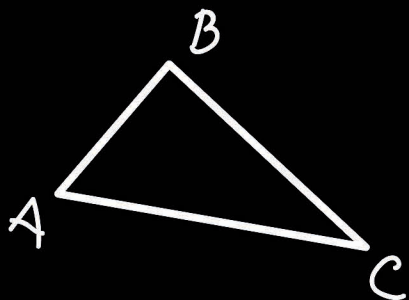


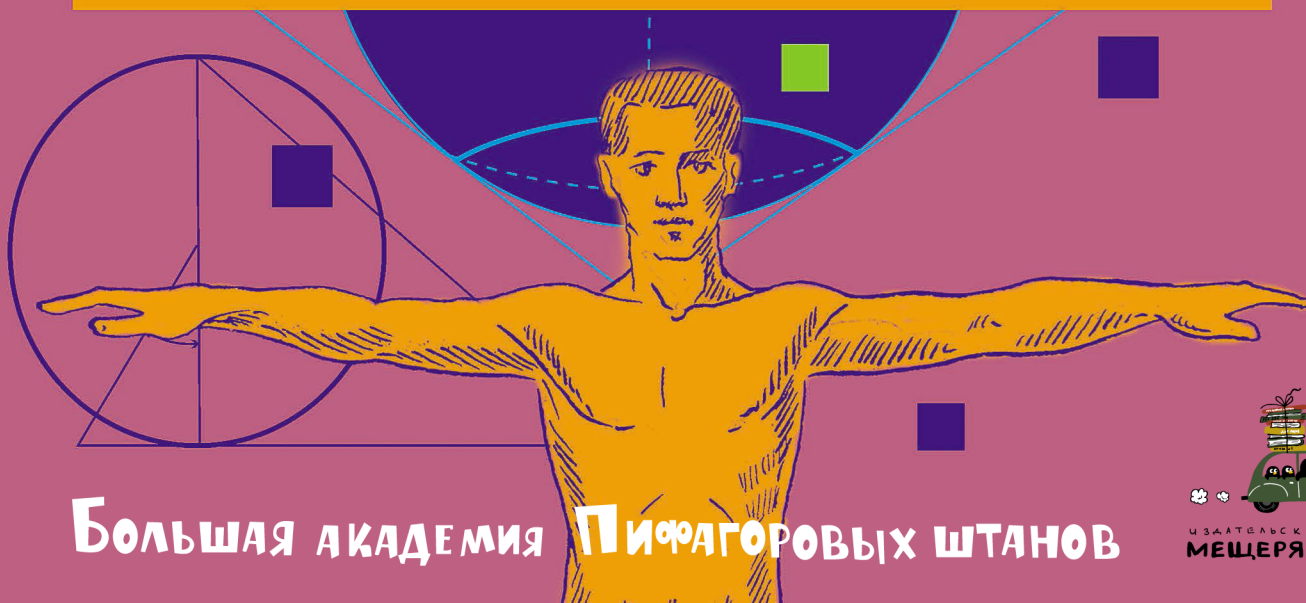
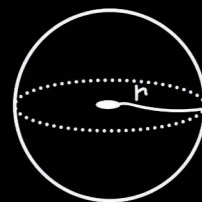


Яков Перельман ГЕОМЕТРИЯ

Книга о том,
что геометрия — нескучная наука



$$V = \frac{3}{4} \pi R$$



БОЛЬШАЯ АКАДЕМИЯ ПИФАГОРОВЫХ ШТАНОВ



Яков Исидорович
ПЕРЕЛЬМАН

ГЕОМЕТРИЯ



Москва
Издательский Дом
Мещерякова
2019

УДК 087.5:514
ББК 22.15
П27

Рисунки Юлии Меньшиковой

Перельман, Я. И.
П27 Геометрия : [сборник] / Яков Исидорович Перельман ; [рис. Ю. Меньшиковой]. — Москва : Издательский Дом Мещерякова, 2019. — 232 с. : ил. — (Большая академия Пифагоровых штанов).

ISBN 978-5-00108-449-5

Чтобы доказать, что геометрия не скучная наука, Я. И. Перельман выходит за пределы школьного класса, подальше от доски и парты, под открытое небо, в лес, поле или к реке. На простых примерах — изучая форму листьев или наблюдая за размерами Луны и Солнца — читатель привыкнет находить знакомые геометрические отношения в окружающем мире и научится применять новые знания в обычной жизни.

Любопытные, неожиданные задачи, ребусы, головоломки и загадки никого не оставят равнодушным.

**УДК 087.5:514
ББК 22.15**

ISBN 978-5-00108-449-5
Мы любим бумажные книги

© Ю. А. Меньшикова, иллюстрации, 2019
© АО «Издательский Дом Мещерякова», 2019

Предисловие

Природа говорит языком математики: буквы этого языка — круги, треугольники и иные математические фигуры.

Галилей

Эта книга написана не столько для друзей математики, сколько для её недругов. Она имеет в виду, главным образом, не тех, у кого есть уже склонность к математике, и не тех также, кто вовсе ещё не приступил к её изучению. Автор предназначает книгу всего более для той обширной категории читателей, которые знакомились в школе (или сейчас ещё знакомятся) с этой наукой без особого интереса и одушевления, питая к ней в лучшем случае лишь холодную почтительность. Сделать геометрию для них привлекательной, внушить охоту и воспитать вкус к её изучению — прямая задача настоящей книги.

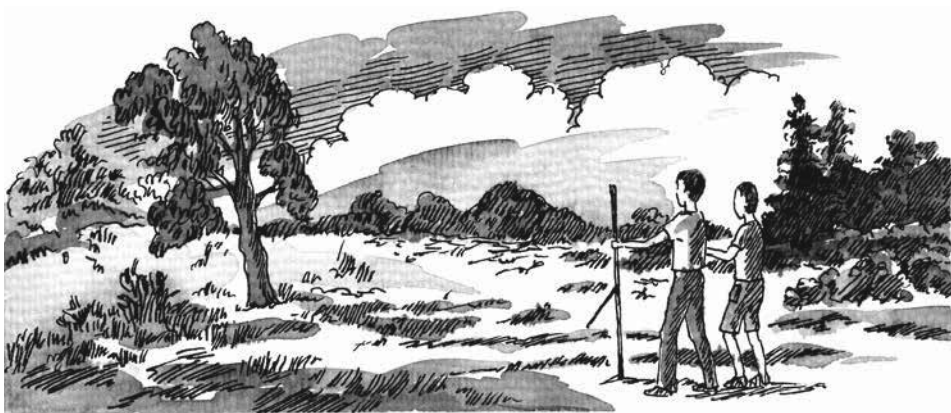
Лучшее средство для этого — показать предмет, до некоторой степени известный читателю, с новой, незнакомой, порою неожиданной стороны, способной возбудить интерес и привлечь внимание. С этой целью автор, прежде всего, отделяет геометрию от классной доски, с которой наука эта прочно срослась в представлении такого читателя, выводит её из стен школьной комнаты на вольный воздух, в лес, в поле, к реке, на дорогу, чтобы под открытым небом отдаться непринуждённому геометрическим занятиям, без учебника и таблиц, без циркуля и линейки. Учебник откладывается в сторону, и единственный книжный материал,

к которому привлекается внимание читателя, — страницы Жюль Верна, Майн Рида, Марка Твена, Свифта...

Удалось ли подобными средствами достигнуть цели — пусть судят те недруги геометрии, которых автор желает превратить в её друзей.

Область, отвечающая назначению книги, весьма обширна и в значительной степени общеизвестна. Стремясь дать свежий материал, составитель старался, по возможности, меньше писать о том, что излагалось другими. Ему не удалось, однако, избежать повторения, в том или ином виде, некоторых сюжетов, уже использованных им самим в его учебных книгах.

Я. П.



ГЛАВА ПЕРВАЯ

ГЕОМЕТРИЯ В ЛЕСУ

По длине тени

Ещё сейчас памятно мне то изумление, с каким смотрел я в первый раз на седого лесничего, который, стоя возле огромной сосны, измерял её высоту маленьким карманным прибором. Когда он нацелился своей квадратной дощечкой в вершину дерева, я ожидал, что старик сейчас начнёт взбираться туда с мерной цепью. Вместо этого он положил прибор обратно в карман и объявил, что измерение окончено. А я думал, ещё не начиналось...

Я был тогда очень молод, и такой способ измерения, когда человек определяет высоту дерева, не срубая его и не взбираясь на верхушку, являлся в моих глазах чем-то вроде маленького чуда. Лишь позднее, когда меня посвятили в начатки геометрии, понял я, до чего просто выполняются такого рода чудеса. Существует множество различных способов производить подобные измерения при помощи весьма незамысловатых приборов и даже без всяких приспособлений.

Самый лёгкий и самый древний способ — без сомнения, тот, которым греческий мудрец Фалес за шесть веков до нашей эры определил в Египте высоту пирамиды. Он воспользовался

* Конечно, длину тени надо было считать от средней точки квадратного основания пирамиды; ширину этого основания Фалес мог измерить непосредственно.

её тенью. Жрецы и фараон, собравшиеся у подножия высочайшей пирамиды, озадаченно смотрели на северного пришельца, отгадывавшего по тени высоту огромного сооружения. Фалес, говорит предание, избрал день и час, когда длина собственной его тени равнялась его росту; в этот момент высота пирамиды должна также равняться длине отбрасываемой ею тени*. Вот, пожалуй, единственный случай, когда человек извлекает пользу из своей тени...

Задача греческого мудреца представляется нам теперь детски простой, но не будем забывать, что смотрим мы на неё с высоты геометрического здания, воздвигнутого уже после Фалеса. Он жил задолго до Евклида, автора замечательной книги, по которой обучались геометрии в течение двух тысячелетий после его смерти. Заключённые в ней истины, известные теперь каждому школьнику, не были ещё открыты в эпоху Фалеса. А чтобы воспользоваться тенью для решения задачи о высоте пирамиды, надо было знать уже некоторые геометрические свойства треугольника, — именно следующие два (из которых первое Фалес сам открыл):

1) что углы при основании равнобедренного треугольника равны, и обратно — что стороны, лежащие против равных углов треугольника, равны между собою;

2) что сумма углов всякого треугольника (или по крайней мере прямоугольного) равна двум прямым углам.

Только вооружённый этим знанием, Фалес вправе был заключить, что, когда его собственная тень равна его росту, солнечные лучи встречаются ровную почву под углом в половину прямого, и следовательно, вершина пирамиды, середина её основания и конец её тени должны обозначить равнобедренный треугольник.

Этим простым способом очень удобно, казалось бы, пользоваться в ясный солнечный день для измерения одиноко стоящих деревьев, тень которых не сливается с тенью соседних. Но в наших широтах не так легко, как в Египте, подстеречь нужный для этого момент: Солнце у нас низко стоит над горизонтом, и тени бывают равны высоте отбрасывающих их предметов лишь в околополуденные часы летних месяцев. Поэтому способ Фалеса в указанном виде применим не всегда.

Нетрудно, однако, изменить этот способ так, чтобы в солнечный день можно было пользоваться любой тенью, какой бы

длины она ни была. Измерив, кроме того, и свою тень или тень какого-нибудь шеста, вычисляют искомую высоту из пропорции (рис. 1):

$$AB : ab = BC : bc,$$

т.е. высота дерева во столько же раз больше вашей собственной высоты (или высоты шеста), во сколько раз тень дерева длиннее вашей тени (или тени шеста). Это вытекает, конечно, из геометрического подобия треугольников ABC и abc (по двум углам).

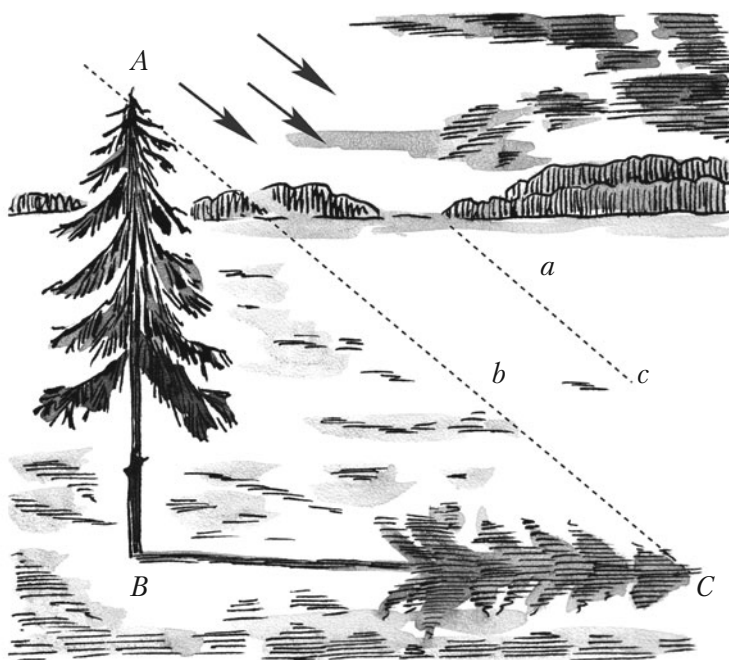


Рис. 1. Измерение высоты дерева по тени

Иные читатели возразят, пожалуй, что столь элементарный приём не нуждается вовсе в геометрическом обосновании: неужели и без геометрии не ясно, что, во сколько раз дерево выше, во столько раз и тень его длиннее? Дело, однако, не так просто, как кажется. Попробуйте применить это правило к теням, отбрасываемым при свете уличного фонаря или лампы, — оно не оправдается. На рис. 2 вы видите, что столбик AB выше тумбы ab примерно втрое, а тень столбика больше тени тумбы ($BC : bc$) раз в восемь. Объяснить, почему в данном случае способ применим, в другом нет, — невозможно без геометрии.

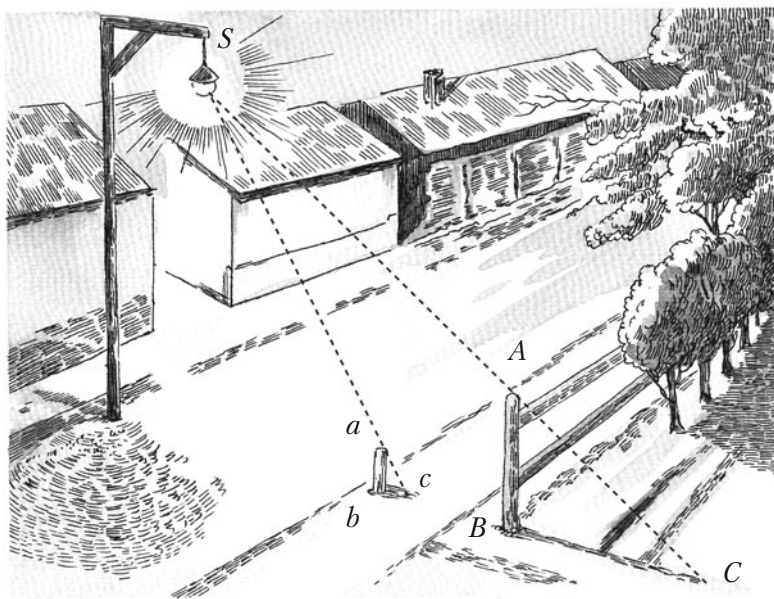


Рис 2. Когда такое измерение невыполнимо

Задача

Рассмотрим поближе, в чём тут разница. Суть дела сводится к тому, что солнечные лучи между собою параллельны, лучи же фонаря — непараллельны. Последнее очевидно; но почему вправе мы считать лучи Солнца параллельными, хотя они, безусловно, пересекаются в том месте, откуда исходят?

Решение

Лучи Солнца, падающие на Землю, мы можем считать параллельными потому, что угол между ними чрезвычайно мал, практически неуловим. Несложный геометрический расчёт убедит вас в этом. Вообразите два луча, исходящие из какой-нибудь точки Солнца и падающие на Землю в расстоянии, скажем, одного километра друг от друга. Значит, если бы мы поставили одну ножку циркуля в эту точку Солнца, а другою описали окружность радиусом, равным расстоянию от Солнца до Земли (т.е. радиусом в 150 000 000 км), то между нашими двумя лучами-радиусами оказалась бы дуга в один километр длиной. Полная длина этой исполинской окружности была бы равна $2\pi \cdot 150\,000\,000 \text{ км} = 940\,000\,000 \text{ км}$. Один градус её, конечно, в 360 раз меньше, т.е. около 2 600 000 км; одна дуговая минута в 60 раз меньше градуса, т.е. равна 43 000 км, а одна дуговая секунда ещё в 60 раз меньше, т.е. 720 км. Но наша дуга

имеет в длину всего только 1 км; значит, она соответствует углу в $\frac{1}{720}$ секунды. Такой ничтожный угол неуловим даже для точнейших астрономических инструментов; следовательно, на практике мы можем считать лучи Солнца, падающие на Землю, за параллельные прямые*.

Если бы эти геометрические соображения не были нам известны, мы не могли бы обосновать рассматриваемый способ определения высоты по тени.

Пробуя применить способ теней на практике, вы сразу же убедитесь, однако, в его ненадежности. Тени не отграничены так отчётливо, чтобы измерение их длины можно было выполнить вполне точно. Каждая тень, отбрасываемая при свете Солнца, имеет неясно очерченную серую кайму полутени, которая и придаёт границе тени неопределённость. Происходит это оттого, что Солнце — не точка, а большое светящееся тело, испускающее лучи из многих точек. На рис. 3 показано, почему вследствие этого тень BC дерева имеет ещё придаток в виде полутени CD , постепенно сходящей на нет. Угол CAD между крайними границами полутени равен тому углу, под которым мы всегда видим солнечный диск, т.е. половине градуса. Ошибка, происходящая оттого, что обе тени измеряются не вполне точно, может при не слишком даже низком стоянии Солнца достигать 5% и более. Эта ошибка прибавляется к другим

* Другое дело — лучи, направленные от какой-нибудь точки Солнца к концам земного диаметра; угол между ними достаточно велик для измерения (около $17''$); определение этого угла дало в руки астрономов одно из средств установить, как велико расстояние от Земли до Солнца.



Рис. 3. Как образуется полутень

неизбежным ошибкам — от неровности почвы и т.д. — и делает окончательный результат малонадёжным. В местности гористой, например, способ этот совершенно неприменим.

Ещё два способа

Вполне возможно обойтись при измерении высоты и без помощи теней. Таких способов много; начнём с двух простейших.

Прежде всего, мы можем воспользоваться свойством равнобедренного прямоугольного треугольника, обратившись к ус-

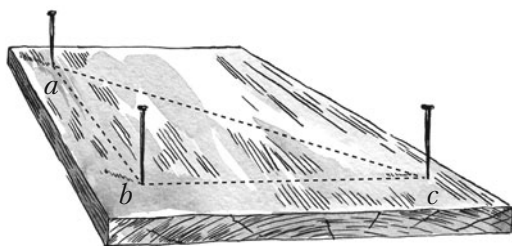


Рис. 4. Булавочный прибор для измерения высот

лугам весьма простого прибора, который легко изготовить из дощечки и трёх булавок. На дощечке любой формы, даже на куске коры, если у него есть плоская сторона, намечают три точки — вершины равнобедренного прямоугольного треугольника — и в них втыкают торчком по булавке (рис. 4). Пусть у вас нет под

рукой чертёжного треугольника для построения прямого угла, нет и циркуля для отложения равных сторон. Перегните тогда любой лоскут бумаги один раз, а затем поперёк первого сгиба ещё раз так, чтобы обе части первого

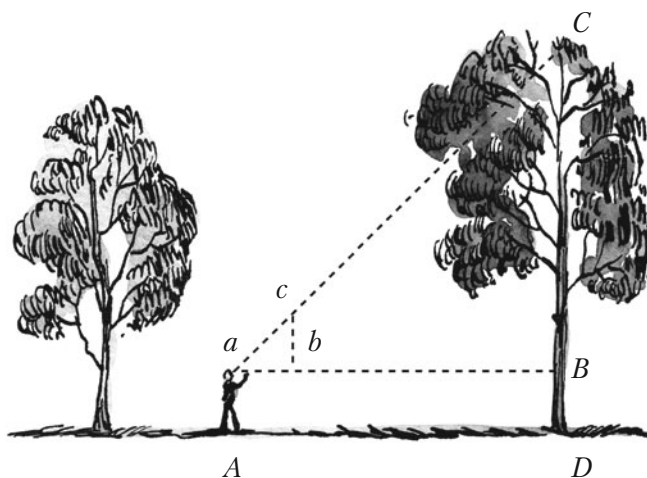


Рис. 5. Схема применения булавочного прибора

сгиба совпали, — и получите прямой угол. Та же бумажка пригодится и вместо циркуля, чтобы отмерить равные расстояния.

Как видите, прибор может быть целиком изготовлен в бивуачной обстановке.

Обращение с ним не сложнее изготовления. Отойдя от измеряемого дерева, держите прибор так, чтобы один из катетов треугольника был направлен отвесно, для чего можете пользоваться ниточкой с грузиком, привязанной к верхней булавке. Приближаясь к дереву или удаляясь от него, вы всегда найдёте такое место A (рис. 5), из которого, глядя на булавки a и c , увидите, что они покрывают верхушку C дерева: это значит, что продолжение гипотенузы ac проходит через точку C . Тогда, очевидно, расстояние aB равно CB , так как угол $\alpha = 45^\circ$.

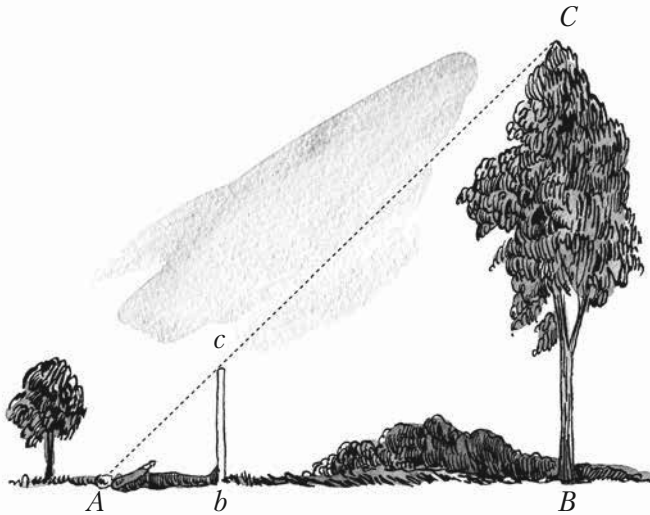


Рис. 6. Ещё один способ определения высоты

Следовательно, измерив расстояние aB (или, на ровном месте, одинаковое с ним расстояние AD) и прибавив BD , т.е. возвышение aA глаза над землёй, получите искомую высоту дерева.

По другому способу, вы обходитесь даже и без булавочно-го прибора. Здесь нужен шест, который вам придётся воткнуть отвесно в землю так, чтобы выступающая часть как раз равнялась вашему росту*. Место для шеста надо выбрать так, чтобы, лёжа, как показано на рис. 6, вы видели верхушку дерева на одной прямой линии с верхней точкой шеста. Так как треугольник Abc — равнобедренный и прямоугольный, то угол $A = 45^\circ$ и, следовательно, AB равно BC , т.е. искомой высоте дерева.

* Точнее, расстоянию от подошвы до глаз.

По способу Жюль Верна

Следующий — тоже весьма несложный — способ измерения высоких предметов картинно описан у Жюль Верна в известном романе «Таинственный остров».

— Сегодня нам надо измерить высоту площадки Далёкого Вида, — сказал инженер.

— Вам понадобится для этого инструмент? — спросил Герберт.

— Нет, не понадобится. Мы будем действовать несколько иначе, обратившись к не менее простому и точному способу.

Юноша, стараясь научиться возможно большему, последовал за инженером, который спустился с гранитной стены до окраины берега.

Взяв прямой шест, футов 12 длиною, инженер измерил его возможно точнее, сравнивая со своим ростом, который был ему хорошо известен. Герберт же нёс за ним отвес, вручённый ему инженером: просто камень, привязанный к концу верёвки.

Не доходя футов 500 до гранитной стены, поднимавшейся отвесно, инженер воткнул шест фута на два в песок и, прочно укрепив его, поставил вертикально с помощью отвеса.

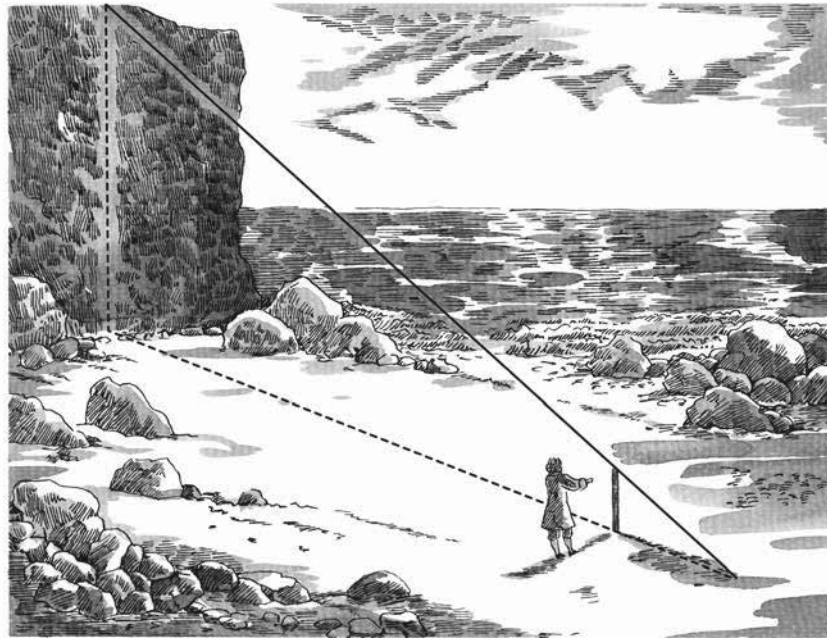


Рис. 7. Как измерили высоту скалы герои Жюль Верна

Затем он отошёл от шеста на такое расстояние, чтобы, лёжа на песке, можно было на одной прямой линии видеть и конец шеста, и край гребня (рис. 7). Эту точку он тщательно пометил колышком.

— Тебе знакомы начатки геометрии? — спросил он Герберта, поднимаясь с земли.

— Да.

— Помнишь свойства подобных треугольников?

— Их сходственные стороны пропорциональны.

— Правильно. Так вот: сейчас я построю два подобных прямоугольных треугольника. У меньшего одним катетом будет отвесный шест, другим — расстояние от колышка до основания шеста; гипотенуза же — мой луч зрения. У другого треугольника катетами будут: отвесная стена, высоту которой мы хотим определить, и расстояние от колышка до основания этой стены; гипотенуза же — мой луч зрения, совпадающий с направлением гипотенузы первого треугольника.

— Понял! — воскликнул юноша. — Расстояние от колышка до шеста так относится к расстоянию от колышка до основания стены, как высота шеста к высоте стены.

— Да. И следовательно, если мы измерим два первых расстояния, то, зная высоту шеста, сможем вычислить четвёртый, неизвестный член пропорции, т.е. высоту стены. Мы обойдёмся, таким образом, без непосредственного измерения высоты.

Оба горизонтальных расстояния были измерены: меньшее равнялось 15 футам, большее — 500 футам.

По окончании измерений инженер составил следующую запись:

$$\begin{aligned}15 : 500 &= 10 : x, \\500 \cdot 10 &= 5000, \\5000 : 15 &= 333,3.\end{aligned}$$

Значит, высота гранитной стены равнялась 333 футам».

Этот способ, как и предыдущий, неудобен тем, что при пользовании им приходится ложиться на землю. Но можно избежать такого неудобства.

Запасшись шестом выше своего роста, воткните его в землю отвесно на некотором расстоянии от измеряемого дерева (рис. 8). Отойдите от шеста назад по продолжению прямой *Dd*

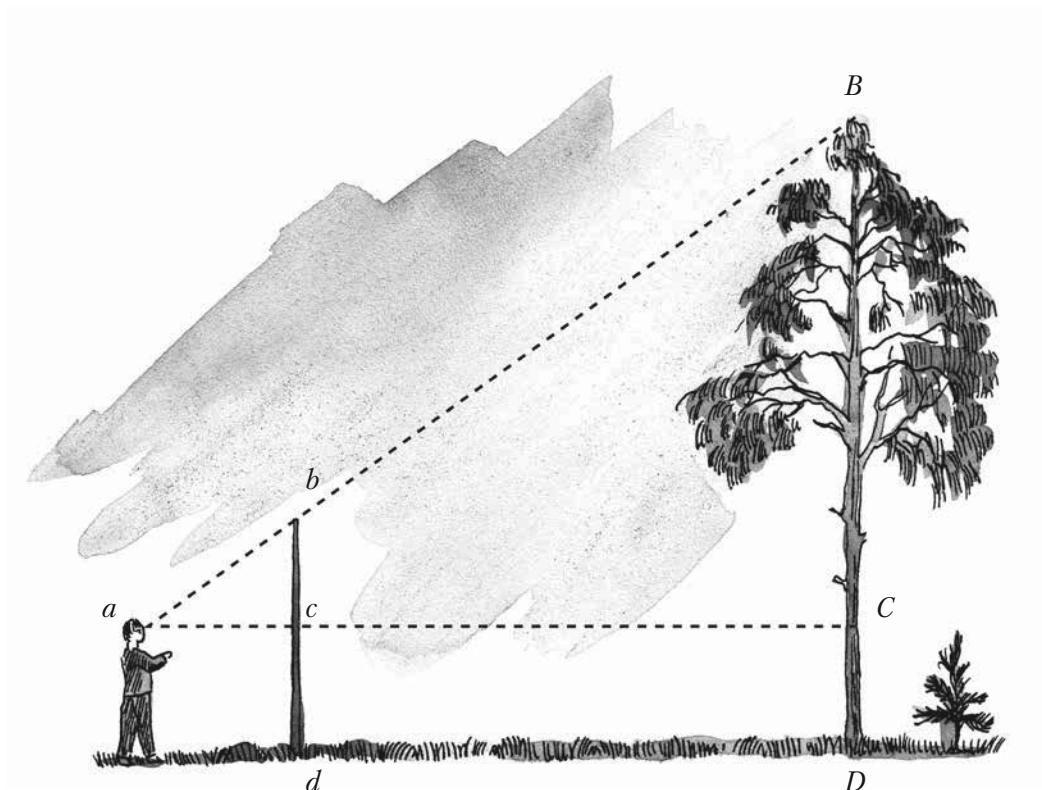


Рис. 8. Измерение высоты дерева при помощи шеста

и найдите такую точку A , из которой, глядя на вершину дерева, вы увидите на одной линии с ней и верхнюю точку b шеста. Затем, не меняя положения головы, смотрите по направлению горизонтальной прямой aC , замечая точки c и C , в которых горизонтальная прямая, проходящая через a , встречает шест и ствол. Попросите помощника сделать в этих местах пометки, и наблюдение окончено. Теперь остаётся только на основании подобия треугольников abc и aBC вычислить BC из пропорции:

$$BC : bc = aC : ac,$$

откуда

$$BC = bc \cdot \frac{aC}{ac}.$$

Расстояния bc , aC и ac легко измерить непосредственно. К полученной величине BC нужно прибавить расстояние CD (которое также измеряется непосредственно), чтобы узнать искомую высоту дерева.

При помощи записной книжки

В качестве прибора для приблизительной оценки недоступной высоты вы можете использовать и свою карманную записную книжку, если она снабжена карандашом, всунутым в чехлик или петельку при книжке. Она поможет вам построить в пространстве те два подобных треугольника, из которых получается искомая высота. Книжку надо держать возле глаз так, как показано на упрощённом рис. 9. Она должна находиться в отвесной плоскости, а карандаш выдвигается над верхним обреза́м книжки настолько, чтобы, глядя из точки a , видеть вершину B дерева покрытой кончиком b карандаша. Тогда вследствие подобия треугольников abc и aBC высота BC определится из пропорции:

$$BC : bc = aC : ac.$$

Расстояния bc , ac и aC измеряются непосредственно. К полученной величине BC надо прибавить ещё длину CD , т.е. — на ровном месте — высоту глаза над почвой.

Так как ширина ac книжки неизменна, то, если вы будете всегда становиться на одном и том же расстоянии от измеряемого дерева (например, в 10 м), высота дерева будет зависеть

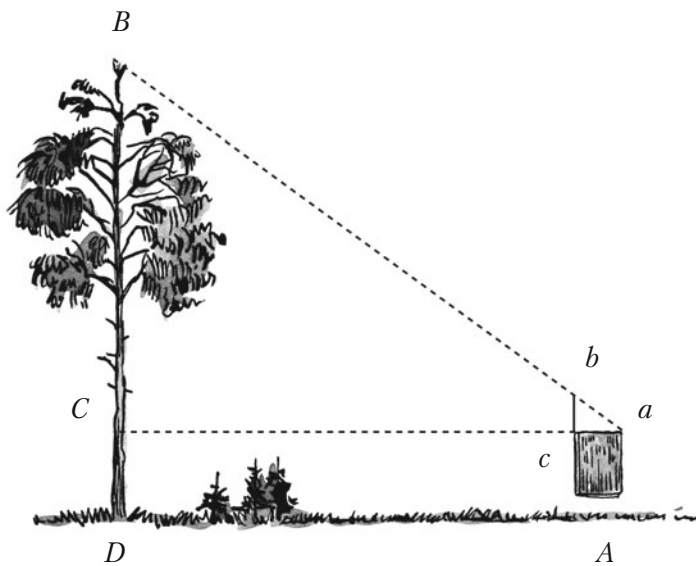


Рис. 9. Измерение высоты при помощи записной книжки

только от выдвинутой части bc карандаша. Поэтому вы можете заранее вычислить, какая высота соответствует тому или иному выдвигению, и нанести эти числа на карандаш.

Ваша записная книжка превратится тогда в упрощённый высотомер, так как вы сможете при её помощи определять высоты сразу, без вычислений.

Не приближаясь к дереву

Случается, что почему-либо неудобно подойти вплотную к основанию измеряемого дерева. Можно ли в таком случае определить его высоту?

Вполне возможно. Для этого придуман остроумный прибор, который, как и предыдущие, легко изготовить самому. Две планки ab и cd (рис. 10,верху) скрепляются под прямым углом так, чтобы ab равнялось bc , а bd составляло половину ab . Вот и весь прибор. Чтобы измерить им высоту, держат его в руках, направив планку cd вертикально (для чего при ней имеется отвес — шнурок с грузиком), и становятся последовательно

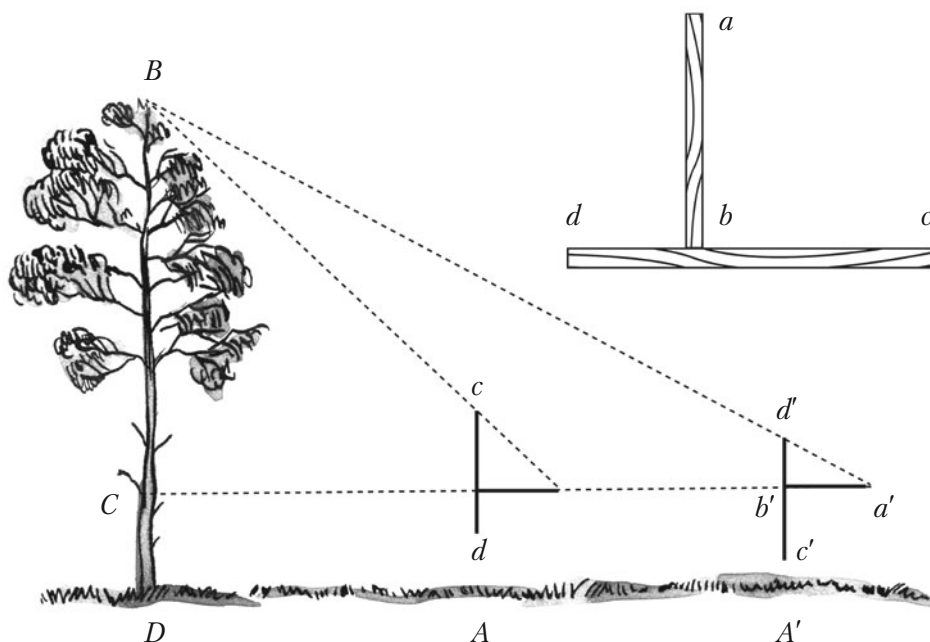


Рис. 10. Применение простейшего высотомера, состоящего из двух планок

в двух местах: сначала (рис. 10) в точке A , где располагают прибор концом c вверх, а затем в точке A' , подальше, где прибор держат вверх концом d . Точка A избирается так, чтобы, глядя из a на конец c , видеть его на одной прямой с верхушкой дерева. Точку же A' отыскивают так, чтобы, глядя из a' на точку d' , видеть её совпадающей с B . В отыскании этих двух точек A и A' * заключается всё измерение, потому что искомая часть высоты дерева BC равна расстоянию AA' . Равенство вытекает, как легко сообразить, из того, что $aC = BC$, а $a'C = 2BC$; значит,

$$a'C - aC = BC.$$

Вы видите, что, пользуясь этим простым прибором, мы измеряем дерево, не подходя к его основанию ближе его высоты. Само собою разумеется, что если подойти к стволу возможно, то достаточно найти только одну из точек — A или A' , чтобы узнать его высоту.

Вместо двух планок, которые предлагает французский изобретатель этого прибора, можно воспользоваться четырьмя булавками, разместив их на дощечке надлежащим образом: в таком виде «прибор» ещё проще.

* Точки эти непременно должны лежать на одной прямой с основанием дерева.

ВЫСОТОМЕР ЛЕСОВОДОВ

Пора объяснить теперь, как устроены «настоящие» высотомеры, которыми пользуются на практике работники леса. Опишу один из подобных высотомеров, несколько изменив его так, чтобы прибор легко было изготовить самому. Сущность устройства видна из рис. 11. Картонный или деревянный прямоугольник $abcd$ держат в руках так, чтобы, глядя вдоль края ab , видеть на одной линии с ним вершину B дерева. В точке b привешен на нити грузик q . Замечают точку n , в которой нить пересекает линию dc . Треугольники bBC и bnc подобны, так как оба прямоугольные и имеют равные острые углы bBC и bnc (с взаимноперпендикулярными сторонами). Значит, мы вправе написать пропорцию:

$$BC : nc = bC : bc;$$

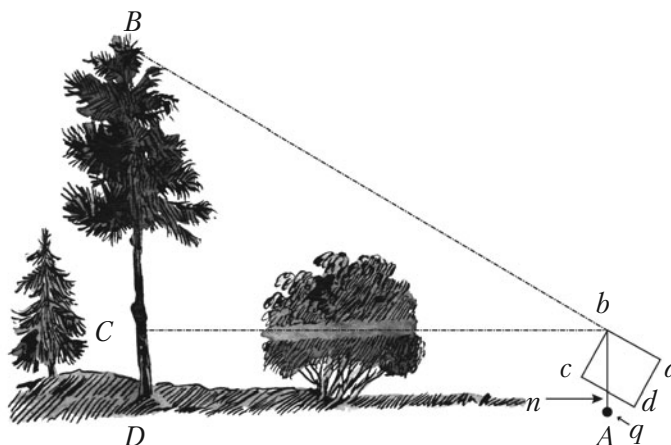


Рис. 11. Схема употребления высотомера лесоводов

отсюда

$$BC = bC \cdot \frac{nc}{bc}.$$

Так как bC , nc и bc можно измерить непосредственно, то легко получить искомую высоту дерева, прибавив длину нижней части CD ствола (высоту прибора над почвой).

Остается добавить несколько подробностей. Если край bc дощечки сделать, например, ровно в 10 см, а на краю dc нанести сантиметровые деления, то отношение nc/bc будет всегда выражаться десятичной дробью, прямо указывающей, какую долю расстояния bC составляет высота BC дерева. Пусть, например, нить остановилась против 7-го деления (т.е. $nc = 7$ см); это значит, что высота дерева над уровнем глаза составляет 0,7 расстояния наблюдателя от ствола.

Второе улучшение относится к способу наблюдения: чтобы удобно было смотреть вдоль линии ab , можно отогнуть у верхних углов картонного прямоугольника два квадратика с просверлёнными в них дырочками: одной поменьше — у глаза, другой побольше — для наведения на верхушку дерева (рис. 12).

В результате у нас получится прибор, изображённый почти в натуральную величину на рис. 12. Изготовить его в таком виде легко и недолго; для этого не требуется особенного умения мастерить. Не занимая в кармане много места, он предоставит вам возможность во время экскурсии быстро определять высоты встречаемых предметов — деревьев, столбов, зданий и т.п.

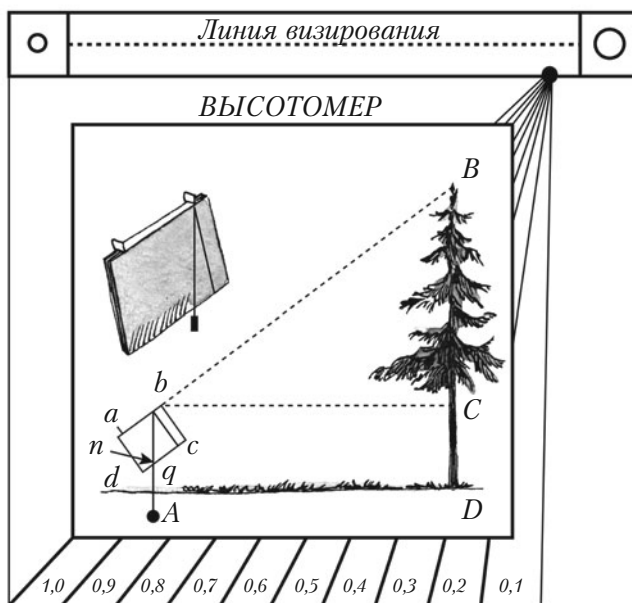


Рис. 12. Высотомер лесоводов

Задача

Можно ли описанным сейчас высотомером измерять деревья, к которым не подойти вплотную? Если можно, то как следует в таких случаях поступать?

Решение

Надо направить прибор на вершину B дерева (рис. 13) с двух точек A и A' . Пусть в A мы определили, что $BC = 0,9AC$, а в точке A' — что $BC = 0,4A'C$. Тогда мы знаем, что

$$AC = \frac{BC}{0,9}, \quad A'C = \frac{BC}{0,4},$$

откуда

$$\begin{aligned} AA' &= A'C - AC = \frac{BC}{0,4} - \frac{BC}{0,9} = \\ &= \frac{0,9BC - 0,4BC}{0,36} = \frac{25}{18}BC. \end{aligned}$$

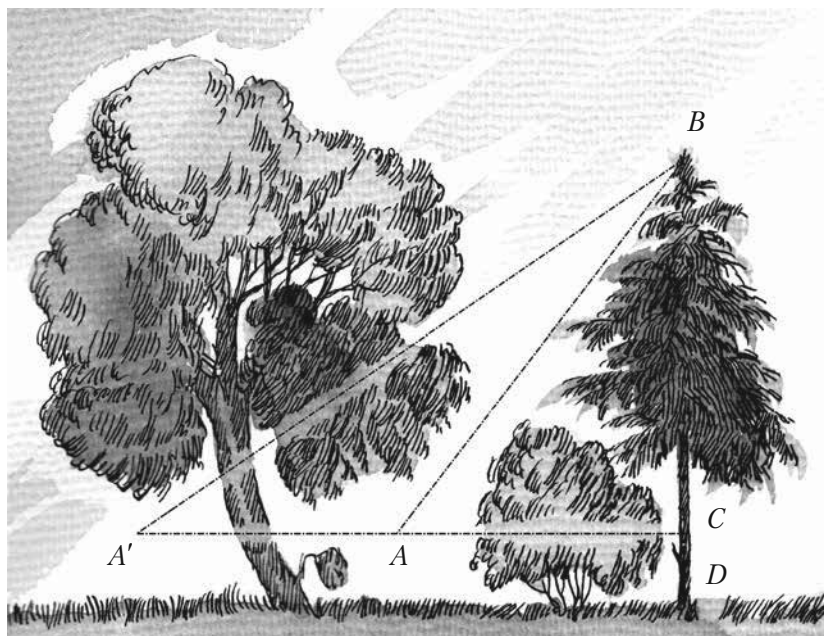


Рис. 13. Как измерить высоту дерева, не приближаясь к нему

Итак,

$$AA' = \frac{25}{18} BC, \quad \text{или} \quad BC = \frac{18}{25} AA' = 0,72 AA'.$$

Вы видите, что, измерив расстояние AA' между обоими местами наблюдения и взяв определённую долю этой величины, мы узнаем искомую недоступную и неприступную высоту.

При помощи зеркала

Задача

Вот ещё своеобразный способ определения высоты дерева при помощи зеркала. На некотором расстоянии (рис. 14) от измеряемого дерева, на ровной земле в точке C кладут горизонтально зеркальце и отходят от него назад в такую точку D , стоя в которой наблюдатель видит в зеркале верхушку A дерева. Тогда дерево (AB) во столько раз выше роста наблюдателя (ED), во сколько раз расстояние BC от зеркала до дерева больше расстояния CD от зеркала до наблюдателя. Почему?

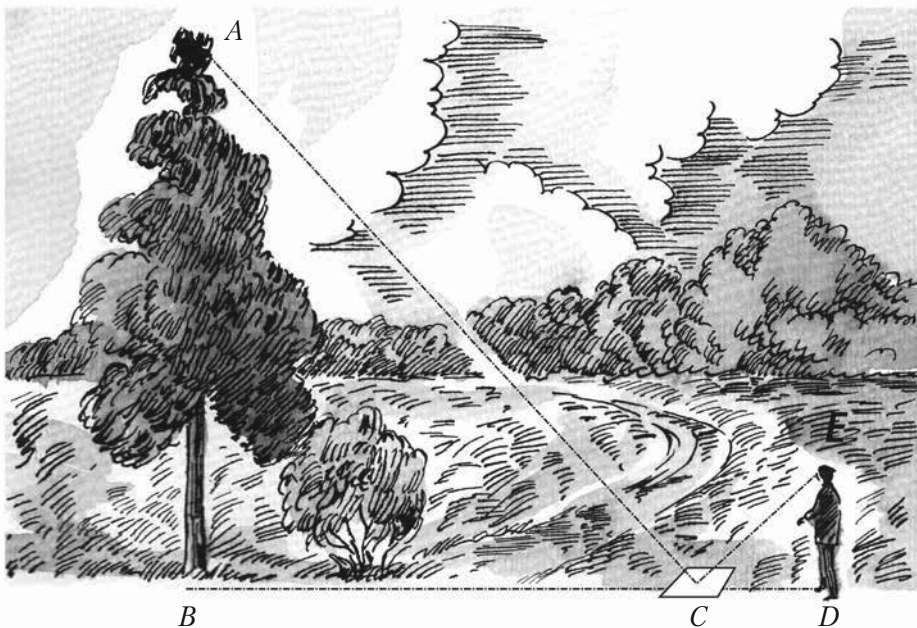


Рис. 14. Измерение высоты при помощи зеркала

Решение

Способ основан на законе отражения света. Вершина A (рис. 15) отражается в точке A' так, что $AB = A'B$. Из подобия же треугольников BCA' и CED следует, что

$$A'B : ED = BC : CD.$$

В этой пропорции остаётся лишь заменить $A'B$ равным ему AB , чтобы обосновать указанное в задаче соотношение.

Этот удобный и нехлопотливый способ можно применять во всякую погоду, но не в густом насаждении, а к одиноко стоящему дереву. Читатель сам догадается, как пользоваться им в тех случаях, когда нельзя приблизиться к дереву вплотную.

Прежде чем окончить беседу об измерении высоты деревьев, предложу читателю ещё одну «лесную» задачу.

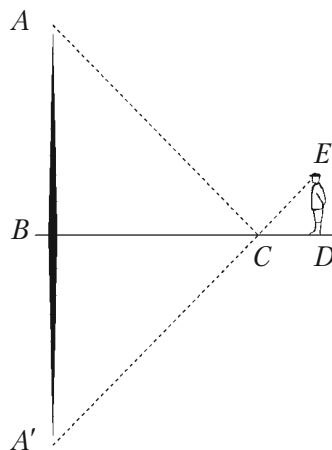


Рис. 15. Геометрическое построение к способу измерения высоты при помощи зеркала

Две сосны

Задача

В 40 м одна от другой растут две сосны. Вы измерили их высоту: одна оказалась 31 м высотой, другая, молодая — всего 6 м.

Можете ли вы вычислить, как велико расстояние между их верхушками?

Решение

Искомое расстояние между верхушками сосен (рис. 16) по теореме Пифагора равно

$$\sqrt{40^2 + 25^2} = 47 \text{ м.}$$

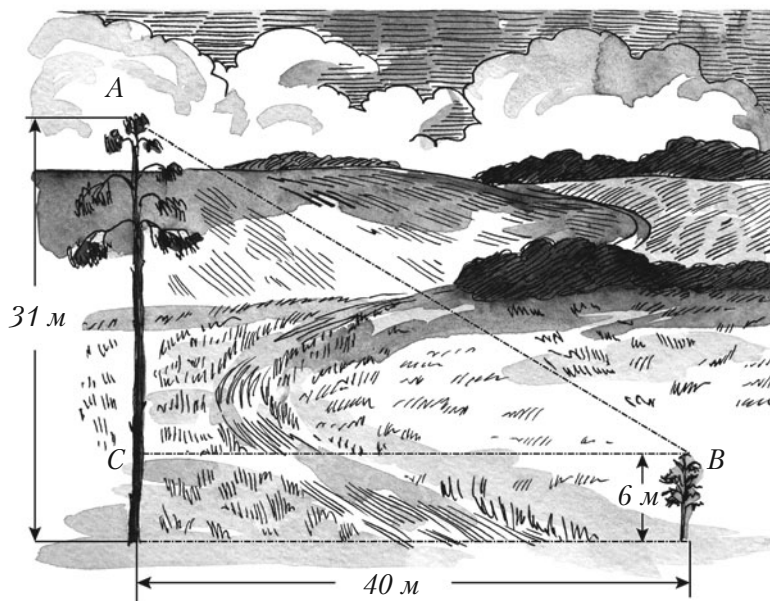


Рис. 16. Как велико расстояние между вершинами сосен?

Форма древесного ствола

Теперь вы можете уже, прогуливаясь по лесу, определить — чуть не полдюжиной различных способов — высоту любого дерева. Вам интересно будет, вероятно, определить также и его объём, вычислить, сколько в нём кубических метров древесины,

а заодно и взвесить его — узнать, можно ли было бы, например, увезти такой ствол на одной телеге. Однако эта задача уже не столь проста, как определение высоты; специалисты не нашли способов точного её разрешения и довольствуются лишь более или менее приближённой оценкой. Даже и для срубленного ствола, который лежит перед вами очищенный от сучьев, задача разрешается далеко не просто.

Дело в том, что древесный ствол, даже самый ровный, без утолщений, не представляет ни цилиндра, ни полного конуса, ни усечённого конуса, ни какого-либо другого геометрического тела, объём которого мы умеем вычислять по формулам. Ствол, конечно, не цилиндр, — он суживается к вершине (имеет «сбег», как говорят лесоводы), но он и не конус, потому что его «образующая» не прямая линия, а кривая, и притом не дуга окружности, а некоторая другая кривая, обращённая выпуклостью к оси дерева*.

Поэтому более или менее точное вычисление объёма древесного ствола выполнимо лишь средствами интегрального исчисления. Иным читателям покажется, быть может, странным, что для измерения простого бревна приходится обращаться к услугам высшей математики. Многие думают, что высшая математика имеет отношение только к каким-то особенным предметам, в обиходной же жизни применима всегда лишь математика элементарная. Это совершенно неверно: можно довольно точно вычислить объём звезды или планеты, пользуясь элементами геометрии; между тем как точный расчёт объёма длинного бревна или пивной бочки невозможен без аналитической геометрии и интегрального исчисления.

Но наша книга не предполагает у читателя знакомства с высшей математикой; придётся поэтому удовлетвориться здесь лишь приблизительным вычислением объёма ствола. Будем исходить из того, что объём ствола более или менее близок либо к объёму усечённого конуса, либо — для ствола с вершинным концом — к объёму полного конуса, либо, наконец, — для коротких брёвен — к объёму цилиндра. Объём каждого из этих трёх тел легко вычислить. Нельзя ли для однообразия расчёта найти такую формулу объёма, которая годилась бы сразу для всех трёх названных тел? Тогда мы приближённо вычисляли бы объём ствола, не интересуясь тем, на что он больше похож — на цилиндр или на конус, полный или усечённый.

* Всего ближе эта кривая подходит к так называемой «полукубической параболе» ($y^3 = ax^2$); тело, полученное вращением этой параболы, называется «нейлоидом» (по имени старинного математика Нейля, нашедшего способ определять длину дуги такой кривой). Ствол выросшего в лесу дерева по форме приближается к нейлоиду. Расчет объёма нейлоида выполняется приёмами высшей математики.

Универсальная формула

Такая формула существует; более того, она пригодна не только для цилиндра, полного конуса и усечённого конуса, но также и для всякого рода призм, пирамид, полных и усечённых, и даже для шара. Вот эта замечательная формула, известная в математике под названием формулы Симпсона:

$$v = \frac{h}{6}(b_1 + 4b_2 + b_3),$$

в которой: h — высота тела,
 b_1 — площадь нижнего основания,
 b_2 — площадь среднего * сечения,
 b_3 — площадь верхнего основания.

* То есть площадь сечения тела посредине его высоты.

Задача

Как доказать, что по приведённой сейчас формуле можно вычислить объём следующих семи геометрических тел: призмы, пирамиды полной, пирамиды усечённой, цилиндра, конуса полного, конуса усечённого, шара.

Решение

Убедиться в правильности этой формулы очень легко простым применением её к перечисленным телам. Тогда получим: для призмы и цилиндра (рис. 17, а)

$$v = \frac{h}{6}(b_1 + 4b_1 + b_1) = b_1 h;$$

для пирамиды и конуса (рис. 17, б)

$$v = \frac{h}{6}(b_1 + 4\frac{b_1}{4} + 0) = \frac{b_1 h}{3};$$

для усечённого конуса (рис. 17, в)

$$v = \frac{h}{6}[\pi R^2 + 4\pi\left(\frac{R+r}{2}\right)^2 + \pi R^2] =$$

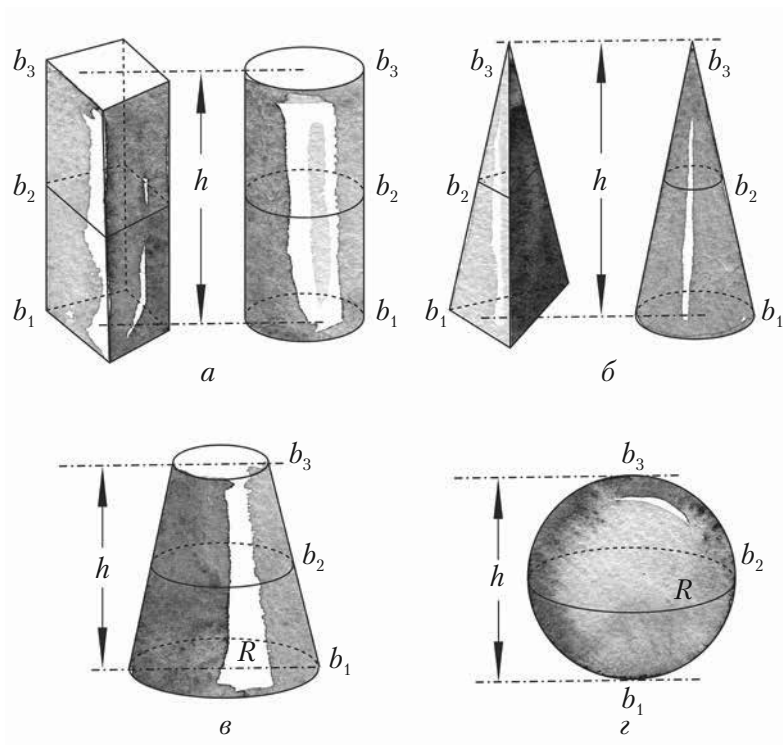


Рис. 17. Геометрические тела, объёмы которых можно вычислить, пользуясь одной формулой

$$\begin{aligned}
 &= \frac{h}{6} (\pi R^2 + \pi R^2 + 2\pi Rr + \pi r^2 + \pi R^2) = \\
 &= \frac{\pi h}{3} (R^2 + Rr + r^2);
 \end{aligned}$$

для усечённой пирамиды доказательство ведётся сходным образом;

наконец, для шара (рис. 17, г)

$$v = \frac{2R}{6} (0 + 4\pi R^2 + 0) = \frac{4}{3} \pi R^3.$$

Задача

Отметим ещё одну любопытную особенность нашей универсальной формулы. Она годится также для вычисления площади *плоских* фигур: параллелограмма, трапеции и треугольника, если под h разуместь, как прежде, высоту фигуры, под b_1 — длину нижнего основания, под b_2 — среднего, под b_3 — верхнего.

Как в этом убедиться?

Решение

Применяя формулу, имеем:
 для параллелограмма (квадрата, прямоугольника) (рис. 18, а)

$$S = \frac{h}{6}(b_1 + 4b_2 + b_3) = b_2 h;$$

для трапеции (рис. 18, б)

$$S = \frac{h}{6}(b_1 + 4 \frac{b_1 + b_3}{2} + b_3) = \frac{h}{2}(b_1 + b_3);$$

для треугольника (рис. 18, в)

$$S = \frac{h}{6}(b_1 + 4 \frac{b_1}{2} + 0) = \frac{b_1 h}{2}.$$

Вы видите, что формула наша имеет достаточно прав называться *универсальной*.

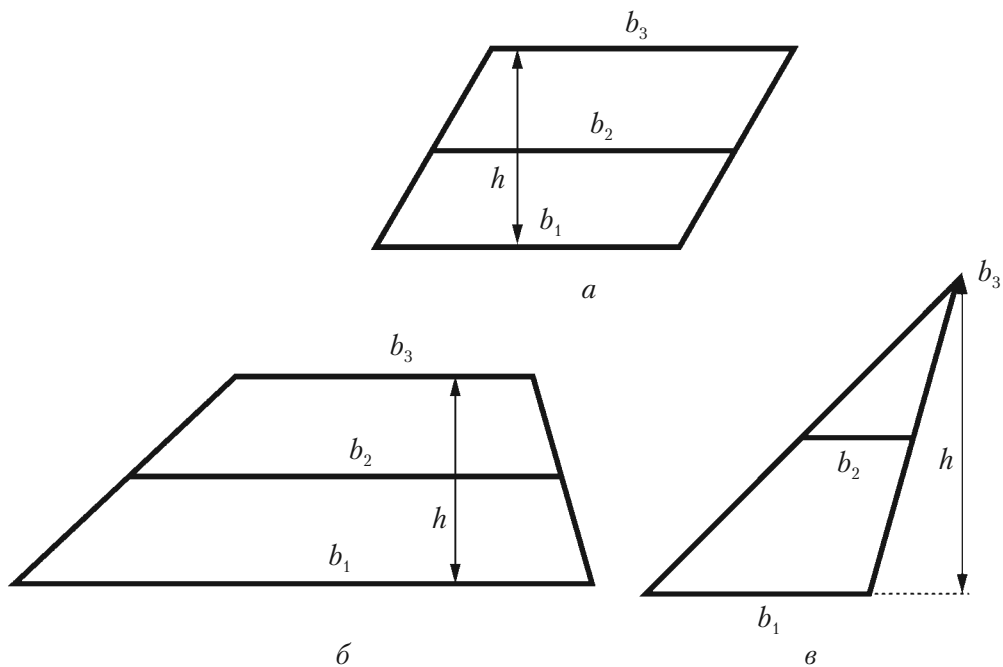


Рис. 18. Универсальная формула пригодна также для вычисления площадей этих фигур.



Рис. 19. Измерение диаметра дерева мерной вилкой

Объём и вес дерева на корню

Итак, вы располагаете формулой, по которой можете приблизительно вычислить объём ствола срубленного дерева, не задаваясь вопросом о том, на какое геометрическое тело он похож: на цилиндр, на полный конус или на усечённый конус. Для этого понадобятся четыре измерения — длины ствола и трёх поперечников: нижнего сруба, верхнего и посередине длины. Измерение нижнего и верхнего поперечников очень просто; непосредственное же определение среднего поперечника без специального приспособления («мерной вилки» лесоводов, рис. 19 и 20*) довольно неудобно. Но трудность можно обойти, если измерить бечёвкой окружность ствола и разделить её длину на $3\frac{1}{7}$, чтобы получить диаметр.

Объём срубленного дерева получится при этом с точностью, достаточной для многих практических целей. Короче, не менее точно решается эта задача, если вычислить объём ствола, как объём цилиндра, диаметр основания которого *равен диаметру* ствола посередине длины: при этом результат получается, однако, преуменьшенный, иногда на 12%. Но если разделить мысленно ствол на отрубки в два метра длины и определить объём каждого из этих почти цилиндрических частей, чтобы, сложив их, получить объём всего ствола, то результат

* Сходным образом устроен общеизвестный прибор для измерения диаметра круглых изделий — штангенциркуль (рис. 20, справа).

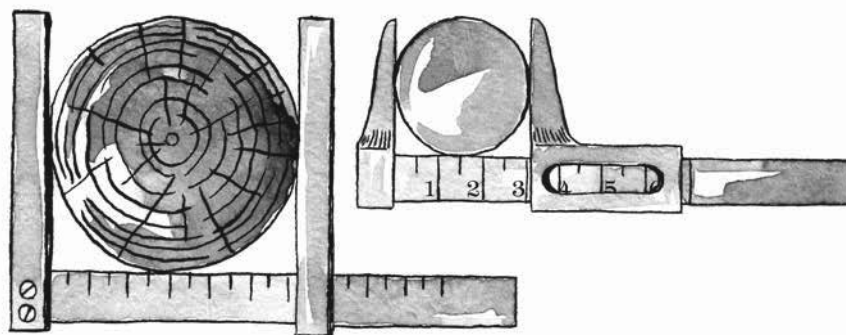


Рис. 20. Мерная вилка (слева) и штангенциркуль (справа)

получится гораздо лучший: он грешит в сторону преуменьшения не более чем на 2–3%.

Всё это, однако, совершенно неприменимо к дереву на корню: если вы не собираетесь взбираться на него, то вашему измерению доступен только диаметр его нижней части. В этом случае придётся для определения объёма довольствоваться лишь весьма приближённой оценкой, утешаясь тем, что и профессиональные лесоводы поступают обычно сходным же образом. Они пользуются для этого таблицей так называемых «видовых чисел», т.е. чисел, которые показывают, какую долю объём измеряемого дере-

ва составляет от объёма цилиндра той же высоты и диаметра, измеренного на высоте груди взрослого человека, т.е. 130 см (на этой высоте его удобнее всего измерять). Рис. 21 наглядно поясняет сказанное. Конечно, «видовые числа» различны для деревьев разной породы и высоты, так как форма ствола изменчива. Но колебания не особенно велики: для стволов сосны и для ели (выросших в густом насаждении) «видовые числа» заключаются между 0,45 и 0,51, т.е. равны примерно половине.

Значит, без большой ошибки можно принимать за объём хвойного дерева на корню половину объёма цилиндра той же высоты с диаметром, равным поперечнику дерева на высоте груди. Это, разумеется, лишь при-

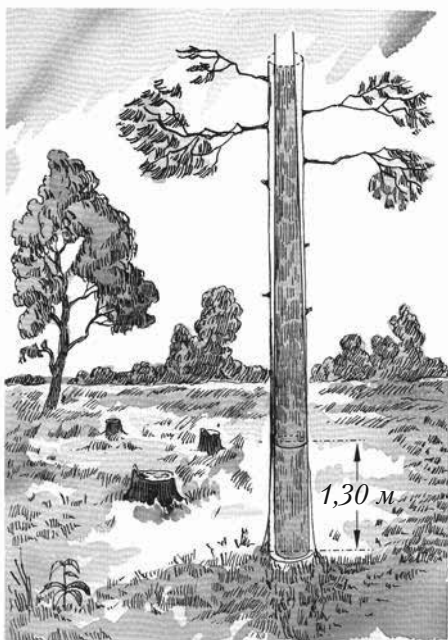


Рис. 21. Что такое «видовое число»

ближённая оценка, но не слишком отклоняющаяся от истинного результата: до 2% в сторону преувеличения и до 10% в сторону преуменьшения*.

Отсюда уже один шаг к тому, чтобы оценить и *вес* дерева на корню. Для этого достаточно лишь знать, что 1 м³ свежей сосновой или еловой древесины весит около 600–700 кг. Пусть, например, вы стоите возле ели, высоту которой вы определили в 28 м, а окружность ствола на высоте груди оказалась равной 120 см. Тогда площадь соответствующего круга равна 1131 см², или 0,1131 м², а объём ствола $\frac{1}{2} \cdot 0,11 \cdot 28 = 1,58$ м³. Принимая, что 1 м³ свежей еловой древесины весит в среднем 650 кг, находим, что 1,58 м³ должны весить свыше тонны (1000 кг).

* Необходимо помнить, что «видовые числа» относятся лишь к деревьям, выросшим в лесу, т. е. к высоким и тонким (ровным, без узлов); для отдельно стоящих ветвистых деревьев нельзя указать подобных общих правил вычисления объёма.

Геометрия листьев

Задача

В тени серебристого тополя от его корней разрослась поросль. Сорвите лист и заметьте, как он велик по сравнению с листьями родительского дерева, особенно с теми, что выросли на ярком солнце. Теневые листья возмещают недостаток света размерами своей площади, улавливающей солнечные лучи. Разобраться в этом — задача ботаника. Но и геометр может сказать здесь своё слово: он может определить, во сколько именно раз площадь листа поросли больше площади листа родительского дерева.

Как решили бы вы эту задачу?

Решение

Можно идти двояким путём. Во-первых, определить площадь каждого листа в отдельности и найти их отношение. Измерить же площадь листа можно, покрывая его прозрачной клетчатой бумагой, каждый квадратик которой соответствует, например, 4 мм² (листок прозрачной клетчатой бумаги, употребляемой для подобных целей, называется *палеткой*). Это хотя и вполне правильный, но чересчур кропотливый способ**.

Более короткий способ основан на том, что оба листа, различных по величине, имеют всё же одинаковую или почти одинаковую форму: другими словами, это фигуры, геометрически

** У этого способа есть, однако, и преимущество: пользуясь им, можно сравнивать площади листьев, имеющих *неодинаковую* форму, чего нельзя сделать по далее описанному способу.

подобные. Площади таких фигур, мы знаем, относятся, как квадраты их линейных размеров. Значит, определив, во сколько раз один лист длиннее или шире другого, мы простым возведением этого числа в квадрат узнаем отношение их площадей. Пусть лист поросли имеет в длину 15 см, а лист с ветви дерева — только 4 см; отношение линейных размеров $15/4$, и значит, по площади один больше другого в $225/16$, т.е. в 14 раз. Округляя (так как полной точности здесь быть не может), мы вправе утверждать, что порослевый лист больше древесного по площади примерно в 15 раз.

Ещё пример.

Задача

У одуванчика, выросшего в тени, лист имеет в длину 31 см. У другого экземпляра, выросшего на солнцепёке, длина листовой пластинки всего 3,3 см. Во сколько примерно раз площадь первого листа больше площади второго?

Решение

Поступаем по предыдущему образцу. Отношение площадей равно

$$\frac{31^2}{3,3^2} = \frac{961}{10,89} = \text{около } 87;$$

значит, один лист больше другого по площади раз в 80 – 90.

Нетрудно подобрать в лесу множество пар листьев одинаковой формы, но различной величины и таким образом получить любопытный материал для геометрических задач на отношение площадей подобных фигур. Непривычному глазу всегда кажется странным при этом, что сравнительно небольшая разница в длине и ширине листьев порождает заметную разницу в их площадях. Если, например, из двух листьев, геометрически подобных по форме, один длиннее другого на 20%, то отношение их площадей равно

$$1,2^2 = 1,44,$$

т.е. разница составляет 44%. А при различии ширины в 44% один лист превышает другой по площади в

$$1,4^2 = 1,96$$

раза, т.е. почти вдвое.

Задача

Предлагаем читателю определить отношение площадей двух пар листьев, изображённых на рис. 22 и 23.



Рис. 22–23. Определите отношение площадей этих листьев

Шестиногие богатыри

Удивительные создания муравьи! Проворно взбегая по стелёжке вверх с тяжёлой для своего крошечного роста ношей в челюстях (рис. 24), муравей задаёт наблюдательному человеку головоломную задачу: откуда у насекомого берётся сила, чтобы без видимого напряжения втаскивать груз в десять раз тяжелее его самого? Ведь человек не мог бы взбегать по лестнице, держа на плечах, например, пианино (рис. 24), а отношение веса груза к весу тела у муравья примерно такое же. Выходит, что муравей относительно сильнее человека!

Так ли?

Без геометрии здесь не разобраться. Послушаем, что говорит специалист (проф. А. Ф. Брандт) прежде всего о силе мускулов, а затем и о поставленном сейчас вопросе соотношения сил насекомого и человека:

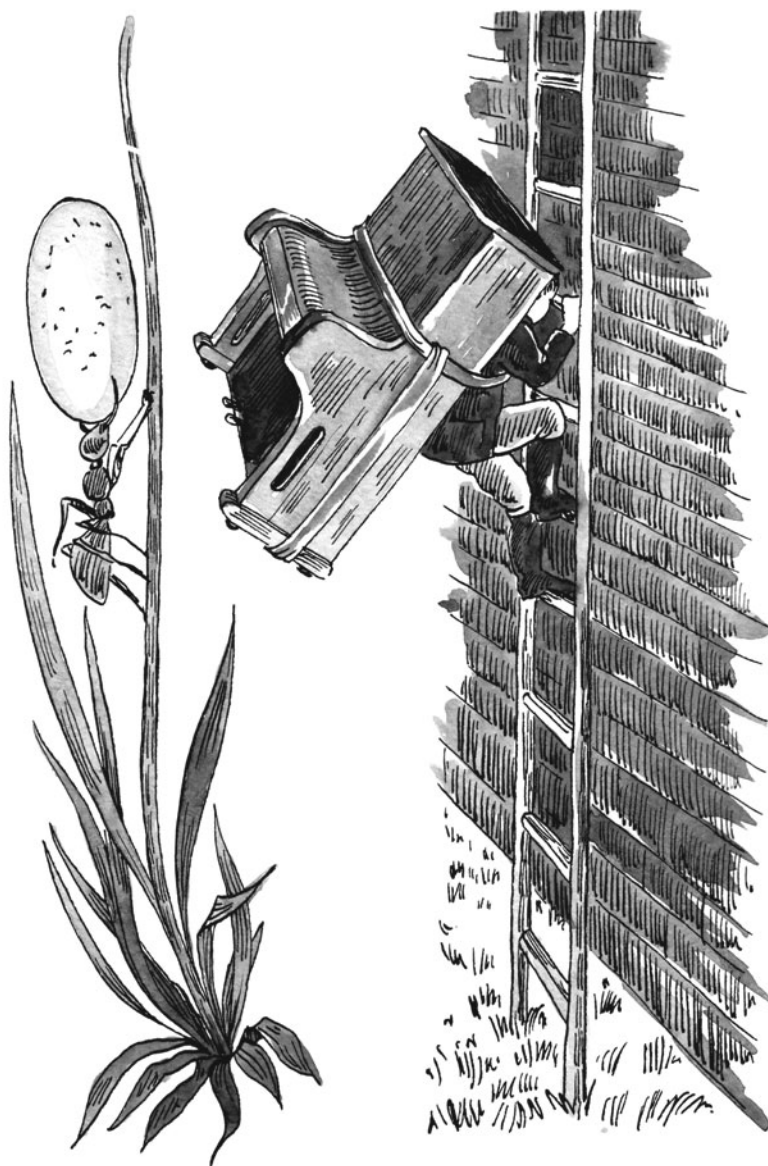


Рис. 24. *Шестиногий богатырь*

Живой мускул уподобляется упругому шнуру: только сокращение его основано не на упругости, а на других причинах и проявляется нормально под влиянием нервного возбуждения, а в физиологическом опыте от прикладывания электрического тока к соответствующему нерву или непосредственно к самому мускулу.

Опыты весьма легко проделываются на мускулах, вырезанных из только что убитой лягушки, так как мускулы холоднокровных животных весьма долго и вне организма, даже при

обыкновенной температуре, сохраняют свои жизненные свойства. Форма опыта очень простая. Вырезают главный мускул, разгибающий заднюю лапу, — мускул икр — вместе с куском бедренной кости, от которой он берёт начало, и вместе с концевым сухожилием. Этот мускул оказывается наиболее удобным и по своей величине, и по форме, и по лёгкости препаровки. За обрезок кости мускул подвешивают на станке, а сквозь сухожилие продевают крючок, на который нацепляют гирию. Если до такого мускула дотрагиваться проволоками, идущими от гальванического элемента, то он моментально сокращается, укорачивается и приподнимает груз. Постепенным накладыванием дополнительных разновесов легко определить максимальную подъёмную способность мускула. Свяжем теперь по длине два, три, четыре одинаковых мускула и станем раздражать их сразу. Этим мы не достигнем большей подъёмной силы, а груз будет подниматься лишь на бóльшую высоту, соответственно суммировке укорочений отдельных мускулов. Зато, если свяжем два, три, четыре мускула в пучок, то вся система будет при раздражении поднимать и в соответственное число раз больший груз. Точно такой же результат, очевидно, получился бы и тогда, когда бы мускулы между собою срослись. Итак, мы убеждаемся в том, что подъёмная сила мускулов зависит не от длины или общей массы, а лишь от толщины, т.е. поперечного разреза.

После этого отступления обратимся к сличению одинаково устроенных, геометрически подобных, но различных по величине животных. Мы представим себе двух животных: первоначальное и вдвое увеличенное во всех линейных измерениях. У второго объём и вес всего тела, а также каждого из его органов будет в 8 раз больше; все же соответственные плоскостные измерения, в том числе и поперечное сечение мускулов, лишь в 4 раза больше. Оказывается, мускульная сила, по мере того как животное разрастается до двойной длины и восьмёрного веса, увеличивается лишь в четыре раза, т.е. животное сделалось относительно вдвое слабее. На этом основании животное, которое втрое длиннее (с поперечными сечениями в 9 раз обширнейшими и с весом в 27 раз большим), оказывалось бы относительно втрое слабее, а то, которое вчетверо длиннее, — вчетверо слабее и т.д.

Законом неодинакового нарастания объёма и веса животного, а вместе с тем и мускульной силы, объясняется, почему

* Подробно об этом см. в моей книге «Занимательная механика», гл. X, «Механика в живой природе».

насекомое — как мы это наблюдаем на муравьях, хищных осах и т. д. — может тащить тяжести, в 30, в 40 раз превосходящие вес собственного их тела, тогда как человек в состоянии тащить нормально — мы исключаем гимнастов и носильщиков тяжестей — лишь около $\frac{9}{10}$, а лошадь, на которую мы взираем как на прекрасную живую рабочую машину, и того меньше, а именно лишь около $\frac{7}{10}$ своего веса*.





ГЛАВА ВТОРАЯ

ГЕОМЕТРИЯ У РЕКИ

Измерить ширину реки

Не переплывая реки, измерить её ширину так же просто для знающего геометрию, как определить высоту дерева, не взбираясь на вершину. Непрístupное расстояние измеряют теми же приёмами, какими мы измеряли недоступную высоту. В обоих случаях определение искомого расстояния заменяется промером другого расстояния, легко поддающегося непосредственному измерению.

Из многих способов решения этой задачи рассмотрим несколько наиболее простых.

1) Для первого способа понадобится уже знакомый нам «прибор» с тремя булавками на вершинах равнобедренного прямоугольного треугольника (рис. 25). Пусть требуется определить ширину AB реки (рис. 26), стоя на том берегу, где точка B , и не перебираясь на противоположный. Став где-нибудь у точки C , держите булавочный прибор близ глаз так, чтобы, смотря одним глазом вдоль двух булавок, вы видели, как обе они покрывают точки B и A . Понятно, что, когда это вам удастся, вы будете находиться как раз на продолжении прямой AB . Теперь,



Рис. 28. Пользуемся признаками равенства треугольников

глаза булавкой b шест точки C , а булавкой a — точку A . Это будет значить, что вы отыскиали на берегу третью вершину треугольника ACE , в котором угол C — прямой, а угол E равен острому углу булавочного прибора, т.е. $\frac{1}{2}$ прямого. Очевидно, и угол A равен $\frac{1}{2}$ прямого, т.е. $AC = CE$. Если вы измерите расстояние CE хотя бы шагами, вы узнаете расстояние AC , а отняв BC , которое легко измерить, определите искомую ширину реки.

Довольно неудобно и трудно держать в руке булавочный прибор неподвижно; лучше поэтому прикрепить эту дощечку к палке с заострённым концом, которую и втыкать отвесно в землю.

2) Второй способ сходен с первым. Здесь также находят точку C на продолжении AB и намечают при помощи булавочного прибора прямую CD под прямым углом к CA . Но дальше поступают иначе (рис. 28). На прямой CD отмеряют равные расстояния CE и EF произвольной длины и втыкают в точки E и F вехи. Став затем в точке F с булавочным прибором, намечают направление FG , перпендикулярное к FC . Теперь, идя вдоль FG , отыскивают на этой линии такую точку H , из которой веха E кажется покрывающей точку A . Это будет означать, что точки H , E и A лежат на одной прямой.



Рис. 29. Пользуемся признаками подобия треугольников

Задача решена: расстояние FH равно расстоянию AC , от которого достаточно лишь отнять BC , чтобы узнать искомую ширину реки (читатель, конечно, сам догадается, почему FH равно AC).

Этот способ требует больше места, чем первый; если местность позволяет осуществить оба приёма, полезно проверить один результат другим.

3) Описанный сейчас способ можно видоизменить: отмерить на прямой CF не равные расстояния, а одно в несколько раз меньше другого. Например (рис. 29), отмеряют FE в четыре раза меньше EC , а далее поступают по-прежнему: по направлению FG , перпендикулярному к FC , отыскивают точку H , из которой вежа E кажется покрывающей точку A . Но теперь уже FH не равно AC , а меньше этого расстояния в четыре раза: треугольники ACE и EFH здесь не равны, а подобны (имеют равные углы при неравных сторонах). Из подобия треугольников следует пропорция:

$$AC : FH = CE : EF = 4 : 1.$$

Значит, измерив FH и умножив результат на 4, получим расстояние AC , а отняв BC , узнаем искомую ширину реки.

Этот способ требует, как мы видим, меньше места и потому удобнее для выполнения, чем предыдущий.

4) Четвёртый способ основан на том свойстве прямоугольного треугольника, что если один из его острых углов равен 30° , то противолежащий катет составляет половину гипотенузы. Убедиться в правильности этого положения очень легко. Пусть угол B прямоугольного треугольника ABC (рис. 30, слева) равен 30° ; докажем, что в таком случае $AC = \frac{1}{2}AB$. Повернем треугольник ABC вокруг BC так, чтобы он расположился симметрично своему первоначальному положению (рис. 30, справа), образовав фигуру ABD ; линия ACD — прямая, потому что оба угла у точки C прямые. В треугольнике ABD угол $A = 60^\circ$; угол ABD , как составленный из двух углов по 30° , тоже равен 60° . Значит, $AD = BD$, как стороны, лежащие против равных углов. Но $AC = \frac{1}{2}AD$; следовательно, $AC = \frac{1}{2}AB$.

Желая воспользоваться этим свойством треугольника, мы должны расположить булавки на дощечке так, чтобы основания их обозначали прямоугольный треугольник, в котором катет вдвое меньше гипотенузы. С этим прибором мы помещаемся в точке C (рис. 31) так, чтобы направление AC совпадало с гипотенузой булавочного треугольника. Смотря вдоль короткого катета этого треугольника, намечают направление CD и отыскивают на нём такую точку E , чтобы направление EA было перпендикулярно к CD (это выполняется при помощи того же булавочного прибора). Легко сообразить, что расстояние CE — катет, лежащий против угла 30° , — равно половине AC . Значит, измерив CE , удвоив это расстояние и отняв BC , получим искомую ширину AB реки.

Вот четыре легко выполнимых приёма, при помощи которых всегда возможно, не переправляясь на другой берег, измерить

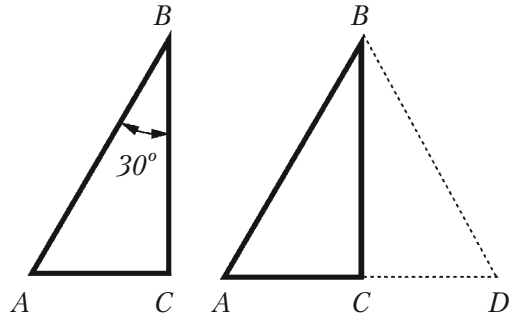


Рис. 30. Когда катет равен половине гипотенузы

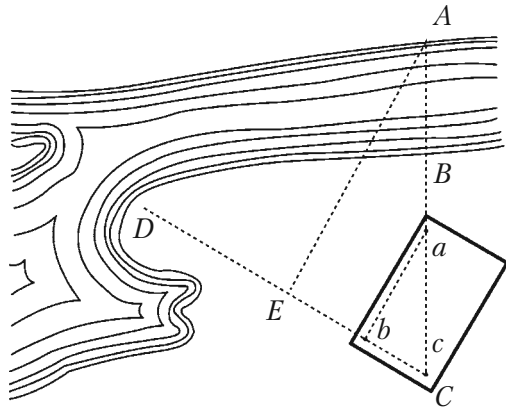


Рис. 31. Схема применения прямоугольного треугольника с углом в 30°

ширину реки со вполне удовлетворительной точностью. Способы, требующие употребления более сложных приборов (хотя бы и самодельных), мы здесь рассматривать не будем.

Длина острова

Задача

Теперь нам предстоит задача более сложная. Стоя у реки или у озера, вы видите остров (рис. 32), длину которого желаете измерить, не покидая берега. Можно ли выполнить такое измерение?

Хотя в этом случае для нас неприступны оба конца измеряемой линии, задача всё же вполне разрешима, притом без сложных приборов.

Решение

Пусть требуется узнать длину AB (рис. 33) острова, оставаясь во время измерения на берегу. Избрав на берегу две произвольные точки P и Q , втыкают в них вехи и отыскивают на прямой PQ точки M и N так, чтобы направления AM и BN составляли



Рис 32. Как определить длину острова?

с направлением PQ прямые углы (для этого пользуются булавочным прибором). В середине O расстояния MN втыкают веху и отыскивают на продолжении линии AM такую точку C , откуда веха O кажется покрывающей точку B . Точно так же на продолжении BN отыскивают точку D , откуда веха O кажется покрывающей конец A острова. Расстояние CD и будет искомой длиной острова.

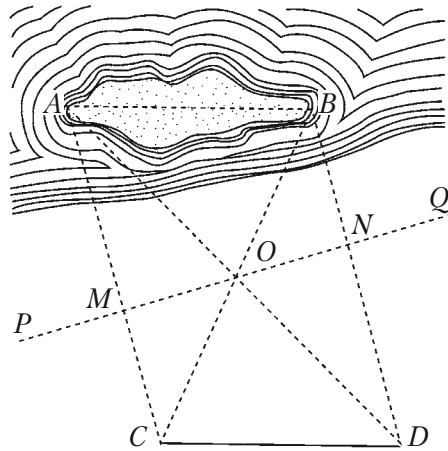


Рис. 33. Пользуемся признаками равенства прямоугольных треугольников

Доказать это нетрудно. Рассмотрим прямоугольные треугольники AMO и OND ; в них катеты MO и NO равны, а кроме того, равны углы AOM и NOD ; следовательно, треугольники равны и $AO = OD$. Сходным образом можно доказать, что $BO = OC$. Сравнивая затем треугольники ABO и COD , убеждаемся в их равенстве, а значит, и в равенстве расстояний AB и CD .

Пешеход на другом берегу

Задача

По другому берегу вдоль реки идёт человек. Вы отчётливо различаете его шаги. Можете ли вы, не сходя с места, определить, хотя бы приблизительно, расстояние от него до вас? Никаких приборов под рукою у вас нет.

Решение

У вас нет приборов, но есть глаза и руки, — этого достаточно. Вытяните руку вперёд по направлению к пешеходу и смотрите на конец пальца одним глазом, ожидая, когда отдалённый пешеход покроется им. В этот момент вы закрываете глаз, которым сейчас смотрели, и открываете другой: пешеход покажется вам словно отодвинутым назад. Сосчитайте, сколько шагов сделает он, прежде чем снова поравняется с вашим пальцем. Вы получите все данные, необходимые для приблизительного определения расстояния.



Рис. 34. Как определить расстояние до пешехода, идущего по другому берегу реки

Объясним, как ими воспользоваться. Пусть на рис. 34 a и b — ваши глаза, точка M — конец пальца вытянутой руки, точка A — первое положение пешехода, B — второе. Треугольники abM и ABM подобны (вы должны повернуться к пешеходу так, чтобы ab было приблизительно параллельно направлению его движения). Значит, $BM : bM = AB : ab$ — пропорция, в которой неизвестен только один член BM , все же остальные можно определить непосредственно. Действительно, bM — длина вашей вытянутой руки; ab — расстояние между зрачками ваших глаз, AB измерено шагами пешехода (шаг можно принять в среднем равным $\frac{3}{4}$ м). Следовательно, неизвестное расстояние от вас до пешехода на противоположном берегу реки равно

$$MB = AB \cdot \frac{bM}{ab}.$$

Если, например, расстояние между зрачками глаз (ab) у вас 6 см, длина bM от конца вытянутой руки до глаза 60 см, а пешеход сделал от A до B , скажем, 14 шагов, то расстояние его от вас $MB = 14 \cdot \frac{60}{6} = 140$ шагов, или 105 м.

Достаточно вам заранее измерить у себя расстояние между зрачками и bM — расстояние от глаза до конца вытянутой руки, чтобы, запомнив их отношение bM/ab , быстро определять удаление недоступных предметов. Тогда останется лишь умножить AB на это отношение. В среднем у большинства людей bM/ab равно 10 с небольшими колебаниями. Затруднение будет лишь в том, чтобы каким-нибудь образом определить расстояние AB . В нашем случае мы воспользовались шагами идущего вдали человека. Но можно привлечь к делу и иные указания. Если вы измеряете, например, расстояние до отдалённого товарного поезда, то длину AB можно оценить по сравнению с длиной товарного вагона, которая обычно известна (7,6 м между буферами). Если определяется расстояние до дома, то AB оценивают по сравнению с шириной окна, с длиной кирпича (27 см) и т. п.

Тот же приём можно применить и для определения размера отдалённого предмета, если известно его расстояние от наблюдателя. Для этой цели можно пользоваться и иными «дальномерами», которые мы сейчас опишем.

Простейшие дальномеры

В первой главе был описан самый простой прибор для определения недоступных высот — высотомер. Теперь опишем простейшее приспособление для измерения неприступных расстояний — «дальномер». Простейший дальномер можно изготовить из обыкновенной спички. Для этого нужно лишь нанести на одной из её граней миллиметровые деления, для ясности попеременно светлые и чёрные (рис. 35).

Пользоваться этим примитивным «дальномером» для оценки расстояния до отдалённого предмета можно только в тех случаях, когда размеры этого предмета вам известны; впрочем, и всякого рода иными дальномерами более совершенного устройства можно пользоваться при том же условии. Предположим, вы видите



Рис. 35. Спичка-дальномер

вдали человека и ставите себе задачу определить расстояние до него. Здесь спичка-дальномер может вас выручить. Держа её в своей вытянутой руке (рис. 36) и глядя одним глазом, вы приводите свободный её конец в совпадение с верхней частью отдалённой фигуры. Затем, медленно подвигая по спичке ноготь большого пальца, останавливаете его у той её точки, которая проектируется на основание человеческой фигуры. Вам остаётся теперь только узнать, приблизив спичку к глазу, у которого деления остановился ноготь, — и тогда все данные для решения задачи у вас налицо.

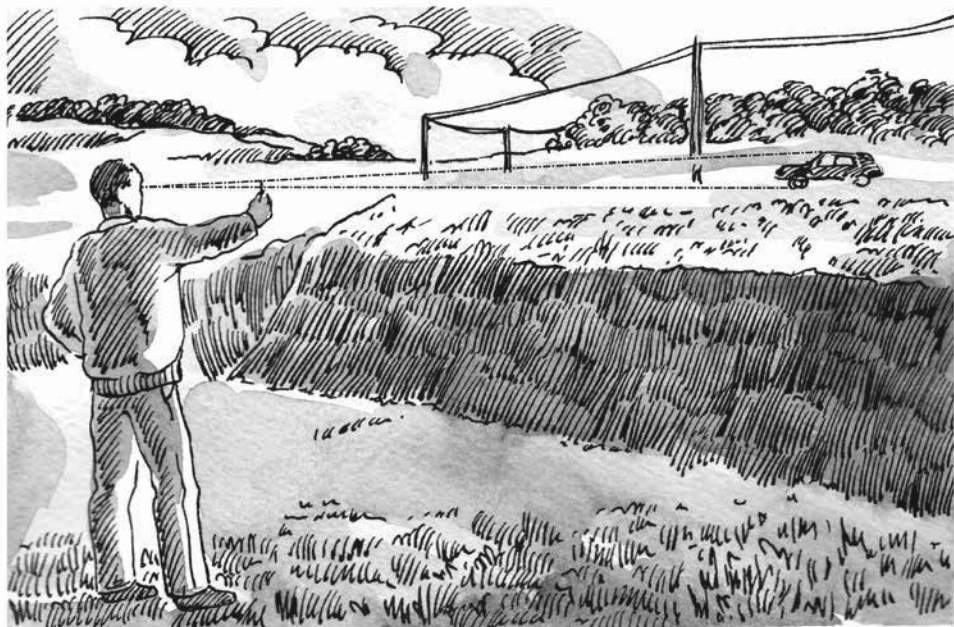


Рис. 36. *Употребление спички-дальномера для определения недоступных расстояний*

Легко убедиться в правильности пропорции:

$$\frac{\text{искмое расстояние}}{\text{расстояние от глаза до спички}} = \frac{\text{средний рост человека}}{\text{измеренная часть спички}}.$$

Отсюда нетрудно вычислить искомое расстояние. Если, например, расстояние до спички 60 см, рост человека 1,7 м, а измеренная часть спички 12 мм, то определяемое расстояние равно

$$60 \cdot \frac{1700}{12} = 8500 \text{ см} = 85 \text{ м.}$$

Чтобы приобрести некоторый навык в обращении с этим дальномером, измерьте рост кого-либо из ваших товарищей и, попросив его отойти на некоторое расстояние, попытайтесь определить, на сколько шагов он от вас отошёл.

Тем же приёмом вы можете определить расстояние до всадника (средняя высота 2,2 м), велосипедиста (диаметр колеса 75 см), телеграфного столба вдоль рельсового пути (высота 8 м, отвесное расстояние между соседними изоляторами 90 см), до железнодорожного поезда, кирпичного дома и тому подобных предметов, размеры которых нетрудно оценить с достаточной точностью. Таких случаев может представиться во время экскурсий довольно много.

Для умеющих мастерить не составит большого труда изготовление более удобного прибора того же типа, предназначенного для оценки расстояний по величине отдалённой человеческой фигуры.

Устройство это ясно на рис. 37 и 38. Наблюдаемый предмет помещают как раз в промежуток *A*, образующийся при поднятии выдвижной части приборчика. Величина промежутка удобно определяется по делениям на частях *C* и *D* дощечки. Чтобы избавить себя от необходимости делать какие-либо расчёты, можно на полоске *C* прямо нанести против делений соответствующие им расстояния, если наблюдаемый предмет — человеческая фигура (прибор держат от глаза на расстоянии вытянутой руки). На правой полоске *D* можно нанести обозначения расстояний, заранее вычисленных для случаев, когда наблюдается фигура всадника (2,2 м). Для телеграфного столба (высота 8 м), аэроплана с размахом

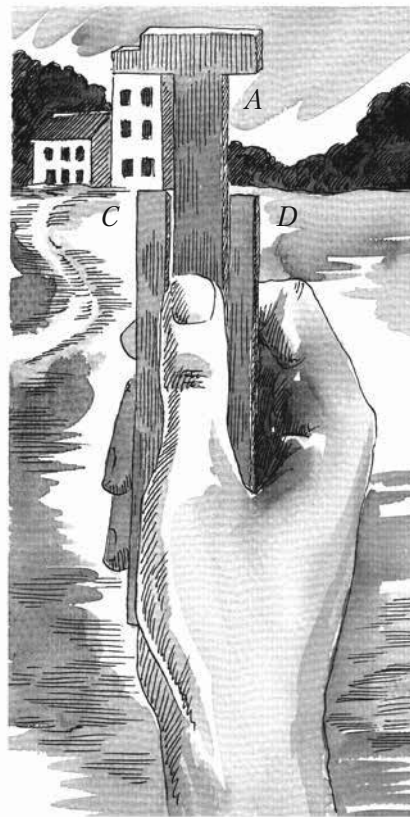


Рис. 37. Выдвижной дальномер в действии

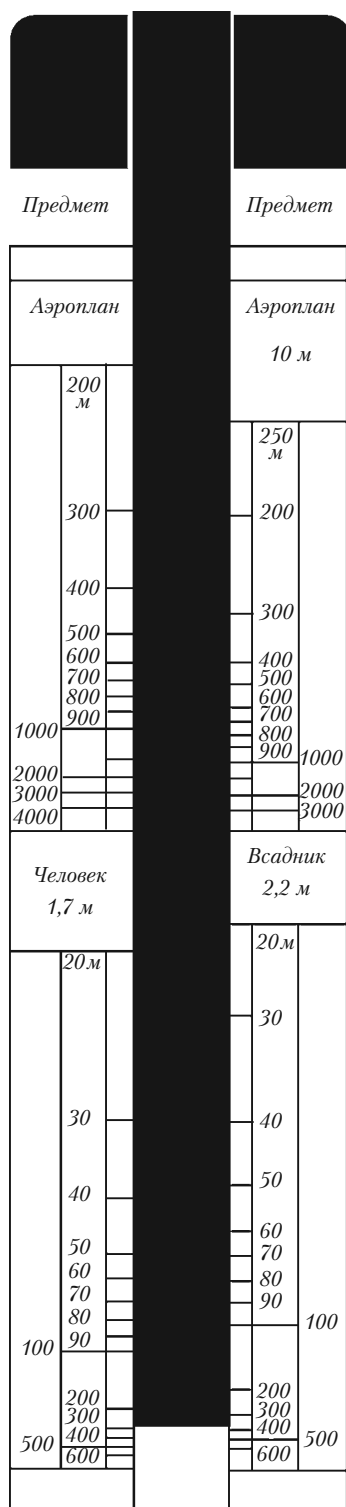


Рис. 38. Устройство выдвжного дальномера

крыльев 15 м и тому подобных более крупных предметов можно использовать верхние, свободные части полосок *C* и *D*. Тогда прибор получит вид, представленный на рис. 38.

Конечно, точность такой оценки расстояния невелика. Это именно лишь оценка, а не измерение. В примере, рассмотренном ранее, когда расстояние до человеческой фигуры оценено было в 85 м, ошибка в 1 мм при измерении части спички дала бы погрешность результата в 7 м ($\frac{1}{12}$ от 85). Но если бы человек отстоял вчетверо дальше, мы отмерили бы на спичке не 12, а 3 мм, и тогда ошибка даже в $\frac{1}{2}$ мм вызвала бы изменение результата на 57 м. Поэтому наш пример в случае человеческой фигуры надёжен только для сравнительно близких расстояний — в 100–200 м. При оценке больших расстояний надо избирать и более крупные предметы.

Скорость течения

«Много воды утекло с тех пор» — часто говорим мы, но мало кто умеет ответить на вопрос, сколько именно воды протекает, например, в сутки даже в небольшой речке. Между тем, это вполне поддаётся измерению и представляет сравнительно нетрудную геометрическую задачу.

Чтобы решить её, нужно, прежде всего, измерить скорость течения воды в реке. Измерение выполняют несколько человек. Выбирают прямой



Рис 39. Измерение скорости течения реки

участок реки и ставят вдоль берега две вехи — A и B — на расстоянии, например, 100 м одну от другой (рис. 39).

На линиях, перпендикулярных к AB , ставят ещё две вехи — C и D . Один из участников измерения становится позади вехи D . Другой, с поплавком, заходит несколько выше вехи A ; поплавок бросает в воду, а сам становится позади вехи C . Оба смотрят вдоль направлений CA и DB на поверхность воды. Третий участник бросает в воду выше точки A какой-нибудь хорошо заметный поплавок, например закупоренную полупустую бутылку с флажком. Наблюдатели, стоящие у вех с хорошо выверенными часами в руках, отмечают моменты, когда поплавок пересечёт продолжение линий AC и DB . Если разница во времени, например, 40 секунд, то скорость течения воды в реке

$$\frac{100}{40} = 2,5 \text{ м в секунду.}$$

Полученный результат относится лишь к поверхностным струям реки. Более глубокие слои текут медленнее, и средняя скорость всего потока составляет приблизительно $\frac{5}{6}$ от поверхностной скорости — в нашем случае, следовательно, около 2 м в секунду.

Можно определить поверхностную скорость и иным — правда, менее надёжным — способом. Сядьте в лодку и плывите 1 км (отмеренный по берегу) против течения, а затем обратно — по течению, стараясь всё время грести с одинаковой силой. Пусть вы проплыли эти 1000 м против течения за 18 минут, а по течению — за 6 минут. Обозначив искомую скорость течения реки через x , а скорость вашего движения в стоячей воде через y , вы составляете уравнения

$$\frac{1000}{y - x} = 18, \quad \frac{1000}{y + x} = 6,$$

откуда

$$\begin{aligned} y + x &= \frac{1000}{6} \\ y - x &= \frac{1000}{18} \\ \hline 2x &= 111,1 \\ x &= 55,5. \end{aligned}$$

Скорость течения воды на поверхности равна 55,5 м в минуту, а следовательно, средняя скорость — около $\frac{5}{6}$ м в секунду.

Сколько воды протекает в реке

Так или иначе вы всегда можете определить скорость, с какой течёт вода в реке. Труднее вторая часть подготовительной работы, — необходимая для вычисления количества протекающей воды, — определение площади поперечного разреза воды. Чтобы найти величину этой площади — того, что принято называть «живым сечением» реки, — надо изготовить чертёж этого сечения. Выполняется подобная работа следующим образом.

В том месте, где вы измерили ширину реки, у самой воды вбиваете на обоих берегах по колышку. Затем садитесь с товарищем в лодку и плывёте от одного колышка к другому, стараясь

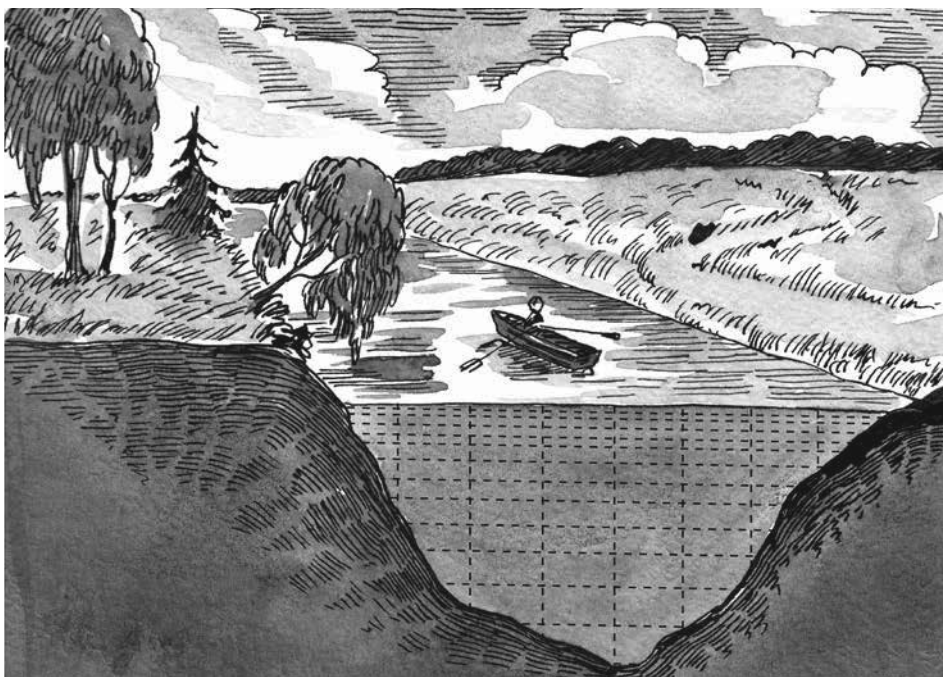


Рис. 40. «Живое сечение» реки

всё время держаться прямой линии, соединяющей кольшки. Неопытный гребец с такой задачей не справится, особенно в реке с быстрым течением. Ваш товарищ должен быть искусным гребцом; кроме того, ему должен помогать и третий участник работы, который, стоя на берегу, следит, чтобы лодка не сбивалась с надлежащего направления, и в нужных случаях даёт гребцу сигналами указания, в какую сторону ему нужно повернуть. В первую переправу через речку вы должны сосчитать лишь, сколько ударов вёслами она потребовала, и отсюда узнать, какое число ударов перемещает лодку на 5 или 10 м. Тогда вы совершаете второй переезд, вооружившись на этот раз достаточно длинной рейкой с нанесёнными на ней делениями, и каждые 5–10 м (отмеряемые по числу ударов веслами) погружаете рейку отвесно до дна, записывая глубину речки в этом месте.

Таким способом можно промерить живое сечение только небольшой речки; для широкой, многоводной реки необходимы более сложные приёмы; работа эта выполняется специалистами. Любителю приходится избирать себе задачу, отвечающую его скромным *измерительным* средствам.

Когда все измерения закончены, вы, прежде всего, наносите на миллиметровую бумагу либо на лист из ученической тетради

в клетку чертёж поперечного профиля речки. У вас получится фигура вроде той, какая изображена *сплошными линиями* на рис. 40. Площадь этой фигуры определить весьма несложно, так как она расчленяется на ряд трапеций (в которых вам известны оба основания и высота) и два краевых треугольника также с известными основанием и высотой.

Теперь вы располагаете уже всеми данными для расчёта количества протекающей воды. Очевидно, через живое сечение реки протекает каждую секунду объём воды, равный объёму призмы, основанием которой служит это сечение, а высотой — средняя секундная скорость течения. Если, например, средняя скорость течения воды в речке 0,4 м в секунду, а площадь живого сечения, скажем, равна 3,5 м², то ежесекундно через это сечение переносится

$$3,5 \cdot 0,4 = 1,4 \text{ м}^3 \text{ воды,}$$

* 1 м³ пресной воды весит 1 *t* (1000 кг, или 61 пуд).

или столько же тонн*. Это составляет в час

$$1,4 \cdot 3600 = 5040 \text{ м}^3,$$

а в сутки

$$5040 \cdot 24 = 120960 \text{ м}^3,$$

свыше ста тысяч м³. В год мимо вас проносится в такой речке около 44 миллионов м³ воды — содержимое исполинского бака в метр ширины, метр глубины и сорок четыре метра длины. А ведь река с живым сечением 3,5 м² — не так уж велика: она может иметь, скажем, 3,5 м ширины и 1 м глубины. Сколько же воды протекает в сутки в такой реке, как Нева, через живое сечение которой ежесекундно проносится 3300 м³ воды!

Добавим ещё, что количество воды, ежесекундно протекающей через поперечное сечение реки, называется «расходом» воды в этой реке. Средний «расход» воды в Днепре у Киева — 700 м³; в Неве у Ленинграда, как сейчас было указано, 3300 м³; в реке Москве, в пределах города, вследствие необычайно медленного течения (только 1,5 мм в секунду) — менее 9 м³.

Радужная плёнка

На реке, в которую спускается вода от завода, можно заметить нередко близ стока красивые цветные переливы. Масло (например, машинное), стекающее на реку вместе с водой завода, остаётся на поверхности как более лёгкое и растекается чрезвычайно тонким слоем. Можно ли измерить или хотя бы приблизительно оценить толщину такой плёнки?

Задача кажется замысловатой, однако решить её не особенно трудно. Вы уже догадываетесь, что мы не станем заниматься таким безнадёжным делом, как непосредственное измерение толщины плёнки. Мы измерим её косвенным путём, короче сказать, вычислим.

Возьмите определённое количество машинного масла, например 20 г, и вылейте на воду, подальше от берега (с лодки). Когда масло растечётся по воде в форме более или менее ясно очерченного круглого пятна, измерьте хотя бы приблизительно диаметр этого круга. Зная диаметр, вычислите площадь. А так как вам известен и объём взятого масла (его легко вычислить по весу), то уже сама собою определится отсюда искомая толщина плёнки. Рассмотрим пример.

Задача

Один грамм керосина, растекаясь по воде, покрывает круг поперечником в 30 см. Какова толщина керосиновой плёнки на воде? Кубический сантиметр керосина весит 0,8 г.

Решение

Найдём объём пленки, который, конечно, равен объёму взятого керосина. Если один кубический сантиметр керосина весит 0,8 г, то на 1 г идет $\frac{1}{0,8} = 1,25 \text{ см}^3$, или 1250 мм^3 . Площадь круга с диаметром 30 см, или 300 мм, равна 70686 мм^2 . Искомая толщина плёнки равна объёму, делённому на площадь основания:

$$\frac{1250}{70686} = 0,018 \text{ мм},$$

т.е. менее 50-й доли миллиметра. Прямое измерение подобной толщины обычными средствами, конечно, невозможно.

Масляные и мыльные плёнки растекаются ещё более тонкими слоями, достигающими $0,0001$ мм и менее. «Однажды, — рассказывает английский физик Бойз в книге «Мыльные пузыри», — я проделал такой опыт на пруде. На поверхность воды была вылита ложка оливкового масла. Сейчас же образовалось большое пятно, метров $20-30$ в поперечнике. Так как пятно было в тысячу раз больше в длину и в тысячу раз больше в ширину, чем ложка, то толщина слоя масла на поверхности воды должна была приблизительно составлять миллионную часть толщины слоя масла в ложке, или около $0,000002$ миллиметра».

Круги на воде

Задача

Вы не раз, конечно, с любопытством рассматривали те круги, которые порождает брошенный в спокойную воду камень (рис. 41). И вас, без сомнения, никогда не затрудняло объяснение этого поучительного явления природы: волнение распространяется от начальной точки во все стороны с одинаковой



Рис. 41. Круги на воде

скоростью; поэтому в каждый момент все волнующиеся точки должны быть расположены на одинаковом расстоянии от места возникновения волнения, т.е. на окружности.

Но как обстоит дело в воде текучей? Должны ли волны от камня, брошенного в воду быстрой реки, тоже иметь форму круга, или же форма их будет вытянута в направлении течения?

На первый взгляд может показаться, что в текучей воде круговые волны должны вытянуться в ту сторону, куда увлекает их течение: волнение передаётся по течению быстрее, чем против течения и в боковых направлениях. Поэтому волнующиеся части водной поверхности должны, казалось бы, расположиться по некоторой вытянутой замкнутой кривой, во всяком случае не по окружности.

В действительности, однако, это не так. Бросая камни в самую быструю речку, вы можете убедиться, что волны получаются строго круговые — совершенно такие же, как и в стоячей воде. Почему?

Решение

Будем рассуждать так. Если бы вода не текла, волны были бы круговые (рис. 42, слева). Какое же изменение вносит течение? Оно увлекает каждую точку этой круговой волны в направлении, указанном стрелками, причём все точки переносятся по параллельным прямым с одинаковой скоростью, т.е. на одинаковые расстояния. А «параллельное перенесение» не изменяет формы фигуры. Действительно, в результате такого перенесения точка 1 (рис. 42, справа) окажется в точке 1', точка 2 — в точке 2' и т.д.; четырёхугольник 1234 заменится четырёхугольником 1'2'3'4', который равен ему, как легко усмотреть из образовавшихся параллелограммов 122'1', 233'2', 344'3' и т.д. Взяв на окружности не четыре, а больше точек, мы также

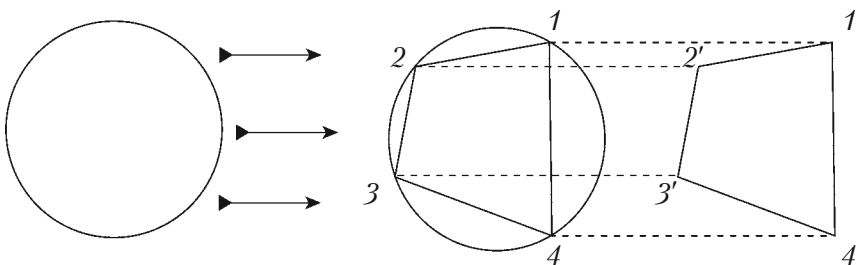


Рис. 42. Течение воды не изменяет формы волн

получили бы равные многоугольники; наконец, взяв бесконечно много точек, т.е. окружность, мы получили бы после параллельного перенесения равную окружность.

Вот почему переносное движение воды не изменяет формы волн — они и в текучей воде остаются кругами. Разница лишь в том, что на поверхности озера круги не перемещаются (если не считать того, что они расходятся от своего неподвижного центра); на поверхности же реки круги движутся вместе со своим центром со скоростью течения воды.

Фантастическая шрапнель

Задача

Оставим ненадолго реку и займёмся задачей, которая как будто не имеет к нашему предмету отношения, на самом же деле, как увидим, тесно примыкает к рассматриваемой теме.

Вообразите шрапнельный снаряд, летящий высоко в воздухе. Вот он начал опускаться и вдруг разорвался; осколки разлетаются в разные стороны. Пусть все они брошены взрывом с одинаковой силой и несутся, не встречая помехи со стороны воздуха. Спрашивается: как расположатся осколки спустя секунду после взрыва, если за это время они ещё не успеют достичь земли?

Решение

Задача похожа на задачу о кругах на воде. И здесь кажется, будто осколки должны расположиться некоторой фигурой, вытянутой вниз, в направлении падения; ведь осколки, брошенные вверх, летят медленнее, чем брошенные вниз. Нетрудно, однако, доказать, что осколки нашей воображаемой шрапнели должны расположиться на поверхности шара. Представьте на мгновение, что тяжести нет; тогда, разумеется, все осколки в течение секунды отлетят от места взрыва на строго одинаковое расстояние, т.е. расположатся на шаровой поверхности. Введём теперь в действие силу тяжести. Под её влиянием осколки должны опускаться; но так как все тела, мы знаем, падают с одинаковой скоростью*, то и осколки должны в течение секунды опуститься на одинаковое расстояние, притом по параллельным прямым. Но такое парал-

*Различия обуславливаются сопротивлением воздуха, которое мы в нашей задаче исключили.

лельное перемещение не меняет формы фигуры — шар остаётся шаром.

Итак, осколки фантастической шрапнели должны образовать шар, который, словно раздуваясь, опускается вниз со скоростью свободно падающего тела.

Килевая волна

Вернёмся к реке. Стоя на мосту, обратите внимание на след, оставляемый быстро идущим судном. Вы увидите, как от носовой части расходятся под углом два водяных гребня (рис. 43).

Откуда они берутся? И почему угол между ними тем острее, чем быстрее идёт судно?

Причина возникновения этих гребней хорошо объяснена немецким физиком Махом в его «Популярных очерках».

Представьте себе, что вы бросаете в воду камешки через одинаковые промежутки времени, и притом так, что места, куда вы попадаете, расположены на прямой линии в равных расстояниях одно от другого. Образуются круги, всё менее и менее



Рис. 43. Килевая волна

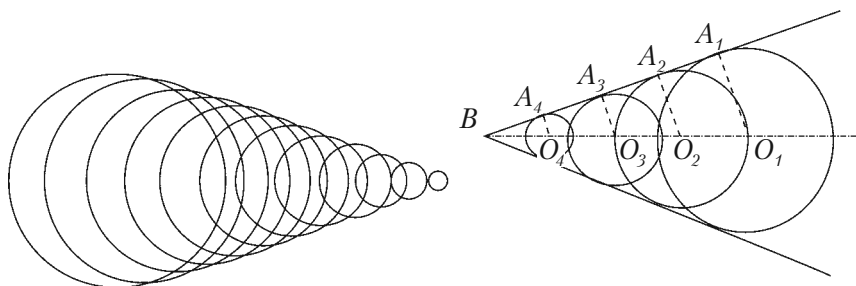


Рис. 44. Как образуется килевая волна

широкие, и все круги в совокупности порождают подобие волны у носа корабля. Чем камешки мельче и чем чаще их бросают, тем сходство заметнее. Погрузив в воду палку и ведя ею по поверхности воды, вы как бы заменяете прерывистое падение камешков непрерывным — и тогда вы видите как раз такую волну, какая возникает у носа корабля.

К этой наглядной картине остаётся прибавить немного, чтобы довести её до полной отчётливости. Врезаясь в воду, нос корабля каждое мгновение порождает такую же круговую волну, как и брошенный камень. Круг расширяется во все стороны, но тем временем судно успевает продвинуться вперёд и породить вторую круговую волну, за которой тотчас же следует третья, и т.д. Получается картина, представленная на рис. 44. Встречаясь между собою, гребни соседних волн разбивают друг друга: остаются нетронутыми только те два небольших участка полной окружности, которые находятся на их наружных частях. Эти наружные участки, сливаясь, образуют два сплошных гребня, имеющих положение внешних касательных ко всем круговым волнам (рис. 44, справа).

Таково происхождение тех водяных гребней, которые видны позади судна, позади всякого вообще тела, движущегося с достаточной быстротой по поверхности воды.

Отсюда прямо следует, что явление это возможно только тогда, когда тело движется быстрее, чем бегут водяные волны. Если вы проведёте палкой по воде медленно, то не увидите гребней: круговые волны расположатся одна внутри другой и общей касательной провести к ним будет нельзя.

Расходящиеся гребни можно наблюдать и в том случае, когда тело стоит на месте, а вода протекает мимо него. Если течение реки достаточно быстро, то подобные гребни образуются в воде, обтекающей мостовые устои. Форма волн получается

здесь даже более отчётливая, чем, например, от парохода, так как правильность их не нарушается работою винта.

Выяснив геометрическую сторону дела, попробуем разрешить такую задачу.

Задача

От чего зависит величина угла между обеими ветвями килевой волны парохода?

Решение

Проведём из центра круговых волн (рис. 44, справа) радиусы к соответствующим участкам прямолинейного гребня, т.е. к точкам общей касательной. Легко сообразить, что O_1B есть путь, пройденный за некоторое время носовой частью корабля, а O_1A_1 — расстояние, на которое за то же время распространится волнение. Отношение O_1A_1/O_1B есть синус угла O_1BA_1 , в то же время это есть отношение скоростей волнения и корабля. Значит, угол B между гребнями килевой волны — не что иное, как удвоенный угол, синус которого равен отношению скорости бега круговых волн к скорости судна.

Скорость распространения круговых волн в воде приблизительно одинакова для всех судов; поэтому угол расхождения ветвей килевой волны зависит главным образом от скорости корабля: синус половины угла обычно пропорционален этой скорости. И, наоборот, по величине угла можно судить о том, во сколько раз скорость парохода больше скорости волн. Если, например, угол между ветвями килевой волны 30° , как у большинства морских грузопассажирских судов, то синус его половины ($\sin 15^\circ$) равен 0,26; это значит, что скорость парохода больше скорости бега круговых волн в $1/0,26$, т.е. примерно в четыре раза.

Скорость пушечных снарядов

Задача

Волны, наподобие сейчас рассмотренных, порождаются в воздухе летящей пулей или артиллерийским снарядом.

Существуют способы фотографировать снаряд на лету; на рис. 45 и 46 воспроизводятся два таких изображения снарядов,

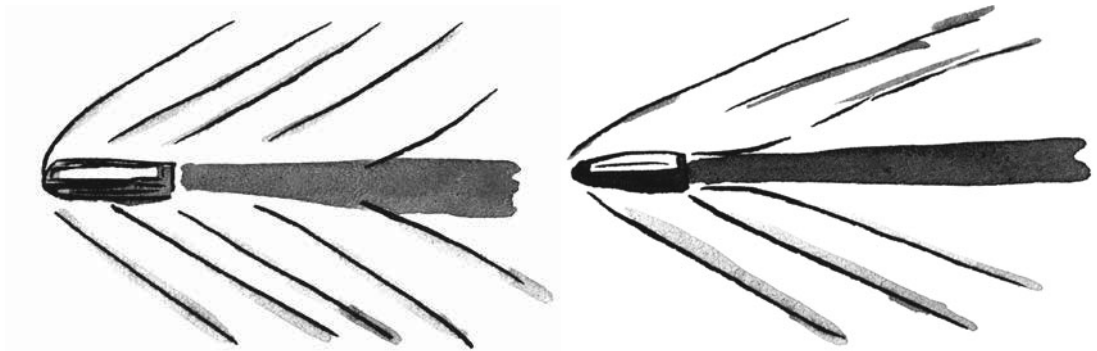


Рис. 45–46. Головная волна в воздухе, образуемая летящим снарядом

движущихся неодинаково быстро. На обоих рисунках отчётливо видна интересующая нас «головная волна» (как её в этом случае называют). Происхождение её такое же, как и килевой волны парохода. И здесь применимы те же геометрические отношения, а именно: синус половины угла расхождения головных волн равен отношению скорости распространения волнения в воздухе к скорости полёта самого снаряда. Но волнение в воздушной среде передаётся со скоростью, близкой к скорости звука, т.е. 330 м в секунду. Легко поэтому, располагая снимком летящего снаряда, определить приблизительно его скорость. Как сделать это для приложенных здесь двух изображений?

Решение

Измерим угол расхождения ветвей головной волны на рис. 45 и 46. В первом случае он составляет около 80° , во втором — примерно 55° . Половина их — 40° и $27\frac{1}{2}^\circ$. $\sin 40^\circ = 0,64$, $\sin 27\frac{1}{2}^\circ = 0,46$. Следовательно, скорость распространения воздушной волны, т.е. 330 м, составляет в первом случае 0,64 скорости полёта снаряда, во втором — 0,46. Отсюда скорость первого снаряда равна $330/0,64 = 516$ м, второго $330/0,46 = 717$ м в секунду.

Вы видите, что довольно простые геометрические соображения при некоторой поддержке со стороны физики помогли нам разрешить задачу, на первый взгляд очень замысловатую: по фотографии летящего снаряда определить его скорость в момент фотографирования. (Расчёт этот, однако, лишь приблизительно верен, так как здесь не принимаются в соображение некоторые второстепенные обстоятельства.)

Задача

Для желающих самостоятельно выполнить подобное вычисление скорости ядер здесь даются три воспроизведения снимков снарядов, летящих с различной скоростью (рис. 47).

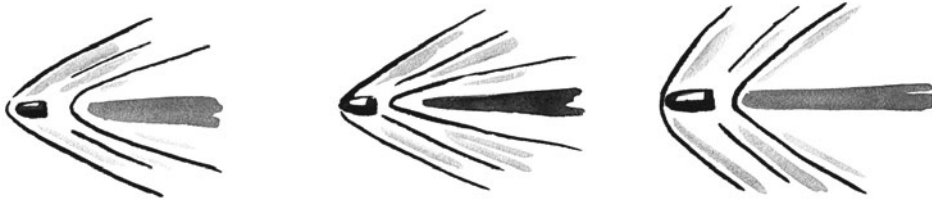


Рис. 47. Как определить скорость летящих снарядов?

Высота водяных растений

Круги на воде отвлекли нас на время в область артиллерии. Вернёмся же снова к реке и рассмотрим индусскую задачу о лотосе.

Задача

Цветок лотоса, возвышающийся над водой на 0,5 фута, был ветром отнесён в сторону. Тогда он очутился на поверхности воды в 2 футах от прежнего положения. Определить по этим данным глубину пруда.

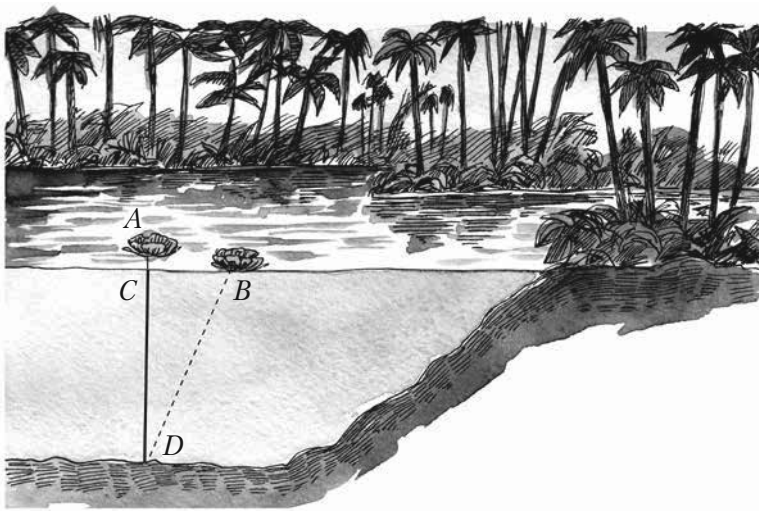


Рис. 48. Индусская задача о цветке лотоса

Решение

Обозначим (рис. 48) искомую глубину CD пруда через x . Тогда, по теореме Пифагора, имеем:

$$BD^2 - x^2 = BC^2,$$

т. е.

$$x^2 = \left(x + \frac{1}{2}\right)^2 - 2^2,$$

откуда

$$x^2 = x^2 + x + \frac{1}{4} - 4,$$

$$x = 3\frac{3}{4}.$$

Искомая глубина — $3\frac{3}{4}$ фута.

Близ берега реки или неглубокого пруда вы можете отыскать водяное растение, которое доставит вам реальный материал для подобной задачи: без всяких приспособлений, не замочив даже рук, определить глубину водоёма в этом месте.

Звёздное небо в реке

Река и в ночное время предлагает геометру задачи. Помните у Гоголя в описании Днепра: «Звёзды горят и светят над миром и все разом отдаются в Днепре. Всех их держит Днепр в тёмном лоне своём: ни одна не убежит от него, разве погаснет в небе». В самом деле, когда стоишь на берегу широкой реки, кажется, что в водном зеркале отражается целиком весь звёздный купол. Но так ли в действительности? Все ли звёзды «отдаются» в реке?

Сделаем чертёж (рис. 49): A — глаз наблюдателя, стоящего на берегу реки, у края обрыва, MN — поверхность воды. Какие звёзды может видеть в воде наблюдатель из точки A ? Чтобы

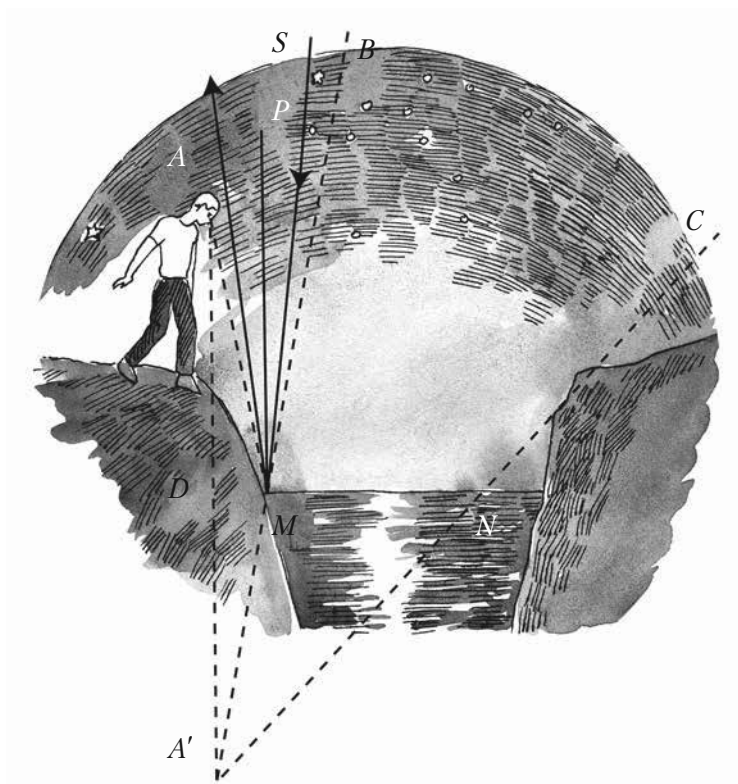


Рис. 49. Какую часть звёздного неба можно увидеть в водном зеркале реки

ответить на этот вопрос, опустим из точки A перпендикуляр AD на прямую MN и продолжим его на равное расстояние, до точки A' . Если бы глаз наблюдателя находился в A' , он мог бы видеть только ту часть звёздного неба, которая помещается внутри угла $BA'C$. Таково же и поле зрения действительного наблюдателя, смотрящего из точки A . Звёзды, находящиеся вне этого угла, не видны наблюдателю; их отражённые лучи проходят мимо его глаз.

Как убедиться в этом? Как доказать, что, например, звезда S , лежащая вне угла $BA'C$, не видна нашему наблюдателю в водном зеркале реки? Проследим за её лучом, падающим близко к берегу, в точку M ; он отразится по законам физики под таким углом к перпендикуляру MP , который равен углу падения SMP и, следовательно, меньше угла PMA (это легко доказать, опираясь на равенство треугольников ADM и $A'DM$); значит, отражённый луч должен пройти мимо A . Тем более пройдут мимо глаз наблюдателя лучи звезды S , отразившиеся в точках, расположенных дальше точки M .

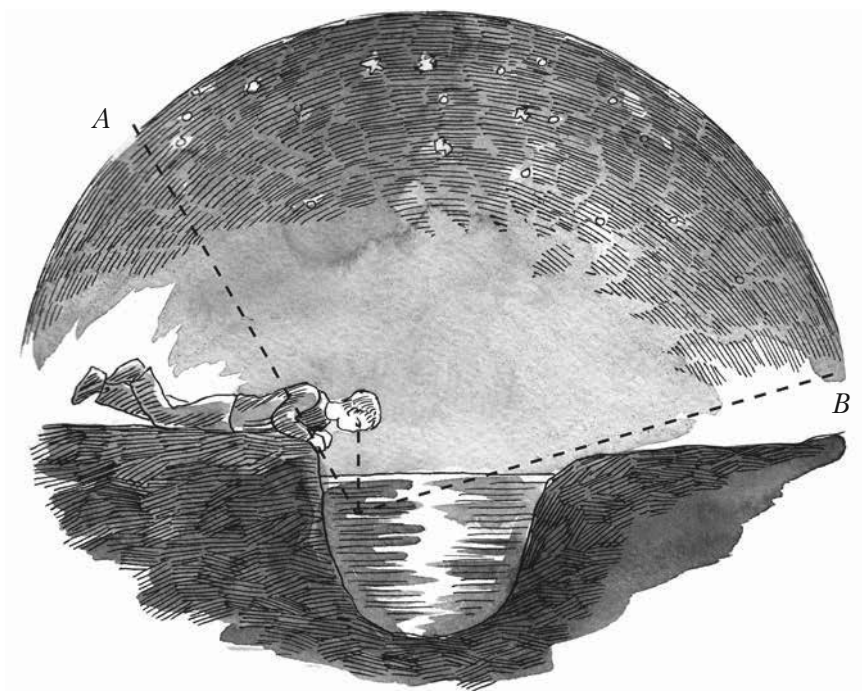


Рис. 50. В узенькой речке с низкими берегами можно увидеть больше звёзд

Значит, гоголевское описание содержит преувеличение: в Днепре отражаются далеко не все звёзды, а, во всяком случае, меньше половины звёздного неба.

Всего любопытнее, что обширность отражённой части неба вовсе не доказывает, что перед вами широкая река. В узенькой речке с низкими берегами вы можете видеть почти половину неба (т.е. больше, чем в широкой реке), если наклонитесь близко к воде. Легко удостовериться в этом, сделав для такого случая построение поля зрения (рис. 50).

Путь через реку

Задача

Между точками *A* и *B* течёт река (или канал) с приблизительно параллельными берегами (рис. 51). Нужно построить через реку мост под прямым углом к его берегам. Где следует выбрать место для моста, чтобы путь от *A* до *B* был кратчайшим?

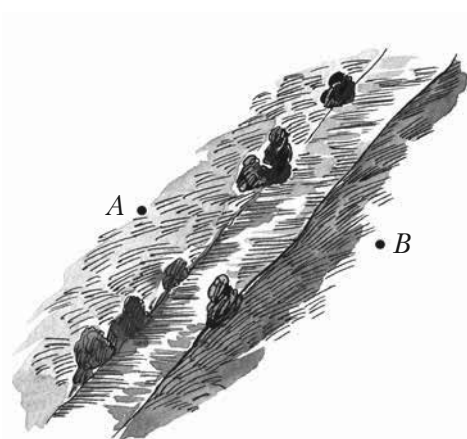


Рис. 51. Где построить мост под прямым углом к берегам реки, чтобы дорога от A к B была кратчайшей?

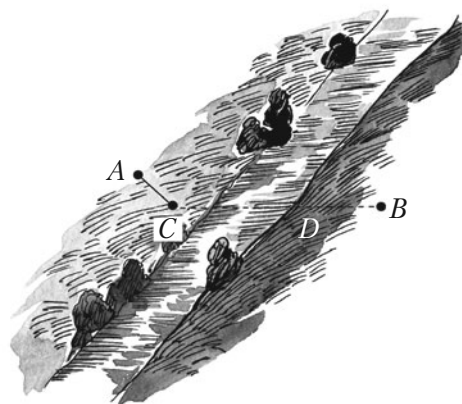


Рис. 52. Место для постройки моста выбрано

Решение

Проведя через точку A (рис. 52) прямую, перпендикулярную к направлению реки, и отложив от A отрезок AC , равный ширине реки, соединяем C с B . В точке D и надо построить мост, чтобы путь из A в B был кратчайшим.

Действительно, построив мост DE (рис. 53) и соединив E с A , получим путь $AEDB$, в котором часть AE параллельна CD ($AEDC$ — параллелограмм, так как его противоположные стороны AC и ED равны и параллельны). Поэтому путь $AEDB$ по длине равен пути ACB . Легко показать, что всякий иной путь длиннее этого. Пусть мы заподозрили, что некоторый путь $AMNB$ (рис. 54) короче $AEDB$, т.е. короче ACB . Соединив C с N , видим, что CN равно AM . Значит, путь $AMNB = ACNB$. Но CNB ,

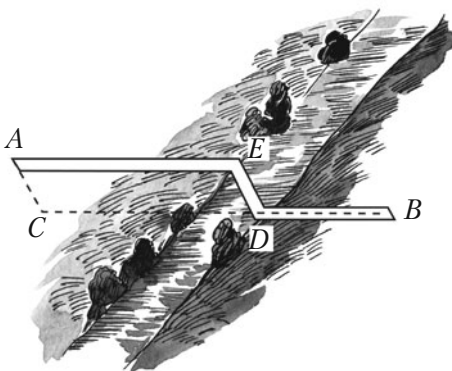


Рис. 53. Мост построен

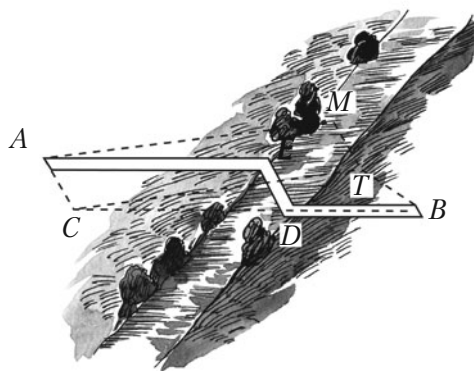


Рис. 54. Путь $AEDB$ — действительно кратчайший

очевидно, больше CB ; значит, $ACNB$ больше ACB , а следовательно, больше и $AEDB$. Таким образом, путь $AMNB$ оказывается не короче, а длиннее пути $AEDB$.

Это рассуждение применимо ко всякому положению моста, не совпадающему с ED ; другими словами, путь $AEDB$ действительно кратчайший.

Через две реки

Задача

Может представиться более сложный случай — именно, когда надо найти кратчайший путь через две реки, которые необходимо пересечь тоже под прямым углом к их берегам (рис. 55). В каких местах рек надо тогда построить мосты?

Решение

Нужно из точки A (рис. 55, справа) провести отрезок AC , равный ширине реки в части I и перпендикулярный к её берегам. Из точки B провести отрезок BD , равный ширине реки в части II и также перпендикулярный к берегам. Точки C и D соединить прямой. В точке E строят мост EF , а в точке G — мост GH . Путь $AFEGHB$ есть искомый кратчайший путь от A до B .

Как доказать это, читатель, конечно, сообразит сам, если будет в этом случае рассуждать так же, как рассуждали мы в предыдущей задаче.

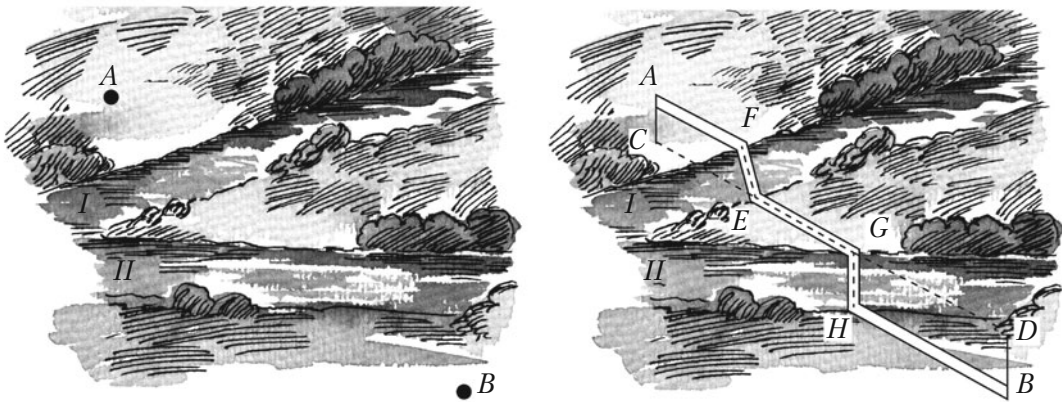
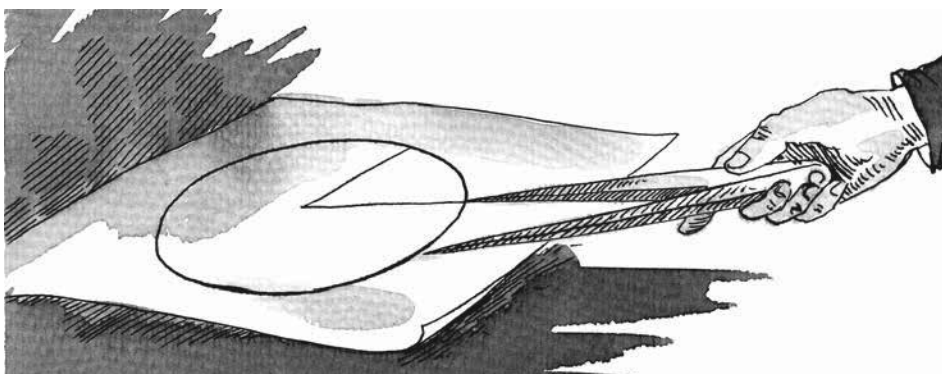


Рис. 55. Построены два моста



ГЛАВА ТРЕТЬЯ

ПОХОДНАЯ ТРИГОНОМЕТРИЯ БЕЗ ФОРМУЛ И ТАБЛИЦ

Вычисление синуса

В этой главе будет показано, как можно вычислять стороны треугольника с точностью до 2% и углы с точностью до 1°, пользуясь одним лишь понятием синуса и не прибегая ни к таблицам, ни к формулам. Такая упрощённая тригонометрия может пригодиться во время загородной прогулки, когда таблиц под рукой нет, а формулы полузабыты. Робинзон на своём острове мог бы успешно пользоваться такой тригонометрией.

Итак, вообразите, что вы ещё не проходили тригонометрии или же забыли её без остатка, — состояние, которое иным из читателей, вероятно, нетрудно себе представить. Начнём знакомиться с ней сызнова. Что такое синус острого угла? Это — отношение противолежащего катета к гипотенузе в том треугольнике, который отсекается от угла перпендикуляром к одной из его сторон. Например, синус угла α (рис. 56) есть BC/AC , или ED/AD , или $D'E'/AD$,

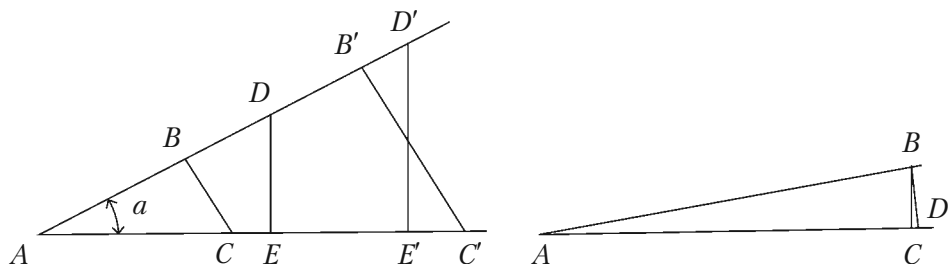


Рис. 56. Что такое синус острого угла?

или $B'C'/AC$. Легко видеть, что вследствие подобия образовавшихся здесь треугольников все эти отношения равны одно другому.

Чему же равны синусы различных углов от 1° до 90° ? Как узнать это, не имея под рукой таблиц? Весьма просто: надо составить таблицу синусов самому. Этим мы сейчас и займёмся.

Начнём с тех углов, синусы которых нам известны из геометрии. Это, прежде всего, угол в 90° , синус которого, очевидно, равен 1. Затем угол в 45° , синус которого легко вычислить по Пифагоровой теореме; он равен $\sqrt{2}/2$, т.е. 0,707. Далее нам известен синус 30° ; так как катет, лежащий против такого угла, равен половине гипотенузы, то $\sin 30^\circ = 1/2$.

Итак, мы знаем синусы (или, как принято обозначать, \sin) трёх углов:

$$\begin{aligned}\sin 30^\circ &= 0,5, \\ \sin 45^\circ &= 0,707, \\ \sin 90^\circ &= 1.\end{aligned}$$

Этого, конечно, недостаточно; необходимо знать синусы и всех промежуточных углов по крайней мере через каждый градус. Для очень малых углов можно при вычислении синуса вместо отношения катета к гипотенузе брать без большой погрешности отношение дуги к радиусу: из рис. 56 (справа) видно, что отношение BC/AB мало отличается от отношения BD/AB . Последнее же легко вычислить. Например, для угла в 1° дуга $BD = \frac{2\pi R}{360}$ и, следовательно, $\sin 1^\circ$ можно принять равным

$$\frac{2\pi R}{360R} = \frac{\pi}{180} = 0,0175.$$

Таким же образом находим:

$$\begin{aligned}\sin 2^\circ &= 0,0349, \\ \sin 3^\circ &= 0,0524, \\ \sin 4^\circ &= 0,0698, \\ \sin 5^\circ &= 0,0873.\end{aligned}$$

Но надо убедиться, как далеко можно продолжать эту табличку, не делая большой погрешности. Если бы мы вычислили по такому способу $\sin 30^\circ$, то получили бы 0,524 вместо 0,500: разница была бы уже во второй значащей цифре, и погрешность составляла бы $\frac{24}{500}$, т.е. около 5%. Это чересчур грубо даже для нетребовательной походной тригонометрии. Чтобы найти границу, до которой позволительно вести вычисление синусов по указанному приближённому способу, постараемся найти точным приёмом $\sin 15^\circ$. Для этого воспользуемся следующим не особенно замысловатым построением (рис. 57). Пусть $\sin 15^\circ = \frac{BC}{AB}$. Продолжим BC на равное расстояние до точки D ; соединим A с D , тогда получим два равных треугольника: ADC и ABC и угол BAD , равный 30° . Опустим на AD перпендикуляр BE ; образуется прямоугольный треугольник BAE с углом 30° ($\angle BAE$), тогда $BE = \frac{AB}{2}$. Далее вычисляем AE из треугольника ABE по теореме Пифагора:

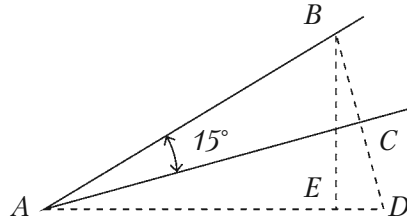


Рис. 57. Как вычислить $\sin 15^\circ$?

$$AE^2 = AB^2 - \left(\frac{AB}{2}\right)^2 = \frac{3}{4}AB^2;$$

$$AE = \frac{AB}{2} \sqrt{3} = 0,866AB.$$

Значит, $ED = AD - AE = AB - 0,866AB = 0,134AB$. Теперь из треугольника BED вычисляем BD :

$$\begin{aligned}BD^2 &= BE^2 + ED^2 = \left(\frac{AB}{2}\right)^2 + (0,134AB)^2 = \\ &= 0,267956AB^2;\end{aligned}$$

$$BD = \sqrt{0,26756AB^2} = 0,518AB.$$

Половина BD , т.е. BC , равна $0,259AB$, следовательно, искомый синус

$$\sin 15^\circ = \frac{BC}{AB} = \frac{0,259AB}{AB} = 0,259.$$

Это — табличное значение $\sin 15^\circ$, если ограничиться тремя знаками. Приближённое же значение его, которое мы нашли бы по прежнему способу, равно $0,262$. Сопоставляя обозначения

$$0,259 \quad \text{и} \quad 0,262,$$

видим, что, ограничиваясь двумя значащими цифрами, мы получаем:

$$0,26 \quad \text{и} \quad 0,26,$$

т.е. тождественные результаты. Ошибка при замене более точного значения $(0,259)$ приближённым $(0,26)$ составляет $\frac{1}{1000}$, т.е. около $0,4\%$. Эта погрешность позволительна для походных расчётов, и, следовательно, синусы углов от 1 до 15° мы вправе вычислить по нашему приближённому способу.

Для промежутка от 15 до 30° мы можем вычислять синусы при помощи пропорций. Будем рассуждать так. Разница между $\sin 30^\circ$ и $\sin 15^\circ$ равна $0,50 - 0,26 = 0,24$. Значит, — можем мы допустить — при увеличении угла на каждый градус синус его возрастает примерно на $\frac{1}{15}$ этой разницы, т.е. на $\frac{0,24}{15} = 0,016$. Строго говоря, это, конечно, не так, но отступление от указанного правила обнаруживается только в третьей значащей цифре, которую мы всё равно отбрасываем. Итак, прибавляя последовательно по $0,016$ к $\sin 15^\circ$, получим синусы 16° , 17° , 18° и т.д.:

$$\begin{aligned} \sin 16^\circ &= 0,26 + 0,016 = 0,28, \\ \sin 17^\circ &= 0,26 + 0,032 = 0,29, \\ \sin 18^\circ &= 0,26 + 0,048 = 0,31, \\ &\dots\dots\dots \\ \sin 25^\circ &= 0,26 + 0,16 = 0,42 \text{ и т. д.} \end{aligned}$$

Все эти синусы верны в первых двух десятичных знаках, т.е. с достаточною для наших целей точностью: они отличаются от

истинных синусов менее чем на половину единицы последней цифры.

Таким же способом поступают при вычислении углов в промежутках между 30° и 45° . Разность $\sin 45^\circ - \sin 30^\circ = 0,707 - 0,5 = 0,207$. Разделив её на 15, имеем 0,014. Эту величину будем прибавлять последовательно к синусу 30° ; тогда получим:

$$\begin{aligned}\sin 31^\circ &= 0,5 + 0,014 = 0,51, \\ \sin 32^\circ &= 0,5 + 0,028 = 0,53, \\ &\dots\dots\dots \\ \sin 40^\circ &= 0,5 + 0,14 = 0,64 \text{ и т. д.}\end{aligned}$$

Остаётся найти синусы острых углов больше 45° . В этом поможет нам Пифагорова теорема. Пусть, например, мы желаем найти $\sin 53^\circ$, т.е. (рис. 58) отношение BC/AB . Так как угол $B = 37^\circ$, то синус его мы можем вычислить по предыдущему правилу: он равен $0,5 + 7 \cdot 0,014 = 0,6$. С другой стороны, мы знаем, что $\sin B = AC/AB$. Итак, $AC/AB = 0,6$, откуда $AC = 0,6 \cdot AB$. Зная AC , легко вычислить BC . Этот отрезок равен

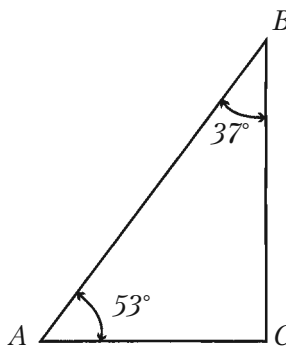


Рис. 58. К вычислению синуса угла, большего 45°

$$\begin{aligned}\sqrt{AB^2 - AC^2} &= \sqrt{AB^2 - (0,6AB)^2} - \\ &= AB\sqrt{1 - 0,36} = 0,8AB.\end{aligned}$$

Расчёт в общем нетруден; надо только уметь вычислять квадратные корни.

Упрощённое извлечение квадратного корня

Указываемый в курсах алгебры способ извлечения квадратных корней легко забывается. Но можно обойтись и без него. В моих учебных книгах по геометрии приведён древний упрощённый способ вычисления квадратных корней по способу деления. Здесь сообщу другой старинный способ, также более простой, нежели рассматриваемый в курсах алгебры.

Пусть надо вычислить $\sqrt{13}$. Он заключается между 3 и 4 и, следовательно, равен 3 с дробью, которую обозначим через x .

Итак,

$$\sqrt{13} = 3 + x, \quad \text{откуда} \quad 13 = 9 + 6x + x^2.$$

Квадрат дроби x есть малая дробь, которой в первом приближении можно пренебречь; тогда имеем:

$$13 = 9 + 6x, \quad \text{откуда} \quad 6x = 4 \quad \text{и} \quad x = \frac{2}{3} = 0,67.$$

Значит, приближённо $\sqrt{13} = 3,67$. Если мы хотим определить значение корня ещё точнее, напомним уравнение $\sqrt{13} = 3\frac{2}{3} + y$, где y — небольшая дробь, положительная или отрицательная. Отсюда $13 = \frac{121}{9} + \frac{22}{3}y + y^2$. Отбросив y^2 , находим, что y приближённо равен $-\frac{2}{33} = -0,06$. Следовательно, во втором приближении $\sqrt{13} = 3,67 - 0,06 = 3,61$. Третье приближение находим тем же приёмом и т. д.

Обычным, указываемым в курсах алгебры способом мы нашли бы $\sqrt{13}$ с точностью до 0,01 — также 3,61.

Найти угол по синусу

Итак, мы имеем возможность вычислить синус любого угла от 0 до 90° с двумя десятичными знаками. Надобность в готовой таблице отпадает; для приближённых вычислений мы всегда можем сами составить её, если пожелаем.

Но для решения тригонометрических задач нужно уметь и обратное — вычислять углы по данному синусу. Это тоже несложно. Пусть требуется найти угол, синус которого равен 0,38. Так как данный синус меньше 0,5, то искомый угол меньше 30°. Но он больше 15°, так как $\sin 15^\circ$, мы знаем, равен 0,26. Чтобы найти этот угол, заключающийся в промежутке между 15 и 30°, поступаем, как объяснено на стр. 70:

$$0,38 - 0,26 = 0,12,$$

Найти угол по синусу

$$\frac{0,12}{0,016} = 7,5^\circ,$$
$$15^\circ + 7,5^\circ = 22,5^\circ.$$

Итак, искомый угол приближённо равен $22,5^\circ$.

Другой пример: найти угол, синус которого 0,62.

$$0,62 - 0,50 = 0,12,$$
$$\frac{0,12}{0,14} = 8,6^\circ,$$
$$30^\circ + 8,6^\circ = 38,6^\circ.$$

Искомый угол приближённо равен $38,6^\circ$.

Наконец, третий пример: найти угол, синус которого 0,91.

Так как данный синус заключается между 0,71 и 1, то искомый угол лежит в промежутке между 45° и 90° . На рис. 59 BC есть синус угла A , если $BA = 1$. Зная BC , легко найти синус угла B :

$$AC^2 = 1 - BC^2 = 0,912 = 1 - 0,83 = 0,1729,$$
$$AC = \sqrt{0,17} = 0,42.$$

Теперь найдём величину угла B , синус которого равен 0,42; после этого легко будет найти угол A , равный $90^\circ - B$. Так как 0,42 заключается между 0,26 и 0,5, то угол B лежит в промежутке между 15° и 30° . Он определяется так:

$$0,42 - 0,26 = 0,16,$$
$$\frac{0,16}{0,016} = 10^\circ,$$

$$B = 15^\circ + 10^\circ = 25^\circ.$$

И, значит, угол $A = 90^\circ - B = 90^\circ - 25^\circ = 65^\circ$.

Мы вполне вооружены теперь для того, чтобы приближённо решать тригонометрические задачи, так как

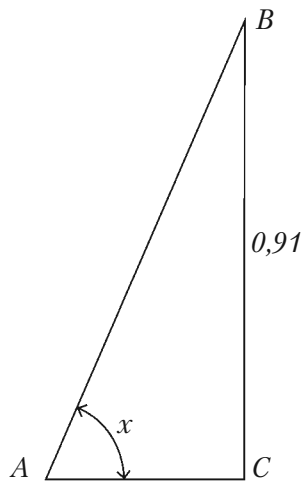


Рис. 59. К вычислению острого угла по его синусу

умеем находить синусы по углам и углы по синусам с точностью, достаточной для походных целей.

Но достаточно ли для этого одного только синуса? Разве не понадобятся нам остальные тригонометрические функции — косинус, тангенс и т.д.? Сейчас покажем на ряде примеров, что для нашей упрощённой тригонометрии можно вполне обойтись одним только синусом.

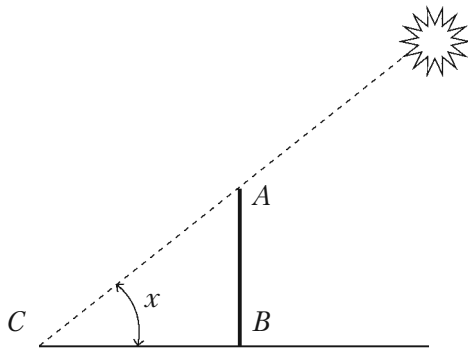


Рис. 60. Определить высоту Солнца над горизонтом

Высота Солнца

Задача

Тень BC (рис. 60) от отвесного шеста AB высотой 4,2 м имеет 6,5 м длины. Какова в этот момент высота Солнца над горизонтом, т.е. как велик угол C ?

Решение

Легко сообразить, что синус угла C равен $\frac{AB}{AC}$.

Но $AC = \sqrt{AB^2 + BC^2} = \sqrt{4,2^2 + 6,5^2} = 7,74$. Поэтому искомый синус $\frac{4,2}{7,74} = 0,55$. По указанному ранее способу находим соответствующий угол: 33° . Высота Солнца — 33° (с точностью до $1/2^\circ$).

Расстояние до острова

Задача

Бродя с компасом (буссолью) возле реки, вы заметили на ней (рис. 61) островок A и желаете определить его расстояние от точки B на берегу. Для этого вы определяете по компасу, какой угол составляет с направлением север — юг (NS) прямая BA . Затем измеряете прямую линию BC и определяете величину угла NBC между нею и NS . Наконец, то же самое делаете в точке C для прямой AC . Допустим, что вы получили следующие данные:

направление AB отклоняется от NS к востоку на 52° ,
направление BC отклоняется от NS к востоку на 110° ,
направление CA отклоняется от NS к западу на 27° .

Длина $BC = 187$ м.

Как по этим данным вычислить расстояние BA ?

Решение

В треугольнике ABC нам известна сторона BC . Угол $ABC = 110^\circ - 52^\circ = 58^\circ$; угол $ACB = 180^\circ - 110^\circ - 27^\circ = 43^\circ$. Опустим в этом треугольнике (рис. 61, справа) высоту BD . $\sin C = \sin 43^\circ = BD/187$. Найдя $\sin 43^\circ$, получаем 0,68. Значит,

$$BD = 187 \cdot 0,68 = 127.$$

Теперь в треугольнике ABD нам известен катет BD ; угол $A = 180^\circ - (58^\circ + 43^\circ) = 79^\circ$, и угол $ABD = 90^\circ - 79^\circ = 11^\circ$. Синус 11° мы можем вычислить: он равен 0,19. Следовательно, $AD/AB = 0,19$. С другой стороны, по теореме Пифагора,

$$AB^2 = BD^2 + AD^2.$$

Подставляя $0,19AB$ вместо AD , а вместо BD — 127, имеем:

$$AB^2 = 127^2 + (0,19AB)^2,$$

откуда $AB \approx 128$.

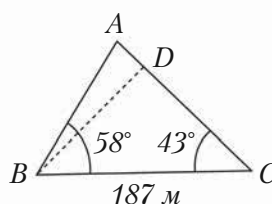
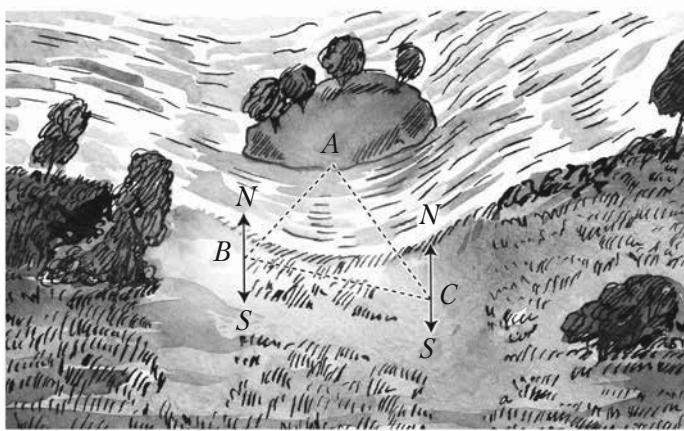


Рис. 61. Как вычислить расстояние до острова

Итак, искомое расстояние до острова около 128 м.

Читатель не затруднился бы, думаю, вычислить и сторону AC , если бы это понадобилось.

Ширина озера

Задача

Чтобы определить ширину AB озера (рис. 62), вы нашли по компасу, что прямая AC уклоняется к западу на 21° , а BC — к востоку на 22° . Длина $BC = 68$ м, $AC = 35$ м. Вычислить по этим данным ширину озера.

Решение

В треугольнике ABC нам известны угол 43° и длины заключающих его сторон — 68 м и 35 м. Опускаем (рис. 62, справа) высоту AD ; имеем: $\sin 43^\circ = \frac{AD}{AC}$. Вычисляем, независимо

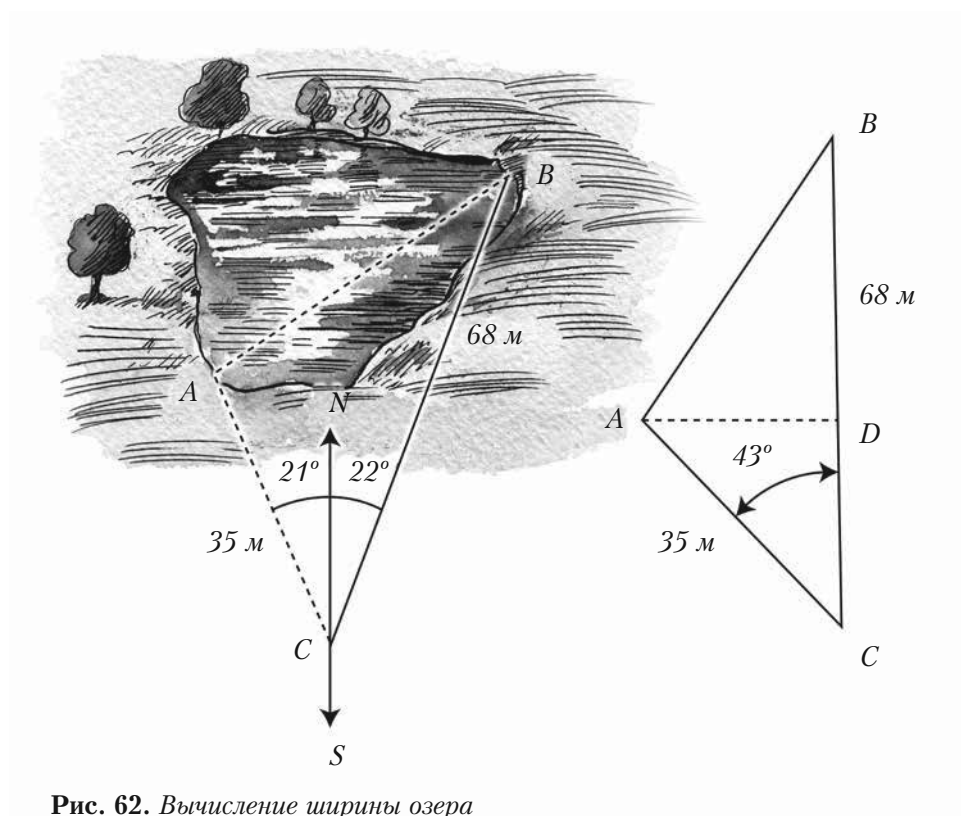


Рис. 62. Вычисление ширины озера

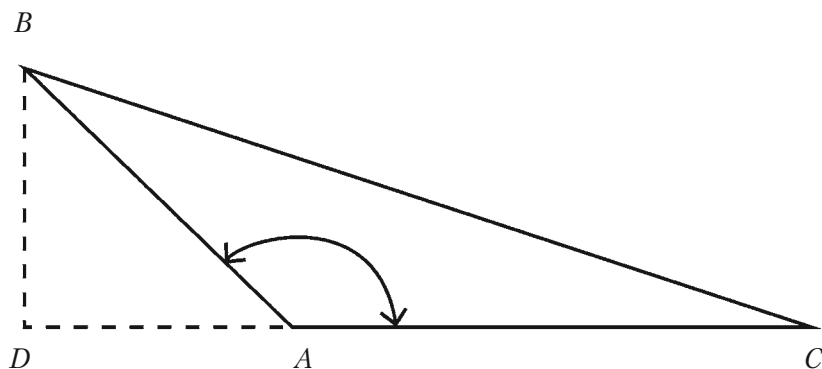


Рис. 63. К решению тупоугольного треугольника

от этого, $\sin 43^\circ$ и получаем: 0,68. Значит, $AD/AC = 0,68$, $AD = 0,68 \cdot 35 = 24$. Затем вычисляем CD :

$$CD^2 = AC^2 - AD^2 = 35^2 - 24^2 = 649;$$

$$CD = 25,5;$$

$$BD = BC - CD = 68 - 25,5 = 42,5.$$

Теперь из треугольника ABD имеем:

$$AB^2 = AD^2 + BD^2 = 24^2 + 42,5^2 = 2380;$$

$$AB \approx 49.$$

Итак, искомая ширина озера около 49 м.

Если бы в треугольнике ABC нужно было вычислить и другие два угла, то, найдя $AB = 49$, поступаем далее так:

$$\sin B = \frac{AD}{AB} = 0,49, \quad \text{отсюда} \quad B = 29^\circ.$$

Третий угол C найдём, вычитая из 180° сумму углов 29° и 43° ; он равен 108° .

Может случиться, что в рассматриваемом случае решения треугольника (по двум сторонам и углу между ними) данный угол не острый, а тупой. Если, например, в треугольнике ABC (рис. 63) известны тупой угол A и две стороны, AB и AC , то ход вычисления остальных его элементов таков. Опустив высоту BD , определяют BD и AD из треугольника BDA ; затем, зная $DA + AC$, находят BC и $\sin C$, вычислив отношение BD/BC .

Треугольный участок

Задача

Во время экскурсии мы измерили шагами стороны треугольного участка и нашли, что они равны 43, 60 и 54 шагам. Каковы углы этого треугольника?

Решение

Это — наиболее сложный случай решения треугольника: по трём сторонам. Однако и с ним можно справиться, не обращаясь к другим функциям, кроме синуса.

Опустив (рис. 64) высоту BD на длиннейшую сторону AC , имеем:

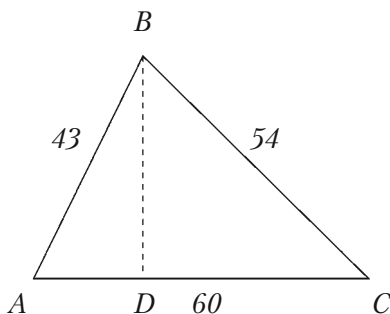


Рис. 64. Найти углы этого треугольника: 1) вычислением, 2) при помощи транспортира

$$\begin{aligned}BD^2 &= 43^2 - AD^2, \\BD^2 &= 54^2 - DC^2,\end{aligned}$$

откуда

$$\begin{aligned}43^2 - AD^2 &= 54^2 - DC^2, \\DC^2 - AD^2 &= 54^2 - 43^2 = 1067.\end{aligned}$$

Но

$$\begin{aligned}DC^2 - AD^2 &= (DC + AD)(DC - AD) = \\&= 60(DC - AD).\end{aligned}$$

Следовательно,

$$60(DC - AD) = 1067 \quad \text{и} \quad DC - AD = 17,8.$$

Из двух уравнений

$$DC - AD = 17,8 \quad \text{и} \quad DC + AD = 60$$

получаем:

$$2DC = 77,8, \quad \text{т.е.} \quad DC = 38,9.$$

Теперь легко вычислить высоту:

$$BD = \sqrt{54^2 - 38,9^2} = 37,4,$$

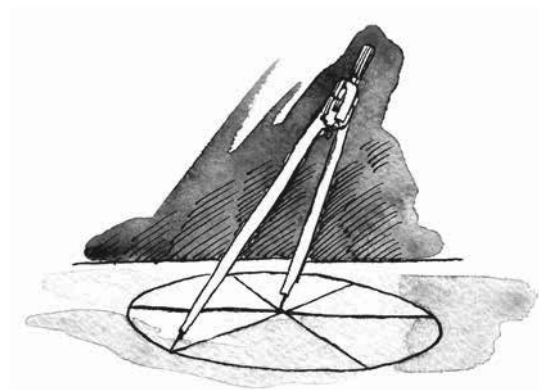
откуда находим

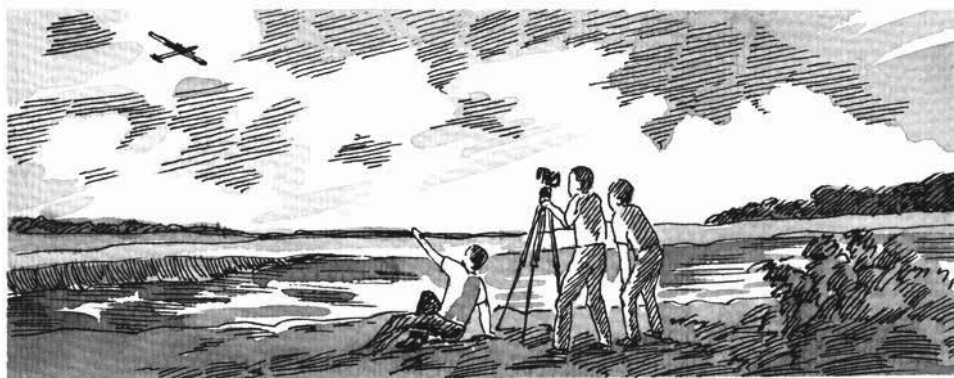
$$\sin A = \frac{BD}{AB} = \frac{37,4}{43} = 0,87; A = \text{около } 60^\circ.$$

$$\sin C = \frac{BD}{BC} = \frac{37,4}{54} = 0,69; C = \text{около } 44^\circ.$$

Третий угол $B = 180 - (A + C) = 76^\circ$.

Если бы мы в данном случае вычисляли при помощи таблиц, по всем правилам «настоящей» тригонометрии, то получили бы углы, выраженные в градусах и минутах. Но эти минуты были бы заведомо ошибочны, так как стороны, измеренные шагами, заключают погрешность не менее 2–3%. Значит, чтобы не обманывать самого себя, следовало бы полученные «точные» величины углов округлить по крайней мере до целых градусов. И тогда у нас получился бы тот же самый результат, к которому мы пришли, прибегнув к упрощённым приёмам. Польза нашей «походной» тригонометрии выступает здесь очень наглядно.





ГЛАВА ЧЕТВЁРТАЯ

ГЕОМЕТРИЯ В ОТКРЫТОМ ПОЛЕ

Видимые размеры Луны

Какой величины кажется вам полный месяц на небе? От разных людей приходится получать весьма различные ответы на этот вопрос. Самый неожиданный ответ, который мне пришлось слышать: «Не знаю. Не здешний ведь я, издалеча».

Хотя в подлунном мире все мы здешние, однако то, что сообщает о кажущихся размерах Луны большинство людей, не многим лучше этого наивного ответа. Луна величиною «с тарелку», «с яблоко», «с человеческое лицо» и т.п. — оценки крайне смутные, неопределённые, свидетельствующие лишь о том, что отвечающие не отдают себе отчёта в существе вопроса.

Правильный ответ на столь, казалось бы, обыденный вопрос может дать лишь тот, кто ясно понимает, что, собственно, надо разуть под «кажущейся», или «видимой», величиной предмета. Мало кто подозревает, что речь идёт здесь о величине некоторого угла, — именно того угла, который составляется двумя прямыми линиями, проведёнными к нашему глазу от крайних точек рас-

смаатриваемого предмета; угол этот называется «углом зрения», или «угловой величиной предмета» (рис. 65). И когда кажущуюся величину Луны на небе оценивают, сравнивая её с размерами тарелки, яблока и т.п., то такие ответы либо вовсе лишены смысла, либо же должны означать, что Луна видна на небе под тем же углом зрения, как тарелка или яблоко. Но такое указание само по себе ещё недостаточно: тарелку или яблоко мы видим ведь под различными углами в зависимости от их отдаления: вблизи — под большими углами, вдали — под меньшими. Чтобы внести определённости, необходимо указать, с какого расстояния тарелка или яблоко рассматриваются.

Расстояние это оказывается гораздо большим, чем обычно думают. Держа яблоко в вытянутой руке, вы заслоняете им не только Луну, но и обширную часть неба. Подвесьте яблоко на нитке и отходите от него постепенно всё дальше, пока оно не покроет как раз полный лунный диск: в этом положении яблоко и Луна будут иметь для вас одинаковую видимую величину. Измерив расстояние от вашего глаза до яблока, вы убедитесь, что оно равно примерно 10 м. Вот как далеко надо отодвинуть от себя яблоко, чтобы оно действительно казалось одинаковой



Рис. 65. Углы зрения

величины с Луной на небе! А тарелку пришлось бы удалить метров на 30, т.е. на полсотни шагов.

Сказанное кажется невероятным каждому, кто слышит об этом впервые, между тем это неоспоримо и вытекает из того, что Луна усматривается нами под углом зрения всего лишь в полградуса. Оценивать углы нам в обиходной жизни почти никогда не приходится, и потому большинство людей имеет очень смутное представление о величине угла с небольшим числом градусов, например угла в 1° , в 2° или в 5° (не говорю о землемерах, чертёжниках и других специалистах, привыкших на практике измерять углы). Только большие углы оцениваем мы более или менее правдоподобно, особенно если догадываемся сравнить их со знакомыми нам углами между стрелками часов; всем, конечно, знакомы углы в 90° , в 60° , в 30° , в 120° , в 150° , которые мы настолько привыкли видеть на циферблате (в 3 ч., в 2 ч., в 1 ч., в 4 ч., в 5 ч.), что даже, не различая цифр, угадываем время по величине угла между стрелками. Но мелкие и отдельные предметы мы видим обычно под гораздо меньшим углом, и потому совершенно не умеем даже приблизительно оценивать углы зрения.

Угол зрения

Желая привести наглядный пример угла в один градус, считаем, как далеко должен отойти от нас человек среднего роста (1,7 м), чтобы казаться под таким углом. Переводя задачу на язык геометрии, скажем, что нам нужно вычислить радиус круга, дуга которого в 1° имеет длину 1,7 м (строго говоря, не дуга, а хорда, но для малых углов разница между длинами дуги и хорды ничтожна). Рассуждаем так: если дуга в 1° равна 1,7 м, то полная окружность, содержащая 360° , будет иметь длину $1,7 \cdot 360 = 612$ м, радиус же в 2π раз меньше длины окружности; если принять число π приближённо равным $\frac{22}{7}$, то радиус будет равен

$$610 : \frac{44}{7} \approx 98 \text{ м.}$$



Рис. 66. Человеческая фигура с расстояния сотни метров видна под углом в 1°

Итак, человек кажется под углом в 1° , если находится от нас примерно на расстоянии 100 м (рис. 66). Если он отойдёт вдвое дальше — на 200 м, он будет виден под углом в полградуса; если подойдет до расстояния в 50 м, то угол зрения возрастет до 2° и т.д.

Нетрудно вычислить также, что палка в 1 м длины должна представляться нам под углом в 1° на расстоянии $360 : \frac{44}{7} = 57$ с небольшим метров. Под таким же углом усматриваем мы 1 см с расстояния 57 см, 1 км с расстояния в 57 км и т.д. — вообще, всякий предмет с расстояния в 57 раз большего, чем его поперечник. Если запомним это число — 57, то сможем быстро и просто производить все расчёты, относящиеся к угловой величине предмета. Например, если желаем определить, как далеко надо отодвинуть яблоко в 9 см поперечником, чтобы видеть его под углом 1° , то достаточно умножить $9 \cdot 57$ — получим 513 см, или около 5 м; с двойного расстояния оно усматривается под вдвое меньшим углом — в полградуса, т.е. кажется величиной с Луну.

Таким же образом для любого предмета можем мы вычислить то расстояние, на котором он кажется одинаковых размеров с лунным диском.

Тарелка и Луна

Задача

На какое расстояние надо удалить тарелку диаметром 25 см, чтобы она казалась такой же величины, как Луна на небе?

Решение

$$25 \cdot 57 \cdot 2 = 28,5 \text{ м.}$$

Луна и медные монеты

Задача

Сделайте тот же расчёт для пятидесятикопеечной (диаметр 19,50 мм) и для рублёвой монеты (20,5 мм).

Решение

$$0,0195 \cdot 57 \cdot 2 = 2,2 \text{ м,}$$

$$0,0205 \cdot 57 \cdot 2 = 2,3 \text{ м.}$$

Если вам кажется невероятным, что Луна представляется глазу не крупнее, чем монета с расстояния четырёх шагов или обыкновенный карандаш с расстояния 80 см, — держите карандаш в вытянутой руке против диска полной Луны: он с избытком закроет её. И, как ни странно, наиболее подходящим предметом сравнения для Луны в смысле кажущихся размеров являются не тарелка, не яблоко, даже не вишня, а горошина или, ещё лучше, головка спички! Сравнение с тарелкой или яблоком предполагает удаление их на необычно большое расстояние; яблоко в наших руках или тарелку на обеденном столе мы видим в десять — двадцать раз крупнее, чем лунный диск. И только спичечную головку, которую разглядываем на расстоянии 25 см от глаза («расстояние ясного зрения»), мы видим действительно под углом в полградуса, т. е. величиной, одинаковой с Луной.

То, что лунный диск обманчиво вырастает в глазах большинства людей в 10–20 раз, есть один из любопытнейших обманов зрения. Он зависит, надо думать, всего больше от яркости

Луны: полный месяц выделяется на фоне неба гораздо резче, чем выступают среди окружающей обстановки тарелки, яблоки, монеты и иные предметы сравнения. Эта иллюзия навязывается нам с такой неотразимой принудительностью, что даже художники, отличающиеся верным глазом, поддаются ей наряду с прочими людьми и изображают на своих картинах полный месяц гораздо крупнее, чем следовало бы. Достаточно сравнить ландшафт, написанный художником, с фотографическим, чтобы в этом убедиться.

Сказанное относится и к Солнцу, которое мы видим с Земли под тем же углом в полградуса; хотя истинный поперечник солнечного шара в 400 раз больше лунного, но и удаление его от нас также больше в 400 раз.

Сенсационные фотографии

Чтобы пояснить важное понятие угла зрения, отклонимся немного от нашей прямой темы — геометрии в открытом поле — и приведём несколько примеров из области фотографии.

На экране кинематографа вы, конечно, видели такие катастрофы, как столкновение поездов, или такие невероятные сцены, как автомобиль, едущий по морскому дну. Никто не думает, что подобные фотографии сняты непосредственно с натуры. Но каким же способом они получены?

Секрет раскрывается приложенными здесь иллюстрациями. На рис. 67 вы видите «катастрофу» игрушечного поезда в игрушечной обстановке; на рис. 68 — игрушечный автомобиль, который тянут на нитке позади аквариума. Это и есть та «натура», с которой снята была кинематографическая лента. Почему же, видя эти снимки на экране, мы поддаёмся иллюзии, будто перед нами подлинный поезд и автомобиль. Ведь здесь, на иллюстрациях, мы сразу заметили бы их миниатюрные размеры, даже если бы и не могли сравнить их с величиной других предметов. Причина проста: игрушечные поезд и автомобиль сняты для экрана с очень близкого расстояния; поэтому они представляются зрителю примерно под тем же углом зрения, под каким мы видим обычно настоящие вагоны и автомобили. В этом и весь секрет иллюзии.



Рис. 67. Подготовка железнодорожной катастрофы для киносъёмки

Рис. 69 представляет собою другой образчик иллюзии, основанной на том же принципе. Вы видите странный ландшафт, напоминающий природу древнейших геологических эпох: причудливые деревья, сходные с гигантскими мхами, на них — огромные водяные капли, а на переднем плане — исполинское чудовище, имеющее, однако, сходство с безобидными мокрицами. Несмотря

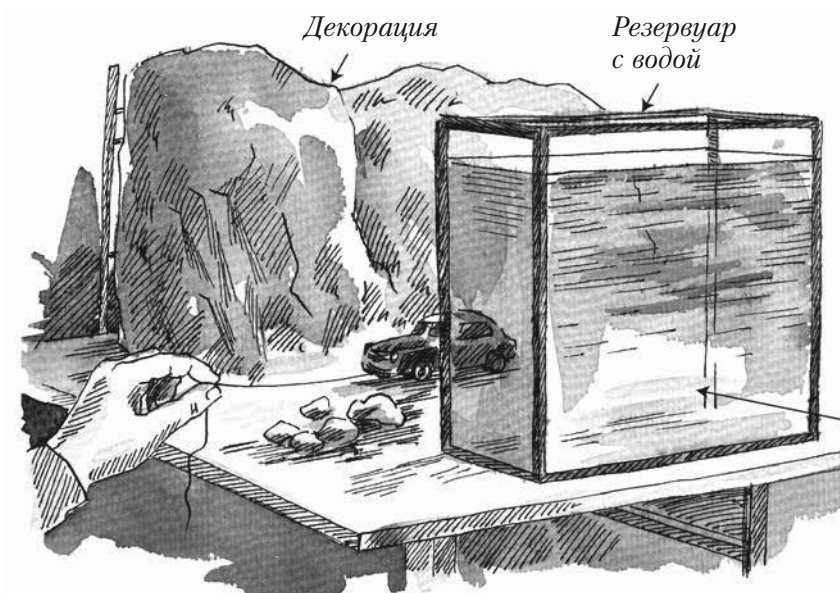


Рис. 68. Автомобильное путешествие по дну моря

на столь необычайный вид, рисунок исполнен с натуры: это не что иное, как небольшой участок почвы в лесу, только срисованный под необычным углом зрения. Мы никогда не видим стеблей мха, капель воды, мокриц и т.п. под столь большим углом зрения, и оттого рисунок кажется нам таким чуждым, незнакомым. Перед нами ландшафт, какой мы видели бы, если бы уменьшились до размеров муравья.

Так же поступают обманщики из газет для изготовления мнимых сенсационных фотографий. В одной из иностранных газет помещена была однажды заметка с упрёками по адресу городского самоуправления, допускающего, чтобы на улицах города скоплялись огромные горы снега. В подтверждение прилагается снимок одной из таких гор, производящий внушительное впечатление (рис. 70, слева). На поверку оказалось, что натурой для фотографии послужил небольшой



Рис. 69. Загадочный ландшафт, воспроизведённый с натуры



Рис. 70. Гора снега на фотографии (слева) и в натуре (справа)

снежный бугорок, снятый «шутником» фотографом с весьма близкого расстояния, т.е. под необычно большим углом зрения (рис. 70, справа).

В другой раз та же газета воспроизвела снимок широкой расселины в скале близ города; она служила, по словам газеты, входом в обширное подземелье, где пропала без вести группа неосторожных туристов, отважившихся проникнуть в грот для исследования. Отряд добровольцев, снаряжённый на розыски заблудившихся, обнаружил, что расселина сфотографирована с... едва заметной трещины в обледенелой стене, трещины в сантиметр шириною!

Живой угломер

Изготовить самому угломерный прибор простого устройства не очень трудно, особенно если воспользоваться транспортиром. Но и самодельный угломер не всегда бывает под рукою во время загородной прогулки. В таких случаях можно пользоваться услугами того «живого угломера», который всегда при нас. Это — наши собственные пальцы. Чтобы пользоваться ими для приблизительной оценки углов зрения, нужно лишь произвести предварительно несколько измерений и расчётов.

Прежде всего, надо установить, под каким углом зрения видим мы ноготь указательного пальца своей вытянутой вперёд руки. Обычная ширина ногтя — 1 см, а расстояние его от глаза в таком положении — около 60 см; поэтому мы видим его примерно под углом в 1° (немного менее, потому что угол в 1° получился бы при расстоянии в 57 см). У подростков ноготь меньше, но и рука короче, так что угол зрения для них примерно тот же — 1° . Читатель хорошо сделает, если, не полагаясь на книжные данные, выполнит для себя это измерение и расчёт, чтобы убедиться, не слишком ли отступает результат от 1° ; если уклонение велико, надо испытать другой палец.

Зная это, вы располагаете способом оценивать малые углы зрения буквально голыми руками. Каждый отдалённый предмет, который как раз покрывается ногтем указательного пальца вытянутой руки, виден вами под углом в 1° и, следовательно, отодвинут в 57 раз дальше своего поперечника. Если ноготь

покрывает половину предмета, значит, угловая величина его 2° , а расстояние равно 28 поперечникам.

Полная Луна покрывает только половину ногтя, т.е. видна под углом в полградуса, и значит, отстоит от нас на 114 своих поперечников; вот ценное астрономическое измерение, выполненное буквально голыми руками!

Для углов побольше воспользуйтесь ногтевым суставом вашего большого пальца, держа его *согнутым* на вытянутой руке. У взрослого человека длина (заметьте: длина, а не ширина) этого сустава — около $3\frac{1}{2}$ см, а расстояние от глаза при вытянутой руке — около 55 см. Легко рассчитать, что угловая величина его в таком положении должна равняться 4° . Это дает средство оценивать углы зрения в 4° (а значит, и в 8°).

Сюда надо присоединить ещё два угла, которые могут быть измерены пальцами, — именно те, под которыми нам представляются на вытянутой руке промежутки: 1) между средним и указательным пальцами, расставленными возможно шире; 2) между большим и указательным, также раздвинутыми в наибольшей степени. Нетрудно вычислить, что первый угол равен примерно $7-8^\circ$, второй — $15-16^\circ$.

Случаев применить ваш живой угломер во время прогулок по открытой местности может представиться множество. Пусть вдалеке виден товарный вагон, который покрывается примерно половиной сустава большого пальца вашей вытянутой руки, т.е. виден под углом около 2° . Так как длина товарного вагона известна (около 6 м), то вы легко находите, какое расстояние вас от него отделяет: $6 \cdot 28 \approx 170$ м, или около того. Измерение, конечно, грубо приближённое, но всё же более надёжное, чем необоснованная оценка просто на глаз.

Заодно укажем способ проводить на местности прямые углы, пользуясь лишь своим собственным телом.

Если вам нужно провести через некоторую точку перпендикуляр к данному направлению, то, став на эту точку лицом в направлении данной линии, вы, *не поворачивая пока головы*, свободно протягиваете руку в ту сторону, куда желаете провести перпендикуляр. Сделав это, приподнимите большой палец своей вытянутой руки, поверните к нему голову и заметьте, какой предмет — камешек, кустик и т.п. — покрывается большим пальцем, если на него смотреть соответствующим глазом (т.е. правым, когда вытянута правая рука, и левым — когда левая).

* Эккером называется землемерный прибор для проведения на местности линий под прямым углом.

Вам остаётся лишь отметить на земле прямую линию от места, где вы стояли, к замеченному предмету, — это и будет искомый перпендикуляр. Способ, как будто не обещающий хороших результатов, но после недолгих упражнений вы научитесь ценить услуги этого «живого эккера»* не ниже настоящего, крестообразного.

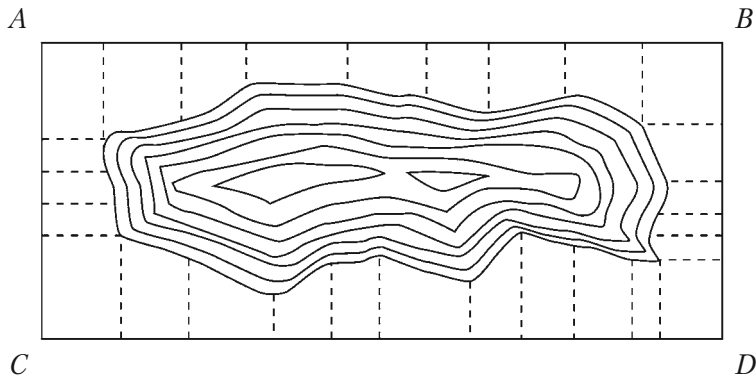


Рис. 71. Съёмка озера на план

Далее пользуясь «живым угломером», вы можете, при отсутствии всяких приспособлений, измерять угловую высоту светил над горизонтом, взаимное удаление звёзд в градусной мере, видимые размеры огненного пути метеора и т.п. Наконец, умея без приборов проводить прямые углы на местности, вы можете снять план небольшого участка по способу, сущность которого ясна из рис. 71; например, при съёмке озера измеряют прямоугольник $ABCD$, а также длины перпендикуляров, опущенных из приметных точек берега, и расстояния их оснований от вершин прямоугольника. Словом, в положении Робинзона уметь пользоваться собственными руками для измерения углов (и ногами для измерения расстояний) могло бы пригодиться для самых разнообразных надобностей.

Посох Якова

При желании располагать более точными измерителями углов, нежели сейчас описанный нами природный «живой угломер», вы можете изготовить себе простой и удобный прибор, некогда

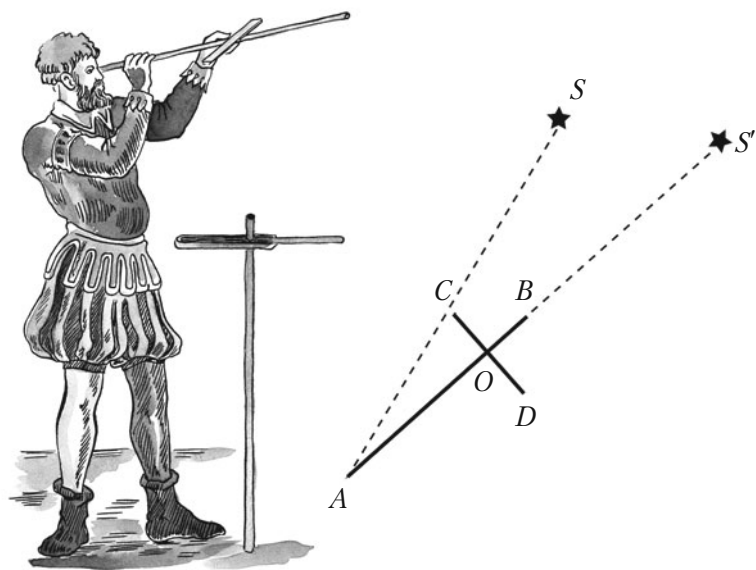


Рис. 72. Посох Якова и схема его употребления

служивший нашим предкам. Это — названный по имени изобретателя «посох Якова» — прибор, бывший в широком употреблении у мореплавателей до XVIII века (рис. 72), до того как его постепенно вытеснили ещё более удобные и точные угломеры (секстанты).

Он состоит из длинной линейки AB в 70–100 см, по которой может скользить перпендикулярный к ней брусок CD ; обе части CO и OD скользящего бруска равны между собою. Если вы желаете при помощи этого бруска определить угловое расстояние между звёздами S и S' (рис. 72), то приставляете к глазу конец A линейки (где для удобства наблюдения приделана просверлённая пластинка) и направляете линейку так, чтобы звезда S' была видна у конца B линейки; затем двигаете поперечину CD вдоль линейки до тех пор, пока звезда S не будет видна как раз у конца C . Теперь остаётся лишь измерить расстояние AO , чтобы, зная длину CO , вычислить величину угла SAS' . Знакомые с тригонометрией сообразят, что тангенс искомого угла равен отношению CO/AO ; наша «походная тригонометрия», изложенная в третьей главе, также достаточна для выполнения этого расчёта; вы вычисляете по теореме Пифагора длину AC , затем находите угол, синус которого равен CO/AC .

Наконец, вы можете узнать искомый угол и графическим путём: построив треугольник ACO на бумаге в произвольном масштабе, измеряете угол A транспортиром.

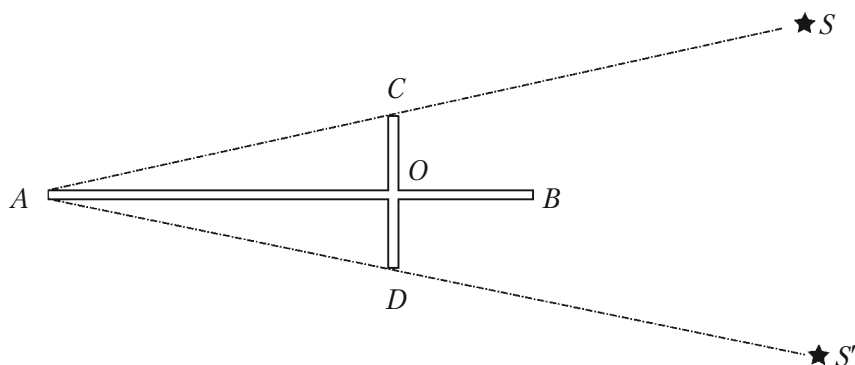


Рис. 73. Определение углового расстояния между звёздами при помощи посоха Якова

Для чего же нужна другая половина поперечины? На тот случай, когда измеряемый угол слишком велик, так что его не удаётся измерить сейчас указанным путём. Тогда на светило S' направляют не линейку AB , а прямую AD , подвигая поперечину так, чтобы её конец C пришёлся в то же время у звезды S (рис. 73). Найти величину угла SAS' вычислением или построением, конечно, не составит труда.

Чтобы при каждом измерении не приходилось делать расчёта или построения, можно выполнить их заранее, ещё при изготовлении прибора, и обозначить результаты на линейке AB ; тогда, направив прибор на звёзды, вы прочитываете лишь показание, записанное у точки O , — это и есть величина измеряемого угла.

Грабельный угломер

Ещё легче изготовить другой прибор для измерения угловой величины — так называемый грабельный угломер, действительно напоминающий по виду грабли (рис. 74). Главная часть его — дощечка любой формы, у одного края которой укреплена просверлённая пластинка; её отверстие наблюдатель приставляет к глазу. У противоположного края дощечки втыкают ряд тонких булавок (употребляемых для коллекций насекомых), промежутки между которыми составляют $\frac{57}{100}$ -ю долю их расстояния от отверстия просверлённой пластинки. Мы уже знаем, что при этом каждый промежуток усматривается под углом в один

градус. Можно разместить булавки также следующим приёмом, дающим более точный результат: на стене чертят две параллельные линии на расстоянии одного метра одну от другой и, отойдя от стены по перпендикуляру к ней на 57 м, рассматривают эти линии в отверстие просверлённой пластинки; булавки втыкают в дощечку так, чтобы каждая пара смежных булавок покрывала начерченные на стене линии.

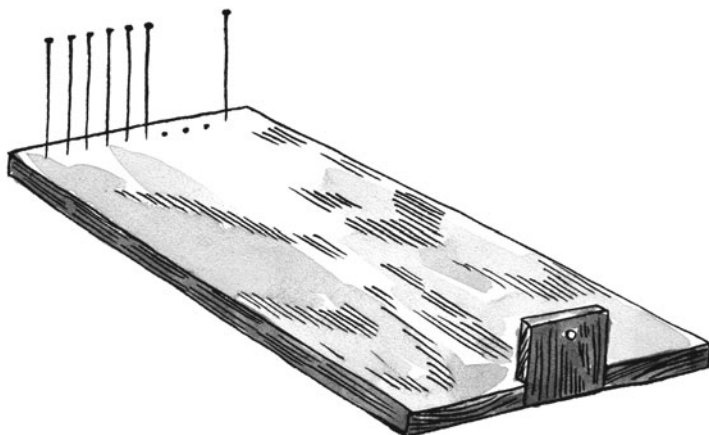


Рис. 74. Гребельный угломер

Когда булавки поставлены, можно некоторые из них снять, чтобы получить углы в 2° , в 3° , в 5° . Способ употребления этого угломера, конечно, понятен читателю и без объяснений. Пользуясь этим угломером, можно измерять углы зрения с довольно большой точностью, не меньше чем $\frac{1}{4}^\circ$.

Острота вашего зрения

Освоившись с понятием угловой величины предмета, вы сможете понять, как измеряется острота зрения, и даже сами выполнить такого рода измерение.

Начертите на листке бумаги 20 равных чёрных линий длиной в спичку (5 см) и в миллиметр толщины так, чтобы они заполняли квадрат (рис. 75). Прикрепив этот чертёж на хорошо освещённой стене, отходите от него до тех пор, пока не заметите, что линии уже не различаются раздельно, а сливаются в сплошной серый фон. Измерьте это расстояние и вычислите — вы уже

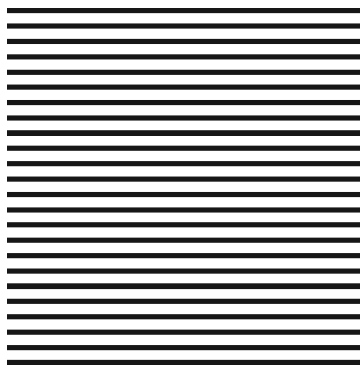


Рис. 75. *К измерению остроты зрения*

знаете как — угол зрения, под которым вы перестаёте различать полосы в 1 мм толщины. Если этот угол равен 1' (одной минуте), то острота вашего зрения нормальная; если трём минутам — острота составляет $\frac{1}{3}$ нормальной, и т.д.

Задача

Линии рис. 75 сливаются для вашего глаза на расстоянии 2 м. Нормальна ли острота зрения?

Решение

Мы знаем, что с расстояния 57 мм полоска в 1 мм ширины видна под углом 1° , т.е. 60'. Следовательно, с расстояния 2000 мм она видна под углом x , который определяется из пропорции:

$$x : 60 = 57 : 2000,$$

$$x = 1,7'.$$

Острота зрения ниже нормальной и составляет

$$1 : 1,7 = \text{около } 0,6.$$

Предельная минута

Сейчас мы сказали, что полосы, рассматриваемые под углом зрения менее одной минуты, перестают различаться отдельно нормальным глазом. Это справедливо для всякого предмета: каковы бы ни были очертания наблюдаемого объекта, они перестают различаться нормальным глазом, если видны под углом меньше 1'. Каждый предмет превращается при этом в едва различимую точку, в пылинку без размеров и формы. Таково свойство нормального человеческого глаза; одна угловая минута — средний предел его остроты. Чем это обусловлено — вопрос особый, касающийся физики и физиологии зрения. Мы говорим здесь лишь о геометрической стороне явления.

Сказанное в равной степени относится и к предметам крупным, но чересчур далёким, и к близким, но слишком мелким. Мы не различаем простым глазом формы пылинок, реющих в воздухе: озаряемые лучами солнца, они представляются нам одинаковыми крошечными точками, хотя в действительности имеют весьма разнообразную форму. Мы не различаем мелких подробностей тела насекомого опять-таки потому, что видим их под углом меньше $1'$. По той же причине не видим мы без телескопа деталей на поверхности Луны, планет и других небесных светил; они лежат ниже предела остроты нашего зрения, усматриваются под углом меньше $1'$.

Мир представлялся бы нам совершенно иным, если бы граница естественного зрения была отодвинута далее. Человек, предел остроты зрения которого был бы не $1'$, а, например, $\frac{1'}{4}$, видел бы окружающий мир глубже и дальше, чем мы. Очень картинно описано это преимущество зоркого глаза у Чехова в повести «Степь».

Зрение у него [Васи] было поразительно острое. Он видел так хорошо, что бурая пустынная степь была для него всегда полна жизни и содержания. Стоило ему только взглянуть в даль, чтобы увидеть лисицу, зайца, дрохву или другое какое-нибудь животное, держащее себя подальше от людей. Немудрено увидеть убегающего зайца или летящую дрохву, — это видел всякий, проезжавший степью, — но не всякому доступно видеть диких животных в их домашней жизни, когда они не бегут, не прячутся и не глядят встревоженно по сторонам. А Вася видел играющих лисиц, зайцев, умывающихся лапками, дрохв, расправляющих крылья, стрепетов, выбивающих свои «точки». Благодаря такой остроте зрения, кроме мира, который видели все, у Васи был ещё другой мир, свой собственный, никому не доступный и, вероятно, очень хороший, потому что, когда он глядел и восхищался, трудно было не завидовать ему.

Странно подумать, что для такой поразительной перемены достаточно лишь понизить предел различимости с $1'$ до $\frac{1'}{2}$ или около того...

Волшебное действие микроскопов и телескопов обусловлено той же самой причиной. Назначение этих приборов — так изменять ход лучей рассматриваемого предмета, чтобы они

* При условии полной прозрачности и однородности нашей атмосферы. В действительности воздух неоднороден и не вполне прозрачен, поэтому при больших увеличениях видимая картина туманится и искажается. Это ставит предел пользованию весьма сильными увеличениями и побуждает астрономов воздвигать обсерватории в ясном воздухе высоких горных вершин.

вступали в глаз более круто расходящимся пучком; благодаря этому, объект представляется под бóльшим углом зрения. Когда говорят, что микроскоп или телескоп увеличивает в 100 раз, то это значит, что при помощи их мы видим предметы под углом в 100 раз бóльшим, чем невооружённым глазом. И тогда подробности, скрывающиеся от простого глаза за пределом остроты зрения, становятся доступны нашему зрению. Полный месяц мы видим под углом в $30'$; а так как поперечник Луны равен 3500 км, то каждый участок Луны, имеющий в поперечнике $\frac{3500}{30}$, т.е. около 120 км, сливается для невооружённого глаза в едва различимую точку. В трубу же, увеличивающую в 100 раз, неразличимыми будут уже гораздо более мелкие участки с поперечником в $\frac{120}{100} = 1,2$ км, а в телескоп с 1000-кратным увеличением — участок в 120 м шириною. Отсюда следует, между прочим, что будь на Луне такие, например, сооружения, как наши крупные океанские пароходы, мы могли бы их видеть в современные телескопы*.

Правило предельной минуты имеет большое значение и для обычных наших повседневных наблюдений. В силу этой особенности нашего зрения каждый предмет, удалённый на 3420 (т.е. $57 \cdot 60$) своих поперечников, перестаёт различаться нами в своих очертаниях и сливается в точку. Поэтому, если кто-нибудь станет уверять вас, что простым глазом узнал лицо человека с расстояния четверти километра, не верьте ему — разве только он обладает феноменальным зрением. Ведь расстояние между глазами человека всего 3 см; значит, оба глаза сливаются в точку уже на расстоянии $3 \cdot 3420$ см, т.е. 100 м. Артиллеристы (см. следующую главу, стр. 104) пользуются этим для глазомерной оценки расстояния. По их правилам, если глаза человека кажутся издали двумя отдельными точками, то расстояние до него не превышает 100 шагов (т.е. 60–70 м). У нас получилось большее расстояние — 100 м: это показывает, что примета военных имеет в виду несколько пониженную (на 30%) остроту зрения.

Задача

Может ли человек с нормальным зрением различить всадника на расстоянии 10 км, пользуясь биноклем, увеличивающим в три раза?

Решение

Высота всадника 2,2 м. Фигура его превращается в точку для простого глаза на расстоянии $2,2 \cdot 3420 = 7$ км; в бинокль же, увеличивающий втрое, — на расстоянии 21 км. Следовательно, в 10 км различить его в такой бинокль возможно (если воздух достаточно прозрачен).

Луна и звёзды у горизонта

Самый невнимательный наблюдатель знает, что полный месяц, стоящий низко у горизонта, имеет заметно бóльшую величину, чем когда он висит высоко в небе. Разница так велика, что трудно её не заметить. То же верно и для Солнца: известно, как велик солнечный диск при заходе или восходе по сравнению с его размерами высоко в небе, например, когда он просвечивает сквозь облака (прямо смотреть на незатуманенное солнце вредно для глаз).

Для звёзд эта особенность проявляется в том, что расстояния между ними увеличиваются, когда они приближаются к горизонту. Кто видел зимой красивое созвездие Ориона (или летом — Лебеда) высоко на небе и низко близ горизонта, тот не мог не поразиться огромной разницей размеров созвездия в обоих положениях.

Всё это тем загадочнее, что, когда мы смотрим на светила при восходе или заходе, они не только не ближе, но, напротив, дальше (на величину земного радиуса), как легко понять из рис. 76: в зените мы рассматриваем светило из точки А, а у горизонта —

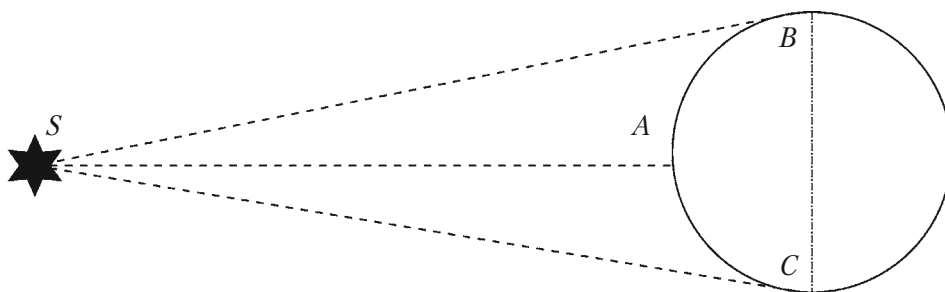


Рис. 76. Почему Солнце, находясь на горизонте, дальше от наблюдателя, чем находясь на середине неба?

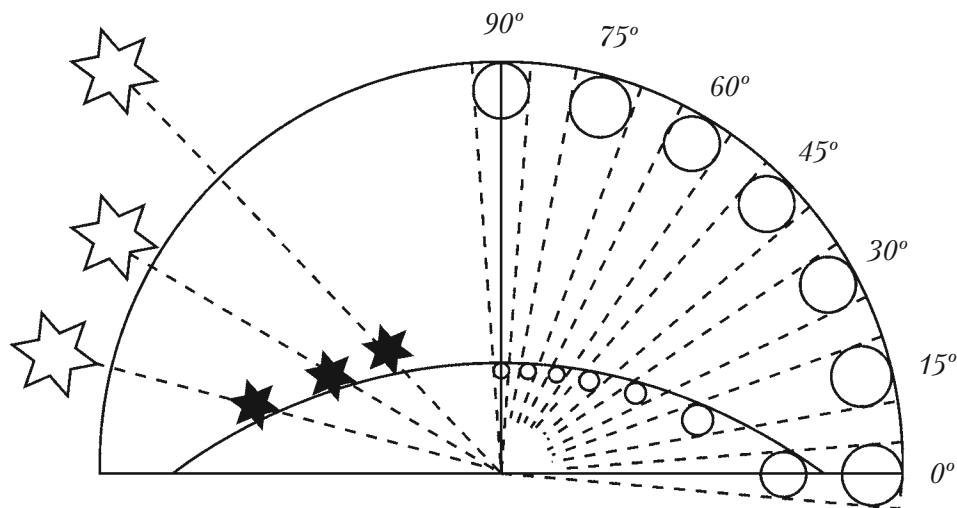


Рис. 77. Влияние приплюснутости небесного свода на кажущиеся размеры светил

из точек *B* или *C*. Почему же Луна, Солнце и созвездия увеличиваются у горизонта?

«Потому что это неверно», — можно бы ответить. Это обман зрения. При помощи грабельного или иного угломера нетрудно убедиться, что лунный диск виден в обоих случаях под одним и тем же углом зрения в полградуса. Пользуясь тем же прибором или «посохом Якова», можно удостовериться, что и угловые расстояния между звёздами не меняются, где бы созвездие ни стояло: у зенита или у горизонта. Значит, увеличение — оптический обман, которому поддаются все люди без исключения.

Чем объясняется столь сильный и всеобщий обман зрения? Бесспорного ответа на этот вопрос, насколько нам известно, наука ещё не дала, хотя и стремится разрешить его 2000 лет, со времени Птолемея. Иллюзия находится в связи с тем, что весь небесный свод представляется нам не полушаром в геометрическом смысле слова, а шаровым сегментом, высота которого в 2–3 раза меньше радиуса основания. Это потому, что при обычном положении головы и глаз расстояния в горизонтальном направлении и близком к нему оцениваются вами как более значительные по сравнению с вертикальными: в горизонтальном направлении мы рассматриваем предмет «прямым взглядом», а во всяком другом — глазами, поднятыми вверх или опущенными вниз. Если Луну наблюдать лёжа на спине, то она, наоборот, покажется больше, когда будет в зените, чем тог-

да, когда она будет стоять низко над горизонтом*. Перед психологами и физиологами стоит задача объяснять, почему видимый размер предмета зависит от ориентации ваших глаз.

На рис. 77 наглядно показано, как должна влиять кажущаяся приплюснутость небесного свода на величину светил в разных его частях. На своде неба лунный диск всегда виден под углом в полградуса, будет ли Луна у горизонта (на высоте 0°) или у зенита (на высоте 90°). Но наш глаз относит этот диск не всегда на одно и то же расстояние: Луна в зените отодвигается нами на более близкое расстояние, нежели у горизонта, и потому величина его представляется неодинаковой: внутри одного и того же угла ближе к вершине помещается меньший кружок, чем подальше от неё. На левой стороне того же рисунка показано, как благодаря этой причине расстояния между звёздами словно растягиваются с приближением их к горизонту: одинаковые угловые расстояния между ними кажутся тогда неодинаковыми.

Есть здесь и другая поучительная сторона. Любуясь огромным лунным диском близ горизонта, заметили ли вы на нём хоть одну новую черточку, которой не удалось вам различить на диске высоко стоящей Луны? Нет. Но ведь перед вами увеличенный диск, отчего же не видно новых подробностей? Оттого, что здесь нет того увеличения, какое дает, например, бинокль: *здесь не увеличивается угол зрения*, под которым представляется нам предмет. Только увеличение этого угла помогает нам различать новые подробности; всякое иное «увеличение» есть просто обман зрения, для нас совершенно бесполезный.

* Я. И. Перельман объяснял это явление тем, что в горизонтальном направлении мы видим и другие предметы, а в вертикальном — перед нами пустой, ничем не заполненный промежуток. Однако данная иллюзия сохраняется и на ничем не заполненном горизонте моря. Таким образом, это объяснение оказалось неудовлетворительным. (*Примеч. ред.*)





ГЛАВА ПЯТАЯ

ГЕОМЕТРИЯ В ДОРОГЕ

Искусство мерить шагами

Очутившись во время загородной прогулки у железнодорожного полотна или на шоссе, вы можете выполнить ряд интересных геометрических упражнений.

Прежде всего, воспользуйтесь шоссе, чтобы измерить длину своего шага и скорость ходьбы. Это даст вам возможность измерять расстояния шагами — искусство, которое приобретается довольно легко после недолгого упражнения. Главное здесь — приучить себя делать шаги всегда одинаковой длины, т.е. усвоить определённую «мерную» походку.

Затем необходимо научиться *вести счёт* шагов. Остановимся на этом подробнее.

Считать шаги просто, как считают орехи и т.п., очень неудобно: добравшись до длинных наименований, вы не будете успевать мысленно произносить числа и начнёте либо сбиваться в счёте, либо невольно замедлять шаги. Лучше поэтому считать шаги парами, так что мысленно произносимые числа будут совпадать всегда с выставлением одной и той же ноги — например, правой. Кроме того, если руки свободны, можно по-

мочь себе применением счёта на пальцах. Счёт пар ведут при этом только до 10. Досчитав до этого числа, загибают на левой руке первый палец; досчитав вторично до 10, загибают второй палец, и т.д. Когда все пальцы этой руки будут загнуты, т.е. после 50 пар, разгибают все пальцы левой руки и загибают первый палец правой. После следующего десятка загибают снова первый палец левой руки, продолжая держать загнутым палец правой, как отметку об отсчитанных 50 парах. Загнув последовательно при дальнейшем счёте все пальцы левой руки, загибают второй палец правой и, освободив пальцы левой, начинают пользоваться ими сызнова. Таким образом, можно, используя все пальцы обеих рук, досчитать до $50 \cdot 5 = 250$ пар, т.е. до 500 шагов.

Тогда начинают счёт опять, как прежде, запомнив, что 500 шагов уже пройдено. Напрактиковавшись в таком счёте, можно научиться считать шаги автоматически, не отвлекаясь от наблюдения окружающего. Результат словно сам собою записывается на пальцах: если при последнем шаге мы произносим «семь» и обнаруживаем у себя загнутыми два пальца правой руки и три — левой, то нами сделано:

$$2 \cdot 50 + 3 \cdot 10 + 7 = 137 \text{ пар шагов,}$$

т.е. 274 отдельных шага (если только нами не пройдено было раньше один или несколько раз по 500 шагов, — что запомнить нетрудно).

Сосчитать число шагов ещё не значит определить пройденное расстояние. Необходимо знать длину одного шага. На шоссе через каждые 100 м установлен белый камень; пройдя такой 100-метровый промежуток своим обычным «мерным» шагом и сосчитав число шагов, вы легко найдёте среднюю длину своего шага. Подобное измерение следует повторять ежегодно, например каждую весну, потому что длина шага, особенно у молодых людей, не остаётся неизменной.

Отметим любопытное соотношение, обнаруженное многократными измерениями: средняя длина шага взрослого человека равна примерно половине его роста, считая до уровня глаз. Если, например, рост человека до глаз 1 м 40 см, то длина его шага — около 70 см. Интересно при случае проверить это правило.

Кроме длины своего шага, полезно знать также скорость своей ходьбы — число километров, проходимых в час. Иногда пользуются для этого следующим правилом: мы проходим в час столько километров, сколько делаем шагов в три секунды; например, если в три секунды мы делаем четыре шага, то в час проходим 4 км. Однако правило это применимо лишь при известной длине шага. Нетрудно определить, при какой именно: обозначив длину шага в метрах через x , а число шагов в три секунды через n , имеем уравнение

$$\frac{3600}{3} \cdot nx = n \cdot 1000,$$

откуда $1200x = 1000$ и $x = \frac{5}{6}$ м, т.е. около 80–85 см. Это сравнительно большой шаг; такие шаги делают люди высокого роста. Если ваш шаг отличается от 80–85 см, то вам придётся произвести измерение скорости своей ходьбы иным способом, определив по часам, во сколько времени проходите вы расстояние между двумя дорожными столбами.

Глазомер

Приятно и полезно уметь не только измерять расстояния без мерной цепи, шагами, но и оценивать их прямо на глаз без измерения. Это искусство достигается лишь путём упражнения. В мои школьные годы, когда с группой товарищей я участвовал в летних экскурсиях за город, подобные упражнения были у нас очень обычны. Они осуществлялись в форме особого спорта, нами самими придуманного, — в форме состязания на точность глазомера. Выйдя на дорогу, мы намечали глазами какое-нибудь придорожное дерево или другой отдалённый предмет — и состязание начиналось.

— Сколько шагов до дерева? — спрашивал кто-либо из участников игры.

Остальные называли предполагаемое число шагов и затем совместно считали шаги, чтобы определить, чья оценка ближе к истинной, — это и был выигравший. Тогда наступала его очередь намечать предмет для глазомерной оценки расстояния.

Кто определил расстояние удачнее других, тот получал одно очко. После 10 раз подсчитывали очки: получивший наибольшее число очков считался победителем в состязании.

Помню, на первых порах наши оценки расстояний давались с грубыми ошибками. Но очень скоро — гораздо скорее, чем можно было ожидать, — мы так изошрились в искусстве определять на глаз расстояния, что ошибались очень мало. Лишь при резкой перемене обстановки, например при переходе с пустынного поля в редкий лес или на заросшую кустарником поляну, при возвращении в пыльные, тесные городские улицы, а также ночью, при обманчивом освещении луны, мы ловили друг друга на крупных ошибках. Потом, однако, научились приспособливаться ко всяким обстоятельствам, мысленно учитывать их при оценке на глаз. Наконец, группа наша достигла такого совершенства в глазомерной оценке расстояний, что пришлось отказаться совсем от этого спорта: все угадывали одинаково хорошо, и состязания утратили интерес. Зато мы приобрели недурной глазомер, сослуживший нам хорошую службу во время наших загородных странствований.

Любопытно, что глазомер как будто не зависит от остроты зрения. Среди нашей группы был близорукий мальчик, который не только не уступал остальным в точности глазомерной оценки, но иной раз даже выходил победителем из состязаний. Наоборот, одному мальчику со вполне нормальным зрением искусство определять расстояния на глаз никак не давалось. Впоследствии мне пришлось наблюдать то же самое и при глазомерном определении высоты деревьев: упражняясь в этом со студентами — уже не для игры, а для нужд будущей профессии — я заметил, что близорукие овладевали этим искусством несколько не хуже других. Это может служить утешением для близоруких: не обладая зоркостью, они всё же способны развить в себе вполне удовлетворительный глазомер.

Упражняться в глазомерной оценке расстояний можно во всякое время года, в любой обстановке. Идя по улице города, вы можете ставить себе глазомерные задачи, пытаясь отгадывать, сколько шагов до ближайшего фонаря, до того или иного попутного предмета. В дурную погоду вы незаметно заполните таким образом время переходов по безлюдным улицам.

Глазомерному определению расстояний много внимания уделяют военные: хороший глазомер необходим разведчику, стрелку,

артиллеристу. Интересно познакомиться с теми признаками, которыми пользуются они в практике глазомерных оценок. Вот несколько замечаний из учебника артиллерии:

На глаз расстояния определяют или по навыку различать по известной степени отчётливости видимых предметов их разные удаления от наблюдателя, или по оценке расстояния некоторым привычным глазу протяжением в 100–200 шагов, кажущимся тем меньшим, чем далее от наблюдателя оно откладывается.

При определении расстояний по степени отчётливости видимых предметов следует иметь в виду, что кажутся ближе предметы освещённые или ярче отличающиеся по цвету от местности или на воде; предметы, расположенные выше других; группы сравнительно с отдельными предметами и, вообще, предметы более крупные.

Можно руководствоваться следующими признаками: до 50 шагов можно ясно различать глаза и рот людей; до 100 шагов глаза кажутся точками; на 200 шагов пуговицы и подробности обмундирования всё ещё можно различать; на 300 — видно лицо; на 400 — различается движение ног; на 500 — виден цвет мундира.

При этом наиболее изощрённый глаз делает ошибку до 10% определяемого расстояния в ту или другую сторону.



Рис. 78. *Дерево за пригорком кажется близко*



Рис. 79. *Поднимешься на пригорок, а до дерева ещё столько же*

Бывают, впрочем, случаи, когда ошибки глазомера гораздо значительнее. Во-первых, при определении расстояния на ровной, совершенно одноцветной поверхности — на водной глади рек или озера, на чистой песчаной равнине, на густо заросшем поле. Тут расстояние всегда кажется меньшим истинного; оценивая его на глаз, мы ошибёмся вдвое, если не больше. Во-вторых, ошибки легко возможны, когда определяется расстояние до такого предмета, основание которого заслонено железнодорожной насыпью, холмиком, зданием — вообще, каким-нибудь возвышением. В таких случаях мы невольно считаем предмет находящимся не *позади* возвышения, а *на нём* самом и, следовательно, делаем ошибку опять-таки в сторону уменьшения определяемого расстояния (рис. 78 и 79).

В подобных случаях полагаться на глазомер опасно и приходится прибегать к другим приёмам оценки расстояния, о которых мы уже говорили и ещё будем говорить.

Уклоны

Вдоль железнодорожного полотна, кроме верстовых (точнее, километровых) столбов, вы видите ещё и другие невысокие столбы с непонятными для многих надписями на косо прибитых дощечках, вроде таких, как на рис. 80.

Это — «уклонные знаки». В первой, например, надписи верхнее число 0,002 означает, что уклон пути здесь (в какую сторону — показывает положение дощечки) равен 0,002: путь поднимается или опускается на 2 мм при каждой тысяче миллиметров. А нижнее число 140 показывает, что такой уклон идёт на протяжении 140 м, где поставлен другой знак, с обозначением нового уклона. (Когда дороги не были ещё переустроены по метрической системе мер, такая дощечка означала, что



Рис. 80. «Уклонные знаки»

* Иному читателю покажется, быть может, недопустимым считать наклонную AB , равной перпендикуляр AC . Поучительно поэтому убедиться, как мала разница в длине AC и AB , когда BC составляет, например, 0,01 от AB . По теореме Пифагора, имеем:

$$\begin{aligned} AC^2 &= \\ &= \sqrt{AB^2 - (AB/100)^2} = \\ &= \sqrt{0,9999AB^2} = \\ &= 0,99995AB. \end{aligned}$$

Разница в длине составляет всего 0,00005. Для приближённых вычислений подобной ошибкой можно, конечно, пренебречь.

на протяжении 140 сажен путь поднимается или опускается каждую сажень на 0,002 сажени.) Вторая дощечка с надписью: « $0,006/55$ » — показывает, что на протяжении ближайших 55 м путь поднимается или опускается на 6 мм при каждом метре.

Зная смысл знаков уклона, вы легко можете вычислить разность высот двух соседних точек пути, отмеченных этими знаками. В первом случае, например, разность высот составляет $0,002 \cdot 140 = 0,28$ м; во втором — $0,006 \cdot 55 = 0,33$ м.

В железнодорожной практике, как видите, величина наклона пути определяется не в градусной мере. Однако легко перевести эти путевые обозначения уклона в градусные. Если AB (рис. 80, справа) — линия пути, BC — разность высот точек A и B , то наклон линии пути AB к горизонтальной линии AC будет на столбике обозначен отношением BC/BA . Так как угол A очень мал, то можно принять AB и AC за радиусы окружности, дуга которой есть BC^* . Тогда вычисление угла A , если известно отношение $BC : AB$, не составит труда. При наклоне, например, обозначенном 0,002, рассуждаем так: при длине дуги, равной $1/57$ радиуса, угол составляет 1° (см. стр. 83); какой же угол соответствует дуге в 0,002 радиуса? Находим его величину x из пропорции:

$$x : 1^\circ = 0,002 : \frac{1}{57}, \text{ откуда } x = 0,002 \cdot 57 = 0,11^\circ, \\ \text{т.е. около } 7'.$$

На железнодорожных путях допускаются лишь весьма малые уклоны. У нас установлен предельный уклон в 0,008, т.е. в градусной мере $0,008 \cdot 57$ — менее $0,5^\circ$: это наибольший уклон. Только для Закавказской железной дороги допускаются в виде исключения уклоны до 0,025, соответствующие в градусной мере почти $1,5^\circ$.

Столь незначительные уклоны совершенно не замечаются вами. Пешеход начинает ощущать наклон почвы под своими ногами лишь тогда, когда он превышает $1/24$: это отвечает в градусной мере $57/24^\circ$, т.е. около $2,5^\circ$.

Пройдя по железнодорожному пути несколько километров и записав замеченные при этом знаки уклона, вы сможете вычислить, насколько в общей сложности вы поднялись или опустились, т.е. какова разность высот между начальными и конечными пунктами.

Задача

Вы начали прогулку вдоль полотна железной дороги у столбика со знаком подъёма « $0,004/_{153}$ » и встретили далее следующие знаки (по метрической системе):

* Знак 0,000 означает горизонтальный участок пути («площадку»).

Площадка *	подъём	подъём	площадка	падение
$\frac{0,000}{60}$	$\frac{0,0017}{84}$	$\frac{0,0032}{121}$	$\frac{0,000}{45}$	$\frac{0,004}{210}$

Прогулку вы кончили у очередного знака уклона. Какой путь вы прошли и какова разность высот между первым и последним знаками?

Решение

Всего пройдено

$$153 + 60 + 84 + 121 + 45 + 210 = 673 \text{ м.}$$

Вы поднялись на

$$0,004 \cdot 153 + 0,0017 \cdot 84 + 0,0032 \cdot 121 = 1,148 \text{ м,}$$

а опустились на

$$0,004 \cdot 210 = 0,84 \text{ м,}$$

значит, в общей сложности вы оказались выше исходной точки на

$$1,148 - 0,84 = 0,308 \text{ м} = 30,8 \text{ см.}$$

Кучи щебня

Кучи щебня по краям шоссеиной дороги также представляют предмет, заслуживающий внимания «геометра на вольном воздухе». Задайте вопрос, какой объём заключает лежащая перед вами куча, — и вы поставите себе геометрическую задачу, довольно замысловатую для человека, привыкшего преодолевать

* На практике это действие заменяют умножением на обратное число 0,318, если ищут диаметр, и на 0,159, если желают вычислить радиус.

математические трудности только на бумаге или на классной доске. Придётся вычислить объём конуса, высота и радиус которого недоступны для непосредственного измерения. Ничто не мешает, однако, определить их величину косвенным образом. Радиус вы найдете, измерив рулеткой или шнуром окружность основания и разделив * её длину на 6,28.

Сложнее обстоит с высотой: приходится (рис. 81) измерять длину образующей AB или, как делают дорожныедесятники, обеих образующих ABC сразу (перекидывая мерную ленту через вершину кучи), а затем, зная радиус основания, вычисляют высоту BD по теореме Пифагора. Рассмотрим пример.

Задача

Окружность основания конической кучи щебня 12,13 м; длина двух образующих 4,6 м. Каков объём кучи?

Решение

Радиус основания кучи равен

$$12,13 \cdot 0,159 \text{ (вместо } 12,13 : 6,28) = 1,9 \text{ м.}$$

Высота равна

$$\sqrt{2,3^2 - 1,9^2} = 1,2 \text{ м,}$$

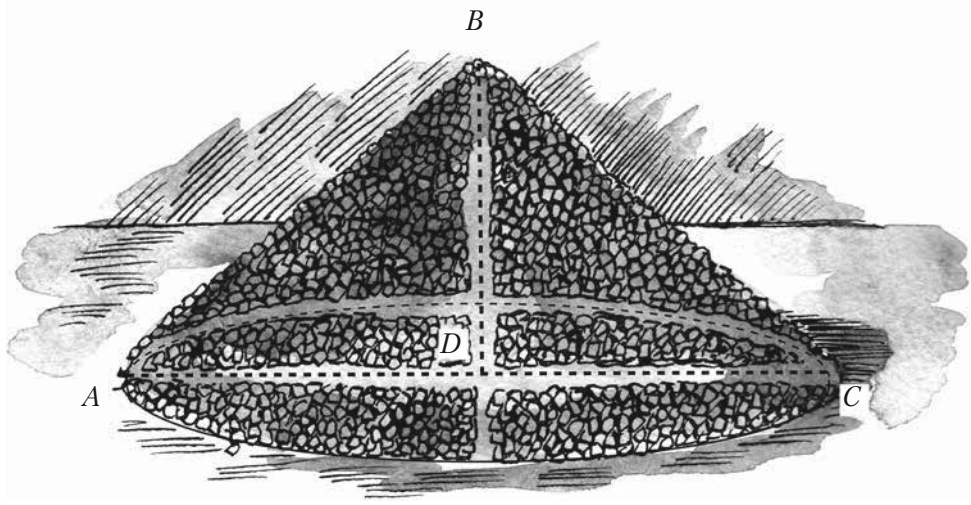


Рис. 81. К задаче о куче щебня

откуда объём кучи

$$\frac{1}{3} \cdot 3,14 \cdot 1,92 \cdot 1,2 = 4,5 \text{ м}^3$$

(или в прежних мерах около $\frac{1}{2}$ сажени³).

Обычные объёмные размеры куч щебня на наших дорогах, согласно прежним дорожным правилам, были равны $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{4}$ и $\frac{1}{8}$ куб. сажени, т.е. в метрических мерах 4,8, 2,4 и 1,2 м³.

«Гордый холм»

При взгляде на конические кучи щебня или песка мне вспоминается старинная легенда восточных народов, рассказанная у Пушкина в «Скупом рыцаре»:

Читал я где-то,
Что царь однажды воинам своим
Велел снести земли по горсти в кучу, —
И гордый холм возвысился,
И царь мог с высоты с весельем озирать
И дол, покрытый белыми шатрами,
И море, где бежали корабли.

Это одна из тех немногих легенд, в которых при кажущемся правдоподобии нет и зерна правды. Можно доказать геометрическим расчётом, что если бы какой-нибудь древний деспот вздумал осуществить такого рода затею, он был бы обескуражен мизерностью результата: перед ним высилась бы настолько жалкая кучка земли, что никакая фантазия не в силах была бы раздуть её в легендарный «гордый холм».

Сделаем примерный расчёт. Сколько воинов могло быть у древнего царя? Старинные армии были не так многочисленны, как в наше время. Батый пришёл на Русь с армией всего в 3000 воинов. Войско в 100 000 человек было уже очень внушительно по численности. Остановимся на этом числе, т.е. примем, что холм составил из 100 000 горстей. Захватите самую большую горсть земли и насыпьте в стакан: вы не

наполните его одною горстью. Мы примем, что горсть древнего воина равнялась по объёму $\frac{1}{5}$ л (дм³). Отсюда определяется объём холма:

$$\frac{1}{3} \cdot 100\,000 = 20\,000 \text{ дм}^3 = 20 \text{ м}^3.$$

Значит, холм представлял собою конус объёмом не более 20 м³. Такой скромный объём уже разочаровывает. Но будем продолжать вычисления, чтобы определить высоту холма. Для этого нужно знать, какой угол составляют образующие конуса с его основанием. В нашем случае можем принять его равным углу естественного откоса, т.е. 45°: более крутых склонов нельзя допустить, так как земля будет осыпаться (правдоподобнее было бы взять даже более пологий уклон, например полуторный). Остановившись на угле в 45°, заключаем, что высота такого конуса равна радиусу его основания; следовательно,

$$20 = \frac{\pi x^3}{3},$$

откуда

$$x = 3 \sqrt[3]{\frac{60}{\pi}} = 2,4 \text{ м.}$$

Надо обладать богатым воображением, чтобы земляную кучу в 2,4 м (1½ человеческого роста) назвать «гордым холмом». Сделав расчёт для случая полуторного откоса, мы получили бы ещё более скромный результат.

У Атиллы было самое многочисленное войско, какое знал Древний мир. Историки оценивают его в 700 000 человек. Если бы все эти воины участвовали в насыпании холма, образовалась бы куча повыше вычисленной нами, но не очень: так как объём её был бы в семь раз больше нашей, то высота превышала бы высоту нашей кучи всего в $\sqrt[3]{7}$, т.е. в 1,9 раза; она равнялась бы $2,4 \cdot 1,9 = 4,56$ м. Сомнительно, чтобы курган подобных размеров мог удовлетворить честолюбие Атиллы.

С таких небольших возвышений легко было, конечно, видеть и «дол, покрытый белыми шатрами», но обозревать море

было возможно, только если дело происходило недалеко от берега.

О том, как далеко можно видеть с той или иной высоты, мы побеседуем в шестой главе.

У дорожного закругления

Ни шоссейная, ни железная дороги никогда не заворачивают круто, а переходят всегда с одного направления на другое плавно, без переломов, дугой. Дуга эта обычно есть часть окружности, расположенная так, что прямолинейные части дороги служат касательными к ней. Например, на рис. 82 прямые участки AB и CD дороги соединены дугою BC так, что AB и CD касаются (геометрически) этой дуги в точках B и C , т.е. AB составляет прямой угол с радиусом OB , а CD — такой же угол с радиусом OC . Делается это, конечно, для того, чтобы путь плавно переходил из прямого направления в кривую часть и обратно.

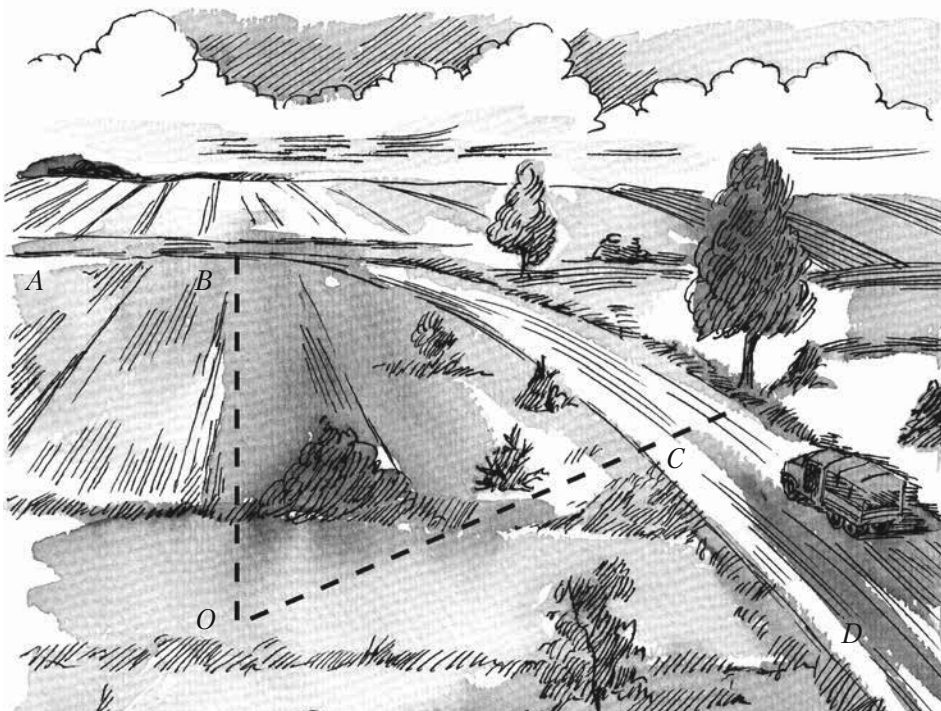


Рис. 82. Дорожное закругление

Радиус дорожного закругления обыкновенно берётся весьма большой — на железных дорогах не менее 600 м; наиболее же обычный радиус закругления на главном железнодорожном пути — 1000 и даже 2000 м.

Радиус закругления

Стоя близ одного из таких закруглений, могли бы вы определить величину его радиуса? Это не так легко, как найти радиус дуги, начерченной на бумаге. На чертеже дело просто: вы проводите две произвольные хорды и из середин их восставляете перпендикуляры: в точке их пересечения лежит, как известно, центр дуги; расстояние его от какой-либо точки кривой и есть искомая длина радиуса.

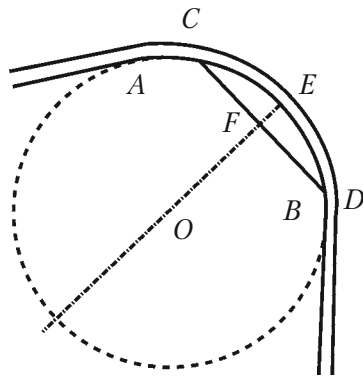


Рис. 83. К вычислению радиуса закругления

Но сделать подобное же построение на местности было бы, конечно, очень неудобно: ведь центр закругления лежит в расстоянии 1–2 км от дороги, зачастую в недоступном месте. Можно было бы выполнить построение на плане, но снять закругления на план тоже нелёгкая работа.

Все эти затруднения устраняются, если прибегнуть не к построению, а к вычислению радиуса. Для этого можно воспользоваться следующим приёмом. Дополним (рис. 83) мысленно дугу AB закругления до окружности. Соединив произвольные точки C и D дуги закругления, измеряем хорду CD , а также «стрелку» EF (т.е. высоту сегмента CED). По этим двум данным уже нетрудно вычислить искомую длину радиуса. Рассматривая прямые CD и EG (диаметр круга) как пересекающиеся хорды, имеем:

$$AF \cdot FB = EF \cdot FG$$

Обозначим длину хорды через a , длину стрелки через h , радиус через R ; тогда имеем:

$$\frac{a^2}{4} = h(2R - h),$$

откуда

$$\frac{a^2}{4} = 2Rh - h^2,$$

и искомый радиус*:

$$R = \frac{a^2 + 4h^2}{8h}.$$

Например, при стрелке в 0,5 м и хорде 48 м искомый радиус

$$R = \frac{48^2 + 4 \cdot 0,5^2}{8 \cdot 0,5} = 576,25 \text{ м.}$$

Это вычисление можно упростить, если считать $2R - h$ равным $2R$ — вольность позволительная, так как h весьма мало по сравнению с R (ведь R — сотни метров, а h — единицы их). Тогда получается весьма удобная для вычислений приближённая формула

$$R = \frac{a^2}{8h}.$$

Применив её в сейчас рассмотренном случае, мы получили бы ту же величину

$$R = 576.$$

Вычислив длину радиуса закругления и зная, кроме того, что центр закругления находится на перпендикуляре к середине хорды, вы можете приблизительно наметить и то место, где должен лежать центр кривой части дороги.

Если на дороге уложены рельсы, то нахождение радиуса закругления упрощается. В самом деле, натянув верёвку по касательной к внутреннему рельсу, мы получаем хорду дуги наружного рельса, стрелка которой h (рис. 84) равна ширине

* То же могло быть получено и иным путём — из прямоугольного треугольника COF , где $OC = R$, $CF = \frac{a}{2}$, $OF = R - h$. По теореме Пифагора, $R^2 = (R - h)^2 + (\frac{a}{2})^2$, откуда $R^2 = R^2 - 2Rh + h^2 + \frac{a^2}{4}$, $R = \frac{(a^2 + 4h^2)}{8h}$.



Рис. 84. К вычислению радиуса железнодорожного закругления

колеи — 1,52 м. Радиус закругления в таком случае (если a — длина хорды) равен приближённо:

$$R = \frac{a^2}{8 \cdot 1,52} = \frac{a^2}{12,2}.$$

Дно океана

От дорожного закругления к дну океана — скачок как будто слишком неожиданный, во всяком случае не сразу понятный. Но геометрия связывает обе темы вполне естественным образом.

Речь идёт о кривизне дна океана, о том, какую форму оно имеет: вогнутую, плоскую или выпуклую. Многим, без сомнения, покажется невероятным, что океаны при огромной своей глубине вовсе не представляют на земном шаре впадин; как сейчас увидим, их дно не только не вогнуто, но даже выпукло. Считая океан «бездонным и безбрежным», мы забываем, что его «безбрежность» во много сотен раз больше его «бездонности», т. е. что водная толща океана представляет собой далеко простирающийся слой, который, конечно, повторяет кривизну нашей планеты.

Возьмём для примера Атлантический океан. Ширина его близ экватора составляет примерно шестую часть полной окружности. Если круг (рис. 85) — экватор, то дуга ACB изображает водную

скатерть Атлантического океана. Если бы дно его было плоско, то глубина равнялась бы CD , стрелке дуги ACB . Зная, что дуга $AB = \frac{1}{6}$ окружности и, следовательно, хорда AB есть сторона правильного вписанного шестиугольника (которая, как известно, равна радиусу R круга), мы можем вычислить CD из выведенной раньше формулы для дорожных закруглений:

$$R = \frac{a^2}{8h}, \quad \text{откуда} \quad h = \frac{a^2}{8R}.$$

Зная, что $a = R$, получаем для данного случая:

$$h = \frac{R}{8}.$$

При $R = 6400$ км имеем:

$$h = 800 \text{ км.}$$

Итак, чтобы дно Атлантического океана было плоско, наибольшая глубина его должна была бы достигать 800 км. В действительности же она не достигает и 10 км. Отсюда прямой вывод: дно этого океана представляет по общей своей форме выпуклость, лишь немного менее искривлённую, чем выпуклость его водной глади.

Это справедливо и для других океанов: дно их представляет собой на земной поверхности места уменьшенной кривизны, почти не нарушая её общей шарообразной формы.

Наша формула для вычисления радиуса кривизны дороги показывает, что, чем водный бассейн обширнее, тем дно его выпуклее. Рассматривая формулу $h = \frac{a^2}{8R}$, мы прямо видим, что с возрастанием ширины a океана или моря его глубина h должна — чтобы дно было плоское — возрастать очень быстро, пропорционально квадрату ширины a . Между тем при переходе от небольших водных бассейнов к более обширным

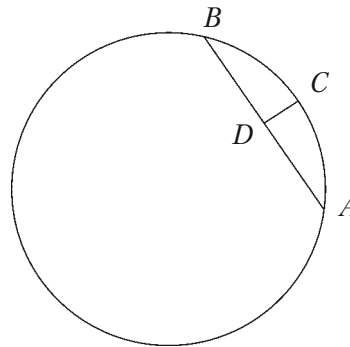


Рис. 85. Плоское ли дно у океана?

глубина вовсе не возрастает в такой стремительной прогрессии. Океан шире иного моря, скажем, в 100 раз, но глубже его вовсе не в $100 \cdot 100$, т.е. в 10 000 раз. Поэтому сравнительно мелкие бассейны имеют дно более вдавленное, нежели океаны. Дно Чёрного моря между Крымом и Малой Азией не выпукло, как у океанов, даже и не плоско, а несколько вогнуто. Водная поверхность этого моря представляет дугу приблизительно в 2° (точнее в $\frac{1}{170}$ долю окружности Земли). Глубина Чёрного моря довольно равномерна и равна 2,2 км. Приравнивая в данном случае дугу к хорде, получаем, что для обладания плоским дном море это должно было бы иметь наибольшую глубину

$$h = \frac{40\,000^2}{170^2 \cdot 8R} = 1,1 \text{ км.}$$

Значит, действительное дно Чёрного моря лежит более чем на километр (2,2 – 1,1) ниже воображаемой плоскости, проведённой через крайние точки его противоположных берегов, т.е. представляет собою впадину, а не выпуклость.

Существуют ли водяные горы?

Выведенная ранее формула для вычисления радиуса кривизны дорожного закругления поможет нам ответить на этот вопрос.

Предыдущая задача уже подготовила нас к ответу. Водяные горы существуют, но не в физическом, а в геометрическом значении этих слов. Не только каждое море, но даже каждое озеро представляет собою в некотором роде водяную гору. Когда вы стоите у берега озера, вас отделяет от противоположной точки берега водная выпуклость, высота которой тем больше, чем озеро шире. Высоту эту мы можем вычислить: из формулы $R = \frac{a^2}{8h}$ имеем величину стрелки $h = \frac{a^2}{8R}$; здесь a — расстояние между берегами по прямой линии, которое можем приравнять ширине озера (хорду — дуге). Если эта ширина, скажем, 100 км, то высота водяной «горы»

$$h = \frac{10\,000}{8 \cdot 6400} = \text{около } 200 \text{ м.}$$

Водяная гора внушительной высоты!

Даже небольшое озеро в 10 км ширины возвышает вершину своей выпуклости над прямой линией, соединяющей её берега, на 2 м, т.е. выше человеческого роста.

Но вправе ли мы называть эти водные выпуклости «горами»? В физическом смысле нет: они не поднимаются над горизонтальной поверхностью, значит, это равнины. Ошибочно думать, что прямая AB (рис. 86) есть горизонтальная линия, над которой поднимается дуга ACB . Горизонтальная линия здесь не AB , а ACB , совпадающая со свободной поверхностью спокойной воды. Прямая же ADB — наклонная к горизонту: AD уходит наклонно вниз под земную поверхность до точки D , её глубочайшего пункта, и затем вновь поднимается вверх, выходя из-под земли (или воды) в точке B . Если бы вдоль прямой AB были проложены трубы, то шарик, помещённый в точке A , не удержался бы здесь, а скатился бы (когда стенки трубы гладки) до точки D и отсюда, разогнавшись, взбежал к точке B ; затем, не удержавшись здесь, скатился бы к D , добежал до A , снова скатился бы и т.д. Идеально гладкий шарик по идеально гладкой трубе (притом при отсутствии воздуха, мешающего движению) катался бы так туда и обратно вечно...

Итак, хотя глазу кажется (рис. 86), что ACB — гора, но в физическом значении слова здесь — ровное место. Гора — если хотите — существует тут только в геометрическом смысле.

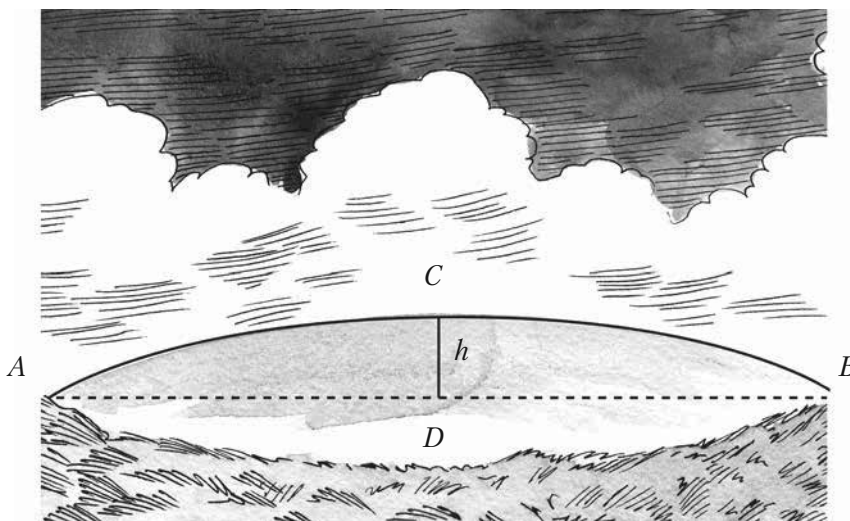
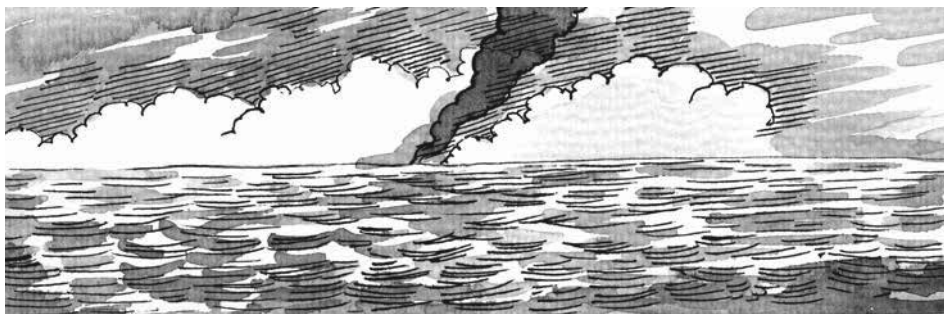


Рис. 86. «Водяная гора»



ГЛАВА ШЕСТАЯ

ГДЕ НЕБО С ЗЕМЛЁЙ СХОДЯТСЯ

Горизонт

В степи или на ровном поле вы видите себя в центре окружности, которая ограничивает доступную вашему глазу земную поверхность. Это — горизонт. Линия горизонта неуловима: когда вы идёте к ней, она от вас отодвигается. Но, недоступная, она всё же реально существует; это не обман зрения, не мираж. Для каждой точки наблюдения *имеется определённая* граница видимой из неё земной поверхности, и дальность этой границы нетрудно вычислить. Чтобы уяснить себе геометрические отношения, связанные с горизонтом, обратимся к рис. 87. Дуга AB — часть окружности земного шара. В точке C помещается глаз наблюдателя на высоте CD над земной поверхностью. Как далеко видит кругом себя на ровном месте этот наблюдатель? Очевидно, только до точек M, N , где луч зрения касается земной поверхности: дальше земля лежит ниже луча зрения. Эти точки M, N (и другие, лежащие на окружности MEN) представляют собой границу видимой части земной поверхности, т.е. образуют ли-

нию горизонта. Наблюдателю должно казаться, что здесь небо опирается на землю, потому что в этих точках он видит одновременно и небо, и земные предметы.

Быть может, вам покажется, что рис. 87 не даёт верной картины действительности: ведь на самом деле горизонт всегда находится на уровне глаз, между тем как на рисунке круг явно лежит ниже наблюдателя. Действительно, нам всегда кажется, что линия горизонта расположена на одном уровне с глазами и даже повышается вместе с нами, когда мы поднимаемся. Но это — обман зрения: на самом деле линия горизонта всегда ниже глаз, как и показано на рис. 87. Но угол, составляемый прямыми линиями CN и CM с прямой CK , перпендикулярной к радиусу в точке C (этот угол называется «понижением горизонта»), весьма мал, и уловить его без инструмента невозможно.

Отметим попутно и другое любопытное обстоятельство. Мы сказали сейчас, что при поднятии наблюдателя над земной поверхностью, например, на аэроплане, линия горизонта кажется остающейся на уровне глаз, т.е. как бы поднимается вместе с наблюдателем. Если он достаточно высоко поднимается, ему будет казаться, что почва под аэропланом лежит *ниже линии горизонта*, — другими словами, земля представится словно вдавленной, в форме чаши, краями которой служит линия горизонта. Это очень хорошо описано и объяснено у Эдгара По в фантастическом «Приключении Ганса Пфаля».

«Больше всего, — рассказывает его герой-аэронавт, — удивило меня то обстоятельство, что поверхность земного шара казалась

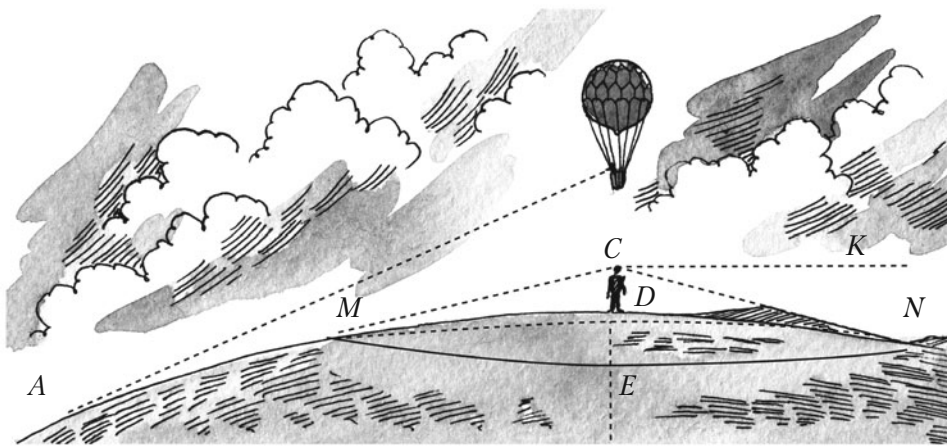


Рис. 87. Горизонт

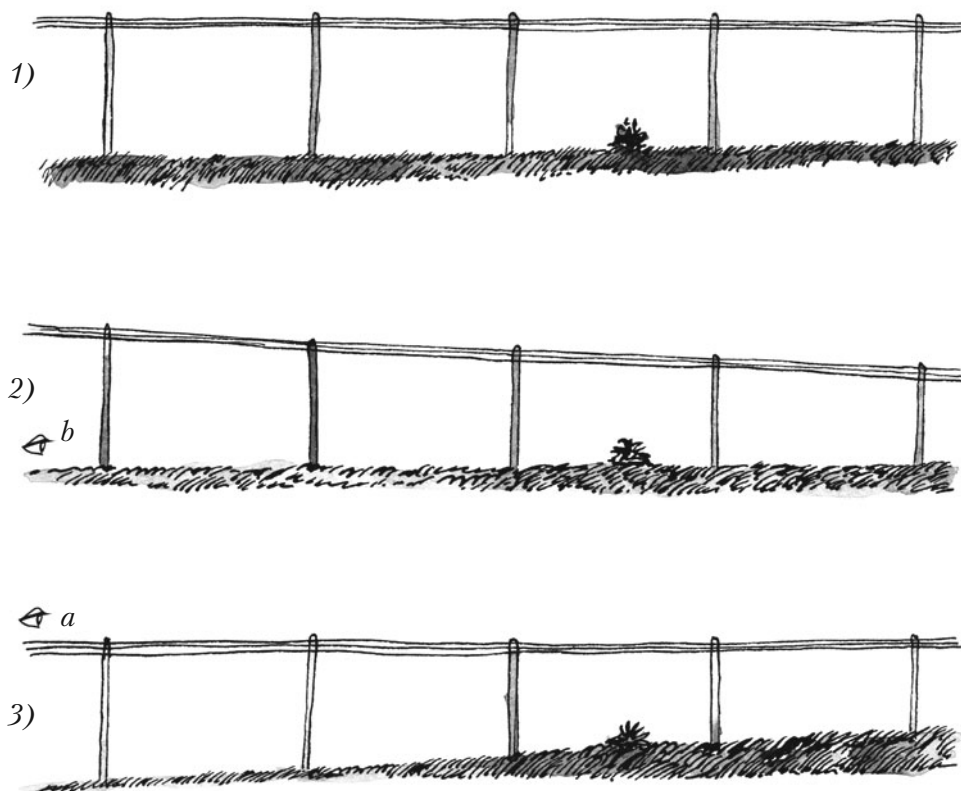


Рис. 88. Ряд телеграфных столбов. a, b — положение глаза наблюдателя

вогнутой. Я ожидал, что увижу её непременно выпуклой во время подъёма вверх; только путём размышления нашёл я объяснение этому явлению. Отвесная линия, проведённая от моего шара к земле, образовала бы катет прямоугольного треугольника, основанием которого была бы линия от основания отвеса до горизонта, а гипотенузой — линия от горизонта до моего шара. Но моя высота была ничтожна по сравнению с полем зрения; другими словами, основание и гипотенуза воображаемого прямоугольного треугольника были так велики по сравнению с отвесным катетом, что их можно было считать почти параллельными. Поэтому каждая точка, находящаяся как раз под аэропланом, всегда кажется лежащей ниже уровня горизонта. Отсюда впечатление вогнутости. И это должно продолжаться до тех пор, пока высота подъёма не станет настолько значительной, что основание треугольника и гипотенуза перестанут казаться параллельными».

В дополнение к этому объяснению добавим следующий пример. Вообразите прямой ряд телеграфных столбов (рис. 88). Для глаза, помещённого в точке B , на уровне оснований столбов, ряд

принимает вид, обозначенный цифрой 2. Но для глаза в точке *A*, на уровне вершин столбов, ряд принимает вид 3, т.е. почва кажется ему словно приподнимающейся у горизонта.

Корабль на горизонте

Когда с берега моря или большого озера мы наблюдаем за кораблем, появляющимся из-под горизонта, нам кажется, что мы видим судно не в той точке (рис. 89), где оно действительно находится, а гораздо ближе, в точке *B*, где линия нашего зрения скользит по выпуклости моря. При наблюдении невооружённым глазом трудно отделаться от впечатления, что судно находится в точке *B*, а не дальше за горизонтом (ср. со сказанным в пятой главе о влиянии пригорка на суждение о дальности).

Однако в зрительную трубу это различное удаление судна воспринимается гораздо отчётливее. Труба не одинаково ясно показывает нам предметы близкие и отдалённые: в трубу, наставленную вдаль, близкие предметы видны расплывчато, и, наоборот, наставленная на близкие предметы труба показывает нам даль в тумане. Если поэтому направить трубу (с достаточным увеличением) на водный горизонт и наставить так, чтобы ясно видна была водная поверхность, то корабль представится в расплывчатых очертаниях, обнаруживая свою большую отдалённость от наблюдения (рис. 90). Наоборот, установив трубу так, чтобы резко видны были очертания корабля, полускрытого под горизонтом, мы заметим, что водная поверхность у горизонта утратила свою прежнюю ясность и рисуется словно в тумане (рис. 91). Английский астроном Проктор, подметивший это поучительное явление, говорит по этому поводу:

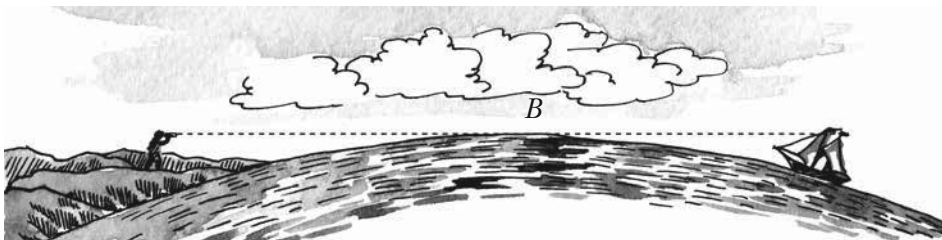


Рис. 89. Корабль за горизонтом

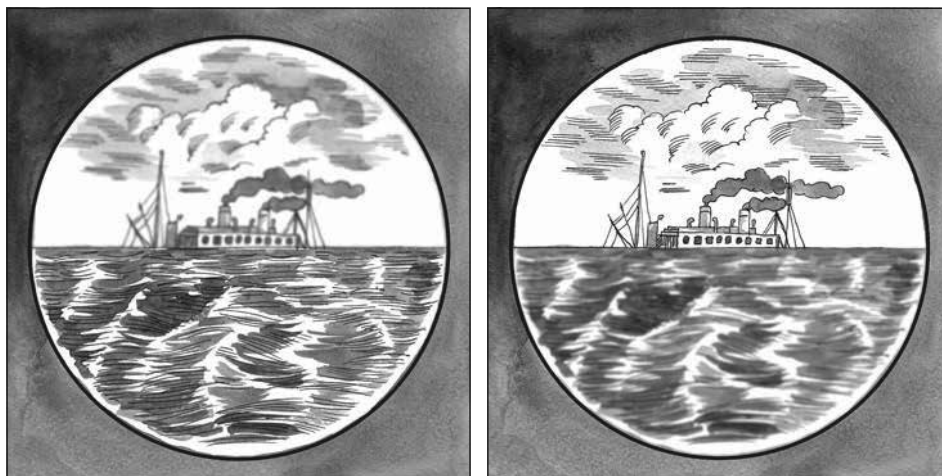


Рис. 90 – 91. *Корабль за горизонтом, рассматриваемый в зрительную трубу*

Все, кому случалось произвести такое наблюдение, единогласно утверждали, что, как ни крепка была их уверенность в шарообразности Земли, они нашли в этом наблюдении убедительнейшее подтверждение этой истины.

Дальность горизонта

Как же далеко лежит от наблюдателя линия горизонта? Другими словами: как велик радиус того круга, в центре которого мы видим себя на ровной местности? Как вычислить дальность горизонта, зная величину возвышения наблюдателя над земной поверхностью?

Задача сводится к вычислению длины отрезка CN (рис. 92) касательной, проведённой из глаза наблюдателя к земной поверхности. Квадрат касательной — мы знаем из геометрии — равен произведению внешнего отрезка h секущей на всю длину этой секущей, т.е. на $h + 2R$, где R — радиус земного шара. Так как возвышение глаза наблюдателя над землею обычно крайне мало по сравнению с диаметром ($2R$) земного шара, составляя, например, для высочайшего поднятия аэроплана около 0,001 его доли, то $2R + h$ можно принять равным $2R$, и тогда формула упростится:

$$CN^2 = h \cdot 2R.$$

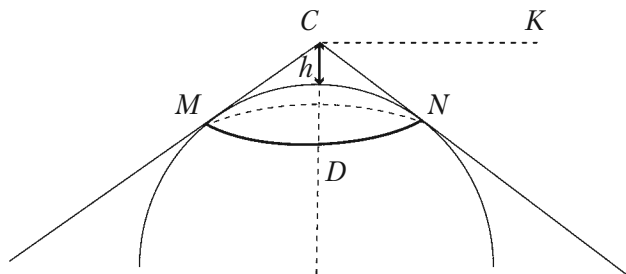


Рис. 92. К задаче о дальности горизонта

Значит, дальность горизонта можно вычислять по очень простой формуле:

$$\text{дальность горизонта} = \sqrt{2Rh},$$

где R — радиус земного шара (около 6400 км*), а h — возвышение глаза наблюдателя над земной поверхностью.

* Точнее 6371 км.

Так как $\sqrt{6400} = 80$, то формуле можно придать следующий вид:

$$\text{дальность горизонта} = 80\sqrt{2h} = 113\sqrt{h},$$

где h непременно должно быть выражено в частях километра.

Задача

Как далеко может обозреть землю человек, стоящий на равнине?

Решение

Считая, что глаз взрослого человека возвышается над почвой на 1,6 м, или на 0,0016 км, имеем:

$$\text{дальность горизонта} = 113\sqrt{0,0016} = 4,52 \text{ км.}$$

Человек среднего роста видит на ровном месте не далее 4,52 км. Поперечник обозреваемого им круга — всего 9,6 км, а площадь — 72 км². Это гораздо меньше, чем обычно думают люди, которые описывают далёкий простор степей, окидываемый глазом.

Задача

Как далеко видит на море человек, сидящий в лодке?

ГДЕ НЕБО С ЗЕМЛЁЙ СХОДЯТСЯ

Решение

Если возвышение глаза сидящего в лодке человека над уровнем воды примем за 1 м, или 0,001 км, то дальность горизонта равна

$$113\sqrt{0,001} = 3,58 \text{ км},$$

т. е. немногим более 3,5 км.

При более низком положении глаза горизонт суживается: для полуметра, например, до $2\frac{1}{2}$ км. Напротив, при наблюдении с возвышенных пунктов (с мачты) дальность горизонта возрастает: для 4 м, например, до 7 км.

Задача

Как далеко может видеть авиатор, поднявшийся на высоту 5 км?

Решение

Дальность горизонта равна $113\sqrt{5} = 252,8$ км, т. е. около 250 км (конечно, на ровном месте, например над морской поверхностью).

Задача

Как высоко должен подняться авиатор, чтобы видеть кругом себя на 50 км?

Решение

Из формулы дальности горизонта имеем в данном случае уравнение:

$$50 = \sqrt{2Rh},$$

откуда

$$h = \frac{50^2}{2R} = \frac{2500}{12800} = 0,2 \text{ км}.$$

Значит, достаточно подняться всего на 200 м.

Все полученные по указанной формуле результаты были бы вполне верны лишь в том случае, если бы земная атмо-

сфера не влияла на прямолинейное распространение лучей света. В действительности воздушная оболочка Земли несколько искривляет путей лучей, вследствие чего горизонт отодвигается, примерно на 6% дальше того расстояние, которое получается из формулы. Эту поправку нетрудно внести. Например, в задаче про авиатора, поднявшегося на 5 км, правильный ответ будет: $253 \cdot 1,06 = 268$ км. А задачу про второго авиатора нужно бы решить так: скинув 6% от 50 км, имеем 47 км; далее

$$h = \frac{47^2}{2R} = \frac{2209}{12\,800} = 0,17 \text{ км},$$

т.е. 170 м (вместо 200).

Башня Гоголя

Задача

Интересно знать, что увеличивается быстрее: высота поднятия или дальность горизонта? Многие думают, что с возвышением наблюдателя горизонт возрастает необычайно быстро. Так думал, между прочим, и Гоголь, писавший в статье «Об архитектуре нашего времени» следующее:

Башни, огромные, колоссальные, необходимы в городе... У нас обыкновенно ограничиваются высотой, дающей возможность оглядеть один только город, между тем как для столицы необходимо видеть, по крайней мере на полтора вёрст* во все стороны, и для этого, может быть, один только или два этажа лишних — и всё изменяется. Объём кругозора по мере возвышения распространяется необыкновенною прогрессией.

* 1 верста составляет 1,0668 км;
150 вёрст — 160 км.

Так ли в действительности?

Решение

Достаточно взглянуть на формулу:

$$\text{дальность горизонта} = \sqrt{2Rh},$$

чтобы сразу стала ясна неправильность утверждения, будто «объём горизонта» с возвышением наблюдателя возрастает очень быстро. Напротив, дальность горизонта растёт медленнее, чем высота поднятия: она пропорциональна квадратному корню из высоты. Когда возвышение наблюдателя увеличивается в 100 раз, горизонт отодвигается всего только в 10 раз дальше; когда высота становится в 1000 раз больше, горизонт отодвигается всего в 31 раз дальше. Поэтому ошибочно утверждать, что «один только или два этажа лишних, и всё изменяется». Если к восьмиэтажному дому пристроить ещё два этажа, дальность горизонта возрастёт в $\sqrt[10]{8}$, т.е. в 1,1 раза — всего на 10%. Такая прибавка почти неощутима.

Что же касается идеи сооружения башни, с которой можно было бы видеть, «по крайней мере на полтораста вёрст», т.е. на 160 км, то она совершенно несбыточна. Гоголь, конечно, не подозревал, что такая башня должна иметь огромную высоту.

Действительно, из уравнения

$$160 = \sqrt{2Rh}$$

получаем:

$$h = \frac{160^2}{2R} = \frac{25\,600}{12\,800} = 2 \text{ км.}$$

Самое высокое из всех сооружённых до настоящего времени зданий — небоскрёб Бурдж-Халифа в Дубае — почти в 3 раза ниже этих проектируемых Гоголем вышек. А во времена Гоголя его ещё и не существовало.

Холм Пушкина

Сходную ошибку делает и Пушкин, говоря в «Скупом рыцаре» о далёком горизонте, открывающемся с вершины «гордого холма»:

И царь мог с высоты с весельем озирать
И дол, покрытый белыми шатрами,
И море, где бежали корабли...

Мы уже видели (стр. 109), как скромна была высота этого «гордого» холма: даже полчища Атиллы не могли бы по этому способу воздвигнуть холм выше $4\frac{1}{2}$ м. Теперь мы можем завершить расчёты, определив, насколько холм этот расширял горизонт наблюдателя, поместившегося на его вершине.

Глаз такого зрителя возвышался бы над почвой на $4\frac{1}{2} + 1\frac{1}{2}$, т.е. на 6 м, и, следовательно, дальность горизонта равна была бы $\sqrt{2 \cdot 6400 \cdot 0,006} = 8,8$ км. Это всего на 4 км больше того, что можно видеть, стоя на ровной земле.

Где рельсы сходятся

Задача

Конечно, вы не раз замечали, как суживается уходящая в даль рельсовая колея. Но случалось ли вам видеть ту точку, где оба рельса, наконец, встречаются друг с другом? Да и возможно ли видеть такую точку? У вас теперь достаточно знаний, чтобы решить эту задачу.

Решение

Вспомним, что каждый предмет превращается для нормального глаза в точку тогда, когда виден под углом в $1'$, т.е. когда он удалён на 3420 своих поперечников (см. стр. 96). Ширина рельсовой колеи — 1,52 м. Значит, промежуток между рельсами должен слиться в точку на расстоянии $1,52 \cdot 3420 = 5,2$ км. Итак, если бы мы могли проследить за рельсами на протяжении 5,2 км, мы увидели бы, как оба они сходятся в одной точке. Но на ровной местности горизонт лежит ближе 5,2 км — именно на расстоянии всего 4,4 км. Следовательно, человек с нормальным зрением, стоя на ровном месте, не может видеть точки встречи рельсов. Он мог бы наблюдать её лишь при одном из следующих трёх условий:

- 1) если острота зрения его понижена, так что предметы сливаются для него в точку при угле зрения, большем $1'$;
- 2) если железнодорожный путь не горизонтален;
- 3) если глаз наблюдателя возвышается над землёй более чем на:

ГДЕ НЕБО С ЗЕМЛЁЙ СХОДЯТСЯ

$$\frac{5,2^2}{2R} = \frac{27}{12\,800} = 0,0021 \text{ км},$$

т. е. 210 см (одна сажень).

Задачи о маяке

Задача

На берегу находится маяк, верхушка которого возвышается на 40 м над поверхностью воды. С какого расстояния откроется этот маяк для корабля, если матрос-наблюдатель («марсовой») находится на «марсе» корабля на высоте 10 м над водной поверхностью?

Решение

Из рис. 93 видно, что задача сводится к вычислению длины прямой AC , составленной из двух частей AB и BC .

Часть AB есть дальность горизонта маяка при высоте над землёй 40 м, а BC — дальность горизонта «марсового» при высоте 10 м. Следовательно, искомое расстояние равно (см. стр. 123):

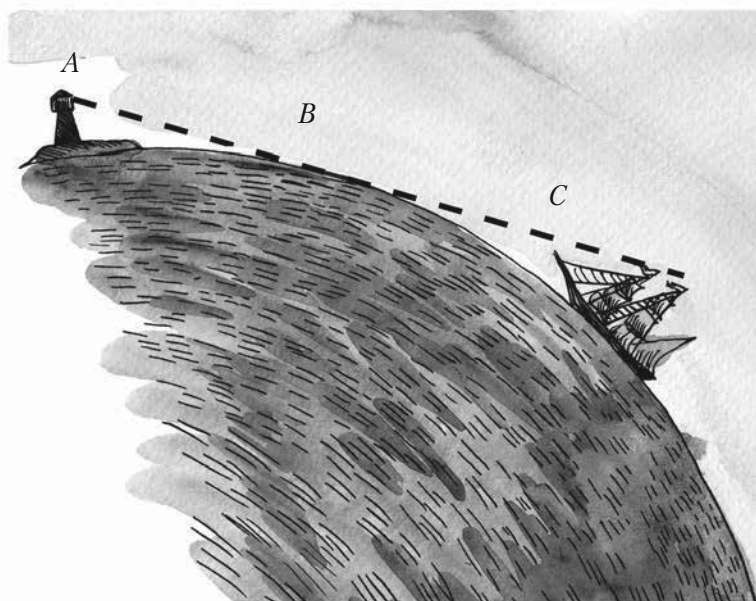


Рис. 93. К задачам о маяке

Молния

$$113\sqrt{0,04} + 113\sqrt{0,01} = \\ = 113(0,2 + 0,1) = 34 \text{ км.}$$

Задача

Какую часть этого маяка увидит тот же «марсовый» с расстояния 30 км?

Решение

Из рис. 93 ясен ход решения задачи: нужно, прежде всего, вычислить длину BC , затем отнять полученный результат от общей длины AC , т.е. от 30 км, чтобы узнать расстояние AB . Зная AB , мы вычислим высоту, с которой дальность горизонта равна AB . Выполним же все эти расчёты:

$$BC = 113\sqrt{0,01} = 11,3 \text{ км;} \\ 30 - 11,3 = 18,7 \text{ км;} \\ \text{высота} = \frac{18,7^2}{2R} = \frac{349,7}{12800} = 0,027 \text{ км.}$$

Значит, с расстояния 30 км не видно 27 м высоты маяка; остаются видимыми только 13 м.

Молния

Задача

Над вашей головой, на высоте 1,5 км*, сверкнула молния. На каком расстоянии от вашего места ещё можно было видеть молнию?

Решение

Надо вычислить (рис. 94) дальность горизонта для высоты 1,5 км. Она равна

$$113\sqrt{1,5} = 138,4 \text{ км.}$$

* Определить расстояние молнии от наблюдателя очень легко, если сосчитать число секунд, прошедших от молнии до первого удара грома. Так как оба явления в действительности происходят одновременно, а звук пробегает около $\frac{1}{3}$ км в секунду (свет достигает наблюдателя мгновенно), то расстояние грозового удара, в километрах, равно одной трети числа протекших секунд.

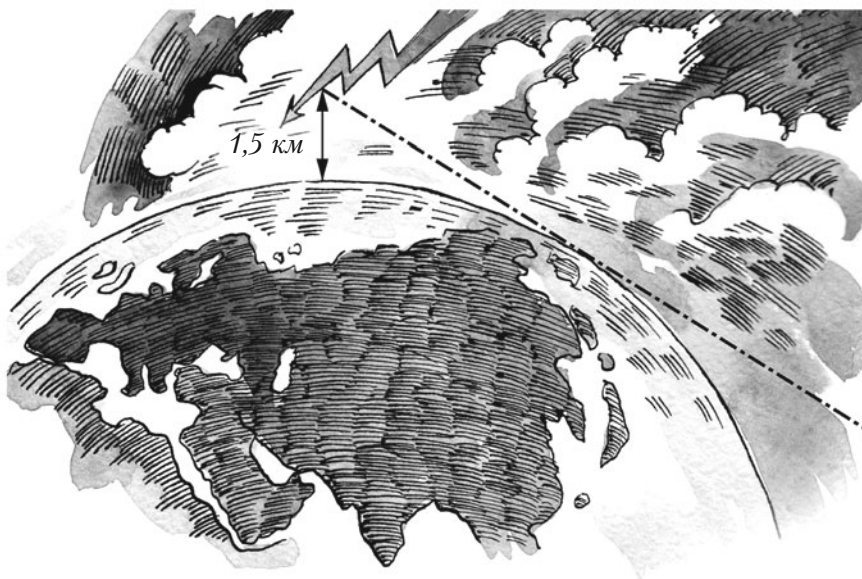


Рис. 94. К задаче о молнии

Значит, если местность ровная, то молния была видна человеку, глаз которого находится на уровне земли, на расстоянии 138 км (а с 6%-ной поправкой — на 146 км). В точках, удалённых на 146 км, она была видна на самом горизонте; а так как на такое расстояние звук не доносится, то наблюдалась она здесь как зарница — молния без грома.

Парусник

Задача

Вы стоите на берегу озера или моря, у самой воды, и наблюдаете за удаляющимся от вас парусником. Вам известно, что верхушка мачты возвышается на 6 м над уровнем моря. На каком расстоянии от вас парусник начнёт казаться опускаться в воду (т.е. за горизонт) и на каком расстоянии он скроется окончательно?

Решение

Парусник начнёт скрываться под горизонт (см. рис. 89) в точке *B* — на расстоянии дальности горизонта для человека среднего роста, т.е. 4,4 км. Совсем скроется он под горизонт в точке, расстояние которой от *B* равно

$$113\sqrt{0,006} = 8,75 \text{ км.}$$

Значит, парусник скроется под горизонт на расстоянии от берега

$$4,4 + 8,75 = 13,15 \text{ км.}$$

Горизонт на Луне

Задача

До сих пор все расчёты наши относились к земному шару. Но как бы изменилась дальность горизонта, если бы наблюдатель очутился на другой планете, например на одной из равнин Луны?

Решение

Задача решается по той же формуле: дальность горизонта равна $\sqrt{2Rh}$, но в данном случае вместо $2R$ надо подставить длину диаметра не земного шара, а Луны. Так как диаметр Луны равен 3500 км, то при возвышении глаза над почвой на 1,5 м имеем:

$$\text{дальность горизонта} = \sqrt{3500 \cdot 0,0015} = 2,28 \text{ км.}$$

На лунной равнине мы видели бы вдаль всего на $2\frac{1}{4}$ км.

В лунном кратере

Задача

Наблюдая Луну в зрительную трубу даже скромных размеров, мы видим на ней множество так называемых кольцевых гор — образований, подобных которым на Земле нет. Одна из величайших кольцевых гор — «кратер Коперника» — имеет в диаметре снаружи 124 км, внутри 90 км. Высочайшие точки кольцевого вала возвышаются над почвой внутренней котловины на 1500 м. Но если бы вы очутились в средней части

внутренней котловины, увидели бы вы оттуда этот кольцевой вал?

Решение

Чтобы ответить на вопрос, нужно вычислить дальность горизонта для гребня вала, т.е. для высоты 1,5 км. Она равна на Луне $\sqrt{3500} \cdot 1,5 = 22,8$ км. Прибавив дальность горизонта для человека среднего роста, получим расстояние, на котором кольцевой вал скрывается под горизонтом наблюдателя,

$$22,8 + 2,28 = \text{около } 25 \text{ км.}$$

А так как центр вала удалён от его краёв на 45 км, то видеть этот вал из центра невозможно, — разве только взобравшись на склоны центральных гор, возвышающихся на дне этого кратера до высоты 600 м.

На Юпитере

Задача

Как велика дальность горизонта на Юпитере, диаметр которого в 11 раз больше земного?

Решение

Если Юпитер покрыт твёрдой корой и имеет ровную поверхность, то человек, перенесённый на его равнину, мог бы видеть вдаль на

$$\sqrt{11 \cdot 12800 \cdot 0,0016} = 15 \text{ км.}$$





ГЛАВА СЕДЬМАЯ

ГЕОМЕТРИЯ РОБИНЗОНОВ

(Несколько страниц из Жюль Верна)

Геометрия звёздного неба

Было время, когда автор этой книги готовил себя к не совсем обычной будущности: к карьере человека, потерпевшего кораблекрушение. Короче сказать, я думал сделаться Робинзоном. Если бы это осуществилось, настоящая книга могла бы быть составлена интереснее, чем теперь, но, может быть, и вовсе осталась бы ненаписанной. Мне не пришлось сделаться Робинзоном, о чём я теперь не жалею. Однако в юности я горячо верил в своё призвание Робинзона и готовился к нему вполне серьёзно. Ведь даже самый посредственный Робинзон должен обладать многими знаниями и навыками, необязательными для людей других профессий.

Что, прежде всего, придётся сделать человеку, закинутому крушением на необитаемый остров? Конечно, определить географическое положение своего невольного обиталища — широту и долготу. Об этом, к сожалению, слишком кратко говорится в большинстве историй старых и новых Робинзонов. В полном

издании подлинного «Робинзона Крузо» вы найдёте об этом всего одну строку да и ту в скобках:

В тех широтах, где лежит мой остров (т.е., по моим вычислениям, на $9^{\circ}22'$ севернее экватора)...

Эта досадная краткость приводила меня в отчаяние, когда я запасался сведениями, необходимыми для моей воображаемой будущности. Я готов был уже отказаться от карьеры единственного обитателя пустынного острова, когда секрет раскрылся передо мною в «Таинственном острове» Жюль Верна.

Я не готовлю моих читателей в Робинзоны, но всё же считаю нелишним остановиться здесь на простейших способах определения географической широты. Умение это может пригодиться не для одних только обитателей неведомых островов. У нас ещё столько населённых мест, не обозначенных на картах (да и всегда ли под руками подробная карта?), что задача определения географической широты может встать перед многими из моих читателей. Правда, мы не можем утверждать, как некогда Лермонтов, что даже:

Тамбов на карте генеральной
Кружком означен не всегда;

но множество местечек, сёл и деревень не обозначено на общих картах ещё и в наши дни. Не надо пускаться в морские приключения, чтобы оказаться в роли Робинзона, впервые определяющего географическое положение места своего обитания.

Дело это в основе сравнительно несложное. Наблюдая в ясную звёздную ночь за небом, вы заметите, что звёзды медленно описывают на небесном своде наклонные круги, словно весь купол неба плавно вращается на косо утверждённой невидимой оси. В действительности же, конечно, вы сами, вращаясь вместе с Землёю, описываете круги около её оси в обратную сторону. Единственная точка звёздного купола в нашем северном полушарии, которая сохраняет неподвижность, — та, куда упирается мысленное продолжение земной оси. Этот северный «полюс мира» приходится не遠далеке от яркой звезды на конце хвоста Малой Медведицы — Полярной звезды. Найдя её на нашем

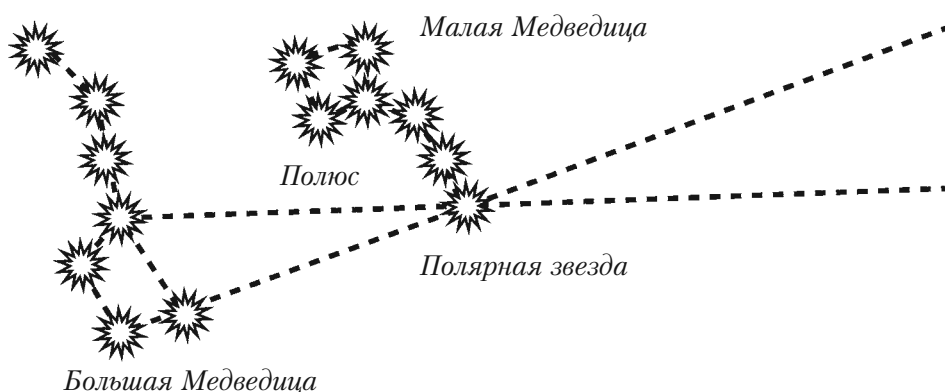


Рис. 95. Разыскание Полярной звезды

северном небе, мы тем самым найдём и положение северного «полюса мира». Отыскать же её нетрудно, если найти сначала положение всем известного созвездия Большой Медведицы: проведите прямую линию через её крайние звёзды, как показано на рис. 95, и, продолжив её на расстояние, примерно равное длине всего созвездия, вы наткнётесь на Полярную.

Это одна из тех точек на небесной сфере, которые понадобятся нам для определения географической широты. Вторая — так называемый зенит — есть точка, находящаяся на небе отвесно над вашей головой. Другими словами, зенит есть точка на небе, куда упирается мысленное продолжение того радиуса Земли, который проведён к занимаемому вами месту. Градусное расстояние по небесной дуге между вашим зенитом и Полярной звездой есть в то же время градусное расстояние вашего места от земного полюса. Если ваш зенит отстоит от Полярной на 30° , то вы отдалены от земного полюса на 30° , а значит, отстоите от экватора на 60° ; иначе говоря, вы находитесь на 60-й параллели.

Следовательно, чтобы найти широту какого-либо места, надо лишь измерить в градусах (и его долях) «зенитное расстояние» Полярной звезды; после этого останется вычесть эту величину из 90° — и широта определена. Практически можно поступать иначе. Так как дуга между зенитом и горизонтом содержит 90° , то, вычитая зенитное расстояние Полярной звезды из 90° , мы получаем в остатке не что иное, как длину небесной дуги от Полярной до горизонта; иначе говоря, мы получаем «высоту» Полярной звезды над горизонтом. Поэтому географическая широта какого-либо места равна высоте Полярной звезды над горизонтом этого места.

Теперь вам понятно, что нужно сделать для определения широты. Дождавшись ясной ночи, вы отыскиваете на небе Полярную звезду и измеряете её угловую высоту над горизонтом; результат сразу даст вам искомую широту вашего места. Если хотите быть точным, вы должны принять в расчёт, что Полярная звезда не строго совпадает с полюсом мира, а отстоит от него на $1\frac{1}{4}^\circ$. Поэтому Полярная звезда не остаётся совершенно неподвижной: она описывает около неподвижного небесного полюса маленький кружок, располагаясь то выше его, то ниже, то справа, то слева на $1\frac{1}{4}^\circ$. Определив высоту Полярной звезды в самом высоком и самом низком её положении (астроном сказал бы: в моменты её верхней и нижней «кульминаций»), вы берёте среднее из обоих измерений. Это и есть истинная высота полюса, а следовательно, и искомая широта места.

Но если так, то незачем избирать непременно Полярную звезду: можно остановиться на любой незаходящей звезде и, измерив её высоту в обоих крайних положениях над горизонтом, взять среднее из этих измерений. В результате получится высота полюса над горизонтом, т.е. широта места. Но при этом необходимо уметь улавливать моменты наивысшего и самого низшего положений избранной звезды, что усложняет дело; да и не всегда удаётся это наблюдать в течение одной ночи. Вот почему для первых приближённых измерений лучше работать с Полярной звездой, пренебрегая небольшим удалением её от полюса.

До сих пор мы воображали себя находящимися в северном полушарии. Как поступили бы вы, очутившись в южном полушарии? Точно так же, с той лишь разницей, что здесь надо определять высоту не северного, а южного полюса мира. Близ этого полюса, к сожалению, нет яркой звезды вроде Полярной в нашем полушарии. Знаменитый Южный Крест сияет довольно далеко от южного полюса, и если мы желаем воспользоваться звёздами этого созвездия для определения широты, то придётся брать среднее из двух измерений — при наивысшем и самом низшем положении звезды.

Герои романа Жюль Верна при определении широты своего «таинственного острова» пользовались именно этим красивым созвездием южного неба. Поучительно перечесть то место романа, где описывается вся процедура. Заодно познакомимся и с тем, как новые Робинзоны справились со своей задачей, не имея угломерного инструмента.

Широта «таинственного острова»

Было 8 часов вечера. Луна ещё не взошла, но горизонт серебрился уже нежными бледными оттенками, которые можно было назвать лунной зарёй. В зените блистали созвездия южного полушария и между ними созвездие Южного Креста. Инженер Смит некоторое время наблюдал это созвездие.

— Герберт, — сказал он после некоторого раздумья, — у нас сегодня 15 апреля?

— Да, — ответил юноша.

— Если не ошибаюсь, завтра один из тех четырёх дней в году, когда истинное время равно среднему времени: завтра Солнце вступит на меридиан ровно в полдень по нашим часам*. Если погода будет ясная, мне удастся приблизительно определить долготу острова.

— Без инструментов?

— Да. Вечер ясный, и потому я сегодня же попытаюсь определить широту нашего острова, измерив высоту звёзд Южного Креста, т.е. высоту южного полюса над горизонтом. А завтра в полдень определю и долготу острова.

Если бы у инженера был секстант — прибор, позволяющий точно измерять угловые расстояния предметов при помощи отражения световых лучей, — задача не представляла бы никаких затруднений. Определив в этот вечер высоту полюса, а завтра днём — момент прохождения Солнца через меридиан, он получил бы географические координаты острова: широту и долготу. Но секстанта не имелось, и надо было его заменить.

Инженер вошёл в пещеру. При свете костра он вырезал две прямоугольные планки, которые соединил в одном конце в форме циркуля так, что ножки его можно было сдвигать и раздвигать. Для шарнира он воспользовался крепкой колючкой акации, найденной среди валежника у костра.

Когда инструмент был готов, инженер возвратился на берег. Ему необходимо было измерить высоту полюса над горизонтом, ясно очерченным, т.е. над уровнем моря. Для своих наблюдений он отправился на площадку Далёкого Вида, — причём нужно принять во внимание также высоту самой площадки над уровнем моря. Это последнее измерение можно будет выполнить на другой день приёмами элементарной геометрии.

Горизонт, озарённый снизу первыми лучами луны, резко обрисовывался, представляя все удобства для наблюдения. Созвездие

* Наши часы идут не строго согласованно с солнечными часами: между «истинным солнечным временем» и тем «средним временем», которое полагается точными часами, есть расхождение, равняющееся нулю только четыре дня в году: около 16 апреля, 14 июня, 1 сентября и 24 декабря.

* Так как измерение производилось инженером не на уровне моря, а с высокой скалы, то прямая линия, проведённая от глаза наблюдателя к краю горизонта, не строго совпадала с перпендикуляром к земному радиусу, а составляла с ним некоторый угол. Однако угол этот так мал, что для данного случая можно было им смело пренебречь (при высоте в 100 м он едва составляет третью долю градуса; поэтому Смит, вернее, Жюль Верну не было надобности усложнять расчёт введением этой поправки).

Южного Креста сияло на небе в опрокинутом виде: звезда *альфа*, обозначающая его основание, всего ближе лежит к южному полюсу (мира).

Это созвездие расположено не так близко к южному полюсу, как Полярная звезда — к северному. Звезда *альфа* отстоит от полюса на 27° ; инженер знал это и предполагал ввести это расстояние в свои вычисления. Он поджидал момента прохождения звезды через меридиан, — это облегчает выполнение операции.

Смит направил одну ножку своего деревянного циркуля горизонтально, другую — к звезде *альфа* Креста, и отверстие образовавшегося угла дало угловую высоту звезды над горизонтом. Чтобы закрепить этот угол надёжным образом, он прибил с помощью шипов акации к обеим планкам третью, пересекающую их поперёк, так что фигура сохраняла неизменную форму.

Оставалось лишь определить величину полученного угла, относя наблюдение к уровню моря, т.е. учитывая понижение горизонта, для чего необходимо было измерить высоту скалы*. Величина угла даст высоту звезды *альфа* Креста, а следовательно, и высоту полюса над горизонтом, т.е. географическую широту острова, так как широта всякого места земного шара равна высоте полюса над горизонтом этого места. Эти вычисления предполагалось произвести завтра.

Как выполнено было измерение высоты скалы, мои читатели знают уже из отрывка, приведённого в первой главе настоящей книги. Пропустив здесь это место романа, проследим за дальнейшей работой инженера:

Инженер взял циркуль, который был устроен им накануне и с помощью которого он определил угловое расстояние между звездой *альфа* Южного Креста и горизонтом. Он тщательно измерил величину этого угла с помощью круга, разделённого на 360 частей, и нашёл, что он равен 10° . Отсюда высота полюса над горизонтом — после присоединения к 10° тех 27° , которые отделяют названную звезду от полюса, и приведения к уровню моря высоты скалы, с вершины которой было выполнено измерение, — получилась равной 37° . Смит заключил, что остров Линкольна расположен на 37° южной широты, или — принимая во внимание несовершенство измерения — между 35-й и 40-й параллелями.

Оставалось ещё узнать его долготу. Инженер рассчитывал определить её в тот же день, в полдень, когда Солнце будет проходить через меридиан острова.

Определение географической долготы

Но как инженер определит момент прохождения Солнца через меридиан острова, не имея для этого никакого инструмента? Вопрос этот очень занимал Герберта.

Инженер распорядился всем, что нужно было для его астрономического наблюдения. Он выбрал на песчаном берегу совершенно чистое место, выровненное морским отливом. Шестифутовый шест, воткнутый на этом месте, был перпендикулярен к этой площадке.

Герберт понял тогда, как намерен был действовать инженер для определения момента прохождения Солнца через меридиан острова, или, иначе говоря, для определения местного полудня. Он хотел определить его по наблюдению тени, отбрасываемой шестом на песок. Способ этот, конечно, недостаточно точен, но, за отсутствием инструментов, он давал всё же довольно удовлетворительный результат.

Момент, когда тень шеста делается наиболее короткой, будет полдень. Достаточно внимательно проследить за движением конца тени, чтобы заметить момент, когда тень, перестав сокращаться, вновь начнет удлиняться. Тень как бы играла в этом случае роль часовой стрелки на циферблате.

Когда, по расчёту инженера, наступило время наблюдения, он стал на колени и, втыкая в песок маленькие колышки, начал отмечать постепенное укорочение тени, отбрасываемой шестом.

Журналист (один из спутников инженера) держал в руке свой хронометр, готовясь заметить момент, когда тень станет наиболее короткой. Так как инженер производил наблюдение 16 апреля, т.е. в один из тех дней, когда истинный полдень совпадает со средним, то момент, замеченный журналистом по его хронометру, будет установлен по времени меридиана Вашингтона (места отправления путешественников).

Солнце медленно подвигалось. Тень постепенно укорачивалась. Заметив, наконец, что она начала удлиняться, инженер спросил:

— Который час?

— Пять часов и одна минута, — ответил журналист.

Наблюдение было окончено. Оставалось только проделать несложный расчёт.

Наблюдение установило, что между меридианом Вашингтона и меридианом острова Линкольна разница во времени почти ровно 5 часов. Это значит, что, когда на острове полдень, в Вашингтоне уже 5 часов вечера. Солнце в своём кажущемся суточном движении вокруг земного шара пробегает один градус в 4 минуты, а в час — 15° . А 15° , умноженные на 5 (число часов), составляют 75° .

Вашингтон лежит на меридиане $77^\circ 3' 11''$ к западу от Гринического меридиана, принимаемого американцами, как и англичанами, за начальный. Значит, остров лежал приблизительно на 152° западной долготы.

Принимая во внимание недостаточную точность наблюдений, можно было утверждать, что остров лежит между 35-й и 40-й параллелями южной широты и между 150-м и 155-м меридианами к западу от Гринича.

Отметим в заключение, что способов определения географической долготы имеется несколько, и довольно разнообразных; способ, применённый героями Жюль Верна, лишь один из них (известный под названием «Способ перевозки хронометров»).





ГЛАВА ВОСЬМАЯ

ГЕОМЕТРИЯ ВПОТЬМАХ

На дне трюма

От вольного воздуха полей и моря перенесёмся в тесный и тёмный трюм старинного корабля, где юный герой одного из романов Майн Рида успешно разрешил геометрическую задачу при такой обстановке, при которой, наверное, ни одному из моих читателей заниматься математикой не приходилось. В романе «Мальчик-моряк» (или «На дне трюма») Майн Рид повествует о юном любителе морских приключений (рис. 96), который, не имея средств заплатить за проезд, пробрался в трюм незнакомого корабля и здесь неожиданно оказался закупоренным на всё время морского перехода. Роясь среди багажа, заполнявшего его темницу, он наткнулся на ящик сухарей и бочку воды. Рассудительный мальчик понимал, что с этим ограниченным запасом еды и питья надо быть возможно бережливее, и потому решил разделить его на ежедневные порции.

Пересчитать сухари было делом нетрудным, но как установить порции воды, не зная её общего запаса? Вот задача, которая стояла перед юным героем Майн Рида. Посмотрим, как он справился с нею.

Измерение бочки

(Задача Майн Рида)

Мне необходимо было установить для себя дневную порцию воды. Для этого нужно было узнать, сколько её содержится в бочке, и затем разделить по порциям.

К счастью, в деревенской школе учитель сообщил нам на уроках арифметики некоторые начальные сведения из геометрии: я имел понятие о кубе, пирамиде, цилиндре, шаре; знал я также, что бочку можно рассматривать как два усечённых конуса, сложенных своими большими основаниями.

Чтобы определить вместимость моей бочки, нужно было знать её высоту (или, в сущности, половину этой высоты), затем окружность одного из доньев и окружность срединного сечения, т.е. самой широкой части бочки. Зная эти три величины, я мог точно определить, сколько кубических единиц содержится в бочке.

Мне оставалось только измерить эти величины, — но в этом-то и заключалась вся трудность.

Как выполнить это измерение?

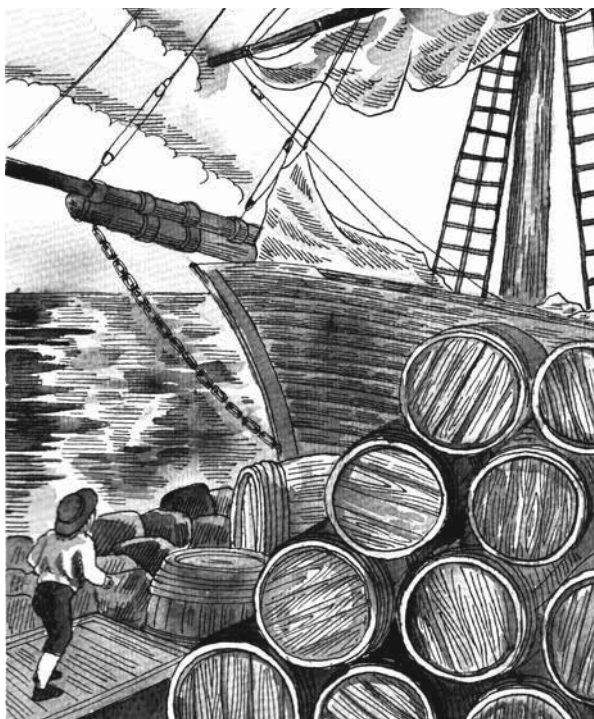


Рис. 96. Юный любитель приключений из романа Майн Рида

Узнать высоту бочки нетрудно: она была передо мною; что же касается окружностей, то я не мог к ним подступиться. Я был слишком мал ростом, чтобы достать до верху; кроме того, мешали ящики, стоявшие по сторонам.

Было ещё одно затруднение: у меня не было ни масштаба, ни шнура, которыми можно было бы воспользоваться для измерения; как мог я определять величины, если у меня не было никакой меры? Однако я решил не отказываться от своего плана, пока не обдумаю его со всех сторон.

Мерная линейка

Размышляя о бочке, с твёрдым решением её измерить, я внезапно открыл то, чего мне не хватало. Мне поможет прут такой длины, чтобы он мог пройти насквозь через бочку в самом широком её месте. Если я введу прут в бочку и уткнусь им в противоположную стенку, я буду знать длину диаметра. Останется лишь утроить длину прута, чтобы получить длину окружности. Это не строго точно, но вполне достаточно для обиходных измерений. А так как отверстие, которое я раньше проделал в бочке, приходилось в самой широкой её части, то, введя в него прут, я буду иметь тот диаметр, который мне нужен.

Но где найти прут? Это было нетрудно. Я решил воспользоваться доской от ящика с сухарями и тотчас же принялся за работу. Правда, доска была длиною всего в 60 см, бочка же — более чем вдвое шире. Но это не могло составить затруднения, нужно было лишь приготовить три палочки и связать их вместе, чтобы получить прут достаточной длины.

Разрезав доску вдоль волокон, я приготовил три хорошо округлённых и обглаженных палочки. Чем связать их? Я воспользовался шнурами от моих ботинок, имевшими в длину чуть не целый метр. Связав палочки, я получил планку достаточной длины — около полутора метров.

Я приступил было к измерению, но наткнулся на новое препятствие. Оказалось невозможным ввести мой прут в бочку: помещение было слишком тесно. Нельзя было и согнуть прут, — он наверное бы сломался.

Вскоре я придумал, как ввести в бочку мой измерительный прут: я разобрал его на части, ввёл первую часть и лишь тогда привязал к её выступающему концу вторую часть; затем, протолкнув вторую часть, привязал третью.

Я направил прут так, чтобы он упёрся в противоположную стенку как раз против отверстия, и сделал на нём знак вровень с поверхностью бочки. Отняв толщину стенок, я получил величину, которая необходима была мне для измерений.

Я вытащил прут тем же порядком, как и ввёл его, стараясь тщательно замечать те места, где отдельные части были связаны, чтобы потом придать пруту ту же длину, какую он имел в бочке. Небольшая ошибка могла бы в конечном результате дать значительную погрешность.

Итак, у меня был диаметр нижнего основания усечённого конуса. Теперь нужно найти диаметр дна бочки, которое служило верхним основанием конуса. Я положил прут на бочку, уперся им в противоположную точку края и отметил на ней величину диаметра. На это потребовалось не больше минуты.

Оставалось только измерить высоту бочки. Надо было, скажете вы, поместить палку отвесно возле бочки и сделать на ней отметку высоты. Но моё помещение ведь было совершенно темно, и, поместив палку отвесно, я не мог видеть, до какого места доходит верхнее дно бочки. Я мог действовать только ощупью: пришлось бы нащупать руками дно бочки и соответствующее место на палке. Кроме того, палка, вращаясь возле бочки, могла наклониться, и я получил бы неверную величину для высоты.

Подумав хорошенько, я нашёл, как преодолеть это затруднение. Я связал только две планки, а третью положил на верхнее дно бочки так, чтобы она выдавалась за край его на 30–40 см; затем я приставил к ней длинный прут так, чтобы он образовал с ней прямой угол и, следовательно, был параллелен высоте бочки. Сделав отметку в том месте бочки, которое больше всего выступало, т.е. посередине, и откинув толщину дна, я получил, таким образом, половину высоты бочки, или — что то же самое — высоту одного усечённого конуса.

Теперь у меня были все данные, необходимые для решения задачи.

Что и требовалось выполнить

Выразить объём бочки в кубических единицах и затем перечислить в галлоны* представляло простое арифметическое вычисление, с которым нетрудно было справиться. Правда, для вычислений у меня не было письменных принадлежностей, но они были бы и бесполезны, так как я находился в полной темноте. Мне ча-

* Галлон — мера ёмкости. Английский галлон заключает 277 куб. дюймов (около $4\frac{1}{2}$ л). В галлоне 4 кварты; в кварте — 2 пинты.

сто приходилось выполнять в уме все четыре арифметических действия без пера и бумаги. Теперь предстояло оперировать с не слишком большими числами, и задача меня нисколько не смущала.

Но я столкнулся с новым затруднением. У меня были три данных: высота и оба основания усечённого конуса; но какова численная величина этих данных? Необходимо, прежде чем вычислить, выразить эти величины числами.

Сначала это препятствие казалось мне непреодолимым. Раз у меня нет ни фута, ни метра, никакой измерительной линейки, приходится отказаться от решения задачи.

Однако я вспомнил, что в порту я измерил свой рост, который оказался равным четырём футам. Как же могло пригодиться мне теперь это сведение? Очень просто: я мог отложить четыре фута на моём пруте и взять это за основание при вычислениях.

Чтобы отметить свой рост, я вытянулся на полу, затем положил на себя прут так, чтобы один его конец касался моих ног, а другой лежал на лбу. Я придерживал прут одной рукой, а свободной отметил на нём место, против которого приходилось темя.

Дальше — новые затруднения. Прут, равный 4 футам, бесполезен для измерения, если на нём не отмечены мелкие деления — дюймы. Нетрудно как будто разделить 4 фута на 48 частей (дюймов) и нанести эти деления на линейке. В теории это действительно весьма просто; но на практике, да ещё в той темноте, в какой я находился, это было не так легко и просто.

Каким образом найти на пруте середину этих 4 футов? Как разделить каждую половину прута снова пополам, а затем каждый из футов на 12 дюймов, в точности равных друг другу?

Я начал с того, что приготовил палочку немного длиннее 2 футов. Сравнив её с прутом, где отмечены были 4 фута, я убедился, что двойная длина палочки немного больше 4 футов. Укоротив палочку и повторив операцию несколько раз, я на пятый раз достиг того, что двойная длина палочки равнялась ровно 4 футам.

Это отняло много времени. Но времени у меня было достаточно: я даже был доволен, что имел чем заполнить его.

Впрочем, я догадался сократить дальнейшую работу, заменив палочку шнуром, который удобно было складывать пополам. Для этого хорошогодились шнурки от моих ботинок. Связав их прочным узлом, я принялся за работу — и вскоре мог уже отрезать кусок длиной ровно в 1 фут. До сих пор приходилось складывать вдвое, — это было легко. Дальше пришлось сложить втрое,

что было труднее. Но я с этим справился, и вскоре у меня в руках было три куса по 4 дюйма каждый. Оставалось сложить их вдвое и ещё раз вдвое, чтобы получить кусочек длиной в 1 дюйм.

У меня было теперь то, чего мне не хватало, чтобы нанести на пруте дюймовые деления; аккуратно прикладывая к нему куски моей мерки, я сделал 48 зарубок, означавших дюймы. Тогда в моих руках оказалась разделённая на дюймы линейка, при помощи которой можно было измерить полученные мною длины. Только теперь мог я довести до конца задачу, которая имела для меня столь важное значение.

Я немедленно занялся этим вычислением. Измерив оба диаметра, я взял среднее из их длин, затем нашёл площадь, соответствующую этому среднему диаметру. Так я получил величину основания цилиндра, равновеликого двойному конусу равной высоты. Умножив результаты на высоту, я определил кубическое содержание искомого объёма.

Разделив число полученных кубических дюймов на 69 (число кубических дюймов в одной кварте)*, я узнал, сколько кварт в моей бочке.

В ней вмещалось свыше ста галлонов, — точнее, 108.

* См. примечание на стр. 144.

Поверка расчёта

Читатель, сведущий в геометрии, заметит, без сомнения, что способ вычисления объёма двух усечённых конусов, применённый юным героем Майн Рида, не вполне точен. Если (рис. 97) обозначим радиус меньших оснований через r , радиус большего — через R , а высоту бочки, т.е. двойную высоту каждого усечённого конуса, через h , то объём, полученный мальчиком, выразится формулой

$$\pi \left(\frac{R + r}{2} \right)^2 h = \frac{\pi h}{4} (R^2 + r^2 + 2Rr).$$

Между тем, поступая по правилам геометрии, т.е. применяя формулу объёма усечённого конуса, мы получили бы для искомого объёма выражение

$$\frac{\pi h}{3}(R^2 + r^2 + Rr).$$

Оба выражения нетождественны, и легко убедиться, что второе больше первого на

$$\frac{\pi h}{12}(R - r)^2.$$

Знакомые с алгеброй сообразят, что разность $\frac{\pi h}{12}(R - r)^2$ есть величина положительная, т.е. способ майн-ридовского мальчика дал ему результат преуменьшенный.

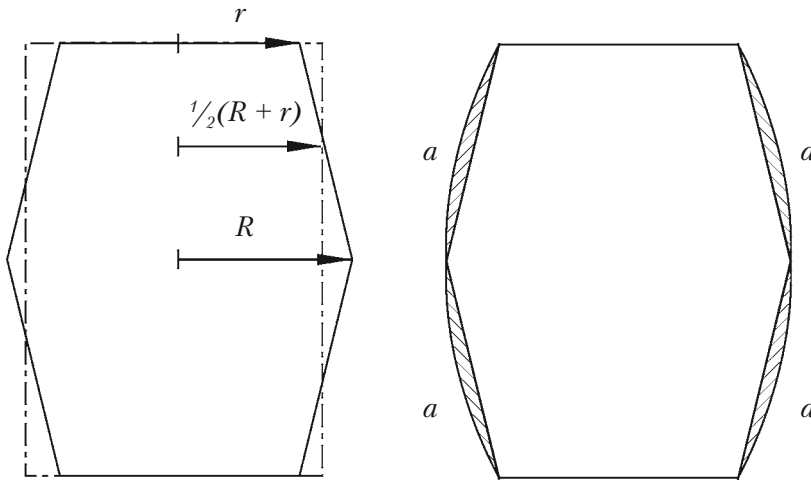


Рис. 97. Поверка расчёта юноши

Интересно определить, как примерно велико это преуменьшение. Бочки обычно устраиваются так, что наибольшая ширина их превышает поперечник дна на $\frac{1}{5}$ его, т.е. $R - r = \frac{R}{5}$. Принимая, что бочка в романе Майн Рида была именно такой формы, можем найти разность между полученной и истинной величиной объёма усечённых конусов:

$$\frac{\pi h}{12}(R - r)^2 = \frac{\pi h}{12}\left(\frac{R}{5}\right)^2 = \frac{\pi h R^2}{300},$$

т.е. около $\frac{hR^2}{100}$ (если считать $\pi = 3$). Ошибка равна, мы видим, объёму цилиндра, радиус основания которого есть радиус

наибольшего сечения бочки, а высота — трёхсотая доля её высоты.

Однако в данном случае желательно небольшое преувеличение результата, так как объём бочки заведомо больше объёма двух вписанных в неё усечённых конусов. Это ясно из рис. 97 (справа), где видно, что при указанном способе обмера бочки отбрасывается часть её объёма, обозначенная буквами a .

Юный математик Майн Рида не сам придумал эту формулу для вычисления объёма бочки; она приводится в некоторых начальных руководствах по геометрии как удобный приём для приближённого определения содержания бочек. Надо заметить, что измерить объём бочки совершенно точно — задача весьма нелёгкая. Над нею размышлял ещё великий Кеплер, оставивший в числе своих математических сочинений специальную работу «Об искусстве измерять бочки». Простое и точное геометрическое решение этой задачи не найдено и по настоящее время: существуют лишь выработанные практикой приёмы, дающие результат с бóльшим или меньшим приближением. Но рассмотрение их едва ли было бы уместно и занимательно.

Интереснее рассмотреть также вопрос: почему, собственно, бочкам придаётся такая неудобная для обмера форма — цилиндра с выпуклыми боками? Не проще ли было бы изготавливать бочки строго цилиндрические? Такие цилиндрические бочки, правда, делаются, но не деревянные, а металлические (для керосина, например). Итак, перед нами

Задача

Почему деревянные бочки изготавливаются с выпуклыми боками? Каково преимущество такой формы?

Решение

Выгода та, что, набивая на бочки обручи, можно надеть их плотно и туго весьма простым приёмом: надвиганием их поближе к широкой части. Тогда обруч достаточно сильно стягивает клёпки, обеспечивая бочке необходимую прочность.

По той же причине деревянным вёдрам, ушатам, чанам и т. д. придаётся обычно форма не цилиндра, а усечённого конуса: здесь также тугое обхватывание изделия обручами достигается простым надвиганием их на широкую часть (рис. 98).



Рис. 98. *Тугое обхватывание бочки обручами достигается наведением их на широкую часть*

Ночное странствование Марка Твена

Находчивость, проявленная майн-ридовским мальчиком в его печальном положении, заслуживает удивления. В полной темноте, в какой он находился, большинство людей не сумели бы даже сколько-нибудь правильно ориентироваться, не говоря уже о том, чтобы выполнять при этом какие-либо измерения и вычисления. С рассказом Майн Рида поучительно сопоставить комическую историю о бесполом странствовании в тёмной комнате гостиницы — приключении, будто бы случившемся со знаменитым соотечественником Майн Рида, юмористом Марком Твеном. В этом рассказе удачно подмечено, как трудно составить себе в темноте верное представление о расположении предметов даже в обыкновенной комнате, если обстановка мало знакома. Мы приводим далее в сокращённой передаче этот забавный эпизод из «Странствований за границей» Марка Твена.

Я проснулся и почувствовал жажду. Мне пришла в голову прекрасная мысль — одеться, выйти в сад и освежиться, вымывшись у фонтана.

Я встал потихоньку и стал разыскивать свои вещи. Нашёл один носок. Где второй, я не мог себе представить. Осторожно спустившись на пол, я стал обшаривать кругом, но безуспешно. Стал искать дальше, шаря и загребая. Подвигался всё дальше и дальше, но носка не находил и только натёкался на мебель. Когда я ложился спать, кругом было гораздо меньше мебели; теперь же комната была полна ею, особенно стульями, которые оказались повсюду. Не вселились ли сюда ещё два семейства за это время? Ни одного из этих стульев я в темноте не видел, зато беспрестанно стёкался о них головой.

Наконец, я решил, что могу прожить и без одного носка. Встав, я направился к двери, как я полагал, — но неожиданно увидел своё тусклое изображение в зеркале.

Ясно, что я заблудился и не имею ни малейшего представления о том, где нахожусь. Если бы в комнате было одно зеркало, оно помогло бы мне ориентироваться, но их было два, а это так же скверно, как тысяча.

Я хотел пробраться к двери по стене. Я снова начал свои попытки — и уронил картину. Она была невелика, но натворила шуму, как целая панорама. Гаррис (сосед по комнате, спавший на другой кровати) не шевелился, но я чувствовал, что если буду действовать дальше в том же духе, то непременно разбужу его. Попробую другой путь. Найду снова круглый стол — я был около него уже несколько раз — и от него постараюсь пробраться к моей кровати; если найду кровать, то найду и графин с водой и тогда, по крайней мере, утолю свою нестерпимую жажду. Лучше всего — ползти на руках и на коленях; этот способ я уже испытал и потому больше доверял ему.

Наконец, мне удалось набрести на стол — ощутить его головой — с небольшим сравнительно шумом. Тогда я снова встал и побрёл, балансируя с протянутыми вперёд руками и растопыренными пальцами. Нашёл стул. Затем стенку. Другой стул. Затем диван. Свою палку. Ещё один диван. Это меня удивило, я прекрасно знал, что в комнате был только один диван. Опять набрёл на стол и получил новый удар. Затем натёкнулся на новый ряд стульев.

Только тогда пришло мне в голову то, что давно должно было прийти: стол был круглый, а следовательно, не мог служить точкой отправления при моих странствованиях. Наудачу пошёл я в пространство между стульями и диваном, — но очутился в области совсем неизвестной, уронив по пути подсвечник с камина. После подсвечника я уронил лампу, а после лампы со звоном полетел на пол графин.

«Ага, — подумал я, — наконец-то я нашёл тебя, голубчика!»

— Воры! Грабят! — закричал Гаррис.

Шум и крики подняли весь дом. Явились со свечами и фонарями хозяин, гости, прислуга.

Я оглянулся вокруг. Оказалось, что я стою возле кровати Гарриса. Только один диван стоял у стены; только один стул стоял так, что на него можно было наткнуться, — я кружил вокруг него, подобно планете, и сталкивался с ним, подобно комете, в течение целой половины ночи.

Справившись со своим шагомером, я убедился, что сделал за ночь 47 миль.

Последнее утверждение преувеличено свыше всякой меры: нельзя в течение нескольких часов пройти пешком 47 миль, но остальные подробности истории довольно правдоподобны и метко характеризуют те комические затруднения, с которыми обычно встречаешься, когда бессистемно, наудачу, странствуешь в темноте по незнакомой комнате. Тем более должны мы оценить удивительную методичность и присутствие духа юного героя Майн Рида, который не только сумел ориентироваться в полной темноте, но и разрешил при этих условиях нелёгкую математическую задачу.

Загадочное кружение

По поводу кружения Твена в тёмной комнате интересно отметить одно загадочное явление, которое наблюдается у людей, бродящих с закрытыми глазами: они не могут идти по прямому направлению, а непременно сбиваются в сторону, описывая дугу, воображая, однако, что движутся прямо вперёд (рис. 99).

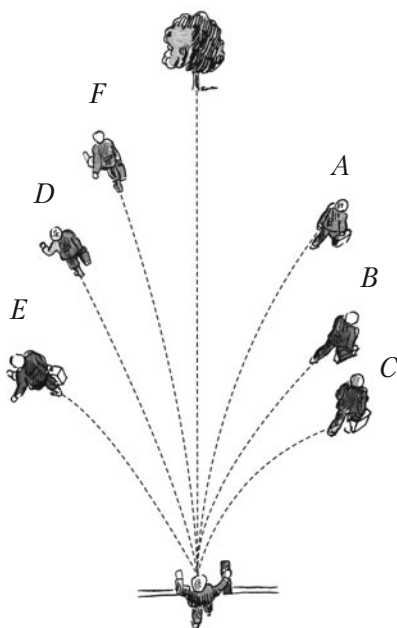


Рис. 99. *Ходьба с закрытыми глазами*

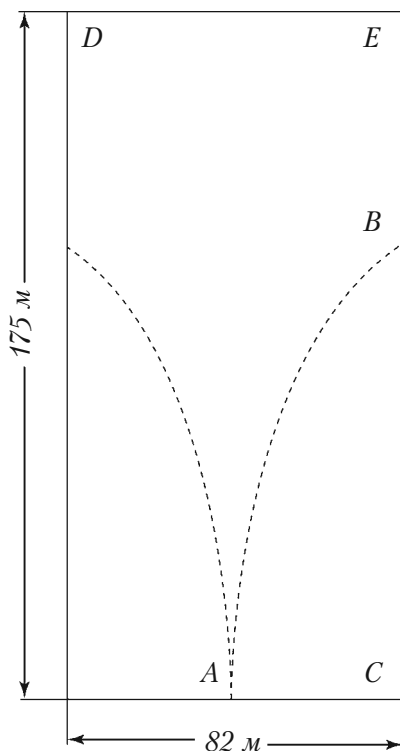


Рис. 100. *Схема опыта на площади Марка в Венеции*

Вот поучительный опыт, произведённый в Венеции на площади Марка. Людям завязывали глаза, ставили их на одном конце площади, как раз против собора, и предлагали до него дойти. Хотя пройти надо было всего только 175 м, всё же ни один из испытуемых не дошёл до фасада здания (82 м ширины), а все уклонялись в сторону, описывали дугу и упирались в одну из боковых колоннад (рис. 100).

Давно известно также, что люди, бродящие без компаса по степи в метель или в туманную погоду — вообще во всех случаях, когда нет возможности ориентироваться — обычно описывают круги, хотя воображают, что идут всё время вперёд. Рассказы о таких безнадежных кружениях по пустынной местности можно встретить в описании многих путешествий. Приведём в виде примера вполне достоверный рассказ.

Трое путников намеревались в снежную ночь покинуть хижину и выбраться из долины шириною в 4 км, чтобы достичь своего дома, расположенного в направлении, которое на прилагаемом рисунке отмечено пунктиром (рис. 101). В пути они незаметно уклонились вправо, по кривой, отмеченной стрелкой. Пройдя некоторое расстояние, они, по расчёту времени, полагали, что достигли цели, — на самом же деле очутились у той же хижины, которую покинули. Отправившись в путь вторично, они уклонились ещё сильнее и снова дошли до исходного пункта. То же по-

вторилось в третий и четвёртый раз. В отчаянии предприняли они пятую попытку, — но с тем же результатом. После пятого круга они отказались от дальнейших попыток выбраться из долины и дождались утра в хижине.

Ещё труднее грести на море по прямой линии в тёмную беззвёздную ночь или в густой туман. Отмечен случай, — один из многих подобных, — когда гребцы, решив переплыть в туманную погоду пролив шириною в 4 км, дважды побывали у противоположного берега, но не достигли его, а бессознательно описали два круга и высадились, наконец... в месте своего отправления (рис. 102).

То же случается и с животными. Полярные путешественники рассказывают о кругах, которые описывают в снежных пустынях животные, запряжённые в сани. Собаки, которых пускают плавать с завязанными глазами, также описывают в воде круги.

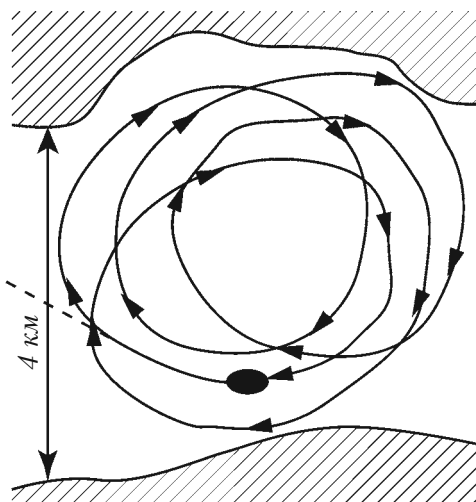


Рис. 101. Схема блужданий трёх путников



Рис. 102. Как гребцы пытались переплыть пролив в туманную погоду

По кругу же летят и ослеплённые птицы. Затравленный зверь, лишившийся от страха способности ориентироваться, спасается не по прямой линии, а по спирали.

Чем же объясняется загадочная приверженность человека и животных к кругу, невозможность держаться в темноте прямого направления? Здесь нет ничего таинственного: всё находит себе естественное объяснение в неполной симметрии тела человека и животных.

Обе половины тела развиты неодинаково: правая нога не равна левой по силе мускулов. Поэтому человек, например, делает одной ногой (чаще всего левой) более длинные шаги, нежели правой. Легко понять, что, двигаясь таким образом, человек неизбежно должен описывать дугу: вспомните, как катится игрушечная заводная тележка, колёса которой на одной стороне больше, чем на другой. Это геометрическая необходимость. Представьте себе, например, что, занося левую ногу, человек делает шаг на миллиметр длиннее, чем правой ногой. Тогда, сделав попеременно каждой ногой тысячу шагов, человек опишет левой ногой путь на 1000 мм, т.е. на целый метр, длиннее, чем правой. На прямых параллельных путях это невозможно, зато вполне осуществимо на концентрических окружностях.

Мы можем даже, пользуясь планом описанного выше кружения в снежной долине, вычислить, насколько у тех путников левая нога делала более длинный шаг, чем правая (так как путь загибался вправо, то ясно, что более длинные шаги делала именно левая нога). Расстояние между линиями отпечатков правой и левой ног при ходьбе (рис. 103) равно примерно 10 см, т.е. 0,1 м. Когда человек описывает один полный круг, его правая нога проходит путь $2\pi R$, а левая $2\pi(R + 0,1)$, где R — радиус этого круга в метрах. Разность $2\pi(R + 0,1) - 2\pi R = 2\pi 0,1$, т.е. 0,624 м, или 624 мм, составила из разницы между длиной левого и правого шагов, повторённой столько раз, сколько сделано было шагов. Из рис. 6 можно вывести, что путники наши описывали круги диаметром примерно 3,5 км, т.е. длиной около 10 000 м. При средней длине шага 0,7 м на протяжении этого пути было сделано $10000/0,7 = 14000$ шагов; из них 7000 правой ногой и столько же левой. Итак, мы узнали, что 7000 «левых» шагов больше 7000 «правых» шагов на 624 мм. Отсюда один левый шаг длиннее одного правого на $624/7000$ мм, или менее чем на 0,1 мм. Вот такая ни-

чтожная разница в шагах достаточна, чтобы вызвать столь поражающий результат!

Радиус того круга, который блуждающий описывает, зависит от разности длин «правового» и «левого» шагов. Эту зависимость нетрудно установить. Число шагов, сделанных на протяжении одного круга, при длине шага 0,7 м равно $\frac{2\pi R}{0,7}$, где R — радиус круга; из них «левых» шагов $\frac{2\pi R}{2 \cdot 0,7}$ и столько же «правых». Умножив это число на величину разности x длины шагов, получим разность длин тех концентрических кругов, которые описаны левой и правой ногами, т. е.

$$\frac{2\pi \cdot Rx}{2 \cdot 0,7} = 2\pi \cdot 0,1,$$

или $Rx = 0,14$.

По этой простой формуле легко вычислить радиус круга, когда известна разность шагов, и обратно. Например, для участников опыта на площади Марка в Венеции мы можем установить наибольшую величину радиуса кругов, описанных ими при ходьбе. Действительно, так как ни один не дошёл до фасада DE здания (рис. 100), то по «стрелке» $AC = 41$ м и хорде BC , не превышающей 175 м, можно вычислить максимальный радиус дуги AB . Он определяется из равенства

$$2R = \frac{BC^2}{AC} = \frac{175^2}{41} = 747 \text{ м},$$

откуда R , максимальный радиус, будет около 370 м.

Зная это, мы из полученной раньше формулы $Rx = 0,14$ определяем наименьшую величину разности длины шагов:

$$370x = 0,14, \quad \text{откуда } x = 0,4 \text{ мм}.$$

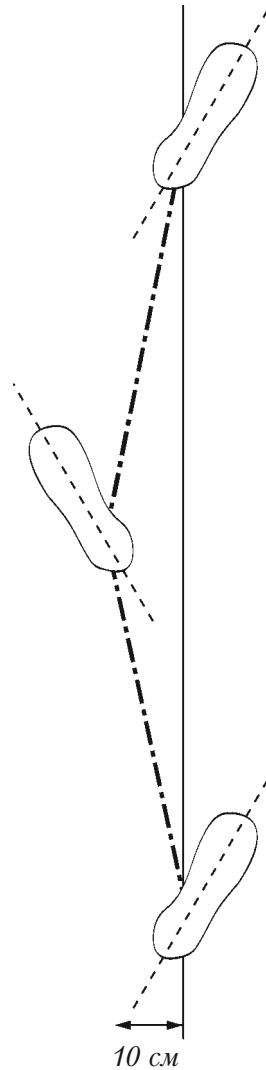


Рис. 103. Линии отпечатков правой и левой ног при ходьбе

Итак, разница в длине правых и левых шагов у участников опыта не менее 0,4 мм.

Иногда приходится читать и слышать, что факт кружения при ходьбе вслепую зависит от различия в длине правой и левой ног; так как левая нога у большинства людей длиннее правой, то люди при ходьбе должны неизбежно уклоняться вправо от прямого направления. Такое объяснение основано на геометрической ошибке. Важна разная длина *шагов*, а не *ног*. Из рис. 104 ясно, что и при наличии разницы в длине ног можно всё же делать строго одинаковые шаги, если выносить при ходьбе каждую ногу на одинаковый угол (треугольники ABC и $C_1B_1A_1$ равны). Наоборот, при строго одинаковой длине ног шаги могут быть различной длины, если одна нога дальше выносится при ходьбе, нежели другая.

По сходной причине лодочник, гребущий правой рукой сильнее, чем левой, должен неизбежно увлекать лодку по кругу, загибая в левую сторону. Животные, делающие неодинаковые шаги правыми или левыми ногами, или птицы, делающие неравной силы взмахи правым и левым крылом, также должны двигаться

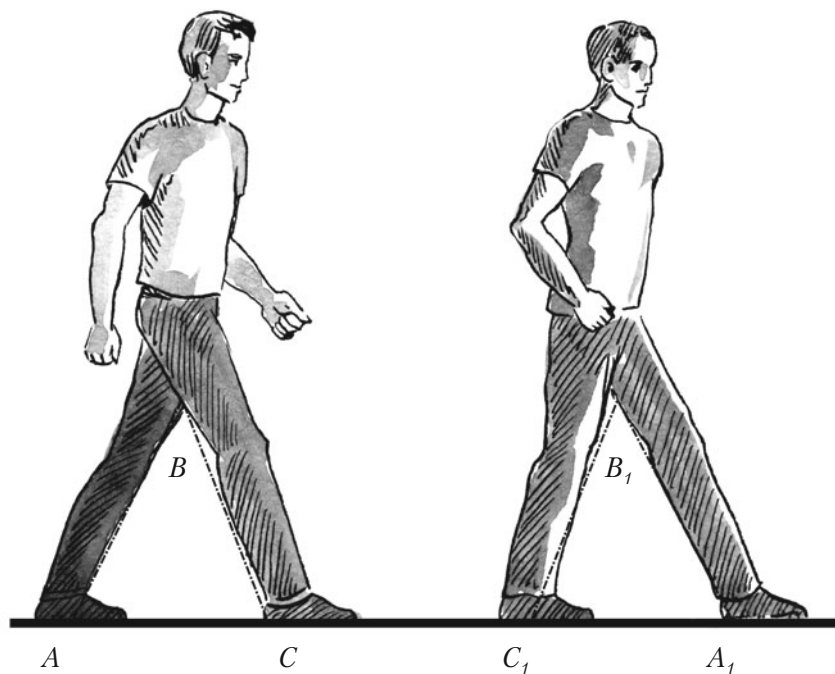


Рис 104. Если угол каждого шага один и тот же, то шаги будут строго одинаковыми

по кругам всякий раз, когда лишены возможности контролировать прямолинейное направление зрением. Здесь тоже достаточно весьма незначительной разницы в силе рук, ног или крыльев.

При таком взгляде на дело указанные раньше факты утрачивают свою таинственность и становятся вполне естественными. Удивительно было бы, если бы люди и животные, наоборот, могли выдерживать прямое направление, не контролируя его глазами. Ведь необходимым условием для этого является строго геометрическая симметрия тела, абсолютно невозможная для произведения живой природы. Малейшее же отклонение от математически совершенной симметрии должно повлечь за собою, как неизбежное следствие, движение по дуге. Чудо не то, чему мы здесь удивляемся, а то, что мы готовы были считать естественным.

Невозможность держаться прямого пути не составляет для человека существенной помехи: компас, дороги, карты спасают его в большинстве случаев от последствий этого недостатка.

Не то у животных, особенно у обитателей пустынь, степей, безграничного морского простора: для них несимметричность тела, заставляющая их описывать круги вместо прямых линий, — важный жизненный фактор. Словно невидимой цепью приковывает он их к месту рождения, лишая возможности удалиться от него сколько-нибудь значительно. Лев, отважившийся уйти подальше в пустыню, неизбежно возвращается обратно. Чайки, покидающие родные скалы для полёта в открытое море, не могут не возвращаться к гнезду (тем загадочнее, однако, далёкие перелёты птиц, пересекающие по прямому направлению материки и океаны).

Измерение голыми руками

Майн-ридовский мальчик мог успешно разрешить свою геометрическую задачу только потому, что незадолго до путешествия измерил свой рост и твёрдо помнил результаты измерения. Хорошо бы каждому из нас обзавестись таким «живым метром», чтобы в случае нужды пользоваться им для измерения. Полезно также помнить, что у большинства людей расстояние между концами расставленных рук равно росту (рис. 105) — правило,

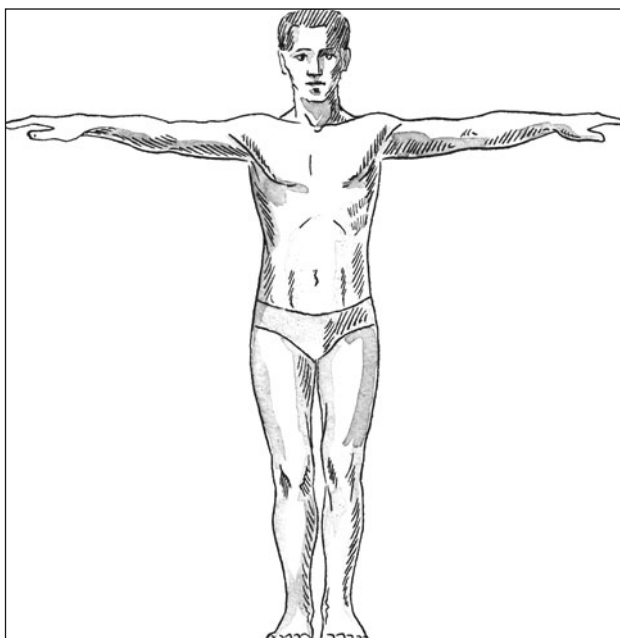


Рис. 105. Правило Леонардо да Винчи

подмеченное гениальным художником и учёным *Леонардо да Винчи*: оно позволяет пользоваться нашими «живыми метрами» удобнее, чем делал это мальчик у Майн Рида. В среднем высота взрослого человека (славянской расы) около 1,7 м, или 170 см; это легко запомнить. Но полагаться на *среднюю* величину не следует: каждый должен измерить свой рост и размах своих рук.

Для отмеривания — без масштаба — мелких расстояний следует помнить длину своей «четверти», т.е. расстояние между концами расставленных большого пальца и мизинца (рис. 106). У взрослого мужчины оно составляет около 18 см — примерно

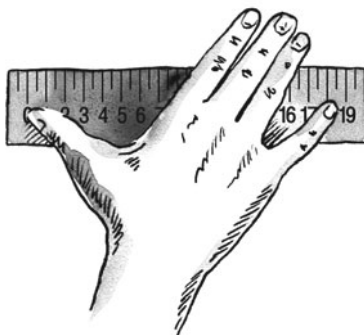


Рис. 106. Измерение расстояния между концами пальцев

$\frac{1}{4}$ аршина (откуда и название «четверть»); но у людей молодых оно меньше и медленно увеличивается с возрастом (до 25 лет).

Далее для этой же цели полезно измерить и запомнить длину своего указательного пальца, считая её двояко: от основания среднего пальца (рис. 107) и от основания большого.

Точно так же должно быть известно вам наибольшее расстояние между концами указательного и среднего

пальцев, — у взрослого около 10 см (рис. 108). Надо, наконец, знать и ширину своих пальцев. Ширина трёх средних пальцев, плотно сжатых, примерно 5 см.

Вооружённые всеми этими сведениями, вы сможете довольно удовлетворительно выполнять разнообразные измерения буквально голыми руками, даже и в темноте. Пример представлен на рис. 109: здесь измеряется пальцами окружность стакана. Исходя из средних величин, можно сказать, что длина окружности стакана равна $18 + 5$, т.е. 23 см.

Прямой угол в темноте

Задача

Возвращаясь ещё раз к майнридовскому математику, поставим себе задачу: как следовало ему поступить, чтобы надёжным образом получить прямой угол? «Я приставил к ней (к выступающей планке) длинный прут так, чтобы он образовал с ней прямой угол», — читаем мы в романе. Делая это в темноте, полагаясь только на мускульные ощущения, мы можем ошибиться довольно крупно. Однако у мальчика в его положении было средство построить прямой угол гораздо более надёжным приёмом. Каким?

Решение

Надо воспользоваться теоремой Пифагора и построить из планок

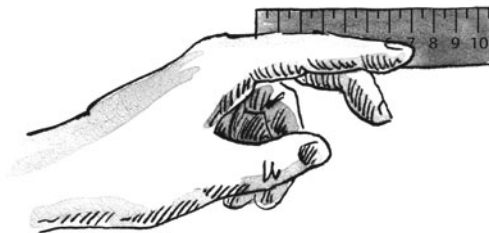


Рис. 107. Измерение длины указательного пальца



Рис. 108. Измерение расстояния между концами двух пальцев

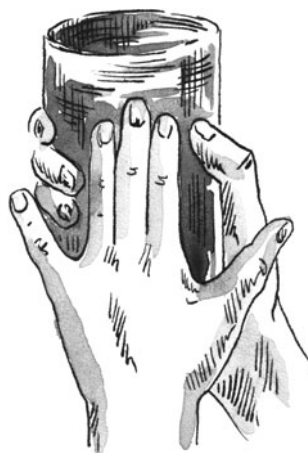


Рис. 109. Измерение окружности стакана «голыми руками»

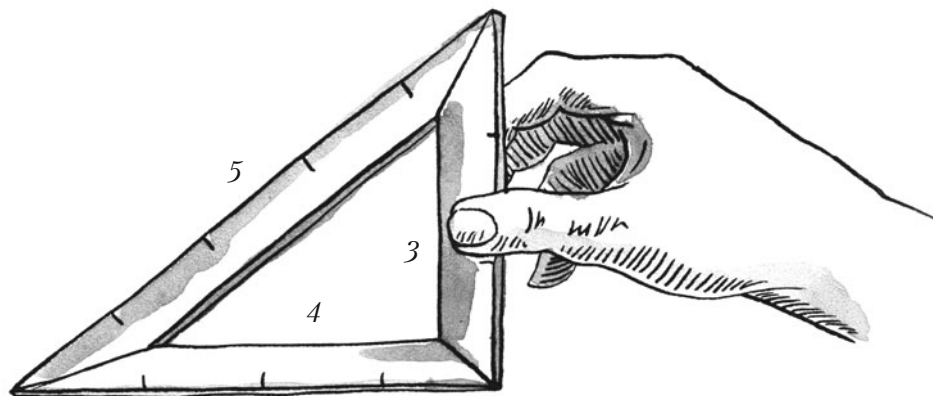
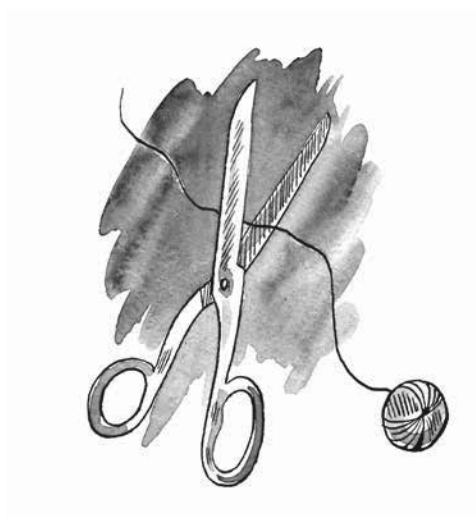
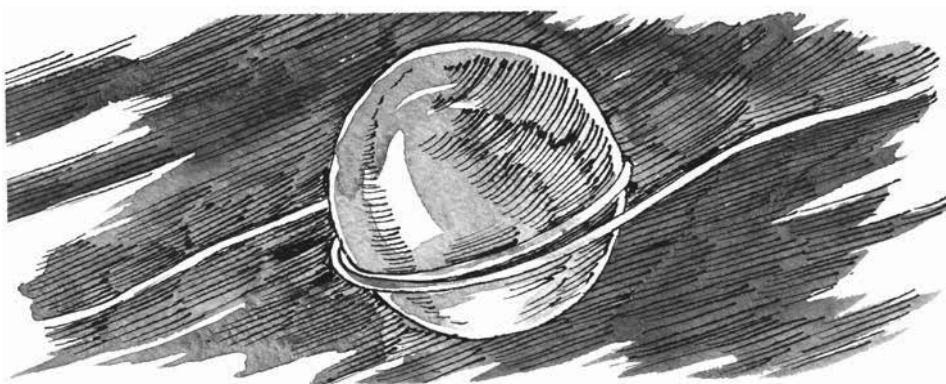


Рис. 110. Простейший прямоугольный треугольник, длины сторон которого — целые числа

треугольник, придав его сторонам такую длину, чтобы треугольник получился прямоугольный. Проще всего взять для этого планки длиной в 3, в 4 и в 5 каких-либо произвольно выбранных равных отрезков — например, ширины ладони (рис. 110).

Это старинный египетский способ, которым пользовались в стране пирамид несколько тысячелетий тому назад. Впрочем, ещё и в наши дни при строительных работах зачастую прибегают к тому же приёму.





ГЛАВА ДЕВЯТАЯ

СТАРОЕ И НОВОЕ О КРУГЕ

Практическая геометрия египтян и римлян

Любой школьник вычисляет теперь длину окружности по диаметру гораздо точнее, чем мудрейший жрец древней страны пирамид или самый искусный архитектор великого Рима. Древние египтяне считали, что окружность длиннее диаметра в 3,16 раза, а римляне — в 3,12, между тем правильное отношение — 3,14159... Египетские и римские математики установили отношение длины окружности к диаметру не строгим геометрическим расчётом, как позднейшие математики, а нашли его просто из опыта. Но почему получались у них такие ошибки? Разве не могли они обтянуть какую-нибудь круглую вещь ниткой и затем, выпрямив нитку, просто измерить её?

Без сомнения, они так и поступали; но не следует думать, что подобный способ должен непременно дать хороший результат. Вообразите, например, вазу с круглым дном диаметром в 100 мм. Длина окружности дна должна равняться 314 мм. Однако на практике, измеряя ниткой, вы едва ли получите эту длину: легко ошибиться на один миллиметр, и тогда π окажется равным 3,13 или 3,15. А если примете во внимание, что и диаметр вазы нельзя измерить вполне точно, что и здесь ошибка в 1 мм весьма

вероятна, то убедитесь, что для π получаются довольно широкие пределы между

$$\frac{313}{101} \quad \text{и} \quad \frac{315}{99},$$

т. е., в десятичных дробях, между

$$3,09 \quad \text{и} \quad 3,18.$$

Вы видите, что, определяя π указанным способом, мы можем получить результат, не совпадающий с 3,14: один раз 3,1, другой раз 3,12, третий — 3,17 и т. п. Случайно окажется среди них и 3,14, но в глазах вычислителя это число не будет иметь больше веса, чем другие.

Теперь становится более понятным, почему древний мир не знал правильного отношения длины окружности к диаметру, и понадобился гений Архимеда, чтобы найти для π значение $3\frac{1}{7}$ — найти без измерений, одними лишь рассуждениями.

«Что я знаю о кругах»

В «Алгебре» древнего арабского математика Магомета-бен-Муза о вычислении длины окружности читаем такие строки:

Лучший способ — это умножить диаметр на $3\frac{1}{7}$. Это самый скорый и самый лёгкий способ. Богу известно лучшее.

Теперь и мы знаем, что архимедово число $3\frac{1}{7}$ не вполне точно выражает отношение длины окружности к диаметру. Теоретически доказано, что отношение это вообще не может быть выражено какой-либо точной дробью. Мы можем написать его лишь с тем или иным приближением, впрочем, далеко превосходящим точность, необходимую для самых строгих требований практической жизни. Математик XVI века Лудольф, в Лейдене, имел терпение вычислить его с 35 десятичными знаками и завещал вырезать это значение для π^* на своём могильном памятнике (рис. 111).

* Тогда ещё это обозначение (π) не было в употреблении: оно введено лишь с середины XVIII в. знаменитым русским академиком, математиком Леонардом Павловичем Эйлером.

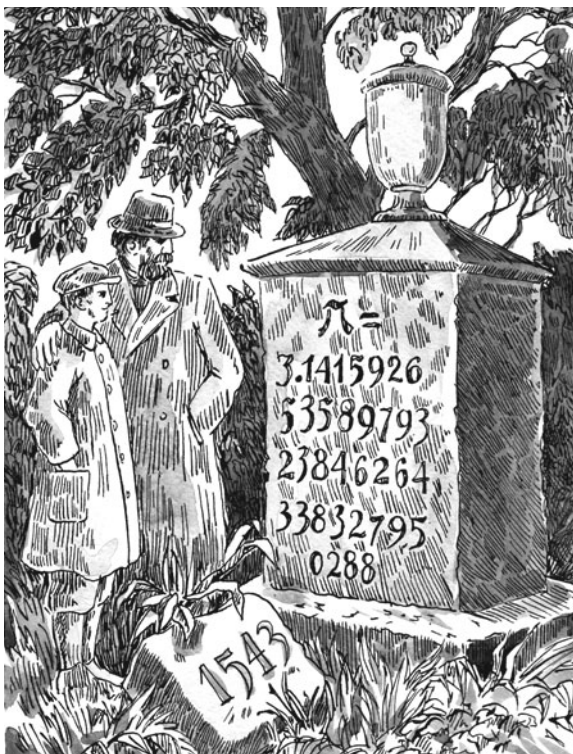


Рис. 111. Математическая надгробная надпись

Вот оно:

3,14159265358979323846264338327950288...

Я знаю его наизусть до 31-й цифры и всегда могу повторить, хотя и не обладаю сверхъестественной памятью. Дело проще: французы придумали стихотворение, слова которого подобраны так, что числа букв в них отвечают последовательно цифрам этого длинного ряда. Для знающих по-французски привожу здесь этот единственный в своём роде образчик геометрической поэзии или поэтической геометрии:

Que j'aime à faire apprendre un nombre utile aux sages!
 Immortel Archimède, sublime ingénieur,
 Qui de ton jugement peut sonder la valeur?
 Pour moi ton problème eut de pareils avantages.

На практике пользоваться таким громоздким π никогда не приходится. Даже если бы мы пожелали вычислить длину

* Тем не менее математики затратили много труда, чтобы получить для π возможно больше знаков. Математик Шенкс в 1873 г. опубликовал такое значение числа π , в котором после запятой следовало 707 десятичных знаков!

земного экватора с точностью до 1 см, предполагая, что знаем длину его диаметра точно, нам достаточно было бы взять π всего с 9 цифрами после запятой. А взяв вдвое больше цифр (18), мы могли бы вычислить длину окружности, имеющей радиусом расстояние от Земли до Солнца, с погрешностью не выше 0,0001 мм (в 100 раз меньше толщины волоса!). Правильно замечает по этому поводу французский астроном Араго, что «в смысле точности мы ничего не выиграли бы, если бы между длиной окружности и диаметром существовало отношение, выражающееся числом вполне точно»*.

Для обычных вычислений с числом π вполне достаточно запомнить два знака после запятой (3,14), а для более точных — четыре знака (3,1416: последнюю цифру берём 6 вместо 5 потому, что далее следует цифра, большая 5). Первые 6 слов приведённого раньше французского четверостишия помогли бы нам запомнить число 3,14159. Хорошо бы, конечно, придумать подходящие русские стихи. Не отваживаясь на это, позволю себе предложить прозаическую фразу:

3 1 4 1 6

что я знаю о кругах —

вопрос, скрыто заключающий в себе ответ: 3,1416.

Бросание иглы

** *Пересечением* надо считать и тот случай, когда игла только упирается концом в начерченную линию.

Самый оригинальный и неожиданный способ для приближённого вычисления числа π состоит в следующем. Запасаются короткой (сантиметра два) швейной иглой, — лучше с отломанным остриём, чтобы игла была равномерной толщины, — и проводят на листе бумаги ряд тонких параллельных линий, отделённых одна от другой расстоянием вдвое больше длины иглы. Затем роняют с некоторой (произвольной) высоты иглу на бумагу и замечают, пересекает ли игла одну из линий или нет (рис. 112, слева). Чтобы игла не подпрыгивала, подкладывают под бумажный лист пропускную бумагу или сукно. Бросание иглы повторяют много раз, например сто или, ещё лучше, тысячу, каждый раз отмечая, было ли пересечение**. Если потом разделить общее число

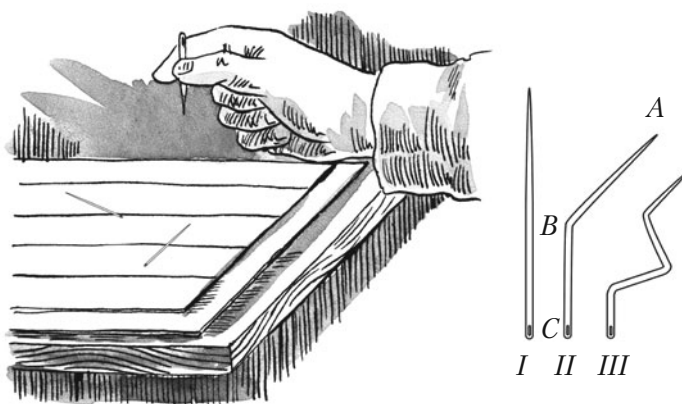


Рис. 112. Опыт Бюффона с бросанием иглы

падений иглы на число случаев, когда замечено было пересечение, то в результате должно получиться число π , конечно, более или менее приближённо.

Объясним, почему так получается. Пусть вероятнейшее число пересечений иглы равно K , а длина нашей иглы — 20 мм. В случае пересечения точка встречи должна, конечно, лежать на каком-либо из этих миллиметров, и ни один из них, ни одна часть иглы, не имеет в этом отношении никаких преимуществ перед другими. Поэтому вероятнейшее число пересечений каждого отдельного миллиметра равно $K/20$. Для участка иглы в 3 мм оно равно $3K/20$, для участка в 11 мм — $11K/20$ и т.д. Иначе говоря, вероятнейшее число пересечений прямо пропорционально длине иглы.

Эта пропорциональность сохраняется и в том случае, если игла согнута. Пусть игла согнута в форме фиг. II (рис. 112, справа), причём участок $AB = 11$ мм, $BC = 9$ мм. Для части AB вероятнейшее число пересечений равно $11K/20$, а для BC равно $9K/20$, для всей же иглы $11K/20 + 9K/20$, т.е. по-прежнему равно K . Мы можем изогнуть иглу и более затейливым образом (фигура III, рис. 112), — число пересечений от этого не изменилось бы. (Заметьте, что при изогнутой игле возможны пересечения черты двумя и более частями иглы сразу; такое пересечение надо, конечно, считать за 2, за 3 и т.д., потому что первое зачислялось при подсчёте пересечений для одной части иглы, второе — для другой и т.д.)

Вообразите же теперь, что мы бросаем иглу, изогнутую в форме окружности с диаметром, равным расстоянию между чертами (оно вдвое больше, чем наша игла). Такое кольцо каждый раз должно дважды пересечь какую-нибудь черту (или по одному

разу коснуться двух линий, — во всяком случае, получаются две встречи). Если общее число бросаний N , то число встреч — $2N$. Наша прямая игла меньше этого кольца по длине во столько раз, во сколько полудиаметр меньше длины окружности, т.е. в 2π раз. Но мы уже установили, что вероятнейшее число пересечений пропорционально длине иглы. Поэтому вероятнейшее число пересечений нашей иглы (K) должно быть меньше $2N$ в 2π раз, т.е. равно $\frac{N}{\pi}$. Отсюда

$$\pi = \frac{\text{число бросаний}}{\text{число пересечений}}.$$

Чем большее число падений наблюдалось, тем точнее получается выражение для π . Один швейцарский астроном, Р. Вольф, в середине прошлого века наблюдал 5000 падений иглы на разграфлённую бумагу и получил в качестве π число 3,159 ... — выражение, впрочем, менее точное, чем архимедово число.

Как видите, отношение длины окружности к диаметру находят здесь опытным путём, причём — это всего любопытнее — не чертят ни круга, ни диаметра, т.е. обходятся без циркуля. Человек, не имеющий никакого представления о геометрии и даже о круге, может тем не менее определить по этому способу число π , если терпеливо проделает весьма большое число бросаний иглы.

Выпрямление окружности

Задача

Выпрямить данную окружность — значит начертить такую прямую линию, длина которой равна по длине этой окружности. Если бы π можно было выразить дробным числом, то такое построение легко было бы выполнить вполне точно: мы отложили бы диаметр на прямой линии π раз. Но так как число π выражается только приближённо, то и выпрямление окружности выполнимо лишь с тем или иным приближением. Для многих практических целей достаточно взять для π число $3\frac{1}{7}$ и выпрямить окружность, отложив её диаметр на какой-либо прямой $3\frac{1}{7}$ раза (деление отрезка на семь равных частей можно выполнить, как известно, вполне точно). Существуют и другие приближённые

способы выпрямления окружности, применяемые на практике при ремесленных работах столярами, жестяниками и т.п. Мы не будем здесь рассматривать их, а укажем лишь один довольно простой способ выпрямления, дающий результат с чрезвычайно большой точностью.

Если нужно выпрямить окружность O (рис. 113), то проводят диаметр AB , а в точке B — перпендикулярную к ней прямую CD . Из центра O под углом 30° к AB проводят прямую OC . Затем на прямой CD от точки C откладывают три радиуса данной окружности и соединяют полученную точку D с A : длина отрезка AD равна длине полуокружности. Если отрезок AD удлинить вдвое, то приближённо получится выпрямленная окружность O . Ошибка менее 0,0002.

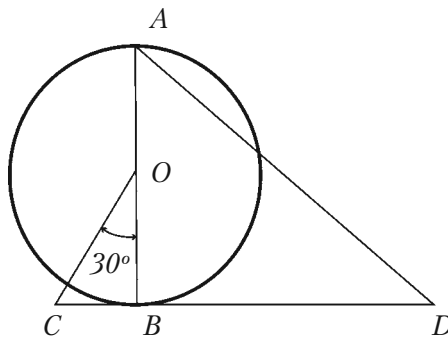


Рис. 113. Приближённый геометрический способ выпрямления окружности

На чём основано это построение?

Решение

По теореме Пифагора

$$CB^2 + OB^2 = OC^2.$$

Обозначив радиус OB через r и имея в виду, что $CB = OC/2$ (как катет, лежащий против угла в 30°), получаем:

$$CB^2 + r^2 = 4CB^2,$$

откуда

$$CB = \frac{r\sqrt{3}}{3}.$$

Далее в треугольнике ABD

$$BD = CD - CB = 3r - \frac{r\sqrt{3}}{3}.$$

$$AD = \sqrt{BD^2 + 4r^2} = \sqrt{\left(3r - \frac{r\sqrt{3}}{3}\right)^2 + 4r^2} =$$

$$= \sqrt{9r^2 - 2r^2\sqrt{3} + \frac{r^2}{3} + 4r^2} = 3,14153r.$$

Сравнив этот результат с тем, который получается, если взять π с большой степенью точности ($\pi = 3,141593$), мы видим, что разница составляет всего $0,00006r$. Если бы мы по этому способу выпрямляли окружность радиусом в 1 м, ошибка составляла бы для полуокружности всего $0,00006$ м, а для полной окружности — $0,00012$ м, или $0,12$ мм (примерно утроенная толщина волоса).

Квадратура круга

Как нельзя совершенно точно выпрямить окружность, так невозможно построить квадрат, площадь которого в точности бы равнялась площади данного круга. Однако для практических

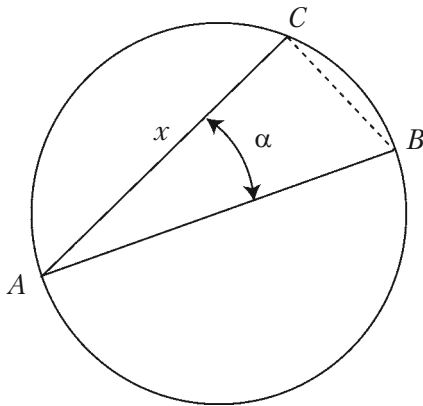


Рис. 114. Способ русского инженера Бинга

целей вполне достаточного приближённое построение. Мы рассмотрим здесь одно из таких приближённых решений задачи о квадратуре круга, очень удобное для надобностей практической жизни.

Способ этот состоит в том, что вычисляют (рис. 114) угол α , под которым надо провести к диаметру AB хорду $AC = x$, являющуюся стороной искомого квадрата. Чтобы узнать величину этого угла, придётся обратиться к тригонометрии:

$$\cos \alpha = \frac{AC}{AB} = \frac{x}{2r},$$

где r — радиус круга.

Значит, сторона искомого квадрата $x = 2r \cos \alpha$, площадь же его равна $4r^2 \cos^2 \alpha$. С другой стороны, площадь квадрата равна πr^2 — площади данного круга.

Следовательно,

$$4r^2 \cos^2 \alpha = \pi r^2,$$

откуда

$$\cos^2 \alpha = \frac{\pi}{4}, \quad \cos \alpha = \frac{1}{2} \sqrt{\pi} = 0,886.$$

По таблицам находим:

$$\alpha = 27^\circ 36'.$$

Итак, проведя в данном круге хорду под углом $27^\circ 36'$ к диаметру, мы сразу получаем сторону квадрата, площадь которого равна площади данного круга. Практически делают так, что заготавливают чертёжный треугольник*, один из острых углов которого $27^\circ 36'$ (а другой — $62^\circ 24'$). Располагая таким треугольником, можно для каждого данного круга сразу находить сторону равновеликого ему квадрата.

Для желающих изготовить себе такой чертёжный треугольник полезно следующее указание.

Так как тангенс угла $27^\circ 36'$ равен 0,523, или $\frac{23}{44}$, то катеты такого треугольника относятся, как 23 : 44. Поэтому, изготовив треугольник, один катет которого, например, 22 см, а другой 11,5 см, мы будем иметь то, что требуется. Само собой разумеется, что таким треугольником можно пользоваться и как обыкновенным чертёжным.

* Этот удобный способ был предложен в 1836 г. русским инженером Бингом; упомянутый чертёжный треугольник носит по имени изобретателя название «треугольник Бинга».

Построение без циркуля

При решении геометрических задач на построение обычно пользуются линейкой и циркулем. Мы сейчас увидим, однако, что иной раз удаётся обходиться без циркуля в таких случаях, где на первый взгляд он представляется совершенно необходимым.

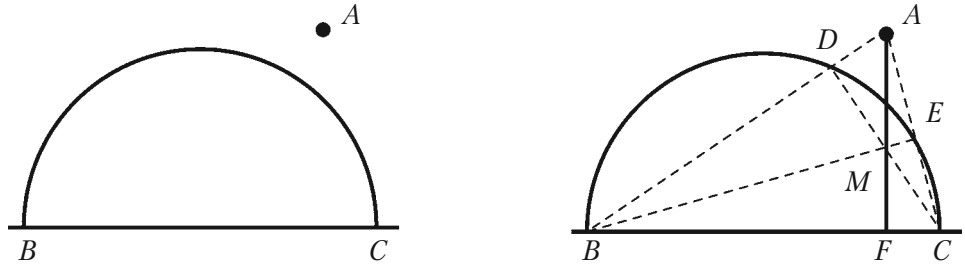


Рис. 115. Задача на построение и её решение. Первый случай

Задача

Из точки A (рис. 115, слева), лежащей вне данной полуокружности, опустить на её диаметр перпендикуляр, обходясь при этом без циркуля. Положение центра полуокружности не указано.

Решение

Нам пригодится здесь то свойство треугольника, что все высоты его пересекаются в одной точке. Соединим A с B и C ; получим точки D и E (рис. 115, справа). Прямые BE и CD , очевидно, — высоты треугольника ABC . Третья высота — искомый перпендикуляр к BC — должна проходить через точку пересечения двух других, т.е. через M . Проведя по линейке прямую через точки A и M , мы выполним требование задачи, не прибегая к услугам циркуля. Если точка расположена так, что искомый перпендикуляр падает на *продолжение* диаметра (рис. 116), то задача будет разрешима лишь при условии, что дан не полукруг, а полная окружность. Рис. 116 показывает, что решение не отличается от того, с которым мы уже знакомы; только высоты треугольника ABC пересекаются здесь не внутри, а вне его.

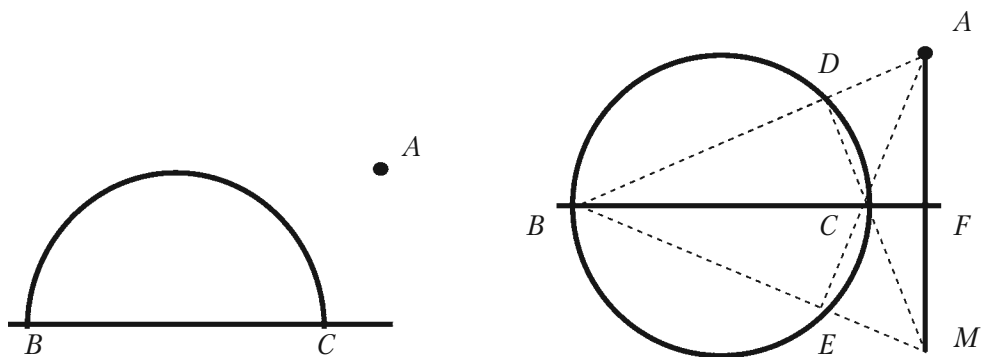


Рис. 116. Та же задача. Второй случай

Задача Наполеона

Сейчас мы занимались построением, выполняемым при помощи одной лишь линейки, не обращаясь к циркулю (при условии, что одна окружность на чертеже дана заранее). Рассмотрим теперь несколько задач, в которых вводится обратное ограничение: запрещается пользоваться линейкой, а все построения нужно выполнить только циркулем. Одна из таких задач заинтересовала Наполеона I (интересовавшегося, как известно, математикой). Прочитав книгу о таких построениях итальянского учёного Маскерони, он предложил французским математикам следующую задачу.

Задача

Данную окружность разделить на четыре равные части, не прибегая к линейке. Положение центра окружности дано.

Решение

Пусть требуется разделить на четыре части окружность O (рис. 117). От произвольной точки A откладываем по окружности три раза радиус круга: получаем точки B , C и D . Легко видеть, что расстояние AC — хорда дуги, составляющей $\frac{1}{8}$ окружности, — сторона вписанного равностороннего треугольника и, следовательно, равно $r\sqrt{3}$, где r — радиус окружности. AD , очевидно, — диаметр окружности. Из точек A и D радиусом, равным AC , засекаем дуги, пересекающиеся в точке M . Покажем, что расстояние MO равно стороне квадрата, вписанного в нашу окружность. В треугольнике AMO катет $MO = \sqrt{AM^2 - AO^2} = \sqrt{3r^2 - r^2} = r\sqrt{2}$, т.е. стороне вписанного квадрата. Теперь остаётся только раствором циркуля, равным MO , отложить на окружности последовательно четыре точки, чтобы получить вершины вписанного квадрата, которые, очевидно, разделят окружность на четыре равные части.

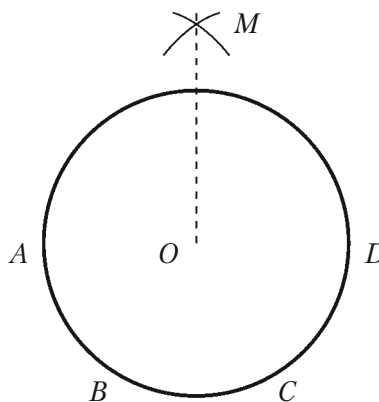


Рис. 117. Разделить окружность на четыре равные части, употребляя только циркуль

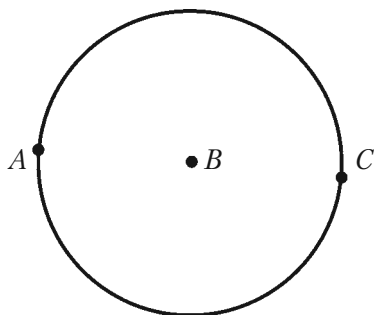


Рис. 118. Как увеличить расстояние между точками A и B в n раз (n — целое число), употребляя только циркуль?

Задача

Вот другая, более лёгкая задача в том же роде.

Без линейки увеличить расстояние между данными точками A и B (рис. 118) в пять раз, — вообще в заданное число раз.

Решение

Из точки B радиусом AB описываем окружность (рис. 118). По этой окружности откладываем от точки A расстояние AB три раза: получаем точку C , очевидно, диаметрально противоположную A . Расстояние AC представляет собой двойное расстояние AB . Проведя окружность из C радиусом BC , мы можем таким же образом найти точку, диаметрально противоположную B и, следовательно, удалённую от A на тройное расстояние AB , и т. д.

Голова или ноги

Кажется, один из героев Жюль Верна подсчитывал, какая часть его тела прошла более длинный путь за время его кругосветных странствований — голова или ступни ног. Это очень поучительная геометрическая задача, если поставить вопрос определённым образом. Мы предложим её в таком виде.

Задача

Вообразите, что вы обошли земной шар по экватору. Насколько при этом верхушка вашей головы прошла более длинный путь, чем кончик вашей ноги?

Решение

Ноги прошли путь $2\pi R$, где R — радиус земного шара. Верхушка же головы прошла при этом $2\pi(R + 1,7)$, где 1,7 м — рост человека. Разность путей равна $2\pi(R + 1,7) - 2\pi R = 2\pi \cdot 1,7 = 10,68$ м. Итак, голова прошла путь на 10,7 м больше, чем ноги.

Любопытно, что в окончательный ответ не входит величина радиуса земного шара. Поэтому результат получится одинаковый и на Земле, и на Юпитере, и на самой мелкой планетке. Вообще, разность длин двух концентрических окружностей не зависит от их радиусов, а только от расстояния между ними. Прибавка одного сантиметра к радиусу земной орбиты увеличила бы её длину ровно настолько, насколько удлинится от такой же прибавки радиуса окружность пятака.

На этом геометрическом парадоксе* основана следующая любопытная задача, фигурирующая во многих сборниках геометрических развлечений.

Если обтянуть земной шар по экватору проволокой и затем прибавить к её длине 1 м, то сможет ли между проволокой и землёй проскочить мышь?

Обычно отвечают, что промежуток будет тоньше волоса: что значит один метр по сравнению с 40 миллионами метров земного экватора! В действительности же величина промежутка равна

$$\frac{100}{2\pi} \text{ см} \approx 16 \text{ см.}$$

Не только мышь, но и крупный кот проскочит в такой промежуток.

* *Парадоксом* называется истина, кажущаяся неправдоподобной, в отличие от *софизма* — ложного положения, имеющего видимость истинного.



ГЛАВА ДЕСЯТАЯ

БОЛЬШОЕ И МАЛОЕ В ГЕОМЕТРИИ

Увеличение в тысячу раз

Узнать, что больше и что меньше, очень просто в арифметике, когда вопрос поставлен о числах. Но не всегда легко разрешить подобный вопрос в геометрии, где приходится сравнивать не числа, а поверхности и объёмы. Впрочем, в арифметике мы не всегда представляем себе отчётливо те числа, о которых говорим. Мало кто, например, имеет ясное представление о таких числовых исполинах, как миллион или биллион. Даже и более скромные числа рисуются в нашем воображении довольно смутно.

Что представляете вы себе, когда вам говорят, например, о микроскопе, увеличивающем в 1000 раз? Не такое уж большое число тысяча, а между тем тысячекратное увеличение воспринимается далеко не всеми так, как надо. Мы часто не умеем оценивать истинной малости тех предметов, которые видим в поле микроскопа при подобном увеличении. Бактерия тифа, увеличенная в 1000 раз, кажется нам величиной с мошки (рис. 119), рассматриваемую на расстоянии ясного зрения, т.е. 25 см. Но как мала эта бактерия на самом деле? Едва ли вы представляете себе, что если бы вы сами были бы увеличены во столько же раз, ваш рост достиг бы 1750 м! Голова оказалась бы выше облаков, а Эйфелева башня (300 м) приходилась бы вам гораздо ниже колен (рис. 120). Во сколько раз вы меньше этого воображаемого исполина, во столько раз бацилла мельче крошечной мошки...

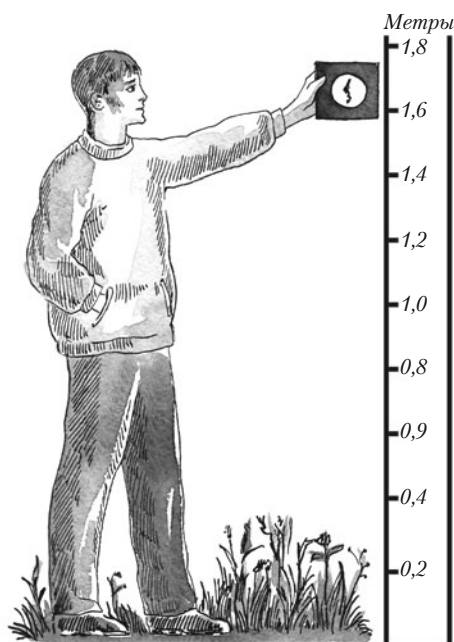


Рис. 119. Юноша разглядывает бактерию тифа, увеличенную в 1000 раз

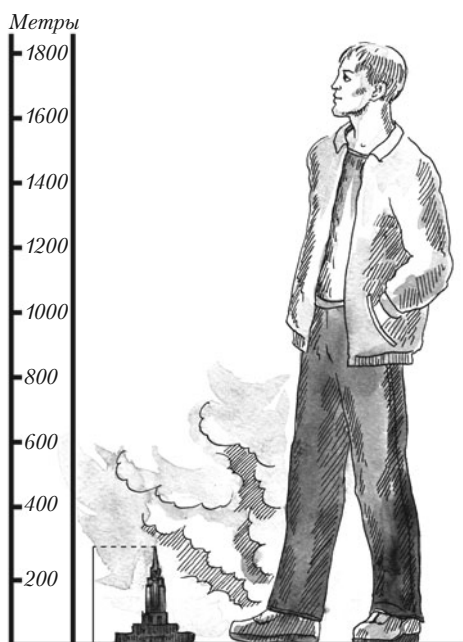


Рис. 120. Юноша, увеличенный в 1000 раз

Две банки

Ещё хуже представляем мы себе большое и малое в геометрии, где приходится сравнивать не числа, а поверхности и объёмы. Каждый, не задумываясь, ответит, что 5 кг варенья больше, чем 3 кг его, но не всегда сразу скажет, которая из двух банок, стоящих на столе, вместительнее.

Задача

Которая из двух банок (рис. 121) вместительнее — правая, широкая, или левая, втрое более высокая, но вдвое более узкая?

Решение

Для многих, вероятно, будет неожиданностью, что в нашем случае высокая банка менее вместительна, нежели широкая. Между тем легко удостовериться в этом расчётом. Площадь основания широкой банки в $2 \cdot 2$, т.е. в четыре, раза больше, чем узкой; высота же её всего в три раза меньше. Значит, объём широкой банки в $\frac{4}{3}$ раза больше, чем узкой. Если содержимое высокой перелить в широкую, оно заполнит лишь $\frac{3}{4}$ её (рис. 122).



Рис. 121. *Которая банка вместительнее?*



Рис. 122. *Результат переливания содержимого высокой банки в широкую*

Исполинская папироса

Задача

В витрине табачного треста выставлена огромная папироса, в 15 раз длиннее и в 15 раз толще обыкновенной. Если на набивку одной папиросы нормальных размеров нужно полграмма табаку, то сколько табаку понадобилось, чтобы набить исполинскую папиросу в витрине?

Решение

$$\frac{1}{2} \cdot 15 \cdot 15 \cdot 15 = 1687 \frac{1}{2} \text{ г,}$$

т.е. свыше $1\frac{1}{2}$ кг.

Яйцо страуса

Задача

На рис. 123 изображены в одинаковом масштабе яйцо курицы (справа) и яйцо страуса (слева). (Изображение посередине — яйцо вымершего эпиорниса, о котором речь будет в следующей задаче.) Всмотритесь в рисунок и скажите, во сколько раз содержимое страусового яйца больше куриного? При беглом взгляде кажется, что разница не может быть весьма велика. Тем поразительнее результат, получаемый правильным геометрическим расчётом.

Решение

Непосредственным измерением на чертеже убеждаемся, что яйцо страуса длиннее куриного в $2\frac{1}{2}$ раза. Следовательно, объём страусового яйца больше объёма куриного в

$$2\frac{1}{2} \cdot 2\frac{1}{2} \cdot 2\frac{1}{2} = \frac{125}{8},$$

т.е. примерно в 15 раз.

Одним таким яйцом могла бы позавтракать семья из пяти человек, считая, что каждый удовлетворяется яичницей из трёх яиц.

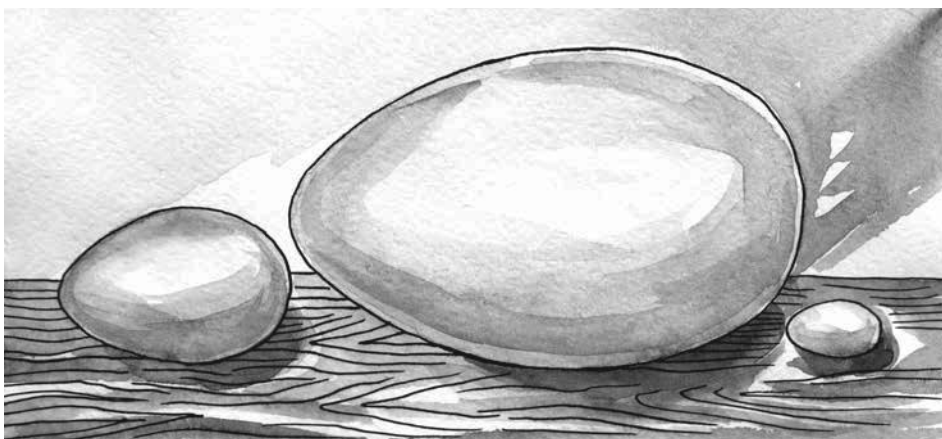


Рис. 123. Сравнительные размеры яиц страуса, эпиорниса и курицы

Яйцо эпиорниса

Задача

На Мадагаскаре водились некогда огромные страусы — эпиорнисы, клавшие яйца длиной в 28 см (средняя фигура — рис. 123). Между тем куриное яйцо имеет в длину 5 см. Скольким же куриным яйцам соответствует по объёму одно яйцо мадагаскарского страуса?

Решение

Перемножив $\frac{28}{5} \cdot \frac{28}{5} \cdot \frac{28}{5}$, получаем около 170. Одно яйцо эпиорниса равно чуть не двумстам куриным яйцам! Более полусотни

человек могли бы насытиться одним таким яйцом, вес которого, как нетрудно рассчитать, равнялся 8–9 кг.

Яйца русских птиц

Задача

Самый резкий контраст в размерах получится, однако, тогда, когда обратимся к нашей родной природе и сравним яйца лебедя-шипуна и желтоголового королька, миниатюрнейшей из всех русских птичек. На рис. 124 контуры этих яиц изображены в натуральную величину. Каково отношение их объёмов?

Решение

Измерив длину обоих яиц, получаем 125 мм и 13 мм. Измерив также их ширину, имеем 80 мм и 9 мм. Легко видеть, что эти числа почти пропорциональны; проверяя пропорцию

$$\frac{125}{80} = \frac{13}{9}$$

сравнением произведений крайних и средних её членов, имеем: 1125 и 1040 — числа, мало разнящиеся. Отсюда заключаем, что, приняв эти яйца за тела, геометрически подобные, мы не сделаем большой погрешности. Поэтому отношение их объёмов примерно равно

$$\frac{80^3}{9^3} = \frac{512\,000}{729} = 700.$$

Итак, яйцо лебедя раз в 700 раз объёмистее яйца королька!

Наглядные изображения

Читатель, на предыдущих примерах приобретший навык в сравнении объёмов геометрически подобных тел по их линейным размерам, не даст уже застигнуть себя врасплох вопросами

такого рода. Он легко сможет поэтому избежать ошибки некоторых мнимо-наглядных изображений, зачастую появляющихся в иллюстрированных журналах.

Задача

Вот одно из таких изображений. Если человек съедает в день, круглым и средним счётом, 400 г мяса, то за 60 лет жизни это составит около 9 т. А так как вес быка — около $\frac{1}{2}$ т, то человек к концу жизни может утверждать, что съел 18 быков.

На прилагаемом рис. 125, воспроизводимом из английского журнала, изображён этот исполинский бык рядом с человеком,

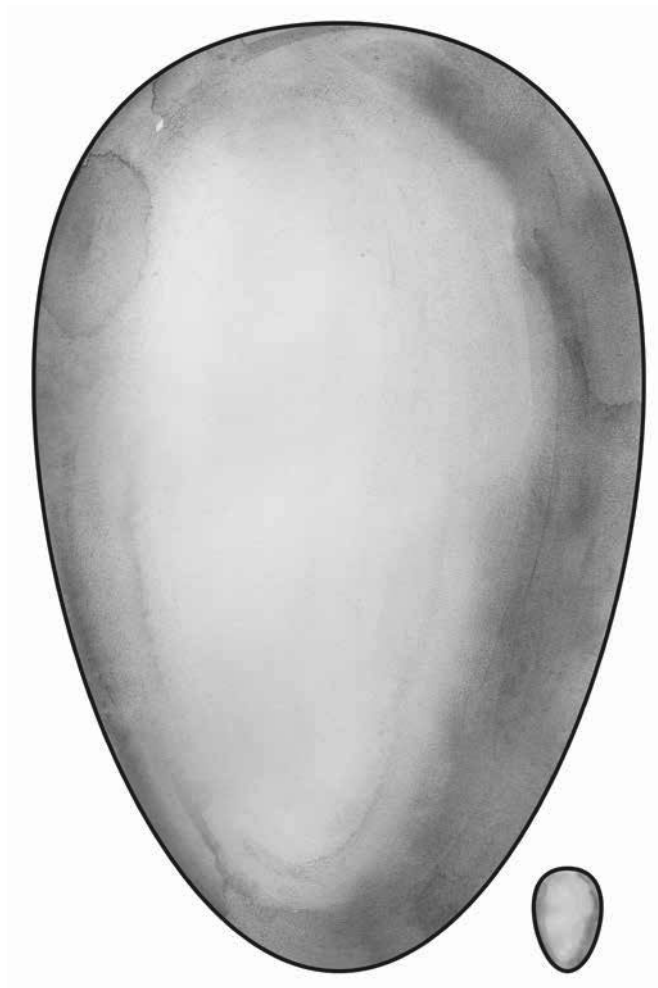


Рис. 124. Яйцо лебедя и королька (натуральная величина). Во сколько раз одно больше другого по объёму?

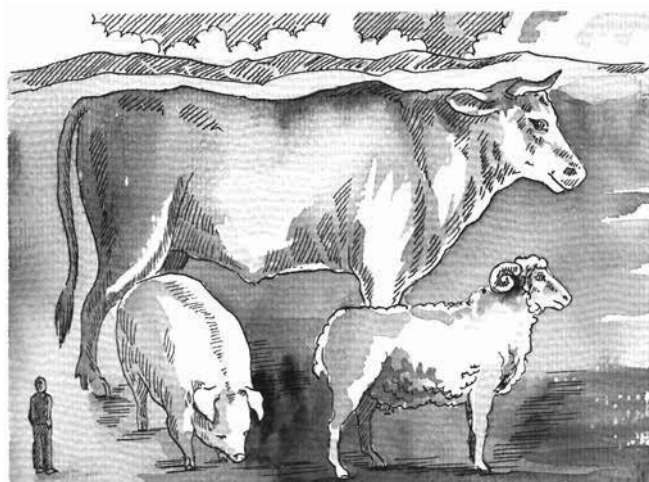


Рис. 125. Сколько мяса человек съедает в течение жизни (обнаружить ошибку в изображении)

поглощающим его в течение жизни. Верен ли рисунок? Каков был бы правильный масштаб?

Решение

Рисунок неверен. Бык, который изображён здесь, выше нормального в 18 раз и, конечно, во столько же раз длиннее и толще. Следовательно, по объёму он больше нормального быка в $18 \cdot 18 \cdot 18 = 5832$ раза. Такого быка человек мог бы съесть, разве только если бы жил не менее двух тысячелетий! Правильно изображённый бык должен быть выше, длиннее и толще обыкновенного всего в $\sqrt[3]{18}$, т.е. в 2,6 раза; это вышло бы на рисунке не так внушительно, чтобы могло служить поражающей иллюстрацией количества съедаемого человеком мяса.

Задача

На рис. 126 воспроизведена другая иллюстрация из той же области. Человек поглощает в день разных жидкостей $1\frac{1}{2}$ л (7–8 стаканов). За 70 лет жизни это составляет около 40000 л. Так как в ведре 12 л, то художнику нужно было изобразить какой-либо сосуд, который больше ведра в 3300 раз. Он и полагал, что сделал это на рис. 126. Прав ли он?

Решение

На рисунке размеры цистерны сильно преувеличены. Сосуд должен быть выше и шире обыкновенного ведра только

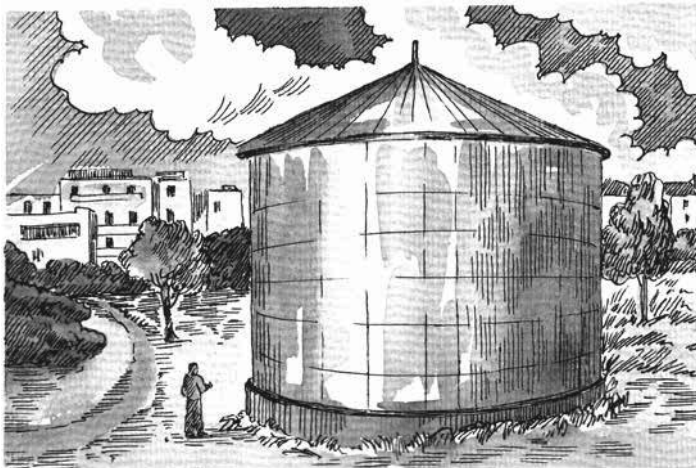


Рис. 126. Сколько воды выпивает человек в течение жизни (в чём ошибка художника?)

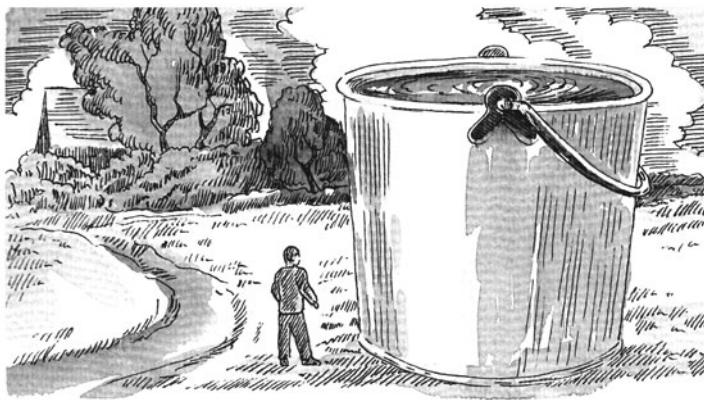


Рис. 127. То же (см. рис. 126) — правильное изображение

в $\sqrt[3]{3300} = 14,9$, круглым счётом в 15 раз. Если высота и ширина нормального ведра 30 см, то для вмещения всей воды, выпиваемой нами за целую жизнь, достаточно было бы ведра высотой 4,5 м и такой же ширины. На рис. 127 изображена эта посуда в правильном масштабе.

Наш нормальный вес

Если принять, что все человеческие тела геометрически подобны (это верно лишь в среднем), то можно вычислять вес людей по их росту (средний рост человека равен 1,75 м, а средний

вес — 65 кг). Получающиеся при таких расчётах результаты могут многим показаться неожиданными.

Предположим, что вы ниже среднего роста на 10 см. Какой вес тела является для вас нормальным?

В обиходе часто решают эту задачу так: скидывают с нормального веса такой процент, какой 10 см составляют от нормального роста. В данном случае, например, уменьшают 65 кг на $\frac{10}{175}$ и полученный вес — 62 кг — считают нормальным.

Это неправильный расчёт.

Правильный вес получится, если вычислить его из пропорции

$$65 : x = 1,753 : 1,653,$$

откуда

$$x = \text{ОКОЛО } 54 \text{ кг.}$$

Разница с обычно получаемым результатом весьма значительна — 8 кг.

Наоборот, для человека, рост которого на 10 см выше среднего, нормальный вес вычисляется из пропорции

$$65 : x = 1,753 : 1,853.$$

Из неё $x = 78$ кг, т.е. на 13 кг больше среднего. Эта прибавка гораздо значительнее, чем обычно думают.

Великаны и карлики

Каково же в таком случае должно быть отношение между весом великана и карлика? Многим, я уверен, покажется неправдоподобным, что великан может быть в 50 раз тяжелее карлика. Между тем к этому приводит правильный геометрический расчёт.

Одним из высочайших великанов, существование которого хорошо удостоверено, был австриец Винкельмейер в 278 см высоты; другой, эльзасец Крау, был ростом 275 см; третий, англичанин О'Брик, о котором рассказывали, что он закуривал трубку от уличных фонарей, достигал 268 см. Все они были на целый метр

выше человека нормального роста. Напротив, карлики достигают во взрослом состоянии около 75 см — на метр ниже нормального роста. Каково же отношение объёма и веса великана к объёму и весу карлика? Оно равно

$$275^3 : 75^3, \quad \text{или} \quad 11^3 : 3^3 = 49.$$

Значит, великан равен по весу почти полусотне карликов!

А если верить сообщению об арабской карлице Агибе ростом в 38 см, то это отношение станет ещё разительнее: высочайший великан в семь раз выше этой карлицы и, следовательно, тяжелее в 343 раза. Более достоверно сообщение Бюффона, измерившего карлика в 43 см ростом: этот карлик в 260 раз легче великана.

Геометрия Гулливера

Автор «Путешествия Гулливера» с большой осмотрительностью избежал опасности запутаться в геометрических отношениях. Читатель помнит, без сомнения, что в стране лилипутов нашему футу соответствовал дюйм, а в стране великанов, наоборот, дюйму — фут. Другими словами, у лилипутов все люди, все вещи, все произведения природы в 12 раз меньше нормальных, у великанов — во столько же раз больше. Эти на первый взгляд простые отношения, однако, сильно усложнялись, когда приходилось решать вопросы вроде следующих:

1) во сколько раз Гулливер съедал за обедом больше, чем лилипут?

2) во сколько раз Гулливеру требовалось больше сукна на костюм, нежели лилипутам?

3) сколько весило яблоко страны великанов?

Автор «Путешествия» справлялся с этими задачами в большинстве случаев вполне успешно. Он правильно рассчитал, что раз лилипут ростом меньше Гулливера в 12 раз, то объём его тела меньше в $12 \cdot 12 \cdot 12$, т.е. в 1728 раз; следовательно, для насыщения тела Гулливера нужно в 1728 раз больше пищи, чем для лилипута. И мы читаем в «Путешествии» такое описание обеда Гулливера:

Триста поваров готовили для меня кушанье. Вокруг моего дома были поставлены шалаши, где происходиластряпня и жили повара со своими семьями. Когда наступал час обеда, я брал в руки 20 человек прислуги и ставил их на стол, а человек 100 прислуживало с пола: одни подавали кушанье, остальные приносили бочонки с вином и другими напитками на шестах, перекинутых с плеча на плечо. Стоявшие наверху, по мере надобности, поднимали всё это на стол при помощи верёвок и блоков...

Правильно рассчитал Свифт и количество материала на костюм Гулливеру. Поверхность его тела больше, чем у лилипутов, в $12 \cdot 12 = 144$ раза; во столько же раз нужно ему больше материала, портных и т.п. Всё это учтено Свифтом, рассказывающим от имени Гулливера, что к нему «было прикомандировано 300 портных-лилипутов (рис. 128) с наказом сшить полную пару платья по местным образцам». (Спешность работы потребовала двойного количества портных.)

Надобность производить подобные расчёты возникала у Свифта чуть не на каждой странице. И, вообще говоря, он выполнял их правильно. Если у Пушкина в «Евгении Онегине», как утверждает поэт, «время расчислено по календарю», то в «Путешествиях» Свифта все размеры согласованы с правилами геометрии. Лишь изредка надлежащий масштаб не выдерживался, особенно при описании страны великанов. Здесь иногда встречаются ошибки.

«Один раз, — рассказывает Гулливер, — с нами отправился в сад придворный карлик. Улучив удобный момент, когда я, прохаживаясь, очутился под одним из деревьев, он ухватился за ветку и встряхнул её над моей головой. Град яблок, величиной каждое с хороший бочонок, шумно посыпался на землю; одно ударило меня в спину и сбило с ног...»

Гулливер благополучно поднялся на ноги после этого удара. Однако легко рассчитать, что удар от падения подобного яблока должен был быть поистине сокрушающий: ведь яблоко в 1728 раз тяжелее нашего, т.е. весом в 80 кг, обрушилось с 12-кратной высоты. Энергия удара должна была превосходить в 20 000 раз энергию падения обыкновенного яблока и могла бы сравниться разве лишь с энергией артиллерийского снаряда...

Наибольшую ошибку допустил Свифт в расчёте мускульной силы великанов. Дело в том, что мощь крупных животных



Рис. 128. Портные-лилипуты снимают мерку с Гулливера

растёт непропорционально увеличению их размеров: мускульная сила, по мере того как животное разрастается до двойной длины и восьмерного веса, увеличивается лишь в четыре раза. Если применить приведённые там соображения к великанам Свифта, то окажется, что, хотя мускульная сила их была в 144 раза больше силы Гулливера, вес их тела был больше в 1728 раз. И если Гулливер в силах был поднять не только вес своего собственного тела, но и ещё примерно такой же груз, то великаны не в состоянии были бы преодолеть даже груза своего огромного тела. Они должны были бы неподвижно лежать на одном месте, бессильные сделать сколько-нибудь значительное движение. Их могущество, так картинно описанное у Свифта, могло явиться лишь в результате неправильного подсчёта*.

* См. подробно об этом в книге Я.И. Перельмана «Занимательная механика». — *Примеч. ред.*

Почему пыль и облака плавают в воздухе

«Потому что они легче воздуха» — вот обычный ответ, который представляется многим до того бесспорным, что не оставляет никаких поводов к сомнению. Но такое объяснение при его подкупающей простоте совершенно ошибочно. Пылинки не только не легче воздуха, но они тяжелее его в сотни, даже тысячи раз.

Что такое «пылинка»? Мельчайшие частицы различных тяжёлых тел: осколки камня или стекла, крупинки угля, дерева, металлов, волокна тканей и т.п. Разве все эти материалы легче воздуха? Простая справка в таблице удельных весов убедит вас, что каждый из них либо в несколько раз тяжелее воды, либо легче её всего в 2–3 раза. А вода тяжелее воздуха раз в 800; следовательно, пылинки тяжелее его в несколько сот, если не тысяч раз. Теперь очевидна вся несообразность ходячего взгляда на причину плавания пылинок в воздухе.

Какова же истинная причина? Прежде всего надо заметить, что обычно мы неправильно представляем себе самоё явление, рассматривая его как *плавание*. Плавают — в воздухе (или жидкости) — только такие тела, вес которых не превышает веса равного объёма воздуха (или жидкости). Пылинки же превышают этот вес во много раз; поэтому *плавать* в воздухе они не могут. Они и не плавают, а *парят*, т.е. медленно спускаются, задерживаемые в своём падении сопротивлением воздуха. Падающая пылинка должна проложить себе путь между частицами воздуха, расталкивая их или увлекая с собой. На то и другое расходуется энергия падения. Расход тем значительнее, чем больше поверхность тела (точнее — площадь поперечного сечения) по сравнению с весом. При падении крупных, массивных тел мы не замечаем замедляющего действия сопротивления воздуха, так как их вес значительно преобладает над противодействующей силой.

Но посмотрим, что происходит при уменьшении тела. Геометрия поможет нам разобраться в этом. Нетрудно сообразить, что с уменьшением объёма тела вес уменьшается гораздо больше, чем площадь поперечного сечения: уменьшение веса пропорционально *третьей* степени линейного сокращения, а ослабление сопротивления пропорционально поверхности, т.е. второй степени линейного уменьшения.

Какое это имеет значение в нашем случае, ясно из следующего примера. Возьмём крокетный шар диаметром в 10 см и крошеч-

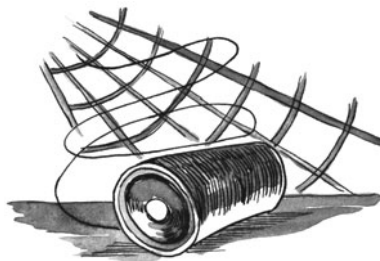
ный шарик из того же материала диаметром в 1 см: объём его меньше, чем у крупного шара, в $10 \cdot 10 \cdot 10 = 1000$ раз, а поверхность — только в $10 \cdot 10 = 100$ раз. Теперь понятно, почему для весьма мелких крупинок сопротивление воздуха так значительно по сравнению с их весом и почему скорость их падения уменьшается до едва заметной величины. Водяная капелька радиусом 0,001 мм падает в воздухе равномерно со скоростью 0,1 мм в секунду; достаточно ничтожного, неуловимого для нас течения воздуха, чтобы помешать такому медленному падению.

Вот почему в комнате, где много ходят, пыли осаждается меньше, чем в нежилых помещениях, и днём меньше, чем ночью, хотя, казалось бы, должно происходить обратное: осаждению мешают возникающие в воздухе вихревые течения, которых обычно почти не бывает в спокойном воздухе мало посещаемых помещений.

Если каменный кубик в 1 см высотой раздробить на кубические пылинки высотой в 0,0001 мм, то общая поверхность той же массы камня увеличится в 10 000 раз и во столько же раз возрастёт сопротивление воздуха её движению. Пылинки нередко достигают именно таких размеров, и понятно, что сильно возросшее сопротивление воздуха совершенно меняет картину падения.

По той же причине «плавают» в воздухе облака. Давно отвергнут устарелый взгляд, будто облака состоят из водяных пузырьков, наполненных водяным паром. Облака — скопление огромного множества чрезвычайно мелких, но сплошных водяных пылинок. Пылинки эти, хотя тяжелее воздуха раз в 800, всё же почти не падают; они опускаются с едва заметною скоростью. Сильно замедленное падение объясняется, как и для пылинок, огромной их поверхностью по сравнению с весом.

Главная причина, обуславливающая все эти явления, — присутствие воздуха: в пустоте и пылинки, и облака (если бы могли существовать) падали бы столь же стремительно, как и тяжёлые камни. Медленное падение человека с парашютом (около 5 м/сек) принадлежит к явлениям подобного же порядка.





ГЛАВА ОДИННАДЦАТАЯ

ГЕОМЕТРИЧЕСКАЯ ЭКОНОМИЯ

Как Пахом покупал землю

(Задача Льва Толстого)

Эту главу, необычное название которой станет понятно читателю из дальнейшего, начнём отрывком из общеизвестного рассказа Л. Н. Толстого «Много ли человеку земли нужно».

— А цена какая будет? — говорит Пахом.

— Цена у нас одна: 1000 руб. за день.

Не понял Пахом.

— Какая же это мера — день? Сколько в ней десятин будет?

— Мы этого, — говорит, — не умеем считать. А мы за день продаём; сколько обойдётся в день, то и твоё, а цена 1000 руб.

Удивился Пахом.

— Да ведь это, — говорит, — в день обойти земли много будет.

Засмеялся старшина.

— Вся твоя, — говорит. — Только один уговор: если назад не придёшь в день к тому месту, с какого возьмёшься, пропали твои деньги.

— А как же, — говорит Пахом, — отметить, где я пройду?

— А мы станем на место, где ты облюбуйешь; мы стоять будем, а ты иди, делай круг, а с собой скрёбку возьми и, где надобно, замечай, на углах ямки рой, дёрнички клади; потом с ямки на ямку плугом пройдем. Какой хочешь круг забирай, только до захода солнца приходи к тому месту, с какого взялся. Что обойдёшь, всё твоё.

Разошлись башкирцы. Обещались завтра на зорьке собраться, до солнца на место выехать.

* * *

Приехали в степь, заря занимается. Подошёл старшина к Пахому, показал рукой.

— Вот, — говорит, — всё наше, что глазом окинешь. Выбирай любую.

Снял старшина шапку лисью, поставил на землю.

— Вот, — говорит, — метка будет. Отсюда поди, сюда приходи. Что обойдёшь, всё твоё будет.

Только брызнуло из-за края солнце, вскинул Пахом скрёбку на плечо и пошёл в степь.

Отошёл с версту, остановился, вырыл ямку. Пошёл дальше. Отошёл ещё, вырыл ещё другую ямку.

Вёрст 5 прошёл. Взглянул на солнышко, — уже время об завтраке. «Одна упряжка прошла, — думает Пахом. — А их четыре во дню, рано ещё заворачивать. Дай пройду ещё вёрст пяток, тогда влево загибать начну». Пошел ещё напрямик. «Ну, — думает, в эту сторону довольно забрал; надо загибать». Остановился, вырыл ямку побольше и загнул круто влево.

Прошёл ещё и по этой стороне много; загнул второй угол. Оглянулся Пахом на шихан (бугорок): от тепла затуманился, а сквозь мару чуть виднеются люди на шихане. «Ну, — думает, — длинны стороны взял, надо эту покороче взять». Пошёл третью сторону. Посмотрел на солнце, — уж оно к полднику подходит, а по третьей стороне всего версты две прошёл. И до места всё те же верст 15. «Нет, — думает, — хоть кривая дача будет, а надо напрямиком поспевать».

Вырыл Пахом поскорее ямку и повернул напрямик к шихану.

Идёт Пахом прямо на шихан, и тяжело уж ему стало. Отдохнуть хочется, а нельзя, — не успеешь дойти до заката. А солнце уж недалеко от края.



Рис. 129. «Бежит Пахом из последних сил, а солнце уж к краю подходит»

Идёт так Пахом; трудно ему, а всё прибавляет да прибавляет шагу. Шёл, шёл — всё ещё далеко; побежал рысью... Бежит Пахом, рубаха и портки от пота к телу липнут, во рту пересохло. В груди как меха кузнечные раздуваются, а сердце молотком бьёт.

Бежит Пахом из последних сил, а солнце уж к краю подходит. Вот-вот закатываться станет (рис. 129).

Солнце близко, да и место уж вовсе недалеко. Видит шапку лисью на земле и старшину, как он на земле сидит.

Взглянул Пахом на солнце, а оно до земли дошло, уже краешком заходить стало. Наддал из последних сил Пахом, надулся, взбежал на шихан. Видит — шапка. Подкосились ноги, и упал он наперёд руками, до шапки достал.

— Ай, молодец! — закричал старшина. — Много земли завладел.

Подбежал работник, хотел поднять его, а у него изо рта кровь течёт, и он мёртвый лежит...

Задача Льва Толстого

Отвлечёмся от мрачной развязки этой истории и остановимся на её геометрической стороне. Можно ли установить по данным, рассеянными в этом рассказе, сколько примерно десятин земли обошёл Пахом? Задача — на первый взгляд как будто невыполнимая — решается, однако, довольно просто.

Решение

Внимательно перечитывая рассказ и извлекая из него все геометрические указания, нетрудно убедиться, что полученных данных вполне достаточно для исчерпывающего ответа на поставленный вопрос. Можно даже начертить план обойдённого Пахомом земельного участка.

Прежде всего из рассказа ясно, что Пахом бежал по сторонам четырёхугольника. О первой стороне его читаем:

Вёрст пять прошёл... Пройду ещё вёрст пяток; тогда влево загибать...

Значит, первая сторона четырёхугольника имела в длину около 10 вёрст.

О второй стороне, составляющей прямой угол с первой, численных указаний в рассказе не сообщается.

Длина третьей стороны — очевидно, перпендикулярной ко второй — указана в рассказе прямо:

По третьей стороне всего версты две прошёл.

Непосредственно дана и длина четвёртой стороны:

До места всё те же вёрст 15*.

* Здесь непонятно, однако, как мог Пахом с такого расстояния различать людей на шихане.

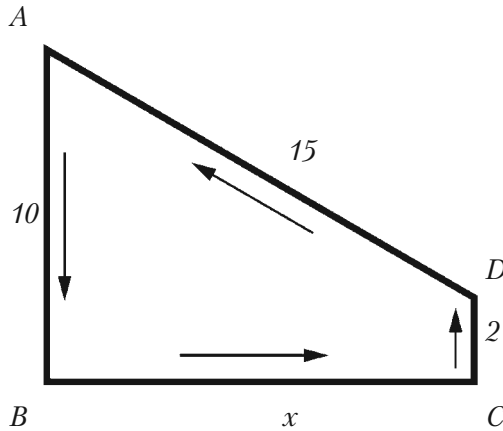


Рис. 130. Маршрут Пахома

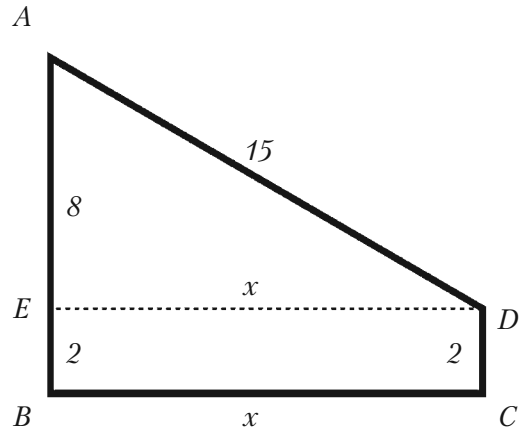


Рис. 131. Уточнение маршрута

По этим данным мы и можем начертить план обойдённого Пахомом участка (рис. 130). В полученном четырёхугольнике $ABCD$ сторона $AB = 10$ вёрстам; $CD = 2$ вёрстам; $AD = 15$ вёрстам; углы B и C — прямые. Длину x неизвестной стороны BC нетрудно вычислить, если провести из D перпендикуляр DE к AB (рис. 131). Тогда в прямоугольном треугольнике AED нам известны катет $AE = 8$ вёрстам и гипотенуза $AD = 15$ вёрстам. Неизвестный катет $ED = \sqrt{15^2 - 8^2} = 12,7$ вёрстам.

Итак, вторая сторона имела в длину около 13 вёрст. Как видим, Пахом (или Л. Н. Толстой) ошибся, считая вторую сторону короче первой.

Теперь легко вычислить и площадь трапеции $ABCD$, состоящей из прямоугольника $EBCD$ и прямоугольного треугольника AED . Она равна

$$2 \cdot 13 + \frac{1}{2} \cdot 8 \cdot 13 = 78 \text{ кв. вёрстам.}$$

Вычисление по формуле трапеции дало бы, конечно, тот же результат:

$$\frac{AB + CD}{2} \cdot BC = \frac{10 + 2}{2} \cdot 13 = 78 \text{ кв. вёрст.}$$

Мы узнали, что Пахом обошёл обширный участок площадью в 78 кв. вёрст, или около 8000 десятин. Десятина обошлась ему в $12\frac{1}{2}$ копеек.

Трапеция или прямоугольник

Задача

В роковой для своей жизни день Пахом прошёл $10 + 13 + 2 + 15 = 40$ вёрст, идя по сторонам трапеции. Его первоначальным намерением было идти по сторонам прямоугольника; трапеция же получилась случайно, в результате плохого расчёта. Интересно определить: выгадал ли он или прогадал от того, что участок его оказался не прямоугольником, а трапецией? В каком случае должен он был получить бо́льшую площадь земли?

Решение

Прямоугольников с обводом в 40 вёрст может быть очень много, и каждый имеет другую площадь. Вот ряд примеров:

$$\begin{aligned}14 \cdot 6 &= 84 \text{ кв. вёрст} \\13 \cdot 7 &= 91 \text{ кв. верста} \\12 \cdot 8 &= 96 \text{ кв. вёрст} \\11 \cdot 9 &= 99 \text{ кв. вёрст}\end{aligned}$$

Мы видим, что у всех этих фигур при одном и том же периметре в 40 вёрст площадь больше, чем у нашей трапеции. Однако возможны и такие прямоугольники с периметром в 40 вёрст, площадь которых меньше, чем у трапеции:

$$\begin{aligned}18 \cdot 2 &= 36 \text{ кв. вёрст} \\19 \cdot 1 &= 19 \text{ кв. вёрст} \\19 \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} &= 9 \frac{3}{4} \text{ кв. вёрст}\end{aligned}$$

Следовательно, на вопрос задачи нельзя дать определённого ответа. Есть прямоугольники с большею площадью, чем трапеция, но есть и с меньшею, при одном и том же обводе. Зато можно дать вполне определённый ответ на вопрос: какая из всех прямоугольных фигур с заданным периметром заключает самую большую площадь? Сравнивая наши прямоугольники, мы замечаем, что чем меньше разница в длине сторон, тем площадь прямоугольника больше. Естественнo заключить, что когда этой разницы не будет вовсе, т.е. когда прямоугольник превратится

в квадрат, площадь фигуры достигнет наибольшей величины. Она будет равна тогда $10 \cdot 10 = 100$ кв. вёрст. Легко видеть, что этот квадрат действительно превосходит по площади любой прямоугольник одинакового с ним периметра. Пахому следовало идти по сторонам квадрата, чтобы получить участок наибольшей площади, — на 22 кв. версты больше, чем он успел охватить.

Замечательное свойство квадрата

Замечательное свойство квадрата — заключать в своих границах наибольшую площадь по сравнению со всеми другими прямоугольниками того же периметра — многим неизвестно. Приведём поэтому строгое доказательство этого положения.

Обозначим периметр прямоугольной фигуры через P . Если взять квадрат с таким периметром, то каждая сторона его должна равняться $P/4$. Докажем, что, укорачивая одну его сторону на какую-нибудь величину b при таком же удлинении смежной стороны, мы получим прямоугольник одинакового с ним периметра, но меньшей площади. Другими словами, докажем, что площадь $(P/4)^2$ квадрата больше площади $(P/4 - b)(P/4 + b)$ прямоугольника:

$$\left(\frac{P}{4}\right)^2 > \left(\frac{P}{4} - b\right)\left(\frac{P}{4} + b\right).$$

Так как правая сторона этого неравенства равна $(P/4)^2 - b^2$, то всё выражение принимает вид

$$0 > -b^2, \quad \text{или} \quad b^2 > 0.$$

Но последнее неравенство очевидно: квадрат всякого количества, положительного или отрицательного, больше 0. Следовательно, справедливо и первоначальное неравенство, которое привело нас к этому.

Итак, квадрат имеет наибольшую площадь из всех прямоугольников с таким же периметром.

Отсюда следует, между прочим, и то, что из всех прямоугольных фигур с одинаковыми площадями квадрат имеет *наименьший периметр*. В этом можно убедиться следующим рас-

суждением. Допустим, что это неверно и что существует такой прямоугольник A , который при равной с квадратом B площади имеет периметр меньший, чем у него. Тогда, начертив квадрат C того же периметра, как у прямоугольника A , мы получим квадрат, имеющий бóльшую площадь, чем у A , и, следовательно, бóльшую, чем у квадрата B . Что же у нас вышло? Что квадрат C имеет периметр меньший, чем квадрат B , а площадь бóльшую, чем он. Это, очевидно, невозможно: раз сторона квадрата C меньше, чем сторона квадрата B , то и площадь должна быть меньше. Значит, нельзя было допустить существование прямоугольника A , который при одинаковой площади имеет периметр меньший, чем у квадрата. Другими словами, из всех прямоугольников с одинаковой площадью наименьший периметр имеет квадрат.

Знание этих свойств квадрата помогло бы Пахому правильно рассчитать свои силы и получить прямоугольный участок наибольшей площади. Зная, что он может пройти в день без напряжения, скажем, 36 вёрст, он пошёл бы по границе квадрата со стороною 9 вёрст и к вечеру был бы обладателем участка в 81 кв. версту, — на 3 кв. версты больше, чем он получил со смертельным напряжением сил. И, наоборот, если бы он наперёд ограничился какою-нибудь определённою площадью прямоугольного участка, например в 36 кв. вёрст, то мог бы достичь результата с наименьшей затратой сил, идя по границе квадрата, сторона которого — 6 вёрст.

Участки другой формы

Но, может быть, Пахому ещё выгоднее было бы выкроить себе участок вовсе не прямоугольной формы, а какой-нибудь другой — четырёхугольной, треугольной, пятиугольной и т. д.?

Этот вопрос может быть рассмотрен строго математически; однако из опасения утомить нашего добровольного читателя мы не станем входить здесь в это рассмотрение и познакомим его только с результатами.

Можно доказать, во-первых, что из всех четырёхугольников с одинаковым периметром наибольшую площадь имеет квадрат. Поэтому, желая иметь четырёхугольный участок, Пахом

никакими ухищрениями не мог бы овладеть более чем 100 кв. вёрстами (считая, что максимальный дневной пробег его — 40 вёрст).

Во-вторых, можно доказать, что квадрат имеет бóльшую площадь, чем всякий треугольник равного периметра. Равносторонний треугольник такого же периметра имеет сторону $^{40}/_3 = 13\frac{1}{3}$ вёрстам, а площадь (по формуле $S = a^2\sqrt{3}/4$, где S — площадь, а a — сторона)

$$\frac{1}{4}\left(\frac{40}{3}\right)^2\sqrt{3} = 77 \text{ кв. вёрст,}$$

т.е. меньше даже, чем у той трапеции, которую Пахом обошёл. Далее (стр. 198) будет доказано, что из всех треугольников с равными периметрами равносторонний обладает наибольшей площадью. Значит, если даже этот наибольший треугольник имеет площадь, меньшую площади квадрата, то все прочие треугольники того же периметра по площади меньше, чем квадрат.

Но если будем сравнивать площадь квадрата с площадью пятиугольника, шестиугольника и т.д. равного периметра, то здесь первенство его прекращается: *правильный* пятиугольник обладает большею площадью, правильный шестиугольник — ещё большею и т.д. Легко убедиться в этом на примере правильного шестиугольника. При периметре в 40 вёрст его сторона $^{40}/_6$, площадь (по формуле $S = 3a^2\sqrt{3}/2$) равна

$$\frac{3}{2}\left(\frac{40}{6}\right)^2\sqrt{3} = 115,5 \text{ кв. вёрст.}$$

Избери Пахом для своего участка форму правильного шестиугольника, он при том же напряжении сил овладел бы площадью на 115,5 — 78, т.е. на 37,5 кв. вёрст больше, чем в действительности, и на 15,5 кв. вёрст больше, чем дал бы ему квадратный участок (но для этого, конечно, пришлось бы ему пуститься в путь с угломерным инструментом).

Задача

Из шести спичек сложить фигуру с наибольшей площадью.

Решение

Из шести спичек можно составить довольно разнообразные фигуры: равносторонний треугольник, прямоугольник, множество параллелограммов, целый ряд неправильных пятиугольников, ряд неправильных шестиугольников и, наконец, правильный шестиугольник. Геометр, не сравнивая между собою площадей этих фигур, заранее знает, какая фигура имеет наибольшую площадь: правильный шестиугольник.

Фигуры с наибольшею площадью

Можно доказать строго геометрически, что чем больше сторон у правильного многоугольного участка, тем бóльшую площадь заключает он при одной и той же длине границ. А самую большую площадь при данном периметре охватывает окружность. Если бы Пахом бежал по кругу, то, пройдя те же 40 вёрст, он получил бы площадь в

$$\pi \left(\frac{40}{2\pi} \right)^2 = 127,2 \text{ кв. вёрст.}$$

Большую площадь при данном периметре не может обладать никакая другая фигура, безразлично — прямолинейная или криволинейная.

Мы позволим себе несколько остановиться на этом удивительном свойстве круга заключать в своих границах бóльшую площадь, чем всякая другая фигура любой формы, имеющая тот же периметр. Может быть, некоторые читатели любопытствуют узнать, каким способом доказывают подобные положения. Приводим далее доказательство — правда, не вполне строгое — этого свойства круга, доказательство, предложенное математиком Яковом Штейнером. Оно довольно длинно, но те, кому оно покажется утомительным, могут пропустить его без ущерба для понимания дальнейшего.

Надо доказать, что фигура, имеющая при данном периметре наибольшую площадь, есть круг. Прежде всего установим, что искомая фигура должна быть выпуклой. Это значит, что всякая её хорда должна полностью располагаться внутри фигуры. Пусть

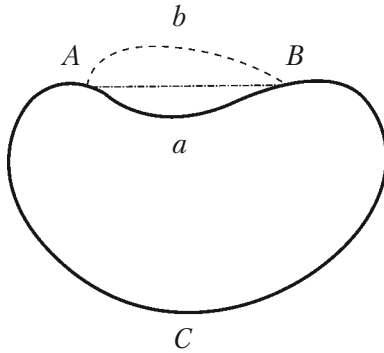


Рис. 132. Устанавливаем, что фигура с наибольшей площадью должна быть выпуклой

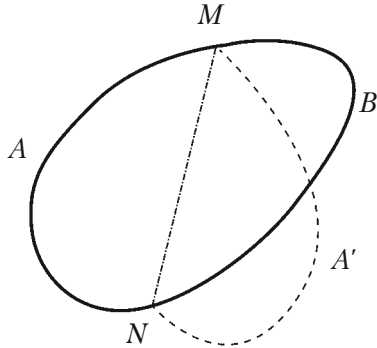


Рис. 133. Если хорда делит пополам периметр выпуклой фигуры с наибольшей площадью, то она пересекает пополам и площадь

у нас имеется фигура $AaBC$ (рис. 132), имеющая внешнюю хорду AB . Заменим дугу a дугой b , симметричной с нею. От такой замены периметр фигуры ABC не изменится, площадь же явно увеличится. Значит, фигуры вроде $AaBC$ не могут быть теми, которые при одинаковом периметре заключают наибольшую площадь.

Итак, искомая фигура есть фигура выпуклая. Далее мы можем наперёд установить ещё и другое свойство этой фигуры: всякая хорда, которая делит пополам её периметр, пересекает пополам и её площадь. Пусть фигура $AMBN$ (рис. 133) есть искомая, и пусть хорда MN делит её периметр пополам. Докажем, что площадь AMN равна площади MBN . В самом деле, если бы какая-либо из этих частей была по площади больше другой, например $AMN > MBN$, то, перегнув фигуру AMN по MN , мы получили бы фигуру $AMA'N$, площадь которой больше, чем у первоначальной фигуры $AMBN$, периметр же одинаков с нею. Значит, фигура $AMBN$, в кото-

рой хорда, пересекающая периметр пополам, делит площадь на неравные части, не может быть искомая (т.е. не может иметь наибольшую площадь при данном периметре).

Прежде чем идти далее, докажем ещё следующую вспомогательную теорему: из всех треугольников с двумя данными сторонами наибольшую площадь имеет тот, у которого стороны эти заключают прямой угол. Чтобы доказать это, вспомним тригонометрическое выражение площади S треугольника со сторонами a и b и углом C между ними:

$$S = \frac{1}{2} ab \sin C.$$

Выражение это будет, очевидно, наибольшим (при данных сторонах) тогда, когда $\sin C$ примет наибольшее значение, т.е. будет равен единице. Но угол, синус которого равен 1, есть прямой, что и требовалось доказать.

Теперь можем приступить к основной задаче — к доказательству того, что из всех фигур с периметром p наибольшую площадь ограничивает окружность. Чтобы убедиться в этом, попробуем допустить существование некруговой выпуклой фигуры $MANB$ (рис. 134), которая обладает этим свойством. Проведём в ней хорду MN , делящую пополам её периметр; она же, мы знаем, разделит пополам и площадь фигуры. Перегнём половину MAN по линии MN так, чтобы она расположилась симметрично ($MA'N$). Заметим, что фигура $MANK'$ обладает тем же периметром и тою же площадью, что и первоначальная фигура $MANM$. Так как дуга MAN не есть полуокружность (иначе нечего было бы и доказывать), то на ней должны находиться такие точки, из которых отрезок MN виден не под прямым углом. Пусть K — такая точка, а K' — ей симметричная, т.е. углы K и K' — не прямые. Раздвигая (или сдвигая) стороны MK, KN, MK', NK' , мы можем сделать заключённый между ними угол прямым и получим тогда *равные* прямоугольные треугольники. Эти треугольники сложим гипотенузами, как на рис. 135, и присоединим к ним в соответствующих местах заштрихованные сегменты. Получим фигуру $M'KN'K'$, обладающую тем же периметром, что и первоначальная, но, очевидно, большею площадью (потому что прямоугольные треугольники $M'KN'$ и $M'K'N'$ имеют бо́льшую площадь, чем непрямоугольные MKN и $MK'N$). Значит, никакая некруговая фигура не может обладать при данном периметре наибольшую

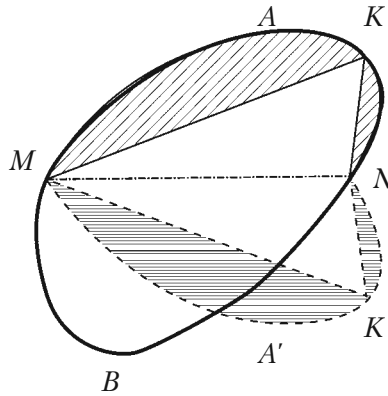


Рис. 134. Допускаем существование некруговой выпуклой фигуры с наибольшей площадью

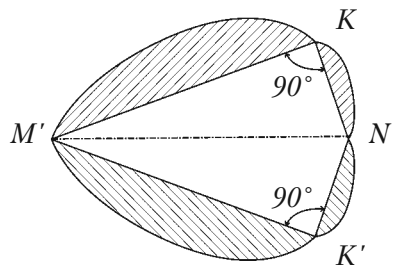


Рис. 135. Устанавливаем, что из всех фигур с данным периметром наибольшую площадь ограничивает окружность

площадью. И только в случае круга мы указанным способом не могли бы построить фигуру, имеющую при том же периметре ещё бóльшую площадь.

Вот каким рассуждением можно доказать, что круг есть фигура, обладающая при данном периметре наибольшею площадью.

Легко доказать справедливость и такого положения: из всех фигур равной площади круг имеет наименьший периметр. Для этого нужно применить к кругу те рассуждения, которые мы раньше приложили к квадрату (см. стр. 194).

Гвозди

Задача

Какой гвоздь труднее вытащить — круглый, квадратный или треугольный, — если они забиты одинаково глубоко и имеют одинаковую площадь поперечного сечения?

Решение

Будем исходить из того, что крепче держится тот гвоздь, который соприкасается с окружающим материалом по большей поверхности. У какого же из наших гвоздей бóльшая боковая поверхность? Мы уже знаем, что при равных площадях периметр квадрата меньше периметра треугольника, а окружность меньше периметра квадрата. Если сторону квадрата принять за единицу, то вычисление даёт для этих трёх величин значения: 4,53; 4; 3,55. Следовательно, крепче других должен держаться треугольный гвоздь.

Таких гвоздей, однако, не изготавливают, по крайней мере, в продаже они не встречаются. Причина кроется, вероятно, в том, что подобные гвозди легче изгибаются и ломаются.

Тело наибольшего объёма

Свойством, сходным со свойством круга, обладает и шаровая поверхность: она имеет наибольший объём при данной величине

поверхности. И наоборот, из всех тел одинакового объёма наименьшую поверхность имеет шар. Эти свойства не лишены значения в практической жизни. Шарообразный самовар обладает меньшей поверхностью, чем цилиндрический или какой-либо иной формы, вмещающий столько же стаканов, а так как тело теряет теплоту только с поверхности, то шарообразный самовар остывает медленнее, чем всякий другой того же объёма. Напротив, резервуар градусника быстрее нагревается и охлаждается (т.е. принимает температуру окружающих предметов), когда ему придают форму не шарика, а цилиндра.

По той же причине земной шар, состоящий из твёрдой оболочки и ядра, должен уменьшаться в объёме, т.е. сжиматься, уплотняться, от всех причин, изменяющих форму его поверхности: его внутреннему содержанию должно становиться тесно всякий раз, когда наружная его форма претерпевает какое-либо изменение, отклоняясь от шара. Возможно, что этот геометрический факт находится в связи с землетрясениями и вообще с тектоническими явлениями; но об этом должны иметь суждение геологи.

Произведение равных множителей

Задачи вроде тех, которыми мы сейчас занимались, рассматривают вопрос со стороны как бы экономической: при данной затрате сил (например, при прохождении 40-вёрстного пути), как достигнуть наивыгоднейшего результата (охватить наибольший участок)? Отсюда и заглавие настоящего отдела этой книги: «Геометрическая экономия». Но это — вольность популяризатора; в математике вопросы подобного рода носят другое название: задачи «на максимум и минимум». Они могут быть весьма разнообразны по сюжетам и по степени трудности. Многие разрешаются лишь приёмами высшей математики; но немало есть и таких, для решения которых достаточно самых элементарных сведений. В дальнейшем будет рассмотрен ряд подобных задач из области геометрии, которые мы будем решать, пользуясь одним любопытным свойством произведения равных множителей.

Для случая двух множителей свойство это уже знакомо нам. Мы знаем, что площадь квадрата больше, чем площадь всякого

прямоугольника такого же периметра. Если перевести это геометрическое положение на язык арифметики, оно будет означать следующее: когда требуется разбить число на две такие части, чтобы произведение их было наибольшим, то следует делить пополам. Например, из всех произведений

$$13 \cdot 17, 16 \cdot 14, 12 \cdot 18, 11 \cdot 19, 10 \cdot 20, 15 \cdot 15$$

и т.д., сумма множителей которых равна 30, наибольшим будет $15 \cdot 15$, даже если сравнивать и произведения дробных чисел ($14\frac{1}{2} \cdot 15\frac{1}{2}$ и т.п.).

То же справедливо и для произведений трёх множителей, имеющих постоянную сумму: произведение их достигает наибольшей величины, когда множители равны между собою. Это прямо вытекает из предыдущего. Пусть три множителя x, y, z в сумме равны a :

$$x + y + z = a.$$

Допустим, что x и y не равны между собою. Если заменим каждый из них полусуммой $(x+y)/2$, то сумма множителей не изменится:

$$\frac{x+y}{2} + \frac{x+y}{2} + z = x + y + z = a.$$

Но так как согласно предыдущему

$$\left(\frac{x+y}{2}\right)\left(\frac{x+y}{2}\right) > xy,$$

то произведение трёх множителей

$$\left(\frac{x+y}{2}\right)\left(\frac{x+y}{2}\right)z$$

больше произведения xyz :

$$\left(\frac{x+y}{2}\right)\left(\frac{x+y}{2}\right)z > xyz,$$

Вообще, если среди множителей x, y, z есть хотя бы два неравных, то можно всегда подобрать числа, которые, не изменяя общей суммы, дадут большее произведение, чем x, y, z . И только когда все три множителя равны, произвести такой замены нельзя. Следовательно, при $x + y + z = a$ произведение x, y, z будет наибольшим тогда, когда

$$x = y = z.$$

Воспользуемся знанием этого свойства равных множителей, чтобы решить несколько интересных задач.

Треугольник с наибольшей площадью

Задача

Какую форму нужно придать треугольнику, чтобы при данной сумме его сторон он имел наибольшую площадь?

Мы уже заметили раньше (стр. 198), что этим свойством обладает треугольник равносторонний. Но как это доказать?

Решение

Площадь S треугольника со сторонами a, b, c и периметром $a + b + c = 2p$ выражается, как известно из курса геометрии, так:

$$S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)},$$

откуда

$$\frac{S^2}{p} = (p-a)(p-b)(p-c).$$

Площадь S треугольника будет наибольшей тогда же, когда станет наибольшей величиной и её квадрат S^2 , или выражение S^2/p , где p , полупериметр, есть согласно условию величина неизменная. Но так как обе части равенства получают наибольшее значение одновременно, то вопрос сводится к тому, при каком условии произведение

$$(p - a)(p - b)(p - c)$$

становится наибольшим. Заметив, что сумма этих трёх множителей есть величина постоянная,

$$\begin{aligned} p - a + p - b + p - c &= 3p - (a + b + c) = \\ &= 3p - 2p = p, \end{aligned}$$

мы заключаем, что произведение их достигнет наибольшей величины тогда, когда множители станут равны, т.е. когда осуществится равенство

$$p - a = p - b = p - c,$$

откуда

$$a = b = c.$$

Итак, треугольник имеет при данном периметре наибольшую площадь тогда, когда стороны его равны между собою.

Самый тяжёлый брус

Задача

Из цилиндрического бревна нужно выпилить брус наибольшего веса. Как это сделать?

Решение

Задача, очевидно, сводится к тому, чтобы вписать в круг прямоугольник с наибольшей площадью. Хотя после всего сказанного читатель уже подготовлен к мысли, что таким прямоугольником будет квадрат, всё же интересно строго доказать это положение.

Обозначим одну сторону искомого прямоугольника (рис. 136) через x ; тогда другая выразится через $\sqrt{4R^2 - x^2}$, где R — радиус кругового сечения бревна. Площадь прямоугольника

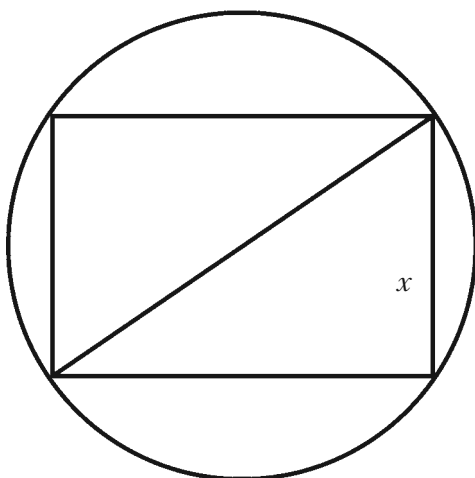


Рис. 136. К задаче о самом тяжёлом брус

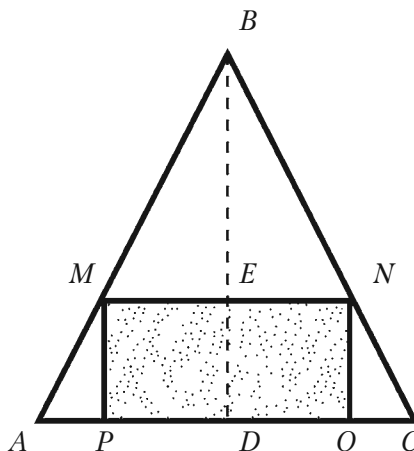


Рис. 137. В треугольник вписать прямоугольник наибольшей площади

$$S = x \sqrt{4R^2 - x^2},$$

откуда

$$S^2 = x^2(4R^2 - x^2).$$

Так как сумма множителей x^2 и $4R^2 - x^2$ есть величина постоянная ($x^2 + 4R^2 - x^2 = 4R^2$), то произведение их S^2 будет наибольшим при $x^2 = 4R^2 - x^2$, т.е. при $x = R\sqrt{2}$. Тогда же достигнет наибольшей величины и S , т.е. площадь искомого прямоугольника.

Итак, одна сторона прямоугольника с наибольшей площадью равна $R\sqrt{2}$, т.е. стороне вписанного квадрата. Брус имеет наибольший объём, если сечение его есть квадрат, вписанный в сечение цилиндрического бревна.

Из картонного треугольника

Задача

Имеется кусок картона треугольной формы. Нужно вырезать из него параллельно данному основанию и высоте прямоугольник наибольшей площади.

Решение

Пусть ABC есть данный треугольник (рис. 137), а $MNOP$ — тот прямоугольник, который должен остаться после обрезки. Из подобия треугольника ABC и NBM имеем:

$$\frac{BD}{BE} = \frac{AC}{NM},$$

откуда

$$NM = \frac{BE \cdot AC}{BD}.$$

Обозначив одну сторону NM искомого прямоугольника через y , её расстояние BE от вершины треугольника через x , основание AC данного треугольника через a , а его высоту BD через h , перепишем полученное ранее выражение в таком виде:

$$y = \frac{ax}{h}.$$

Площадь S искомого прямоугольника $MNOP$ равна:

$$\begin{aligned} S &= MN \cdot NO = MN \cdot (BD - BE) = \\ &= (h - x)y = (h - x)\frac{ax}{h}; \end{aligned}$$

следовательно,

$$\frac{Sh}{a} = (h - x)x.$$

Площадь S будет наибольшей тогда же, когда и произведение Sh/a , а следовательно, тогда, когда достигнет наибольшей величины произведение множителей $(h - x)$ и x . Но сумма $h - x + x = h$ — величина постоянная. Значит, произведение их максимальное, когда

$$h - x = x,$$

откуда

$$x = \frac{h}{2}.$$

Мы узнали, что сторона NM искомого прямоугольника проходит через середину высоты треугольника и, следовательно, соединяет середины его сторон. Значит, эта сторона прямоугольника равна $a/2$, а другая — равна $h/2$.

Затруднение жестяника

Задача

Жестянику заказали изготовить из квадратного куска жести в 60 см ширины коробку без крышки с квадратным дном и поставили условием, чтобы коробка имела наибольшую вместимость. Жестяник долго примерял, какой ширины должно для этого отогнуть края, но не мог прийти к определённом решению (рис. 138). Не удастся ли читателю выручить его из затруднения?

Решение

Пусть ширина отгибаемых полос x (рис. 139). Тогда ширина квадратного дна коробки будет равна $60 - 2x$; объём же v коробки выразится произведением

$$v = (60 - 2x)(60 - 2x)x.$$

При какой x это произведение имеет наибольшее значение? Если бы сумма трёх множителей была постоянна, произведение было бы наибольшим в случае их равенства. Но здесь сумма множителей

$$60 - 2x + 60 - 2x + x = 120 - 3x$$

не есть постоянная величина, так как изменяется с изменением x . Однако нетрудно добиться того, чтобы сумма трёх множителей



Рис. 138. Затруднение жестяника

была постоянной: для этого достаточно лишь умножить обе части равенства на 4. Получим:

$$4v = (60 - 2x)(60 - 2x)4x.$$

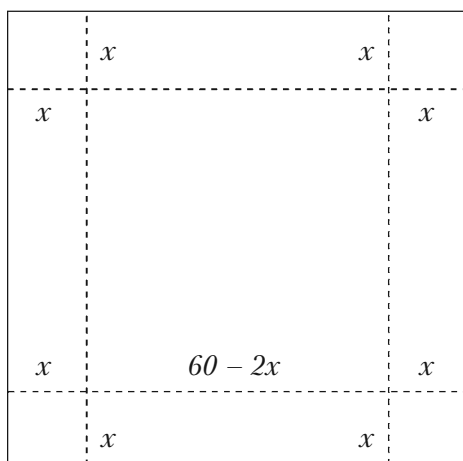


Рис. 139. Решение задачи жестяника

Сумма этих множителей равна

$$60 - 2x + 60 - 2x + 4x = 120,$$

величине постоянной. Значит, произведение этих множителей достигает наибольшей величины при их равенстве, т.е. когда

$$60 - 2x = 4x,$$

откуда

$$x = 10.$$

Тогда же и $4v$, а с ними и v достигнут своего максимума.

Итак, коробка получится наибольшего объёма, если у жестяного листа отогнуть 10 см^* . Этот наибольший объём равен $40 \cdot 40 \cdot 10 = 16000 \text{ см}^3$. Отогнув на сантиметр меньше или больше, мы в обоих случаях уменьшим объём коробки. Действительно,

$$9 \cdot 42 \cdot 42 = 15876 \text{ куб. см}^3,$$

$$11 \cdot 38 \cdot 38 = 15884 \text{ см}^3,$$

в том и другом случаях меньше 16000 см^3 .

* Решая задачу в общем виде, найдём, что при ширине a квадратного листа следует: для получения коробки наибольшего объёма отогнуть полоски шириною $x = \frac{1}{6}a$, потому что произведение $(a - 2x)(a - 2x)x$ или $(a - 2x)(a - 2x)4x$, наибольшее при $a - 2x = 4x$.

Затруднение токаря

Задача

Токарю дан конус и поручено выточить из него цилиндр так, чтобы сточено было возможно меньше материала (рис. 140). Токарь стал размышлять о форме искомого цилиндра: сделать ли

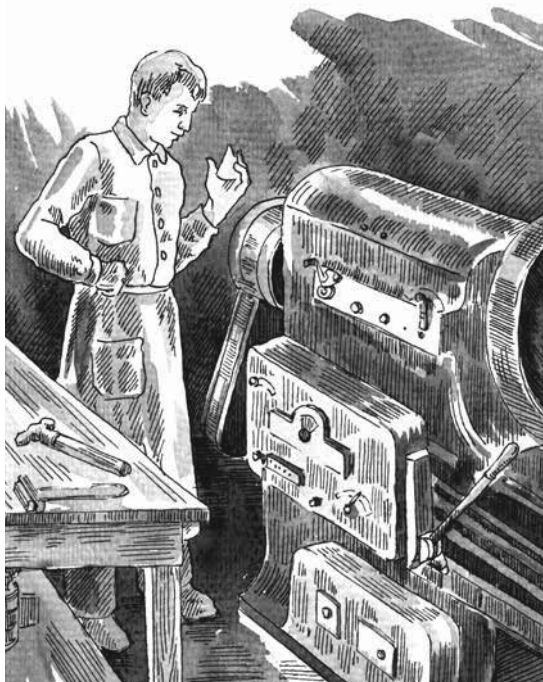


Рис. 140. Затруднение токаря

его высоким, хотя и узким (рис. 141), или, наоборот, широким, зато низким (рис. 142). Он никак не мог решить, при какой форме цилиндр получится наибольшего объёма, т.е. будет сточено меньше материала. Как он должен поступить?

Решение

Задача требует внимательного геометрического рассмотрения. Пусть ABC (рис. 143) — сечение конуса, BD — его высота, которую обозначим через h ; радиус основания $AD = DC$ обозначим через R . Цилиндр, который можно из конуса выточить, имеет сечение $MNOP$. Найдём, на каком расстоянии $BE = x$ от вершины B должно находиться верхнее основание цилиндра, чтобы объём его был наибольший.

Радиус r основания цилиндра (PD или ME) легко найти из пропорции

$$\frac{ME}{AD} = \frac{BE}{BD}, \quad \text{т.е.} \quad \frac{r}{R} = \frac{x}{h},$$

откуда

$$r = \frac{Rx}{h}.$$

Высота ED цилиндра равна $h - x$. Следовательно, объём его

$$v = \pi \left(\frac{Rx}{h} \right)^2 (h - x) = \pi \frac{R^2 x^2}{h} (h - x),$$

откуда

$$\frac{vh}{\pi R^2} = x^2 (h - x).$$

В выражении $vh/\pi R^2$ величины h , π и R постоянные, и только v переменная. Мы желаем разыскать такое x , при котором v делается наибольшим. Но, очевидно, v станет наибольшим одновременно с $vh/\pi R^2$, т.е. с $x^2(h - x)$. Когда же это последнее выражение становится наибольшим? Мы имеем здесь три переменных

множителя x , x и $(h - x)$. Если бы их сумма была постоянно, произведение было бы наибольшим тогда, когда множители были бы равны. Этого постоянства суммы легко добиться, если обе части последнего равенства умножить на 2. Тогда получим:

$$\frac{2vh}{\pi R^2} = x^2(2h - 2x).$$

Теперь три множителя правой части имеют постоянную сумму

$$x + x + 2h - 2h = 2h.$$

Следовательно, произведение их будет наибольшим, когда все множители равны, т. е.

$$x = 2h - 2x, \quad x = \frac{2h}{3}.$$

Тогда же станет наибольшим и выражение $\frac{2vh}{\pi R^2}$, а с ним вместе и объём v цилиндра.

Теперь мы знаем, как должен быть выточен искомый цилиндр: его верхнее основание должно отстоять от вершины на $\frac{2}{3}$ его высоты.

Кратчайший путь

В заключение рассмотрим задачу на «максимум и минимум», разрешаемую крайне простым геометрическим построением.

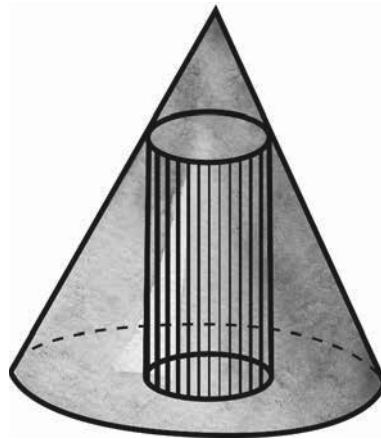


Рис. 141–142. Из конуса можно выточить цилиндр высокий, но узкий или широкий, но низкий. В каком случае будет сточено меньше материала?

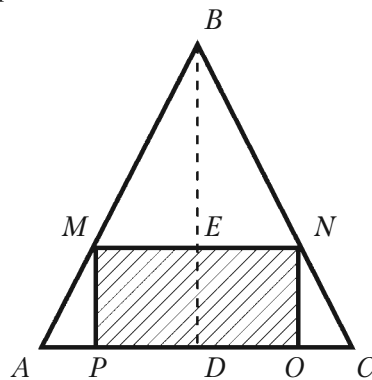


Рис. 143. Осевое сечение конуса и цилиндра

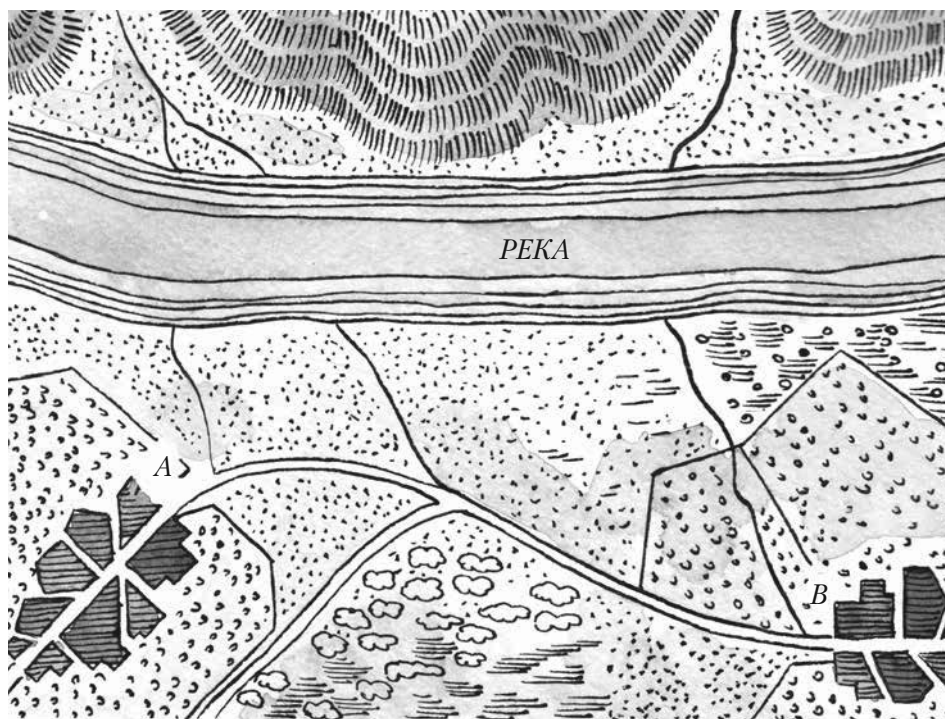


Рис. 144. К задаче о водонапорной башне

Задача

У берега реки надо построить водонапорную башню, из которой вода доставлялась бы по трубам в селения *А* и *В* (рис. 144).

В какой точке нужно её соорудить, чтобы общая длина труб от башни до обоих селений была наименьшей?

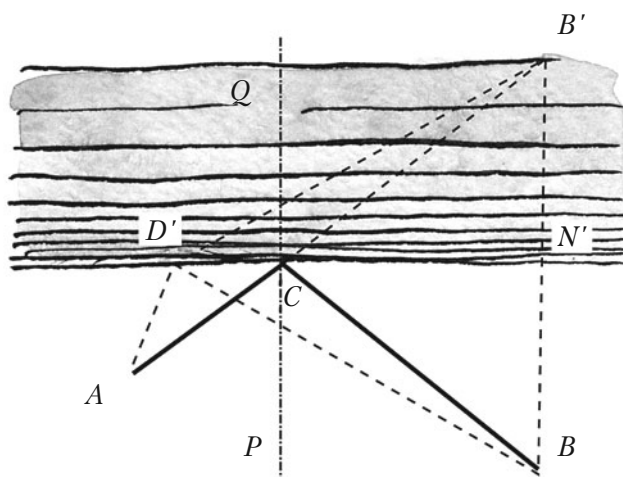


Рис. 145. Геометрическое решение задачи о выборе кратчайшего пути

Решение

Задача сводится к отысканию кратчайшего пути от A к берегу и затем к B .

Допустим, что искомый путь есть ACB (рис. 145). Перегнём чертеж по CN . Получим точку B' . Если ACB есть кратчайший путь, то, так как $CB' = CB$, путь ACB' должен быть короче всякого иного (например, ADB'). Это будет лишь в том случае, когда точка C лежит на прямой AB' : тогда всякий иной путь от A до B' , как ломаный, будет длиннее. Значит, для нахождения кратчайшего пути нужно найти лишь точку C пересечения прямой AB' с линией берега. Тогда, соединив C и B , найдём обе части кратчайшего пути от A до B .

Проведя в точке C перпендикуляр к CN , легко видеть, что углы ACP и $B'CP$, составляемые обеими частями кратчайшего пути с этим перпендикуляром, равны между собою ($\angle ACP = \angle B'CP = \angle BCP$).

Таков, как известно, закон следования светового луча, когда он отражается от зеркала: угол падения равен углу отражения. Отсюда следует, что световой луч при отражении избирает *кратчайший* путь, — вывод, который был известен ещё древнему физику и геометру Герону Александрийскому две тысячи лет назад.





ГЛАВА ДВЕНАДЦАТАЯ

ГЕОМЕТРИЧЕСКИЕ СИЛУЭТЫ

Занимательная игра, о которой мы сейчас будем говорить, имеет очень древнее происхождение. Она ещё древнее, чем шахматы, хотя гораздо менее известна. Эта игра возникла четыре тысячи лет тому назад в Китае, где первоначально использовалась не для игры, а скорее для обучения. В несколько изменённом виде она может служить занимательным развлечением.

Игра заключается в том, что складывают из определённых геометрических фигур, «танграмов», бесчисленное множество всевозможных силуэтов. «Танграмы» названы так оттого, что их придумал, по преданию, некий китаец Тан. Они вырезаются из чёрного картона или выпиливаются из дерева и представляют собой части квадрата, разделённого известным образом.

Вот как надо разрезать квадрат (рис. 146). Сначала соедините углы B и D , т.е. проведите диагональ BD . Затем соедините середины сторон BC и DC , т.е. проведите линию KL . Точку A соедините с серединой KL , т.е. с точкой M , а точку M соедините с G , т.е. с серединой EB . Затем K соедините с J (т.е. с серединой DE).

Теперь на квадрате есть все нужные линии, и вы можете вырезать по ним танграмы. У вас получаются следующие

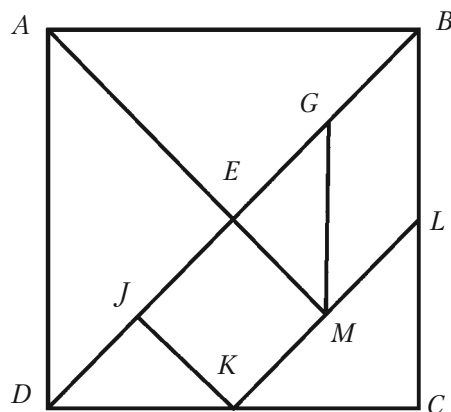


Рис. 146

геометрические фигуры: 5 треугольников (2 больших, 1 средней величины и 2 маленьких); 1 квадрат и 1 параллелограмм (рис. 147).

Чтобы привыкнуть к обращению с танграмами, перемешайте все семь танграмов и попытайтесь сложить из них тот квадрат, из которого они получились. Едва ли это удастся вам сразу. Но всё же не сдавайтесь, а терпеливо ищите решение. Сложив квадрат, переходите к решению следующих «танграмных» задач.

Задачи эти заключаются в том, что из 7 упомянутых фигур необходимо составить определённый силуэт, причём: 1) нельзя накладывать один танграм на другой, хотя бы кончиком, 2) для каждого силуэта должны быть использованы все 7 танграмов.

Вы найдёте среди прилагаемых силуэтов довольно характерные и удачные изображения, несмотря на их простоту и угловатость контура. Недаром танграмными изображениями увлекались художники (Гюстав Доре), а Наполеон в своём невольном уединении на острове Святой Елены целые часы, говорят, проводил за этой китайской головоломкой.

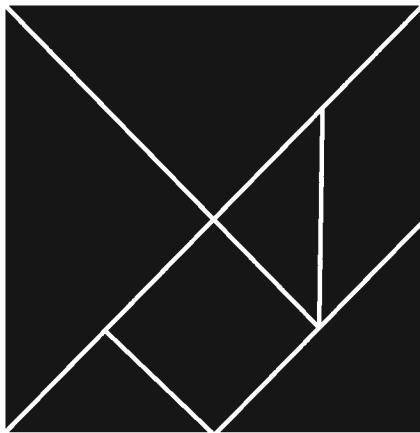


Рис. 147

Задача № 1

«Игра на бильярде»

Вы видите здесь геометрические силуэты двух игроков, склонившихся над бильярдным столом. Силуэты игроков и бильярдного стола сложены исключительно из танграмов; в состав каждого из этих трёх силуэтов вошли все 7 танграмных фигур.

Можете ли вы указать, как эти фигуры сложены?

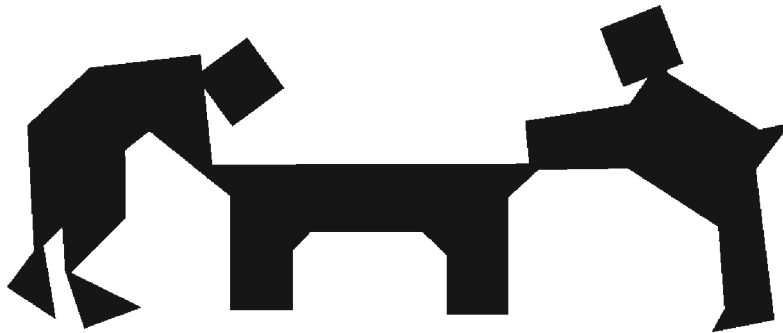


Рис. 148

Задача № 2

«Оркестр»

В нашем оркестре из 7 танграмов сложены рояль (1) и пианист, сидящий за роялем (2), и толстый трубач (3), и контрабас (4), и контрабасист (5), и пюпитр возле него (6), и барабанщик (7).

Как же составлены эти силуэты?

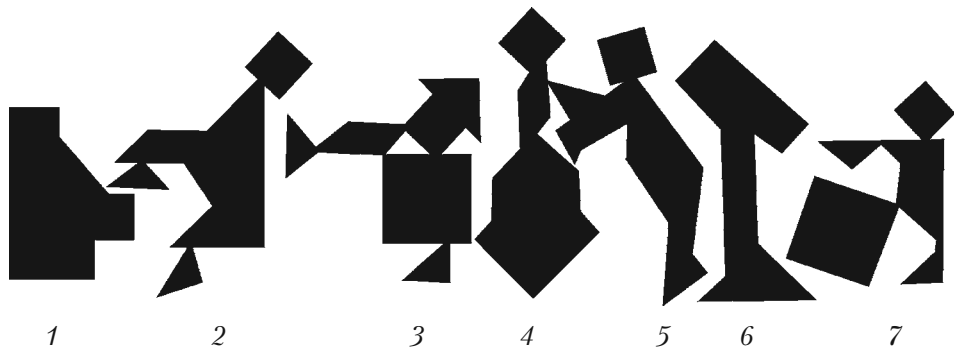


Рис. 149

Задача № 3

Восемь силуэтов

Сложите ряд танграмных фигур (рис. 150), которые изображают: петуха (1), пастора (2), нищего (3), девушку (4), корову (5), кошку (6), собаку (7), мышь (8).

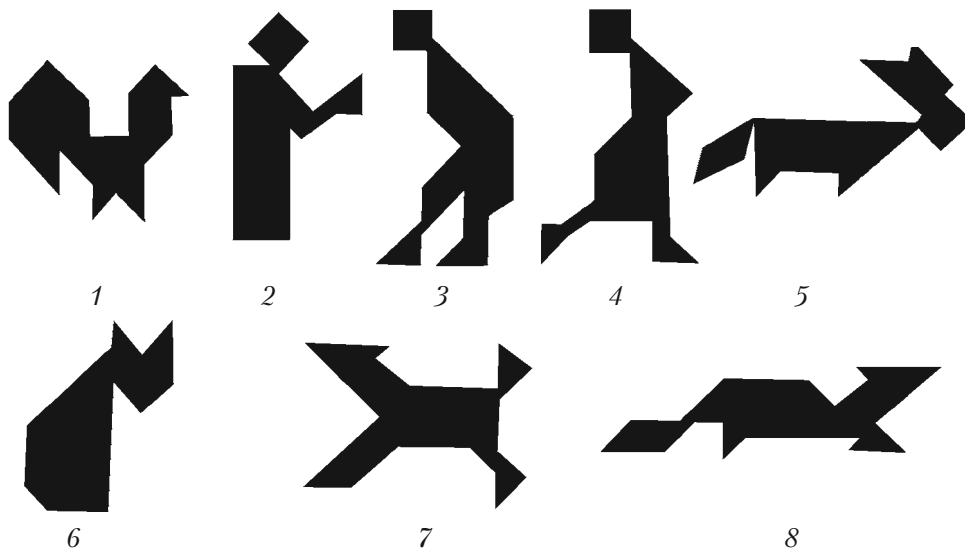


Рис. 150

Задача № 4

Ещё шесть силуэтов

Попробуйте сложить из танграмов, нарисованных на рис. 151, геометрические силуэты: девушки, сидящей на траве (1), женщины, смотрящей в зеркало (2), головы в шляпе (3), Наполеона (4) и два силуэта индейцев (5) и (6).

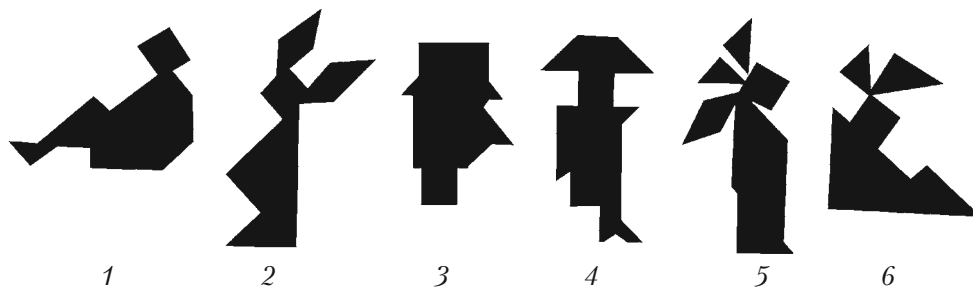


Рис. 151

Задача № 5

Где ошибка?

На рис. 152 собраны такие танграмные силуэты: бегущий мужчина (1), бегущая женщина (2), галстук (3), мостик (4), рыба (5), лебедь (6), человек с чашей (7), молоток (8), наковальня (9), человек, заложивший руки за спину (10), лошадь (11),

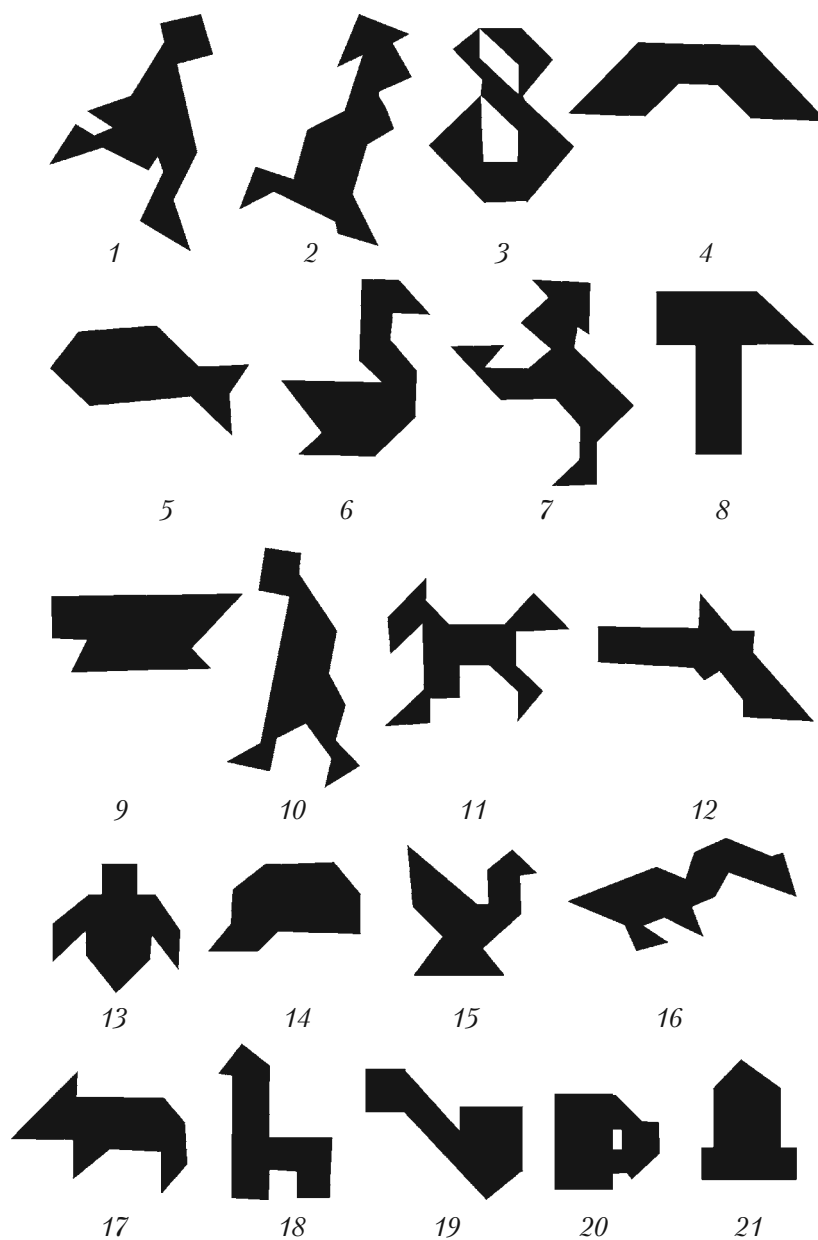


Рис. 152

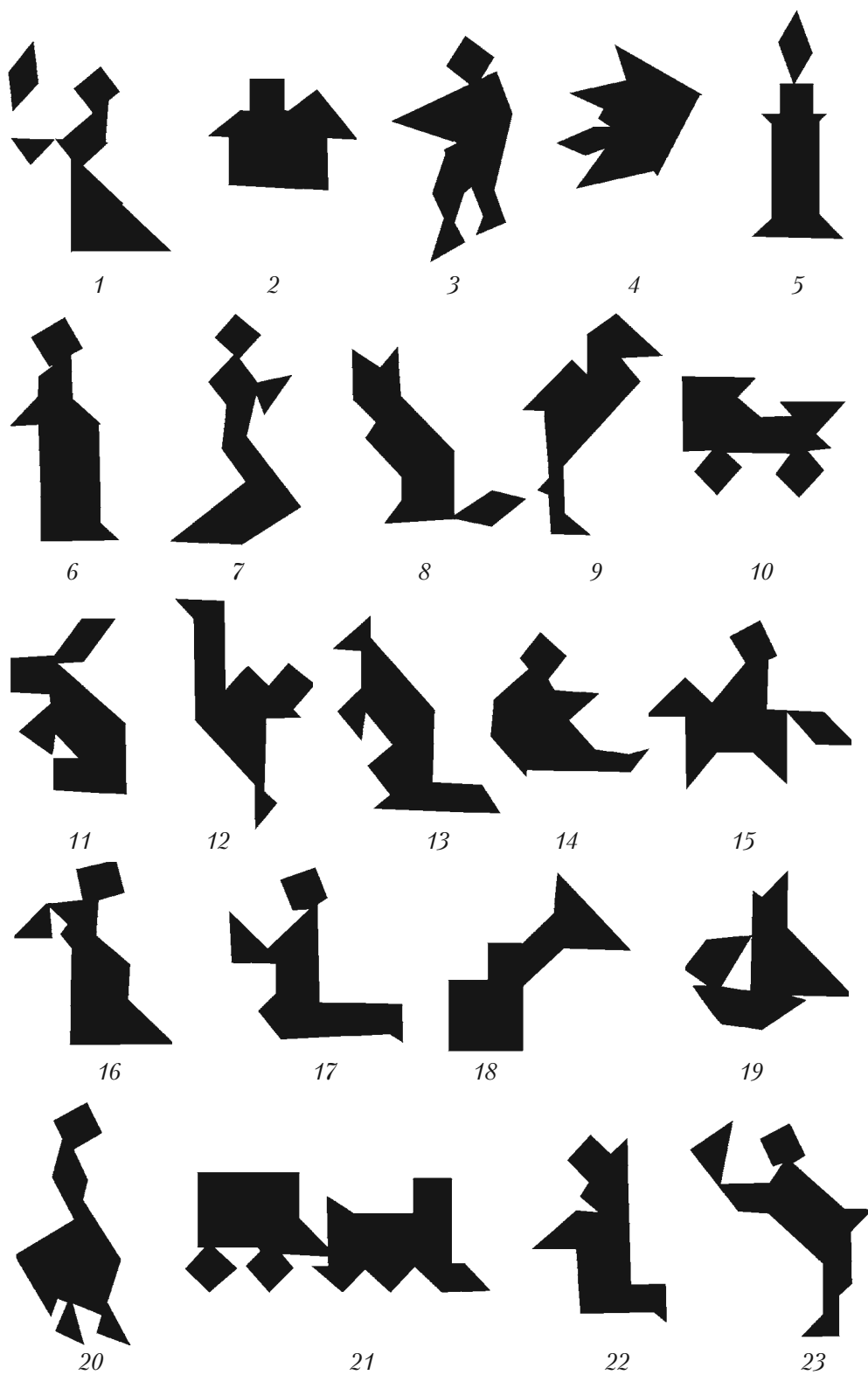


Рис. 153

револьвер (12), рубашка (13), шапка (14), курица (15), гусь (16), поросёнок (17), кресло (18), курительная трубка (19), кружка (20), могильный памятник (21).

Одна из этих фигур изображена здесь неправильно: в таком виде, как она нарисована, её невозможно сложить из танграмов. Укажите эту единственную фигуру.

Задача № 6

Самая крупная фигура

Если вам удалось составить все или некоторые изображённые выше силуэты, ответьте на вопросы.

Какая из всех составленных вами фигур имеет самую большую площадь? Какая из них имеет наименьшую площадь?

Задача № 7

24 силуэта

Собранные на рис. 153 силуэты изображают:

женщину у зеркала (1), дом (2), мужскую фигуру (3), голову американца (4), горящую свечу (5), пожилую женщину (6), молодую худощавую женщину (7), кошку (8), журавля (9), автомобиль (10), зайца (11), страуса (12), кенгуру (13), сидящую фигуру (14), всадника на лошади (15), женщину с сумочкой (16), мужчину на коленях (17), граммофон (18), парусную яхту (19), голландскую девушку (20), паровоз с тендером (21), фигуру на коленях (22), кланяющегося мужчину (23).

Как составлены все эти фигуры?

Задача № 8

Размеры танграмов

Всмотритесь внимательно в те 7 танграмных фигур, которые помогли вам составить так много разнообразных силуэтов, и попробуйте ответить на вопрос.

Во сколько раз площадь каждой танграмной фигурки меньше площади того квадрата, из которого они были вырезаны?

Задача № 9

Откуда взялась нога?

Вот два силуэта, сложенные из танграмов. Вы видите, что у одного силуэта есть нога, у другого нет. Между тем обе фигуры построены из одних и тех же семи танграмов!

Откуда взялась нога у правой фигуры?

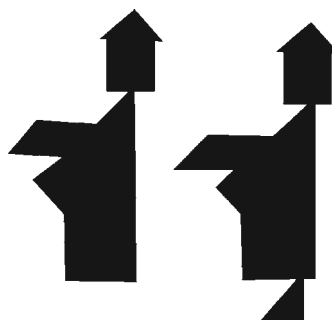


Рис. 154

Задача № 10

Два квадрата из одного

Мне привезли из Китая маленькую квадратную коробочку с танграмми, уложенными в ней вплотную двумя слоями; каждый слой представлял собой квадрат. Следовательно, из 7 танграмов можно сложить не только один квадрат, но и два одинаковых.

Как это сделать?

Решения задач 1–10

Решение задачи № 1

Вот так складывают фигуры из этой задачи.

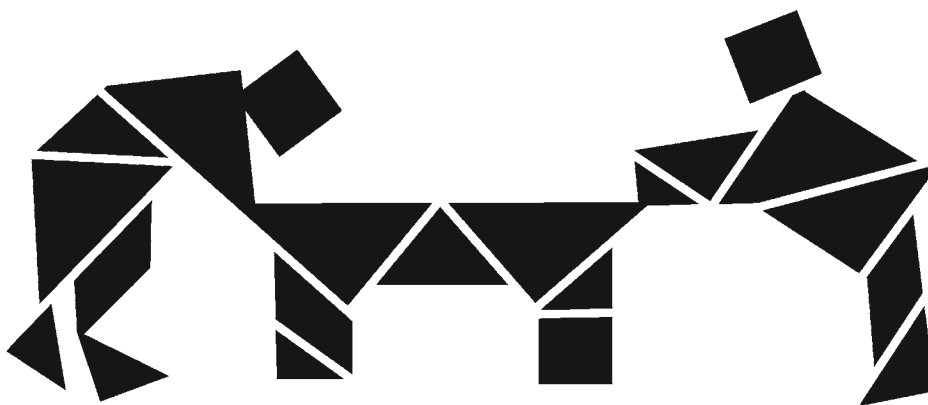


Рис. 155

Решение задачи № 2

Решение задачи видно из рис. 156.

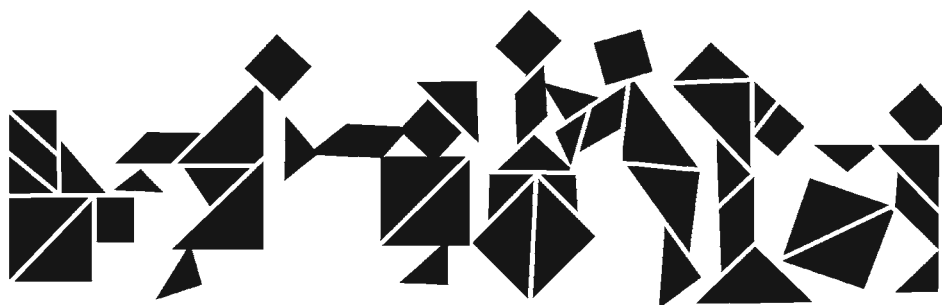


Рис. 156

Решение задачи № 3

А решение этой задачи показано на рис. 157.

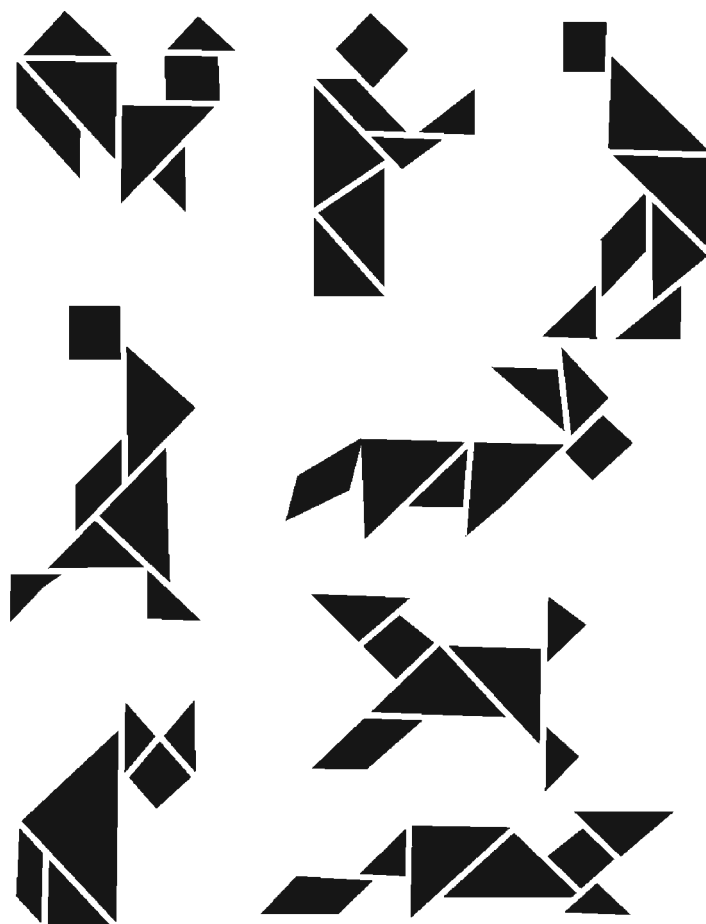


Рис. 157

Решение задачи № 4

Способ сложения силуэтов показан на рис. 158.

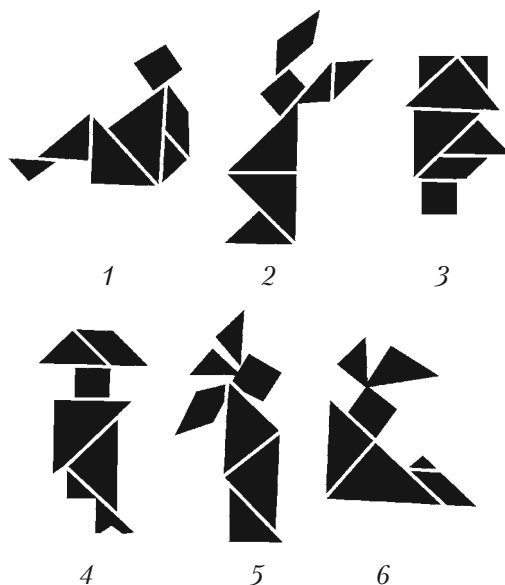


Рис. 158

Решение задачи № 5

Все фигуры, изображённые на рис. 152, можно сложить из танграмов (рис. 160), за исключением одной — лебедя. На рис. 159 показано, какие очертания имеет фигура лебедя, если её правильно составить из танграмов.



Рис. 159

Решение задачи № 6

Все силуэты имеют одинаковую площадь, так как составлены из одних и тех же частей. Как бы ни различались между собой силуэты, все они представляют собой видоизменения первоначального квадрата и, конечно, равны ему по площади.

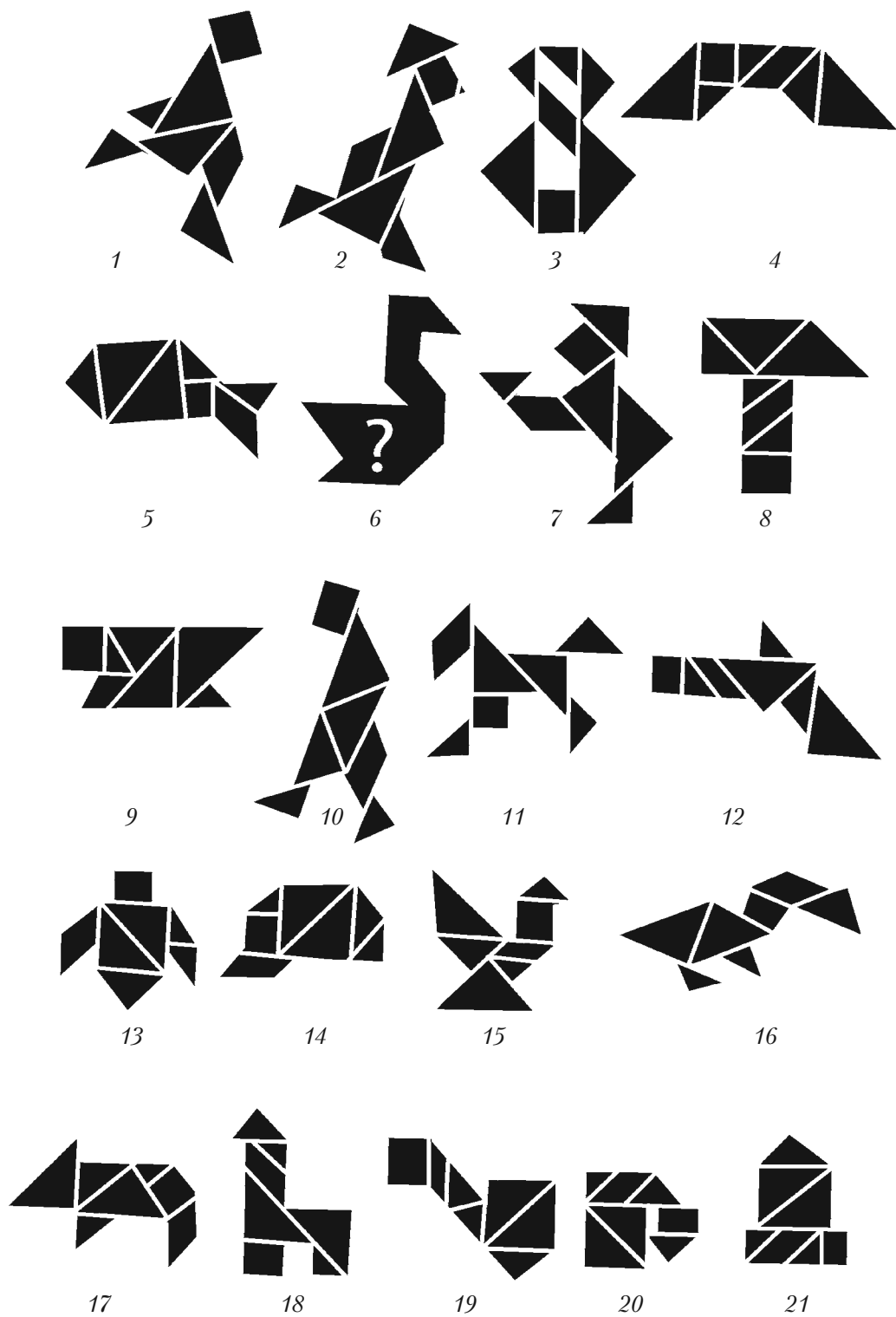
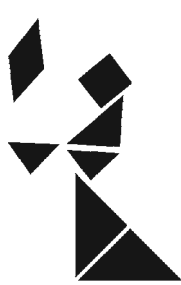


Рис. 160



1



2



3



4



5



6



7



8



9



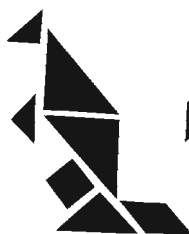
10



11



12



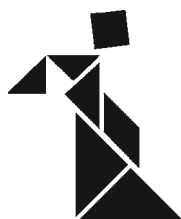
13



14



15



16



17



18



19



20



21



22



23

Рис. 161

Решение задачи № 7

Решение задачи представлено на рис. 161.

Решение задачи № 8

Каждый из больших треугольников по площади равен $\frac{1}{4}$ квадрата; средний треугольник вдвое меньше и, следовательно, равен $\frac{1}{8}$ площади квадрата. Каждый маленький треугольник вдвое меньше среднего, и значит, его площадь равна $\frac{1}{16}$ площади квадрата.

Параллелограмм и квадратик можно сложить из двух маленьких треугольников; следовательно, площадь каждой из этих фигур равна $\frac{1}{8}$ площади исходного квадрата.

Решение задачи № 9

На рис. 162 показано, как составлены обе фигуры.

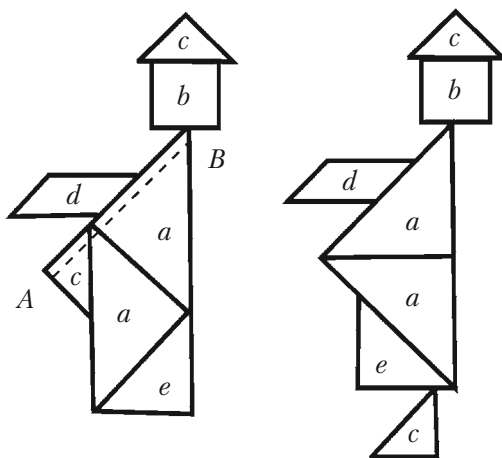


Рис. 162.

Первая, безногая фигура чуть-чуть толще второй — на узкую полосу, отрезаемую линией AB . Зато вторая фигура имеет ногу, и площадь этой ноги в точности равна площади избыточной полосы.

Решение задачи № 10

Один из двух квадратов образуют два больших треугольника. Второй нетрудно сложить из остальных 5 танграмов.

ОГЛАВЛЕНИЕ

Предисловие	5
-------------------	---

ГЛАВА ПЕРВАЯ ГЕОМЕТРИЯ В ЛЕСУ

По длине тени	7
Ещё два способа	12
По способу Жюль Верна	14
При помощи записной книжки	17
Не приближаясь к дереву	18
Высотомер лесоводов	19
При помощи зеркала	22
Две сосны	24
Форма древесного ствола	24
Универсальная формула	26
Объём и вес дерева на корню	29
Геометрия листьев	31
Шестиногие богатыри	33

ГЛАВА ВТОРАЯ Геометрия у реки

Измерить ширину реки	37
Длина острова	42
Пешеход на другом берегу	43
Простейшие дальномеры	45
Скорость течения	48
Сколько воды протекает в реке	50
Радужная плёнка	53
Круги на воде	54
Фантастическая шрапнель	56
Килевая волна	57
Скорость пушечных снарядов	59
Высота водяных растений	61

Звёздное небо в реке	62
Путь через реку	64
Через две реки	66

ГЛАВА ТРЕТЬЯ

ПОХОДНАЯ ТРИГОНОМЕТРИЯ БЕЗ ФОРМУЛ И ТАБЛИЦ

Вычисление синуса	67
Упрощённое извлечение квадратного корня	71
Найти угол по синусу	72
Высота Солнца	74
Расстояние до острова	74
Ширина озера	76
Треугольный участок	78

ГЛАВА ЧЕТВЁРТАЯ

ГЕОМЕТРИЯ В ОТКРЫТОМ ПОЛЕ

Видимые размеры Луны	80
Угол зрения	82
Тарелка и Луна	84
Луна и медные монеты	84
Сенсационные фотографии	85
Живой угломер	88
Посох Якова	90
Грабельный угломер	92
Острота вашего зрения	93
Предельная минута	94
Луна и звёзды у горизонта	97

ГЛАВА ПЯТАЯ

ГЕОМЕТРИЯ В ДОРОГЕ

Искусство мерить шагами	100
Глазомер	102
Уклоны	105
Кучи щебня	107
«Гордый холм»	109

У дорожного закругления	111
Радиус закругления	112
Дно океана	114
Существуют ли водяные горы?	116

ГЛАВА ШЕСТАЯ

ГДЕ НЕБО С ЗЕМЛЁЙ СХОДЯТСЯ

Горизонт	118
Корабль на горизонте	121
Дальность горизонта	122
Башня Гоголя	125
Холм Пушкина	126
Где рельсы сходятся	127
Задачи о маяке	128
Молния	129
Парусник	130
Горизонт на Луне	131
В лунном кратере	131
На Юпитере	132

ГЛАВА СЕДЬМАЯ

ГЕОМЕТРИЯ РОБИНЗОНОВ

(несколько страниц из Жюль Верна)

Геометрия звёздного неба	133
Широта «таинственного острова»	137
Определение географической долготы	139

ГЛАВА ВОСЬМАЯ

ГЕОМЕТРИЯ ВПОТЬМАХ

На дне трюма	141
Измерение бочки	142
Мерная линейка	143
Что и требовалось выполнить	144
Поверка расчёта	146
Ночное странствование Марка Твена	149

Загадочное кружение	151
Измерение голыми руками	157
Прямой угол в темноте	159

ГЛАВА ДЕВЯТАЯ СТАРОЕ И НОВОЕ О КРУГЕ

Практическая геометрия египтян и римлян	161
«Что я знаю о кругах»	162
Бросание иглы	164
Выпрямление окружности	166
Квадратура круга	168
Построение без циркуля	169
Задача Наполеона	171
Голова или ноги	172

ГЛАВА ДЕСЯТАЯ БОЛЬШОЕ И МАЛОЕ В ГЕОМЕТРИИ

Увеличение в тысячу раз	174
Две банки	175
Исполинская папироса	176
Яйцо страуса	176
Яйцо эпиорниса	177
Яйца русских птиц	178
Наглядные изображения	178
Наш нормальный вес	181
Великаны и карлики	182
Геометрия Гулливера	183
Почему пыль и облака плавают в воздухе	186

ГЛАВА ОДИННАДЦАТАЯ ГЕОМЕТРИЧЕСКАЯ ЭКОНОМИЯ

Как Пахом покупал землю	188
Трапеция или прямоугольник	193
Замечательное свойство квадрата	194
Участки другой формы	195

Фигуры с наибольшей площадью	197
Гвозди	200
Тело наибольшего объёма	200
Произведение равных множителей	201
Треугольник с наибольшей площадью	203
Самый тяжёлый брус	204
Из картонного треугольника	205
Затруднение жестяника	207
Затруднение токаря	209
Кратчайший путь	211

ГЛАВА ДВЕНАДЦАТАЯ

ГЕОМЕТРИЧЕСКИЕ СИЛУЭТЫ

«Игра на бильярде»	216
«Оркестр»	216
Восемь силуэтов	217
Ещё шесть силуэтов	217
Где ошибка?	218
Самая крупная фигура	220
24 силуэта	220
Размеры танграмов	220
Откуда взялась нога?	221
Два квадрата из одного	221
Решения задач 1–10	221

Серия «Большая академия Пифагоровых штанов»

Научно-популярное издание
Для среднего школьного возраста

ПЕРЕЛЬМАН Яков Исидорович

ГЕОМЕТРИЯ

СБОРНИК

Главный редактор *Екатерина Аксёнова*
Выпускающий редактор *Екатерина Розанова*
Младший редактор *Екатерина Ефименко*
Корректоры *Александра Мартынюк, Римма Низяева,*
Олег Пономарёв, Олег Леднев
Дизайн обложки *Елизаветы Бабаевой*
Издатель *Вадим Мещеряков*

Директор Группы компаний
«Издательский Дом Мещерякова»
Ася Мещерякова

Подписано в печать 20.12.2018. Формат $84 \times 108 \frac{1}{16}$.
Гарнитура Petersburg. Усл. печ. л. 24,36.
Бумага офсетная. Печать офсетная.
Тираж 2000 экз. Заказ №

Издательский Дом Мещерякова
119021, Москва, ул. Россолимо, д. 17, стр. 3.
Тел.: (495) 639-93-49.
idm@idmkniga.ru
idmkniga.ru

Отпечатано
в ОАО «Первая Образцовая типография»,
филиал «Дом печати-ВЯТКА».
610033, г. Киров, ул. Московская, 122.
Факс: (8332) 53-53-80, 62-10-36.



Серия «Пифагоровы штаны» не нуждается в особом представлении: она уже давно полюбилась читателям. Встречайте её старшую сестру — «БОЛЬШУЮ АКАДЕМИЮ ПИФАГОРОВЫХ ШТАНОВ».

«Большая» — потому что все произведения собраны в одном томе, не нужно искать продолжения интересующей книги.

«Академия» — потому что это только проверенные временем произведения. Только знакомые и самые авторитетные популяризаторы науки. Это золотой фонд знаний! Мы уверены: после прочтения этих книг вы убедитесь в том, что наука — не скучное занятие.

Чтобы доказать, что геометрия не скучная наука, Я.И. Перельман выходит за пределы школьного класса, подальше от доски и парты, под открытое небо, в лес, поле или к реке. На простых примерах — изучая форму листьев или наблюдая за размерами Луны и Солнца — читатель привыкнет находить знакомые геометрические отношения в окружающем мире и научится применять новые знания в обычной жизни. Любопытные, неожиданные задачи, ребусы, головоломки и загадки никого не оставят равнодушным.

ISBN 978-5-00108-449-5



МЫ ЛЮБИМ БУМАЖНЫЕ КНИГИ