quad \alpha_{n+1} L = \frac{(2n+1)\pi}{2}, \quad n = 1, 2, 3, \dots,$$

или  $\eta_1 = 3.5156$ ,  $\eta_2 = 22.1841$ , ...

В результате решения данной задачи мы получили зависимость частот колебаний балки от величины следящей силы  $\mathbf{P}$ . Но эта зависимость определена неявно уравнением (13). Чтобы построить график этой зависимости нужно подставлять в уравнение (13) значения параметра силы  $\mu$  и из решения уравнения найти  $\eta$ . В результате выполнения такого расчета на рис. 9.11 построен график этой зависимости, на котором приведены графики изменения двух первых частот колебаний при увеличении безразмерного параметра  $\mu$ . Как видим, с увеличением силы  $\mathbf{P}$  первая частота возрастает, а вторая убывает. При  $\eta \cong 20$ , т. е. при

$$\mathbf{P} = \mathbf{P}_{kp} = 20 \frac{EI}{l^2}$$

обе частоты сливаются, а при дальнейшем увеличении силы становятся комплексно-сопряженными:  $\omega_{1,2} = a + ib$ . Следовательно, решение принимает вид

$$V(z, t) = w(z) e^{\mp bt} e^{iat},$$

График зависимости частот колебаний от осевой следящей силы



Рис. 9.11

и колебания продолжаются с возрастающей амплитудой по времени. Найденная таким образом сила  $P$  является критической, а решение В. И. Феодосьева, полученное статическим методом Эйлера, оказалось неверным.

#### 9.4.3. Исследование устойчивости стержня-стойки под действием вертикальной силы

Рассмотрим гибкий стержень (стойку), жестко закрепленный в основании, находящийся под действием сжимающей силы  $P$ , которая прикладывается таким способом, что при любом возможном отклонении стержня от вертикального положения она всегда будет направлена вертикально (рис. 9.12). В отличие от следящей силы вертикальная сила входит в граничные условия при  $z = l$ .

Как показано на рис. 9.12, вертикальная сила  $P$  проектируется на нормаль к изогнутой оси стержня. Поэтому при  $z \rightarrow l$  поперечная сила  $Q(z)$  не равна нулю, и граничные условия при  $z = l$  принимают вид:

$$M(l, t) = 0, \quad Q(l, t) = P \sin \varphi.$$

При малых отклонениях  $\sin \varphi = \operatorname{tg} \varphi = \frac{\partial V}{\partial z}$ . Поэтому можно записать, что при  $z = l$

$$M(l, t) = 0, \quad Q(l, t) = P \frac{\partial V}{\partial z}.$$

В результате система уравнений для определения произвольных постоянных общего решения для функции  $w(z)$  принимает следующий вид:

$$B + D = 0,$$

$$A\beta + C\alpha = 0,$$

$$A\beta^2 \operatorname{sh}\beta L + B\beta^2 \operatorname{ch}\beta L - C\alpha^2 \sin\alpha L - D\alpha^2 \cos\alpha L = 0,$$

$$A\beta^3 \operatorname{ch}\beta l + B\beta^3 \operatorname{sh}\beta l - C\alpha^3 \cos\alpha l + D\alpha^3 \sin\alpha l +$$

$$+ \frac{P}{EI} (A\beta \operatorname{ch}\beta l + B\beta \operatorname{sh}\beta l + C\alpha \cos\alpha l - D\alpha \sin\alpha l) = 0.$$

Из равенства нулю определителя этой системы мы получаем уравнение для определения частот свободных колебаний стойки. При  $P = 0$  эти частоты определены в примере 1 предыдущего раздела:

$$\alpha_1 L = 1.875; \quad \alpha_{n+1} L = \frac{(2n+1)\pi}{2}, \quad n = 1, 2, 3, \dots,$$

$$\text{где } \alpha L = L^4 \sqrt{\frac{\rho S \omega^2}{EI}}.$$

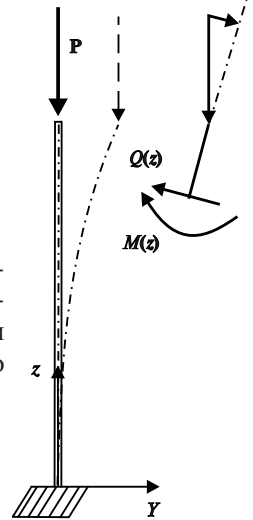


Рис. 9.12

При увеличении силы  $P$  в данном случае все частоты колебаний монотонно убывают и обращаются в ноль. А все силы, при которых это происходит, можно получить из этого же частотного уравнения, которое в данном случае при  $\omega = 0$ ,  $\beta = 0$ ,  $\alpha = \sqrt{P/EI}$ , принимает простой вид

$$\cos\alpha l = 0, \quad \Rightarrow \quad \alpha l = \frac{2n-1}{2}\pi.$$

В результате получаем критические силы  $P_n$ , соответствующие разным формам потери устойчивости:

$$P_n = \frac{(2n-1)^2 \pi^2 EI}{4l^2}.$$

### 9.5. Критическая скорость вращения вала. Динамический критерий устойчивости. Примеры

Рассмотрим возможность потери устойчивости круглого вала, который вращается с постоянной угловой скоростью  $\omega_0$ , а закреплен с помощью торцевых подшипников, которые можно рассматривать как сферические шарниры, не ограничивающие углов поворота торцевых поперечных сечений при изгибе (рис. 9.13).

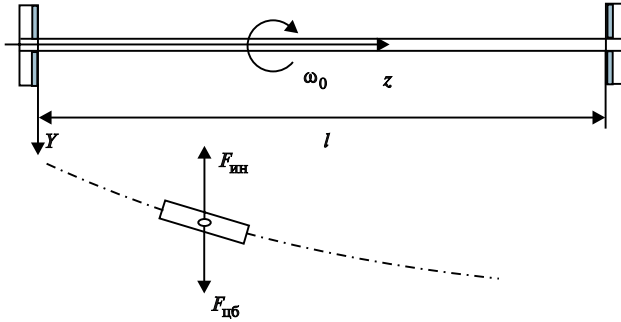


Рис. 9.13

Показанное на рисунке идеально прямолинейное состояние вала практически не возможно, поскольку под действием силы тяжести и других факторов возможны малые отклонения от прямолинейного состояния, и вал изгибается. При этом в плоскости изгиба возникают центробежные силы. Силы упругости приводят к колебаниям вала в плоскости изгиба, и, естественно, возникает вопрос, при всех ли скоростях вращения вала амплитуды колебаний поперечных сечений будут ограниченными или же существует критическая скорость, после превышения которой амплитуды колебаний будут неограниченно возрастать.

Данная задача аналогична задаче устойчивости продольно сжатого шарнирного стержня, но уравнение поперечных колебаний необходимо дополнить центробежными силами, а осевую силу положить равной нулю ( $\mathbf{P} = 0$ ).

Радиус вращения всякого малого элемента, показанного крупным планом на рис. 9.13, равен прогибу  $V(z, t)$ . Поэтому центробежные силы на единицу длины будут равны  $\rho S \omega_0^2 V(z, t)$ , и уравнение колебаний принимает вид

$$EI \frac{\partial^4 V(z, t)}{\partial z^4} - \rho S \omega_0^2 V + \rho S \frac{\partial^2 V(z, t)}{\partial t^2} = 0, \quad (14)$$

где  $\rho$  — плотность материала;  $S$  — площадь поперечного сечения.

Принимая во внимание аналогию с задачей устойчивости шарнирного стержня, представим искомое решение в виде синусоиды с переменной амплитудой

$$V(z, t) = \vartheta(t) \sin \frac{\pi z}{l}, \quad (15)$$

которая удовлетворяет граничным условиям шарнирного закрепления концов.

Дифференциальное уравнение (14) при подстановке выражения (15) для искомой функции прогиба принимает вид

$$\frac{d^2\vartheta(t)}{dt^2} + \left( \frac{\pi^4 EI}{\rho S l^4} - \omega_0^2 \right) \vartheta(t) = 0, \quad (16)$$

$$\vartheta(0) = \vartheta_0, \quad \left. \frac{d\vartheta}{dt} \right|_{t=0} = 0.$$

В данном случае, тоже в зависимости от знака выражения в круглых скобках корни характеристического уравнения будут либо чисто мнимыми  $\pm i\omega$ , либо действительными  $\pm\lambda$ , где

$$\omega = \sqrt{\frac{\pi^4 EI}{\rho S l^4} - \omega_0^2}, \quad \lambda = \sqrt{\omega_0^2 - \frac{\pi^4 EI}{\rho S l^4}}. \quad (17)$$

В результате с учетом начальных условий получаем два возможных решения в двух диапазонах изменения скорости вращения вала:

$$\vartheta(t) = \begin{cases} \vartheta_0 \cos \omega t \sin \frac{\pi z}{l} & \text{при } \omega_0 \leq \frac{\pi^2}{l^2} \sqrt{EI}, \\ \vartheta_0 \operatorname{ch} \lambda t \sin \frac{\pi z}{l} & \text{при } \omega_0 \geq \frac{\pi^2}{l^2} \sqrt{EI}. \end{cases}$$

Первое решение соответствует гармоническим поперечным колебаниям вала в плоскости начальных отклонений от прямолинейного состояния, а второе решение означает неограниченное отклонение вала от прямолинейного состояния при любом (даже бесконечно малом) значении параметра начального отклонения  $\vartheta_0$ . Согласно динамическому критерию второе решение указывает на неустойчивость прямолинейного состояния, и критическая скорость вращения вала получилась равной круговой частоте его свободных поперечных колебаний

$$\omega_{кр} = \frac{\pi^2}{l^2} \sqrt{EI}.$$

Здесь следует обратить внимание на то, что частота поперечных колебаний вала с увеличением скорости его вращения уменьшается и обращается в ноль при  $\omega_0 = \omega_{кр}$ .

Таким образом, здесь так же, как и при исследовании устойчивости продольно сжатых стержней: если переход от действительных значений частоты поперечных колебаний к комплексным происходит при

$\omega(\omega_0) = 0$ , то это условие можно использовать для определения критической скорости вращения вала  $\omega_0$ .

**П р и м е р.** Рассмотрим в качестве примера стержень, правая опора которого типа сферического шарнира и ограничивает только перемещения, а левая опора осуществляет условия жесткой заделки и вращается вместе со стержнем (рис. 9.14).

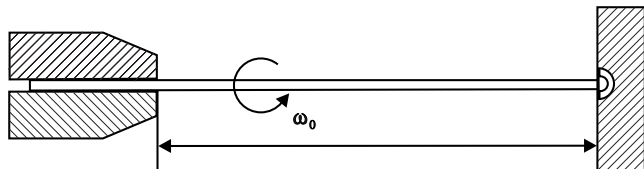


Рис. 9.14

При начальных условиях отклонения стержня от прямолинейного состояния дифференциальное уравнение (14) описывает поперечные колебания стержня в плоскости начальных отклонений и его решение имеет вид

$$V(z, t) = w(z)e^{i\omega t}, \quad (18)$$

где  $\omega$  — круговая частота поперечных колебаний, если это действительное число.

Если при наличии осевой силы или угловой скорости вращения число  $\omega$  становится комплексным с отрицательной мнимой частью, то амплитуда колебаний будет возрастать по экспоненте. В этом и проявляется неустойчивость стержня под действием осевой силы или угловой скорости вращения  $\omega_0$ . И если переход от действительных значений  $\omega$  к комплексным происходит через ноль, то условие  $\omega = 0$  является уравнением для определения критической скорости вращения, или критической силы **P**, или критической комбинации сжимающей силы и угловой скорости при наличии того и другого одновременно.

Мы повторили здесь основные предпосылки динамического метода исследования устойчивости стержневых систем, изложенные подробно при анализе устойчивости сжатых стержней, подчеркивая тем самым общность такого подхода при решении разных задач.

Подставляя (18) в (14), получаем обыкновенное дифференциальное уравнение изогнутой оси балки для определения функции  $w(z)$

$$EI \frac{d^4 w(z)}{dz^4} - \rho S \omega^2 w - \rho S \omega_0^2 w = 0. \quad (19)$$

Частные решения уравнения (19) имеют вид

$$w(z) = Ae^{\lambda z},$$

где  $\lambda$  — корни характеристического уравнения

$$\lambda^4 - \alpha^4 = 0, \quad \alpha^4 = \frac{\rho S}{EI}(\omega^2 + \omega_0^2). \quad (20)$$

Корни характеристического уравнения определяются очень просто, и два из них действительные, а два чисто мнимые:

$$\lambda_{12} = \pm\alpha, \quad \lambda_{3,4} = \pm i\alpha.$$

Общее решение уравнения (19) в данном случае имеет вид

$$w(z) = A \operatorname{sh} \alpha z + B \operatorname{ch} \alpha z + C \sin \alpha z + D \cos \alpha z.$$

Переходим теперь к граничным условиям

$$\begin{aligned} w(0) &= B + D = 0, \\ w'(0) &= A\alpha + C\alpha = 0, \\ w(L) &= A \operatorname{sh} \alpha L + B \operatorname{ch} \alpha L + C \sin \alpha L + D \cos \alpha L = 0, \\ w''(L) &= A\alpha^2 \operatorname{sh} \alpha L + B\alpha^2 \operatorname{ch} \alpha L - C\alpha^2 \sin \alpha L - D\alpha^2 \cos \alpha L = 0. \end{aligned} \quad (21)$$

Ненулевые решения этой системы однородных уравнений существуют, если определитель равен нулю. Условие равенства нулю этого определителя дает уравнение для определения частот колебаний:

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ \operatorname{sh} \alpha L & \operatorname{ch} \alpha L & \sin \alpha L & \cos \alpha L \\ \operatorname{sh} \alpha L & \operatorname{ch} \alpha L & -\sin \alpha L & -\cos \alpha L \end{vmatrix} = 0.$$

Вычитая из четвертого столбца второй столбец, а из третьего — первый, получаем определитель

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ \operatorname{sh} \alpha L & \operatorname{ch} \alpha L & \sin \alpha L - \operatorname{sh} \alpha L & \cos \alpha L - \operatorname{ch} \beta L \\ \operatorname{sh} \alpha L & \operatorname{ch} \alpha L & -\sin \alpha L - \operatorname{sh} \alpha L & -\cos \alpha L - \operatorname{ch} \alpha L \end{vmatrix} = 0,$$

равный произведению диагональных миноров, и после приведения подобных слагаемых приходим к уравнению

$$\sin \alpha L \operatorname{ch} \alpha L - \cos \alpha L \operatorname{sh} \alpha L = 0.$$

Для графической иллюстрации корней этого уравнения представим его в виде

$$\operatorname{tg} \alpha L = \tanh \alpha L. \quad (22)$$

Графики тангенсов показаны на рис. 9.15. Тангенс гиперболический монотонно возрастает и стремится к единице при  $\alpha L \rightarrow \infty$ . Поэтому уравнение (22) с некоторой малой погрешностью можно заменить уравнением

$$\operatorname{tg} \alpha L = 1, \quad \alpha L \geq \pi.$$

Таким образом, первый ненулевой корень уравнения (22)

$$\alpha_1 \approx \frac{5\pi}{4L}.$$

Полученный первый корень представляется единственно важным, как и в задачах устойчивости сжатых стержней, поскольку он определяет критическую скорость вращения стержня (вала). Подставляя  $\alpha_1$  в выражение (20) получим

$$\frac{\rho S}{EI}(\omega^2 + \omega_0^2) = \alpha_1^4, \quad \Rightarrow \quad \omega = \pm \sqrt{\frac{EI\alpha_1^4}{\rho L} - \omega_0^2}.$$

Как видим, при  $\omega_0 > \alpha_1^2 \sqrt{\frac{EI}{\rho S}}$  частоты колебаний  $\omega$  становятся чисто мнимыми и гармонические колебания сменяются процессом неограниченного отклонения стержня от прямолинейного состояния.

Таким образом, критическая скорость вращения стержня равна первой частоте его поперечных колебаний при заданных условиях закрепления концов:

$$\omega_{\text{кр}} = \alpha_1^2 \sqrt{\frac{EI}{\rho S}}.$$

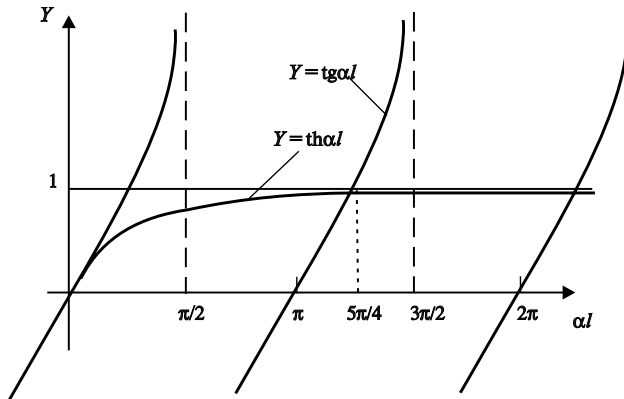


Рис. 9.15



Замечание. В данной главе рассмотрены примеры применения динамического метода исследования устойчивости упругих стержней, когда переход от гармонических колебаний к параметрическому резонансу происходит при переходе частоты колебаний через ноль и при  $\omega = 0$  имеют место смежные формы квазистатического равновесия. Следовательно, при решении таких задач является приемлемым статический метод Эйлера, который может оказаться непригодным в случае неконсервативных систем. Но область возможного использования статического метода Эйлера не ограничивается строго только консервативными системами.

Общего признака пригодности статического метода исследования устойчивости упругих систем в настоящее время не существует. Поэтому лишь при решении частных задач можно выяснить достаточные условия его правомерности. В этой связи можно отметить, что методом Эйлера успешно решены задачи устойчивости и некоторых неконсервативных систем.

### **9.6. Гидравлический удар в трубах. Метод интегрального преобразования Лапласа**

Операционный метод на основе преобразования Лапласа. Постановка краевых задач гидравлического удара. Решения краевых задач операционным методом. Анализ полученных результатов.

В данном разделе представлена постановка краевых задач гидравлического удара для функций напора и скорости пульсирующего потока в прямой цилиндрической трубе конечной длины, в которую поступает жидкость из некоторой гидроемкости при установившемся режиме истечения. Удар возникает при быстром закрытии затвора на конце трубы. Представлены точные аналитические решения задач, и на данных примерах их решения показаны возможности применения метода интегрального преобразования Лапласа.

#### **9.6.1. Операционный метод на основе преобразования Лапласа**

Решения многих задач, возникающих в инженерной практике, получаемые классическими методами, не всегда удобны для их практического использования. В связи с этим широкое применение нашли операционные методы в электротехнике, в теплофизике при решении

нестационарных задач теплопроводности, в химической технологии, в гидродинамике, в теории переноса нейтронов и т. д.

Операционный метод решения задач сводится к следующим этапам:

1) от искомой функции  $f(t)$  (оригинала) переходят к функции  $F(p)$  (изображению) комплексного переменного  $p$ ;

2) заданное уравнение для  $f(t)$  переводят в операторное уравнение для  $F(p)$ ;

3) решают операторное уравнение, что гораздо проще, чем исходное;

4) от найденного изображения переходят к оригиналу.

Обоснование метода интегрального преобразования относится к области теории функций комплексного переменного (ТФКП) и функционального анализа. Но для его практического использования достаточно знать ТФКП на уровне «иметь представление». В сущности, и представление о ТФКП можно иметь весьма отдаленное. Правила перехода в область изображений достаточно простые, а для обратного преобразования найденного изображения обычно приходится вычислять только вычеты в полюсах функции-изображения.

Пример. Пусть требуется решить дифференциальное уравнение

$$y'(t) + y(t) = 0 \quad (1)$$

при  $y(0) = y_0$ .

Обозначим символом  $\psi(p)$  изображение искомой функции  $y(t)$ . Для сокращения данной записи представим это просто символом:

$$\begin{aligned} y(t) \div \psi(p) \quad \text{или} \quad \psi(p) \div y(t), \\ \text{или} \quad y(t) \rightarrow \psi(p), \quad \psi(p) \rightarrow y(t). \end{aligned}$$

Теперь нужно преобразовать дифференциальное уравнение (1) в операторное уравнение. Для этого нужно знать следующее правило:

$$y'(t) \rightarrow p\psi(p) - y(0). \quad (2)$$

В результате можно записать операторное уравнение

$$p\psi(p) + \psi(p) = y(0), \quad (3)$$

из которого находим изображение с учетом начального условия

$$\psi(p) = \frac{y_0}{p+1}.$$

Теперь открываем таблицу преобразований Лапласа и находим, что

$$\frac{y_0}{p+1} \rightarrow y_0 e^{-t}, \quad y(t) = y_0 e^{-t}. \quad (4)$$

Данное уравнение мы решили только при использовании символики операционного метода и таблицы интегральных преобразований Лапласа. Но все это можно проделать самостоятельно, что тоже достаточно просто, пользуясь только определениями интегральных преобразований. Для получения операторного уравнения необходимо знать, что изображение  $\psi(p)$  функции  $y(t)$  является следующим интегралом:

$$\psi(p) = \int_0^{\infty} y(t) e^{-pt} dt. \quad (5)$$

Поэтому для получения операторного уравнения нужно умножить данное дифференциальное уравнение на экспоненту и проинтегрировать:

$$\begin{aligned} \int_0^{\infty} y'(t) e^{-pt} dt + \int_0^{\infty} y(t) e^{-pt} dt &= 0, \\ y(t) e^{-pt} \Big|_0^{\infty} - \int_0^{\infty} y(t) e^{-pt} (-p) dt + \int_0^{\infty} y(t) e^{-pt} dt &= 0. \end{aligned}$$

После подстановки пределов интегрирования получаем уравнение

$$\left[ p \int_0^{\infty} y(t) e^{-pt} dt - y(0) \right] + \int_0^{\infty} y(t) e^{-pt} dt = 0,$$

которое совпадает с уравнением (3).

Для выполнения обратного преобразования необходимо знать еще одно определение, согласно которому функция-оригинал вычисляется как следующий интеграл в комплексной плоскости:

$$y(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{a-i\infty}^{a+i\infty} \psi(p) e^{pt} dp,$$

в котором пределы интегрирования условные. В действительности это интеграл по замкнутому контуру, охватывающему всю левую полуплоскость. По теореме Коши о вычетах (ТФКП), этот интеграл равен сумме всех вычетов по всем особым точкам функции  $\psi(p)$  в полуплоскости, расположенной слева от прямой  $\operatorname{Re} p = a > 0$ :

$$y(t) = \sum_{k=1}^n \operatorname{res}(\psi(p_k)) e^{p_k t}.$$

При использовании операционного метода редко удается найти нужное изображение в таблице. Обратное преобразование приходится делать по вычетам. Поэтому приведем здесь формулу, которую нужно знать для определения вычетов.

*Если найденное изображение представляет дробную функцию с простыми нулями знаменателя, то функция-оригинал вычисляется по формуле*

$$y(t) = \sum_{k=1}^n \frac{A(p_k)}{B'(p_k)} e^{p_k t}, \quad (6)$$

где  $p_k$  — простые корни (полюсы) функции  $B(p)$ . Вот и вся ТФКП, которую необходимо знать при использовании операционного метода.

Полезно еще знать два предельных соотношения:

$$\lim_{p \rightarrow \infty} p\psi(p) = y(0), \quad \lim_{p \rightarrow 0} p\psi(p) = y(\infty). \quad (7)$$

Изложенного здесь материала вполне достаточно, чтобы приступить к решению краевых задач операционным методом.

При решении многих краевых задач с дифференциальными уравнениями параболического и гиперболического типов решения получаются в виде тригонометрических рядов, которые, как правило, быстро сходятся. Например, полученные здесь решения рассмотренных задач позволяют исследовать резкие изменения давления, скорости и ускорения жидкости в процессе и после полного закрытия затвора не только около затвора, но и по всей длине трубы и в любой момент времени в процессе закрытия затвора. Рассмотренные граничные условия соответствуют таким типам затворов, как задвижка, заслонка с поворотным устройством, кран с поворачивающимся конусом или решетчатая заслонка, которая используется, например, как отражатель шарикоулавливающего устройства системы шариковой очистки трубопроводов АЭС.

### 9.6.2. Постановка краевых задач гидравлического удара

Рассмотрим стационарный процесс истечения жидкости из большой гидроемкости с постоянным пьезометрическим напором  $H_0$  через прямую цилиндрическую трубу конечной длины  $L$  с затвором на конце (рис. 9.15).

При установившемся режиме истечения скорость  $V_0$  постоянна по длине трубы. Таковы начальные условия последующего процесса,

который возникает и развивается, начиная с момента быстрого закрывания затвора. Возникающие при этом резкие изменения давления, скорости и ускорения жидкости называют гидравлическим ударом. Для исследования развития такого процесса обычно используются динамические уравнения в следующей форме [36]:

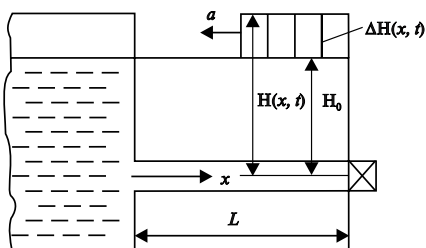


Рис. 9.16

$$\frac{\partial H}{\partial x} = -\frac{1}{g} \frac{\partial V}{\partial t} - i_f, \quad \frac{\partial H}{\partial t} = -\frac{a^2}{g} \frac{\partial V}{\partial x}, \quad (8)$$

где  $i_f$  — уклон трения (потери механической энергии на трение на единице длины трубы);  $a$  — скорость звука в жидкости, вошедшая в уравнение неразрывности при учете деформации трубы под действием внутреннего давления жидкости;  $t$  — время;  $x$  — координата по длине трубы, показанная на рис. 9.16;  $V(x, t)$  — средняя скорость по сечению трубы. Как отмечено выше, начальные условия при  $t = 0$  для уравнений (8) будут

$$V(x, 0) = V_0; \quad H(x, 0) = H_0. \quad (9)$$

где  $H_0$  и  $V_0$  — соответственно пьезометрический напор и скорость в трубе при установившемся движении.

Дифференцируя первое уравнение (8) по  $x$ , второе по  $t$  и приравнявая смешанные вторые производные, получим дифференциальное уравнение для функции напора  $H(x, t)$

$$\frac{\partial^2 H}{\partial x^2} - \frac{1}{a^2} \frac{\partial^2 H}{\partial t^2} = 0 \quad (10)$$

с граничными условиями

$$\begin{aligned} H(0, t) &= H_0, & 0 \leq t \leq \infty, \\ \left. \frac{\partial H}{\partial x} \right|_{x=L} &= \frac{V_0}{gt_0} - i_f, & 0 \leq t \leq t_0, \\ \left. \frac{\partial H}{\partial x} \right|_{x=L} &= -i_f, & t_0 \leq t \leq \infty. \end{aligned} \quad (11)$$

Первое граничное условие на входе в трубу очевидно, а второе получено при использовании первого уравнения (8) и линейного закона изменения скорости во времени при закрытии затвора за время  $t_0$ .

Аналогичным образом получается второе дифференциальное уравнение для скорости  $V(x, t)$

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} - \frac{1}{a^2} \frac{\partial^2 V}{\partial t^2} = 0 \quad (12)$$

с граничными условиями

$$\begin{aligned} \left. \frac{\partial V}{\partial x} \right|_{x=0} &= 0, & 0 \leq t \leq \infty, \\ V(L, t) &= V_0 \left( 1 - \frac{t}{t_0} \right), & 0 \leq t \leq t_0, \\ V(L, t) &= 0, & t_0 \leq t \leq \infty. \end{aligned} \quad (13)$$

Таким образом, мы представили две краевые задачи теории гидравлического удара для функции напора  $H(x, t)$  и скорости  $V(x, t)$ , несвязанные между собой при их решении. Впервые в данной постановке, задачи гидравлического удара были рассмотрены в работе Ю. В. Липовцева [20]. Далее приводим подробное решение и анализ полученных результатов.

### 9.6.3. Решения краевых задач операционным методом

Начнем с решения первой краевой задачи (10), (11) при начальных условиях (9). Для этого воспользуемся операционным методом с интегральным преобразованием Лапласа по времени  $t$ . С учетом начального условия представим искомое решение в виде

$$H(x, t) = H_0 + \frac{1}{2\pi i} \int_{\beta - i\infty}^{\beta + i\infty} \psi(x, p) e^{pt} dp, \quad (14)$$

где интегрирование осуществляется в комплексной плоскости  $p$ , а функция  $\psi(x, p)$  вводится соотношением

$$\psi(x, p) = \int_0^\infty (H - H_0) e^{-pt} dt. \quad (15)$$

Для интегрального преобразования уравнения (10) и граничных условий (11) представим их сначала в виде

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 (H - H_0)}{\partial x^2} - \frac{1}{a^2} \frac{\partial^2 (H - H_0)}{\partial t^2} &= 0, \\ \left. \frac{\partial (H - H_0)}{\partial x} \right|_{x=L} &= \frac{V_0}{gt_0} - i_f, & 0 \leq t \leq t_0, \\ \left. \frac{\partial (H - H_0)}{\partial x} \right|_{x=L} &= -i_f, & t_0 \leq t \leq \infty.\end{aligned}$$

Умножаем уравнение и граничные условия на экспоненту и проинтегрируем по переменной времени  $t$  от 0 до бесконечности. Начальные условия для  $(H - H_0)$  нулевые, поэтому в дифференциальное уравнение для функции  $\psi(x, p)$  начальные условия уже не войдут:

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} - \frac{p^2}{a^2} \psi = 0.$$

Преобразуем граничные условия:

$$\begin{aligned}\psi(0, p) &= 0, \\ \frac{d\psi(L, p)}{dx} &= \int_0^{t_0} \left( \frac{V_0}{gt_0} - i_f \right) e^{-pt} dt - i_f \int_{t_0}^{\infty} e^{-pt} dt = \\ &= \frac{-1}{p} \left[ \left( \frac{V_0}{gt_0} - i_f \right) e^{-pt_0} - \frac{V_0}{gt_0} + i_f + i_f e^{-pt_0} \right], \\ \frac{d\psi(L, p)}{dx} &= \frac{1}{p} \frac{V_0}{gt_0} (1 - e^{-pt_0}) - \frac{1}{p} i_f.\end{aligned}$$

Таким образом, мы получили обыкновенное дифференциальное уравнение с граничными условиями на входе в трубу и на выходе около затвора. Общее решение представим в виде гиперболических функций:

$$\psi(x, p) = A_1 \operatorname{sh} \frac{px}{a} + A_2 \operatorname{ch} \frac{px}{a}.$$

Из первого граничного условия следует  $A_2 = 0$ , и в результате получаем изображение в следующем виде:

$$\psi(x, s) = \frac{V_0}{gt_0} \frac{\operatorname{ash}\left(\frac{px}{a}\right)}{p^2 \operatorname{ch}\left(\frac{pL}{a}\right)} (1 - e^{-pt_0}) - i_f \frac{\operatorname{ash}\left(\frac{px}{a}\right)}{p^2 \operatorname{ch}\left(\frac{pL}{a}\right)}.$$

Как видим, для определения искомой функции необходимо вычислить интеграл

$$\sigma(x, t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\beta - i\infty}^{\beta + i\infty} \frac{\operatorname{ash}\left(\frac{px}{a}\right)}{p} \frac{1}{p \operatorname{ch}\left(\frac{pL}{a}\right)} e^{pt} dp.$$

При  $p = 0$  здесь простой полюс, так как в числителе синус гиперболический, который мы поделили на один множитель  $p$  знаменателя. Выделенная дробь особенности при  $p = 0$  не имеет. Простые нули знаменателя имеют место при

$$\frac{pL}{a} = \pm i \frac{(2n-1)\pi}{2}, \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

Суммируя все вычеты в указанных особых точках получаем выражение данного интеграла в виде тригонометрического ряда:

$$\sigma(\xi, \tau) = \xi - \frac{8}{\pi^2} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{(2k-1)^2} \sin \alpha_k \xi \cos \alpha_k \tau, \quad (16)$$

где введены безразмерные переменные

$$\xi = x/L, \quad \tau = at/L, \quad \alpha_k = \frac{(2n-1)\pi}{2}, \quad \tau_0 = at_0/L.$$

Для вычисления еще интеграла с множителем  $\exp(-pt_0)$  необходимо применить **теорему запаздывания** [19].

Для любого положительного  $t_0$  умножение изображение на экспоненту в степени  $-pt_0$  означает включение оригинала с запаздыванием на  $t_0$

$$e^{-pt_0} F(p) \rightarrow f(t - t_0).$$

Подставив теперь найденные интегралы в интегральное соотношение (14) и применив теорему запаздывания, окончательно находим функцию напора  $H(x, t)$ :

$$H(\xi, \tau) - H_0 = \frac{V_0 a}{g \tau_0} (\sigma(\xi, \tau) - \sigma(\xi, \tau - \tau_0)) - Li_f \sigma(\xi, \tau), \quad (17)$$

$$\sigma(\xi, \tau - \tau_0) = 0 \quad \text{при} \quad \tau < \tau_0.$$



Аналогичным образом получаем решение второй краевой задачи (12), (13) для скорости  $V(x, t)$ . Представим его в виде

$$V(x, t) = V_0 \left( 1 - \varepsilon(\xi, \tau) + \varepsilon(\xi, \tau - \tau_0) \right),$$

$$\varepsilon(\xi, \tau) = \frac{\tau}{\tau_0} - \frac{8}{\tau_0 \pi^2} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{(2k-1)^2} \cos \alpha_k \xi \sin \alpha_k \tau, \quad (18)$$

$$\varepsilon(\xi, \tau - \tau_0) = 0 \quad \text{при} \quad \tau < \tau_0.$$

Все полученные здесь ряды можно просуммировать не только с помощью компьютера, но и аналитически.

Но это нужно делать на последовательных отрезках времени. В целом они не нужны, но на отдельных промежутках необходимы для более полного понимания динамики развития процесса. Например, в первой полуфазе удара, т. е. при  $0 \leq \tau \leq 1$ , путем суммирования ряда (16) находим

$$\sigma(\xi, \tau) = 0 \quad \text{при} \quad 0 \leq \xi \leq (1 - \tau),$$

$$\sigma(\xi, \tau) = (\xi + \tau - 1) \quad \text{при} \quad (1 - \tau) < \xi \leq 1.$$

Аналогичным образом ряды суммируются и для последующих отрезков времени, но на экране монитора можно наблюдать весь процесс распространения ударных волн и их отражения от границ.

#### 9.6.4. Анализ полученных результатов

Полученные решения дают полную физическую картину развития гидравлического удара в процессе и после полного закрытия затвора:

В первую очередь отметим, что если в первой строке формул (17) для пьезометрического напора  $\Delta H = H(\xi, \tau) - H_0$  положить  $\tau_0 \rightarrow \infty$ , что означает истечение жидкости из трубы при открытом затворе, то в правой части этой формулы останется только слагаемое, описывающее пульсацию вытекающей струи в результате потерь механической энергии по длине трубы на трение. Как видим, оно не вносит каких-либо принципиальных изменений и его, по-видимому, можно отбросить, но если длина трубы достаточно велика, то его необходимо сохранить.

Рассмотрим другой предельный случай, т. е. случай мгновенного закрытия затвора, когда в формулах (17) нужно положить  $\tau_0 \rightarrow 0$ .

Тогда, выделяя главное и отбрасывая пока потери на трение, получим

$$H - H_0 = \frac{aV_0}{g} \frac{\partial \sigma}{\partial \tau} = \frac{aV_0}{g} \frac{4}{\pi^2} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{2k-1} \sin \alpha_k \xi \cos \alpha_k \tau. \quad (20)$$

В данном случае тригонометрический ряд справа представляет собой разложение следующей ступенчатой функции:

$$\begin{aligned} \Delta H(\xi, \tau) &= 0 & \text{при } 0 \leq \xi \leq (1 - \tau), \quad 0 \leq \tau \leq 1, \\ \Delta H(\xi, \tau) &= h & \text{при } (1 - \tau) < \xi \leq 1. \end{aligned} \quad (21)$$

Здесь и далее  $h = a_0 V_0 / g$ . График прямоугольной волны (21), распространяющейся со скоростью звука  $a$ , показан на рис. 9.15 над трубой. Если в первой формуле (17) трение учесть, то при  $\tau_0 \rightarrow 0$  она примет вид

$$H - H_0 = h \frac{\partial \sigma}{\partial \tau} - Li_f \sigma(\xi, \tau) \quad (22)$$

Теперь, после подстановки в правую часть (19), (20), (21), получим

$$\begin{aligned} \Delta H(\xi, \tau) &= 0 & \text{при } 0 \leq \xi \leq (1 - \tau), \\ \Delta H(\xi, \tau) &= h - i_f(\xi + \tau - 1) & \text{при } (1 - \tau) < \xi \leq 1. \end{aligned} \quad (23)$$

График этой волны имеет форму трапеции (рис. 9.17). Как видим, при мгновенном закрытии затвора трение не влияет на величину возникающего напора перед затвором в начальный момент времени.

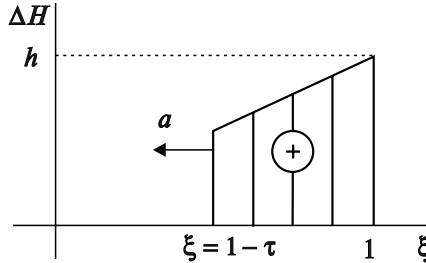


Рис. 9.17. Распространение ударной волны по трубе при мгновенном закрытии затвора,  $h = aV_0/g$

Проведем теперь анализ изменения напора во времени перед затвором при  $\xi = 1$  и получим расчетные формулы для максимальных по времени величин напора при различных скоростях закрытия затвора.

Для этого сечения, согласно (17), имеем

$$\sigma(1, \tau) = 1 - \frac{8}{\pi^2} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(2k-1)^2} \cos \alpha_k \tau. \quad (24)$$

Если принять во внимание, что тригонометрический ряд справа при последовательных дискретных значениях  $\tau = 0, 1, 2, 3, \dots$  принимает соответственно значения  $1, 0, 1, 0, \dots$  и, согласно (19),  $\sigma(\xi, \tau)$  — кусочно-линейная функция по обоим переменным  $\xi, \tau$ , то можно построить графики двух функций

$$\sigma_1(\tau) = \sigma(1, \tau) \quad \text{и} \quad \sigma_2(\tau) = -\sigma(1, \tau - \tau_0), \quad (25)$$

представленные на рис. 9.18, где в качестве примера принято  $\tau_0 = 1.5$ . Напомним, что, согласно теореме запаздывания,  $\sigma_2 = 0$  при  $0 \leq \tau \leq \tau_0$ , и график  $\sigma_2$  нужно сдвигать вправо всякий раз на заданную величину  $\tau_0$ .

После данной иллюстрации будут понятны графики изменения гидродинамического напора  $\Delta H$  около затвора, представленные на рис. 9.18 и построенные по формуле

$$\Delta H = h(\sigma_1(\tau) + \sigma_2(\tau))/\tau_0 - Li_f \sigma_1(\tau). \quad (26)$$

На рис. 9.19 графики построены без учета трения. Из данной формулы (26) и приведенных графиков видно, что, как при всех временах срабатывания затвора  $\tau_0 \leq 2$ , так и всех  $\tau_0 > 0$ , *максимальные значения изменения напора  $\Delta H$  достигаются всегда в первой фазе удара при  $0 \leq \tau \leq 2$  и они соответственно будут*

$$\begin{aligned} \Delta H_{\max} &= h - Li_f \sigma_1(\tau_0) && \text{при } 0 \leq \tau_0 \leq 2 \\ \text{и } \Delta H_{\max} &= 2h/\tau_0 - 2Li_f && \text{при } 2 \leq \tau_0 < \infty. \end{aligned} \quad (27)$$

Разница состоит лишь в том, что максимальный напор будет при  $\tau = \tau_0$ , если  $\tau_0 \leq 2$ , и при  $\tau = 2$  если  $\tau_0 > 2$ .

Теперь после полного выяснения физического смысла полученных решений можно сделать вывод, что такие графики дают необходимую

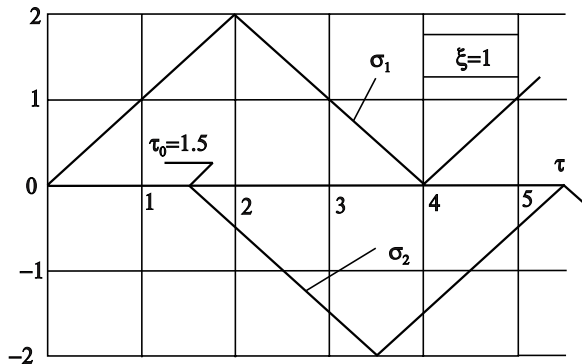


Рис. 9.18. Вспомогательные графики для построения графиков напора перед затвором

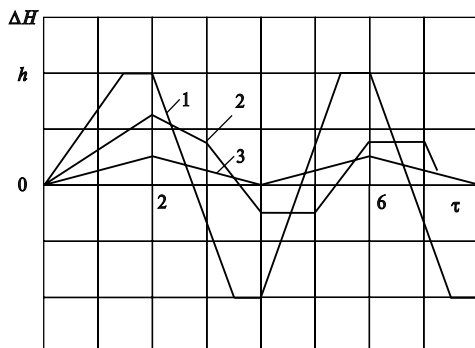


Рис. 9.19. Графики изменения во времени гидравлического напора перед затвором: 1 — при  $\tau_0 = 1.5$ ; 2 — при  $\tau_0 = 3$ ; 3 — при  $\tau_0 = 8$

информацию о величинах гидравлического удара, и эта величина относится к первой фазе удара при  $\tau \leq 2$ , поскольку максимумы напора возникают при  $\tau \leq 2$  при любом времени срабатывания затвора  $\tau_0$ .

В этой связи необходимо отметить, что совершенно противоположный вывод сделан в книге А. М. Емцева: «...напор перед затвором во время закрытия возрастает от фазы к фазе, стремясь к некоторому пределу  $\zeta_m$ » [10, с. 207]. Данный вывод сделан на основе попытки приспособить общее решение Даламбера волновых уравнений к описанию процесса развития гидравлического удара без постановки и выполнения краевых условий удара, а при их замене условиями свободного истечения жидкости через уменьшающееся отверстие в процессе его закрытия. Такая постановка задачи относится к случаю, когда затвор действует как удавка, обхватывающая трубу, и при затягивании которой проходное сечение трубы постепенно стягивается к нулю (в точку). В течение этого процесса поток испытывает не встречное прямое сопротивление, а осесимметричное обжатие. Поэтому, по-видимому, возник термин «непрямой удар» применительно к данному случаю. На резиновом шланге такое обжатие осуществить можно, а применительно к трубе А. М. Емцев иллюстрирует игольчатый клапан, который создает ситуацию, аналогичную обжатию. Игла находится в потоке, и в режиме стационарного истечения начало ее перемещения к выходному отверстию ударных эффектов не вызывает, и напор возрастает от фазы к фазе. Удар при этом возникнет, если игла быстро закрывает отверстие в течение первой фазы. Здесь же рассмотрена задача при более жестких краевых условиях удара (11), (13), соответствующих срабатыванию задвижки или заслонки с поворотным

устройством, какие, например, используются в шарикоулавливающем механизме системы шариковой очистки трубопроводов АЭС.

В порядке дополнительного пояснения полученных результатов можно отметить, что в целом процесс складывается из «действия», которое начинается с момента закрытия затвора и описывается функцией

$$\sigma_1 = \sigma(\xi, \tau), \quad 0 \leq \xi \leq 1, \quad 0 \leq \tau < \infty,$$

и «последствия», которое начинается с момента полного закрытия затвора  $\tau = \tau_0$  и описывается функцией

$$\sigma_2 = -\sigma(\xi, \tau - \tau_0), \quad 0 \leq \xi \leq 1, \quad \tau_0 \leq \tau < \infty.$$

Действие в процессе закрытия приводит к отражению ударной волны от тех частей затвора, которые вошли уже в поток и препятствуют его движению. Как видно из графиков рис. 9.19, «действие» приводит к возрастанию напора в первой фазе до первого максимума  $\sigma_1(\tau)$  при  $\tau = 2$ . Поэтому, если «последствие» начинается при  $\tau_0 > 2$ , то первый максимум напора возникает независимо от него при  $\tau = 2$ . Следовательно, «хвосты» этих графиков практического значения не имеют, поскольку они затухают из-за многих демпфирующих факторов, которые в уравнениях (8) не учтены. Незатухающий колебательный процесс здесь естественно возникает из-за того, что второе уравнение (8) такое же, как реологическое уравнение, соответствующее упругому телу, т. е. закон Гука, продифференцированный по времени. Если, например, во втором уравнении (8) учесть объемную релаксационную вязкость и вязкость упругого последствия, или первое уравнение записать с учетом вязкости, то дифференциальное уравнение (10) примет вид

$$\frac{\partial^2 H}{\partial x^2} - \frac{1}{a^2} \frac{\partial^2 H}{\partial t^2} - \frac{2\beta}{La} \frac{\partial H}{\partial t} = 0, \quad (28)$$

где  $\beta$  — некоторый коэффициент, физический смысл и величина которого зависят от того, какие из отмеченных выше факторов учтены при выводе данного уравнения. Решение этого уравнения при тех же начальных и граничных условиях получено таким же способом, оно имеет совершенно аналогичный вид и в формулах (17) несколько видоизменяется только выражение для функции  $\sigma(\xi, \tau)$ :

$$\sigma(\xi, \tau) = \frac{aV_0}{g\tau_0} \left( \xi - \frac{8}{\pi^2} e^{-\beta\tau} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{(2k-1)^2} \sin \alpha_k \xi (\cos \gamma_k \tau + \mu \sin \gamma_k \tau) \right), \quad (29)$$

$$\gamma_k = \sqrt{\alpha^2 - \beta^2}, \quad \mu = \beta/\gamma_k.$$

Данное решение получено при условии  $\beta < \pi/2$ , что вполне обеспечивает затухание колебательного процесса, если такие условия имеют место. В заключение следует отметить, что при  $\beta \ll 1$  данное решение отличается от решения (17) незначительно.

Аналогичный анализ полученного решения (18) для скорости представляет интерес на входе трубы при  $\xi = 0$ . Поэтому отметим, что ряд правой части функции  $\varepsilon(\xi, \tau)$  сходится при всех  $0 \leq \xi \leq 1$  и  $0 \leq \tau < \infty$ . Только суммировать его нужно отдельно для каждой полуфазы. Приведем результаты для первой фазы при  $\xi = 0$  (на входе трубы) и  $0 < \tau_0 \leq 2$ :

$$V = V_0 \quad \text{при} \quad 0 \leq \tau \leq 1 \quad \text{и} \quad V = V_0(1 + 2(1 - \tau)/\tau_0) \quad \text{при} \quad 1 \leq \tau \leq 2. \quad (30)$$

Далее продолжается переменный процесс втекания и обратного вытекания жидкости на входе трубы.

## 9.7. Задачи теплопроводности. Уравнения параболического типа

Постановка задач. Уравнение и граничные условия. Применение операционного метода к решению задач теплопроводности.

### 9.7.1. Постановка задач. Уравнение и граничные условия

Процессы теплопроводности протекают в пространстве и времени и характеризуются температурой в точках объема заданного тела. Температура в общем случае зависит от координат точек и от времени  $t$ . Если температура  $T = T(x, t)$  и зависит только от одной координаты  $x$  точек и времени  $t$ , то температурное поле называется одномерным.

В основу теории теплопроводности сплошных сред положен закон Фурье, согласно которому тепловой поток  $q$  (количество тепла через единицу площади за единицу времени) пропорционален градиенту функции распределения температуры  $T(x, y, z, t)$ :

$$\vec{q} = -\lambda \text{grad} T(x, y, z, t), \quad (1)$$

где  $\lambda$  — константа, называемая коэффициентом теплопроводности, а знак минус указывает на то, что тепло распространяется от более нагретых частей тела к менее нагретым.

Если выделить в рассматриваемом объеме тела некоторый малый объем  $\Delta V$ , ограниченный поверхностью  $\Delta S$ , и составить уравнение теплового баланса, приравняв тепловой поток через поверхность  $\Delta S$  за

время  $\Delta t$  количеству тепла, необходимому на приращения температуры  $T(x, y, z, t)$  на  $\Delta T(x, y, z, t)$  во всех точках выделенного объема  $\Delta V$ , то получим дифференциальное уравнение относительно функции температуры  $T(x, y, z, t)$ . Это уравнение называется уравнением теплопроводности. Если коэффициент теплопроводности постоянный, т. е. не зависит от температуры тела в точках, то в прямоугольной системе координат уравнение теплопроводности получится в следующем виде:

$$c\rho \frac{\partial T}{\partial t} = \lambda \left( \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} \right), \quad (2)$$

где  $c, \rho$  — удельная теплоемкость и плотность материала.

Поскольку по времени  $t$  в данное уравнение входит только первая производная, то в соответствии с данной выше классификацией уравнение теплопроводности является уравнением параболического типа.

Если в процессе теплообмена данного тела с другими телами, или с окружающей средой, устанавливается распределение температуры, которое далее не изменяется во времени, то в полученном уравнении (2) производная по времени равна нулю, и для определения температурного поля  $T(x, y, z)$  мы получим уравнение

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} = 0, \quad (3)$$

которое называется стационарным уравнением теплопроводности и относится к уравнениям эллиптического типа.

В данном разделе мы ограничимся решением нестационарных одномерных задач для плоского слоя или полого цилиндра, в которых функция температуры зависит от времени  $t$  и только от одной координаты  $x$  по толщине плоского или цилиндрического слоя. В этих случаях уравнение теплопроводности можно записать в виде

$$c\rho \frac{\partial T}{\partial t} = \lambda \left( \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{1}{R+x} \frac{\partial T}{\partial x} \right), \quad (4)$$

где  $R$  — радиус внутренней поверхности цилиндра, а  $x$  — координата по толщине стенки цилиндра с началом отсчета на внутренней поверхности.

В частном случае при  $R \rightarrow \infty$  из уравнения (4) получается уравнение для плоского слоя:

$$c\rho \frac{\partial T}{\partial t} = \lambda \frac{\partial^2 T}{\partial x^2}. \quad (5)$$

Для постановки краевых задач, связанных с определением температурного поля в плоском или цилиндрическом слое при заданных условиях теплообмена, необходимо задать одно начальное условие и два граничных условия на внутренней и внешней поверхностях слоя.

Начальное условие соответствует заданному распределению температуры по толщине слоя в начальный момент времени  $t = 0$ :

$$T(x, 0) = T_0 f(x). \quad (6)$$

Граничные условия соответствуют заданным условиям теплообмена на поверхностях данного слоя. При записи граничных условий для некоторых типичных случаев в теплофизике используется следующая терминология.

*Граничные условия первого рода* — когда на поверхности  $x = 0$  (или  $x = L$ ) задана температура

$$T(0, t) = T_0 \varphi(t), \quad T(L, t) = T_L \psi(t). \quad (7)$$

*Граничные условия второго рода* — когда на поверхности  $x = 0$  (или  $x = L$ ) задан тепловой поток

$$-\lambda \frac{\partial T(0, t)}{\partial x} = q_0(t), \quad \lambda \frac{\partial T(L, t)}{\partial x} = q_L(t). \quad (8)$$

где  $q_0$ ,  $q_L$  — внешние тепловые потоки, направленные по внутренней нормали к поверхности слоя (падающие тепловые потоки на поверхность слоя). Направление первого из них совпадает с направлением координатной оси  $x$ , а направление второго противоположно направлению оси  $x$ . Поэтому знаки в этих двух условиях разные.

В связи с этим следует отметить, что граничные условия (8) получаются как условия теплового баланса элементарного слоя толщины  $\Delta x$ , прилегающего к рассматриваемой поверхности  $x = 0$  или  $x = L$  при  $\Delta x \rightarrow 0$ .

*Граничные условия третьего рода* — когда на поверхности  $x = 0$  (или  $x = L$ ) заданы условия конвективного теплообмена с потоком газа или жидкости. При этом, по аналогии с законом Фурье, тепловой поток от газа (жидкости) на поверхность слоя считается пропорциональным разности температур газа (жидкости) и поверхности слоя. Коэффициент пропорциональности называется коэффициентом теплоотдачи. В данном случае понятнее воспринимается разница в знаках при записи условий теплообмена на поверхностях  $x = 0$  и  $x = L$ , если представить себе, что тепловой поток от горячего газа слева передается



через плоский слой к холодному потоку жидкости с правой стороны стенки (плоского слоя):

$$\begin{aligned} -\lambda \frac{\partial T(0, t)}{\partial x} &= h_w^{(1)}(T_c^{(1)}(t) - T(0, t)), \\ -\lambda \frac{\partial T(L, t)}{\partial x} &= h_w^{(2)}(T(L, t) - T_c^{(2)}(t)), \end{aligned} \quad (9)$$

где  $h_w^{(1)}, T_c^{(1)}(t), h_w^{(2)}, T_c^{(2)}(t)$  — заданные коэффициенты теплоотдачи и температуры внешних сред слева и справа.

### 9.7.2. Применение операционного метода к решению задач теплопроводности

Рассмотрим два примера расчета температурных полей, которые возникают в инженерной практике при исследовании термостойкости конструкционных материалов, таких как техническое стекло, ситалл, керамика и др. Опытным путем термостойкость определяется при испытаниях образцов в виде прямоугольных или круглых пластин, предварительно прогретых до температуры  $T_{\text{обр}} = T_0$ , путем их сбрасывания в воду с температурой  $T = T_g$  (рис. 9.20). Наибольшая разность температур  $\theta = (T_0 - T_g)$ , при которой образцы еще не разрушаются, называется термостойкостью.

Разрушение образцов при таком способе испытаний, и в элементах конструкций в аналогичных условиях, происходит потому, что при быстром охлаждении в поверхностном слое возникают большие напряжения, обусловленные упругим взаимодействием с горячими слоями. При этом напряжения  $\sigma(x, t)$  можно вычислить по простой расчетной формуле [23]

$$\sigma(x, t) = \frac{E}{1-\nu} (T_{\text{ср}}(t) - T(x, t)), \quad (10)$$

где  $E, \nu$  — модуль упругости и коэффициент Пуассона;  $T_{\text{ср}}$  — средняя температура по толщине пластины;  $T(x, t)$  — температуры в точках с координатами  $x$  по толщине.

Расчетная формула (10) простая, но для ее использования нужно знать температурные поля, которые очень быстро изменяются во

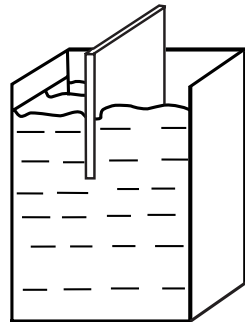


Рис. 9.20

времени. Достаточно сказать, что максимальные напряжения возникают в моменты времени  $t$  от 0,04 до 0,08 с.

Таким образом, необходимость расчета температурных напряжений в данном случае приводит к решению краевой задачи с дифференциальным уравнением (5) с начальным условием (6) при  $f(x) = 1$  и следующими граничными условиями:

$$\left. \frac{\partial T}{\partial x} \right|_{x=0} = 0, \quad \lambda \left. \frac{\partial T}{\partial x} \right|_{x=l} + h_w (T(l) - T_g) = 0. \quad (11)$$

При одинаковых условиях теплообмена на поверхностях пластины температурные поля симметричны относительно срединной плоскости пластины. Поэтому начало отсчета координаты  $x$  здесь помещено на срединную плоскость. Первое граничное условие соответствует симметрии решения относительно плоскости  $x = 0$ , а второе условие записано для правой поверхности  $x = l = L/2$  и соответствует конвективному теплообмену с водой.

Для исследования возможностей аналитического решения данной задачи рассмотрим два примера.

**Пример 1.** Сначала рассмотрим случай, когда теплообмен достаточно эффективный и во втором граничном условии (11) можно пренебречь первым слагаемым. Тогда граничные условия примут вид

$$\left. \frac{\partial T}{\partial x} \right|_{x=0} = 0, \quad (T(l) - T_g) = 0. \quad (12)$$

Из аналитических методов решения задач теплопроводности наиболее эффективным является операционный метод с применением интегрального преобразования Лапласа, согласно которому функция (оригинал и изображение) связаны соотношениями:

$$T(x, t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\alpha - i\infty}^{\alpha + i\infty} \psi(p, x) e^{pt} dp, \quad \psi(x, p) = \int_0^\infty T(x, t) e^{-pt} dt.$$

Поэтому умножаем дифференциальное уравнение и граничные условия на экспоненту  $e^{-pt}$ , проинтегрируем с учетом начального условия, и в результате получаем уравнение и граничные условия для функции-изображения:

$$\begin{aligned} \lambda \psi''(x, p) &= c\rho(p\psi(x, p) - T_0), \\ \psi'(0) &= 0, \quad \psi(l) - \frac{1}{p} T_g = 0. \end{aligned}$$

Общее решение запишем в виде

$$\psi(x, p) = A_1 \operatorname{sh} \beta x + A_2 \operatorname{ch} \beta x + \frac{1}{p} T_0, \quad \beta = \sqrt{\frac{c\rho}{\lambda}} p.$$

Из первого граничного условия  $A_1 = 0$ . Из второго находим  $A_2$

$$A_2 \operatorname{ch} \beta l - \frac{1}{p} (T_g - T_0) = 0, \quad \rightarrow \quad A_2 = \frac{(T_g - T_0)}{p \operatorname{ch} \beta l}.$$

и записываем решение для функции  $\psi(x, p)$ :

$$\psi(x, p) = \frac{T_g - T_0}{p \operatorname{ch} \beta l} \operatorname{ch} \beta x + \frac{1}{p} T_0.$$

Решение для функции температур получается теперь в результате вычисления интеграла, который равен сумме вычетов. Выделяя вычет в нулевой точке, запишем искомый результат в виде

$$T(x, t) = T_g + \sum_{k=1}^{\infty} \operatorname{res} \left[ \frac{(T_g - T_0) e^{p^2 t}}{p \operatorname{ch} \beta l} \operatorname{ch} \beta x \right].$$

Для вычисления оставшихся вычетов необходимо теперь определить нули косинуса гиперболического, который при чисто мнимых значениях  $\beta = i\mu$  преобразуется в косинус тригонометрический, и мы получаем простое уравнение

$$\cos \mu l = 0, \quad \Rightarrow \quad \mu_k = \frac{(2k-1)\pi}{2l}, \quad k = 1, 2, 3, \dots$$

Потребуется еще

$$\sqrt{\frac{c\rho p}{\lambda}} = i\mu \quad \Rightarrow \quad p_k = -\frac{\lambda}{c\rho} \mu_k^2,$$

$$p_k l \beta' = i(2k-1) \frac{\pi}{4}, \quad \operatorname{sh} \beta_k l = i \sin \frac{(2k-1)\pi}{2} = (-1)^{n+1} i.$$

Теперь можно записать выражение для температуры:

$$T(x, t) = T_g + \sum_{k=1}^{\infty} \left[ \frac{(T_g - T_0) e^{p_k^2 t}}{p_k \operatorname{sh} \beta_k l \cdot l \beta'(p_k)} \operatorname{ch} \beta_k x \right],$$

и преобразовать его, подставив выражения для найденных точек  $p_k$ :

$$T(x, t) = T_g - (T_g - T_0) \frac{4}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{(2k-1)} \cos \mu_k x e^{-\mu_k^2 a t},$$

$$\mu_k = \frac{(2k-1)\pi}{2l}, \quad a = \frac{\lambda}{c\rho}.$$

Легко проверить, что граничные условия выполняются. Выполняется также и начальное условие при  $t = 0$ , поскольку легко убедиться, что

$$\frac{4}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{(2k-1)} \cos \frac{(2k-1)\pi x}{2l} = 1, \quad -l \leq x \leq l.$$

**Пример 2.** Рассмотрим теперь решение задачи с исходными граничными условиями (11) поставленной задачи с произвольным конвективным теплообменом на поверхностях. Из первого граничного условия здесь также  $A_1 = 0$ , а из второго —

$$A_2 = \frac{h_w(T_g - T_0)}{p(\lambda\beta \operatorname{sh}\beta l + h_w \operatorname{ch}\beta l)}$$

и решение для функции  $\psi(x, p)$  принимает вид

$$\psi(x, p) = \frac{h_w(T_g - T_0)}{p(\lambda\beta \operatorname{sh}\beta l + h_w \operatorname{ch}\beta l)} \operatorname{ch}\beta x + \frac{1}{p} T_0.$$

Переходя к записи выражения для температуры в виде суммы всех вычетов в особых точках полученного изображения, выделим вычет в нулевой точке и запишем искомый результат в виде

$$T(x, t) = T_g + \sum_{k=1}^{\infty} \operatorname{res} \left[ \frac{h_w(T_g - T_0)e^{pt}}{p(\lambda\beta \operatorname{sh}\beta l + h_w \operatorname{ch}\beta l)} \operatorname{ch}\beta x \right].$$

Для вычисления оставшихся вычетов необходимо определить корни выражения в круглых скобках знаменателя:

$$\lambda\beta \operatorname{sh}\beta l + h_w \operatorname{ch}\beta l = 0, \quad \beta = \sqrt{\frac{c\rho p}{\lambda}}.$$

Полученное уравнение тоже имеет множество решений вида  $\beta = i\mu$ . Для мнимых значений  $\beta$  полученное уравнение можно преобразовать к виду

$$\mu l \sin \mu l - \frac{h_w l}{\lambda} \cos \mu l = 0, \quad (13)$$

или

$$\operatorname{tg} \mu l = \frac{h_w l}{\lambda} \frac{1}{\mu l}. \quad (14)$$

В уравнении (14) слева тангенс, а справа гипербола. Все ветви тангенса пересекают гиперболу, и мы имеем счетное множество корней  $\mu_k$  и можем получить выражение для искомого решения в виде ряда. Но полученное решение неудобно для практического использования и является достаточно убедительным свидетельством того, что актуальность

аналитических методов решения подобного рода задач ушла в прошлое. При наличии современной компьютерной техники можно перейти к непосредственному вычислению температурных полей при заданном дифференциальном уравнении и заданных начальном и граничных условиях.

### **9.8. Расчет нестационарных одномерных температурных полей методом прогонки**

Решение дифференциального уравнения второго порядка с переменными коэффициентами и произвольными граничными условиями методом прогонки. Алгоритм расчета температурных полей. Фортран-программа решения краевой задачи с дифференциальным уравнением 2-го порядка.

В данном разделе мы представим возможности решать нестационарные задачи теплопроводности при произвольных граничных и начальном условиях конечно-разностным методом прогонки.

Изложение материала представлено как задание и методические указания к выполнению курсовой работы с применением Фортрана по расчету температурных полей в заданном окружном сечении оболочки вращения, находящейся в условиях аэродинамического потока, при заданных переменных во времени условиях теплообмена и заданном начальном распределении температуры по толщине стенки.

В частном случае прямолинейной образующей, оболочка вращения является полым цилиндром, а если радиусы кривизны велики по сравнению с ее толщиной, то это будет пластина.

При разработке Фортран-программы предусмотреть ввод исходных данных (к начальному условию при заданном распределении температуры по толщине стенки и к условиям теплообмена на поверхностях) из внешних файлов, заданных в электронном виде.

#### ***9.8.1. Решение дифференциального уравнения второго порядка с переменными коэффициентами и произвольными граничными условиями методом прогонки***

Для выполнения курсовой работы по расчету температурных полей в оболочке вращения необходимо: на первом этапе разработать алгоритмы и Фортран-программу решения краевой задачи с обыкновен-

ным дифференциальным уравнением второго порядка с переменными коэффициентами

$$\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} + b(x) \frac{\partial y}{\partial x} - c(x)y = f(x), \quad (1)$$

с заданными функциями  $b$ ,  $c$ ,  $f$  и заданными граничными условиями на заданном отрезке  $[0, l]$ :

$$\begin{aligned} \alpha_1 y'(0) + \beta_1 y(0) &= \gamma_1, \\ \alpha_2 y'(l) + \beta_2 y(l) &= \gamma_2, \end{aligned} \quad (2)$$

где  $\alpha_i$ ,  $\beta_i$ ,  $\gamma_i$  — заданные числа, соответствующие условиям данной конкретной задачи. В разных частных случаях они имеют определенный физический смысл.

В этой связи представим здесь основные предпосылки и суть конечно-разностного метода прогонки, на основе которого нужно выполнить данную работу.

При использовании метода конечных разностей решения дифференциальных краевых задач, поиск функции  $y(x)$  *заменяется* вычислением последовательности ее значений в заданных точках с координатами

$$x_1 = 0, \quad x_2, \quad x_3, \dots, \quad x_{N-1}, \quad x_N = l$$

и постоянным шагом между ними  $dx = l/(N-1)$ . Условие выполнения дифференциального уравнения во всех точках заданного отрезка  $[0, l]$  заменяется требованием его выполнения во всех внутренних точках с координатами  $x_2, x_3, \dots, x_{N-1}$ , а на концах отрезка  $x_1 = 0$  и  $x_N = l$  должны выполняться граничные условия.

При записи дифференциального уравнения во внутренних узловых точках производные заменяются конечными разностями. При замене первых и вторых производных центральными разностями получаем  $(N-2)$  алгебраических уравнений:

$$\begin{aligned} \frac{y_{k-1} - 2y_k + y_{k+1}}{dx^2} + b(x_k) \frac{y_{k+1} - y_{k-1}}{2dx} - c(x_k)y_k &= f(x_k), \\ y_k &= y(x_k), \quad k = 2, 3, 4, \dots, N-1. \end{aligned} \quad (3)$$

После преобразований внутренних конечно-разностных уравнений получаем систему  $(N-2)$  алгебраических уравнений с  $N$  неизвестными  $y_1, y_2, y_3, \dots, y_{N-1}, y_N$ :

$$A_k y_{k-1} - B_k y_k + C_k y_{k+1} = d_k, \quad k = 2, 3, 4, \dots, N-1, \quad (4)$$

где для коэффициентов этих уравнений получены следующие выражения

$$\begin{aligned} A_k &= 1 - b_k dx/2, & C_k &= 1 + b_k dx/2, \\ B_k &= 2 + c_k dx^2, & d_k &= f(x_k) dx^2, \\ k &= 2, 3, 4, \dots, N-1. \end{aligned} \quad (5)$$

### *Аппроксимация граничных условий*

Граничные условия сдвигаем на полшага от концов заданного отрезка изменения переменной  $x$ :

$$\begin{aligned} \alpha_1 y'(x_{1/2}) + \beta_1 y(x_{1/2}) &= \gamma_1, \\ \alpha_2 y'(x_{N+1/2}) + \beta_2 y(x_{N+1/2}) &= \gamma_2. \end{aligned}$$

В конечных разностях:

$$\alpha_1 \frac{Y_2 - Y_1}{\Delta x} + \beta_1 \frac{Y_1 + Y_2}{2} = \gamma_1, \quad \alpha_2 \frac{Y_N - Y_{N-1}}{\Delta x} + \beta_2 \frac{Y_{N-1} + Y_N}{2} = \gamma_2.$$

В результате получим

$$\begin{aligned} Y_1 &= -\frac{\text{Beta}1/2 + \text{Alfa}1/\Delta x}{\text{Beta}1/2 - \text{Alfa}1/\Delta x} Y_2 + \frac{\text{Gama}1}{\text{Beta}1/2 - \text{Alfa}1/\Delta x}, \\ Y_{N-1} &= -\frac{\text{Beta}2/2 + \text{Alfa}2/\Delta x}{\text{Beta}2/2 - \text{Alfa}2/\Delta x} Y_N + \frac{\text{Gama}2}{\text{Beta}2/2 - \text{Alfa}2/\Delta x}. \end{aligned} \quad (6)$$

Таким образом, первое граничное условие позволяет выразить  $Y_1$  через  $Y_2$ :

$$Y_1 = P_1 Y_2 + q_1,$$

где

$$P_1 = -\frac{\text{Beta}1/2 + \text{Alfa}1/\Delta x}{\text{Beta}1/2 - \text{Alfa}1/\Delta x}, \quad q_1 = \frac{\text{Gama}1}{\text{Beta}1/2 - \text{Alfa}1/\Delta x}. \quad (7)$$

С помощью первого граничного условия можно преобразовать все внутренние уравнения к такому же двухчленному виду:

$$y_{k-1} = P_{k-1} y_k + q_{k-1}, \quad k = 2, 3, \dots, N. \quad (8)$$

Коэффициенты этих уравнений получили название прогоночных коэффициентов, поскольку для них получаются рекуррентные соотношения

$$P_k = \frac{C_k}{B_k - A_k P_{k-1}}, \quad q_k = \frac{d_k - A_k q_{k-1}}{B_k - A_k P_{k-1}}, \quad k = 2, 3, \dots, N. \quad (9)$$

и вычислять их нужно последовательно в цикле от второго до последнего.

Осталось неиспользованным пока второе граничное условие

$$Y_{N-1} = P_b Y_N + q_b,$$

$$P_b = -\frac{\text{Beta}2/2 + \text{Alfa}2/\Delta x}{\text{Beta}2/2 - \text{Alfa}2/\Delta x}, \quad q_b = \frac{\text{Gama}2}{\text{Beta}2/2 - \text{Alfa}2/\Delta x}.$$

После выполнения прямой прогонки подставляем в левую часть второго граничного условия полученное последнее соотношение:

$$Y_{N-1} = P_{N-1} Y_N + q_{N-1}$$

и определяем  $Y_N$ :

$$P_{N-1} Y_N + q_{N-1} = P_b Y_N + q_b, \Rightarrow Y_N = \frac{q_b - q_{N-1}}{P_{N-1} - P_b}.$$

Теперь в цикле обратной прогонки по формуле (8) вычисляем искомую функцию во всех узловых точках.

### 9.8.2. Алгоритм расчета температурных полей

Дифференциальное уравнение теплопроводности, которое используется для расчета распределения температуры по толщине стенки оболочки вращения, имеет вид

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{1}{R_2 + x} \frac{\partial T}{\partial x} = \frac{1}{a} \frac{\partial T}{\partial t}, \quad a = \frac{\lambda}{(c\rho)}, \quad (10)$$

где  $R_2$  — радиус кривизны данного окружного сечения;  $c$  — *теплоемкость материала на единицу массы*;  $(c\rho)$  — *теплоемкость на единицу объема*;  $x$  — координата по толщине оболочки в данном окружном сечении. Причем  $x=0$  на внутренней поверхности оболочки,  $0 \leq x \leq h$ ,  $h$  — толщина оболочки.

После записи производной по времени в конечных разностях

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \frac{T^{n+1} - T^n}{\Delta t}, \quad T^n = T(x, t_n), \\ t_{n+1} = t_n + \Delta t, \quad n = 1, 2, 3, \dots$$



уравнение (10) по аналогии с уравнением (1) можно представить в виде

$$\frac{d^2 T^{n+1}}{dx^2} + b_k(x) \frac{dT^{n+1}}{dx} - c_k(x) T^{n+1} = f_k(x), \quad (11)$$

$$b_k(x) = \frac{1}{R_2 + x}, \quad c_k(x) = \frac{1}{a\Delta t}, \quad f_k(x) = \frac{-1}{a\Delta t} T^n(x).$$

Здесь введенные ранее обозначения коэффициентов уравнения (1)  $b, c, f$  заменены на  $b_k, c_k, f_k$ , чтобы не было путаницы с коэффициентом теплоемкости  $c$ .

Решать данное уравнение нужно последовательно в цикле по времени с шагом  $\Delta t$  от  $t = \Delta t$  до заданного  $t = \text{TauEnd}$ . При  $t = 0$  температуры нам известны, они заданы начальным условием.

Перед началом цикла по времени в массив температур во всех узловых точках по координате  $x = x_k, k = 1, 2, 3, \dots, N$  нужно заслать начальное температурное поле, заданное как одномерный массив  $T0(K)$ :

DO K = 1,N

Tk(K) = T0(K) ! Начальное условие

Enddo

Или с помощью одного оператора: Tk = T0.

В начале цикла по времени после оператора

DO tau = dt, TauEnd, dt

необходимо вычислить коэффициенты граничных условий  $\alpha_i, \beta_i, \gamma_i$ , соответствующие заданным условиям теплообмена данной конкретной задачи. Граничные условия во всех вариантах заданий можно представить в следующем виде.

**На внутренней поверхности:**

$$g_0 G_{11} + h_w^{(1)} (T_w^{(1)}(t) - T(0, t)) G_{12} + \lambda \frac{dT}{dx} G_{13} = c\rho \frac{\Delta x}{2} \frac{T(0, t) - T(0, t - \Delta t)}{\Delta t} G_{14}, \quad (12)$$

$$T(0, t) = T_1^{n+1}, \quad T_1(t - \Delta t) = T_1^n = T_l, \quad T_w^{(1)}(t) = T_w^{(1)}(t_{n+1}), \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

$$T_k^0 = T(r_k, 0) = T^0 \Rightarrow \text{заданная начальная температура,}$$

$$T_k^{n+1} = T(x_k, t_{n+1}), \quad k = 1, 2, 3, \dots, N-1, N,$$

где  $k$  — номер точки по координате  $x$ ,  $n$  — номер шага по времени, в программу расчета он нигде не входит;  $G_{11}, G_{12}, G_{13}, G_{14}$  — коэффициенты, соответствующие данному варианту заданий.

Сравнивая граничные условия (12) и (2), видим, что в (12)

$$\alpha_1 = \text{Alfa1} = \lambda G_{13}; \quad \text{Beta1} = -h_w^{(1)} G_{12} - c\rho \frac{\Delta x}{2\Delta t} G_{14};$$

$$\text{Gama1} = -q_1 G_{11} - h_w^{(1)} T_w^{(1)}(t) G_{12} - c\rho \frac{\Delta x}{2\Delta t} T_1 G_{14}.$$

Здесь  $T_1$  — значение температуры на границе на предыдущем шаге по времени.

**На внешней поверхности:**

$$\begin{aligned} g_L G_{21} + h_w^{(2)} (T_w^{(2)}(t) - T_{N+1}(t)) G_{22} - \lambda \left( \frac{T_{N+1}(t) - T_N(t)}{\Delta r} \right) G_{23} = \\ = c\rho \frac{\Delta r}{2} \frac{T_{N+1}(t) - T_{N+1}(t - \Delta t)}{\Delta t} G_{24}. \end{aligned}$$

Поэтому здесь

$$\text{Alfa2} = -\lambda G_{23}; \quad \text{Beta2} = -h_w^{(2)} G_{22} - c\rho \frac{\Delta x}{2\Delta t} G_{24};$$

$$\text{Gama2} = -q_2 G_{21} - h_w^{(2)} T_w^{(2)}(t) G_{22} - c\rho \frac{\Delta x}{2\Delta t} T_{N+1} G_{24}.$$

Таким образом, расчет температурных полей сводится к последовательному решению шаг за шагом по времени обыкновенного дифференциального уравнения второго порядка. На каждом шаге по времени результатом расчета является массив температур в узловых точках. В цикле по времени нужно предусмотреть запись результатов во внешний файл для последующего использования не с шагом интегрирования  $dt$ , а с некоторым другим шагом  $dtp$ , при котором достаточно будет информации об изменении температурных полей во времени.

### 9.8.3. Фортран-программа решения краевой задачи с дифференциальным уравнением 2-го порядка

Представленную ниже Фортран-программу решения обыкновенного дифференциального уравнения второго порядка с произвольными коэффициентами и произвольными граничными условиями при незначительных изменениях можно включить в качестве подпрограммы в программу расчета температурных полей.

```

PROGRAM difur

! Differential equation:  $d^2Y+b(x)dY-c(x)Y=f(x)$ 
! Boundary conditions:  $\text{Alfa1}*Y'(0)+\text{Beta1}*Y=\text{Gama1}$ 
!  $\text{Alfa2}*Y'(l)+\text{Beta2}*Y=\text{Gama2}$ 
ALLOCATABLE P(:),q(:),Xk(:),Yk(:)

OPEN(11,FILE='ZADANO.txt')
OPEN(12,FILE='RESULT_Y.txt')
READ(11,*)N,eL,Alfa1,Beta1,Gama1,Alfa2,Beta2,Gama2
WRITE(*,'(2x,A,I5, 2x,A,F4.0,/, &
      2x,A,F4.0, 2x,A,F4.0, 2x,A,F4.0,/, &
      2x,A,F4.0,2x,A,F4.0,2x,A,F4.0)')&
  'N=',N,'eL=',eL,
  'Alfa1=',Alfa1,'Beta1=',Beta1,'Gama1=',Gama1,&
  'Alfa2=',Alfa2,'Beta2=',Beta2,'Gama2=',Gama2
WRITE(12,'(2x,A,I5, 2x,A,F4.0,/, &
      2x,A,F4.0, 2x,A,F4.0, 2x,A,F4.0,/, &
      2x,A,F4.0,2x,A,F4.0,2x,A,F4.0)')&
  'N=',N,'eL=',eL,
  'Alfa1=',Alfa1,'Beta1=',Beta1,'Gama1=',Gama1,&
  'Alfa2=',Alfa2,'Beta2=',Beta2,'Gama2=',Gama2
ALLOCATE (P(N),q(N),Xk(N),Yk(N))

dx=eL/(N-1); P(1)=- (Beta1/2.+Alfa1/dx)/(Beta1/2.-Alfa1/dx)
q(1)=Gama1/(Beta1/2.+Alfa1/dx); Xk(1)=0.

DO K=2,N-1
  Xk(K)=Xk(K-1)+dx; x=Xk(K)
  Ak=1.-b(x)*DX/2.; Ck=1+b(x)*DX/2.; Bk=2.+c(x)*DX**2; dk=f(x)*DX**2
  P(K)=Ck/(Bk-Ak*P(K-1)); q(K)=(Ak*q(K-1)-dk)/(Bk-Ak*P(K-1))
ENDDO
Pb=- (Beta2/2.+Alfa2/dx)/(Beta2/2.-Alfa2/dx)
qb=Gama2/(Beta2/2.-Alfa2/dx)
Xk(N)=eL; Yk(N)=(qb-q(N-1))/(P(N-1)-Pb)
DO K=1,N-1
  Yk(N-K)=P(N-K)*Yk(N-K+1)+q(N-K)
enddo

m=(N-1)/10
DO K=1,11
write(*,'(2x,A,F6.2,3x,A,F6.2)')&
  'x=',Xk(1+m*(K-1)), 'y=',Yk(1+m*(K-1))
CALL sleepqq(1000)
Enddo

```

```
write(12,'(2x,A,F6.2,3x,A,F6.2)')&
  (('x=',Xk(1+m*(K-1)), 'y=',Yk(1+m*(K-1))),K=1,11)
  WRITE(*,*) ' PROGRAM difur is terminated!!! OK!'
  PAUSE
Stop
end Program difur
  FUNCTION b(x)
b=sinh(x)/x
  RETURN
  End FUNCTION b
! *****
  FUNCTION c(x)
c=cosh(x)
  RETURN
  End FUNCTION c
! *****
  FUNCTION f(x)
f=-Exp(-x)
  RETURN
  End FUNCTION f
```

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

---

1. *Александрова П. С.* Аналитическая геометрия и линейная алгебра: в 2 ч. М.: Наука, 1975.
2. *Арнольд В. И.* Обыкновенные дифференциальные уравнения. М.: Наука, 1975.
3. *Беклемишев Д. В.* Курс аналитической геометрии и линейной алгебры. М.: Наука, 1987.
4. *Бугров Я. С., Никольский С. М.* Элементы линейной алгебры и аналитической геометрии. М.: Наука, 1980.
5. *Бугров Я. С., Никольский С. М.* Дифференциальное и интегральное исчисление. М.: Наука, 1980.
6. *Владимиров В. С.* Уравнения математической физики. М.: Наука, 1981.
7. *Годунов С. К.* Уравнения математической физики. М.: Наука, 1971.
8. *Данко П. Е., Попов А. Г., Кожевникова Т. Я.* Высшая математика в упражнениях и задачах. М.: Высшая школа, 1986.
9. *Демидович Б. П.* Лекции по математической теории устойчивости. М.: Наука, 1967.
10. *Емцев А. М.* Техническая гидромеханика. М.: Машиностроение, 1987. С. 439.
11. *Зорич В. А.* Математический анализ: в 2 ч. М.: НЦНМО, 2001.
12. *Ильин В. А., Поздняк Э. Г.* Аналитическая геометрия. М.: Наука, 1971.
13. *Ильин В. А., Поздняк Э. Г.* Линейная алгебра. — М.: Наука, 1971.
14. *Игнатьева А. В., Краснощекова Т. И., Смирнов В. Ф.* Курс высшей математики. М.: Высшая школа, 1968.
15. *Курош А. Г.* Курс высшей алгебры. М.: Наука, 1968.
16. *Кострикин А. И., Манин Ю. И.* Линейная алгебра и аналитическая геометрия. М.: Изд-во МГУ, 1980.
17. *Кудрявцев Л. Д.* Математический анализ. М.: Высшая школа, 1980.
18. *Кудрявцев В. А., Демидович Б. П.* Курс высшей математики. М.: Наука, 1989.
19. *Лаврентьев М. А., Шабат Б. В.* Методы теории функций комплексного переменного. М.: Гос. изд-во физ.-мат. лит., 1958. С. 473
20. *Липовцев Ю. В.* Гидравлический удар в трубах // Изв. вузов. Ядерная энергетика. 1998. № 2. С. 29—35.
21. *Липовцев Ю. В.* К устойчивости упругих и вязко-упругих оболочек при наличии локальных напряжений // Инж. ж. МТТ. 1968. № 6. С. 174—178.
22. *Липовцев Ю. В.* Разностный метод решения задач устойчивости оболочек вращения // Теория пластин и оболочек. М.: Наука, 1971. С. 166—172.

23. *Липовцев Ю. В.* Расчет на прочность оболочек вращения. Температурные напряжения. Обнинск: ИАТЭ, 2002.
24. *Липовцев Ю. В.* Постановка и алгоритмы решения нестационарных осесимметричных краевых задач термоупругости для оболочек вращения // Прикладная математика и механика. 2003. Т. 67. № 6. С. 954–964.
25. *Липовцев Ю. В., Третьякова О. Н.* Вычислительная математика в примерах и задачах механики: учеб. пособие. Обнинск: ИАТЭ, 1989.
26. *Липовцев Ю. В., Третьякова О. Н.* Конечно-разностное решение одномерной нестационарной задачи радиационно-кондуктивного теплообмена // Инж.-физ. ж. 1986. Т. 51. № 5. С. 840–847.
27. *Липовцев Ю. В., Третьякова О. Н.* Механика для инженеров. М.: Вузовская книга, 2005.
28. *Матвеев Н. М.* Методы интегрирования обыкновенных дифференциальных уравнений. Л.: Изд-во ЛГУ, 1955.
29. *Михайлов В. П.* Дифференциальные уравнения в частных производных. М.: Наука, 1976.
30. *Петровский И. Г.* Лекции по теории обыкновенных дифференциальных уравнений. М.: Наука, 1970.
31. *Петровский И. Г.* Лекции об уравнениях в частных производных. М.: Физматгиз, 1961.
32. *Пискунов Н. С.* Дифференциальное и интегральное исчисление: в 2 т. М.: Физматгиз, 1972 (т. 1); 1978 (т. 2).
33. *Понтрягин Л. С.* Обыкновенные дифференциальные уравнения. М.: Наука, 1974.
34. *Рихтмайер Р.* Принципы современной математической физики. М.: Мир, т. 1, 1982; т. 2, 1984.
35. *Романовский П. И.* Ряды Фурье. Теория поля. Аналитические и специальные функции. Преобразования Лапласа. М.: Наука, 1973.
36. Тепло- и массообмен. Теплотехнический эксперимент: справочник / под общей ред. В. А. Григорьева и В. М. Зорина. М.: Энергоиздат, 1982.
37. *Тихонов А. Н., Васильева А. Б., Свешников А. Г.* Обыкновенные дифференциальные уравнения. М.: Наука, 1979.
38. *Тихонов А. Н., Самарский А. А.* Уравнения математической физики. М.: Наука, 1977.
39. *Федосьев В. И.* Избранные задачи и вопросы по сопротивлению материалов. М.: Гостехиздат, 1953. С. 165
40. *Фихтенгольц Г. М.* Курс дифференциального и интегрального исчисления: в 3 т. М.: Наука, 1969.
41. *Щипачев В. С.* Основы высшей математики. М.: Высшая школа, 2001.

## ОГЛАВЛЕНИЕ

---

---

Предисловие . . . . .	3
<b>Глава 1. Элементы линейной алгебры и аналитической геометрии . . . . .</b>	<b>5</b>
1.1. Векторы на плоскости и в пространстве . . . . .	5
1.1.1. Определение свободного вектора . . . . .	5
1.1.2. Алгебраические операции над векторами . . . . .	6
1.1.3. Разложение вектора по базису . . . . .	7
1.1.4. Система координат на плоскости и в пространстве . . . . .	8
1.2. Линейные пространства . . . . .	9
1.2.1. Определение и примеры линейных пространств . . . . .	9
1.2.2. Понятие и свойства линейной зависимости векторов . . . . .	11
1.2.3. Размерность и базис. Разложение вектора по базису . . . . .	12
1.3. Евклидовы пространства . . . . .	14
1.3.1. Скалярное произведение в линейном пространстве. Длина вектора. Угол между векторами . . . . .	14
1.3.2. Ортонормированный базис . . . . .	15
1.3.3. Скалярное произведение в $L^2$ . . . . .	17
1.4. Векторное и смешанное произведение . . . . .	18
1.4.1. Определение и свойства векторного произведения . . . . .	18
1.4.2. Приложения векторного произведения . . . . .	20
1.4.3. Определение и свойства смешанного произведения . . . . .	20
1.4.4. Приложения смешанного произведения . . . . .	21
1.5. Прямая и гиперплоскость . . . . .	22
1.5.1. Прямая в $R^n$ . . . . .	22
1.5.2. Гиперплоскость в $R^n$ . . . . .	24
1.5.3. Взаимное расположение прямой и гиперплоскости . . . . .	26
1.5.4. Расстояние от точки до гиперплоскости . . . . .	27
1.6. Матрицы и операции над ними . . . . .	28
1.6.1. Основные определения . . . . .	28
1.6.2. Операции над матрицами . . . . .	29
1.6.3. Определитель квадратной матрицы . . . . .	30
1.6.4. Обратная матрица . . . . .	32
1.7. Решение систем линейных уравнений. Основные понятия . . . . .	33
1.7.1. Основные понятия . . . . .	34
1.7.2. Структура общего решения линейной системы . . . . .	35
1.7.3. Правило Крамера решения линейной системы . . . . .	36
1.7.4. Матричный метод . . . . .	37
1.8. Решение линейных систем . . . . .	38
1.8.1. Метод Гаусса практического решения систем линейных уравнений . . . . .	38
1.8.2. Ранг матрицы . . . . .	40
1.8.3. Теорема Кронекера – Капелли . . . . .	41

1.9. Линейные операторы . . . . .	43
1.9.1. Определение и примеры линейных операторов . . . . .	43
1.9.2. Матрица линейного оператора . . . . .	45
1.9.3. Самонапряженный оператор . . . . .	47
1.9.4. Действия над операторами . . . . .	47
1.10. Собственные векторы и собственные значения линейного оператора . . . . .	49
1.10.1. Собственные векторы и собственные значения линейного оператора . . . . .	49
1.10.2. Условие диагональности линейного оператора . . . . .	51
1.11. Кривые и поверхности второго порядка . . . . .	53
1.11.1. Кривые второго порядка . . . . .	53
1.11.2. Поверхности второго порядка . . . . .	56
1.12. Классификация кривых и поверхностей второго порядка . . . . .	59
1.12.1. Классификация кривых второго порядка . . . . .	59
1.12.2. Классификация поверхностей второго порядка . . . . .	63
<b>Глава 2. Дифференциальное исчисление функций одной переменной . . . . .</b>	<b>64</b>
2.1. Введение в математический анализ . . . . .	64
2.1.1. Множества вещественных чисел . . . . .	64
2.1.2. Понятие предела числовой последовательности . . . . .	66
2.1.3. Арифметические действия с последовательностями, имеющими предел . . . . .	67
2.2. Числовые последовательности . . . . .	68
2.2.1. О неопределенностях . . . . .	68
2.2.2. Монотонные последовательности. Определение . . . . .	69
2.2.3. Число $e$ . . . . .	70
2.2.4. Верхние и нижние грани множеств . . . . .	71
2.2.5. Теорема Больцано — Вейерштрасса . . . . .	72
2.3. Функции. Предел функции . . . . .	72
2.4. Непрерывность функции . . . . .	75
2.4.1. Определения непрерывности функции . . . . .	75
2.4.2. Первый замечательный предел . . . . .	77
2.4.3. Второй замечательный предел . . . . .	77
2.5. Бесконечно малые и бесконечно большие функции . . . . .	78
2.5.1. Бесконечно малые функции и их свойства . . . . .	78
2.5.2. Теоремы о пределах функций . . . . .	80
2.5.3. Бесконечно большие функции . . . . .	82
2.6. Сравнение бесконечно малых . . . . .	83
2.6.1. Сравнение бесконечно малых . . . . .	83
2.6.2. Свойства функций, непрерывных в точке . . . . .	84
2.6.3. Классификация точек разрыва . . . . .	85
2.6.4. Свойства функций, непрерывных на отрезке . . . . .	86
2.7. Введение в дифференциальное исчисление функций одной переменной. Производная . . . . .	87
2.7.1. Производная . . . . .	87
2.7.2. Механический смысл производной . . . . .	89
2.7.3. Дифференцируемость . . . . .	89



2.7.4. Производные элементарных функций . . . . .	90
2.8. Производные сложных, обратных, логарифмических функций . . .	92
2.8.1. Производная сложной функции . . . . .	92
2.8.2. Обратная функция . . . . .	93
2.8.3. Производные элементарных функций . . . . .	94
2.8.4. Дифференцирование степенно-показательных выражений . .	95
2.9. Дифференциал . . . . .	95
2.9.1. Дифференциал функции . . . . .	95
2.9.2. Связь между существованием производной и существованием дифференциала функции . . . . .	96
2.9.3. Свойства дифференциала . . . . .	97
2.9.4. Дифференциал сложной функции . . . . .	97
2.9.5. Геометрический смысл дифференциала . . . . .	98
2.9.6. Производные и дифференциалы высших порядков . . . . .	98
2.9.7. Дифференцирование параметрически заданных функций . .	100
2.10. Некоторые теоремы Ролля, Лагранжа, Коши о дифференцируемых функциях . . . . .	100
2.10.1. Теорема Ролля о нулях . . . . .	100
2.10.2. Теорема Лагранжа о конечных приращениях . . . . .	102
2.10.3. Теорема Коши об отношении приращений двух функций . .	103
2.11. Раскрытие неопределенностей . . . . .	104
2.11.1. Правило Лопиталя . . . . .	104
2.11.2. Раскрытие неопределенностей вида $\left(\frac{\infty}{\infty}\right)$ . . . . .	105
2.11.3. Раскрытие неопределенностей вида $(0 \cdot \infty)$ и $(\infty - \infty)$ . . . . .	106
2.11.4. Раскрытие неопределенностей вида $(0^0)$ , $(\infty^0)$ , $(1^\infty)$ . . . . .	107
2.12. Формула Тейлора и ее приложения . . . . .	108
2.12.1. Формула Тейлора . . . . .	108
2.12.2. Применение формулы Тейлора к вычислению значений функции . . . . .	110
2.12.3. Разложение функций по формуле Тейлора . . . . .	111
2.13. Исследование функций с помощью производных. Возрастание и убывание функций. Исследование функций на экстремум . . . .	113
2.13.1. Условия возрастания и убывания функций . . . . .	113
2.13.2. Точки экстремума. Необходимые условия экстремума . . .	114
2.13.3. Достаточный признак экстремума . . . . .	115
2.13.4. Достаточный признак существования экстремума, основанный на знаке 2-й производной . . . . .	116
2.14. Наибольшее и наименьшее значение функции на отрезке. Выпуклость, вогнутость. Точки перегиба . . . . .	116
2.14.1. Наибольшее и наименьшее значение функции на отрезке . .	116
2.14.2. Выпуклость и вогнутость графика функции . . . . .	117
2.14.3. Точки перегиба. Необходимое условие существования точек перегиба. Достаточное условие . . . . .	118
2.15. Асимптоты. План исследования функций и построения графиков .	118
2.15.1. Асимптоты графика функции . . . . .	119

2.15.2. Общая схема исследования функции и построения ее графика	121
2.15.3. Дифференциал длины дуги	122
2.16. Кривизна плоской кривой	124
2.16.1. Кривизна	124
2.16.2. Вычисление кривизны кривой	124
2.16.3. Радиус кривизны. Окружность кривизны. Центр кривизны	126
2.16.4. Эволюта и эвольвента	127
2.17. Комплексные числа	128
2.17.1. Комплексные числа. Определение, геометрическое изображение	129
2.17.2. Геометрическое изображение комплексных чисел	129
2.17.3. Действия над комплексными числами	130
2.17.4. Показательная функция в комплексной области	131
2.17.5. Некоторые сведения о многочленах	132
2.18. Приближенное решение уравнений	133
2.18.1. Метод хорд	133
2.18.2. Метод касательных (метод Ньютона)	135
2.18.3. Комбинированный метод	135
2.18.4. Метод итераций	136
2.18.5. Фортран-программа вычисления корней заданного уравнения на заданном отрезке	137
2.19. Интерполирование	139
2.19.1. Постановки задачи	139
2.19.2. Интерполяционный многочлен Лагранжа	141
2.19.3. Интерполяционный многочлен Ньютона	141
2.19.4. Численные дифференцирование	144
<b>Глава 3. Интегральное исчисление функций одной переменной</b>	<b>145</b>
3.1. Неопределенный интеграл и его свойства. Основные методы интегрирования	145
3.1.1. Понятие первообразной и неопределенного интеграла	145
3.1.2. Таблица основных интегралов	147
3.1.3. Некоторые свойства неопределенного интеграла	148
3.1.4. Основные методы интегрирования	148
3.2. Интегрирование по частям. Интегрирование некоторых функций, содержащих квадратный трехчлен	149
3.2.1. Интегрирование по частям	149
3.2.2. Интегрирование некоторых функций, содержащих квадратный трехчлен	151
3.3. Интегрирование рациональных дробей	153
3.3.1. Определение рациональной дроби. Интегрирование простейших рациональных дробей	153
3.3.2. Разложение рациональной дроби на простейшие	156
3.3.3. Метод неопределенных коэффициентов	157
3.3.4. Правила интегрирования рациональных дробей	157
3.4. Метод Остроградского. Интегралы от иррациональных функций	158
3.4.1. Метод Остроградского	158

3.4.2. Интегралы от некоторых иррациональных функций . . . . .	158
3.5. Интегрирование тригонометрических функций. Универсальная тригонометрическая подстановка . . . . .	161
3.5.1. Универсальная тригонометрическая подстановка . . . . .	161
3.5.2. Методы интегрирования некоторых специальных классов тригонометрических функций . . . . .	162
3.6. Тригонометрические подстановки . . . . .	165
3.6.1. Тригонометрические подстановки . . . . .	165
3.6.2. О функциях, интегралы которых не выражаются через элементарные функции . . . . .	167
3.7. Определенный интеграл: постановка задачи, существование, свойства	168
3.7.1. Задачи, приводящие к понятию определенного интеграла . .	168
3.7.2. Интегральная сумма. Определенный интеграл . . . . .	169
3.7.3. Теорема существования определенного интеграла . . . . .	170
3.7.4. Свойства определенного интеграла . . . . .	170
3.8. Определенный интеграл: теорема о среднем, формула Ньютона — Лейбница, замена переменной, интегрирование по частям . . . . .	173
3.8.1. Теорема о среднем значении определенного интеграла . . . .	173
3.8.2. Вычисление определенного интеграла. Формула Ньютона — Лейбница . . . . .	174
3.8.3. Замена переменной в определенном интеграле . . . . .	176
3.8.4. Интегрирование по частям в определенном интеграле . . . .	177
3.9. Геометрические приложения определенного интеграла . . . . .	178
3.9.1. Вычисление площадей плоских фигур в прямоугольных координатах . . . . .	178
3.9.2. Вычисление площадей для случая задания их границ уравнениями в параметрической форме . . . . .	179
3.9.3. Вычисление площади криволинейного сектора в полярных координатах . . . . .	180
3.10. Вычисление длины дуги кривой . . . . .	181
3.10.1. Вычисление длины дуги в декартовых координатах . . . . .	181
3.10.2. Вычисление длины дуги в случае параметрического задания кривой . . . . .	183
3.10.3. Длина дуги кривой в полярных координатах . . . . .	183
3.11. Вычисление объема. Механические приложения определенного интеграла . . . . .	184
3.11.1. Вычисление объема тела по известным поперечным сечениям	184
3.11.2. Объем тела вращения . . . . .	186
3.11.3. Вычисление работы переменной силы . . . . .	186
3.11.4. Задача на вычисление силы Архимеда . . . . .	187
3.12. Несобственные интегралы . . . . .	188
3.12.1. Интегралы с бесконечными пределами (несобственные интегралы первого рода) . . . . .	189
3.12.2. Теоремы сравнения для несобственных интегралов первого рода . . . . .	191

3.12.3. Интегралы от неограниченных функций (интегралы второго рода) . . . . .	192
3.12.4. Теоремы сравнения для несобственных интегралов второго рода . . . . .	193
3.13. Приближенные методы вычисления определенных интегралов . . .	194
3.13.1. Постановка задачи. Общая идея методов приближенных вычислений . . . . .	194
3.13.2. Формула прямоугольников . . . . .	194
3.13.3. Формула трапеций . . . . .	195
3.13.4. Формула парабол (формула Симпсона) . . . . .	196
<b>Глава 4. Дифференциальное исчисление функций многих переменных . . . . .</b>	<b>198</b>
4.1. Основные понятия и определения. Функции двух переменных и области их определения. График функции двух переменных. Предел и непрерывность. . . . .	198
4.1.1. Функции двух переменных и области их определения . . . .	199
4.1.2. График функции двух переменных . . . . .	199
4.1.3. Предел и непрерывность . . . . .	200
4.2. Частные производные. Дифференциал . . . . .	202
4.2.1. Свойства непрерывных в замкнутой и ограниченной области функций . . . . .	202
4.2.2. Частные производные первого порядка . . . . .	203
4.2.3. Геометрический смысл частных производных функции двух переменных . . . . .	204
4.2.4. Полное приращение функции и полный дифференциал . . .	204
4.3. Применение полного дифференциала к приближенным вычислениям. Производные сложных и неявных функций . . . . .	206
4.3.1. Приложение полного дифференциала к приближенным вычислениям . . . . .	206
4.3.2. Дифференцирование сложных функций . . . . .	207
4.3.3. Неявные функции и их дифференцирование . . . . .	210
4.4. Частные производные и дифференциалы высших порядков. Формула Тейлора для функции двух переменных . . . . .	211
4.4.1. Частные производные высших порядков . . . . .	211
4.4.2. Дифференциалы высших порядков . . . . .	213
4.4.3. Формула Тейлора для функции двух переменных . . . . .	214
4.5. Экстремум функции двух переменных . . . . .	215
4.5.1. Определение экстремума функции двух переменных . . . . .	215
4.5.2. Необходимые условия существования экстремума . . . . .	216
4.5.3. Достаточные условия существования экстремума . . . . .	217
4.5.4. Примеры исследования функций на экстремум . . . . .	217
4.6. Наибольшее и наименьшее значения функции двух переменных. Условный экстремум. Необходимые условия . . . . .	219
4.6.1. Наибольшее и наименьшее значения функции двух переменных в ограниченной замкнутой области . . . . .	219

4.6.2. Пример исследования функции на наибольшее и наименьшее значения . . . . .	220
4.6.3. Условный экстремум. Уравнение связи . . . . .	221
4.6.4. Необходимые условия условного экстремума . . . . .	222
4.7. Достаточные условия существования условного экстремума.	
Метод наименьших квадратов . . . . .	223
4.7.1. Достаточные условия существования условного экстремума . . . . .	223
4.7.2. Пример решения задачи на отыскание условного экстремума . . . . .	224
4.7.3. Метод наименьших квадратов . . . . .	225
4.8. Векторная функция скалярного аргумента . . . . .	228
4.8.1. Задачи, приводящие к понятию векторной функции скалярного аргумента . . . . .	228
4.8.2. Предел и производная векторной функции скалярного аргумента . . . . .	229
4.8.3. Механический смысл первой и второй производных векторной функции скалярного аргумента . . . . .	231
4.9. Геометрический смысл полного дифференциала . . . . .	233
4.9.1. Уравнения касательной прямой и нормальной плоскости к пространственной кривой . . . . .	233
4.9.2. Касательная плоскость и нормаль к поверхности . . . . .	234
4.9.3. Геометрический смысл полного дифференциала функции двух переменных . . . . .	235
<b>Глава 5. Интегральное исчисление функций многих переменных . . . . .</b>	<b>237</b>
5.1. Интегралы, зависящие от параметра . . . . .	237
5.1.1. Дифференцирование интегралов, зависящих от параметра. Формула Лейбница . . . . .	237
5.1.2. Применение интегралов, зависящих от параметра к вычислению некоторых «неберущихся» интегралов . . . . .	239
5.1.3. Интегрирование по параметру интегралов, зависящих от параметра . . . . .	240
5.2. Интеграл Пуассона. Гамма-функция . . . . .	241
5.2.1. Интеграл Пуассона . . . . .	241
5.2.2. Гамма-функция и ее свойства . . . . .	242
5.3. Двойной интеграл . . . . .	245
5.3.1. Задача об объеме, приводящая к понятию двойного интеграла . . . . .	245
5.3.2. Определение двойного интеграла. Теорема существования . . . . .	246
5.3.3. Свойства двойного интеграла . . . . .	247
5.3.4. Вычисление двойного интеграла в декартовых координатах . . . . .	248
5.4. Замена переменных в двойном интеграле . . . . .	250
5.4.1. Замена переменных в двойном интеграле . . . . .	250
5.4.2. Двойной интеграл в полярных координатах . . . . .	253
5.5. Приложения двойного интеграла . . . . .	254
5.5.1. Масса плоской фигуры . . . . .	254
5.5.2. Статические моменты, центр тяжести плоской фигуры . . . . .	255

5.5.3. Площадь поверхности . . . . .	257
5.6. Тройной интеграл . . . . .	258
5.6.1. Определение тройного интеграла. Теорема существования . . . . .	258
5.6.2. Свойства тройного интеграла . . . . .	259
5.6.3. Вычисление тройного интеграла в декартовых координатах . . . . .	260
5.6.4. Вычисление тройного интеграла в цилиндрических координатах . . . . .	261
5.6.5. Тройной интеграл в сферических координатах . . . . .	262
5.7. Приложения тройного интеграла . . . . .	263
5.7.1. Вычисление объема тела . . . . .	263
5.7.2. Вычисление массы тела . . . . .	263
5.7.3. Статические моменты и центр тяжести тела . . . . .	264
5.8. Криволинейный интеграл второго рода . . . . .	266
5.8.1. Задачи, приводящие к криволинейному интегралу . . . . .	266
5.8.2. Определение криволинейного интеграла. Теорема существования . . . . .	267
5.8.3. Вычисление криволинейного интеграла . . . . .	268
5.8.4. Свойства криволинейного интеграла . . . . .	269
5.9. Формула Грина — Остроградского. Независимость криволинейного интеграла от пути интегрирования . . . . .	270
5.9.1. Формула Остроградского — Грина . . . . .	270
5.9.2. Независимость криволинейного интеграла от пути интегрирования . . . . .	272
5.10. Криволинейный и поверхностный интегралы первого рода . . . . .	275
5.10.1. Криволинейный интеграл по длине дуги. Вычисление массы кривой . . . . .	275
5.10.2. Интеграл по площади поверхности (поверхностный интеграл первого рода) . . . . .	276
5.10.3. Вычисление поверхностного интеграла первого рода . . . . .	277
5.11. Поверхностные интегралы второго рода . . . . .	279
5.11.1. Задача о потоке жидкости через поверхность . . . . .	279
5.11.2. Определение поверхностного интеграла второго рода . . . . .	280
5.11.3. Вычисление поверхностного интеграла второго рода . . . . .	281
<b>Глава 6. Элементы теории поля . . . . .</b>	<b>283</b>
6.1. Скалярное поле . . . . .	283
6.1.1. Определение и примеры скалярных полей . . . . .	283
6.1.2. Производная по направлению . . . . .	284
6.1.3. Градиент скалярного поля . . . . .	286
6.1.4. Градиент функции перпендикулярен к поверхности уровня . . . . .	287
6.2. Векторное поле . . . . .	288
6.2.1. Определение векторного поля . . . . .	288
6.2.2. Векторные линии . . . . .	288
6.2.3. Формула Остроградского — Гаусса . . . . .	289
6.2.4. Дивергенция векторного поля и ее физический смысл . . . . .	289
6.3. Формула Стокса. Ротор и циркуляция векторного поля. Оператор Гамильтона . . . . .	292

6.3.1. Формула Стокса. Условия независимости криволинейного интеграла от пути интегрирования . . . . .	292
6.3.2. Ротор и циркуляция векторного поля. Векторная запись формулы Стокса . . . . .	293
6.3.3. Оператор Гамильтона и его применение . . . . .	295
6.4. Потенциальное и соленоидальное поля. Уравнение Лапласа . . . . .	297
6.4.1. Потенциальное поле. Отыскание потенциала . . . . .	297
6.4.2. Соленоидальное поле . . . . .	299
6.4.3. Уравнение Лапласа . . . . .	301
<b>Глава 7. Обыкновенные дифференциальные уравнения . . . . .</b>	<b>302</b>
7.1. Задачи, приводящие к дифференциальным уравнениям. Дифференциальные уравнения первого порядка . . . . .	302
7.1.1. Задачи, приводящие к дифференциальным уравнениям . . . . .	302
7.1.2. Дифференциальные уравнения первого порядка . . . . .	303
7.1.3. Задача Коши. Теорема Коши . . . . .	305
7.1.4. Общее решение . . . . .	306
7.1.5. Особые решения . . . . .	306
7.2. Методы интегрирования некоторых дифференциальных уравнений первого порядка . . . . .	307
7.2.1. Уравнения с разделяющимися переменными . . . . .	307
7.2.2. Однородные уравнения . . . . .	308
7.2.3. Линейные уравнения 1-го порядка . . . . .	311
7.3. Методы интегрирования некоторых дифференциальных уравнений первого порядка. Приближенное решение дифференциальных уравнений методом Эйлера . . . . .	313
7.3.1. Уравнение Бернулли . . . . .	313
7.3.2. Уравнение в полных дифференциалах . . . . .	314
7.3.3. Приближенное решение дифференциальных уравнений первого порядка методом Эйлера . . . . .	316
7.4. Дифференциальные уравнения высших порядков . . . . .	317
7.4.1. Дифференциальное уравнение $n$ -го порядка. Задача Коши, теорема Коши, общее решение . . . . .	317
7.4.2. Интегрирование уравнений, допускающих понижение порядка . . . . .	319
7.5. Линейные дифференциальные уравнения . . . . .	321
7.5.1. Линейные уравнения $n$ -го порядка. Теорема Коши . . . . .	321
7.5.2. Линейное однородное уравнение второго порядка. Свойства его решений . . . . .	322
7.5.3. Линейные неоднородные уравнения . . . . .	322
7.5.4. Метод вариации произвольных постоянных . . . . .	323
7.6. Линейные уравнения второго порядка с постоянными коэффициентами . . . . .	325
7.6.1. Характеристическое уравнение . . . . .	325
7.6.2. Случай различных корней характеристического уравнения . . . . .	325

7.6.3. Случай кратных корней характеристического уравнения . . . . .	326
7.6.4. Случай комплексно-сопряженных корней характеристического уравнения . . . . .	326
7.6.5. Линейные неоднородные уравнения с постоянными коэффициентами и специальными правыми частями . . . . .	328
7.6.6. Уравнение гармонического осциллятора. Резонанс . . . . .	329
7.7. Системы дифференциальных уравнений . . . . .	330
7.7.1. Система в нормальной форме. Общее решение . . . . .	330
7.7.2. Решение системы сведений ее к уравнению высшего порядка. Обратное сведение . . . . .	332
7.7.3. Линейные системы с постоянными коэффициентами . . . . .	334
7.7.4. Построение фундаментальной системы решений. Метод Эйлера . . . . .	335
7.8. Линейное уравнение второго порядка с переменными коэффициентами. Метод скалярной прогонки . . . . .	338
7.8.1. Вводные замечания и постановка задачи . . . . .	338
7.8.2. Конечно-разностный метод прогонки . . . . .	339
7.8.3. Фортран-программа решения краевых задач для дифферен- циальных уравнений второго порядка методом прогонки . . . . .	342
7.9. Системы линейных уравнений второго порядка с переменными коэффициентами. Метод матричной прогонки . . . . .	345
7.9.1. Постановка задачи. Уравнения и граничные условия . . . . .	345
7.9.2. Конечно-разностная аппроксимация уравнений и граничных условий . . . . .	346
7.9.3. Решение конечно-разностных уравнений методом матричной прогонки . . . . .	348
7.9.4. Фортран-подпрограмма вычисления обратной матрицы . . . . .	350
<b>Глава 8. Числовые и функциональные ряды . . . . .</b>	<b>354</b>
8.1. Числовые ряды. Определение, свойства, сходимость . . . . .	354
8.1.1. Определение числового ряда . . . . .	354
8.1.2. Сумма числового ряда, его сходимость . . . . .	355
8.1.3. Геометрическая прогрессия . . . . .	355
8.1.4. Простейшие свойства числовых рядов . . . . .	356
8.1.5. Необходимый признак сходимости рядов . . . . .	358
8.2. Признаки сходимости знакоположительных рядов . . . . .	359
8.2.1. Признаки сравнения рядов . . . . .	359
8.2.2. Признак Даламбера . . . . .	361
8.2.3. Признак Коши . . . . .	362
8.2.4. Интегральный признак сходимости Коши . . . . .	363
8.3. Знакопеременные ряды . . . . .	364
8.3.1. Знакопеременяющиеся ряды . . . . .	364
8.3.2. Общий случай знакопеременных рядов . . . . .	365
8.3.3. Остаток ряда . . . . .	367
8.3.4. Оценка остатка знакоположительного ряда . . . . .	367



8.3.5. Оценка остатка знакопеременного ряда . . . . .	368
8.3.6. Оценка остатка знакопеременного ряда, сходящегося по признаку Лейбница . . . . .	369
8.4. Функциональные ряды . . . . .	370
8.4.1. Понятие функционального ряда, его области сходимости, суммы . . . . .	370
8.4.2. Мажорируемые функциональные ряды и их свойства . . . . .	371
8.4.3. Степенные ряды. Интервал сходимости . . . . .	372
8.4.4. Свойства степенных рядов . . . . .	374
8.5. Степенные ряды. Ряд Тейлора. Ряд Маклорена . . . . .	375
8.5.1. Степенной ряд по степеням $(x - a)$ . . . . .	375
8.5.2. Ряд Тейлора . . . . .	376
8.5.3. Вывод формулы остаточного члена. Ряд Маклорена . . . . .	378
8.5.4. Разложение функции $e^x$ в ряд Маклорена . . . . .	379
8.6. Разложение некоторых функций в степенные ряды. Применение степенных рядов к приближенным вычислениям . . . . .	380
8.6.1. Разложение в ряд Маклорена функций $f(x) = \sin x$ , $f(x) = \cos x$ . . . . .	380
8.6.2. Биномиальный ряд . . . . .	381
8.6.3. Разложение в ряд Маклорена функции $f(x) = \ln(1 + x)$ . . . . .	381
8.6.4. Методы, применяемые для разложения функций в степенные ряды . . . . .	382
8.6.5. Применение степенных рядов в приближенных вычислениях . . . . .	383
8.7. Ряды Фурье. Тригонометрические ряды Фурье с периодом $2\pi$ . . . . .	386
8.7.1. Постановка задачи. Некоторые вспомогательные утверждения . . . . .	386
8.7.2. Определение коэффициентов ряда Фурье . . . . .	388
8.7.3. Условия сходимости. Теорема Дирихле . . . . .	388
8.8. Ряды Фурье для четных и нечетных функций, для функций с периодом $2l$ , для непериодических функций . . . . .	390
8.8.1. Ряды Фурье для четных и нечетных функций . . . . .	390
8.8.2. Разложение функции в ряд Фурье на отрезке $[-l, l]$ . . . . .	392
8.8.3. Ряд Фурье для непериодической функции . . . . .	394
8.8.4. Возможности применения рядов Фурье к решению дифференциальных уравнений и краевых задач . . . . .	395
<b>Глава 9. Методы математического моделирования физических процессов . . . . .</b>	<b>398</b>
9.1. Вывод дифференциального уравнения поперечных колебаний балки. Граничные и начальные условия . . . . .	400
9.1.1. Основные предпосылки теории изгиба балок . . . . .	400
9.1.2. Дифференциальное уравнение поперечных колебаний балки . . . . .	403
9.1.3. Граничные и начальные условия . . . . .	405
9.2. Поперечные колебания струны. Метод Фурье. Частоты и формы колебаний. . . . .	406
9.2.1. Дифференциальное уравнение поперечных колебаний струны. Начальные и граничные условия . . . . .	406
9.2.2. Решение задачи методом Фурье. Формы и частоты поперечных колебаний. . . . .	407

9.2.3. Бесконечная струна. Метод Даламбера. Бегущие волны . . . .	409
9.2.4. Конечная струна. Бегущие волны . . . . .	410
9.2.5. Колебания струны под действием заданного начального импульса . . . . .	414
9.3. Поперечные колебания балки. Общая схема расчета свободных колебаний балки. Примеры . . . . .	416
9.3.1. Постановка задачи и общая схема расчета свободных поперечных колебаний балки . . . . .	416
9.3.2. Расчет частот поперечных колебаний консольной балки с упругой опорой на втором конце . . . . .	420
9.4. Устойчивость прямолинейных форм равновесия при сжатии. Динамический критерий устойчивости. Примеры . . . . .	425
9.4.1. Постановка задачи и общая схема расчета. Примеры . . . . .	425
9.4.2. Исследование устойчивости стержня под действием следящей силы . . . . .	431
9.4.3. Исследование устойчивости стержня-стойки под действием вертикальной силы . . . . .	434
9.5. Критическая скорость вращения вала. Динамический критерий устойчивости. Примеры . . . . .	435
9.6. Гидравлический удар в трубах. Метод интегрального преобразования Лапласа . . . . .	441
9.6.1. Операционный метод на основе преобразования Лапласа . . . . .	441
9.6.2. Постановка краевых задач гидравлического удара . . . . .	444
9.6.3. Решение краевых задач операционным методом . . . . .	446
9.6.4. Анализ полученных результатов. . . . .	449
9.7. Задачи теплопроводности. Уравнения параболического типа . . . . .	454
9.7.1. Постановка задач. Уравнение и граничные условия . . . . .	454
9.7.2. Применение операционного метода к решению задач теплопроводности . . . . .	457
9.8. Расчет нестационарных одномерных температурных полей методом прогонки . . . . .	461
9.8.1. Решение дифференциального уравнения второго порядка с переменными коэффициентами и произвольными граничными условиями методом прогонки . . . . .	461
9.8.2. Алгоритм расчета температурных полей . . . . .	464
9.8.3. Фортран-программа решения краевой задачи с дифференциальным уравнением 2-го порядка . . . . .	466
<b>Список литературы . . . . .</b>	<b>469</b>

M62

*Учебное издание*

**Липовцев Юрий Васильевич  
Третьякова Ольга Николаевна**

**ОСНОВЫ ВЫСШЕЙ МАТЕМАТИКИ  
ДЛЯ ИНЖЕНЕРОВ**

**Учебное пособие**

Ответственный редактор *Н. Г. Карасева*

Технический редактор *П. С. Корсунская*

Корректор *Н. Д. Лельчук*

Компьютерная верстка *И. И. Шильштейна, М. И. Шильштейн*

---

Подписано в печать 20.05.2009. Формат 60×84/16.

Печать офсетная. Бумага офсетная.

Усл. печ. л. 28,13. Тираж 300 экз.

---

ЗАО «Издательское предприятие «Вузовская книга»

125993, Москва, А-80, ГСП-3, Волоколамское шоссе, д. 4,

МАИ, Главный административный корпус, к. 301а.

Тел./факс 499-158-02-35. E-mail: [vbook@mail.ru](mailto:vbook@mail.ru); [vbook@mai.ru](mailto:vbook@mai.ru)

[www.vuzkniga.ru](http://www.vuzkniga.ru)



ИЗДАТЕЛЬСТВО  
**ВУЗОВСКАЯ КНИГА**

**Липовцев Ю. В., Третьякова О. Н.**

Механика для инженеров: учеб. пособие / Ю. В. Липовцев, О. Н. Третьякова. — М.: Вузовская книга, 2005. — 384 с.: ил.

ISBN 5-9502-0058-6



Учебное пособие разработано в качестве краткого руководства по объединенному курсу теоретической механики и сопротивления материалов с элементами строительной механики, термоупругости, теории пластин и оболочек. Последовательность изложения материала рассчитана на выработку навыков расчета типовых элементов конструкций на прочность и жесткость традиционными способами в соответствии с «Нормами расчета на прочность», а также с применением современной компьютерной техники и численных методов. Последнее, главным образом, относится к теории и практике расчета напряженно-деформированного состояния пластин и оболочек. Большое место в книге отведено вопросам расчета температурных напряжений стержневых тел, пластин и оболочек.

Предназначено для студентов технических вузов, а также может быть полезно для специалистов ракетно-космической, авиационной и других отраслей техники.

**ГОТОВИТСЯ К ПЕЧАТИ**

**Алейников С. М., Кушев А. Б.**

Теория функций комплексного переменного для инженеров: учеб. пособие / С. М. Алейников, А. Б. Кушев. — 2-е изд., испр. и доп. — М.: Вузовская книга, 2009. — 148 с.: ил.

ISBN 978-5-9502-0402-9

Теория функций комплексного переменного изложена в объеме, предусмотренном программой курса математики для технических вузов. Пособие выгодно отличается доступным уровнем изложения и большим количеством примеров и задач, в том числе задач по математической физике, решаемых численными методами.

Предназначено для студентов технических специальностей вузов. Может быть использовано при выполнении типовых расчетов, курсовых и дипломных работ.

**ОГЛАВЛЕНИЕ**

- Глава 1. Комплексные числа и действия над ними
- Глава 2. Функции комплексного переменного
- Глава 4. Элементарные аналитические функции и конформные отображения
- Глава 5. Интегрирование функций комплексного переменного
- Глава 6. Ряды в комплексной области
- Глава 7. Теория вычетов и их приложения
- Глава 8. Комплексные численные методы решения прикладных задач

**По вопросам приобретения книжной продукции обращаться по адресу:**

ЗАО «Торговое предприятие «Вузовская книга»

125993, Москва, А-80, ГСП-3, Волоколамское шоссе, д. 4,

МАИ, Главный административный корпус, к. 301а.

Т/ф (499) 158-02-35. E-mail: vbook@mail.ru; vbook@mai.ru; www.vuzkniga.ru