

Н.Я. Виленкин

Р. С. Гутер

С.И. Шварцбурд

Б.В. Овчинский

В.Г. Ашкингузе

АЛГЕБРА

Н. Я. ВИЛЕНКИН, Р. С. ГУТЕР, С. И. ШВАРЦБУРД,
Б. В. ОВЧИНСКИЙ, В. Г. АШКИНУЗЕ

АЛГЕБРА

УЧЕБНОЕ ПОСОБИЕ ДЛЯ IX—X КЛАССОВ
СРЕДНИХ ШКОЛ
С МАТЕМАТИЧЕСКОЙ СПЕЦИАЛИЗАЦИЕЙ

ИЗДАТЕЛЬСТВО «ПРОСВЕЩЕНИЕ»
МОСКВА 1968

*Наум Яковлевич Виленкин,
Рафаил Самойлович Гутер,
Семен Исаакович Шварцбург,
Борис Владимирович Овчинский,
Владимир Георгиевич Ашкингузе*

А Л Г Е Б Р А

Учебное пособие для IX и X классов
средних школ
с математической специализацией

Редактор Ю. А. Гастев
Переплет художника Б. А. Мокина
Художественный редактор В. С. Эрденов
Технический редактор В. И. Корнеева
Корректор Г. С. Попкова

Сдано в набор 30/III 1967 г. Подписано
к печати 23/XI 1967 г. А 14525. (Тем.
план 1967 г. № 345) 60×84¹/₁₆. Бум. тип.
№ 2. Печ. л. 19,53 (21,0). Уч.-изд. л. 17,61.
Тираж 40 000 экз. Заказ № 59.

Издательство «Просвещение» Комитета
по печати при Совете Министров РСФСР.
Москва, 3-й проезд Марьиной рощи, 41.

Саратовский полиграфический комбинат
Росглавполиграфпрома Комитета по
печати при Совете Министров РСФСР.
Саратов, ул. Чернышевского, 59.

Цена без переплета 44 коп.
Переплет коленкор. 18 коп.

ОПЕЧАТКА

На стр. 188 на рис. 32 вместо $R(x)$ следует читать $f(x)$.



ОГЛАВЛЕНИЕ

Предисловие для учителя	6
Введение	10
1. Множества (10). 2. Числовые множества (11). 3. Пустое множество (12). 4. Подмножество (13). 5. Пересечение множеств (14). 6. Сложение множеств (15). 7. Разбиение множеств (17). 8. Вычитание множеств (17). 9. Отображение множеств (18). 10. Краткие исторические сведения (19).	
Глава I. Многочлены от одного переменного	21
§ 1. Тождественные преобразования многочленов (21). 1. Основные законы алгебры (21). 2. Целые рациональные выражения и функции (22). 3. Степень с натуральным показателем и ее свойства (24). 4. Многочлены (27). 5. Умножение многочленов (29). 6. Числовые кольца и поля (32). 7. Кольцо многочленов над данным числовым полем (34). 8. Бином Ньютона (34).	
§ 2. Деление многочленов. Корни многочленов (37). 1. Деление многочленов (37). 2. Теорема Безу. Схема Горнера (41). 3. Корни многочлена (43). 4. Интерполяционные формулы (44). 5. Кратные корни (46). 6. Многочлены второй степени (46). 7. Многочлены с целыми коэффициентами (48). 8. Краткие исторические сведения (50).	
Глава II. Алгебраические уравнения и неравенства	53
§ 1. Общая теория уравнений (53). 1. Тождества (53). 2. Область допустимых значений (54). 3. Уравнения (54). 4. Совокупности уравнений (57). 5. Преобразования уравнений (59). 6. Теоремы о равносильности уравнений (60).	
§ 2. Уравнения с одним неизвестным (64). 1. Алгебраические уравнения с одним неизвестным (64). 2. Метод разложения на множители (65). 3. Метод введения нового неизвестного (68). 4. Биквадратные уравнения (70). 5. Возвратные уравнения 3-й и 4-й степеней (71).	
§ 3. Функциональные неравенства (74). 1. Следствия из неравенств (75). 2. Равносильные неравенства (76). 3. Доказательство неравенств (78). 4. Линейные неравенства (80). 5. Решение неравенств второй степени (82). 6. Решение алгебраических неравенств высших степеней (86). 7. Краткие исторические сведения (90).	
Глава III. Обобщение понятия степени. Иррациональные выражения	91
§ 1. Степени с целым показателем (91). 1. Обобщение понятия степени (91). 2. Степень с нулевым показателем (93). 3. Степень с целым отрицательным показателем (93).	
§ 2. Корни. Степени с рациональными показателями (95). 1. Понятие корня (95). 2. Степени с рациональными показателями (96). 3. Свойства степеней с рациональными показателями (99).	
§ 3. Иррациональные алгебраические выражения (101). 1. Рациональные и иррациональные алгебраические выражения (101). 2. Одночленные иррациональные выражения (101). 3. Сокращение показателей и приведение корней к общему показателю (103). 4. Извлечение корня из произведения и степени (104). 5. Вынесение алгебраических выраже-	

ний из-под корня и внесение их под корень (105). 6. Возведение корня в степень (106). 7. Извлечение корня из корня (107). 8. Подобные корни (107). 9. Сложение и вычитание корней (108). 10. Уничтожение иррациональности в знаменателе или в числителе алгебраической дроби (108). 11. Преобразование выражений вида $\sqrt{A \pm \sqrt{B}}$ (110). 12. Смешанные задачи на преобразование иррациональных выражений (112).
 § 4. Иррациональные уравнения и неравенства (114). 1. Определение (114). 2. Сведение иррациональных уравнений к рациональным (115). 3. Уединение радикала (116). 4. Введение нового неизвестного (118). 5. Особые случаи решения иррациональных уравнений (119). 6. Иррациональные неравенства (122). 7. Краткие исторические сведения (124).

Глава IV. Многочлены от нескольких переменных. Системы уравнений и неравенств 125

§ 1. Системы алгебраических уравнений (125). 1. Целые рациональные функции от нескольких переменных (125). 2. Системы уравнений (126). 3. Геометрический смысл решений уравнений и систем уравнений с двумя неизвестными (127). 4. Совокупность уравнений (128). 5. Равносильные системы уравнений (131). 6. Метод подстановки (133). 7. Метод алгебраического сложения уравнений (137). 8. Метод введения новых неизвестных (141). 9. Системы однородных уравнений (142). 10. Геометрическая интерпретация решения систем двух уравнений с двумя неизвестными (145).

§ 2. Системы линейных уравнений (153). 1. Введение (153). 2. Теоремы о равносильности систем линейных уравнений (154). 3. Пример решения системы линейных уравнений методом Гаусса (155). 4. Метод Гаусса (156). 5. Решение обобщенно-треугольной системы линейных уравнений (159). 6. Системы однородных линейных уравнений (161). 7. Дополнительные задачи на системы линейных уравнений (163).

§ 3. Симметрические многочлены и их приложения к решению систем уравнений (164). 1. Симметрические многочлены от двух переменных (164). 2. Выражение степенных сумм через σ_1 и σ_2 (165). 3. Основная теорема о симметрических многочленах от двух переменных (167). 4. Системы симметрических алгебраических уравнений (168). 5. Применение симметрических многочленов к решению иррациональных уравнений (170).

§ 4. Неравенства с многими переменными (171). 1. Среднее арифметическое и среднее геометрическое двух чисел (172). 2. Среднее арифметическое и среднее геометрическое трех чисел (173). 3. Неравенство Коши (двумерный вариант) (174). 4. Задачи на наибольшие и наименьшие значения (178).

§ 5. Решение неравенств (183). 1. Общие замечания (183). 2. Неравенства с двумя переменными (184). 3. Задание областей неравенствами и системами неравенств (186). 4. Понятие о линейном программировании (191). 5. Краткие исторические сведения (195).

Глава V. Комплексные числа 197

§ 1. Комплексные числа в алгебраической форме (197). 1. Развитие понятия о числе (197). 2. Комплексные числа (199). 3. Сложение комплексных чисел; умножение на действительные числа (200). 4. Умножение ком-

плексных чисел (201). 5. Квадратные уравнения с действительными коэффициентами (202). 6. Деление комплексных чисел (203). 7. Сопряженные комплексные числа (205). 8. Извлечение квадратных корней из комплексных чисел (207).

§ 2. Тригонометрическая форма комплексных чисел (209). 1. Геометрическое изображение комплексных чисел (209). 2. Полярная система координат (210). 3. Тригонометрическая форма комплексного числа (212). 4. Умножение и деление комплексных чисел в тригонометрической форме (216). 5. Возведение комплексных чисел в степень. Формула Муавра (218). 6. Извлечение корня из комплексного числа (220). 7. Функции комплексного переменного и преобразования комплексной плоскости (224).

§ 3. Некоторые виды алгебраических уравнений (228). 1. Комплексные корни алгебраических уравнений (228). 2. Двучленные уравнения (229). 3. Корни из единицы и построение правильных многоугольников (232). 4. Трехчленные уравнения (233).

§ 4. Основная теорема алгебры многочленов и ее следствия (234). 1. Основная теорема алгебры многочленов (234). 2. Многочлены с действительными коэффициентами (236). 3. Разложение на множители многочленов с действительными коэффициентами (237). 4. Краткие исторические сведения (238).

Глава VI. Цепные дроби240

§ 1. Конечные цепные дроби (240). 1. Алгоритм Евклида (240). 2. Пример цепной дроби (241). 3. Определение цепной дроби (243). 4. Представление рациональных чисел в виде конечной цепной дроби (245). 5. Подходящие дроби (249). 6. Свойства подходящих дробей (253). 7. Диофантовы уравнения первой степени (255). 8. Подходящие дроби и календарь (256). 9. Приближение цепной дроби подходящими дробями (257).

§ 2. Бесконечные цепные дроби (261). 1. Разложение иррациональных чисел в цепные дроби (261). 2. Подходящие дроби и наилучшие приближения иррациональных чисел рациональными (264). 3. Цепные дроби как вычислительный инструмент (265). 4. Краткие исторические сведения (267).

Глава VII. Комбинаторика268

- § 1. Комбинаторные задачи (268).
- § 2. Комбинаторные задачи. Продолжение (272).
- § 3. Определения и формулы (277).
- § 4. Соединения с повторениями (286).
- § 5. Комбинаторные задачи. Окончание (293).
- § 6. Вином Ньютона и его обобщения (299).
- § 7. Краткие исторические сведения (304).

Глава VIII. Элементы теории вероятностей308

- § 1. Событие и вероятность (308).
- § 2. Сложные вероятности. Теоремы сложения и умножения. Условные вероятности (312).
- § 3. Примеры вычисления вероятностей (321).
- § 4. Полная вероятность. Формула Бейеса (325).
- § 5. Повторение испытаний (329).
- § 6. Примеры вычисления вероятностей. Окончание (332).
- § 7. Краткие исторические сведения (336).

ПРЕДИСЛОВИЕ ДЛЯ УЧИТЕЛЯ

Предлагаемая вниманию читателя книга является учебным пособием по курсу алгебры для IX и X классов школ с математической специализацией. Это определило как ее содержание, так и характер изложения материала. Сейчас многие вопросы излагаются в обычном курсе алгебры средней школы на недостаточном теоретическом уровне. Теория играет подчиненную роль, зачастую рассматривается лишь как аппарат для решения задач. Такое изложение недопустимо в школах с математической специализацией, одной из важных задач которых является воспитание математического мышления, умения отличить наводящие соображения от точного результата, умения все время контролировать правомерность выполняемых операций. Исходя из этого, в данной книге многие теоретические вопросы изложены весьма подробно. В книге много внимания уделено определению понятий уравнения и тождества, неравенства, степени с рациональным показателем, комплексного числа. Часто встречаются непривычные для школьного учебника алгебры слова «теорема», «доказательство». Так, например, явно сформулированы теоремы, на основании которых решаются уравнения, неравенства и системы уравнений и неравенств. Вообще теоретический материал занимает больше места, чем в обычных школьных учебниках алгебры. Мы надеемся, что это будет способствовать не только повышению математической культуры учащихся, но и поможет им лучше ориентироваться в решении сложных и «казусных» задач (например, в решении иррациональных уравнений, для которых обычный метод уединения радикала приводит к тождеству).

Естественно, что такой стиль изложения потребовал укрепления фундамента. Всю книгу пронизывают теоретико-множественные понятия; читатель имеет дело с множеством решений уравнения, неравенства и т. д. Краткое изложение основных понятий теории

множеств дано в начале книги. Изучение тождественных преобразований связано с понятиями числового кольца и поля, кольца многочленов. Однако общая теория колец и полей, а также такие понятия общей алгебры, как изоморфизм, алгебраическая операция и т. д., остались за рамками книги.

В книгу включены многие вопросы, обычно не входящие в традиционный школьный курс алгебры — отыскание целых корней многочленов, теория систем линейных уравнений со многими неизвестными, графическое решение систем уравнений высших степеней, элементы теории симметрических многочленов, цепные дроби, комбинаторика и теория вероятностей. При изложении этих вопросов авторы стремились к максимальной простоте изложения, все время указывая на связи с вопросами обычного курса школьной алгебры. Некоторые вошедшие в книгу вопросы связаны с вычислительной математикой, однако теоретические основы этого курса авторы изложили в другом пособии, тесно связанном с данным и посвященном математическому анализу.

Разумеется, повышение теоретического уровня изложения не должно было отразиться на качестве навыков учащихся в решении уравнений и неравенств, в тождественных преобразованиях иррациональных выражений и т. д. Поэтому наряду с теоретическим материалом значительное внимание было уделено методам решения задач. При этом, помимо методов, даваемых в большинстве учебников, мы изложили и такие вопросы, как решение возвратных уравнений, систем однородных уравнений, иррациональных неравенств, применение неравенств к решению задач на экстремум. Рассказано о применении теории симметрических многочленов к решению систем уравнений и иррациональных уравнений. Каждый параграф снабжен задачами для самостоятельной работы. Мы надеемся, что это сделает книгу полезной для тех, кто хочет подготовиться к экзаменам в вузы, где предъявляются повышенные требования к математической подготовке поступающих.

Мы уже говорили, что эта книга в первую очередь предназначена для учащихся школ с математической специализацией (и в особенности школ, выпускающих программистов, — при написании книги мы руководствовались программой этих школ). Но ее можно использовать и как учебный материал для техникумов, готовящих программистов-вычислителей, а отдельные главы и параграфы — для дополнительных и факультативных занятий с группами учащихся обычной средней школы, серьезно интересующихся математикой.

Книга (или ее отдельные главы) может оказаться полезной и для самостоятельной работы школьников, математические интере-

сы которых выходят за рамки обычного школьного курса. Мы надеемся, наконец, что книга заинтересует и студентов педагогических институтов, так как наглядно показывает связь изучаемых теоретических вопросов с школьной алгеброй.

Надо иметь в виду, что книга написана «в нескольких планах», чтобы ею могли пользоваться читатели с разным уровнем математической подготовки. Поэтому наряду с необходимым материалом, напечатанным обычным шрифтом, книга содержит избыточный материал. Этот материал помещен в параграфах и пунктах, отмеченных звездочкой или набранных петитом. Он может быть пройден или опущен в зависимости от уровня математических знаний учеников, их способностей и времени, имеющегося у учителя для прохождения курса. Если какие-нибудь части курса опускаются, целесообразно обратить на них внимание наиболее сильных учеников и посоветовать им изучить их самостоятельно.

Точно так же, кроме более или менее обычных задач, в книгу включены задачи повышенной трудности, приближающиеся к олимпиадному уровню. Поэтому не имеет смысла решать все задачи по ходу изучения курса; часть задач лучше оставить на период повторения — в расчете на повышение к тому времени математической подготовки учащихся и развитие у них навыков решения задач. Конечно, все сказанное не исключает использования задач из других учебников и задачников.

Некоторые вопросы, обычно относимые к школьному курсу алгебры (прогрессии, метод математической индукции, понятие действительного числа, общая степенная, показательная и логарифмическая функции), не вошли в книгу. Они — наряду с теорией пределов, дифференциальным и интегральным исчислением, теорией рядов и некоторыми другими вопросами — изложены в другом пособии, написанном тем же коллективом авторов и согласованном с данным, — в книге «Математический анализ».

Весь материал книги прошел экспериментальную проверку в московской школе № 444. После этой проверки в текст были внесены многочисленные изменения.

Работа авторов над книгой распределилась следующим образом. Н. Я. Виленкин написал введение и главы I, II, III. Кроме того, он принял участие в написании главы IV (совместно с С. И. Шварцбурдом) и V (совместно с В. Г. Ашкинуде). Ему принадлежит также общее научное руководство изданием. Р. С. Гутер написал главу VII (при редакционном участии Н. Я. Виленкина) и (совместно с Б. В. Овчинским) главу VIII, а также принял участие в редактировании книги. С. И. Шварцбурд написал главу VI (при редакционном участии Н. Я. Виленкина) и принял участие в написании

главы IV. Ему же принадлежит разработка содержания курса, подбор задач, проведение всей экспериментальной работы по книге и общее организационное руководство изданием; С. И. Шварцбург участвовал также в обсуждении и выработке окончательного текста глав I—VI. Б. В. Овчинский написал совместно с Р. С. Гутером главу VIII, а В. Г. Ашкингузе принял участие в написании главы V.

В процессе редактирования и подготовки рукописи к печати были учтены многочисленные советы и предложения Ю. А. Гастева; авторы приносят ему глубокую благодарность. Авторы выражают также признательность рецензентам книги М. И. Граеву и К. В. Темко, критика которых значительно повлияла на окончательный текст книги.

ВВЕДЕНИЕ

1. Множества. Понятие *множества* является одним из основных понятий математики. Оно не сводится к другим понятиям и не определяется. Вместо определения приводят лишь примеры, поясняющие его смысл. Так, можно говорить о множестве всех учеников данной школы, о множестве всех собак на земном шаре, о множестве всех клеток данного человеческого тела, о множестве всех картофелин в данном мешке, о множестве всех натуральных чисел, о множестве всех треугольников на данной плоскости, о множестве всех точек данного круга и т. д.

Когда в математике говорят о множестве, то объединяют некоторые предметы в одно целое — множество, состоящее из этих предметов. Основатель теории множеств Георг Кантор (1845—1918) выразил это следующими словами:

«Множество есть многое, мыслимое как единое».

Предметы (объекты), составляющие некоторое множество, называются его *элементами*. То обстоятельство, что объект a является элементом множества A , записывается так: $a \in A$ (словами: a есть элемент множества A ; a принадлежит A ; a содержится в A ; A содержит a). Если объект a не является элементом множества A , то это записывается так: $a \notin A$ (словами: a не есть элемент множества A ; a не принадлежит A ; a не содержится в A ; A не содержит a).

Например, если A есть множество всех четных натуральных чисел, то $2 \in A$, а $7 \notin A$, $\pi \notin A$ и $\triangle PQR \notin A$.

Множество иногда можно задать перечислением всех его элементов. В этом случае употребляют фигурные скобки, в которые помещают названия всех элементов множества, разделенные запятыми. Так, $\{1, 2, 3\}$ обозначает множество, состоящее из чисел «один», «два», «три» и только из них.

Вообще некоторое множество считается заданным, если указано некоторое свойство, которым обладают все его элементы и не обладают никакие другие объекты. Такое свойство называется *характеристическим свойством* множества.

Характеристическим свойством множества $\{1, 2, 3\}$ может быть свойство совпадать с одним из членов списка, приведенного в фигурных скобках. Другим характеристическим свойством этого же множества является свойство быть корнем уравнения

$$x^3 - 6x^2 + 11x - 6 = 0.$$

2. Числовые множества. Множества могут состоять из объектов самой различной природы. Их элементами могут быть буквы, атомы, числа, уравнения, точки, углы и т. д. Именно этим объясняется чрезвычайная широта теории множеств и ее приложимость к самым разным областям знания (математике, механике, физике, лингвистике, экономике и т. д.). Для математики особо важную роль играют множества, составленные из «математических» объектов — корней уравнений, геометрических фигур и т. д. Чаще всего нам будут встречаться числовые множества, то есть множества, элементами которых являются числа. Примерами числовых множеств являются:

- а) множество всех действительных чисел;
- б) множество всех рациональных чисел;
- в) множество всех положительных чисел;
- г) множество всех чисел, удовлетворяющих неравенству

$$2 \leq x \leq 5;$$

- д) множество всех чисел вида

$$(-1)^k \cdot \frac{\pi}{3} + k\pi, \quad k = 0, 1, 2, \dots$$

Некоторые числовые множества имеют особые названия. Если даны два числа a и b , $a < b$, то множество всех чисел, удовлетворяющих неравенству $a \leq x \leq b$, называют *числовым отрезком* или,

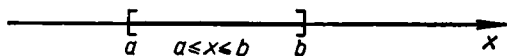


Рис. 1

если это не вызывает недоразумений, просто *отрезком* и обозначают $[a, b]$. На числовой оси ему соответствует отрезок с концами a и b (рис. 1).

Множество чисел, удовлетворяющих неравенству $a < x < b$, называют *числовым промежутком* или, короче, *промежутком* и обозначают (a, b) . На числовой оси ему соответствует отрезок, у которого отброшены концевые точки (рис. 2).

Множество чисел, удовлетворяющих неравенствам вида $x > a$ (или $x < a$), называют (числовым) *лучом*. Его обозначают (a, ∞)

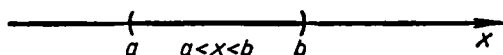


Рис. 2

(или $(-\infty, a)$) (рис. 3). Иногда нам будут встречаться множества чисел, удовлетворяющих неравенствам $a \leq x < b$ или $a < x \leq b$ (рис. 4). Их называют (числовыми) *полуотрезками* и обозначают $[a, b)$ и $(a, b]$. Заметим, что квадратная скобка означает, что соот-



Рис. 3

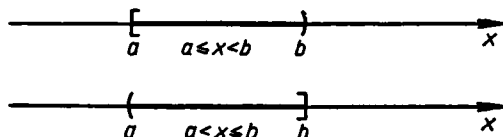


Рис. 4

ветствующий конец включается в множество, а круглая — что он исключается.

3. Пустое множество. Введение понятия множества в математику оказалось очень полезным. Из-за того что элементами множеств могут быть вещи самой различной природы, одни и те же утверждения, касающиеся множеств, можно истолковать и как утверждения о натуральных числах, и как утверждения о точках геометрических фигур, и как утверждения о множестве слов и т. д. Таким образом, понятия и теоремы теории множеств обладают большой общностью. Этим и объясняется то, что язык теории множеств применяется в самых различных областях математики.

В математике приходится иногда рассматривать множества, содержащие только один элемент, и даже множества, не имеющие ни одного элемента. Множество, не содержащее ни одного элемента, называют *пустым*. Его обозначают знаком \emptyset . На первый взгляд может показаться, что понятие пустого множества излишне. Но когда множество задано своим характеристическим свойством, заранее неизвестно, пусто оно или нет. Например, пусть некоторое множество состоит из всех прямоугольников с неравными диагоналями. То, что свойство «быть прямоугольником с неравными диагоналями» задает пустое множество, составляет утверждение геометрической теоремы: «Во всяком прямоугольнике диагонали равны». Точно так же из теоремы Пифагора следует, что множество прямоугольных треугольников, для которых квадрат гипотенузы не равен сумме квадратов катетов, пусто. Вот еще несколько примеров задания пустого множества характеристическим свойством:

- а) множество рациональных чисел r таких, что $r^2 = 2$;
- б) множество всех точек пересечения двух параллельных прямых;
- в) множество треугольников, сумма углов которых отлична от 180° ;
- г) множество квадратных уравнений, имеющих более двух различных корней;
- д) множество решений системы уравнений

$$\begin{cases} 2x + 3y = 6, \\ 2x + 3y = 9. \end{cases}$$

О некотором множестве может быть неизвестно, является ли оно пустым множеством или нет. Так, до сих пор неизвестно, пусто ли множество натуральных чисел n таких, что $n > 2$, а уравнение

$$x^n + y^n = z^n$$

имеет положительные целочисленные решения (в этом состоит известная проблема Ферма).

Пустое множество единственно: нет двух разных пустых множеств.

4. Подмножество. Пусть даны два множества A и B , причем каждый элемент первого множества является элементом второго множества. Тогда множество A называют *подмножеством* (или *частью*) множества B . В этом случае пишут: $A \subset B$.

Примеры подмножеств:

- а) числовой отрезок $[1, 3]$ есть подмножество числового отрезка $[0, 4]$;

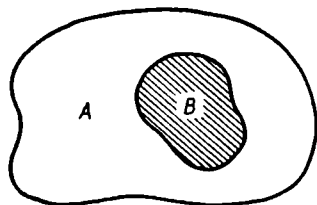


Рис. 5

б) множество всех квадратов есть подмножество множества всех прямоугольников;

в) множество всех целых чисел есть подмножество множества всех рациональных чисел.

Отметим, что пустое множество \emptyset является подмножеством любого множества A . Каждое множество A является одним из своих подмножеств.

Эти два подмножества (\emptyset и все множество) называют *несобственными*. Все остальные подмножества называют *собственными*.

Множества часто изображают наглядно как множество точек геометрической фигуры. Тогда подмножество — это множество точек части фигуры (рис. 5).

У п р а ж н е н и я

1. Даны множества:

а) множество A всех трапеций, б) множество B всех прямоугольников, в) множество C всех четырехугольников, г) множество D всех квадратов, д) множество E всех параллелограммов. Выписать буквы, обозначающие эти множества, в таком порядке, чтобы каждая следующая обозначала подмножество предыдущего.

2. Даны множества:

а) множество A всех рациональных чисел, б) множество B всех целых чисел, в) множество C всех действительных чисел, г) множество D всех четных натуральных чисел, д) множество E всех натуральных чисел. Выписать буквы, обозначающие эти множества, в таком порядке, чтобы каждая следующая обозначала подмножество предыдущего.

3. Даны множества:

а) множество A учеников IX класса данной средней школы, б) множество B всех учеников данной средней школы, в) множество C мальчиков, обучающихся в IX классе данной средней школы, г) множество D всех учащихся средних школ в СССР, д) множество E всех учащихся средних школ в городе, где находится школа. Выписать буквы, обозначающие эти множества, в таком порядке, чтобы каждая следующая обозначала подмножество предыдущего.

5. Пересечение множеств. Пусть даны множества A, B, C, \dots . Их *пересечением* называют множество X , содержащее те и только те элементы, которые входят в каждое из заданных множеств. Пересечение двух множеств A и B обозначают AB или $A \cap B$.

Если множества A и B состоят из точек некоторых геометрических фигур, то $A \cap B$ — множество общих точек этих фигур, то есть множество точек пересечения этих фигур в обычном смысле (рис. 6).

Пересечение множеств называют также их *произведением*, а операцию пересечения — *умножением* множеств. Можно показать,

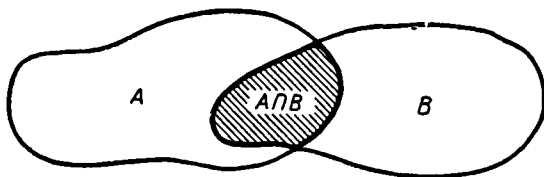


Рис. 6

что многие свойства пересечения множеств напоминают свойства умножения чисел.

Примеры пересечения множеств:

а) пересечением числового отрезка $[0, 4]$ с числовым отрезком $[2, 5]$ является числовой отрезок $[2, 4]$ (рис. 7);

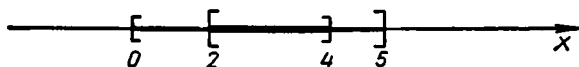


Рис. 7

б) пересечение числового отрезка $[0, 2]$ с числовым отрезком $[3, 5]$ пусто;

в) пересечение множества всех ромбов с множеством всех прямоугольников есть множество всех квадратов;

г) пересечением множества четных натуральных чисел с множеством натуральных чисел, делящихся на 3, является множество натуральных чисел, делящихся на 6.

У п р а ж н е н и я

4. Найти пересечение множества всех треугольников с множеством правильных многоугольников.

5. Найти пересечение множества натуральных чисел, делящихся на 4, с множеством натуральных чисел, делящихся на 6.

6. Найти пересечение множества натуральных чисел, делящихся на n , с множеством натуральных чисел, делящихся на m .

7. Найти пересечение множества всех учащихся данного класса с множеством всех синеглазых людей.

8. Найти пересечение множеств A и B , если $A \subset B$.

9. Найти пересечение множества чисел вида

$$\frac{\pi}{2} + k\pi$$

с множеством чисел $\frac{\pi}{6} + \frac{\pi m}{6}$, где k и m принимают все целые значения.

6. **Сложение множеств.** Суммой (или объединением) множеств A, B, C, \dots называют множество X , состоящее из тех и толь-

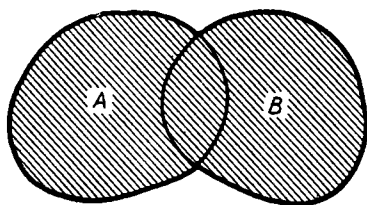


Рис. 8

ко тех элементов, которые входят хотя бы в одно из этих («слагаемых») множеств. Сумму двух множеств A и B обозначают $A + B$ или $A \cup B$. Мы увидим позже, что некоторые свойства суммы множеств напоминают свойства суммы чисел.

Если какой-нибудь элемент входит в несколько слагаемых множеств, то в сумме он берется лишь один раз. Например, суммой числового отрезка $[0, 4]$ и числового отрезка $[2, 5]$ является числовой отрезок $[0, 5]$. При этом точки отрезка $[2, 4]$ входят в оба слагаемые, но в сумме они берутся лишь один раз. Впрочем, выражения «некоторый элемент берется в данном множестве пять раз» и т. п., как это следует из принятого нами понимания терминов «множество» и «элемент», просто не имеют смысла.

Примеры

а) Обозначим через A множество точек некоторой плоской области и через B — множество точек другой области (рис. 8). Тогда их суммой будет множество точек заштрихованной фигуры, ограниченной на рис. 8 жирной линией.

б) Обозначим через A множество успевающих учеников в классе, через B — множество девочек в этом классе и через C — множество неуспевающих мальчиков. Тогда $A \cup B \cup C$ является множеством всех учеников этого класса. (Имеют ли множества A и B общие элементы?)

в) Обозначим через A_n множество всех положительных дробей со знаменателем n . Тогда $A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup \dots$ является множеством всех положительных дробей, то есть дробей вида $\frac{m}{n}$, где m и n — натуральные числа.

г) Обозначим через A_n множество правильных n -угольников. Тогда $A_3 \cup A_4 \cup A_5 \cup \dots \cup A_n \cup \dots$ является множеством всех правильных многоугольников.

д) Обозначим через A множество целых чисел вида $4n - 1$, а через B — множество целых чисел вида $4n + 1$. Тогда $A \cup B$ — множество всех нечетных целых чисел.

У п р а ж н е н и я

10. Найти сумму множества четных чисел и множества нечетных чисел.

11. Найти сумму множеств остроугольных, прямоугольных и тупоугольных треугольников.

12. Пусть множество A есть отрезок $[1, 3]$, множество B — отрезок $[2, 5]$, множество C — отрезок $[3, 7]$ и множество D — отрезок $[0, 4]$. Най-

ти множества: а) $(A \cap B) \cup (C \cap D)$, б) $(A \cup B) \cap (B \cup D)$, в) $(A \cup D) \cap (B \cup C)$, г) $(A \cup B) \cap (B \cup D)$.

13. Множество A состоит из учеников данного класса, знающих английский язык, множество B — из учеников, знающих немецкий язык, и множество C — из учеников, знающих французский язык. Охарактеризуйте множества $(A \cup B) \cap C$, $A \cap B \cap C$, $A \cup B \cup C$.

7. Разбиение множеств. Пусть множество X является суммой множеств A, B, C, \dots , причем никакие два из них не имеют общих элементов. Тогда говорят, что множество X *разбито на* (непересекающиеся) *подмножества* A, B, C, \dots .

Примеры разбиения множеств:

а) Множество натуральных чисел разбивается на подмножества четных чисел и нечетных чисел.

б) Множество всех учеников в классе разбивается на множества учеников, фамилия которых начинается на букву «А», учеников, фамилия которых начинается на букву «Б», и т. д. вплоть до буквы «Я». Какое из этих множеств пусто, если взять ваш класс? Какие из этих множеств пусты для любого класса?

в) Множество всех векторов на плоскости можно разбить на непересекающиеся подмножества, относя к одному подмножеству все векторы, равные друг другу по длине, параллельные и одинаково направленные.

г) Это же множество можно разбить иначе, относя к одному подмножеству векторы, выходящие из одной точки плоскости.

У п р а ж н е н и я

14. X — множество всех учеников в классе, A — множество всех футболистов, B — множество всех шахматистов, C — множество всех девочек. Разбивается ли X на множества A, B, C ?

15. X — множество всех треугольников, A — множество остроугольных треугольников, B — множество прямоугольных треугольников, C — множество тупоугольных треугольников. Разбивается ли X на множества A, B, C ?

16. X — множество всех дробей, A_n — множество дробей со знаменателем n . Разбивается ли X на множества $A_1, A_2, \dots, A_n, \dots$?

8. Вычитание множеств. Если даны два множества A и B , то их *разность* называют такое множество $X = A \setminus B$ или $(A - B)$, в которое входят все элементы из A , не принадлежащие множеству B . При этом не предполагается, что множество B является частью множества A . Таким образом, при вычитании множества B из множества A из A удаляют общую часть (пересечение) A и B :

$$A \setminus B = A \setminus A \cap B.$$

Например, если A — множество всех учащихся IX класса данной школы, а B — множество всех девочек, которые учатся в этой школе, то $A \setminus B$ — множество всех мальчиков, обучающихся в IX классе этой школы.

В случае, когда B — часть множества A , $A \setminus B$ называют *дополнением* к B в множестве A и обозначают B'_A (разумеется, одно и то же множество B имеет разные дополнения в разных содержащих его множествах A). Например, дополнением множества четных чисел в множестве всех целых чисел является множество нечетных чисел. Дополнением множества всех квадратов в множестве прямоугольников является множество всех прямоугольников с неравными сторонами, а дополнением того же множества квадратов в множестве всех ромбов — множество ромбов с неравными диагоналями.

У п р а ж н е н и я

17. Множество A — отрезок $[0, 5]$, множество B — отрезок $[2, 7]$. Найти множества $A \setminus B$ и $B \setminus A$. Чему равно множество

$$(A \setminus B) \cup (B \setminus A)?$$

18. A — множество чисел вида $2k + 1$, B — множество чисел $4m + 1$. Из каких чисел состоит множество $A \setminus B$ (k и m пробегает все целые числа)?

19. Найти дополнение множества тупоугольных треугольников в множестве всех треугольников.

9. Отображение множеств. Пусть даны два множества X и Y и пусть имеется правило f , ставящее в соответствие каждому элементу $x \in X$ некоторый определенный $y \in Y$. Тогда говорят, что задано *отображение* f множества X в множество Y . Элемент, соответствующий x в силу правила f , обозначают $f(x)$ и пишут: $y = f(x)$. Элемент y называют *образом* элемента x при отображении f , а элемент x называют *прообразом* элемента y при отображении f . Отображение f называют также *функцией*, заданной на множестве X и принимающей значения во множестве Y . Множество X называют *областью определения* функции f .

Если всякий $y \in Y$ является образом некоторого $x \in X$ при отображении f , то отображение f называют *отображением множества X на множество Y* . В этом случае множество Y называется *областью значений* функции f .

Приведем примеры отображений множеств:

а) Пусть X — множество всех действительных чисел, Y — множество всех неотрицательных чисел. Равенство $y = x^2$, связывающее с элементом множества X элемент y множества Y , задает отображение X на Y . При этом числу 2 соответствует число 4, числу 6 — число 36 и т. д.

б) Пусть X — множество всех действительных чисел, отличных от числа 3, Y — множество всех действительных чисел. Равенство $y = \frac{1}{x-3}$, связывающее с элементом x множества X элемент множества Y , задает отображение X в Y . Является ли это отображение отображением на Y ?

в) Пусть X — множество всех кругов, а Y — множество всех действительных чисел. Поставим каждому кругу в соответствие длину его радиуса. Мы получим отображение множества X в множество Y . Другое отображение X в Y получится, если поставить каждому кругу в соответствие его площадь.

г) Пусть X — множество всех треугольников, а Y — множество всех окружностей. Поставим каждому треугольнику в соответствие вписанную в него окружность. Получим отображение множества X в Y . Другое отображение X в Y получится, если поставить в соответствие каждому треугольнику описанную вокруг него окружность.

д) Пусть Y — множество всех деревьев на земном шаре, а X — множество всех плодов, растущих на этих деревьях. Поставим каждому плоду в

соответствие дереву, на котором он растет. Получим отображение множества X в множество Y .

Пусть f — отображение множества X в множество Y и пусть $X_1 \subset X$. Множество всех элементов вида $y = f(x)$, $x \in X_1$, называется *образом множества X_1 при отображении f* и обозначается $f(X_1)$.

Рассмотрим некоторый элемент y из множества Y и возьмем все элементы x из X , отображающиеся в y при отображении f . Множество всех этих элементов называют *полным прообразом* элемента y при отображении f и обозначают $f^{-1}(y)$. В первом примере в) полным прообразом положительного числа r является множество всех кругов радиуса r . В первом примере г) полным прообразом любой данной окружности является множество всех треугольников, описанных вокруг этой окружности.

Если полный прообраз каждого элемента y из Y при отображении f или пуст, или состоит только из одного элемента, то отображение f называется *вложением* в Y . Например, функция $y = x^2$ с отрезком $[1, 4]$ в качестве области определения определяет вложение этого отрезка в действительную ось.

Если f есть отображение множества X на множества Y и полный прообраз каждого элемента y из Y состоит лишь из одного элемента, то отображение f называется *взаимно-однозначным отображением множества X на множество Y* . Иными словами, отображение взаимно-однозначно, если каждый элемент из его области значений является образом одного и только одного элемента его области определения.

У п р а ж н е н и я

20. Множество X состоит из всех треугольников, а множество Y — из всех отрезков. Отображение f каждому треугольнику ставит в соответствие его среднюю линию. Является ли это отображение вложением? Из каких треугольников состоит полный прообраз данного отрезка?

21. Можно ли следующим образом задать отображение: множество X состоит из всех отрезков, а множество Y — из всех треугольников; каждому отрезку ставится в соответствие треугольник, для которого он есть средняя линия?

22. Каждому зрителю в кино поставим в соответствие кресло, на котором он сидит. Всегда ли определено это отображение? В каком случае это отображение является вложением? Из каких элементов состоит образ множества всех зрителей при этом отображении? В каком случае отображение будет взаимно-однозначным?

10. Краткие исторические сведения. Теоретико-множественные представления в неявной форме давно использовались математиками. Геометры древней Греции в III веке до н. э. рассматривали «геометрические места точек», то есть множества точек, обладающих тем или иным свойством. Однако трудности, связанные с понятием бесконечности, привели к тому, что в течение длительного времени математики избегали рассматривать геометрические фигуры как множества точек.

Исследования по бесконечным множествам начали чешский ученый Б. Больцано (1781—1841) и немецкий математик Г. Кантор (родился в 1845 г. в Петербурге, умер в 1918 г. в Галле). Труд Больцано был опубликован лишь через много лет после его смерти. Основные заслуги в развитии теории множеств принадлежат Кантору. Он пришел к проблемам этой теории, исходя из сравнительно узкой математической задачи (вопроса о сходимости и расходимости тригонометрических рядов). Однако вскоре ему и его последователям стало ясно, что теория множеств имеет важнейшее значение для различных областей математики. Сейчас теория множеств дает общепринятый язык для многих разделов математики. В целом ряде случаев применение

теоретико-множественных понятий позволило привести в систему многие ветви математики. Большой вклад в теорию множеств сделан трудами советских математиков П. С. Александрова, А. Н. Колмогорова, Н. Н. Лузина, П. С. Новикова, М. Я. Суслина и других. Советская школа теории множеств оказала сильное влияние на развитие этой части математики во всем мире.

Вскоре после создания теории множеств выяснилось, что «наивная» трактовка понятия бесконечного множества может привести к противоречиям. Исследования в этом направлении потребовали развития математической логики. Первоначально эта область математики была очень далека от практических приложений, но впоследствии ее принципы составили идейную основу конструирования электронных вычислительных машин и программирования вычислений на этих машинах.

Правила действий над высказываниями, во многом известные еще Аристотелю (создателю формальной логики), были более подробно сформулированы Г. В. Лейбницем, которого часто считают создателем математической логики. Алгебраическую форму этим правилам придали английские математики Дж. Буль (1815—1864) и А. де Морган (1806—1871). По сути дела, эти правила совпадают с указанными выше правилами действий над множествами. Большой вклад в развитие математической логики внесли Г. Фреге, Б. Рассел, Д. Гильберт, К. Гёдель, А. Тарский, советские математики П. С. Новиков, А. Н. Колмогоров, А. А. Марков и другие.

МНОГОЧЛЕНЫ ОТ ОДНОГО ПЕРЕМЕННОГО

§ 1. Тожественные преобразования многочленов

1. Основные законы алгебры. Читатель знаком с большим числом алгебраических формул: с формулой квадрата суммы и разности

$$(a \pm b)^2 = a^2 \pm 2ab + b^2,$$

с формулой разложения разности квадратов на множители

$$a^2 - b^2 = (a + b)(a - b)$$

и т. д. Ему известны и многочисленные правила действий над алгебраическими выражениями: сложения многочленов, умножения одночленов и многочленов, правила действий с алгебраическими дробями и т. д.

Все многообразие формул алгебры основано на нескольких основных законах, относящихся к сложению, вычитанию, умножению и делению чисел. Эти основные законы таковы:

- 1) $a + 0 = a$.
- 2) $a + (-a) = 0$.
- 3) $a + b = b + a$ (коммутативность сложения).
- 4) $a + (b + c) = (a + b) + c$ (ассоциативность сложения).
- 5) $ab = ba$ (коммутативность умножения).
- 6) $a(bc) = (ab)c$ (ассоциативность умножения).
- 7) $a(b + c) = ab + ac$ (дистрибутивность умножения относительно сложения).
- 8) $1 \cdot a = a$.
- 9) $a \cdot \frac{1}{a} = 1$, где $a \neq 0$.

Покажем, например, как из этих законов выводится формула

$$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2.$$

По закону дистрибутивности имеем:

$$(a + b)^2 = (a + b)(a + b) = (a + b)a + (a + b)b.$$

Используя коммутативность умножения, получаем:

$$(a + b)^2 = a(a + b) + b(a + b).$$

Вторично применяя дистрибутивность, а также коммутативность умножения и ассоциативность сложения, находим:

$$(a + b)^2 = (a^2 + ab) + (ba + b^2) = a^2 + (ab + ba) + b^2.$$

Поскольку

$$ab + ba = 1 \cdot ab + 1 \cdot ba = 1 \cdot ab + 1 \cdot ab = ab(1 + 1) = ab \cdot 2 = 2ab,$$

то и

$$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2.$$

Если выводиться аналогичным образом формулу

$$(a + b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3,$$

то придется использовать и ассоциативность умножения.

Роль законов 1) — 9) в алгебре аналогична роли аксиом в геометрии. Как в геометрии все теоремы выводятся из аксиом, так в алгебре все формулы выводятся из законов 1) — 9).

Как и аксиомы геометрии, алгебраические законы 1) — 9) не доказываются. Они являются обобщением многотысячелетнего опыта практической деятельности человечества. Прежде чем сформулировать закон $a + b = b + a$, надо было много раз подметить такие арифметические соотношения, как $5 + 3 = 3 + 5$, $7 + 12 = 12 + 7$ и т. д. Все остальные законы алгебры имеют то же происхождение — они являются буквенной записью многократно проверившихся арифметических соотношений.

У п р а ж н е н и е 1.

Выведите из основных законов алгебры формулы:

- а) $(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$;
- б) $(a + b)(a - b) = a^2 - b^2$;
- в) $(a + b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$;
- г) $(a + b)(a^2 - ab + b^2) = a^3 + b^3$.

2. Целые рациональные выражения и функции. Мы уже говорили, что алгебраические законы 1) — 9) составляют фундамент всего здания алгебры. Но каждый раз сводить решение того или иного алгебраического вопроса, вывод той или иной алгебраической формулы к непосредственному применению этих законов было бы крайне сложно. Точно так же, как в геометрии из аксиом выводят теоремы и потом на практике пользуются уже этими теоремами, в алгебре

из законов 1) — 9) выводят алгебраические формулы и правила, а потом пользуются этими формулами и правилами для решения более сложных задач.

В первую очередь надо вывести из алгебраических законов правила действий с одночленами и многочленами.

Введем сначала важные понятия рационального и целого рационального выражения.

Выражение, составленное из букв (например, a, b, c, \dots, x, y, z) и чисел с помощью знаков арифметических действий (сложения, вычитания, умножения и деления), называется *рациональным выражением* относительно входящих в него букв.

Примерами рациональных выражений (или, как их называли в начальной алгебре, *алгебраических дробей*) могут служить:

$$\begin{array}{lll} 1) 0; & 3) \frac{a}{b}; & 5) \frac{3c}{x-x}; \\ 2) \frac{2}{3}; & 4) \frac{a-0}{3b}; & 6) \frac{3ax^2 + 2bx + z^2}{3x + a + b + c}. \end{array}$$

Если придавать буквам числовые значения, то рациональное выражение, как правило, будет принимать определенные числовые значения (исключение составляют случаи, когда при вычислениях пришлось бы делить на 0).

Поэтому, как правило, *рациональное выражение является функцией от входящих в него букв*¹.

Рациональное выражение называется *целым* относительно некоторой буквы (например, x), если в нем нет операции деления на выражение, содержащее эту букву.

Например, выражения

$$\begin{array}{l} 1) (x^2 + 4)^5 (2x^3 + 1), \\ 2) 9ax^7 + 4ax^2(5x - 1) + x^4 - 5, \\ 3) \frac{a^2 + b^2}{2ab} x^2 - a^3x + \frac{3ab}{2a^2 + 3b^2} \end{array}$$

являются целыми относительно x .

Второе (и, конечно, первое!) выражение — целое относительно a , а третье — нет.

Целые рациональные выражения относительно буквы x являются, согласно сказанному выше, функциями от x .

¹ Исключения составляют такие выражения, как, например, $\frac{a}{x-x}$, которые не имеют числового значения ни при каких значениях входящих в них букв.

Такие функции называют *целыми рациональными функциями* от x .

При сложении, вычитании и умножении целых рациональных выражений снова получаются выражения того же вида. Например, если

$$f(x) = (x^2 + 1)^2 - 4,$$

$$\text{а } \varphi(x) = x^3 + 2,$$

то

$$f(x) + \varphi(x) = (x^2 + 1)^2 - 4 + (x^3 + 2),$$

$$f(x) - \varphi(x) = (x^2 + 1)^2 - 4 - (x^3 + 2),$$

$$f(x) \varphi(x) = [(x^2 + 1)^2 - 4] \cdot (x^3 + 2)$$

также целые рациональные выражения.

Два целых рациональных выражения относительно x называются *тождественно равными*, если они принимают одинаковые значения при всех значениях буквы x . В этом случае они задают одну и ту же функцию переменного x . Например, из формулы $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$ вытекает, что целые рациональные выражения $(x + 1)^2$ и $x^2 + 2x + 1$ тождественно равны. Правила тождественных преобразований целых рациональных выражений знакомы читателю из начального курса алгебры. Мы укажем здесь более строгий и общий вывод некоторых из этих правил.

3. Степень с натуральным показателем и ее свойства. Напомним понятие степени с натуральным показателем. Пусть a — некоторое число¹, а n — натуральное число. Произведение n сомножителей, каждый из которых равен a , называют n -й *степенью числа a* и обозначают a^n . Число a называют *основанием степени*, а n — *показателем степени*. Например,

$$3^4 = 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 = 81;$$

$$(-2)^5 = (-2) \cdot (-2) \cdot (-2) \cdot (-2) \cdot (-2) = -32;$$

$$a^6 = a \cdot a \cdot a \cdot a \cdot a \cdot a.$$

Хотя само число a нельзя взять сомножителем только один раз, естественно положить $a^1 = a$, то есть считать, что первая степень числа равна этому числу.

Из определения степени сразу вытекает, что для любого натурального n выполняются равенства $0^n = 0$ и $1^n = 1$.

¹ В этой и следующих главах слова «некоторое число» понимаются как «некоторое действительное число». В главе V мы расширим понятие числа, введя комплексные числа, после чего и слова «некоторое число» будем понимать иначе.

Операция возведения в степень с натуральным показателем обладает следующими свойствами:

1) Если a и b — любые числа и n — натуральное число, то

$$(a \cdot b)^n = a^n \cdot b^n \quad (1)$$

(дистрибутивность возведения в степень относительно умножения). Иными словами, чтобы возвести в степень произведение двух чисел, надо возвести в степень оба сомножителя и перемножить полученные результаты.

В самом деле, из определения степени следует, что

$$(a \cdot b)^n = \underbrace{(ab) \cdot (ab) \cdot \dots \cdot (ab)}_{n \text{ раз}}.$$

Используя ассоциативность и коммутативность умножения, переставим в правой части сомножители так, чтобы сначала шли все сомножители, равные a , а потом равные b . Мы получим:

$$(ab)^n = \underbrace{(a \cdot a \cdot \dots \cdot a)}_{n \text{ раз}} \cdot \underbrace{(b \cdot b \cdot \dots \cdot b)}_{n \text{ раз}}.$$

Но $a \cdot a \cdot \dots \cdot a = a^n$, $b \cdot b \cdot \dots \cdot b = b^n$, а потому

$$(ab)^n = a^n b^n.$$

Соотношение (1) доказано.

2) Для любых чисел a и b , где $b \neq 0$, и любого натурального числа n выполняется равенство:

$$\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}. \quad (2)$$

Иными словами, чтобы возвести в степень дробь, надо возвести в эту степень числитель и знаменатель дроби и разделить степень числителя на степень знаменателя. В самом деле, по правилу умножения дробей

$$\left(\frac{a}{b}\right)^n = \underbrace{\frac{a}{b} \cdot \frac{a}{b} \cdot \dots \cdot \frac{a}{b}}_{n \text{ раз}} = \frac{\overbrace{a \cdot a \cdot \dots \cdot a}^{n \text{ раз}}}{\underbrace{b \cdot b \cdot \dots \cdot b}_{n \text{ раз}}} = \frac{a^n}{b^n}. \quad (2')$$

Из формулы (2) следует, в частности, что при $b \neq 0$

$$\left(\frac{1}{b}\right)^n = \frac{1}{b^n}. \quad (3)$$

3) Для любого числа a и любых натуральных чисел m и n выполняется равенство:

$$a^m \cdot a^n = a^{m+n}. \quad (4)$$

В самом деле, из определения степени с натуральным показателем и ассоциативности умножения следует, что

$$a^m \cdot a^n = \underbrace{a \cdot a \cdot a \cdot \dots \cdot a}_{m \text{ раз}} \cdot \underbrace{a \cdot a \cdot a \cdot \dots \cdot a}_{n \text{ раз}} = \underbrace{a \cdot a \cdot a \cdot \dots \cdot a}_{(m+n) \text{ раз}} = a^{m+n}.$$

Формулу (4) читают так: *при умножении степеней с одинаковыми основаниями показатели степеней складываются.*

4) Если a — любое число, отличное от нуля, а m и n — натуральные числа, причем $m > n$, то

$$\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}. \quad (5)$$

Если же $m < n$, то

$$\frac{a^m}{a^n} = \frac{1}{a^{n-m}}. \quad (6)$$

Иными словами, *при делении степеней с одинаковыми основаниями показатели степеней вычитаются.*

В самом деле, пусть $m > n$. Тогда имеем:

$$\frac{a^m}{a^n} = \frac{\overbrace{a \cdot a \cdot \dots \cdot a}^{m \text{ раз}}}{\underbrace{a \cdot a \cdot a \cdot \dots \cdot a}_{n \text{ раз}}}.$$

Сократим дробь на n множителей, равных a . Тогда в числителе останется $m - n$ таких множителей, а знаменатель обратится в единицу. Поэтому мы получим, что

$$\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}.$$

Разберите самостоятельно случай, когда $m < n$.

5) Для любого числа a и любых натуральных чисел m и n выполняется равенство:

$$(a^m)^n = a^{mn},$$

т. е. *при возведении степени в степень показатели перемножаются.*

В самом деле, из определения степени с натуральным показателем следует, что

$$\begin{aligned} (a^m)^n &= \underbrace{a^m \cdot a^m \cdot \dots \cdot a^m}_{n \text{ раз}} \\ &= \underbrace{(a \cdot a \cdot \dots \cdot a)}_{m \text{ раз}} \cdot \underbrace{(a \cdot a \cdot \dots \cdot a)}_{m \text{ раз}} \cdot \dots \cdot \underbrace{(a \cdot a \cdot a \cdot \dots \cdot a)}_{m \text{ раз}} \\ &\quad \underbrace{\hspace{10em}}_{n \text{ раз}} \end{aligned}$$

В правой части этого равенства имеем mn сомножителей, каждый из которых равен a , а потому все произведение равно a^{mn} . Итак, $(a^m)^n = a^{mn}$.

Если a — положительное число, то при любом натуральном n число a^n положительно. Если же a — отрицательное число, то a^n положительно при четном n и отрицательно при нечетном n .

Правила 1), 2), 5) можно использовать для возведения в степень одночленов. Пусть, например, надо вычислить

$$\left(\frac{3a^5 b^3}{4c^2 d^7} \right)^4.$$

По правилам 2) и 1) имеем:

$$\left(\frac{3a^5 b^3}{4c^2 d^7} \right)^4 = \frac{(3a^5 b^3)^4}{(4c^2 d^7)^4} = \frac{3^4 \cdot (a^5)^4 \cdot (b^3)^4}{4^4 (c^2)^4 \cdot (d^7)^4}.$$

Применяя правило 5), получаем:

$$\left(\frac{3a^5 b^3}{4c^2 d^7} \right)^4 = \frac{81a^{20} b^{12}}{256c^8 d^{28}}.$$

Рассмотрим еще пример:

$$\begin{aligned} & \left(\frac{6a^m b^{2m} c^{n+1}}{d^{m+3} e^{n-1}} \right)^3 : \left(\frac{a^{m-1} b^{m+2} c^3}{5d^{m+4} e^{n+3}} \right)^2 = \frac{216a^{3m} b^{6m} c^{3n+3}}{d^{3m+9} e^{3n-3}} : \frac{a^{2m-2} b^{2m+4} c^6}{25d^{2m+8} e^{2n+6}} = \\ & = \frac{216a^{3m} b^{6m} c^{3n+3} \cdot 25d^{2m+8} e^{2n+6}}{d^{3m+9} e^{3n-3} \cdot a^{2m-2} b^{2m+4} c^6} = \frac{5400a^{m+2} b^{4m-4} c^{3n-3}}{d^{m+1} e^{n-9}}. \end{aligned}$$

4. Многочлены. Пусть $y = f(x)$ — целая рациональная функция. Как уже говорилось, ее выражение через x может иметь различный внешний вид. Например, выражения

$$\begin{aligned} & (x+1)^2 (x-1)^2, \\ & (x^2 + 2x + 1)(x^2 - 2x + 1), \\ & (x^2 - 1)^2, \\ & x^4 - 2x^2 + 1, \\ & x^4 - x^2 - x^2 + 5 - 4 \end{aligned}$$

тождественно равны друг другу и потому задают одну и ту же функцию. Поэтому возникает задача — представить данную целую рациональную функцию в «стандартном», «каноническом» виде. Мы будем считать запись целой рациональной функции *канонической*, если она не содержит скобок и подобных членов, а слагаемые в ней расположены в порядке убывания показателей степеней x (для рассмотренного выше примера такой записью является $y = x^4 - 2x^2 + 1$).

Приведение к канонической форме делается так. Раскрывают все скобки с помощью дистрибутивного закона $a(b + c) = ab + ac$. После раскрытия скобок заменяют все произведения степеней переменного по правилам п. 3, приводят подобные члены и располагают члены в порядке убывания показателей степени. В результате получается выражение вида

$$f(x) = a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \dots + a_n,$$

где $a_0 \neq 0$. Такое выражение называют *многочленом от x* , а n — *степенью* этого многочлена. Числа a_0, a_1, \dots, a_n называют *коэффициентами* многочлена $f(x)$. В частности, a_0 называют коэффициентом при старшем члене, a_n — *свободным членом*. Если $a_0 = 1$, многочлен называют *приведенным*. Например, $x^5 - 3x^4 + 2x - 6$ — приведенный многочлен пятой степени от x со свободным членом -6 .

Числа $c \neq 0$ мы будем рассматривать как многочлены нулевой степени. Многочлен же, все коэффициенты которого равны нулю (нулевой многочлен), степени не имеет.

Приведение данного целого рационального выражения к каноническому виду можно выполнить различными путями. Например, в выражении

$$(x + 1)(x + 2)(x + 3)$$

можно сначала перемножить $(x + 1)$ на $(x + 2)$, а можно сначала перемножить $(x + 2)$ на $(x + 3)$. Поэтому возникает следующий вопрос: могут ли два различных многочлена тождественно равняться одному и тому же целому рациональному выражению?

Мы покажем ниже, что ответ на этот вопрос отрицателен: *если два многочлена тождественно равны, то они имеют одинаковые степени, а коэффициенты при одинаковых степенях x в обоих многочленах совпадают*. Поэтому, чтобы убедиться в тождественном равенстве двух целых рациональных выражений, надо привести их к каноническому виду (т. е. к виду многочленов) и проверить, что получившиеся многочлены совпадают.

Пример. Доказать тождество

$$(x^2 + 1)^3 - 3(x^2 - x + 1)^2 + 6x(x - 1) + 11 = (x^3 + 3)^2.$$

Имеем:

$$(x^2 + 1)^3 - 3(x^2 - x + 1)^2 + 6x(x - 1) + 11 = x^6 + 6x^3 + 9$$

и

$$(x^3 + 3)^2 = x^6 + 6x^3 + 9.$$

Так как получились одинаковые многочлены, то заданные целые рациональные выражения равны.

У п р а ж н е н и я

2. а) Доказать, что если $S = a + \frac{1}{a}$, то

$$a^4 + \frac{1}{a^4} = S^2(S^2 - 4) + 2.$$

б) Показать, что

$$(x + a)(x + 2a)(x + 3a)(x + 4a) + a^4$$

есть полный квадрат.

3. Доказать тождества:

а) $(x - 1)(x + 1)(x^2 + 1) = x^4 - 1$;

б) $(x^2 - x + 1)(x^2 + x + 1) = x^4 + x^2 + 1$;

в) $(x - 1)(x + 1)(x^2 - x + 1)(x^2 + x + 1) = x^6 - 1$.

4. Упростить выражения:

а) $(x^2 - x + 1)(x^2 + x + 1)(x^4 + x^2 + 1)$;

б) $(x^2 - x + 1)(x^2 + x + 1)(x^4 - x^2 + 1)$;

в) $(x^2 + 2x - 1)(x^2 - 2x - 1)(x^4 - 6x^2 + 1)$.

5. Доказать тождества:

а) $x(x + 1)(x + 2)(x + 3) = (x^2 + 3x + 1)^2 - 1$;

б) $1 + x^4 = (1 + x\sqrt{2} + x^2)(1 - x\sqrt{2} + x^2)$;

в) $1 + x^6 = (1 + x^2)(1 + x\sqrt{3} + x^2)(1 - x\sqrt{3} + x^2)$;

г) $x^8 - 1 = (x - 1)(x + 1)(x^2 + 1)(x^2 + x\sqrt{2} + 1)(x^2 - x\sqrt{2} + 1)$.

5. Умножение многочленов. Так как многочлены — это частный случай целых рациональных выражений, то над ними можно выполнять действия сложения, вычитания и умножения. При этом будут получаться целые рациональные выражения, но, вообще говоря, эти выражения не будут многочленами¹. Например, складывая многочлены $x^3 + 2x^2 + 1$ и $x^2 + 6x - 7$, получим целое рациональное выражение $x^3 + 2x^2 + 1 + x^2 + 6x - 7$. Однако после приведения подобных членов (и перегруппировки по убыванию степеней x) мы уже получим многочлен $x^3 + 3x^2 + 6x - 6$. В дальнейшем под суммой, разностью, произведением двух многочленов мы будем понимать многочлен, получающийся после приведения соответствующего целого рационального выражения к каноническому виду. Например, произведением многочленов

и $f(x) = x^2 - x + 1$

$$\varphi(x) = x^2 - 1$$

¹ В этой книге термин «многочлен» употребляется лишь для канонически записанных целых рациональных выражений, хотя чаще им обозначают любую целую рациональную функцию.

мы назовем многочлен

$$f(x) \varphi(x) = x^4 - x^3 + x - 1,$$

получающийся из целого рационального выражения

$$(x^2 - x + 1)(x^2 - 1)$$

после раскрытия скобок и приведения подобных членов.

Действия над многочленами сводятся к действиям над их коэффициентами. Так, сложение многочленов сводится к сложению коэффициентов при одинаковых степенях x .

Рассмотрим, как выражаются через коэффициенты сомножителей коэффициенты произведения двух многочленов. Пусть даны многочлены:

$$f(x) = a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \dots + a_n$$

и

$$\varphi(x) = b_0 x^m + b_1 x^{m-1} + \dots + b_m.$$

Перемножая их, получим целую рациональную функцию

$$(a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \dots + a_n)(b_0 x^m + b_1 x^{m-1} + \dots + b_m).$$

Раскроем скобки, воспользуемся формулой $x^k \cdot x^s = x^{k+s}$ и приведем подобные члены. Получим многочлен:

$$f(x) \cdot \varphi(x) = c_0 x^{m+n} + c_1 x^{m+n-1} + \dots + c_{m+n},$$

который и является произведением многочленов $f(x)$ и $\varphi(x)$.

Старший член многочлена $f(x) \varphi(x)$ имеет степень $m+n$ и является произведением старших членов многочленов $f(x)$ и $\varphi(x)$:

$$c_0 x^{m+n} = a_0 x^n \cdot b_0 x^m = a_0 b_0 x^{m+n}.$$

Поэтому $c_0 = a_0 b_0$.

Точно так же свободный член в $f(x) \varphi(x)$ является произведением свободных членов многочленов $f(x)$ и $\varphi(x)$

$$c_{m+n} = a_n b_m.$$

Выясним, какой вид имеют остальные коэффициенты многочлена $f(x) \varphi(x)$. Член, содержащий x^{m+n-1} , появляется дважды: при умножении $a_0 x^n$ на $b_1 x^{m-1}$ и при умножении $a_1 x^{n-1}$ на $b_0 x^m$. Поэтому коэффициент при этом члене равен $a_0 b_1 + b_0 a_1$. Итак,

$$c_1 = a_0 b_1 + b_0 a_1.$$

Точно так же доказывается формула:

$$c_2 = a_0 b_2 + a_1 b_1 + a_2 b_0.$$

Легко заметить общий закон: *сумма индексов в каждом слагаемом равна индексу искомого коэффициента*:

$$c_k = a_0 b_k + a_1 b_{k-1} + \dots + a_k b_0. \quad (1)$$

При этом если $k > m$ или $k > n$, то некоторые члены в этом равенстве надо опустить — ведь в $f(x)$ нет коэффициентов a_k , для которых $k > n$, а в $\varphi(x)$ нет коэффициентов b_k , для которых $k > m$.

Например, по формуле (1) получаем, что

$$(2x^2 + 5x + 15)(4x^3 - 7x^2 + 6x + 3) = 2 \cdot 4x^5 + [2 \cdot (-7) + 5 \cdot 4] x^4 + [2 \cdot 6 + 5 \cdot (-7) + 15 \cdot 4] x^3 + [2 \cdot 3 + 5 \cdot 6 + 15 \cdot (-7)] x^2 + (5 \cdot 3 + 15 \cdot 6) x + 15 \cdot 3 = 8x^5 + 6x^4 + 37x^3 - 69x^2 + 105x + 45.$$

В дальнейшем нам понадобится следующее тождество:

$$x^n - a^n = (x - a)(x^{n-1} + ax^{n-2} + \dots + a^{n-k}x^{k-1} + \dots + a^{n-1}). \quad (2)$$

Чтобы доказать это тождество, раскроем скобки в правой части. Члены, содержащие x^k , $1 \leq k \leq n-1$, встретятся дважды: при умножении x на $a^{n-k}x^{k-1}$ и при умножении $(-a)$ на $a^{n-k-1}x^k$.

Сумма этих произведений равна нулю:

$$x \cdot a^{n-k}x^{k-1} + (-a) a^{n-k-1}x^k = 0.$$

Поэтому остаются лишь члены x^n и $(-a^n)$. Тем самым тождество (2) доказано.

Точно так же доказывается тождество:

$$x^{2n+1} + a^{2n+1} = (x + a)(x^{2n} - ax^{2n-1} + \dots + (-1)^k a^k x^{2n-k} + \dots + a^{2n}).$$

У п р а ж н е н и я

6. Найти коэффициенты при x^n и x^{n-2} в произведении

$$(1 + c_1x + \dots + c_nx^n)(x^n + c_1x^{n-1} + \dots + c_n).$$

7. Разложить на множители многочлены:

а) $x^4 + x^2 + 1$;

б) $x^{16} + x^8 + 1$;

в) $x^4 - 12x^3 + 47x^2 - 60x$;

г) $x^5 + x^4 + x^3 + x^2 + x + 1$;

д) $3a^5 - a^{12} - 1$;

е) $a^4 + 4$;

ж) $x^5 - x - 1$.

8. Доказать, что при любом натуральном значении n

$$n^4 + 6n^3 + 11n^2 + 6$$

делится без остатка на 24.

9*. Пусть

$$f(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \dots + a_n$$

— многочлен с целыми коэффициентами и пусть существует такое простое число p , что a_0 не делится на p ; a_1, a_2, \dots, a_n делятся на p и a_n не делится на p^2 . Доказать, что $f(x)$ не разлагается в произведение многочленов с целыми коэффициентами.

10*. Пусть

$$f(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \dots + a_n$$

и

$$\varphi(x) = b_0x^m + b_1x^{m-1} + \dots + b_m$$

— многочлены с целыми коэффициентами, причем общий наибольший делитель чисел a_0, a_1, \dots, a_n и общий наибольший делитель чисел b_0, b_1, \dots, b_m равны 1. Доказать, что общий наибольший делитель коэффициентов многочлена $f(x)\varphi(x)$ равен 1.

6. Числовые кольца и поля. Мы видели, что действия над многочленами сводятся к действиям над их коэффициентами. При этом для сложения, вычитания и умножения многочленов достаточно трех арифметических действий — деление чисел не понадобилось. Так как сумма, разность и произведение двух действительных чисел снова являются действительными числами, то при сложении, вычитании и умножении многочленов с действительными коэффициентами в результате получаются многочлены с действительными же коэффициентами.

Однако не всегда приходится иметь дело с многочленами, имеющими любые действительные коэффициенты. Возможны случаи, когда по самой сути дела коэффициенты должны иметь лишь целые или лишь рациональные значения. В зависимости от того, какие значения коэффициентов считаются допустимыми, меняются свойства многочленов. Например, если рассматривать многочлены с любыми действительными коэффициентами, то $x^2 - 2$ можно разложить на множители:

$$x^2 - 2 = (x - \sqrt{2})(x + \sqrt{2}). \quad (1)$$

Если же ограничиться многочленами с целыми коэффициентами, то разложение (1) не имеет смысла и мы должны считать многочлен $x^2 - 2$ неразложимым на множители.

Отсюда видно, что теория многочленов существенно зависит от того, какие коэффициенты считаются допустимыми. Далеко не любую совокупность коэффициентов можно принять за допустимую. Например, рассмотрим все многочлены, коэффициенты которых — нечетные целые числа. Ясно, что сумма двух таких многочленов уже не будет многочленом того же типа: ведь сумма нечетных чисел — четное число.

Поставим вопрос: каковы «хорошие» множества коэффициентов? Когда сумма, разность, произведение многочленов с коэффициентами данного типа имеют коэффициенты того же типа? Для ответа на этот вопрос введем понятие числового кольца.

О п р е д е л е н и е. Непустое множество чисел R называется *числовым кольцом*, если вместе с любыми двумя числами a и b оно содержит их сумму, разность и произведение. Это выражают также короче, говоря, что числовое кольцо замкнуто относительно операций сложения, вычитания и умножения.

П р и м е р ы.

1) Множество целых чисел является числовым кольцом: сумма, разность и произведение целых чисел — целые числа. Множество же натуральных чисел числовым кольцом не является, так как разность натуральных чисел может быть отрицательной.

2) Множество всех рациональных чисел — числовое кольцо, так как сумма, разность и произведение рациональных чисел рациональны.

3) Образует числовое кольцо и множество всех действительных чисел.

4) Числа вида $a + b\sqrt{2}$, где a и b — целые, образуют числовое кольцо. Это следует из соотношений:

$$(a_1 + b_1\sqrt{2}) \pm (a_2 + b_2\sqrt{2}) = (a_1 \pm a_2) + (b_1 \pm b_2)\sqrt{2};$$

$$(a_1 + b_1\sqrt{2})(a_2 + b_2\sqrt{2}) = (a_1a_2 + 2b_1b_2) + (a_1b_2 + a_2b_1)\sqrt{2}.$$

5) Множество нечетных чисел не является числовым кольцом, так как сумма нечетных чисел четна. Множество же четных чисел — числовое кольцо.

Если числовое кольцо R состоит не только из одного нуля и вместе с лубыми двумя элементами a и b , где $b \neq 0$, содержит и их частное $\frac{a}{b}$, то R называют *числовым полем*. Множества из примеров 2) и 3) — числовые поля. А множества целых чисел и всех четных чисел не являются числовыми полями. Например, частное $\frac{5}{4}$ не является целым числом.

У п р а ж н е н и я

11. Доказать, что множество нечетных чисел не замкнуто относительно вычитания.

12. Доказать, что множество чисел вида $3n + 1$ не замкнуто относительно сложения.

13. Доказать, что множество чисел вида $3n + 1$ замкнуто относительно умножения.

14. Доказать, что множество чисел вида $3n + 2$ не замкнуто относительно умножения.

15. Доказать, что следующие множества замкнуты относительно указанных операций:

а) целые числа вида $3n$ относительно сложения;

б) целые числа вида $3n$ относительно умножения;

в) целые числа вида $kn + 1$, где k — фиксированное целое число, относительно умножения.

16. Определить, какие из следующих множеств замкнуты относительно указанных операций (в каждом случае дать соответствующее доказательство):

а) целые числа вида $6n + 3$ относительно сложения;

б) целые числа вида $6n + 3$ относительно умножения;

в) целые числа вида $6n$ относительно умножения;

г) целые числа вида $6n + 1$ относительно вычитания;

д) целые числа вида $6n + 1$ относительно умножения;

е) целые числа, не представимые в виде $3n$, относительно умножения;

ж) сумма множеств $\{6n + 1\}$ и $\{6n + 5\}$ относительно умножения.

17. Доказать, что если множества A и B — числовые кольца, то и их пересечение тоже является числовым кольцом. Верно ли это утверждение для суммы множеств?

18. Доказать, что множество чисел вида $a + b\sqrt{2}$, где a и b — рациональные числа, образует числовое поле.

19. Доказать, что множество чисел вида

$$a + b\sqrt{2} + c\sqrt{3} + d\sqrt{6},$$

где a, b, c, d — целые числа, образует числовое кольцо.

20. Образует ли числовое кольцо множество чисел вида

$$a + b\sqrt{2} + c\sqrt{3},$$

где a, b, c — рациональные числа?

21. Образует ли числовое кольцо множество правильных дробей?

22. Образует ли числовое кольцо множество положительных чисел?

7. Кольцо многочленов над данным числовым полем. Пусть R — числовое поле. Рассмотрим множество всех многочленов, коэффициенты которых принадлежат числовому полю R , то есть многочленов вида

$$f(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \dots + a_n,$$

где $a_k \in R$, $0 \leq k \leq n$. Это множество обозначают $R[x]$. Легко проверить, что сумма, разность и произведение двух многочленов из $R[x]$ также принадлежит $R[x]$. По аналогии с числовыми кольцами множество многочленов $R[x]$ называют *кольцом многочленов над числовым полем R* .

Ясно, что если R_1 и R_2 — два числовых поля, причем R_1 — подмножество R_2 , то всякий многочлен из кольца $R_1[x]$ можно рассматривать и как многочлен из кольца $R_2[x]$, то есть $R_1[x] \subset R_2[x]$.

У п р а ж н е н и я

23. Пусть R — поле рациональных чисел. Какие из нижеследующих многочленов принадлежат кольцу $R[x]$?

а) $x^3 + \frac{3}{5}x^2 + \frac{7}{11}x - 0,01$; г) $x^5 - 6x^2 + \frac{3}{4}x + \sqrt[7]{3}$;

б) $x^2 + \sqrt{2}x + 8$;

в) $x^7 + \pi x + 4$;

д) $\frac{1}{4}x^6 - x^2 + x - 0,5$.

24. Разлагается ли многочлен $x^2 + 28x + 14$ на множители в $R[x]$, где R — поле рациональных чисел? А если R — поле действительных чисел?

8. Бином Ньютона. При преобразовании целых рациональных выражений в многочлены часто приходится разлагать выражения вида $(x + a)^n$. Выведем формулу для этого разложения. Случаи $n = 2$ и $n = 3$ известны из курса начальной алгебры:

$$(x + a)^2 = x^2 + 2ax + a^2,$$

$$(x + a)^3 = x^3 + 3ax^2 + 3a^2x + a^3.$$

В разложение $(x + a)^2$ входят члены, содержащие x^2 , ax , a^2 , а в разложение $(x + a)^3$ — члены, содержащие x^3 , ax^2 , a^2x , a^3 .

Естественно предположить, что в разложение $(x + a)^n$ должны войти члены, содержащие

$$x^n, ax^{n-1}, a^2x^{n-2}, \dots, a^kx^{n-k}, \dots, a^n.$$

При этом старший член разложения должен равняться x^n , а свободный член равен a^n . Докажем это предположение с помощью индукции по n ¹. Предположим, что уже доказана формула

$$(x + a)^n = x^n + C_n^1 ax^{n-1} + \dots + C_n^k a^k x^{n-k} + \dots + a^n, \quad (1)$$

где через C_n^k обозначен коэффициент при $a^k x^{n-k}$ в разложении выражения $(x + a)^n$. Умножим обе части разложения (1) на $(x + a)$:

$$(x + a)^{n+1} = (x^n + C_n^1 ax^{n-1} + \dots + C_n^{k-1} a^{k-1} x^{n-k+1} + C_n^k a^k x^{n-k} + \dots + a^n)(x + a).$$

Посмотрим, какой коэффициент при x^{n-k+1} получится после раскрытия скобок. Ясно, что члены с x^{n-k+1} встретятся дважды: при умножении $C_n^k a^k x^{n-k}$ на x и при умножении $C_n^{k-1} a^{k-1} x^{n-k+1}$ на a . Значит, коэффициент при x^{n-k+1} равен $(C_n^k + C_n^{k-1})a^k$. При этом коэффициент при x^{n+1} равен 1, а свободный член равен a^{n+1} . Итак, мы доказали, что

$$(x + a)^{n+1} = x^{n+1} + C_{n+1}^1 ax^n + \dots + C_{n+1}^k a^k x^{n-k+1} + \dots + a^{n+1},$$

где

$$C_{n+1}^k = C_n^k + C_n^{k-1}. \quad (2)$$

Итак, если разложение (1) справедливо для n , то оно справедливо и для $n + 1$. Так как оно имеет место при $n = 1$, то оно выполняется и при $n = 2$, а тогда и при $n = 3$ и т. д. Значит, оно верно для всех n .

Разложение (1) называют *биномом Ньютона*. Коэффициенты C_n^k называются *биномиальными коэффициентами*. Мы получили для них соотношение (2).

Так как первый и последний коэффициенты разложения (1) равны 1, то полагают по определению

$$C_n^0 = C_n^n = 1.$$

¹ По поводу метода полной математической индукции см., например, нашу книгу «Математический анализ» (готовится к печати в издательстве «Промышленность»).

С помощью соотношения (2) можно вычислить все биномиальные коэффициенты $C_{n+1}^0, C_{n+1}^1, \dots, C_{n+1}^{n+1}$, зная коэффициенты $C_n^0, C_n^1, C_n^2, \dots, C_n^n$.

Именно

$$C_{n+1}^0 = C_n^0, C_{n+1}^1 = C_n^1 + C_n^0, C_{n+1}^2 = C_n^2 + C_n^1, \dots, C_{n+1}^{n+1} = C_n^n.$$

Заметим, что при вычислении C_{n+1}^0 и C_{n+1}^{n+1} мы берем в формуле (2) лишь одно слагаемое.

Найдя $C_{n+1}^0, C_{n+2}^0, \dots, C_{n+1}^{n+1}$, мы вычисляем $C_{n+2}^0, C_{n+2}^1, C_{n+2}^2, \dots, C_{n+2}^{n+2}$.

Такое вычисление удобно располагать в виде следующей таблицы:

				1					
				1		1			
			1		2		1		
		1		3		3		1	
	1		4		6		4		1
1		5		10		10		5	
	6		15		20		15		6
		1		20		15		6	
...

Здесь каждое число в следующей строке является суммой двух стоящих над ним чисел предыдущей строки (если с какой-нибудь стороны числа нет, соответствующее слагаемое полагают равным нулю). Этот числовой треугольник называют *треугольником Паскаля*. С помощью треугольника Паскаля можно вычислять биномиальные коэффициенты для любого n .

Явное выражение для любого биномиального коэффициента имеет следующий вид:

$$C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!}, \quad (3)$$

где $n!$ — произведение всех натуральных чисел от 1 до n (например, $6! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 = 720$). Принято считать, кроме того, что $0! = 1$. В главе IX равенство (3) будет выведено с помощью методов комбинаторики.

У п р а ж н е н и я

25. Вычислить выражения

$$(1 + \sqrt{2})^{15}; \quad (\sqrt{3} - 1)^9; \quad (3x^2 + 2a^3)^5.$$

26. Найти шестой член разложения

$$(2a^2 - bx)^{10}.$$

27. Доказать тождество

$$(x+1)^5 - x^5 - 5x(x+1)^4 + 5x^4(x+1) + 10x^2(x+1)^2 = 1.$$

28. В разложении $\left(y^2 + \frac{c}{y}\right)^5$ найти члены, содержащие букву y в первой степени и в четвертой степени.

29. В разложении $\left(a^2 x^2 + \frac{b}{x^2}\right)^{10}$ найти член, не содержащий буквы x .

30. Проверить, что выражение (3) удовлетворяет соотношению (2).

31. Из соотношения (2) вывести, что

$$C_n^1 = n, \quad C_n^2 = \frac{n(n-1)}{2}.$$

32. Не пользуясь формулой (3), покажите, что

$$C_n^k = C_n^{n-k}.$$

§ 2. Деление многочленов. Корни многочленов

1. Деление многочленов. В отличие от операций сложения и умножения многочленов операция деления многочленов не всегда выполнима: если $f(x)$ и $\varphi(x)$ — два многочлена, то далеко не всегда найдется третий многочлен $q(x)$ такой, что $f(x) = \varphi(x)q(x)$. В этом отношении множество многочленов больше напоминает множество целых чисел, чем множество рациональных чисел (иными словами кольцо многочленов не является полем). Но так же, как и для целых чисел, для многочленов всегда определена операция деления с остатком. Мы изучим ее в этом параграфе. При этом будут рассматриваться многочлены, коэффициенты которых принадлежат некоторому числовому полю R (многочлены из кольца $R[x]$). Читатель может при желании считать его полем всех действительных чисел или полем всех рациональных чисел.

Определим для многочленов понятие деления с остатком. Пусть даны два многочлена

$$f(x) = a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \dots + a_n, \quad a_0 \neq 0$$

и

$$\varphi(x) = b_0 x^m + b_1 x^{m-1} + \dots + b_m, \quad b_0 \neq 0$$

и пусть существуют многочлены $q(x)$ и $r(x)$ такие, что:

1) Имеет место тождество

$$f(x) = \varphi(x)q(x) + r(x).$$

2) Степень многочлена $r(x)$ меньше степени многочлена $\varphi(x)$, или $r(x) = 0$.

В этом случае многочлен $q(x)$ называют *неполным частным* при делении $f(x)$ на $\varphi(x)$, а $r(x)$ — *остатком* при этом делении. Если $f(x) = \varphi(x) q(x)$, то есть если $r(x) = 0$, то говорят, что $f(x)$ *делится на $\varphi(x)$ без остатка*, а $q(x)$ называют *частным*.

Например, если $f(x) = x^3 - 1$ и $\varphi(x) = x^2 + 3x + 1$, то из тождества

$$x^3 - 1 = (x^2 + 3x + 1)(x - 3) + 8x + 2$$

следует, что неполным частным является $q(x) = x - 3$, а остатком — $r(x) = 8x + 2$. Многочлен $x^3 - 8$ делится без остатка на $x^2 + 2x + 4$, так как

$$x^3 - 8 = (x^2 + 2x + 4)(x - 2).$$

Выясним теперь: всегда ли возможно деление с остатком и однозначно ли оно определено? Иными словами, рассмотрим следующие вопросы:

Даны многочлены $f(x)$ и $\varphi(x)$. Существуют ли такие многочлены $q(x)$ и $r(x)$, что $f(x) = \varphi(x)q(x) + r(x)$ и степень $r(x)$ меньше степени $\varphi(x)$ (или $r(x) = 0$)? Если эти многочлены существуют, то однозначно ли они определены?

Вопросы такого типа возникают во многих областях математики. Их называют соответственно вопросами о существовании и единственности решения данной задачи.

Для рассматриваемой здесь задачи мы докажем существование решения, указав способ отыскания неполного частного и остатка по заданным многочленам $f(x)$ и $\varphi(x)$. После этого будет доказано, что решение задачи единственно.

Рассмотрим сначала следующий пример. Пусть $f(x) = 3x^6 + 2x^4 - 2x^3 + x - 6$ и $\varphi(x) = x^4 + 2x + 2$. Заметим, что если умножить $\varphi(x)$ на $3x^2$, то получится многочлен $3x^2\varphi(x) = 3x^2(x^4 + 2x + 2) = 3x^6 + 6x^3 + 6x^2$, имеющий тот же старший член, что и $f(x)$. Поэтому степень многочлена

$$f(x) - 3x^2\varphi(x) = 2x^4 - 8x^3 - 6x^2 + x - 6$$

меньше степени многочлена $f(x)$.

Если умножить $\varphi(x)$ на 2, то получим многочлен $2\varphi(x) = 2x^4 + 4x + 4$, имеющий тот же старший член, что и $f(x) - 3x^2\varphi(x)$. Многочлен $r(x) = f(x) - 3x^2\varphi(x) - 2\varphi(x) = -8x^3 - 6x^2 - 3x - 10$ имеет меньшую степень, чем $\varphi(x)$.

Таким образом, мы получили равенство:

$$f(x) - 3x^2\varphi(x) - 2\varphi(x) = r(x),$$

где $r(x)$ — многочлен меньшей степени, чем $\varphi(x)$. Это равенство перепишем так:

$$f(x) = (3x^2 + 2)\varphi(x) + (-8x^3 - 6x^2 - 3x - 10).$$

В этом случае

$$q(x) = 3x^2 + 2, \quad r(x) = -8x^3 - 6x^2 - 3x - 10.$$

Рассмотрим теперь вопрос в общем виде.

Начнем с вопроса о существовании неполного частного и остатка, о возможности операции деления с остатком. Проще всего решается вопрос, если степень $f(x)$ меньше степени $\varphi(x)$. В этом случае многочлены $q(x) = 0$ и $r(x) = f(x)$ удовлетворяют всем поставленным условиям. Рассмотрим теперь случай, когда степень n многочлена $f(x)$ больше или равна степени m многочлена $\varphi(x)$. В этом случае будем строить неполное частное $q(x)$ по-степенно, вычисляя его члены один за другим. Заметим сначала, что при

умножении многочлена $\varphi(x) = b_0 x^m + b_1 x^{m-1} + \dots + b_m$ на $\frac{a_0}{b_0} x^{n-m}$ по-

лучим многочлен $\frac{a_0}{b_0} x^{n-m} \varphi(x)$, старший член которого равен $a_0 x^n$, то есть старшему члену многочлена $f(x)$. Отсюда ясно, что либо многочлен

$$f_1(x) = f(x) - \frac{a_0}{b_0} x^{n-m} \varphi(x) \quad (1)$$

равен нулю, либо его степень меньше, чем степень многочлена $f(x)$ (при вычитании старшие члены взаимно уничтожаются). Если $f_1(x) = 0$, то $f(x)$ делится на $\varphi(x)$ без остатка. Пусть $f_1(x) \neq 0$ и пусть старший член многочлена $f_1(x)$ равен $c_0 x^k$ (где $k < n$). Тогда степень многочлена

$$f_2(x) = f_1(x) - \frac{c_0}{b_0} x^{k-m} \varphi(x) \quad (2)$$

будет меньше степени многочлена $f_1(x)$. Так как степени многочленов являются целыми неотрицательными числами, то на каком-то шагу процесса мы получим многочлен $f_s(x)$, который либо равен нулю, либо имеет степень, меньшую степени $\varphi(x)$. Тогда из равенств (1), (2) и т. д. получаем:

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{a_0}{b_0} x^{n-m} \varphi(x) + f_1(x) = \frac{a_0}{b_0} x^{n-m} \varphi(x) + \frac{c_0}{b_0} x^{k-m} \varphi(x) + \\ &+ f_2(x) = \left(\frac{a_0}{b_0} x^{n-m} + \frac{c_0}{b_0} x^{k-m} + \dots \right) \varphi(x) + f_s(x). \end{aligned}$$

Положим:

$$f_s(x) = r(x),$$

$$\frac{a_0}{b_0} x^{n-m} + \frac{c_0}{b_0} x^{k-m} + \dots = q(x).$$

Мы получим, что

$$f(x) = \varphi(x) q(x) + r(x),$$

причем либо $r(x) = 0$, либо степень многочлена $r(x)$ меньше степени многочлена $q(x)$. Тем самым доказано, что операция деления с остатком на многочлен, не равный тождественно нулю, всегда определена.

Докажем теперь, что эта операция определена однозначно. В самом деле, предположим, что

$$f(x) = \varphi(x) q_1(x) + r_1(x)$$

и

$$f(x) = \varphi(x) q_2(x) + r_2(x),$$

где степень многочленов $r_1(x)$ и $r_2(x)$ меньше степени $\varphi(x)$. Тогда имеет место равенство

$$\varphi(x) q_1(x) + r_1(x) = \varphi(x) q_2(x) + r_2(x).$$

Из него следует, что

$$\varphi(x) [q_1(x) - q_2(x)] = r_2(x) - r_1(x).$$

Если $r_2(x) - r_1(x) \neq 0$, то степень правой части этого равенства не больше, чем степени многочленов $r_1(x)$ и $r_2(x)$, а потому меньше, чем степень многочлена $\varphi(x)$. Левая же часть равенства является произведением многочлена $\varphi(x)$ на многочлен $q_1(x) - q_2(x)$; поэтому равенство может иметь место лишь в случае, когда $q_1(x) - q_2(x) = 0$ и $r_1(x) - r_2(x) = 0$, то есть когда $q_1(x) = q_2(x)$ и $r_1(x) = r_2(x)$. Тем самым однозначность операции деления с остатком доказана.

Деление многочленов обычно выполняют по схеме «деления уголком». Ниже приведен пример такого деления.

$$\begin{array}{r}
 \begin{array}{r}
 3x^3 + 2x^4 - 2x^3 \\
 \mp 3x^3 \\
 \hline
 2x^4 - 8x^3 - 6x^2 \\
 \mp 2x^4 \\
 \hline
 -8x^3 - 6x^2 - 3x - 10
 \end{array}
 \qquad
 \begin{array}{r}
 +x - 6 \\
 \mp 6x^2 \mp 6x^2 \\
 \hline
 +x - 6 \\
 \mp 4x \mp 4 \\
 \hline
 -3x - 10
 \end{array}
 \qquad
 \left| \begin{array}{r}
 x^4 + 2x + 2 \\
 3x^2 + 2
 \end{array} \right.
 \end{array}$$

Здесь частное равно $3x^2 + 2$, а остаток равен $-8x^3 - 6x^2 - 3x - 10$.

Отметим, что если $f(x)$ и $\varphi(x)$ — приведенные многочлены с целыми коэффициентами, то и неполное частное $q(x)$ — многочлен того же вида. Это следует из того, что при отыскании частного нам не придется делить на b_0 (оно равно 1).

У п р а ж н е н и я

33. Разделить с остатком следующие многочлены:

а) $(x^5 - 6x^3 + 2x^2 - 4) : (x^2 - x + 1)$;

б) $(x^7 - 1) : (x^3 + x + 1)$;

в) $(x^4 + x^2 + 1) : (x + 5)$;

г) $(x^3 - 64) : (x - 3)$.

34. При каком значении k выполняется без остатка деление

$$(x^3 + 6x^2 + kx + 12) : (x + 4)?$$

35. Делится ли многочлен

$$x^5 + 3x^4 + 4x^3 - 2x^2 + 5x - 5$$

без остатка на $x^2 - 3x + 2$?

36. При каких значениях a и b выполняется без остатка деление

$$(x^4 + 3x^3 - 2x^2 + ax + b) : (x^2 - 3x + 2)?$$

2. Теорема Безу. Схема Горнера. Пусть $f(x)$ — многочлен n -й степени и b — некоторое число. Разделим многочлен $f(x)$ на двучлен $(x - b)$. Так как степень этого двучлена равна единице, то остаток является некоторым числом r . Итак, мы получаем тождество

$$f(x) = (x - b)\varphi(x) + r. \quad (1)$$

Чтобы вычислить значение r , подставим в обе части тождества (1) значение $x = b$. Мы получим, что $f(b) = r$. Итак, нами доказана следующая важная теорема.

Т е о р е м а Б е з у. Остаток от деления многочлена $f(x)$ на двучлен $x - b$ равен $f(b)$ (то есть результату подстановки числа b в многочлен $f(x)$).

П р и м е р ы

1) Остаток от деления многочлена

$$f(x) = x^4 + 5x^3 - 3x + 6$$

на $x + 3$ равен

$$f(-3) = (-3)^4 + 5(-3)^3 - 3(-3) + 6 = -39.$$

2) Многочлен $f(x) = x^n - a^n$ делится без остатка на $x - a$. В самом деле, $a^n - a^n = 0$. Многочлен $x^{2k} - a^{2k}$ делится без остатка на $x + a$. В самом деле, $(-a)^{2k} - a^{2k} = 0$.

Деление многочлена

$$f(x) = a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \dots + a_n$$

на двучлен $x - b$ удобно выполнять по так называемой схеме Горнера. Обозначим неполное частное при делении $f(x)$ на $x - b$ через $q(x) = c_0 x^{n-1} + c_1 x^{n-2} + \dots + c_{n-1}$, а остаток — через c_n . Так как $f(x) = q(x)(x - b) + c_n$, то имеем тождество

$$\begin{aligned} & a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \dots + a_n = \\ & = (c_0 x^{n-1} + c_1 x^{n-2} + \dots + c_{n-1})(x - b) + c_n. \end{aligned}$$

Раскроем в правой части этого равенства скобки и сравним коэффициенты при одинаковых степенях x слева и справа. Мы получим, что $a_0 = c_0$, и при $1 \leq k \leq n$ имеют место соотношения $a_k = c_k - b c_{k-1}$. Отсюда следует, что $c_0 = a_0$ и $c_k = a_k + b c_{k-1}$ при $1 \leq k \leq n$.

Вычисление коэффициентов многочлена $q(x)$ и остатка c_n записывают в виде следующей таблицы:

a_0	a_1	\dots	a_n
$c_0 = a_0$	$c_1 = a_1 + b c_0$	\dots	$c_n = a_n + b c_{n-1}$

Она называется *схемой Горнера*. В первой строке этой таблицы записаны коэффициенты многочлена $f(x)$. При заполнении второй строки этой таблицы надо записать в первую клетку a_0 . Если уже заполнено несколько клеток второй строки, то следующая пустая клетка заполняется так: берут стоящее над ней число первой строки и прибавляют к произведению числа b на предыдущий элемент второй строки.

Так как по теореме Безу $c_n = f(b)$, то схема Горнера позволяет находить значения многочлена $f(x)$ при $x = b$. Во многих случаях вычисление по схеме Горнера удобнее, чем непосредственная подстановка b в многочлен $f(x)$.

Пример. Вычислим по схеме Горнера значение $f(2)$, где

$$f(x) = x^4 - 5x^3 + 2x^2 + 3x - 7,$$

$$b = 2.$$

1	-5	2	3	-7
1	$-5 + 2 \cdot 1 = -3$	$2 + 2(-3) = -4$	$3 + 2(-4) = -5$	$-7 + 2(-5) = -17$

Значит, $f(2) = -17$.

Упражнения

37. Найти остаток при делении многочлена

$$x^6 - 4x^4 + x^3 - 2x^2 + 5$$

на $x + 3$.

38. Чему равен коэффициент a , если остаток от деления многочлена $x^4 - ax^3 + 4x^2 - x + 1$ на $x - 2$ равен 7?

39. Доказать, что многочлен $x^{2k} + a^{2k}$ не делится ни на $x - a$, ни на $x + a$.

40. Доказать, что многочлен $x^{2k+1} \pm a^{2k+1}$ делится без остатка на $x \pm a$.

41. Разделить по схеме Горнера $x^6 - 4x^3 + 2x^2 - 5x + 1$ на $x - 4$.

42. Найти по схеме Горнера значение

$$x^5 - 2x^4 - x^3 + 2x + 5$$

при $x = 7$.

3. Корни многочлена. При различных значениях x многочлен

$$f(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \dots + a_n \quad (1)$$

принимает различные значения. Нас будут интересовать те значения x , при которых многочлен $f(x)$ обращается в нуль. Эти значения называют корнями многочлена. Итак, число α называется *корнем многочлена* $f(x)$, если $f(\alpha) = 0$. Таким образом, понятие корня многочлена (1) равносильно понятию корня уравнения

$$a_0x^n + a_1x^{n-1} + \dots + a_n = 0. \quad (2)$$

(Теория таких уравнений будет изложена в главе II.) Следует отметить, что вся теория многочленов (как, впрочем, и почти вся алгебра) развивалась в связи с решением уравнений.

В первую очередь установим связь между корнями многочлена и его линейными делителями, то есть делителями вида $x - \alpha$. Ясно, что *если многочлен $f(x)$ делится без остатка на $x - \alpha$, то α является его корнем*. В самом деле, пусть $f(x) = (x - \alpha)q(x)$. Тогда имеем

$$f(\alpha) = (\alpha - \alpha)q(\alpha) = 0$$

и, значит, α — корень многочлена $f(x)$.

Справедливо и обратное утверждение: *если число α является корнем многочлена $f(x)$, то этот многочлен делится без остатка на $x - \alpha$* .

Для доказательства воспользуемся теоремой Безу. По этой теореме остаток от деления $f(x)$ на $x - \alpha$ равен $f(\alpha)$. Поэтому, если α — корень многочлена $f(x)$, то остаток r равен нулю: $r = f(\alpha) = 0$.

Итак, *задача нахождения корней многочлена равносильна задаче отыскания его линейных делителей*.

Покажем теперь, что *если α и β — различные корни многочлена $f(x)$, $\alpha \neq \beta$, то $f(x)$ делится на $(x - \alpha)(x - \beta)$* . В самом деле, так как α — корень для $f(x)$, то $f(x)$ делится без остатка на $x - \alpha$:

$$f(x) = (x - \alpha)q(x).$$

Подставим в обе части этого равенства $x = \beta$. Так как β — корень многочлена $f(x)$, то получаем $0 = (\beta - \alpha)q(\beta)$, но $\beta \neq \alpha$ и потому $q(\beta) = 0$. Таким образом, β является корнем многочлена $q(x)$, а потому $q(x)$ делится без остатка на $x - \beta$: $q(x) = (x - \beta)q_1(x)$. Таким образом,

$$f(x) = (x - \alpha)q(x) = (x - \alpha)(x - \beta)q_1(x).$$

Это и означает, что $f(x)$ делится без остатка на $(x - \alpha)(x - \beta)$.

Точно так же доказывается, что если $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ — попарно различные корни многочлена $f(x)$, то $f(x)$ делится без остатка на выражение $(x - \alpha_1) \cdot \dots \cdot (x - \alpha_n)$:

$$f(x) = (x - \alpha_1) \cdot \dots \cdot (x - \alpha_n) q(x).$$

Докажем теперь следующую теорему.

Теорема 1. Если многочлен $f(x)$ не является многочленом степени большей n и обращается в нуль при $(n+1)$ различных значениях x : $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_{n+1}$, то этот многочлен является нулевым многочленом.

Доказательство. Допустим, что многочлен $f(x)$ не является нулевым. Тогда по условию теоремы его степень не больше чем n . Так как числа $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_{n+1}$ являются корнями многочлена $f(x)$, то он делится без остатка на произведение $(x - \alpha_1) \cdot \dots \cdot (x - \alpha_{n+1})$:

$$f(x) = (x - \alpha_1) \cdot \dots \cdot (x - \alpha_{n+1}) q(x),$$

откуда видно, что степень многочлена $f(x)$ не меньше чем $n+1$. Полученное противоречие показывает, что многочлен $f(x)$ является нулевым многочленом.

Из доказанной теоремы вытекает важное следствие. Возьмем два многочлена $f(x)$ и $\varphi(x)$, степень которых не превосходит n , и предположим, что они принимают одинаковые значения при $(n+1)$ значениях x . Покажем, что тогда многочлены $f(x)$ и $\varphi(x)$ имеют одинаковые степени и коэффициенты.

Для доказательства рассмотрим разность $f(x) - \varphi(x)$ данных многочленов. По условию многочлен $f(x) - \varphi(x)$ обращается в нуль при $(n+1)$ значениях x и не является многочленом степени, большей чем n . Поэтому в силу предыдущей теоремы все его коэффициенты равны нулю. А это и означает, что коэффициенты многочленов $f(x)$ и $\varphi(x)$ совпадают, а значит, совпадают и их степени.

В частности, получаем следующее утверждение: если два многочлена тождественно равны, то есть принимают одинаковые значения при всех значениях x , то они имеют одинаковые степени и коэффициенты при одинаковых степенях x . Иными словами, не может быть двух различных многочленов (в канонической форме!), принимающих одинаковые значения при всех x . Отсюда следует сформулированное ранее утверждение: целое рациональное выражение тождественно равно только одному многочлену. В самом деле, два многочлена, тождественно равные одному и тому же целому рациональному выражению, тождественно равны друг другу, а поэтому их коэффициенты при одинаковых степенях x совпадают.

4. Интерполяционные формулы*. Мы доказали, что многочлен степени n однозначно определяется своими значениями в $(n+1)$

$$6) \quad a \frac{(x-b)(x-c)}{(a-b)(a-c)} + b \frac{(x-c)(x-a)}{(b-c)(b-a)} + c \frac{(x-a)(x-b)}{(c-a)(c-b)} = x;$$

$$в) \quad a^2 \frac{(x-b)(x-c)}{(a-b)(a-c)} + b^2 \frac{(x-c)(x-a)}{(b-c)(b-a)} + c^2 \frac{(x-a)(x-b)}{(c-a)(c-b)} = x^2.$$

5. Кратные корни. Если α — корень многочлена $f(x)$, то $f(x)$ делится без остатка на $x - \alpha$. Может случиться, что $f(x)$ делится без остатка не только на $x - \alpha$, но и на $(x - \alpha)^k$, где $k > 1$. В этом случае говорят, что α является *кратным корнем* многочлена $f(x)$. При этом если $f(x)$ без остатка делится на $(x - \alpha)^{k+1}$, но уже не делится без остатка на $(x - \alpha)^{k+1}$, то α называют *корнем кратности k* .

Рассмотрим, например, многочлен

$$f(x) = x^3 - x^2 - 8x + 12.$$

Мы имеем $f(2) = 0$. Значит, $x = 2$ является корнем этого многочлена.

Деля $f(x)$ на $x - 2$, получим многочлен $q(x) = x^2 + x - 6$. Снова подставим вместо x значение 2. Мы получим $q(2) = 0$. Значит, и $q(x)$ делится на $x - 2$ без остатка. Выполняя это деление, получим многочлен $x + 3$. Так как 2 не является корнем многочлена $x + 3$, то $f(x)$ делится на $(x - 2)^2$, но не делится на $(x - 2)^3$. Значит, 2 — корень второй кратности многочлена $f(x)$.

У п р а ж н е н и я

45. Какую кратность имеет корень $x = 2$ многочлена

$$f(x) = x^5 - 5x^4 + 7x^3 - 2x^2 + 4x - 8?$$

46. Какую кратность имеет корень $x = 5$ многочлена

$$f(x) = x^5 - 15x^4 + 76x^3 - 140x^2 + 75x - 125?$$

47. Определить a и b так, чтобы число (-2) было корнем многочлена $f(x) = x^3 + ax^2 + bx + 1$, имеющим по крайней мере вторую кратность.

6. Многочлены второй степени. Применим полученные общие результаты к многочленам второй степени $f(x) = ax^2 + bx + c$. Корни этих многочленов выражаются формулой

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}, \quad (1)$$

известной из начальной алгебры.

Обозначим $b^2 - 4ac$ через D . Из формулы (1) видно, что если $D > 0$, то оба корня многочлена $f(x)$ действительны и различны. Если $D = 0$, то эти корни совпадают (так как безразлично, будем мы прибавлять или вычитать нуль).

Наконец, если $D < 0$, то многочлен $f(x)$ не имеет действительных корней.

Рассмотрим случай, когда многочлен $f(x)$ имеет два действительных корня α и β . Тогда по доказанному выше он делится на многочлен второй степени $(x - \alpha)(x - \beta)$. Частное от деления этих многочленов — некоторое число. Таким образом,

$$ax^2 + bx + c = A(x - \alpha)(x - \beta).$$

Значение A получим, сравнив коэффициенты при x^2 . Находим $A = a$. Итак, мы доказали, что если многочлен второй степени $ax^2 + bx + c$ имеет действительные корни α и β , то

$$ax^2 + bx + c = a(x - \alpha)(x - \beta).$$

Разделим обе части этого равенства на a и выполним умножение в правой части равенства. Мы получим, что

$$x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} = x^2 - (\alpha + \beta)x + \alpha\beta.$$

Сравнивая коэффициенты при одинаковых степенях x слева и справа, получаем:

$$\begin{aligned}\alpha + \beta &= -\frac{b}{a}, \\ \alpha\beta &= \frac{c}{a}.\end{aligned}\tag{2}$$

Итак, мы доказали следующее утверждение: *сумма корней квадратного трехчлена $ax^2 + bx + c$ равна отношению коэффициентов при x и x^2 , взятому с обратным знаком, а их произведение равно отношению свободного члена к коэффициенту при x^2 .*

Формулы (2) называют *формулами Виета*. Позже мы увидим, что они справедливы и в случае, когда корни многочлена $ax^2 + bx + c$ — комплексные числа.

У п р а ж н е н и я

48. Составьте квадратный трехчлен с коэффициентом 7 при x^2 и корнями $x_1 = -1$, $x_2 = 4$.

49. В квадратном трехчлене $x^2 + 2(k - 4)x + k^2 + 6k + 3$ определите k так, чтобы корни этого трехчлена были бы равны между собой.

50. При каком значении m корни квадратного уравнения

$$\frac{x^2 - bx}{ax - c} = \frac{m - 1}{m + 1}$$

будут по абсолютной величине равны, а по знаку противоположны?

51. Найти условие, при котором один из корней трехчлена $ax^2 + bx + c$ будет в n раз больше другого.

52. В трехчлене $2x^2 + 7x + a$ определить a так, чтобы корни были связаны соотношением $\alpha - \beta = \frac{11}{2}$.

53. Чему должен равняться свободный член q в трехчлене $x^2 - 10x + q$, если сумма квадратов корней этого трехчлена равна 2?

54. Показать, что если корни трехчлена $ax^2 + bx + c$ действительны и различны, то многочлен $(2ax + b)^2 - 2a(ax^2 + bx + c)$ не имеет действительных корней.

55. Какими должны быть коэффициенты a, b, c , чтобы оба корня трехчлена $ax^2 + bx + c$ были положительными числами?

7. Многочлены с целыми коэффициентами. Мы установили некоторые общие теоремы о корнях многочленов. Однако до сих пор мы можем искать лишь корни многочленов первой и второй степени — в начальной алгебре изучается, как решать линейные и квадратные уравнения. Позже мы научимся решать некоторые уравнения высших степеней и тем самым находить корни соответствующих многочленов. Но во многих случаях удастся найти корни, не прибегая к теории уравнений высших степеней с произвольными коэффициентами или к методам вычислительной математики. Речь идет о случае, когда ищутся целые корни многочленов с целыми коэффициентами. При этом мы ограничимся случаем, когда многочлен $f(x)$ приведен, то есть когда коэффициент при его старшем члене равен единице.

Докажем следующую теорему.

Теорема 2. Пусть

$$f(x) = x^n + a_1x^{n-1} + \dots + a_n$$

— приведенный многочлен n -й степени, все коэффициенты которого — целые числа. Тогда любой рациональный корень этого многочлена — целое число.

Доказательство. Пусть $\alpha = \frac{p}{q}$ — корень многочлена $f(x)$, причем $q \geq 2$ и $\frac{p}{q}$ — несократимая дробь. Тогда имеет место равенство $f\left(\frac{p}{q}\right) = 0$, то есть

$$\frac{p^n}{q^n} + a_1 \frac{p^{n-1}}{q^{n-1}} + \dots + a_n = 0.$$

Умножим обе части этого равенства на q^{n-1} . Все члены, кроме первого, окажутся целыми числами, а тогда и $\frac{p^n}{q}$ должно было бы быть целым числом. Но это не так: поскольку p и q не имеют общих делителей, то их не имеют и p^n и q . Значит, многочлен $f(x)$ не может иметь рациональных корней, не являющихся целыми числами.

Перейдем к отысканию целых корней многочлена.
Имеет место следующая

Теорема 3. Пусть

$$f(x) = x^n + a_1 x^{n-1} + \dots + a_{n-1} x + a_n$$

— приведенный многочлен с целыми коэффициентами. Любой целый корень α этого многочлена является делителем его свободного члена.

Доказательство. Пусть α — целый корень многочлена $f(x)$. Тогда имеет место равенство

$$\alpha^n + a_1 \alpha^{n-1} + \dots + a_{n-1} \alpha + a_n = 0.$$

Его можно записать так:

$$a_n = -(\alpha^{n-1} + a_1 \alpha^{n-2} + \dots + a_{n-1}).$$

Так как α и a_1, \dots, a_{n-1} — целые числа, то выражение в скобках — целое число. Отсюда и следует, что a_n делится на α .

Из теоремы 3 вытекает следующий метод нахождения целых корней приведенного многочлена с целыми коэффициентами: надо выписать все делители свободного члена и по очереди подставить их в многочлен. Те делители, подстановка которых обратит многочлен в нуль, и являются его целыми корнями. Других целых корней этот многочлен не имеет. Для каждого найденного корня надо определить его кратность.

Подстановка делителей свободного члена может оказаться очень утомительным занятием. Чтобы уменьшить число проверяемых корней, полезно воспользоваться следующим обобщением теоремы 3.

Теорема 4. Пусть $f(x) = x^n + a_1 x^{n-1} + \dots + a_n$ — приведенный многочлен с целыми коэффициентами и α — его целый корень. Тогда для любого целого k число $f(k)$ делится на $\alpha - k$.

Для доказательства воспользуемся теоремой Безу. По этой теореме остаток от деления $f(x)$ на $(x - k)$ равен $f(k)$. Поэтому $f(x) = q(x)(x - k) + f(k)$. В силу замечания на стр. 40, $q(x)$ также является приведенным многочленом с целыми коэффициентами. Подставим в обе части равенства $x = \alpha$. Так как α — корень многочлена $f(x)$, то $f(\alpha) = 0$ и мы получаем: $0 = q(\alpha)(\alpha - k) + f(k)$. Таким образом,

$$f(k) = -q(\alpha)(\alpha - k). \quad (1)$$

Так как $q(\alpha)$ — целое число, то из равенства (1) следует, что $f(k)$ делится на $\alpha - k$.

В силу доказанной теоремы отбор чисел, подлежащих проверке, надо проводить так. Сначала берут все делители свободного члена. Пусть это будут числа $\alpha_1, \dots, \alpha_s$. После этого вычисляют $f(i)$. Если α_m — корень многочлена $f(x)$, то $(\alpha_m - 1)$ должно быть делителем $f(1)$. Поэтому из чисел $\alpha_1, \dots, \alpha_s$ выбирают те, для которых $(\alpha_m - 1)$ является делителем $f(1)$. После этого вычисляют $f(-1)$ и выбирают из оставшихся чисел те, для которых $(\alpha_m + 1)$ — делитель $f(-1)$. Если и после этого осталось слишком много «претендентов», то вычисляют $f(2)$ и берут те из оставшихся чисел, для которых $(\alpha_m - 2)$ — делитель $f(2)$ и т. д.

Пример. Найти целые корни многочлена

$$f(x) = x^4 + x^3 - 11x^2 - 5x + 30.$$

Делителями свободного члена являются числа

$$\pm 1, \pm 2, \pm 3, \pm 5, \pm 6, \pm 10, \pm 15, \pm 30. \quad (2)$$

Мы имеем $f(1) = 16$. Вычитая из чисел (2) единицу, получаем множество чисел 0, -2, 1, -3, 2, -4, 4, -6, 5, -7, 9, -11, 14, -16, 29, -31. Из них лишь числа -2, 1, 2, -4, 4, -16 являются делителями 16. Поэтому из делителей (2) остаются лишь -1, 2, 3, -3, 5, -15. Теперь находим $f(-1) = 24$; к числам -1, 2, 3, -3, 5, -15 прибавляем единицу и получаем 0, 3, 4, -2, 6, -14. Из этих чисел лишь 3, 4, -2, 6 являются делителями числа 24. Поэтому остается проверить лишь делители свободного члена: 2, 3, -3, 5. Подстановка этих делителей в многочлен $f(x)$ показывает, что его целыми корнями являются числа 2 и -3.

Из теоремы Безу вытекает, что многочлен $f(x)$ делится на $(x - 2)(x + 3)$. Выполняя деление, получаем, что

$$x^4 + x^3 - 11x^2 - 5x + 30 = (x - 2)(x + 3)(x^2 - 5).$$

Отсюда видно, что оба корня не являются кратными: ни $x = 2$, ни $x = -3$ не обращают в нуль $x^2 - 5$.

У п р а ж н е н и я

56. Найти целые корни следующих многочленов:

- а) $x^5 - 2x^3 - 8x^2 + 13x - 24$; в) $x^4 + 2x^3 - 12x^2 - 38x - 24$;
б) $x^5 - 2x^4 - 4x^3 + 4x^2 - 5x + 6$; г) $x^5 + x^4 - 6x^3 - 14x^2 - 11x - 3$.

57. Разложить на множители многочлены:

- а) $x^3 - x^2 - 28x + 45$; д) $x^3 - 6x^2 + 11x - 6$;
б) $x^3 - 6x^2 - x + 30$; е) $x^4 - 7x^3 + 8x^2 + 28x - 48$;
в) $x^3 + 9x^2 + 23x + 15$; ж) $(x + 1)(x + 2)(x + 3)(x + 4) - 24$;
г) $x^3 - 10x^2 + 23x - 14$; з) $(x + 1)(x + 3)(x + 5)(x + 7) + 15$.

58. Сократить дробь

$$\frac{x^3 - x^2 - x + 1}{x^4 - x^3 - 3x^2 + 5x - 2}$$

59. Доказать, что $n^5 - 5n^3 + 4n$ делится на 120, если n — натуральное число.

8. Краткие исторические сведения. Некоторые задачи, решаемые по сути дела алгебраическими методами, встречаются еще в вавилонских клинописных текстах (примерно 1700 г. до н. э.). В этих текстах изложены правила суммирования прогрессии, нахождения суммы квадратов, решения квадратного уравнения и т. д. Однако все эти правила лишь пояснялись на числовых примерах, но не формулировались в общем виде — не было буквенной символики.

В древней Греции начинается развитие алгебры как теоретической науки. Поскольку у греческих математиков не было общего понятия действительного числа, они развивали геометрическую алгебру. Например, вместо формулы $(a + b)^2 = a^2 + b^2 + 2ab$ говорили, что площадь квадрата, построенного на отрезке, равном сумме двух отрезков, равна сумме площадей квадратов, построенных на слагаемых отрезках и удвоенной площади прямо-

угольника, сторонами которого являются эти отрезки. Выражения вида a^3 , a^2b , abc трактовались как объемы геометрических тел. Лишь к III веку н. э. у Диофанта Александрийского появляются зачатки буквенной символики.

После крушения античной цивилизации центр математической мысли перемещается в арабские государства. Крупнейшим достижением арабов было создание алгебры как самостоятельной ветви математики (само название «алгебра» — арабского происхождения: от аль-джебр — восстановление; так назывался один из методов решения уравнений). Арабские математики установили формулы для разложения $(a + b)^n$, для суммы $1^4 + 2^4 + \dots + n^4$, исследовали кубические уравнения и т. д.

В странах, где в это время господствовала христианская церковь, математика почти не развивалась. В некоторых странах математические исследования были запрещены, они рассматривались как попытка возрождения язычества. Указ византийского императора Юстиниана запрещал заниматься математикой под страхом смертной казни. Лишь в отдельных трактатах по богословию и схоластической философии рассматривались некоторые математические вопросы.

Однако потребности практики, развитие промышленности, торговли и мореплавания привели к необходимости возродить науки, и в частности математику. Первоначально европейские ученые ограничивались изучением древнегреческой науки, но потом познакомились с достижениями арабских математиков, и в частности с алгеброй (многие европейские ученые получили образование в арабских университетах).

Как у арабов, так и у первых европейских алгебраистов, не было буквенной символики. Формулы излагались словесно, что затрудняло их чтение, преобразование и использование. Алгебраическая символика начинает развиваться с конца XV века. В это время у немецких алгебраистов появляются знаки $+$ и $-$. Однако итальянские математики еще долгое время продолжали пользоваться знаками \tilde{p} и \tilde{m} — сокращениями латинских слов *plus* и *minus*. Систематическое применение буквенных обозначений в алгебре начинается с работ французского алгебраиста Ф. Виета (1540—1603). В его работах буквы используются лишь для обозначения положительных чисел, причем показатели степеней обозначаются словами. Вместо скобок Виета писал черту.

Особые обозначения для степеней неизвестных впервые появляются у голландского ученого С. Стевина (1548—1620) и его ученика француза Жирара (1595—1633). Они вместо x^3 писали 3, а если в выражении содержались еще другие буквы, то писали 2 sec, 4ter (от латинских слов *secundus* — второй, *tertius* — третий). Жирар впервые ввел скобки.

Символика Виета была усовершенствована английским математиком Т. Гэрриотом, который, однако, еще не применял обозначений для показателей степени, а выписывал все сомножители, входящие в одночлены. Современный вид алгебраических обозначений в основном принадлежит великому французскому математику и философу Р. Декарту (1596—1650).

Приведем некоторые примеры обозначений, применявшихся разными учеными:

Виета	$a\ cubus + b\ in\ a\ quadr\ 3 +$ $+ a\ in\ b\ quadr\ 3 + b\ cubo$	$a^3 + 3a^2b +$ $+ 3ab^2 + b^3 =$
Жирар	$aequelia\ a + b\ cubo$	$= (a + b)^3$
Гэрриот	$1\ 3 \times 13\ 2 + 12$	$x^3 = 13x^2 + 12$
Декарт	$5aaabb$	$5a^3b^2$
	$x^3 + px + q \sim 0$	$x^3 + px + q = 0$

Основные свойства арифметических действий, лежащие в основе алгебраических преобразований, были установлены еще в древней Греции (в геометрической форме). Однако полная и последовательная система основ арифметики была построена лишь в XIX веке немецкими математиками Г. Грассманом и Р. Дедекиндом (общепринятая в настоящее время аксиоматика исходит от итальянского математика Дж. Пеано). Такое построение оказалось необходимым после того, как были открыты величины (векторы, матрицы, кватернионы), правила действий над которыми отличались от правил действий над числами. Например, при изменении порядка сомножителей векторное произведение меняет знак. Для каждого типа величин надо было строить свою алгебру (векторная алгебра, матричная алгебра и т. д.). Это усилило интерес к изучению общих свойств алгебраических действий. Были построены теории колец и полей, структур и других алгебраических образований. Благодаря общности полученных в этих теориях результатов, они оказались применимыми к величинам самых разных видов. В настоящее время изучение общих свойств алгебраических операций занимает важное место в алгебраической науке. Большой вклад в общую алгебру внесли советские математики О. Ю. Шмидт, А. Г. Курош, А. И. Мальцев и другие.

АЛГЕБРАИЧЕСКИЕ УРАВНЕНИЯ И НЕРАВЕНСТВА

§ 1. Общая теория уравнений

1. Тождества. Введем понятие тождественного равенства функций на числовом множестве X .

Пусть функции $y = f(x)$ и $y = F(x)$ имеют области определения A и B соответственно, и X является подмножеством как A , так и B (но не обязательно совпадает с пересечением A и B). Тогда функции $y = f(x)$ и $y = F(x)$ определены на X .

Функции $y = f(x)$ и $y = F(x)$ называются *тождественно равными* на числовом множестве X , если для любого числа x из X выполняется равенство $f(x) = F(x)$. В этом случае говорят, что равенство $f(x) = F(x)$ является *тождеством на множестве X* .

Разумеется, равенство $f(x) = F(x)$ может быть тождеством на некотором множестве X , но не быть тождеством на каком-нибудь другом множестве Y . Рассмотрим, например, функции $y = x$ и $y = |x|$. На множестве X положительных чисел эти функции тождественно равны: если x — положительное число, то $|x| = x$. На множестве же Y всех действительных чисел эти функции не являются тождественно равными: при отрицательных значениях x равенство

$$|x| = x$$

не имеет места, так как при этих значениях $|x| = -x$.

Совершенно так же определяется понятие тождественного равенства для функций нескольких переменных. Например, функции $(x + y)^2$ и $x^2 + 2xy + y^2$ переменных x и y тождественно равны на множестве всех значений этих переменных: для любых значений x и y выполняется равенство

$$(x + y)^2 = x^2 + 2xy + y^2.$$

Функции же $z = x + y$ и $z = |x + y|$ тождественно равны лишь на множестве пар чисел x, y , для которых $x + y \geq 0$ или, что то же самое, $y \geq -x$.

У п р а ж н е н и е 1. Доказать тождества:

$$a) \frac{b-c}{(a-b)(a-c)} + \frac{c-a}{(b-c)(b-a)} + \frac{a-b}{(c-a)(c-b)} = \\ = \frac{2}{a-b} + \frac{2}{b-c} + \frac{2}{c-a};$$

$$б) (6a^2 - 4ab + 4b^2)^3 = (3a^2 + 5ab - 5b^2)^3 + \\ + (4a^2 - 4ab + 6b^2)^3 + (5a^2 - 5ab - 3b^2)^3;$$

$$в) (p^2 - q^2)^4 + (2pq + q^2)^4 + (2pq + p^2)^4 = 2(p^2 + pq + q^2)^4.$$

2. Область допустимых значений. Тождественные преобразования многочленов и алгебраических дробей изучались в начальной алгебре, и мы не будем подробно останавливаться на этом вопросе. Разберем лишь вопрос об области допустимых значений функционального равенства. Пусть дано равенство вида

$$f(x) = F(x). \quad (1)$$

Может случиться, что функции $y = f(x)$ и $y = F(x)$ определены не для всех значений x . Областью допустимых значений аргумента x для равенства (1) мы будем называть множество всех значений x , при которых определены и левая и правая части этого равенства.

Например, для тождества

$$x^2 + 2x + 1 + \frac{1}{x-2} - \frac{1}{x-2} = (x+1)^2 - \frac{3}{x-4} + \frac{3}{x-4}$$

областью допустимых значений является совокупность всех действительных чисел, из которой исключены числа 2 и 4 (при $x = 2$ не определена функция $\frac{1}{x-2}$, а при $x = 4$ — функция $\frac{3}{x-4}$).

Следует иметь в виду, что такие преобразования, как приведение подобных членов, могут привести к изменению области допустимых значений. Например, тождество (2) справедливо для всех значений x , кроме $x = 2$ и $x = 4$. Если же мы приведем подобные члены, то получим тождество

$$x^2 + 2x + 1 = (x+1)^2,$$

справедливое для всех без исключения значений x .

У п р а ж н е н и е 2. Проверить тождество

$$(x+2)^2 + \frac{1}{(x+2)(x+3)} = \frac{x^4 + 9x^3 + 30x^2 + 44x + 25}{x^2 + 5x + 6}$$

и найти область допустимых значений x .

3. Уравнения. Обычно когда даны две функции $y = f(x)$ и $y = F(x)$, то неизвестно, каково множество, на котором эти функ-

ции тождественно равны. Поэтому возникает следующая задача: найти все значения x , для которых выполняется равенство

$$f(x) = F(x). \quad (*)$$

При такой постановке задачи (*) называют *уравнением с неизвестным x* , а все x , при которых функции $y = f(x)$ и $y = F(x)$ принимают одинаковые значения, — *корнями* или *решениями* этого уравнения.

Итак, уравнение $f(x) = F(x)$ выражает задачу об отыскании таких значений переменного x , при которых функции $f(x)$ и $F(x)$ имеют одинаковые значения. Решить уравнение — это значит найти все такие значения x , т. е. все корни (решения) уравнения.

Областью допустимых значений для уравнения (1) называют множество всех x , при которых определены обе функции $y = f(x)$ и $y = F(x)$. Например, для уравнения

$$\frac{1}{x^2 - 9} = x + \frac{1}{x - 5}$$

область допустимых значений определяется условиями:

$$x \neq 3, \quad x \neq -3, \quad x \neq 5.$$

Область допустимых значений может заранее ограничиваться некоторыми условиями. Например, могут иметь смысл лишь положительные или лишь целые корни¹. В этом случае надо рассматривать уравнение лишь для положительных (или целых) значений x .

Тогда мы считаем, что функции $f(x)$ и $F(x)$ заданы на некотором множестве X , и рассматриваем уравнение лишь на этом множестве.

Пусть даны два уравнения

$$f_1(x) = F_1(x) \quad (1)$$

и

$$f_2(x) = F_2(x). \quad (2)$$

Обозначим множество корней уравнения (1) через M , а множество корней уравнения (2) через N . Если $M \subset N$ (то есть, если всякий корень уравнения (1) является корнем уравнения (2)), то уравнение (2) называют *следствием* уравнения (1). Например, уравнение

¹ Вспомните стихотворение Маршака:

«И получилось в ответе
Два землекопа и две трети».

$x^2 - 5x + 6 = 0$ является следствием уравнения $2x - 6 = 0$. В самом деле, корнем уравнения $2x - 6 = 0$ является $x = 3$, а при этом значении многочлен $x^2 - 5x + 6$ обращается в нуль.

Если множества M и N корней уравнений (1) и (2) совпадают, то эти уравнения называются *равносильными*. Иными словами, уравнения

$$f_1(x) = F_1(x)$$

и

$$f_2(x) = F_2(x) \quad (3)$$

равносильны, если всякий корень уравнения (2) является корнем уравнения (3) и, наоборот, всякий корень уравнения (3) является корнем уравнения (2)¹.

В частности, уравнения *равносильны*, если множества M и N — пусты, то есть если каждое из уравнений не имеет решений.

Если уравнения (2) и (3) *равносильны*, то каждое из них является следствием другого.

Следует отметить, что понятие *равносильности* уравнений существенно зависит от того, какие значения корней считаются допустимыми. Рассмотрим, например, уравнения:

$$2x - 6 = 0 \quad (4)$$

и

$$x^3 - 3x^2 - 2x + 6 = 0. \quad (5)$$

Корнями первого уравнения является число $x = 3$, а второго — числа $x_1 = 3$, $x_2 = \sqrt{2}$, $x_3 = -\sqrt{2}$. Так как эти множества различны, то уравнения (4) и (5) не являются *равносильными*. Но если рассматривать лишь рациональные значения корней уравнения, то уравнения (4) и (5) оказываются *равносильными* — ибо они имеют по единственному рациональному корню $x = 3$. Как правило, мы будем в дальнейшем рассматривать *равносильность* относительно множества всех действительных чисел. Иными словами, уравнения будут считаться *равносильными*, если они имеют одни и те же действительные корни.

У п р а ж н е н и я

3. Доказать, что уравнения

$$x^3 - 2x^2 + 9x - 18 = 0$$

и

$$3x + 17 = 7x + 9$$

равносильны на множестве рациональных чисел.

¹ Если функции $f_1(x)$, $F_1(x)$, $f_2(x)$ и $F_2(x)$ — целые рациональные, то обычно требуют еще, чтобы корни уравнений (2) и (3) не только совпадали, но имели и одинаковую кратность.

4. Найти область допустимых значений для уравнения

$$x^2 + 5x + 7 + \frac{1}{x^2 - x} = 1 + \frac{1}{2(x-1)} + \frac{1}{2(x+1)} - \frac{1}{x}$$

и решить это уравнение.

5. Найти область допустимых значений для уравнения

$$x^2 + 8 + \frac{1}{x^2 - 4a^2} = 0$$

и решить его

6. Доказать, что

$$x^4 - 5x^3 + 15x^2 - 45x + 54 = 0$$

является следствием уравнения

$$x^2 - 5x + 6 = 0.$$

4. Совокупности уравнений. Пусть задано несколько уравнений

$$\begin{aligned} f_1(x) &= F_1(x) \\ &\dots \dots \dots \\ f_n(x) &= F_n(x) \end{aligned} \quad (1)$$

и требуется найти все значения x , которые удовлетворяют хотя бы одному из этих уравнений. Тогда говорят, что задана *совокупность уравнений*, а такие значения x называют *решениями* или *корнями* этой совокупности. Следует различать совокупность уравнений и систему уравнений — для системы уравнений требуется искать значения неизвестных, которые удовлетворяют всем уравнениям, а для совокупности — хотя бы одному из уравнений.

Чтобы отличать совокупность уравнений от системы уравнений, мы будем обозначать совокупность квадратными скобками, а систему — фигурными скобками.

Система уравнений

$$\begin{cases} x^2 - 5x + 6 = 0 \\ x^2 - 3x + 2 = 0 \end{cases}$$

имеет одно решение $x_1 = 2$, а совокупность тех же уравнений

$$\left[\begin{aligned} x^2 - 5x + 6 &= 0 \\ x^2 - 3x + 2 &= 0 \end{aligned} \right]$$

имеет три решения $x_1 = 2$, $x_2 = 3$, $x_3 = 1$.

5. Преобразования уравнений. При решении уравнений мы переходим от одного уравнения к другому, пока не придем к уравнению вида $x = a$ или совокупности уравнений такого вида. Возьмем, например, уравнение

$$5x - 3 = 3x + 1 \quad (1)$$

Прибавляя к обеим частям этого уравнения $(-3x + 3)$ и приводя подобные члены, получаем уравнение

$$2x = 4. \quad (2)$$

А теперь умножим обе части уравнения (2) на $\frac{1}{2}$ и получим, что

$$x = 2. \quad (3)$$

В процессе решения этого уравнения мы прибавляли к обеим частям уравнения некоторое алгебраическое выражение (а именно, $-3x + 3$), умножали обе части уравнения на одно и то же число (а именно, на $\frac{1}{2}$). Кроме того, мы выполняли тождественные преобразования. Заметим, что уравнения (1), (2) и (3) имели одно и только одно решение $x = 2$. Таким образом, все проведенные преобразования приводили к уравнениям, равносильным первоначальному уравнению (1), имевшим с ним одно и то же решение.

Однако не всегда одинаковые преобразования обеих частей уравнения приводят к уравнению, равносильному первоначальному. Рассмотрим уравнение:

$$2x + 1 = x + 4. \quad (4)$$

Его решением является $x = 3$. Если же мы умножим обе части уравнения на $x - 2$, то получим уравнение:

$$(2x + 1)(x - 2) = (x + 4)(x - 2). \quad (5)$$

Это уравнение, кроме решения $x = 3$, имеет еще решение $x = 2$ — оно имеет лишний корень по сравнению с (4).

С другой стороны, если мы возьмем уравнение (5), имеющее решения $x = 2$, $x = 3$, и «сократим» его на $x - 2$ (то есть разделим обе части уравнения на $x - 2$), то получим уравнение $2x + 1 = x + 4$ с единственным решением $x = 3$. Значит, здесь мы в процессе решения потеряли корень $x = 2$.

Не является «безобидным» и прибавление к обеим частям уравнения одного и того же алгебраического выражения. Например, уравнение

$$3x + 1 = 9 - x \quad (6)$$

имеет решение $x = 2$. Но если прибавить к обеим частям этого уравнения выражение $\frac{1}{x-2}$, то получим уравнение

$$3x + 1 + \frac{1}{x-2} = 9 - x + \frac{1}{x-2}, \quad (7)$$

для которого $x = 2$ не является решением — обе части этого уравнения не имеют смысла при $x = 2$. Таким образом, произошла потеря решения.

Эти примеры наглядно показывают, что при преобразовании уравнений необходима осторожность — неправильно преобразуя уравнение, мы можем как приобрести лишние решения, так и потерять решения данного уравнения. При этом надо иметь в виду, что приобретение лишних решений не столь опасно, как потеря существующих. Ведь после того, как уравнение решено, можно подставить все найденные решения в заданное уравнение и отобрать те из решений, которые ему удовлетворяют. А потерянные решения восстановить уже нельзя.

Из изложенного видно, что, прежде чем решать конкретные виды уравнений, надо познакомиться с общей теорией уравнений, выяснить, какие преобразования приводят к равносильным уравнениям, какие дают посторонние решения, а при каких решения могут быть потеряны. Только после этого мы сможем решать уравнения «с открытыми глазами».

6. Теоремы о равносильности уравнений. Сформулируем сначала условия, при которых одно уравнение является следствием другого уравнения. Потом из этих условий будут получены условия равносильности уравнений.

Теорема 1. *Если к обеим частям уравнения*

$$f(x) = F(x) \quad (1)$$

прибавить функцию $\varphi(x)$, имеющую смысл при всех допустимых значениях неизвестного x , то получится новое уравнение

$$f(x) + \varphi(x) = F(x) + \varphi(x), \quad (2)$$

являющееся следствием данного.

Доказательство. В самом деле, пусть a — корень уравнения (1). Тогда $f(a) = F(a)$. Но $\varphi(a)$ является некоторым числом, так как по условию функция $\varphi(x)$ определена для всех допустимых значений x и, в частности, при $x = a$. Прибавим к обеим частям числового равенства $f(a) = F(a)$ число $\varphi(a)$. Получим равенство

$$f(a) + \varphi(a) = F(a) + \varphi(a),$$

которое показывает, что число a является корнем уравнения (2). Таким образом, всякий корень уравнения (1) является корнем уравнения (2), то есть уравнение (2) является следствием уравнения (1).

Условие, что функция $\varphi(x)$ определена при всех допустимых значениях x , существенно. Если $\varphi(x)$ не определено при $x = a$, где a — решение уравнения (1), то уравнение (2) не является следствием уравнения (1) и уравнения (1) и (2) неравносильны: $x = a$ является решением для (1), но не является решением для уравнения (2). Примером могут служить уравнения (6) и (7) из п. 5.

Прибавление к обеим частям уравнения одного и того же выражения не может привести к приобретению посторонних корней, если это прибавление не сопровождается приведением подобных членов или иными преобразованиями, меняющими область определения уравнения (например, сокращением дробей). Рассмотрим, например, уравнение

$$3x + 1 + \frac{1}{x-2} = 9 - x + \frac{1}{x-2}.$$

Если прибавить к обеим частям $-\frac{1}{x-2}$ и привести подобные члены, то получим уравнение $3x + 1 = 9 - x$, имеющее решение $x = 2$. Это решение не принадлежит области определения исходного уравнения и потому не удовлетворяет ему.

Перейдем к вопросу об умножении обеих частей уравнения на одно и то же выражение.

Теорема 2. *Если обе части уравнения*

$$f(x) = F(x) \tag{3}$$

умножить на функцию $\varphi(x)$, имеющую смысл при всех допустимых значениях x , то получится новое уравнение

$$f(x)\varphi(x) = F(x)\varphi(x), \tag{4}$$

являющееся следствием уравнения (3).

Доказательство. Пусть a — корень уравнения (3). Тогда справедливо равенство $f(a) = F(a)$. Умножим обе части этого равенства на число $\varphi(a)$. Мы получим числовое равенство $f(a)\varphi(a) = F(a)\varphi(a)$. Оно показывает, что a является корнем и уравнения (4). Таким образом, всякий корень уравнения (3) является корнем уравнения (4), то есть (4) — следствие (3).

Из доказанных теорем следует, например, что уравнение

$$x^3 + 5x^2 + 7x + 2 = 4x^3 + 14x + 12 \tag{5}$$

является следствием уравнения

$$x^2 - 1 = x + 4. \tag{6}$$

Действительно, уравнение (5) получается из уравнения (6) прибавлением к обеим частям функции $3x + 2$ и умножением полученного уравнения на $x + 2$.

Многочлены определены при всех значениях x . Поэтому прибавление к обеим частям уравнения многочлена, равно как и умножение обеих частей

уравнения на многочлен, приводит к уравнению, являющемуся следствием исходного.

Оговорка о том, что $\varphi(x)$ должно иметь смысл при всех допустимых значениях x , существенна для справедливости теоремы 2. Рассмотрим, например, уравнение

$$x^2 - 5x + 6 = 0 \quad (7)$$

и умножим обе части этого уравнения на $\frac{1}{x-2}$. Мы получим уравнение

$$\frac{x^2 - 5x + 6}{x - 2} = 0. \text{ Оно уже не является следствием исходного: уравнение (7)}$$

имеет корни 2 и 3, а уравнение $\frac{x^2 - 5x + 6}{x - 2} = 0$ — лишь корень 3. При-

чиной потери корня явилось то, что функция $\frac{1}{x-2}$ не определена при $x = 2$, а это значение как раз является корнем заданного уравнения.

Докажем теперь теоремы о равносильности уравнений. Чтобы доказать равносильность двух уравнений, надо показать, что первое из них является следствием второго, а второе — следствием первого.

Теорема 3. Если функция $\varphi(x)$ определена при всех допустимых значениях неизвестного x , то уравнения

$$f(x) = F(x) \quad (8)$$

и

$$f(x) + \varphi(x) = F(x) + \varphi(x) \quad (9)$$

равносильны.

Доказательство. Мы уже видели, что при условии теоремы уравнение (9) является следствием уравнения (8). Но уравнение (8) в свою очередь получается из уравнения (9) прибавлением к обеим частям функции $-\varphi(x)$ и приведением подобных членов.

Так как функция $\varphi(x)$ определена при всех допустимых значениях x , то уравнение (8) является следствием уравнения (9). Тем самым доказано, что уравнения (8) и (9) равносильны.

Из доказанной теоремы вытекает правило перенесения слагаемых из одной части уравнения в другую: *если некоторое слагаемое данного уравнения перенести из одной части в другую, изменив знак этого слагаемого на противоположный, то получится уравнение, равносильное данному.*

В самом деле, в силу теоремы 3 уравнения

$$f(x) = F(x) + \varphi(x) \quad (10)$$

и

$$f(x) - \varphi(x) = F(x) \quad (11)$$

равносильны: уравнение (11) получается путем прибавления функции $-\varphi(x)$ к обеим частям уравнения (10) и приведения подобных членов.

Кратко правило перенесения слагаемых формулируют так: *всякое слагаемое можно перенести из одной части уравнения в другую, изменив при этом его знак на противоположный.*

Из доказанной теоремы вытекает, что *всякое уравнение $f(x) = F(x)$ можно заменить равносильным ему уравнением вида $\Phi(x) = 0$.* Для этого достаточно перенести $F(x)$ в левую часть уравнения, заменив знак на противоположный, и положить $f(x) - F(x) = \Phi(x)$.

Теорема 4. *Если функция $\varphi(x)$ определена для всех допустимых значений x и ни при одном допустимом значении x не обращается в нуль, то уравнения*

$$f(x) = F(x) \quad (12)$$

и

$$f(x)\varphi(x) = F(x)\varphi(x) \quad (13)$$

равносильны.

Доказательство. Мы уже видели (теорема 2), что уравнение (13) является следствием уравнения (12). Докажем, что уравнение (12) в свою очередь является следствием уравнения (13). Уравнение (12) получается из уравнения (13) умножением обеих частей на функцию $1/\varphi(x)$. Так как по условию функция $\varphi(x)$ определена для всех допустимых значений x и не обращается при этих значениях в нуль, то функция $1/\varphi(x)$ также определена при всех допустимых значениях x . Поэтому уравнение (12) является следствием уравнения (13), а значит, эти уравнения равносильны.

Из доказанной теоремы вытекает, например, что уравнения

$$x + 5 = 3 \quad (14)$$

и

$$(x + 5)(x^2 + 1) = 3(x^2 + 1) \quad (15)$$

равносильны в области действительных чисел. В самом деле, уравнение (15) получается из уравнения (14) умножением на функцию $x^2 + 1$, а эта функция всюду определена и не обращается в нуль при действительных значениях x .

Уравнения же

$$x + 5 = 3$$

и

$$(x + 5)(x^2 - 1) = 3(x^2 - 1)$$

не являются равносильными — второе получается из первого умножением на функцию $x^2 - 1$, а эта функция обращается в нуль при $x = \pm 1$. Поэтому второе уравнение, кроме корня $x_1 = -2$,

удовлетворяющего и первому уравнению, имеет еще и корни $x_2=1$, $x_3=1$.

Уравнения (12) и (13) могут быть неравносильными и в том случае, когда множитель $\varphi(x)$ теряет смысл при некоторых допустимых значениях неизвестного. Например, уравнения

$$x^3 = 8$$

и

$$\frac{x^3}{x-2} = \frac{8}{x-2}$$

не равносильны: множитель $\frac{1}{x-2}$ теряет смысл при $x=2$, а $x=2$

как раз является корнем уравнения $x^3 = 8$.

Если в ходе решения уравнения приходилось умножать обе части этого уравнения на выражение $\varphi(x)$, содержащее неизвестное, то надо проверить две вещи:

а) Не обращается ли $\varphi(x)$ в нуль при допустимых значениях неизвестного?

б) Не теряет ли $\varphi(x)$ смысл при некоторых допустимых значениях неизвестного?

В первом случае среди найденных корней могут оказаться посторонние корни, и надо проверить все найденные корни, удовлетворяют ли они первоначально заданному уравнению. Во втором же случае возможна потеря корней, и мы должны подставить в заданное уравнение значения неизвестного, при которых теряет смысл $\varphi(x)$ — среди этих значений могут оказаться потерянные в ходе решения корни уравнения.

Из теоремы 4 непосредственно вытекает справедливость утверждения: *если обе части уравнения умножить на произвольное отличное от нуля число, то получим уравнение, равносильное данному.*

Это утверждение кратко формулируют так: *обе части уравнения можно умножать на произвольное отличное от нуля число.*

§ 2. Уравнения с одним неизвестным

1. Алгебраические уравнения с одним неизвестным. *Рациональным алгебраическим уравнением с одним неизвестным* называют уравнение вида

$$R(x) = 0, \quad (1)$$

где $R(x)$ — алгебраическая дробь относительно x . К такому виду можно в силу теорем 3 и 5, § 2, привести любое уравнение $R_1(x) =$

$= R_2(x)$, где $R_1(x)$ и $R_2(x)$ — алгебраические дроби. Например, уравнение

$$2x^3 + \frac{4}{x^2 - 1} = 0$$

является рациональным алгебраическим. В дальнейшем мы будем называть такие уравнения просто *алгебраическими*.

Применяя теоремы о равносильности уравнений, можно заменить каждое уравнение вида (1) равносильным ему уравнением вида:

$$f(x) = 0, \quad (2)$$

где $f(x)$ — многочлен от x . Для этого надо записать дробь $R(x)$ в виде отношения двух многочленов. Мы получим уравнение:

$$\frac{f(x)}{\varphi(x)} = 0,$$

где $f(x)$ и $\varphi(x)$ — многочлены от x . Но дробь может равняться нулю лишь в случае, когда равен нулю ее числитель. Поэтому решение уравнения (1) сводится к решению уравнения $f(x) = 0$, где $f(x)$ — многочлен от x . При этом нужно иметь в виду, что решениями уравнения (1) являются лишь те корни уравнения (2), при которых дробь $R(x)$ имеет смысл (то есть $\varphi(x)$ отлично от нуля).

П р и м е р. Решить уравнение

$$\frac{1}{x-2} = -\frac{1}{x^2-5x+6}.$$

Перенесем $-\frac{1}{x^2-5x+6}$ в левую часть уравнения и приведем получившуюся сумму к общему знаменателю. Получим уравнение:

$$\frac{x-2}{x^2-5x+6} = 0.$$

Приравнявая нулю числитель этой дроби, получаем уравнение $x-2=0$, корнем которого является число $x=2$. Однако при $x=2$ дробь $\frac{1}{x^2-5x+6}$ не определена. Поэтому заданное уравнение корней не имеет.

2. Метод разложения на множители. Рассмотрим некоторые методы решения алгебраических уравнений, а также отдельные виды таких уравнений.

Выше было сказано, что при решении уравнения его заменяют другими уравнениями или совокупностями уравнений, равносильными заданному, но более простыми.

Рассмотрим следующий пример. Пусть надо решить уравнение:

$$(2x - 7)(4x + 1)(x - 6) = 0. \quad (1)$$

Мы знаем, что произведение может равняться нулю тогда и только тогда, когда хотя один из его сомножителей равен нулю. Поэтому, чтобы решить уравнение (1), надо найти все значения, при которых хотя один из сомножителей равен нулю. А это все равно, что решить совокупность уравнений

$$\begin{cases} 2x - 7 = 0, \\ 4x + 1 = 0, \\ x - 6 = 0. \end{cases}$$

Решая ее, находим для x значения $\frac{7}{2}$, $\frac{1}{4}$ и 6. Они и дают корни уравнения (1).

Метод, примененный для решения уравнения (1), в общем виде формулируется так.

Теорема 5. Если функции $f_1(x), \dots, f_n(x)$ определены на некотором множестве M , то на этом множестве уравнение

$$f_1(x) f_2(x) \cdot \dots \cdot f_n(x) = 0 \quad (2)$$

равносильно совокупности уравнений

$$\begin{cases} f_1(x) = 0, \\ f_2(x) = 0, \\ \dots \dots \dots \\ f_n(x) = 0. \end{cases} \quad (3)$$

Доказательство. Пусть a — одно из решений совокупности (3). Это означает, что a является корнем одного из уравнений этой совокупности, например, уравнения $f_k(x) = 0$, а все остальные функции $f_j(x)$ определены при $x = a$. Но тогда

$$f(a) \equiv f_1(a) f_2(a) \dots f_n(a) = 0,$$

так как один из сомножителей $f_k(a)$ равен нулю. Следовательно, любое решение совокупности (3) является корнем уравнения (2).

Наоборот, пусть a — корень уравнения (2). Тогда $f(a) = 0$, то есть $f_1(a) f_2(a) \dots f_n(a) = 0$. Но произведение равно нулю лишь в случае, когда хотя один из сомножителей равен нулю. Поэтому хотя бы одно из чисел $f_1(a), \dots, f_n(a)$ равно нулю. Это означает, что a является корнем хотя бы одного из уравнений $f_k(a) = 0, 1 \leq k \leq n$, то есть одним из решений совокупности уравнений (3).

Пример. Решить уравнение

$$x^4 - 10x^2 + 9 = 0. \quad (4)$$

Левая часть этого уравнения разлагается на множители следующим образом:

$$\begin{aligned} x^4 - 10x^2 + 9 &= (x^2 - 1)(x^2 - 9) = \\ &= (x - 1)(x + 1)(x - 3)(x + 3). \end{aligned}$$

Отсюда следует, что уравнение (4) равносильно совокупности уравнений:

$$\begin{cases} x - 1 = 0, \\ x + 1 = 0, \\ x - 3 = 0, \\ x + 3 = 0. \end{cases} \quad (5)$$

Решая уравнения этой совокупности, получаем корни уравнения (4):

$$x_1 = 1, \quad x_2 = -1, \quad x_3 = 3, \quad x_4 = -3.$$

Уравнение

$$x \left(4 - \frac{1}{x} \right) = 0$$

и совокупность

$$\begin{cases} x = 0 \\ 4 - \frac{1}{x} = 0 \end{cases}$$

не равносильны, так как при $x = 0$ функция $4 - \frac{1}{x}$ не определена. На множестве же $x \neq 0$ они равносильны.

В некоторых случаях разложение на множители связано с существенными преобразованиями. Рассмотрим, например, уравнение:

$$x^4 + 12x^3 + 32x^2 - 8x - 4 = 0. \quad (6)$$

Нетрудно заметить, что

$$\begin{aligned} &x^4 + 12x^3 + 32x^2 - 8x - 4 = \\ &= (x^4 + 12x^3 + 36x^2) - (4x^2 + 8x + 4) = \\ &= (x^2 + 6x)^2 - (2x + 2)^2 = (x^2 + 8x + 2)(x^2 + 4x - 2) \end{aligned}$$

Поэтому уравнение (6) можно записать в виде:

$$(x^2 + 8x + 2)(x^2 + 4x - 2) = 0. \quad (7)$$

Таким образом, все свелось к решению совокупности двух квадратных уравнений:

$$\begin{cases} x^2 + 8x + 2 = 0, \\ x^2 + 4x - 2 = 0. \end{cases}$$

Решая их, находим корни уравнения (6):

$$x_{1,2} = -4 \pm \sqrt{14}, \quad x_{3,4} = -2 \pm \sqrt{6}.$$

У п р а ж н е н и е 8. Найти область допустимых значений и решить следующие уравнения:

$$а) \frac{5}{x^2 - 2x - 3} + \frac{21}{x^2 + 2x - 3} = \frac{9}{x^2 - 4x + 3} - \frac{35}{x^2 + 4x + 3};$$

$$б) \frac{x^2 - 2nx + 2ax - n^2}{x^3 - a^3} + \frac{x + 2n}{x^2 + ax + a^2} = \frac{1}{x - a};$$

$$в) \frac{1}{x + \frac{1}{1 + \frac{x+2}{x-2}}} = \frac{12}{12x - 7};$$

$$г) x^3 + (m - 1)x + m = 0;$$

$$д) (x + a)^4 - (x - a)^4 = 16x^4;$$

$$е) (x - a)(x - b)(x - c) + abc = 0;$$

$$ж) \frac{1}{1 - x} - \frac{1}{1 + x} = \frac{4x}{1 + x^2};$$

$$з) \frac{1}{x + a + b} + \frac{1}{x - a + b} + \frac{1}{x + a - b} + \frac{1}{x - a - b} = 0;$$

$$и) \left(\frac{a + x}{a - x} \right)^2 = 1 + \frac{cx}{ab};$$

$$к) (x - 2)(x - 3)(x - 4) = 6;$$

$$л) x^3 + x^2 - 4x - 4 = 0;$$

$$м) \frac{x}{a} + \frac{b}{x} + \frac{b^2}{x^2} = 1 + \frac{b}{a} + \frac{b^2}{a^2};$$

$$н) 8x^3 + 16x = 9;$$

$$о) x(x^2 - 2) = m(x^2 + 2mx + 2);$$

$$п) (x^2 - a^2)(x + a)b + (a^2 - b^2)(a + b)x + (b^2 - x^2)(b + x)a = 0;$$

$$р) (p - 1)^2 x^3 + px^2 + \left(p - 1 + \frac{1}{p - 1} \right) x + 1 = 0.$$

3. Метод введения нового неизвестного. Наряду с методом разложения на множители часто применяется другой метод — введение нового неизвестного.

Рассмотрим следующий пример:

$$(x^2 + x + 1)^2 - 3x^2 - 3x - 1 = 0. \quad (1)$$

Если раскрыть скобки, то получится уравнение четвертой степени, решить которое довольно сложно. Мы поступим иначе. Обозначим $x^2 + x + 1$ через z . Тогда $-3x^2 - 3x - 1 = -3z + 2$.

Поэтому уравнение (1) после введения нового неизвестного z принимает вид:

$$z^2 - 3z + 2 = 0.$$

Решая это квадратное уравнение, получаем, что его корни равны: $z_1 = 1$, $z_2 = 2$.

Но $z = x^2 + x + 1$. Поэтому x удовлетворяет или уравнению $x^2 + x + 1 = 1$, или уравнению $x^2 + x + 1 = 2$, то есть совокупности уравнений:

$$\begin{cases} x^2 + x + 1 = 1, \\ x^2 + x + 1 = 2. \end{cases}$$

Решая ее, получаем:

$$x_1 = 0, \quad x_2 = 1, \quad x_{3,4} = \frac{-1 \pm \sqrt{5}}{2}.$$

Метод, примененный для решения уравнения (1), в общем виде заключается в следующем.

Пусть дано уравнение $F(x) = 0$ и пусть функцию $F(x)$ можно представить в виде $F(x) = f[\varphi(x)]$, так что уравнение $F(x) = 0$ записывается в виде

$$f[\varphi(x)] = 0. \quad (2)$$

Введем новое неизвестное z , положив $z = \varphi(x)$. Тогда вместо уравнения (1) получаем уравнение относительно z : $f(z) = 0$. Докажем следующую теорему.

Теорема 6. Если a — один из корней уравнения $f(z) = 0$, b — один из корней уравнения $\varphi(x) = a$, то b является одним из корней уравнения $F(x) = 0$, где $F(x) = f[\varphi(x)]$. Обратно, если b — корень уравнения $F(x) = 0$, то $a = \varphi(b)$ — один из корней уравнения $f(z) = 0$.

Доказательство. Пусть b — корень уравнения $\varphi(x) = a$, где a — корень уравнения $f(z) = 0$; $f(a) = 0$. Тогда $\varphi(b) = a$, и потому

$$F(b) = f[\varphi(b)] = f(a) = 0.$$

Таким образом, b удовлетворяет уравнению $F(x) = 0$.

Обратно, пусть b — корень уравнения $F(x) = 0$ и $a = \varphi(b)$. Тогда

$$f(a) = f[\varphi(b)] = F(b) = 0.$$

Следовательно, a — корень уравнения $f(z) = 0$. Теорема доказана.

Из доказанной теоремы следует, что решение уравнения вида $f[\varphi(x)] = 0$ сводится к следующему: сначала находят корни a_1, \dots, a_n уравнения $f(z) = 0$; после этого надо решить все уравнения $\varphi(x) = a_k$. Совокупность корней этих уравнений и дает решение уравнения (2).

У п р а ж н е н и е 9. Решить уравнения:

а) $(x + a)(x + 2a)(x + 3a)(x + 4a) = c^4$;

б) $16x(x + 1)(x + 2)(x + 3) = 9$;

в) $x^4 + (1 - x)^4 = a$;

г) $\frac{x^2}{3} + \frac{48}{x^2} = 10 \left(\frac{x}{3} + \frac{4}{x} \right)$;

д) $x^4 - 2x^3 + x = a$;

е) $x^4 + 2x^3 - 11x^2 + 4x + 4 = 0$;

ж) $x^4 + 4a^3x = a^4$;

з) $x^4 + ax^3 + bx^2 + cx + \frac{c^2}{a^2} = 0$;

и) $x^2 + \frac{1}{x^2} + 2 \left(x + \frac{1}{x} \right) = \frac{142}{9}$.

4*. Биквадратные уравнения. Метод замены неизвестного применяется для решения уравнений вида

$$ax^4 + bx^2 + c = 0, \quad a \neq 0. \quad (1)$$

Такие уравнения называют *биквадратными*. Чтобы решить уравнение (1), положим $x^2 = z$. Тогда получим квадратное уравнение:

$$az^2 + bz + c = 0. \quad (2)$$

Его корнями являются числа:

$$z_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}.$$

Поэтому корни уравнения (1) получаются путем решения уравнений $x^2 = z_1$ и $x^2 = z_2$. Значит, мы получаем четыре корня для уравнения (1):

$$x_{1,2,3,4} = \pm \sqrt{\frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}}.$$

Четыре корня возникают при различных комбинациях знаков:

$$(+, +), \quad (+, -), \quad (-, +), \quad (-, -).$$

При решении биквадратных уравнений (как и при решении квадратных уравнений) иногда приходится извлекать квадратные корни из отрицательных чисел. Это приводит к так называемым комплексным числам, которые будут изучены в главе V.

П р и м е р. Решить уравнение

$$x^4 - 25x^2 + 144 = 0. \quad (3)$$

Полагая $x^2 = z$, получаем квадратное уравнение:

$$z^2 - 25z + 144 = 0.$$

Его корнями являются числа $z_1 = 9$, $z_2 = 16$. Значит, корни уравнения (8) имеют вид:

$$x_{1,2} = \pm 3, \quad x_{3,4} = \pm 4.$$

У п р а ж н е н и е 10. Решить уравнения:

а) $x^4 - 29x^2 + 100 = 0$;

б) $x^4 + 7x^2 + 10 = 0$;

в) $x^4 + 130x^2 + 1089 = 0$;

г) $(x+a)^4 + (x-a)^4 = 82a^4$;

д) $\frac{a^2 + x^2}{a^2 - x^2} + \frac{a^2 - x^2}{a^2 + x^2} = -\frac{5}{2}$;

е) $a^2x^4 - (a^4 + 1)x^2 + 1 = 0$.

5*. Возвратные уравнения 3-й и 4-й степеней. Многочлен n -й степени

$$f(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \dots + a_n$$

называется *возвратным*, если его коэффициенты, одинаково удаленные от начала и от конца, равны между собой. Иными словами, коэффициенты возвратного многочлена n -й степени удовлетворяют условию $a_k = a_{n-k}$ ($k = 0, 1, \dots, n$).

Алгебраическое уравнение вида $f(x) = 0$, где $f(x)$ — возвратный многочлен, называют *возвратным уравнением*. Примерами таких уравнений являются:

$$x^3 - 2x^2 - 2x + 1 = 0,$$

$$2x^4 - 3x^3 + 5x^2 - 3x + 2 = 0.$$

Рассмотрим решение возвратных уравнений третьей и четвертой степеней. Возвратное уравнение третьей степени имеет вид:

$$ax^3 + bx^2 + bx + a = 0. \quad (1)$$

Группируя члены, разложим выражение в левой части уравнения на множители:

$$a(x^3 + 1) + bx(x + 1) = a(x + 1)(x^2 - x + 1) + bx(x + 1) = (x + 1)[ax^2 + (b - a)x + a].$$

Отсюда видно, что одним из корней уравнения (1) является $x = -1$. Два других корня получаются путем решения квадратного уравнения

$$ax^2 + (b - a)x + a = 0.$$

П р и м е р. Решить уравнение

$$2x^3 + 7x^2 + 7x + 2 = 0.$$

Разлагая левую часть уравнения на множители, получаем:

$$(x + 1)(2x^2 + 5x + 2) = 0.$$

Корни квадратного уравнения $2x^2 + 5x + 2 = 0$ равны $-\frac{1}{2}$ и -2 . Поэтому корнями заданного уравнения являются числа $x_1 = -1$, $x_2 = -\frac{1}{2}$, $x_3 = -2$.

Приведем пример задачи, сводящейся к разобранному типу уравнений.

З а д а ч а. Из квадратного листа жести со стороной a см вырезают по углам четыре квадратика со стороной x см и делают из получившейся фигуры коробку. При каком значении x объем коробки равен $\frac{a^3}{16}$?

Р е ш е н и е. Основанием коробки является квадрат со стороной $a - 2x$, а ее высота равна x . Значит, объем коробки равен $(a - 2x)^2 x$. По условию имеем уравнение:

$$(a - 2x)^2 x = \frac{a^3}{16}$$

или

$$64x^3 - 64ax^2 + 16a^2x - a^3 = 0.$$

Положим $x = \frac{az}{4}$. Мы получим для z уравнение

$$z^3 - 4z^2 + 4z - 1 = 0.$$

Разлагая на множители, получаем

$$(z - 1)(z^2 - 3z + 1) = 0.$$

Поэтому корни нашего уравнения равны

$$z_1 = 1, \quad z_{2,3} = \frac{3 \pm \sqrt{5}}{2}.$$

Значит,

$$x_1 = \frac{a}{4}, \quad x_2 = \frac{3 - \sqrt{5}}{8} a, \quad x_3 = \frac{3 + \sqrt{5}}{8} a.$$

Из условия задачи следует, что $0 \leq x \leq \frac{a}{2}$. Поэтому x_3 не удовлетворяет условию. Итак, либо $x = \frac{a}{4}$, либо $x = \frac{3 - \sqrt{5}}{8} a$.

Теперь рассмотрим возвратное уравнение 4-й степени:

$$ax^4 + bx^3 + cx^2 + bx + a = 0. \quad (2)$$

Так как $a \neq 0$, то $x = 0$ не является корнем этого уравнения. Поэтому если разделить обе части уравнения (2) на x^2 , то получим равносильное уравнение:

$$a\left(x^2 + \frac{1}{x^2}\right) + b\left(x + \frac{1}{x}\right) + c = 0. \quad (3)$$

Введем новое неизвестное z , положив $z = x + \frac{1}{x}$. Так как $z^2 = \left(x + \frac{1}{x}\right)^2 = x^2 + 2 + \frac{1}{x^2}$, то $x^2 + \frac{1}{x^2} = z^2 - 2$. Следовательно, уравнение (3) превращается в квадратное уравнение относительно z :

$$a(z^2 - 2) + bz + c = 0.$$

Решив это уравнение, найдем его корни z_1 и z_2 . Чтобы найти x , остается решить совокупность уравнений:

$$\begin{cases} x + \frac{1}{x} = z_1, \\ x + \frac{1}{x} = z_2. \end{cases}$$

Она сводится к совокупности квадратных уравнений:

$$\begin{cases} x^2 - z_1x + 1 = 0, \\ x^2 - z_2x + 1 = 0. \end{cases}$$

П р и м е р. Решить уравнение

$$6x^4 - 35x^3 + 62x^2 - 35x + 6 = 0. \quad (4)$$

Перепишем это уравнение в виде

$$6\left(x^2 + \frac{1}{x^2}\right) - 35\left(x + \frac{1}{x}\right) + 62 = 0$$

и введем новое неизвестное $z = x + \frac{1}{x}$. Получим уравнение:

$$6(z^2 - 2) - 35z + 62 = 0$$

или

$$6z^2 - 35z + 50 = 0.$$

Решая его, находим: $z_1 = \frac{5}{2}$, $z_2 = \frac{10}{3}$. Чтобы найти корни уравнения (4), надо решить уравнения:

$$x + \frac{1}{x} = \frac{5}{2}, \quad x + \frac{1}{x} = \frac{10}{3}.$$

Из них получаем:

$$x_1 = 2, \quad x_2 = \frac{1}{2}, \quad x_3 = 3, \quad x_4 = \frac{1}{3}.$$

Наряду с уравнениями вида (1) и (2) рассматривают так называемые *косимметричные уравнения*, или, иначе, *возвратные уравнения второго рода*. При $n = 4$ они имеют вид:

$$ax^4 + bx^3 + cx^2 - bx + a = 0. \quad (5)$$

Это уравнение сводится к

$$a\left(x^2 + \frac{1}{x^2}\right) + b\left(x - \frac{1}{x}\right) + c = 0. \quad (6)$$

После этого вводят новое неизвестное по формуле $z = x - \frac{1}{x}$. Так как

$z^2 = x^2 - 2 + \frac{1}{x^2}$, то уравнение (6) сводится к квадратному уравнению $a(z^2 + 2) + bz + c = 0$. Дальнейшее решение ведется так же, как и для обычных возвратных уравнений.

У п р а ж н е н и я

11. Решить уравнения:

- а) $x^4 + x^3 - 4x^2 + x + 1 = 0$;
- б) $6x^4 + 5x^3 - 38x^2 + 5x + 6 = 0$;
- в) $x^3 - 3x^2 - 3x + 1 = 0$;
- г) $3x^3 - 7x^2 - 7x + 3 = 0$;
- д) $5x^4 - 12x^3 + 11x^2 - 12x + 5 = 0$;
- е) $x^4 + 5x^3 + 4x^2 - 5x + 1 = 0$.

12. а) Доказать, что если α — корень возвратного уравнения, то $\frac{1}{\alpha}$ — тоже корень этого уравнения.

б) Доказать, что если $f(x)$ — возвратный многочлен n -й степени, то $f(x) = x^n f\left(\frac{1}{x}\right)$.

§ 3. Функциональные неравенства

Перейдем к изучению неравенств между функциями от одного или нескольких переменных. Задачи о таких неравенствах распадутся на два больших класса. В одних задачах требуется доказать, что в той или иной области, где заданы две функции, их значения удовлетворяют заданному неравенству. Мы будем говорить в этом случае, что неравенство выполняется в этой области тождественно. Такие задачи называют *задачами на доказательство неравенств*.

Иной вид имеют задачи второго типа. Здесь задано неравенство между функциями и надо найти все значения аргумента (или аргументов, если функции зависят от нескольких переменных), для

которых это неравенство выполняется. Такие задачи мы будем называть *задачами на решение неравенств*.

Теория неравенств во многом напоминает теорию уравнений. Существенным отличием является то, что уравнение, как правило, имеет конечное множество решений. Решения же неравенств с одним неизвестным заполняют целые промежутки на числовой оси. Для неравенств со многими неизвестными мы получаем в качестве решений области на плоскости, в пространстве и т. д.

Понятия системы неравенств и совокупности неравенств определяются точно так же, как и для уравнений. Именно, мы будем говорить, что задана *система неравенств*

$$\begin{cases} f_1(x) < F_1(x), \\ \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ f_n(x) < F_n(x), \end{cases}$$

если надо найти все значения x , при которых выполняются все эти неравенства. Если же надо найти все значения x , при которых выполняется хотя бы одно из неравенств $f_k(x) < F_k(x)$, то говорят, что задана *совокупность неравенств* (с одним неизвестным). Совокупность неравенств обозначают так:

$$\begin{cases} f_1(x) < F_1(x), \\ \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ f_n(x) < F_n(x). \end{cases}$$

Рассмотрим сначала некоторые общие вопросы теории функциональных неравенств.

1. Следствия из неравенств. Пусть дана система неравенств

$$\begin{cases} f_1(x) < F_1(x), \\ \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ f_n(x) < F_n(x). \end{cases} \quad (1)$$

Мы будем говорить, что неравенство

$$f(x) < F(x) \quad (2)$$

является *следствием* системы неравенств (1), если оно имеет место для любого x , удовлетворяющего всем неравенствам (1). Иными словами, если выполняются все неравенства (1), то должно выполняться и их следствие (2).

Это определение можно сформулировать следующим образом. Обозначим через N_k множество точек, в которых выполняется неравенство $f_k(x) < F_k(x)$ ($k = 1, 2, \dots, n$), а через M — множество точек, где выполняется

неравенство (2). Неравенство (2) является следствием системы неравенств (1), если M содержит пересечение всех множеств N_1, \dots, N_n

$$M \supset N_1 N_2 \dots N_n.$$

В самом деле, пересечение множеств N_1, \dots, N_n состоит из чисел, удовлетворяющих всем неравенствам (1). Поэтому если (2) — следствие системы неравенств (1), то оно выполняется во всех точках этого пересечения. А это и означает, что $M \supset N_1 N_2 \dots N_n$.

Чаще всего приходится пользоваться следующими утверждениями о следствиях из неравенств.

Теорема 7. Если на некотором множестве A выполняются неравенства

$$f_1(x) < F_1(x) \quad (3)$$

и

$$f_2(x) < F_2(x), \quad (4)$$

то на A имеет место и неравенство

$$f_1(x) + f_2(x) < F_1(x) + F_2(x). \quad (5)$$

Доказательство. Пусть a — число из множества A . Тогда справедливы числовые неравенства

$$\begin{aligned} f_1(a) &< F_1(a) \\ f_2(a) &< F_2(a). \end{aligned}$$

Следовательно, имеет место неравенство:

$$f_1(a) + f_2(a) < F_1(a) + F_2(a).$$

Оно показывает, что при $a \in A$ выполняется неравенство (5). Значит, (5) является следствием из (3) и (4).

Точно так же доказывается следующая

Теорема 8. Пусть на некотором множестве A выполняются неравенства

$$0 < f_1(x) < F_1(x)$$

и

$$0 < f_2(x) < F_2(x).$$

Тогда на этом множестве имеет место и неравенство

$$0 < f_1(x) f_2(x) < F_1(x) F_2(x).$$

2. Равносильные неравенства. Введем следующее определение.

О п р е д е л е н и е 1. Два неравенства

$$f_1(x) < F_1(x) \quad (1)$$

и

$$f_2(x) < F_2(x) \quad (2)$$

называются *равносильными*, если каждое число, удовлетворяющее неравенству (1), удовлетворяет и неравенству (2), а каждое число, удовлетворяющее (2), удовлетворяет и (1) (в частности, если множества решений обоих неравенств пусты).

Иными словами, два неравенства равносильны, если каждое из них является следствием другого.

Для установления равносильности двух неравенств применяют следующие теоремы.

Теорема 9. Пусть функция $\varphi(x)$ определена при всех допустимых значениях x . Тогда неравенства

$$f(x) < F(x) \quad (3)$$

и

$$f(x) + \varphi(x) < F(x) + \varphi(x) \quad (4)$$

равносильны.

Для доказательства этой теоремы достаточно заметить, что из $f(a) < F(a)$ следует

$$f(a) + \varphi(a) < F(a) + \varphi(a), \quad (5)$$

а из (5) следует $f(a) < F(a)$.

Из теоремы 1 вытекает следующее правило переноса членов в неравенствах:

Неравенства

$$f(x) < F(x) + \varphi(x) \quad (6)$$

и

$$f(x) - \varphi(x) < F(x) \quad (7)$$

равносильны.

В самом деле, (6) получается из (7) прибавлением к обеим частям функции $-\varphi(x)$.

Из этого следствия вытекает, что любое неравенство $f(x) < F(x)$ равносильно неравенству вида $F(x) - f(x) > 0$.

Точно так же доказывается следующая

Теорема 10. *Неравенства*

$$f(x) < F(x) \quad (8)$$

и

$$-F(x) < -f(x) \quad (9)$$

равносильны. Равносильны и неравенства

$$0 < f(x) < F(x) \quad (10)$$

и

$$0 < \frac{1}{F(x)} < \frac{1}{f(x)}. \quad (11)$$

Наконец, докажем следующую теорему.

Теорема 11. Пусть функция $\varphi(x)$ определена при всех допустимых значениях x и положительна. Тогда неравенства

$$f(x) < F(x) \quad (12)$$

и

$$f(x) \varphi(x) < F(x) \varphi(x) \quad (13)$$

равносильны.

Доказательство. Пусть a — число, удовлетворяющее неравенству (12): $f(a) < F(a)$. Умножим обе части этого неравенства на $\varphi(a)$. Так как $\varphi(a) > 0$, то знак неравенства не изменится. Мы получим

$$f(a) \varphi(a) < F(a) \varphi(a).$$

Это показывает, что a удовлетворяет неравенству (13), а потому (13) является следствием (12). Точно так же доказывается, что (12) является следствием (13). Для этого достаточно умножить обе части неравенства (13) на положительное число $\frac{1}{\varphi(a)}$.

Если же функция $\varphi(a)$ определена для всех допустимых значений x и отрицательна, то неравенство $f(x) < F(x)$ равносильно неравенству

$$f(x) \varphi(x) > F(x) \varphi(x). \quad (14)$$

В общем случае приходится разбивать множество допустимых значений на три подмножества: точек x , где $\varphi(x) > 0$, точек x , где $\varphi(x) < 0$, и точек x , где $\varphi(x) = 0$.

Мы доказывали теоремы о равносильности для неравенства с одним переменным. Эти теоремы остаются верными и для неравенств с несколькими переменными.

3. Доказательство неравенств. Для доказательства неравенств применяют один из следующих двух путей.

1) Исходят из неравенства, которое надо доказать, и последовательно заменяют его равносильными неравенствами, пока не дойдут до очевидного неравенства. Так как на каждом шагу получалось неравенство, равносильное данному, то тем самым справедливость данного неравенства доказана.

2) Исходят из какого-нибудь очевидного неравенства и заменяют его неравенствами-следствиями до тех пор, пока не придут к доказываемому неравенству. Мы знаем, что неравенство $f(x) \geq g(x)$ равносильно неравенству $f(x) - g(x) \geq 0$. Поэтому доказательство неравенства $f(x) \geq g(x)$ сводится к доказательству того, что разность левой и правой частей неравенства положительна. Для этого стараются представить эту разность в виде суммы или произведения заведомо положительных выражений.

Рассмотрим следующий пример. Доказать неравенство

$$x^4 + 20 > 7x^2 + 2x. \quad (*)$$

Это неравенство равносильно неравенству

$$x^4 - 7x^2 - 2x + 20 > 0.$$

Перепишем левую часть в виде

$$(x^2 - 4)^2 + (x - 1)^2 + 3.$$

Так как, очевидно, $(x^2 - 4)^2 \geq 0$, $(x - 1)^2 \geq 0$, то неравенство (*) доказано.

Далее докажем, что дробь $\frac{x}{x+a}$, где $x > 0$, $a > 0$, увеличивается, если к числителю и знаменателю прибавить одно и то же положительное число b . Иными словами, докажем, что при $x > 0$, $a > 0$, $b > 0$ выполняется неравенство

$$\frac{x+b}{x+a+b} > \frac{x}{x+a}. \quad (**)$$

Для этого составим разность левой и правой частей неравенства:

$$\frac{x+b}{x+a+b} - \frac{x}{x+a}.$$

Приведя дроби к одному знаменателю, получаем:

$$\frac{x+b}{x+a+b} - \frac{x}{x+a} = \frac{ab}{(x+a)(x+a+b)}.$$

Так как правая часть этого равенства заведомо положительна, то неравенство (**) доказано.

Теперь приведем пример на использование второго способа доказательства неравенства. Докажем, что для любого действительного числа x имеет место неравенство

$$\frac{x^2 + 1}{2} \geq x, \quad (1)$$

причем знак равенства получается лишь при $x = 1$.

Будем исходить из очевидного неравенства

$$(x - 1)^2 \geq 0, \quad (2)$$

имеющего место при любом действительном x , причем равенство в формуле (2) может иметь место лишь при $x = 1$.

Раскроем скобки в выражении (2). Мы получим неравенство $x^2 - 2x + 1 \geq 0$. Но при любом значении x можно прибавить к обеим частям неравенства число $2x$, а потом разделить обе части полученного неравенства на 2 (см. п. 2). Выполнив эти операции,

получаем доказываемое неравенство (1), где знак равенства имеет место лишь при $x = 1$.

У п р а ж н е н и я

13. Доказать, что при всех действительных значениях x имеем

а) $(x-1)(x-3)(x-4)(x-6)+10 > 0$;
б) $x^4 - 6x^3 + 13x^2 - 12x + 4 > 0$.

14. Доказать, что при всех положительных значениях x имеем

$$x^4 - 2x^2 + 4x + 3 > 0.$$

15. Доказать, что

$$3(1+x^2+x^4) > (1+x+x^2)^2.$$

16. Доказать, что $(1+x)^n > 1+nx$, если $1+x > 0$ и n — натуральное число.

17*. Доказать, что если

$$f(x) = a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \dots + a_n$$

есть многочлен n -й степени и

$$M = \max \left\{ \left| \frac{a_1}{a} \right|, \dots, \left| \frac{a_n}{a_0} \right| \right\},$$

то при $x > M+1$ имеем

$$|a_n x^n| > |a x^{n-1} + \dots + a_n|.$$

4. Линейные неравенства. Перейдем теперь к методам решения неравенств. Начнем с простейшего случая — линейного неравенства с одним неизвестным. Такое неравенство имеет вид $ax + b > 0$ или $ax + b < 0$.

Если $a = 0$, то неравенство принимает вид $b > 0$. В случае, когда b — положительное число, это неравенство справедливо для всех значений x , а в случае, когда b — отрицательное число, оно не имеет места ни при одном значении x .

Рассмотрим более интересный случай, когда $a \neq 0$. Не теряя общности, можно считать, что $a > 0$. Если $a < 0$, то обе части неравенства умножим на -1 , изменив знак неравенства на противоположный (например, неравенство $-3x + 8 > 0$ можно заменить равносильным неравенством $3x - 8 < 0$).

Прибавим к обеим частям неравенства $ax + b > 0$ число $(-b)$. Мы получим равносильное неравенство $ax > -b$. Далее, разделив обе части неравенства $ax > -b$ на a , получим неравенство $x > -\frac{b}{a}$ (напомним, что мы условились считать a положительным числом).

Итак, неравенство $ax + b > 0$, где a — положительное число, равносильно неравенству $x > -\frac{b}{a}$. Точно так же неравенство $ax + b < 0$ равносильно неравенству $x < -\frac{b}{a}$.

Полученный результат допускает простое геометрическое истолкование. Рассмотрим функцию $y = ax + b$, $a > 0$. Ее графиком является прямая линия, образующая острый угол с осью Ox и пересекающая эту ось в точке $x = -\frac{b}{a}$ (см. (рис. 9).

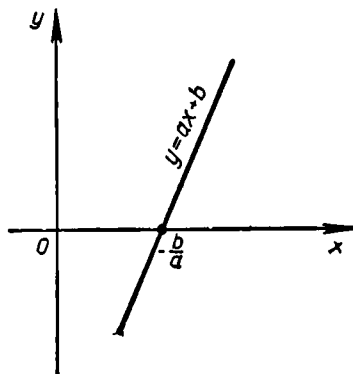


Рис. 9

Ясно, что слева от точки $-\frac{b}{a}$ функция $y = ax + b$ отрицательна, а справа от этой точки — положительна.

К неравенствам рассмотренного вида сводится решение более общих неравенств

$$ax + b < cx + d. \quad (1)$$

В самом деле, неравенство (1) равносильно

$$(a - c)x < d - b. \quad (2)$$

К решению линейных неравенств сводится решение систем и совокупностей линейных неравенств. Чтобы найти решение систем линейных неравенств, надо решить каждое из них, а потом взять пересечение получившихся множеств. При решении совокупности линейных неравенств надо решить каждое из них и взять сумму получившихся множеств.

Пример 1. Решить систему неравенств:

$$\begin{cases} 2x - 8 > -x + 1, \\ x + 2 < -3x + 26, \\ 4x + 1 < x + 16. \end{cases} \quad (3)$$

Решением первого из них является $x > 3$, второго $x < 6$, а третьего $x < 5$. Ясно, что пересечением этих трех множеств является промежуток $3 < x < 5$.

Пример 2. Решить совокупность систем неравенств:

$$\left[\begin{cases} 4x + 5 < 2x + 13, \\ 5x + 2 > 7, \\ 3x - 6 > 3, \\ 2x + 11 < -x + 32. \end{cases} \right. \quad (4)$$

Сначала решим систему неравенств:

$$\begin{cases} 4x + 5 < 2x + 13, \\ 5x + 2 > 7. \end{cases}$$

Так же, как и в примере 1, получаем промежуток $1 < x < 4$.

Точно так же решением системы неравенств:

$$\begin{cases} 3x - 6 > 3, \\ 2x + 11 < -x + 32 \end{cases}$$

является промежуток $3 < x < 7$. Решение совокупности (4) получается объединением этих промежутков. В результате получаем промежуток $1 < x < 7$.

Упражнение 18. Решить следующие системы неравенств и совокупности систем:

$$\begin{array}{ll} \text{а) } \begin{cases} 5x - 7 > x + 17, \\ 8x + 1 < 41. \end{cases} & \text{в) } \begin{cases} 7x - 6 > 2x + 4, \\ 6x + 3 < 2x + 43, \\ 8x + 1 > 5x - 2, \\ x + 4 > 4x + 2, \\ 7x + 4 > 4, \\ 5x + 1 < 2x + 13. \end{cases} \\ \text{б) } \begin{cases} 3x - 2 > x + 30, \\ 5x + 1 < 31, \\ 4x + 3 < x + 30, \\ 6x + 2 > -2x + 10. \end{cases} & \end{array}$$

5. Решение неравенств второй степени. Перейдем теперь к решению квадратных неравенств, то есть неравенств вида

$$ax^2 + bx + c > 0 \text{ или } ax^2 + bx + c < 0. \quad (1)$$

Мы можем, не теряя общности, считать, что $a > 0$.

Мы покажем сейчас, что решение неравенств второй степени сводится по сути дела к решению квадратных уравнений. При этом возможны различные случаи, в зависимости от знака дискриминанта $D = b^2 - 4ac$ квадратного уравнения

$$ax^2 + bx + c = 0.$$

а) Пусть $D > 0$. В этом случае, как мы знаем, квадратное уравнение (2) имеет два различных действительных корня x_1 и x_2 . Будем считать, что $x_1 < x_2$. Имеет место соотношение

$$ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2).$$

Значит, неравенство $ax^2 + bx + c > 0$ равносильно неравенству

$$a(x - x_1)(x - x_2) > 0.$$

Сомножитель $x - x_1$ положителен при $x > x_1$ и отрицателен при $x < x_1$; сомножитель $x - x_2$ положителен при $x > x_2$ и отрицателен при $x < x_2$. Иными словами, первый сомножитель меняет знак лишь при переходе через точку x_1 , а второй — лишь при переходе через точку x_2 . Поэтому произведение $a(x - x_1)(x - x_2)$ меняет знак лишь при переходе через одну из этих точек.

Иными словами, на каждом из промежутков

$$(-\infty, x_1), (x_1, x_2), (x_2, \infty)$$

квадратный трехчлен $ax^2 + bx + c$ имеет постоянный знак.

Легко найти, какой именно знак имеет трехчлен на каждом промежутке. Если $x < x_1$, то тем более $x < x_2$, а потому оба сомножителя $x - x_1$ и $x - x_2$ отрицательны. Но тогда их произведение $(x - x_1)(x - x_2)$ положительно. Поскольку мы предположили, что и $a > 0$, то получаем: при $x < x_1$ квадратный трехчлен $ax^2 + bx + c$ положителен. При переходе через точку x_1 сомножитель $x - x_1$ становится положительным, а сомножитель $x - x_2$ остается отрицательным. Значит, на промежутке (x_1, x_2) квадратный трехчлен $ax^2 + bx + c$ принимает отрицательные значения. Наконец, при $x > x_2$ оба сомножителя $x - x_1$ и $x - x_2$ положительны, и потому выполняется неравенство

$$ax^2 + bx + c > 0.$$

Итак, мы доказали следующее утверждение: если квадратный трехчлен $ax^2 + bx + c$, где $a > 0$, имеет два различных действительных корня x_1 и x_2 , $x_1 < x_2$, то неравенство $ax^2 + bx + c > 0$ выполняется на промежутках $(-\infty, x_1)$ и (x_2, ∞) , а неравенство $ax^2 + bx + c < 0$ — на промежутке (x_1, x_2) .

б) Пусть $D = 0$. В этом случае квадратный трехчлен $ax^2 + bx + c$ имеет два совпадающих корня $x_1 = x_2$. Следовательно, его можно записать в виде

$$ax^2 + bx + c = a(x - x_1)^2.$$

Но $(x - x_1)^2$ положительно при $x \neq x_1$ и равно нулю при $x = x_1$. Итак, при $a > 0$ и $D = 0$ неравенство $ax^2 + bx + c > 0$ выполняется на промежутках $(-\infty, x_1)$, (x_1, ∞) (то есть на всей числовой

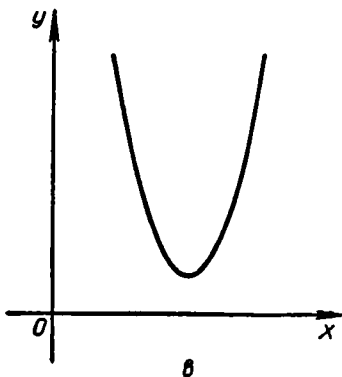
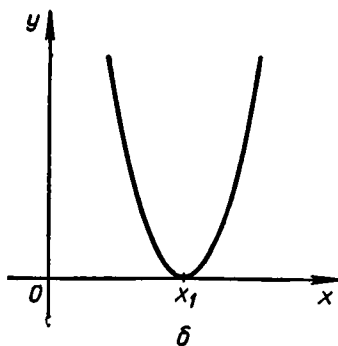
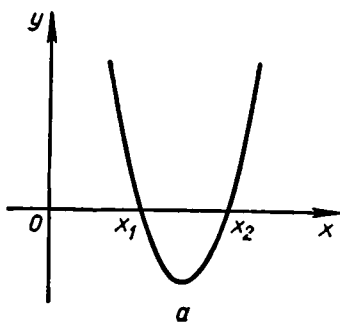


Рис 10.

прямой с «выколотой» точкой x_1), а неравенство $ax^2 + bx + c < 0$ не выполняется ни в одной точке числовой оси.

в) Наконец, рассмотрим случай, когда $D < 0$.

Перепишем трехчлен $ax^2 + bx + c$ в виде:

$$ax^2 + bx + c = a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 + \frac{4ac - b^2}{4a}.$$

По условию имеем $D = b^2 - 4ac < 0$. Так как $a > 0$, то для всех значений x трехчлен $ax^2 + bx + c$ является суммой двух положительных слагаемых $a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2$ и $\frac{4ac - b^2}{4a}$ и потому положителен при всех значениях x .

Итак, если $D < 0$, $a > 0$, то неравенство $ax^2 + bx + c > 0$ выполняется для всех значений x , а неравенство $ax^2 + bx + c < 0$ не выполняется ни для одного значения x .

Полученные результаты допускают простое геометрическое истолкование. Рассмотрим функцию $y = ax^2 + bx + c$. При $a > 0$ графиком этой функции является парабола с осью, параллельной оси Oy , обращенная ветвями вверх.

Если $D > 0$, то эта парабола пересекает ось в двух точках x_1 и x_2 (рис. 10, а). Ясно, что заключенная между этими точками часть параболы лежит ниже оси Ox , а слева от x_1 и справа от x_2 парабола лежит выше оси Ox .

Если $D = 0$, то парабола касается оси Ox в некоторой точке x_1 . Слева и справа от этой точки она лежит выше оси Ox (рис. 10, б).

Наконец, при $D < 0$, $a > 0$ парабола не пересекает оси Ox и рас-

положена выше нее. Поэтому для всех значений x выполняется неравенство $ax^2 + bx + c > 0$ (рис. 10, в).

К неравенствам второй степени сводятся неравенства вида

$$\frac{ax + b}{cx + d} > 0.$$

Умножив обе части неравенства на $(cx + d)^2$, получим равносильное неравенство второй степени:

$$(ax + b)(cx + d) > 0.$$

Пример. Решить неравенство

$$\frac{2x - 3}{3x - 7} > 0.$$

Это неравенство равносильно неравенству

$$(2x - 3)(3x - 7) > 0.$$

Корнями функции $(2x - 3)(3x - 7)$ являются числа $\frac{3}{2}$ и $\frac{7}{3}$.

Они разбивают ось на промежутки $(-\infty, \frac{3}{2})$, $(\frac{3}{2}, \frac{7}{3})$, $(\frac{7}{3}, \infty)$. Выясняя знак $2x - 3$ и $3x - 7$ на этих промежутках, устанавливаем, что ответ имеет вид:

$$\left[\begin{array}{l} -\infty < x < 1,5, \\ \frac{7}{3} < x < \infty. \end{array} \right.$$

Приведем пример задачи, сводящейся к решению квадратных неравенств.

Задача. Лодка спускается по течению реки на расстояние 10 км, а затем поднимается против течения на расстояние 6 км. Скорость течения реки равна 1 км/ч. В каких пределах должна лежать собственная скорость лодки, чтобы вся поездка заняла от 3 до 4 часов?

Решение. Пусть v — собственная скорость лодки. Тогда ее скорость по течению реки равна $v + 1$, а против течения реки равна $v - 1$. Поэтому время движения лодки равно

$$t_1 = \frac{10}{v + 1} + \frac{6}{v - 1}.$$

По условию имеем:

$$3 \leq \frac{10}{v + 1} + \frac{6}{v - 1} \leq 4. \quad (*)$$

Должно выполняться неравенство $v > 1$, так как иначе лодка не смогла бы идти против течения. Поэтому неравенство (*) равносильно неравенству

$$3(v^2 - 1) \leq 16v - 4 \leq 4(v^2 - 1).$$

Итак, мы получили систему неравенств

$$\begin{cases} 3(v^2 - 1) \leq 16v - 4, \\ 16v - 4 \leq 4(v^2 - 1), \end{cases}$$

то есть систему неравенств

$$\begin{cases} 3v^2 - 16v + 1 \leq 0, \\ 4v^2 - 16v \geq 0. \end{cases}$$

Корнями уравнения $3v^2 - 16v + 1 = 0$ являются числа $v_{1,2} = \frac{8 \pm \sqrt{61}}{3}$, а уравнения $4v^2 - 16v = 0$ — числа $v_3 = 0$, $v_4 = 4$. Пер-

вое неравенство выполняется на отрезке $\left[\frac{8 - \sqrt{61}}{3}, \frac{8 + \sqrt{61}}{3} \right]$, а второе — при условии $v \leq 0$ или $v \geq 4$. Но мы знаем, что $v > 1$. Поэтому получаем систему неравенств:

$$\begin{cases} \frac{8 - \sqrt{61}}{3} \leq v \leq \frac{8 + \sqrt{61}}{3}, \\ v \geq 4, \end{cases}$$

из которой окончательно получаем:

$$4 \leq v \leq \frac{8 + \sqrt{61}}{3}.$$

У п р а ж н е н и е 19. Решить неравенства:

$$\begin{array}{lll} \text{а) } \frac{x+2}{x+3} > 0; & \text{в) } \frac{4-x}{x-5} < \frac{3}{4}; & \text{д) } \frac{2x-7}{3-x} < 3; \\ \text{б) } \frac{x-3}{2-x} > 1; & \text{г) } \frac{3x}{x-3} < \frac{1}{3}; & \text{е) } |x-3| > 4. \end{array}$$

6*. Решение алгебраических неравенств высших степеней.

Мы видели, что решение квадратичного неравенства свелось по сути дела к решению квадратного уравнения. Корни x_1 и x_2 этого уравнения разбивали числовую ось на промежутки, где квадратный трехчлен сохранял постоянный знак. После этого было достаточно отобрать те промежутки, где выполняется требуемое неравенство.

Точно так же решение неравенства вида

$$a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \dots + a_n > 0 \quad (1)$$

сводится к решению алгебраического уравнения

$$a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \dots + a_n = 0, \quad (2)$$

точнее говоря, к отысканию действительных корней этого уравнения. Чтобы осуществить это сведение, нам понадобится следующее утверждение, которое будет доказано в главе V (см. стр. 238): *любой многочлен с действительными коэффициентами разлагается на множители первой и второй степеней, причем множители второй степени не имеют действительных корней.*

Поэтому неравенство (1) можно записать так:

$$a_0(x - \alpha_1)^{p_1} \dots (x - \alpha_k)^{p_k} (x^2 + \beta_1 x + \gamma_1)^{s_1} \dots (x^2 + \beta_l x + \gamma_l)^{s_l} > 0, \quad (3)$$

где множители

$$x^2 + \beta_j x + \gamma_j \quad (j = 1, 2, \dots, l)$$

не имеют действительных корней и потому положительны на всей числовой оси (см. п. 2). Поэтому, отбрасывая эти множители, мы приходим к равносильному неравенству

$$a(x - \alpha_1)^{p_1} \dots (x - \alpha_k)^{p_k} > 0. \quad (4)$$

А теперь заметим, что множитель $x - \alpha_j$ отрицателен при $x < \alpha_j$ и положителен при $x > \alpha_j$. Иными словами, этот множитель меняет знак лишь при переходе через точку α_j . Значит, если расположить действительные корни $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_k$ многочлена

$$f(x) = a_0 x^n + \dots + a_n$$

в порядке возрастания, то на промежутках

$$(-\infty, \alpha_1), (\alpha_1, \alpha_2), \dots, (\alpha_k, +\infty) \quad (5)$$

многочлен $f(x)$ сохраняет постоянный знак. Поэтому достаточно выбрать на каждом из промежутков (5) «пробную точку» и найти знак многочлена $f(x)$ в этой точке. Тот же знак многочлен будет иметь и на всем промежутке. Вместо подсчета значения в «пробной точке» можно подсчитать число положительных и отрицательных сомножителей в разложении (4).

Совокупность промежутков, на которых $f(x)$ принимает положительные значения, дает решение неравенства $f(x) > 0$, а совокупность промежутков, в которых $f(x)$ принимает отрицательные значения — решение неравенства $f(x) < 0$.

Пр и м е р. Решить неравенство

$$x^4 - 34x^2 + 225 > 0. \quad (6)$$

Найдем сначала корни уравнения

$$x^4 - 34x^2 + 225 = 0.$$

Это биквадратное уравнение. Решая его, получаем корни:

$$x_1 = -5, \quad x_2 = -3, \quad x_3 = 3, \quad x_4 = 5.$$

Найденные корни разбивают действительную ось на промежутки

$$(-\infty, -5), (-5, -3), (-3, 3), (3, 5), (5, +\infty).$$

На промежутке $(-\infty, -5)$ выберем «пробную точку» -6 , на промежутке $(-5, -3)$ — точку -4 , на промежутке $(-3, 3)$ — точку 0 , на $(3, 5)$ — точку 4 и на $(5, \infty)$ — точку 6 . Мы имеем:

$$f(-6) = f(6) = 296 > 0, \quad f(-4) = f(4) = -63 < 0, \quad f(0) = 225 > 0.$$

Отсюда вытекает, что решение неравенства (4) состоит из промежутков $(-\infty, -5)$, $(-3, 3)$, $(5, \infty)$. Это решение можно записать так:

$$\left[\begin{array}{l} -\infty < x < -5, \\ -3 < x < 3, \\ -5 < x < \infty. \end{array} \right.$$

Неравенства вида

$$\frac{a_0x^n + a_1x^{n-1} + \dots + a_n}{b_0x^m + b_1x^{m-1} + \dots + b_m} > 0 \quad (5)$$

решаются точно так же. Именно, умножим числитель и знаменатель на один и тот же множитель $b_0x^m + b_1x^{m-1} + \dots + b_m$. Тогда знаменатель станет неотрицательным. Поэтому неравенство (5) равносильно неравенству

$$(a_0x^n + a_1x^{n-1} + \dots + a_n)(b_0x^m + b_1x^{m-1} + \dots + b_m) > 0,$$

которое решается описанным выше образом.

П р и м е р. Решить неравенство

$$\frac{x^4 - 3x^2 + 2x^2}{x^2 - x - 30} > 0 \quad (6)$$

Это неравенство равносильно следующему:

$$(x^4 - 3x^2 + 2x^2)(x^2 - x - 30) > 0.$$

Решая уравнения

$$x^4 - 3x^2 + 2x^2 = 0$$

и

$$x^2 - x - 30 = 0,$$

находим их корни: $x_1 = 0$, $x_2 = 1$, $x_3 = 2$, $x_4 = -5$, $x_5 = 6$.

Расположим эти корни в порядке возрастания. Полученные числа разбивают действительную ось на промежутки:

$$(-\infty, -5), (-5, 0), (0, 1), (1, 2), (2, 6), (6, \infty).$$

Методом «пробных точек» находим, что решение неравенства (6) состоит из промежутков:

$$(-\infty, -5), (1, 2), (6, \infty).$$

У п р а ж н е н и е 20. Решить неравенства:

а) $\frac{a+3}{2-a} > 1;$

б) $\frac{x^2-9x+20}{x^2+9x+20} > 0;$

в) $(a^2-2a-3)x+a^2 > 0;$

г) $(x+1)(x-2)(x+3)(x-4) > 0;$

д) $x^4-10x^3+35x^2-50x+24 > 0;$

е) $x^3-6x^2+5x < -12;$

ж) $3x^2(x-4)^2 < 32-5(x-2)^2;$

з) $31\left(\frac{24-5x}{x+1} + \frac{5-6x}{x+4}\right) + 370 > 27;$

и) $\frac{x^2-x+1}{x-1} + \frac{x^2-3x+1}{x-3} > 2x - \frac{1}{4x-8};$

к) $\frac{x}{x^2+7x+12} < \frac{x}{x^2+3x+2};$

л) $x^2 + \frac{4x^2}{(x+2)^2} < 5;$

м) $\frac{1}{1+2x} - \frac{2}{2+3x} + \frac{3}{3+4x} < \frac{4}{4+5x};$

н) $|x-3| - |x-2| > 0;$

о) $\begin{cases} \frac{x}{4} - \frac{7}{8} > \frac{3}{4}x - \frac{5}{2}, \\ \frac{x+1}{4} < 2 - \frac{1-2x}{3}; \end{cases}$

п) $\begin{cases} 3x - \frac{x-1}{2} < 4x-5, \\ x + \frac{2}{7} > 4 - \frac{x}{5}. \end{cases}$

7. Краткие исторические сведения. Задачи на решения уравнений первой степени встречаются еще в вавилонских клинописных текстах. В них же есть некоторые задачи, приводящие к квадратным и даже кубическим уравнениям (последние, по-видимому, решались с помощью подбора корней). Древнегреческие математики нашли геометрическую форму решения квадратного уравнения. В геометрической же форме арабский математик Омар Хайям (конец XI — начало XII века н. э.) исследовал кубическое уравнение, хотя и не нашел общей формулы для его решения. Решение кубического уравнения было найдено в начале XVI века в Италии. После того как Сципион дель Ферро решил один частный вид таких уравнений, в 1535 году итальянец Тарталья нашел общую формулу. Он доказал, что корни уравнения

$$x^3 + px + q = 0$$

имеют вид

$$x = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}} + \sqrt[3]{-\frac{q}{2} - \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}}.$$

Это выражение обычно называют формулой Кардано, по имени ученого, узнавшего ее от Тартальи и опубликовавшего в 1545 году в своей книге *Ar magna de rebus algebricis* («Великое искусство алгебраических правил»). Ученик Кардано молодой математик Феррари решил общее уравнение 4-й степени. После этого на протяжении двух с половиной столетий продолжались поиски формулы для решения уравнений пятой степени. В 1823 году замечательный норвежский математик Нильс Хенрик Абель (1802—1829) доказал, что такой формулы не существует. Точнее говоря, он доказал, что корни общего уравнения пятой степени нельзя выразить через его коэффициенты с помощью арифметических действий и операции извлечения корня. Глубокое исследование вопроса об условиях разрешимости уравнений в радикалах провел французский математик Эварист Галуа (1811—1832), погибший на дуэли в возрасте 21 года. Некоторые проблемы теории Галуа решил советский алгебраист И. Р. Шафаревич.

Наряду с поисками формулы для решения уравнения пятой степени велись и другие исследования в области теории алгебраических уравнений. Виета установил связь между коэффициентами уравнения и его корнями. Он доказал, что если x_1, \dots, x_n — корни уравнения

$$x^n + a_1 x^{n-1} + \dots + a_n = 0,$$

то имеют место формулы:

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 + \dots + x_n &= -a_1, \\ x_1 x_2 + x_1 x_3 + \dots + x_{n-1} x_n &= a_2, \\ \vdots & \\ x_1 x_2 \dots x_n &= (-1)^n a_n. \end{aligned}$$

Относительно вопроса о числе корней уравнения см. краткие исторические сведения к главе V.

ОБОБЩЕНИЕ ПОНЯТИЯ СТЕПЕНИ.
ИРРАЦИОНАЛЬНЫЕ ВЫРАЖЕНИЯ

§ 1. Степени с целым показателем

1. Обобщение понятия степени. Мы определили выше степень с натуральным показателем. Ясно, что это определение не годится ни для целых отрицательных, ни для дробных показателей — нельзя взять число сомножителем ни -5 , ни $\frac{3}{4}$ раза. В то же время для многих задач физики нужно определить не только степень с рациональным показателем, но даже и степень с иррациональным показателем.

В физике часто встречаются величины, обладающие следующим свойством: за равные промежутки времени величина изменяется в одно и то же число раз. Например, если за первый час своего изменения величина уменьшилась втрое, то и за десятый час она тоже уменьшится втрое. Примером такой величины является масса радиоактивного вещества. Пусть в начале наблюдения был 1 кг этого вещества, а после первых суток осталось a кг, то есть количество вещества изменилось в a раз. Тогда, как показывают опыты, в течение вторых суток количество вещества тоже изменится в a раз. Поэтому после вторых суток останется a^2 кг вещества. Точно так же в течение третьих суток количество вещества изменится в a раз, и потому останется $a^2 \cdot a = a^3$ кг вещества.

Таким же образом изменяются все остальные величины, обладающие указанным выше свойством. Именно если в начале наблюдения значение этой величины равняется M , а через 1 единицу времени это значение изменилось в a раз и стало равно Ma , то через n единиц времени значение величины равно

$$y = Ma^n. \quad (1)$$

Поскольку величина промежутка времени стоит в показателе формулы (1), закон изменения (1) называют *показательным*.

Формула (1) не дает ответа на вопросы, чему равно значение величины через $\frac{7}{5}$ единицы времени, или за 3 единицы времени до начала наблюдения и т. д.

Естественно обозначить значение величины через t единиц времени после начала наблюдения так: Ma^t . При этом t может быть как целым, так и дробным, как положительным, так и отрицательным (в последнем случае речь идет о моментах времени, предшествовавших началу наблюдения). Но чтобы формула $y = Ma^t$ получила смысл, надо обобщить понятие о степени, ввести степени не только с натуральными, но и с произвольными показателями. В этом параграфе мы решим задачу о распространении понятия степени на случай целых показателей — положительных, отрицательных и равных нулю. Следующий параграф будет посвящен обобщению этого понятия на случай дробных показателей. Более общее понятие степени будет рассмотрено в курсе математического анализа.

При обобщении понятия степени мы будем руководствоваться следующим требованием.

Для степеней с любыми показателями должны оставаться в силе основные свойства степеней с натуральными показателями:

$$1) (ab)^n = a^n b^n;$$

$$2) \left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}, \quad b \neq 0;$$

$$3) a^m a^n = a^{m+n};$$

$$4) \frac{a^m}{a^n} = \begin{cases} a^{m-n}, & \text{если } m > n, \\ \frac{1}{a^{n-m}}, & \text{если } n > m; \end{cases}$$

$$5) (a^m)^n = a^{mn}.$$

Иными словами, эти свойства должны оставаться справедливыми не только для натуральных, но и для любых показателей. Обычно мы будем пользоваться одним из этих свойств для введения соответствующего определения, после чего будем проверять выполнение остальных свойств.

Отметим, что два подхода — с точки зрения физики и с точки зрения математики — согласуются друг с другом.

Выясним физический смысл свойств 3) и 5). Пусть сначала прошло m единиц времени, а потом n единиц времени. За первые m единиц времени величина изменится в a^m раз, а за следующие n единиц времени она изменится в a^n раз. Поэтому за $m + n$ единиц времени она изменится в a^{m+n} раз. Но, с другой стороны, за $m + n$ единиц времени она изменяется в a^{m+n} раз. Зна-

чит, должно выполняться равенство $a^m a^n = a^{m+n}$. При этом m и n могут быть произвольными, а не только натуральными числами.

Аналогично истолковывается смысл свойства 5). Примем m единиц времени за новую единицу измерения (например, перейдем от секунд к минутам или часам). Тогда за одну новую единицу измерения времени наша величина изменится в $b = a^m$ раз, а за n новых единиц времени — в b^n , то есть в $(a^m)^n$ раз. Но n новых единиц времени равно mn первоначальных единиц, а по условию за mn единиц времени величина меняется в a^{mn} раз. Значит, $(a^m)^n = a^{mn}$. И здесь m и n могут быть любыми, а не только натуральными числами.

2. Степень с нулевым показателем. Рассмотрим равенство

$$a^m a^n = a^{m+n}. \quad (1)$$

Пока что оно имеет смысл лишь при натуральных значениях n . Выясним, как надо определить a^0 , чтобы равенство (1) выполнялось и при $n = 0$. Положим в (1) $n = 0$. Тогда равенство примет вид

$$a^m a^0 = a^m.$$

Отсюда ясно, что *при $a \neq 0$ надо положить $a^0 = 1$* . Значение 0^0 не определяется.

Проверим, согласуется ли это определение с физическим подходом. Мы рассматриваем величины, которые в момент времени t принимают значение Ma^t , где M — значение величины при $t = 0$. Поэтому должно выполняться равенство $Ma^0 = M$, из которого и следует, что $a^0 = 1$.

3. Степень с целым отрицательным показателем.

Определим степень с целым отрицательным показателем — n (то есть a^{-n} , где n — натуральное) так, чтобы равенство $a^m a^n = a^{m+n}$ выполнялось не только для натуральных и нулевых значений m и n , но для всех целых значений. Положим в этом равенстве $m = -n$. Мы получим тогда, что

$$a^{-n} a^n = a^{-n+n} = a^0 = 1.$$

Отсюда следует, что *при $a \neq 0$ надо положить*

$$a^{-n} = \frac{1}{a^n}.$$

При $a = 0$ выражение a^{-n} не определяется.

Снова проверим, насколько согласуется введенное определение с физическим смыслом, который был придан значению a^t . Теперь нам надо найти значение величины при $t = -n$, то есть за n единиц времени до начала измерения. Обозначим это значение через m . Так как в течение каждой единицы времени значение величины изменяется в a раз, то за n единиц времени значение величины изменится в a^n раз и станет равным ma^n . Но по условию при $t = 0$ значение величины равно M . Поэтому $ma^n = M$ и, значит, $m = \frac{M}{a^n}$. С другой стороны, при $t = -n$ значение величины должно равняться

ся Ma^{-n} . Поэтому $Ma^{-n} = \frac{M}{a^n}$. Мы снова пришли к тому же результату:

$$a^{-n} = \frac{1}{a^n}.$$

Мы распространили понятие степени на случай любого целого показателя — положительного, отрицательного и нулевого. Покажем, что при этом выполняются свойства 1) — 5) степеней, сформулированные в п. 1 (при этом, конечно, основания степеней должны отличаться от нуля).

Докажем, что выполняется равенство $(ab)^n = a^n b^n$. Если $n = 0$, то оно принимает вид $(ab)^0 = a^0 b^0$ и, очевидно, имеет место, так как $1 = 1 \cdot 1$. Пусть теперь $n = -k$ — целое отрицательное число. Тогда $k > 0$ и потому

$$(ab)^n = (ab)^{-k} = \frac{1}{(ab)^k} = \frac{1}{a^k b^k} = \frac{1}{a^k} \cdot \frac{1}{b^k}.$$

Но $\frac{1}{a^k} = a^{-k} = a^n$; $\frac{1}{b^k} = b^{-k} = b^n$ и потому имеем

$$(ab)^n = a^n b^n.$$

Тем самым доказано выполнение равенства 1) и при целых отрицательных значениях n .

Точно так же доказывается выполнение равенства 2) $\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}$.

Доказательство выполнения свойства 3) $a^m a^n = a^{m+n}$ несколько сложнее, так как приходится разбирать несколько случаев, в зависимости от знаков чисел m , n и $m+n$. Мы разберем один из этих случаев, когда $m > 0$, $n < 0$, $m+n > 0$. Обозначим n через $-k$. Тогда $m-k > 0$ и потому

$$a^m a^n = a^m a^{-k} = a^m \cdot \frac{1}{a^k} = \frac{a^m}{a^k} = a^{m-k} = a^{m+n}.$$

Предоставляем читателю разобрать остальные случаи (включая и те, когда одно из чисел m , n , $m+n$ обращается в нуль). Доказательство равенства 4)

$$\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n} = \frac{1}{a^{n-m}}$$

проводится тем же способом.

Наконец, докажем соотношение 5): $(a^m)^n = a^{mn}$ при $m > 0$, $n < 0$. Положим $n = -k$. Тогда $mn = -mk$ и потому

$$(a^m)^n = (a^m)^{-k} = \frac{1}{(a^m)^k} = \frac{1}{a^{mk}} = a^{-mk} = a^{mn}.$$

Случаи, когда m и n имеют иные знаки или обращаются в нуль, разбираются точно так же. Например, $(a^m)^0 = a^0$, поскольку обе части равенства равны 1.

Итак, для степеней с любым целым показателем выполняются свойства 1) — 5) из п. 1. Отметим еще некоторые свойства этих степеней.

Если a — положительное число, то для всех целых значений n число a^n положительно.

Имеют место равенства:

$$(-a)^{2k} = a^{2k} \quad (2)$$

и

$$(-a)^{2k+1} = -a^{2k+1}$$

(здесь k обозначает любое целое число). Отсюда следует, что если a — отрицательное число, то a^{2k} положительно, а a^{2k+1} отрицательно.

П р и м е р ы. Вычислить выражение

$$\left(\frac{3a^{-3}b^4}{2d^{-2}}\right)^{-4} : \left(\frac{5a^2b^{-5}}{3d^3}\right)^3.$$

Сначала выполним указанные действия, а потом освободимся от отрицательных показателей. Итак, наше выражение равно:

$$\frac{3^{-4}a^{12}b^{-16}}{2^{-4}d^8} : \frac{5^3a^6b^{-15}}{3^3d^9} = \frac{3^{-4}a^{12}b^{-16} \cdot 3^3d^9}{2^{-4}d^8 \cdot 5^3a^6b^{-15}} = \frac{16a^6d}{375b}.$$

У п р а ж н е н и я

1. Упростить выражение

$$(1 + x^{-1})^2 + (1 - x^{-1})^{-2},$$

где

$$x = (1 - n^{-1})^{-2} (1 + n^{-1})^{-2}.$$

2. Упростить выражение

$$(2 + x^{-3})^{-4} + (2 - x^{-3})^{-4},$$

где

$$x = (1 - y^{-2})^{-1} (1 + y^{-2})^{-1}.$$

§ 2. Корни. Степени с рациональными показателями

1. Понятие корня. Пусть a — положительное число и n — натуральное число. Можно доказать, что существует одно и только одно положительное число b такое, что $b^n = a$ ¹. Это число назы-

¹ Это доказательство дается в курсе математического анализа.

вают *арифметическим корнем n -й степени из a* и обозначают $\sqrt[n]{a} = b$. Итак, если a и b — положительные числа, то записи

$$b^n = a \quad (1)$$

и

$$b = \sqrt[n]{a} \quad (2)$$

обозначают одно и то же.

Число a называют *подкорненным выражением*, а n — *показателем корня*. Принято при $n = 2$ опускать показатель корня. Поэтому $\sqrt[n]{a}$ означает $\sqrt[3]{a}$.

Отметим, что наряду со словом «корень» употребляют слово «радикал»¹. Мы будем применять этот термин в тех случаях, когда корень из числа можно спутать с корнем уравнения.

Введем понятие алгебраического корня. Говорят, что число b является *алгебраическим корнем n -й степени из числа a* , если $b^n = a$. Таким образом, по сравнению с понятием арифметического корня здесь опускается требование положительности чисел a и b . Если $n = 2k$ — четное число и $a > 0$, то существуют два алгебраических корня степени $2k$ из a , а именно $\sqrt[2k]{a}$ и $-\sqrt[2k]{a}$ (обозначение $\sqrt[n]{a}$ мы сохраняем здесь для арифметического корня). В самом деле,

$$(\sqrt[2k]{a})^{2k} = (-\sqrt[2k]{a})^{2k} = a.$$

Так как четная степень любого действительного числа неотрицательна, то из отрицательного числа нельзя извлечь действительного корня четной степени. Позже мы познакомимся с комплексными числами, введение которых позволяет определять корни четной степени и из отрицательных чисел.

Если $n = 2k + 1$ — нечетное число, то из любого действительного числа a можно извлечь корень степени n . Именно если $a > 0$, то этим корнем является $\sqrt[2k+1]{a}$. Если же $a < 0$, то этот корень имеет вид $-\sqrt[2k+1]{-a}$. В самом деле, $-a > 0$ и потому

$$(-\sqrt[2k+1]{-a})^{2k+1} = -(\sqrt[2k+1]{-a})^{2k+1} = -(-a) = a.$$

2. Степени с рациональными показателями. В § 1 были определены степени с любыми целыми показателями. Обобщим далее по-

¹ По-латыни radix — корень. Знак корня — видоизмененная латинская буква r , которая писалась так: \sqrt . Черта в XVI веке заменяла знак скобки. Поэтому радикал писали так: $\sqrt{\quad}$.

нятие степени, введя степени с любыми рациональными показателями. Это обобщение тесно связано с понятием корня.

Пусть r — рациональное число и a — положительное число. Запишем число r в виде дроби $r = \frac{p}{q}$, где p и q — целые числа. Не теряя общности, можно считать, что $q > 0$ (например, $\frac{4}{-5} = -\frac{4}{5}$).

Нам надо определить выражение $a^{\frac{p}{q}}$ так, чтобы сохранились все свойства степеней. В частности, должно выполняться равенство:

$$\left(a^{\frac{p}{q}}\right)^q = a^{\frac{p}{q} \cdot q} = a^p. \quad (1)$$

Из него следует, что $a^{\frac{p}{q}}$ надо определить как корень q -й степени из a^p :

$$a^{\frac{p}{q}} = \sqrt[q]{a^p}. \quad (2)$$

Мы ограничиваемся при этом арифметическими значениями корней

При $p = 1$ получаем:

$$a^{\frac{1}{q}} = \sqrt[q]{a}. \quad (3)$$

Например,

$$a^{\frac{3}{5}} = \sqrt[5]{a^3}; \quad a^{-\frac{6}{11}} = \sqrt[11]{a^{-6}} = \sqrt[11]{\frac{1}{a^6}}; \quad a^{\frac{2}{4}} = \sqrt[4]{a^2}.$$

При $a < 0$ мы не определяем смысл выражения $a^{\frac{p}{q}}$, $q \neq 1$.

Ясно, что при определении (3) для выражения $a^{\frac{p}{q}}$ выполняется соотношение (1).

В следующем пункте мы выведем свойства степеней с рациональными показателями. Нам понадобятся для этого следующие два утверждения.

а) Если a и b — положительные числа, причем $a > b$, и если n — натуральное число, то $a^n > b^n$.

Докажем это утверждение индукцией по n . При $n = 1$ оно имеет место. Пусть уже доказано, что $a^n > b^n$. Умножая соответствующие части неравенств $a^n > b^n$ и $a > b$, получаем, что $a^{n+1} > b^{n+1}$. В силу принципа математической индукции неравенство $a^n > b^n$ верно для всех натуральных значений n .

Другое доказательство этого неравенства следует из тождества

$$a^n - b^n = (a - b)(a^{n-1} + a^{n-2}b + \dots + b^{n-1})$$

(см. п. 5 § 1 гл. 1). Если $a > b$, $a > 0$ и $b > 0$, то обе скобки в правой части равенства положительны и потому

$$a^n - b^n > 0, a^n > b^n.$$

Из свойства а) непосредственно вытекает следующее утверждение:

б) Если a и b — такие положительные числа, что для некоторого натурального числа n имеем $a^n = b^n$, то $a = b$.

В самом деле, если бы мы имели, например, $a > b$, то по свойству а) выполнялось бы неравенство $a^n > b^n$, вопреки предположению.

Каждое рациональное число можно различными способами записать в виде дроби. Например, $\frac{3}{4} = \frac{6}{8} = \frac{9}{12} = \dots$. Определение степени с рациональным показателем на первый взгляд зависит от способа записи показателя в виде дроби. Покажем, что это не так, то есть что для любого натурального числа n при $a > 0$ выполняется равенство:

$$a^{\frac{p}{q}} = a^{\frac{pn}{qn}}. \quad (4)$$

Для этого возведем обе части равенства (4) в степень qn . В силу свойства 5) степеней с натуральным показателем и равенства (1) имеем:

$$\left(a^{\frac{p}{q}}\right)^{qn} = \left[\left(a^{\frac{p}{q}}\right)^q\right]^n = (a^p)^n = a^{pn}.$$

С другой стороны, по формуле (1),

$$\left(a^{\frac{pn}{qn}}\right)^{qn} = a^{pn}.$$

Таким образом, qn -е степени обеих частей доказываемого равенства (4) совпадают. В силу утверждения б) отсюда вытекает справедливость равенства (4).

Можно доказать, что определение (2) согласуется с физическим смыслом степеней с показателем $\frac{p}{q}$ (см. стр. 93).

У п р а ж н е н и я

3. Записать с помощью степеней с рациональными показателями выражения:

$$\frac{\sqrt[7]{a^3} \sqrt[3]{c^4}}{\sqrt[5]{a^4} \sqrt[4]{b^2}}, \quad \frac{\sqrt[4]{a^2} \sqrt[6]{b^3}}{\sqrt[5]{c^4}}.$$

4. Следующие выражения записать с помощью радикалов:

$$\frac{a^{-\frac{5}{6}} b^{\frac{3}{4}}}{\frac{2}{3} a - \frac{4}{3} c}; \quad \frac{a^{-\frac{3}{2}} b^{-4} c^3}{a^{-\frac{5}{8}} b^{-\frac{3}{4}} d^{-\frac{4}{5}}}.$$

3. Свойства степеней с рациональными показателями. Докажем, что для степеней с рациональными показателями сохраняются основные свойства степеней с натуральными показателями.

Сначала докажем, что при $x > 0$, $y > 0$ и любом рациональном r

$$(xy)^r = x^r y^r. \quad (1)$$

Пусть $r = \frac{p}{q}$, где $q > 0$. Тогда равенство (1) примет вид

$$(xy)^{\frac{p}{q}} = x^{\frac{p}{q}} y^{\frac{p}{q}}. \quad (1')$$

Возведем обе части равенства (1') в степень q . В силу формулы (1), п. 2, и свойства 1) степеней с натуральным показателем имеем:

$$\left[(xy)^{\frac{p}{q}} \right]^q = (xy)^p = x^p y^p.$$

С другой стороны,

$$\left[x^{\frac{p}{q}} y^{\frac{p}{q}} \right]^q = \left(x^{\frac{p}{q}} \right)^q \left(y^{\frac{p}{q}} \right)^q = x^p y^p.$$

Мы доказали, что q -е степени обеих частей доказываемого равенства (1) имеют одно и то же значение $x^p y^p$. Поэтому по утверждению б), п. 2, справедливо и равенство (1'). Но тогда справедливо и равенство (1).

Совершенно так же доказывается, что если $x > 0$ и $y > 0$, а r — рациональное число, то

$$\left(\frac{x}{y} \right)^r = \frac{x^r}{y^r}. \quad (2)$$

Теперь докажем, что при $x > 0$ для любых рациональных чисел r_1 и r_2 выполняется равенство:

$$x^{r_1} x^{r_2} = x^{r_1 + r_2}. \quad (3)$$

Сначала рассмотрим случай, когда r_1 и r_2 изображаются дробями с одинаковыми знаменателями:

$$r_1 = \frac{p_1}{q}, \quad r_2 = \frac{p_2}{q}.$$

В этом случае доказываемое равенство принимает вид:

$$x^{\frac{p_1}{q}} x^{\frac{p_2}{q}} = x^{\frac{p_1 + p_2}{q}}. \quad (4)$$

Возведем обе части этого равенства в степень q . Мы получим, что

$$\left[x^{\frac{p_1}{q}} x^{\frac{p_2}{q}} \right]^q = \left(x^{\frac{p_1}{q}} \right)^q \left(x^{\frac{p_2}{q}} \right)^q = x^{p_1} x^{p_2} = x^{p_1+p_2}.$$

С другой стороны, $\left(x^{\frac{p_1+p_2}{q}} \right)^q = x^{p_1+p_2}.$

Таким образом, q -е степени обеих частей равенства (4) имеют одно и то же значение $x^{p_1+p_2}$, а потому равенство (4) справедливо.

Итак, равенство (3) доказано для случая, когда r_1 и r_2 изображаются дробями с одинаковым знаменателем. Но любые два рациональных числа можно представить в виде дробей с одинаковыми знаменателями: если $r_1 = \frac{p_1}{q_1}$ и $r_2 = \frac{p_2}{q_2}$, то можно положить $r_1 = \frac{p_1 q_2}{q_1 q_2}$ и $r_2 = \frac{p_2 q_1}{q_1 q_2}$. Поэтому равенство (3) верно для любых рациональных чисел r_1 и r_2 .

Совершенно так же доказывается выполнение равенства

$$\frac{x^{r_1}}{x^{r_2}} = x^{r_1-r_2} \quad (5)$$

для положительных x и рациональных r_1 и r_2 .

Наконец, докажем, что если x — положительное число и r_1, r_2 — рациональные числа, то

$$(x^{r_1})^{r_2} = x^{r_1 r_2}. \quad (6)$$

В самом деле, пусть $r_1 = \frac{p_1}{q_1}$, $r_2 = \frac{p_2}{q_2}$. Нам надо доказать, что

$$\left(x^{\frac{p_1}{q_1}} \right)^{\frac{p_2}{q_2}} = \left(x^{\frac{p_1 p_2}{q_1 q_2}} \right). \quad (7)$$

Для этого возведем обе части равенства (7) в степень $q_1 q_2$. По формуле (1) п. 2, мы имеем

$$\left[\left(x^{\frac{p_1}{q_1}} \right)^{\frac{p_2}{q_2}} \right]^{q_1 q_2} = \left(x^{\frac{p_1}{q_1}} \right)^{p_2 q_1} = x^{p_1 p_2}.$$

С другой стороны,

$$\left[x^{\frac{p_1 p_2}{q_1 q_2}} \right]^{q_1 q_2} = x^{p_1 p_2}.$$

Так как $q_1 q_2$ -е степени обеих частей доказываемого равенства (7) имеют одно и то же значение $x^{p_1 p_2}$, то это равенство справедливо. Тем самым доказано и равенство (6).

§ 3. Иррациональные алгебраические выражения

1. Рациональные и иррациональные алгебраические выражения. Назовем *алгебраическим* всякое выражение, получающееся из чисел и некоторых букв с помощью арифметических операций и возведения в степень с рациональным показателем. Мы не включили в число операций извлечение корня, так как оно сводится к возведению в степень (с показателем $\frac{1}{n}$).

Примерами алгебраических выражений являются:

$$x^3 + 3ax^2 + 3a^2x + a^3, \\ \sqrt[3]{\frac{x^2 - y^2}{2x + y - 1}} + 4 - \left(x^{-\frac{3}{4}} + y^{\frac{5}{2}}\right)^{\frac{3}{7}}$$

и т. д. Ясно, что многочлены — частный случай алгебраических выражений.

Говорят, что алгебраическое выражение *рационально относительно некоторой буквы a* , если никакая содержащая эту букву часть этого выражения не возводится в степень с нецелым показателем. В противном случае говорят, что выражение *иррационально относительно буквы a* . Например, выражение

$$a^3 \sqrt{x+1} + 4a^2x + a \sqrt{x^3-1}$$

рационально относительно буквы a и иррационально относительно буквы x .

2. Одночленные иррациональные выражения. Иррациональное выражение называется *одночленным*, если оно получается из чисел и букв с помощью операций умножения и возведения в степень с рациональным показателем. Примерами одночленных иррациональных выражений являются:

$$\sqrt[5]{\frac{a^3x^2}{b^4}}; \quad \frac{7x^{\frac{4}{3}}y^{\frac{2}{5}}}{\sqrt[3]{2}a^{\frac{4}{3}}}.$$

Иррациональное же выражение $\sqrt{a^2 + x^2}$ не является одночленным.

Некоторые одночленные иррациональные выражения можно упростить. Для этого надо:

а) Раскрыть все скобки, используя формулы

$$(xy)^r = x^r y^r; \left(\frac{x}{y}\right)^r = \frac{x^r}{y^r}; (x^r)^s = x^{rs}.$$

б) Объединить степени с одинаковыми основаниями, используя формулу $x^r x^s = x^{r+s}$.

в) Сократить дроби в показателях отдельных букв.

В результате получается выражение вида

$$Aa^p b^q \dots l^t,$$

где A — некоторое число (быть может, иррациональное), а p, q, \dots, t — несократимые дроби.

Здесь уже отсутствуют скобки и каждая буква входит лишь один раз. Такой вид одночленного иррационального выражения мы будем называть *каноническим*.

Пример. Привести к каноническому виду иррациональное выражение

$$\left(\frac{x^{\frac{3}{4}} y^{\frac{8}{3}}}{\frac{2}{a^{\frac{5}{5}}}} \right)^{-\frac{5}{6}} \left(\frac{\frac{1}{2} b^3}{-\frac{2}{9}} \right)^{\frac{3}{2}}.$$

По формулам (1), (2), (3), п. 3, § 2, это выражение равно:

$$\frac{x^{-\frac{15}{24}} y^{-\frac{40}{18}}}{a^{-\frac{10}{30}}} \cdot \frac{a^{\frac{3}{4}} b^{\frac{9}{2}}}{y^{-\frac{6}{18}}} = x^{-\frac{5}{8}} y^{-\frac{17}{9}} a^{\frac{13}{12}} b^{\frac{9}{2}}.$$

Упражнения

5. Привести к каноническому виду одночленные иррациональные выражения

$$а) \left[\left(\frac{x^{-\frac{2}{3}} y^{\frac{3}{5}}}{z^{\frac{1}{6}} t^{-\frac{5}{7}}} \right)^{\frac{3}{2}} : \left(\frac{\frac{1}{4} x^{-\frac{2}{3}}}{y^{\frac{1}{8}} t^{-\frac{2}{3}}} \right)^{-\frac{4}{5}} \right]^{\frac{1}{2}};$$

$$б) \left[\left(\frac{a^3 b^{\frac{1}{3}}}{t^{-\frac{2}{3}} d^{\frac{1}{4}}} \right)^{\frac{5}{3}} \cdot \left(\frac{a^{-\frac{1}{4}} b^2}{c^{\frac{3}{5}} d^{\frac{7}{4}}} \right)^{\frac{7}{2}} \right]^{-\frac{1}{6}}.$$

6. Вычислить выражение $\frac{7a^{-\frac{1}{5}} b^{-\frac{1}{3}}}{8c^{\frac{1}{2}} d^{\frac{3}{7}}}$ при $a = 243$, $b = 64$, $c = \frac{1}{64}$, $d = 128$.

3. Сокращение показателей и приведение корней к общему показателю.

Так как $a^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{a}$, то из каждого свойства степеней с рациональными показателями вытекает соответствующее свойство корней.

Равенство $a^{\frac{pn}{qn}} = a^{\frac{p}{q}}$ (см. формулу (3), п. 2) переписывается так: при $a > 0$ имеем

$$\sqrt[qn]{a^{pn}} = \sqrt[q]{a^p}. \quad (1)$$

Таким образом, если подкоренное выражение является степенью положительного числа, причем показатель степени имеет общий делитель с показателем корня, то можно сократить эти показатели на общий делитель. Например, $\sqrt[3]{2^6} = 2^2 = 4$,

$$\sqrt[15]{a^{10} b^{25}} = \sqrt[15]{(a^2 b^5)^5} = \sqrt[3]{a^2 b^5} \quad (\text{при } b > 0).$$

Из равенства (1) вытекает, что любые два корня с натуральными показателями можно привести к общему показателю.

Именно пусть даны корни $\sqrt[n]{a}$ и $\sqrt[m]{b}$. Тогда по формуле (1) имеем $\sqrt[n]{a} = \sqrt[mn]{a^m}$ и $\sqrt[m]{b} = \sqrt[nm]{b^n}$ (разумеется, в качестве общего показателя корней можно выбрать не mn , а наименьшее общее кратное чисел m и n).

У п р а ж н е н и я

7. Сократить показатели в выражениях:

$$\sqrt[4]{64a^4 b^8 c^{24}}; \quad \sqrt[16]{256a^8 b^4 c^{20}}.$$

8. Привести к общему показателю корни

$$\sqrt[4]{2a^3 b^3 c} \text{ и } \sqrt[6]{ab^3 c^2}.$$

9. Найти, какое из чисел больше: $\sqrt{2}$ или $\sqrt[3]{3}$; $\sqrt[4]{7}$ или $\sqrt[3]{5}$; $\sqrt[3]{11}$ или $\sqrt[4]{8}$?

Отметим, что формула (1) справедлива лишь при условии $a > 0$. В случае, когда $a < 0$, эта формула, вообще говоря, неверна. Например, рассмотрим $\sqrt{a^2}$. Если $a > 0$, то по формуле (1) получаем $\sqrt{a^2} = a$. Пусть теперь $a < 0$. Тогда $-a > 0$ и $a^2 = (-a)^2$. Поэтому при $a < 0$ имеем:

$$\sqrt{a^2} = \sqrt{(-a)^2} = -a.$$

Например,

$$\sqrt[3]{(-4)^2} = \sqrt[3]{16} = 4 = -(-4).$$

Наконец, если $a = 0$, то $\sqrt{a^2} = 0$. Полученные значения для $\sqrt{a^2}$ можно выразить одной формулой

$$\sqrt{a^2} = |a|.$$

В самом деле, как $\sqrt{a^2}$, так и $|a|$ равны a при $a \geq 0$ и равны $(-a)$ при $a < 0$.

Вообще, если общий делитель n , на который сокращают показатели корня и подкоренного выражения, четен и рассматриваются любые значения a , формулу (1) следует переписать так:

$$\sqrt[n]{a^{pn}} = \sqrt[n]{|a|^p}. \quad (2)$$

Пример. Вычислить

$$\sqrt{a^4 - 2a^2b^3 + b^6}.$$

По формуле (2) получаем:

$$\sqrt{a^4 - 2a^2b^3 + b^6} = \sqrt{(a^2 - b^3)^2} = |a^2 - b^3|.$$

Значит, если $a^2 \geq b^3$, то $\sqrt{a^4 - 2a^2b^3 + b^6} = a^2 - b^3$, а если $a^2 < b^3$, то этот корень равен $b^3 - a^2$.

Упражнение 10. Упростить выражения:

$$\text{а) } \sqrt{x^2 - 4x + 4} + 5 - x; \quad \text{б) } \sqrt{4x^2 - 12x + 9} - x + 3.$$

4. Извлечение корня из произведения и степени. Положим в формуле (1), п. 2, $r = \frac{1}{n}$. Мы получим, что при $x > 0$, $y > 0$:

$$\sqrt[n]{xy} = \sqrt[n]{x} \sqrt[n]{y}. \quad (1)$$

Точно так же из формулы (2), п. 2, выводится, что при $x > 0$, $y > 0$:

$$\sqrt[n]{\frac{x}{y}} = \frac{\sqrt[n]{x}}{\sqrt[n]{y}}. \quad (2)$$

Полученные свойства корней формулируются следующим образом:

а) Корень n -й степени из произведения двух положительных чисел равен произведению корней n -й степени из отдельных сомножителей.

б) Корень n -й степени из отношения двух положительных чисел равен отношению корней n -й степени из этих чисел.

Например, $\sqrt[n]{a^5 b^3} = \sqrt[n]{a^5} \sqrt[n]{b^3} = \sqrt[n]{a^5} \sqrt[n]{b^3}$, $a \geq 0$, $b \geq 0$;

$$\sqrt[21]{\frac{a^3}{b^7}} = \frac{\sqrt[21]{a^3}}{\sqrt[21]{b^7}} = \frac{\sqrt[7]{a}}{\sqrt[3]{b}}, \quad a \geq 0, \quad b \geq 0.$$

Пользуясь свойствами (1) и (2), можно записать произведение нескольких корней с помощью одного знака корня. Если перемножаемые корни имеют один и тот же показатель, то для получения произведения надо перемножить их подкоренные выражения и извлечь из полученного произведения корень той же степени. Например,

$$\sqrt[3]{4a^5} \sqrt[3]{5b^2} = \sqrt[3]{20a^5 b^2}.$$

Если же перемножаемые корни имеют различные показатели, то их надо предварительно привести к общему показателю (см. стр. 103). Например,

$$\sqrt{2a^5} \sqrt[3]{5b^2} = \sqrt[6]{8a^{15}} \sqrt[6]{25b^4} = \sqrt[6]{200a^{15} b^4}.$$

Совершенно так же выполняется деление корней. Например,

$$\sqrt{\frac{8a^3}{b^5}} : \sqrt[3]{\frac{4a^4}{b^2}} = \sqrt[6]{\frac{512a^9}{b^{15}}} : \sqrt[6]{\frac{18a^8}{b^4}} = \sqrt[6]{\frac{32a}{b^{11}}}.$$

У п р а ж н е н и я

11. Вычислить произведение корней:

а) $\sqrt[5]{\frac{3a^3 b}{c^3 x}} \sqrt[6]{\frac{2a^4 b^3 c}{x^2}}$; б) $\sqrt[4]{\frac{5a^3 x}{6c^5 y^2}} \sqrt[6]{\frac{4ay^3}{2b^2 x^2}}.$

12. Во что обратится выражение

$$2(uv - \sqrt{u^2 - 1} \cdot \sqrt{v^2 - 1}),$$

если

$$u = \frac{1}{2} \left(x + \frac{1}{x} \right), \quad v = \frac{1}{2} \left(y + \frac{1}{y} \right)?$$

13. Во что обратится выражение

$$2(uv + \sqrt{u^2 - 1} \cdot \sqrt{v^2 - 1})$$

при тех же значениях u , v ?

5. Вынесение алгебраических выражений из-под корня и внесение их под корень. Из формулы (1), п. 7, вытекает, что при $a > 0$ и $b > 0$:

$$\sqrt[n]{a^n b} = \sqrt[n]{a^n} \cdot \sqrt[n]{b} = a \sqrt[n]{b}. \quad (1)$$

Итак, если часть подкоренного выражения для корня n -й степени является n -й степенью некоторого положительного алгебраического выражения, то это выражение можно вынести из-под корня.

Следует иметь в виду, что формула (1) справедлива лишь при условии $a > 0$, $b > 0$. Если же это условие не выполняется, а $n = 2k$ — четное число, то вместо формулы (1) надо писать:

$$\sqrt[2k]{a^{2k} b} = |a| \cdot \sqrt[2k]{b}. \quad (2)$$

У п р а ж н е н и я

14. Внести под знак корня в выражениях

$$2a^3 b \sqrt[3]{ab^2}; \quad \frac{2ab^3}{c^2 x} \sqrt[6]{\frac{cx^3}{a^2 b}}.$$

15. Вынести из-под корня в выражениях

$$\sqrt[6]{\frac{128a^8 b^9}{729c^5 x^{18}}}; \quad \sqrt[5]{\frac{729a^{17} b^3}{64c^{11} x^{14}}}.$$

16. Упростить выражение

$$\frac{2x(1-x^2)}{(1+x^2)\sqrt{1-2x^2+x^4}}$$

(рассмотреть отдельно случаи $|x| < 1$, $|x| > 1$).

17. Упростить выражение

$$\sqrt{x^2 - 10x + 25} + \sqrt{x^2 + 6x + 9}$$

(рассмотреть случаи $x < -3$, $-3 < x \leq 5$ и $x > 5$).

6. Возведение корня в степень. Эта операция основана на формуле (6), п. 3 § 2. Из нее следует, что $\left(a^{\frac{1}{n}}\right)^m = \left(a^m\right)^{\frac{1}{n}} = a^{\frac{m}{n}}$. Это равенство можно записать так:

$$\left(\sqrt[n]{a}\right)^m = \sqrt[n]{a^m} \quad (a > 0).$$

Таким образом, чтобы возвести корень с положительным подкоренным выражением в некоторую степень, надо возвести в эту степень подкоренное выражение. Например,

$$\left(\sqrt[7]{4a^2 b^3}\right)^5 = \sqrt[7]{4^5 a^{10} b^{15}}.$$

У п р а ж н е н и е 18. Упростить выражения:

$$a) \left(\sqrt[6]{\frac{3a^2 b^3}{5c x^4}}\right)^5 \cdot \left(\sqrt[3]{\frac{2a^2 c^2}{bx^5}}\right)^3; \quad б) \left(\sqrt[4]{\frac{2c^2 x^3}{ab^5}}\right)^3 : \left(\sqrt[5]{\frac{4a^2 b^3}{cx^2}}\right)^4.$$

7. Извлечение корня из корня. Эта операция также основана на формуле (6), п. 3 § 2. Из нее следует, что $\left(a^{\frac{1}{n}}\right)^{\frac{1}{m}} = a^{\frac{1}{mn}}$, и потому

$$\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}} = \sqrt[mn]{a}.$$

Таким образом, при извлечении корня из корня показатели корней перемножаются, а подкоренное выражение остается неизменным. Например,

$$\sqrt[3]{\sqrt[4]{6a^3b}} = \sqrt[12]{6a^3b}.$$

У п р а ж н е н и е 19. Записать с одним знаком радикала выражения:

$$\text{а) } \sqrt[3]{x^2 \sqrt[5]{x \sqrt{x^3}}}; \quad \text{б) } \sqrt[6]{x \sqrt[5]{4a^3 b^2 x}}; \quad \text{в) } \sqrt[7]{3a \sqrt[4]{a^2 \sqrt{a}}}.$$

8. Подобные корни. Два корня называются *подобными*, если их можно преобразовать к такому виду, чтобы они отличались лишь рациональным множителем (при этом предполагается, что переменные, от которых зависит подкоренное выражение, положительны). Например, корни

$$\sqrt{\frac{x^3 + 2ax^2 + a^2x}{c^3}}$$

и

$$\sqrt[4]{\frac{a^4 b^8 x^2}{c^2}}$$

подобны, так как при $a > 0$, $b > 0$, $c > 0$, $x > 0$ имеем:

$$\sqrt{\frac{x^3 + 2ax^2 + a^2x}{c^3}} = \sqrt{\frac{(a+x)^2 cx}{c^4}} = \frac{a+x}{c^2} \sqrt{cx}$$

и

$$\sqrt[4]{\frac{a^4 b^8 x^2}{c^2}} = \sqrt{\frac{a^2 b^4 x}{c}} = \sqrt{\frac{a^2 b^4 cx}{c^2}} = \frac{ab^2}{c} \sqrt{cx}.$$

Второй корень получается из первого умножением на рациональный множитель.

Корни из одночленов подобны тогда и только тогда, когда в их канонической форме иррациональные множители одинаковы. Поэтому, чтобы убедиться в подобии двух корней из одночленов, надо привести их к канонической форме.

У п р а ж н е н и е 20. Доказать подобие корней:

$$\begin{aligned} \text{а) } & \sqrt[3]{8a^9 - 8a^6 b^3}; \quad \sqrt[3]{a^3 b^3 - a^6}; \quad \sqrt[3]{1 - \frac{a^3}{b^3}}; \quad \sqrt[3]{a^{-3} b^3 - \frac{b^6}{a^6}}; \\ \text{б) } & \sqrt[4]{162a^9 x^{16}}; \quad \sqrt[4]{32a^9 x^7}; \quad \sqrt[4]{\frac{y^8}{8a^3 x}}; \quad \sqrt[4]{125a^{125} b^{16} x^{203}}. \end{aligned}$$

9. Сложение и вычитание корней. Вообще говоря, сумму нескольких корней не удастся записать с помощью лишь одного знака корня. Однако, если среди рассматриваемых корней есть подобные, их можно сгруппировать вместе и вынести за скобки общий множитель.

Пример.

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} \sqrt[3]{1000a^2x^5} + 2x^2 \sqrt[3]{\frac{a^2}{x}} - 12ax^2 \sqrt[3]{\frac{1}{64ax}} = \\ &= 5x \sqrt[3]{a^2x^2} + 2x^2 \sqrt[3]{\left(\frac{a^2}{x} : a^2x^2\right)a^2x^2} - 12ax^2 \sqrt[3]{\left(\frac{1}{64ax} : a^2x^2\right)a^2x^2} = \\ &= 5x \sqrt[3]{a^2x^2} + 2x \sqrt[3]{a^2x^2} - 3x \sqrt[3]{a^2x^2} - 4x \sqrt[3]{a^2x^2}. \end{aligned}$$

Упражнение 21. Найти сумму корней:

$$\begin{aligned} \text{а) } & 6a \sqrt[3]{8a^9 - 8a^6b^3} + 3b \sqrt[3]{a^{-3}b^3 - \frac{b^6}{a^6}} + 2a^2b \sqrt[3]{1 - \frac{a^3}{b^3}} + \\ & + 4ab^2 \sqrt[3]{a^3b^3 - a^6}; \\ \text{б) } & 3x \sqrt[4]{162a^6x^{15}} + 4ax \sqrt[4]{32a^9x^7} + 6a^2x^3 \sqrt[4]{\frac{1}{8a^3x}}. \end{aligned}$$

10. Уничтожение иррациональности в знаменателе или в числителе алгебраической дроби. Часто бывает нужно найти численное значение иррационального выражения при заданных значениях входящих в него букв. При этом бывает неудобно делить на иррациональные числа. В таких случаях стараются преобразовать заданное иррациональное выражение так, чтобы его знаменатель не содержал корней.

Посмотрим сначала, как выполняется это преобразование в случае, когда знаменатель дроби — корень из одночлена. Пусть дано иррациональное выражение $\frac{12a^2bc^2}{\sqrt[5]{9a^2bc^3}}$. Если мы хотим освободиться от иррациональности в знаменателе этой дроби, то надо помножить и числитель, и знаменатель на такой множитель, чтобы в знаменателе извлекся корень. Ясно, что для этого надо умножить подкоренное выражение в знаменателе дроби на $27a^3b^4c^2$, тогда оно станет равно $3^5a^5b^5c^5$ и корень извлечется. Вспоминая правило умножения корней, видим, что числитель и знаменатель надо умножить на $\sqrt[5]{27a^3b^4c^2}$. Тогда мы получим, что

$$\frac{12a^2bc^2}{\sqrt[5]{9a^2bc^3}} = \frac{12a^2bc^2 \sqrt[5]{27a^3b^4c^2}}{\sqrt[5]{3^5a^5b^5c^5}} = \frac{12a^2bc^2 \sqrt[5]{27a^3b^4c^2}}{3abc} = 4ac \sqrt[5]{27a^3b^4c^2}.$$

Вообще, если дано выражение вида $\frac{A}{\sqrt[n]{a^k b^l \dots c^m}}$, причем все показатели k, l, \dots, m меньше n , то надо умножить числитель и знаменатель дроби на один и тот же множитель

$$\sqrt[n]{a^{n-k} b^{n-l} \dots c^{n-m}}.$$

Тогда при $a > 0, b > 0, \dots, c > 0$ получим:

$$\frac{A}{\sqrt[n]{a^k b^l \dots c^m}} = \frac{A \sqrt[n]{a^{n-k} b^{n-l} \dots c^{n-m}}}{ab \dots c}.$$

Этот ответ остается справедливым при нечетном n для любых a, b, \dots, c . Если же n четно, то в общем случае в знаменателе надо писать $|ab \dots c|$.

Теперь рассмотрим случай, когда знаменатель алгебраической дроби имеет вид $\sqrt{A} \pm \sqrt{B}$, где A и B — положительные рациональные выражения. В этом случае надо умножить и числитель, и знаменатель на выражение $\sqrt{A} \mp \sqrt{B}$ (оно получается из знаменателя изменением знака при \sqrt{B}). Так как $(a+b)(a-b) = a^2 - b^2$, то при $A > 0$ и $B > 0$

$$(\sqrt{A} + \sqrt{B})(\sqrt{A} - \sqrt{B}) = (\sqrt{A})^2 - (\sqrt{B})^2 = A - B.$$

Поскольку $(A - B)$ — рациональное выражение, мы избавляемся от иррациональности в знаменателе дроби. (Точно так же избавляются от иррациональности в знаменателе, если он имеет вид $A \pm \sqrt{B}$.) Например,

$$\begin{aligned} \frac{7x^2 - 1}{\sqrt{x^2 + 1} + \sqrt{x^2 - x}} &= \frac{(7x^2 - 1)[\sqrt{x^2 + 1} - \sqrt{x^2 - x}]}{x^2 + 1 - (x^2 - x)} = \\ &= \frac{(7x^2 - 1)[\sqrt{x^2 + 1} - \sqrt{x^2 - x}]}{x + 1}. \end{aligned}$$

Аналогично действуют в случае, когда знаменатель дроби имеет вид $\sqrt[n]{A} + \sqrt[n]{B}$, где A и B — рациональные выражения. Уничтожение иррациональности в знаменателе основывается здесь на формуле

$$(a + b)[a^{n-1} - a^{n-2}b + \dots + (-1)^{n-1}b^{n-1}] = a^n + (-1)^{n-1}b^n$$

(см. стр. 32). Именно, положим $\sqrt[n]{A} = a$, $\sqrt[n]{B} = b$ и умножим числитель и знаменатель на одно и то же выражение

$$a^{n-1} - a^{n-2}b + \dots + (-1)^{n-1}b^{n-1}$$

(где надо заменить a на $\sqrt[n]{A}$ и b на $\sqrt[n]{B}$). Тогда знаменатель примет вид:

$$a^n + (-1)^{n-1} b^n = (\sqrt[n]{A})^n + (-1)^{n-1} (\sqrt[n]{B})^n = A + (-1)^{n-1} B,$$

то есть станет рациональным выражением. Случай, когда знаменатель равен $A + \sqrt[n]{B}$, разбирается точно так же. Здесь надо положить $A = a$, $\sqrt[n]{B} = b$.

Если знаменатель имеет вид $A - \sqrt[n]{B}$ или $\sqrt[n]{A} - \sqrt[n]{B}$, то надо положить $A = a$, $\sqrt[n]{B} = b$ (соответственно $\sqrt[n]{A} = a$, $\sqrt[n]{B} = b$) и воспользоваться формулой

$$(a - b)(a^{n-1} + a^{n-2}b + \dots + b^{n-1}) = a^n - b^n.$$

Если знаменатель имеет вид $\sqrt[m]{A} + \sqrt[n]{B}$, то корни $\sqrt[m]{A}$ и $\sqrt[n]{B}$ надо сначала привести к общему показателю. Например,

$$\frac{5x+1}{\sqrt{x-\sqrt[3]{x+1}}} = \frac{5x+1}{\sqrt[6]{x^3} - \sqrt[6]{(x+1)^2}} = \frac{5x+1}{x^3 - (x+1)^2} \left[(\sqrt[6]{x^3})^5 + (\sqrt[6]{x^3})^4 \sqrt[6]{(x+1)^2} + (\sqrt[6]{x^3})^3 (\sqrt[6]{(x+1)^2})^2 + (\sqrt[6]{x^3})^2 (\sqrt[6]{(x+1)^2})^3 + \sqrt[6]{x^3} \cdot (\sqrt[6]{(x+1)^2})^4 + (\sqrt[6]{(x+1)^2})^5 \right].$$

Случай, когда знаменатель является суммой трех или большего числа корней, сложнее. Однако можно показать, что какой бы сложный вид ни имел знаменатель, всегда можно освободиться от иррациональности в знаменателе. Общие методы таких преобразований изучаются в высшей алгебре.

В некоторых задачах, наоборот, бывает целесообразно уничтожить иррациональность в числителе алгебраической дроби, т. е. преобразовать дробь к такому виду, чтобы ее числитель содержал лишь рациональные выражения. Читателю должно быть ясно, что эта цель достигается теми же способами, как уже в разобранных выше примерах.

У п р а ж н е н и е 22. Уничтожить иррациональность в знаменателях дробей:

а) $\frac{2 - \sqrt{30}}{\sqrt{5} - \sqrt{6} + \sqrt{7}};$

д) $\frac{1}{\sqrt[4]{a} - \sqrt[4]{b}};$

б) $\frac{9}{\sqrt{10} + \sqrt{15} + \sqrt{14} + \sqrt{21}};$

е) $\frac{1}{\sqrt[3]{a^2} + \sqrt[3]{ab} + \sqrt[3]{b^2}};$

в) $\frac{7ab^2a}{\sqrt[4]{3a-b^2c^{10}}};$

ж) $\frac{1}{\sqrt[3]{a^2} + \sqrt[3]{b^2}};$

г) $\frac{x}{\sqrt{A} + \sqrt{B}};$

з) $\frac{1}{\sqrt[3]{a} + \sqrt[3]{b} + \sqrt[3]{c}}.$

11. Преобразование выражений вида $\sqrt{A \pm \sqrt{B}}$. Пусть задано алгебраическое выражение $\sqrt{A \pm \sqrt{B}}$, где $A > 0$, $B > 0$, $A^2 - B > 0$. Мы покажем сейчас, что его можно представить в следующем виде суммы двух корней:

$$\sqrt{A \pm \sqrt{B}} = \sqrt{\frac{A + \sqrt{A^2 - B}}{2}} \pm \sqrt{\frac{A - \sqrt{A^2 - B}}{2}}. \quad (1)$$

Для доказательства покажем сначала, что квадраты выражений в обеих частях равенства (1) совпадают. В самом деле,

$$\left(\sqrt{A \pm \sqrt{B}}\right)^2 = A \pm \sqrt{B}.$$

С другой стороны,

$$\begin{aligned} & \left[\sqrt{\frac{A + \sqrt{A^2 - B}}{2}} \pm \sqrt{\frac{A - \sqrt{A^2 - B}}{2}} \right]^2 = \\ &= \frac{A + \sqrt{A^2 - B}}{2} \pm 2 \sqrt{\left(\frac{A + \sqrt{A^2 - B}}{2}\right) \left(\frac{A - \sqrt{A^2 - B}}{2}\right)} + \\ &+ \frac{A - \sqrt{A^2 - B}}{2} = A \pm \sqrt{A^2 - (A^2 - B)} = A \pm \sqrt{B}. \end{aligned}$$

Осталось показать, что обе части равенства (1) положительны. Для левой части это очевидно, так как мы рассматриваем лишь арифметические значения корней. Для правой это справедливо, поскольку при $A > 0$, $B > 0$ $A^2 - B > 0$:

$$\sqrt{\frac{A + \sqrt{A^2 - B}}{2}} > \sqrt{\frac{A - \sqrt{A^2 - B}}{2}}.$$

Формула (1) позволяет упростить выражение $\sqrt{A \pm \sqrt{B}}$ в случае, когда разность $A^2 - B$ есть полный квадрат. Например, имеем:

$$\begin{aligned} \sqrt{9 - \sqrt{45}} &= \sqrt{\frac{9 + \sqrt{36}}{2}} - \sqrt{\frac{9 - \sqrt{36}}{2}} = \sqrt{\frac{15}{2}} - \sqrt{\frac{3}{2}} = \\ &= \frac{1}{2}(\sqrt{30} - \sqrt{6}). \end{aligned}$$

Упражнения

23. Преобразовать по формуле (1) выражения:

а) $\sqrt{2 - \sqrt{2}}$; б) $\sqrt{2 - \sqrt{3}}$; в) $\sqrt{a - \sqrt{a^2 - b^2}}$.

24. Доказать, что:

а) $\frac{2 + \sqrt{3}}{\sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{3}}}} + \frac{2 - \sqrt{3}}{\sqrt{2 - \sqrt{2 - \sqrt{3}}}} = \sqrt{2}$;

б) $\frac{\sqrt{3 - 2\sqrt{2}}}{\sqrt{17 + 12\sqrt{2}}} - \frac{\sqrt{3 + 2\sqrt{2}}}{\sqrt{17 + 12\sqrt{2}}} = 2$.

25. Доказать, что:

а) $\sqrt[3]{20 + 14\sqrt{2}} - \sqrt[3]{20 - 14\sqrt{2}} = 14$;

$$б) \sqrt[3]{\frac{\sqrt{5+2}}{\sqrt{5}}} - \sqrt[3]{\frac{\sqrt{5-2}}{\sqrt{5}}} = \frac{1}{\sqrt[6]{5}};$$

$$в) \sqrt[3]{\frac{9-5\sqrt{3}}{9+5\sqrt{3}}} = \frac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{3}+1}.$$

12. Смешанные задачи на преобразование иррациональных выражений.

26. Доказать, что если $x = \left(\frac{a+b}{a-b}\right)^{\frac{2pq}{q-p}}$, где $\frac{a+b}{a-b} > 0$, p и q рациональ-

ны, то $\frac{1}{2} \cdot \frac{a^2-b^2}{a^2+b^2} \cdot \left(\frac{1}{x^p} + x^q\right) = \left(\frac{a+b}{a-b}\right)^{\frac{q+p}{q-p}}$.

27. Упростить выражения:

$$\sqrt{a^2+6a+9} + \sqrt{a^2-6a+9}$$

(разобрать случаи: $a \leq -3$, $-3 < a < 3$, $a > 3$).

28. Упростить выражения:

$$а) \frac{\left(p + \frac{1}{q}\right)^p \left(p - \frac{1}{q}\right)^q}{\left(q + \frac{1}{p}\right)^p \left(q - \frac{1}{p}\right)^q} \quad (p > 0, q > 0, pq > 1);$$

$$б) \left(\frac{1}{\sqrt{x-1}} + \frac{1}{\sqrt{x+1}}\right) : \left(\frac{1}{\sqrt{x-1}} - \frac{1}{\sqrt{x+1}}\right),$$

где

$$x = \frac{a^2+b^2}{2ab}, \quad a > 0, b > 0;$$

$$в) \frac{1 + (a + \sqrt{a^2-1})^2 (b + \sqrt{b^2-1})^2}{(a + \sqrt{a^2-1}) (b + \sqrt{b^2-1})} \quad (a > 1, b > 1);$$

$$г) \frac{2b\sqrt{1+x^2}}{\sqrt{1+x^2}-x}, \quad \text{где } x = \frac{1}{2} \left(\sqrt{\frac{a}{b}} - \sqrt{\frac{b}{a}} \right), \quad a > 0, b > 0;$$

$$д) \left[\frac{(x^2+a^2)^{-\frac{1}{2}} + (x^2-a^2)^{-\frac{1}{2}}}{(x^2+a^2)^{-\frac{1}{2}} - (x^2-a^2)^{-\frac{1}{2}}} \right]^{-2},$$

где

$$x = a \left(\frac{m^2 + n^2}{2mn} \right)^{\frac{1}{2}}, \quad a > 0, n > m > 0;$$

$$е) \left(x^{-2} + a^{-\frac{2}{3}} x^{-\frac{4}{3}} \right)^{-\frac{1}{2}} + \left(a^{-2} + a^{-\frac{4}{3}} x^{-\frac{2}{3}} \right)^{-\frac{1}{2}},$$

где

$$x = \left(b^{\frac{2}{3}} - a^{\frac{2}{3}} \right)^{\frac{3}{2}}, \quad b > a > 0;$$

$$ж) \left(a + x^{\frac{1}{2}} \right)^{-\frac{1}{2}} + \left(a - x^{\frac{1}{2}} \right)^{-\frac{1}{2}},$$

где $x = 4a(a-1)$ [рассмотреть случаи: $1 < a < 2$, $a > 2$];

з) $\sqrt{x+2}\sqrt{x-1} + \sqrt{x-2}\sqrt{x-1}$ [рассмотреть случаи: $1 \leq x \leq 2$, $x > 2$].

29. Доказать, что трехчлен $x^3 + px + q$ обращается в нуль при

$$x = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}} + \sqrt[3]{-\frac{q}{2} - \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}}$$

(берутся действительные значения кубических корней).

30. Доказать, что $\sqrt[3]{2}$ нельзя представить в виде $p + \sqrt{q}$, где p и q — рациональные числа.

31. Чему равна функция от x вида

$$y = 2a(1+x^2)^{\frac{1}{2}} \left[x + (1+x^2)^{\frac{1}{2}} \right]^{-1},$$

$$\text{если } x = \frac{1}{2} \left[(ab^{-1})^{\frac{1}{2}} - (ba^{-1})^{\frac{1}{2}} \right]^2$$

32. Упростить выражения:

$$а) \sqrt{\frac{a+x^2}{2x} + \sqrt{a}} + \sqrt{\frac{a+x^2}{2x} - \sqrt{a}};$$

$$б) \sqrt{\frac{3x+a^3}{2a} + \sqrt{3ax}} - \sqrt{\frac{3x+a^3}{2a} - \sqrt{3ax}}.$$

33. Проверить, что

$$x = 1 + \sqrt[3]{10 + \sqrt{99}} + \sqrt[3]{10 - \sqrt{99}}$$

является корнем уравнения

$$x^3 - 3x^2 - 18 = 0.$$

34. Не извлекая корней, найти $\sqrt[3]{2 + \sqrt{5}} + \sqrt[3]{2 - \sqrt{5}}$.

35. Доказать, что:

$$a) \sqrt{\sqrt{x} + \sqrt{\frac{x^2-4}{x}}} + \sqrt{\sqrt{x} - \sqrt{\frac{x^2-4}{x}}} = \frac{\sqrt{2x+4}}{\sqrt[4]{x}};$$

$$б) \sqrt[3]{a^3 + 3ab + (3a^2 + b)\sqrt{b}} + \sqrt[3]{a^3 + 3ab - (3a^2 + b)\sqrt{b}} = 2a;$$

$$в) \sqrt{\frac{abx+c^2}{bc}} + \sqrt{\frac{4ax}{b}} + \sqrt{\frac{abx+c^2}{bc} - \sqrt{\frac{4ax}{b}}} = \sqrt{\frac{4ax}{b}}.$$

36. Упростить выражения:

$$a) \frac{x-y}{x^{\frac{3}{4}} + x^{\frac{1}{2}} y^{\frac{1}{4}}} \cdot \frac{x^{\frac{1}{2}} y^{\frac{1}{4}} + x^{\frac{1}{4}} y^{\frac{1}{2}}}{x^{\frac{1}{2}} + y^{\frac{1}{2}}};$$

$$б) \left[x^{-\frac{1}{2}} \sqrt{a^{-\frac{3}{4}} x^3 \left(a^{\frac{1}{4}} x^{-\frac{1}{2}} \right)^{\frac{1}{3}}} \right]^{\frac{1}{2}} : \left[x^{-1} \sqrt{a^{-1} x^{-\frac{3}{2}} \left(a^{-1} x^{-\frac{3}{4}} \right)^{\frac{1}{2}}} \right]^{\frac{1}{3}};$$

$$в) \sqrt{\frac{4}{9} a^{-\frac{1}{4}} b + a^{-\frac{1}{2}} x^{\frac{1}{2}} + \frac{4}{81} b^2 x^{-\frac{1}{2}}}.$$

§ 4. Иррациональные уравнения и неравенства

1. Определение. Иррациональным уравнением называется уравнение вида $R(x) = 0$, где $R(x)$ — иррациональное выражение от x . К такому виду приводятся уравнения $R_1(x) = R_2(x)$, где $R_1(x)$ и $R_2(x)$ — иррациональные выражения от x . Например,

$$\sqrt{x-3} + \sqrt{x+4} - 2 = 0, \sqrt{x^2-9} + \sqrt{x^2+9} - 10 = 0$$

являются иррациональными уравнениями, а

$$\sqrt{2}x^4 + \sqrt[5]{3}x^2 + \sqrt{\frac{3-\sqrt{2}}{3+\sqrt{2}}} = 0$$

— рациональное алгебраическое уравнение (так как x не находится под знаком корня).

В иррациональных уравнениях все радикалы понимаются в смысле арифметического значения. Поэтому, если показатель корня — четное число, то подкоренное выражение и значение корня должны быть неотрицательными. Отсюда ясно, например, что иррациональное уравнение $\sqrt{x+2} = -3$ не имеет решений — его левая часть неотрицательна при всех допустимых значениях x .

У п р а ж н е н и е 37. Докажите, что следующие иррациональные уравнения не имеют решений:

- а) $\sqrt{2x+3} + \sqrt{x-3} = 0$; г) $\sqrt{x-3} - \sqrt{x+9} = \sqrt{x-2}$;
б) $\sqrt{x+2} + \sqrt{x-1} = -2$; д) $\sqrt{x} + \sqrt{x+9} = 2$.
в) $\sqrt{4-x} - \sqrt{x-6} = 2$;

2. Сведение иррациональных уравнений к рациональным. Для решения иррациональных уравнений стараются свести их к рациональным уравнениям. С этой целью обе части уравнения после соответствующих преобразований возводят в одну и ту же степень. Чтобы показать, что при этом не происходит потери корней, докажем следующую теорему.

Теорема. Если число a — корень уравнения $f(x) = \varphi(x)$, то это число удовлетворяет и уравнению

$$[f(x)]^n = [\varphi(x)]^n.$$

Доказательство. По условию имеет место равенство $f(a) = \varphi(a)$. Возведем обе части этого равенства в n -ю степень. Равенство от этого не нарушится, и мы получим, что $[f(a)]^n = [\varphi(a)]^n$. Это показывает, что a — корень уравнения

$$[f(x)]^n = [\varphi(x)]^n.$$

Итак, при возведении обеих частей уравнения в одну и ту же степень мы получаем уравнение, являющееся следствием исходного. Однако это уравнение при четных n неравносильно исходному. Ведь если из равенства $f(a) = \varphi(a)$ вытекает $[f(a)]^{2k} = [\varphi(a)]^{2k}$, то обратное неверно. Именно из $[f(a)]^{2k} = [\varphi(a)]^{2k}$ следует лишь, что $|f(a)| = |\varphi(a)|$. Если при этом $f(a)$ и $\varphi(a)$ имеют одинаковые знаки, то $f(a) = \varphi(a)$. Если же они имеют различные знаки, то $f(a) = -\varphi(a)$. Таким образом, корень уравнения $[f(x)]^{2k} = [\varphi(x)]^{2k}$ может удовлетворять не только уравнению $f(x) = \varphi(x)$, но и уравнению $f(x) = -\varphi(x)$. Во втором случае он является посторонним для уравнения $f(x) = \varphi(x)$. Если же показатель n нечетен, $n = 2k + 1$, то из $[f(a)]^{2k+1} = [\varphi(a)]^{2k+1}$ следует, что $f(a) = \varphi(a)$. Поэтому уравнения $[f(x)]^{2k+1} = [\varphi(x)]^{2k+1}$ и $f(x) = \varphi(x)$ равносильны.

Итак, если при решении уравнения нам пришлось возводить обе его части в степень с четным показателем, то могли получиться посторонние корни. Чтобы выяснить, какие из корней уравнения $[f(x)]^{2k} = [\varphi(x)]^{2k}$ удовлетворяют исходному уравнению $f(x) = \varphi(x)$, надо подставить их в исходное уравнение и посмотреть, удовлетворяют они уравнению или нет.

П р и м е р ы

1) Решить уравнение

$$\sqrt{x^2 + x + 1} = x - 4. \quad (1)$$

Возводя обе части уравнения в квадрат, получим уравнение:

$$x^2 + x + 1 = x^2 - 8x + 16.$$

Его корнем является $x = \frac{5}{3}$. Но $\frac{5}{3}$ не удовлетворяет уравнению (1)— после подстановки $x = \frac{5}{3}$ получается неверное равенство. Следовательно, уравнение (1) решений не имеет.

2) Решить уравнение

$$\sqrt{x^2 + x + 1} = 4 - x. \quad (2)$$

Здесь после возведения в квадрат получаем уравнение:

$$x^2 + x + 1 = 16 - 8x + x^2.$$

Его корнем является $x = \frac{5}{3}$. Проверка показывает, что $\frac{5}{3}$ удовлетворяет уравнению (2).

3) Решить уравнение

$$\sqrt{x^2 + 2x + 10} = 2x - 1.$$

Возводя обе части уравнения в квадрат, получаем квадратное уравнение $x^2 + 2x + 10 = 4x^2 + 4x + 1$. Его корнями являются $x_1 = 3$, $x_2 = -1$. Проверка показывает, что только корень $x = 3$ удовлетворяет заданному уравнению. Корень же $x = -1$ удовлетворяет уравнению

$$\sqrt{x^2 + 2x + 10} = 1 - 2x.$$

3. Уединение радикала. Мы видели, что при решении иррациональных уравнений приходится возводить обе части уравнения в одну и ту же степень. При этом, разумеется, желательно, чтобы хотя одна из частей уравнения имела вид $\sqrt[n]{P(x)}$, где $P(x)$ — рациональное выражение. В этом случае после возведения обеих частей уравнения в n -ю степень мы получим в соответствующей части уравнения рациональное выражение. Поэтому при решении иррациональных уравнений обычно поступают так.

Выбирают один из радикалов, входящих в уравнение, оставляют его в одной стороне уравнения, а все остальные члены переносят в другую сторону. После этого возводят обе части получившегося уравнения в степень, показатель которой равен показателю уединенного радикала. Повторяя этот процесс, освобождаются от всех радикалов, входящих в уравнение, и получают рациональное уравнение. При этом, если при решении приходилось хоть раз возводить обе части равенства в степень с четным показателем, полу-

ченные корни необходимо проверить. Проверка осуществляется путем подстановки корней в исходное уравнение.

Рассмотрим некоторые примеры.

1) Решить уравнение

$$\sqrt{x^2 + 5} + \sqrt{x^2 + 21} = 8.$$

Перенесем $\sqrt{x^2 + 21}$ в правую часть уравнения и возведем обе части получившегося равенства в квадрат. Мы получим:

$$x^2 + 5 = (8 - \sqrt{x^2 + 21})^2 = 64 - 16\sqrt{x^2 + 21} + x^2 + 21$$

или

$$80 = 16\sqrt{x^2 + 21}.$$

Отсюда находим $5 = \sqrt{x^2 + 21}$. Снова возведем обе части уравнения в квадрат: $25 = x^2 + 21$. Корнями этого уравнения являются $x_{1,2} = \pm 2$.

Проверим полученные корни. Подставляя корень $x_1 = 2$ в заданное уравнение, получаем $\sqrt{9} + \sqrt{25} = 8$ или $8 = 8$. Значит, этот корень удовлетворяет заданному уравнению. Корень $x_2 = -2$ также удовлетворяет этому уравнению.

2) Решить уравнение

$$\sqrt{3-x} - 2x + 3 = 0.$$

Уединим радикал $\sqrt{3-x}$ и возведем обе части уравнения в квадрат. Получим:

$$3 - x = 4x^2 - 12x + 9.$$

Корнями этого уравнения являются $x_1 = 2$ и $x_2 = \frac{3}{4}$. Однако из этих корней заданному уравнению удовлетворяет лишь $x_1 = 2$, корень же $x_2 = \frac{3}{4}$ является посторонним. Он удовлетворяет уравнению

$$-\sqrt{3-x} = 2x - 3.$$

У п р а ж н е н и е 38. Решить иррациональные уравнения:

а) $\sqrt{2x} - 7x = -52$;

б) $2x + \sqrt{4x+8} = \frac{7}{2}$;

в) $\sqrt{2x+7} + \sqrt{3x-18} = \sqrt{7x+1}$;

г) $\frac{\sqrt{x^2-16}}{\sqrt{x-3}} + \sqrt{x+3} = \frac{7}{\sqrt{x-3}}$;

д) $\sqrt{x+9} = 2\sqrt{x} - 3$;

- е) $\frac{\sqrt{a+x}}{\sqrt{a} + \sqrt{a+x}} = \frac{\sqrt{a-x}}{\sqrt{a} - \sqrt{a-x}};$
 ж) $(a+b)\sqrt{a^2+b^2+x^2} - (a-b)\sqrt{a^2+b^2-x^2} = a^2+b^2;$
 з) $x + \sqrt{x} + \sqrt{x+2} + \sqrt{x^2+2x} = a;$
 и) $\frac{\sqrt{x^2+1} + \sqrt{x^2-1}}{\sqrt{x^2+1} - \sqrt{x^2-1}} + \frac{\sqrt{x^2+1} - \sqrt{x^2-1}}{\sqrt{x^2+1} + \sqrt{x^2-1}} = 4\sqrt{x^2-1};$
 к) $\sqrt{x^2-3ax+a^2} + \sqrt{x^2+3ax+a^2} = \sqrt{2(a^2+b^2)};$
 л) $\sqrt[2pq]{x^{p+q}} - \frac{1}{2c} (\sqrt[p]{x} + \sqrt[q]{x}) = 0;$
 м) $\sqrt[3]{x+7} - \sqrt[3]{x-12} = 1.$

4. Введение нового неизвестного. Иногда при решении иррациональных уравнений оказывается полезным введение нового неизвестного. Рассмотрим уравнение

$$x^2 + 2x + \sqrt{x^2 + 2x + 8} - 12 = 0. \quad (1)$$

Если попробовать уединить радикал, то после возведения в квадрат получится уравнение четвертой степени. Поэтому мы будем решать это уравнение иначе. Положим $\sqrt{x^2 + 2x + 8} = y$. Так как $x^2 + 2x + 8 = y^2$, то уравнение (1) можно переписать так:

$$y^2 + y - 20 = 0.$$

Решая это квадратное уравнение, находим корни $y_1 = 4$, $y_2 = -5$. Таким образом, решение уравнения (1) свелось к решению уравнения

$$\sqrt{x^2 + 2x + 8} = 4$$

(уравнение $\sqrt{x^2 + 2x + 8} = -5$ не имеет решений, так как радикал понимается в смысле арифметического значения, а потому не может равняться отрицательному числу).

Из уравнения (2) находим, что $x_1 = 4$, $x_2 = 2$. Проверка показывает, что оба корня уравнению (1) удовлетворяют.

У п р а ж н е н и е 39. Решить уравнения:

- а) $x^2 + 3 - \sqrt{2x^2 - 3x + 2} = \frac{3}{2}(x+1);$
 б) $x(x+1) + 3\sqrt{2x^2 + 6x + 5} = 25 - 2x;$
 в) $x^3 - 2\sqrt{3x^2 - 2ax + 4} + 4 = \frac{2a}{3}\left(x + \frac{a}{2} + 1\right);$

$$г) \sqrt{x} + \sqrt{x+7} + 2\sqrt{x^2+7x} = 35 - 2x;$$

$$д) x^2 - 8(x+1)\sqrt{x} + 18x + 1 = 0;$$

$$е) (a+x)^{\frac{2}{3}} + 4(a-x)^{\frac{2}{3}} - 5(a^2-x^2)^{\frac{1}{3}} = 0.$$

5*. Особые случаи решения иррациональных уравнений. В разобранных выше примерах после освобождения от иррациональности получались уравнения, имевшие один или несколько корней. В этом случае удается обнаружить посторонние корни путем подстановки их в первоначальное уравнение. В некоторых примерах, однако, после освобождения от иррациональности получается равенство, тождественно выполняющееся на всей числовой оси или на некотором бесконечном числовом множестве. В этом случае проверка корней путем подстановки становится уже невозможной, поскольку найденное множество корней бесконечно. Для таких уравнений в ходе решения выясняют дополнительные условия на возможные корни, имеющие форму неравенств, и отбирают лишь корни, удовлетворяющие этим условиям¹.

Рассмотрим некоторые примеры.

Пусть дано иррациональное уравнение:

$$\sqrt{x^2 - 6x + 9} + \sqrt{25 + 10x + x^2} = 8. \quad (1)$$

Решим его путем освобождения от иррациональности. Для этого уединим первый радикал и возведем обе части равенства в квадрат. Мы получим, что

$$x^2 - 6x + 9 = 64 - 16\sqrt{25 + 10x + x^2} + 25 + 10x + x^2,$$

то есть

$$\sqrt{25 + 10x + x^2} = x + 5. \quad (2)$$

Вновь возводя в квадрат, получаем:

$$25 + 10x + x^2 = x^2 + 10x + 25. \quad (2')$$

Это равенство тождественно выполняется для всех значений x . Однако, подставляя в уравнение (1), например, $x = 4$, получаем неверное соотношение: $1 + 9 = 8$. Таким образом, первоначальному уравнению удовлетворяют не все значения x . Как мы уже говорили, отобрать корни уравнения (1) методом подстановки невозможно, поскольку множество корней уравнения (2') бесконечно.

Выясним, откуда появились посторонние корни. Дело в том, что мы рассматриваем здесь лишь арифметические значения ради-

¹ Этот способ можно применять и при решении обычных иррациональных уравнений. В этом случае отпадает необходимость в последующей подстановке найденных корней — добавочные условия позволяют сразу отобрать корни, удовлетворяющие данному уравнению. Однако этот метод сложнее, чем обычный метод решений с последующей проверкой всех корней.

калов. Из-за этого на x налагаются дополнительные ограничения, имеющие вид неравенств. А при возведении обеих частей уравнения в квадрат эти ограничения были сняты. Таким образом, чтобы найти, при каких же значениях x удовлетворяется первоначальное уравнение, нам надо отобрать числа, удовлетворяющие соответствующим неравенствам.

В первую очередь должны выполняться неравенства $x^2 - 6x + 9 \geq 0$ и $x^2 + 10x + 25 \geq 0$, поскольку подкоренные выражения должны быть неотрицательными. Эти неравенства выполняются для всех значений x :

$$\begin{aligned}x^2 - 6x + 9 &= (x - 3)^2 \geq 0, \\x^2 + 10x + 25 &= (x + 5)^2 \geq 0\end{aligned}$$

и не дают нужных нам ограничений на x .

Далее, так как $\sqrt{x^2 - 6x + 9} \geq 0$ и $\sqrt{25 + 10x + x^2} \geq 0$, то $8 - \sqrt{x^2 + 16x + 25} \geq 0$.

Это неравенство выполняется лишь в области, где $x^2 + 10x + 25 \leq 64$, то есть $x^2 + 10x - 39 \leq 0$. Решением этого квадратного неравенства является отрезок $-13 \leq x \leq 3$. Дальнейшие ограничения на x получаем из равенства (2). Так как левая часть этого равенства заведомо неотрицательна, то должно выполняться условие $x + 5 \geq 0$.

Итак, мы нашли два дополнительных условия на x :

$$\begin{cases} -13 \leq x \leq 3, \\ x + 5 \geq 0. \end{cases} \quad (3)$$

Решением системы неравенств (3) является отрезок $-5 \leq x \leq 3$. Поскольку, кроме неравенств (3), никаких ограничений на x не накладывается, а уравнение, полученное после освобождения от иррациональностей, выполняется тождественно на всей числовой оси, решением уравнения (1) является отрезок $-5 \leq x \leq 3$. Иными словами, равенство (1) справедливо для любой точки этого отрезка.

Уравнение (1) можно решить иначе. Для этого заметим, что

$$\sqrt{x^2 - 6x + 9} = \sqrt{(x - 3)^2}$$

и

$$\sqrt{x^2 + 10x + 25} = \sqrt{(x + 5)^2}.$$

Так как $\sqrt{x^2} = |x|$, то уравнение (1) переписывается так:

$$|x - 3| + |x + 5| = 8.$$

Точки -5 и 3 разбивают числовую ось на участки $(-\infty, -5)$, $[-5, 3]$, $(3, \infty)$. На каждом из этих участков знаки $(x-3)$ и $(x+5)$ постоянны. Принимая во внимание эти знаки, получаем, что уравнение можно записать так:

$$\begin{aligned} 3 - x - x - 5 &= 8, \text{ если } x < -5, \\ 3 - x + x + 5 &= 8, \text{ если } -5 \leq x \leq 3, \\ x - 3 + x + 5 &= 8, \text{ если } x > 3, \end{aligned}$$

или

$$\begin{aligned} -2x &= 10, \text{ если } x < -5, \\ 8 &= 8, \text{ если } -5 \leq x \leq 3, \\ 2x &= 6, \text{ если } x > 3. \end{aligned}$$

Отсюда снова видно, что равенство (1) тождественно выполняется на отрезке $[-5, 3]$ и не выполняется ни в одной точке, лежащей вне этого отрезка.

Точно так же решается иррациональное уравнение

$$\sqrt{x+3-4\sqrt{x-1}} + \sqrt{x+8-6\sqrt{x-1}} = 1. \quad (4)$$

Здесь мы имеем условие на x вида $x-1 \geq 0$. Представим уравнение так:

$$\sqrt{(x-1)-4\sqrt{x-1}+4} + \sqrt{(x-1)-6\sqrt{x-1}+9} = 1,$$

или

$$\sqrt{(\sqrt{x-1}-2)^2} + \sqrt{(\sqrt{x-1}-3)^2} = 1.$$

Отсюда получим:

$$|\sqrt{x-1}-2| + |\sqrt{x-1}-3| = 1. \quad (4')$$

Возможны три случая:

1) $\sqrt{x-1} < 2$. В этой области уравнение (4') равносильно уравнению

$$2 - \sqrt{x-1} + 3 - \sqrt{x-1} = 1,$$

то есть $\sqrt{x-1} = 2$, а по условию $\sqrt{x-1} < 2$.

2) $2 \leq \sqrt{x-1} \leq 3$. Здесь уравнение (4) равносильно уравнению

$$\sqrt{x-1} - 2 + 3 - \sqrt{x-1} = 1,$$

или $1 = 1$. Это значит, что любое значение x , удовлетворяющее неравенству $2 \leq \sqrt{x-1} \leq 3$, удовлетворяет и уравнению (4'), а значит, и исходному уравнению.

3) $\sqrt{x-1} > 3$. В этом случае уравнение (4') принимает вид:

$$\sqrt{x-1} - 2 + \sqrt{x-1} - 3 = 1.$$

Отсюда $\sqrt{x-1} = 3$, а по условию $\sqrt{x-1} > 3$.

Итак, чтобы найти решение уравнения (4), нам осталось решить иррациональное неравенство

$$2 \leq \sqrt{x-1} \leq 3.$$

Возводя все члены этого неравенства в квадрат, получаем, что $4 \leq x-1 \leq 9$, то есть $5 \leq x \leq 10$. Значит, решением уравнения (4) является отрезок $[5, 10]$.

У п р а ж н е н и е 40. Решить иррациональные уравнения:

а) $\sqrt{x^2+4x+4} - \sqrt{x^2-12x+36} = 8$;

б) $\sqrt{x^2+4x+4} - \sqrt{x^2-12x+36} = 16$;

в) $\sqrt{x^2+4x+4} - \sqrt{x^2-12x+36} = 6$;

г) $\sqrt{x+\sqrt{6x-9}} + \sqrt{x-\sqrt{6x-9}} = \sqrt{6}$.

6*. Иррациональные неравенства. Рассмотрим теперь иррациональные неравенства, то есть неравенства, содержащие неизвестное под знаком корня. Решение таких неравенств осложняется рядом обстоятельств. Во-первых, для иррациональных неравенств, как и для иррациональных уравнений, рассматриваются лишь арифметические значения корня. Иными словами, если показатель корня — четное число, то подкоренное выражение должно быть неотрицательным, равно как и значение корня. Кроме этого, неравенство $f(x) < \varphi(x)$, вообще говоря, неравносильно неравенству $[f(x)]^n < [\varphi(x)]^n$. Ведь только для положительных a и b из $a < b$ заведомо вытекает $a^n < b^n$, а из $a^n < b^n$ следует $a < b$.

П р и м е р 1. Решить иррациональное неравенство

$$\sqrt{x^2-55x+250} < x-14. \quad (1)$$

Сначала найдем область его определения. Ясно, что подкоренное выражение должно быть неотрицательно:

$$x^2 - 55x + 250 > 0.$$

Решая это неравенство, получаем множество A , состоящее из двух лучей $x \leq 5$ и $x \geq 50$. Кроме того, корень принимает лишь неотрицательные значения, а потому и правая часть неравенства (1) должна быть неотрицательной: $x-14 \geq 0$. Пересекая множество A с лучом $x \geq 14$, получаем луч $x \geq 50$. Итак, мы доказали, что неравенство (1) задано в области $x \geq 50$. В этой области обе части не-

равенства (1) принимают положительные значения и потому неравенство (1) равносильно неравенству

$$x^2 - 55x + 250 < (x - 14)^2.$$

Наша задача свелась к решению системы неравенств:

$$\begin{cases} 50 \leq x, \\ x^2 - 55x + 250 < (x - 14)^2. \end{cases}$$

Из второго неравенства получаем $x > 2$. Значит, решением служит пересечение луча $x \geq 50$ с лучом $x > 2$, то есть луч $50 \leq x$.

Пример 2. Решить иррациональное неравенство

$$\sqrt{x} + \sqrt{x+7} < 6. \quad (2)$$

Это неравенство задано в области, определяемой ограничениями $x \geq 0$, $x \geq -7$. Их можно заменить одним неравенством $x \geq 0$. В области $x \geq 0$ обе части неравенства (2) положительны, и потому оно равносильно неравенству $(\sqrt{x} + \sqrt{x+7})^2 < 36$. Итак, мы заменили неравенство (2) равносильной ему системой неравенств:

$$\begin{cases} 0 \leq x, \\ 2x + 7 + 2\sqrt{x^2 + 7x} < 36. \end{cases}$$

Она решается так же, как в примере 1. В результате получаем систему неравенств, равносильную неравенству (2):

$$\begin{cases} x \geq 0, \\ 29 - 2x \geq 0, \\ 4(x^2 + 7x) < 841 - 116x + 4x^2. \end{cases}$$

Решая эту систему, находим, что $0 \leq x < \frac{841}{144}$.

Упражнение 41 Решить иррациональные неравенства:

- а) $\sqrt{x^2 - 3x + 2} > 2 - x$;
- б) $\sqrt{25 - x^2} + \sqrt{x^2 + 7x} > 3$;
- в) $\sqrt{x^2 - 3x - 10} < 8 - 5x$;
- г) $\sqrt{1+x} + \sqrt{1-x} > 1$;
- д) $\sqrt{x} + \sqrt{x+7} + 2\sqrt{x^2 + 7x} < 35 - 2x$;
- е) $\sqrt{\frac{3x-1}{2-x}} > 1$;
- ж) $\sqrt{2x+1} < \frac{2(x+1)}{2-x}$.

7. Краткие исторические сведения. Понятие о степени возникло в древности в связи с отысканием площади квадрата и объема куба (отсюда названия «квадрат», «куб» для обозначения второй и третьей степеней). Сохранились таблицы квадратов и кубов, составленные за 1700 лет до н. э. в древнем Вавилоне. Для обозначения высших степеней употреблялись позже составные выражения «биквадрат», или «квадрато-квадрат» для четвертой степени, «кубо-квадрат» для пятой и т. д. Современные названия предложены голландским ученым С. Стевином (1548—1620), который обозначал степени в виде ②, ③ и т. д. Он же начал систематически употреблять дробные показатели степени для обозначения корней.

В настоящее время для извлечения корня употребляются два обозначения: знак радикала и дробные показатели. Предпочтительнее использовать обозначения с дробными показателями — обозначения со знаком радикала являются скорее данью традиции.

Степени с отрицательными показателями ввел английский математик Д. Уоллис. П. Ферма в середине XVII века дал общий метод для решения иррациональных уравнений путем сведения их к системе целых алгебраических уравнений.

МНОГОЧЛЕНЫ ОТ НЕСКОЛЬКИХ ПЕРЕМЕННЫХ. СИСТЕМЫ УРАВНЕНИЙ И НЕРАВЕНСТВ

§ 1. Системы алгебраических уравнений

1. **Целые рациональные функции от нескольких переменных.** В этой главе мы изучим системы уравнений от нескольких переменных. В основном мы будем рассматривать системы алгебраических уравнений, то есть уравнений, обе части которых являются целыми рациональными функциями от неизвестных. Понятие целой рациональной функции от нескольких переменных определяется точно так же, как и в случае одного переменного; исходным, как и тогда, будет служить понятие *целого рационального выражения*.

Алгебраическое выражение, получающееся из чисел и букв x, y, \dots, z с помощью операций сложения и умножения, называется *целым рациональным выражением* от x, y, \dots, z . Примерами целых рациональных выражений являются:

$$(x^3 + 3y^2z + 1)(x - y)(x - z) + z^5, \\ (x - y)(x - z)(y - z).$$

Как и в случае выражений от одного переменного, каждое целое рациональное выражение от нескольких переменных можно привести к каноническому виду. Речь идет о суммах одночленов, то есть о выражениях вида $Ax^n y^m \dots z^p$, где буквы x, y, \dots, z стоят в определенном порядке. Такие суммы мы будем называть *многочленами* от x, y, \dots, z . Например, многочленами являются

$$x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz, \\ x^2 + 5xyz + 2y^2 - 6z^2.$$

Правила действия над многочленами вытекают из основных законов алгебры (см. п. 2 § 1 гл. 1).

У п р а ж н е н и я

1. Доказать тождества:

$$a(a^2 + b^2)(x^2 + y^2) = (ax - by)^2 + (bx + ay)^2;$$

- б) $(a^2 + b^2 + c^2 + d^2)(x^2 + y^2 + z^2 + t^2) = (ax - by - cz - dt)^2 + (bx + ay - dz + ct)^2 + (cx + dy + az - bt)^2 + (dx - cy + bz + at)^2$;
 в) $(x + y + z)^3 - x^3 - y^3 - z^3 = 3(x + y)(y + z)(z + x)$;
 г) $(a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_n^2)(b_1^2 + b_2^2 + \dots + b_n^2) = (a_1b_1 + a_2b_2 + \dots + a_nb_n)^2 + (a_1b_2 - a_2b_1)^2 + (a_1b_3 - a_3b_1)^2 + \dots + (a_{n-1}b_n - a_nb_{n-1})^2$;
 д) $(a + b + c + d)^2 + (a + b - c - d)^2 + (a + c - b - d)^2 + (a + d - b - c)^2 = 4(a^2 + b^2 + c^2 + d^2)$;
 е) $(a^2 - b^2 - c^2 - d^2)^2 + 2(ab + dc + ad - bc)^2 = (a^2 + b^2 + c^2 + d^2)^2 - 2(ab - ad + bc + dc)^2$;
 ж) $4[(a^2 - b^2)cd + (c^2 - d^2)ab]^2 + [(a^2 - b^2)(c^2 - d^2) - 4abcd]^2 = (a^2 + b^2)^2(c^2 + d^2)^2$.

2. Доказать, что

$$x^2 + xy + y^2 = z^2,$$

где

$$x = q^3 + 3pq^2 - p^3, y = -3pq(p + q), z = p^2 + pq + q^2.$$

3. Доказать, что если $a + b + c = 2s$, то $s(s - 2b)(s - 2c) + s(s - 2a)(s - 2b) + s(s - 2a)(s - 2c) = (s - 2a)(s - 2b)(s - 2c) + 8abc$.

4. Доказать тождество

$$\frac{a^2b^2}{(a-c)(b-c)} + \frac{a^2c^2}{(a-b)(c-a)} + \frac{b^2c^2}{(b-a)(c-a)} = ab + bc + ac.$$

2. Системы уравнений. Рассмотрим некоторые общие вопросы теории систем уравнений. Для простоты ограничимся системами уравнений с двумя неизвестными, хотя основные результаты применимы и к системам уравнений с большим числом неизвестных.

Рассмотрим систему уравнений

$$\begin{cases} F_1(x, y) = F_2(x, y), \\ \Phi_1(x, y) = \Phi_2(x, y). \end{cases} \quad (1)$$

Она выражает следующую задачу: найти все пары чисел (a, b) такие, что

$$F_1(a, b) = F_2(a, b) \text{ и } \Phi_1(a, b) = \Phi_2(a, b).$$

Пары чисел (a, b) , обладающие этим свойством, называют *решениями системы* (1). Если множество решений системы пусто, то система называется *несовместной*.

Тот факт, что пара (a, b) является решением системы уравнений с неизвестными x и y , записывается обычно в виде:

$$\begin{cases} x = a, \\ y = b. \end{cases}$$

Например, пара чисел $\begin{cases} x = 3, \\ y = 4 \end{cases}$ является решением системы уравнений

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 25, \\ xy = 12. \end{cases}$$

В самом деле,

$$\begin{cases} 3^2 + 4^2 = 25, \\ 3 \cdot 4 = 12. \end{cases}$$

Помимо решения $\begin{cases} x = 3, \\ y = 4, \end{cases}$ эта система имеет еще решения

$$\begin{cases} x = 4, \\ y = 3, \end{cases} \quad \begin{cases} x = -3, \\ y = -4, \end{cases} \quad \begin{cases} x = -4, \\ y = -3. \end{cases}$$

Позже мы увидим, что иных решений она не имеет.

Система уравнений

$$\begin{cases} x + y = 2, \\ x + y = 3 \end{cases}$$

несовместна.

3. Геометрический смысл решений уравнений и систем уравнений с двумя неизвестными. Возьмем любое уравнение относительно x и y :

$$F_1(x, y) = F_2(x, y) \quad (1)$$

и рассмотрим все точки $M(x, y)$ некоторой плоскости, координаты которых удовлетворяют этому уравнению. Эти точки образуют некоторое множество Γ , и мы будем говорить, что уравнение (1) задает (или выражает) это множество. Обычно множество Γ является некоторой линией. В этом случае уравнение (1) называют *уравнением линии* Γ .

Чтобы найти точки линии $F_1(x, y) = F_2(x, y)$, имеющие абсциссу a , надо подставить в уравнение вместо x значение a . Мы получим уравнение с одним неизвестным:

$$F_1(a, y) = F_2(a, y). \quad (2)$$

Может случиться, что это уравнение не имеет ни одного действительного корня. Тогда на линии нет точек с абсциссой $x = a$. Если же уравнение (2) имеет один или несколько корней, то каждому корню соответствует точка линии, имеющая абсциссу a .

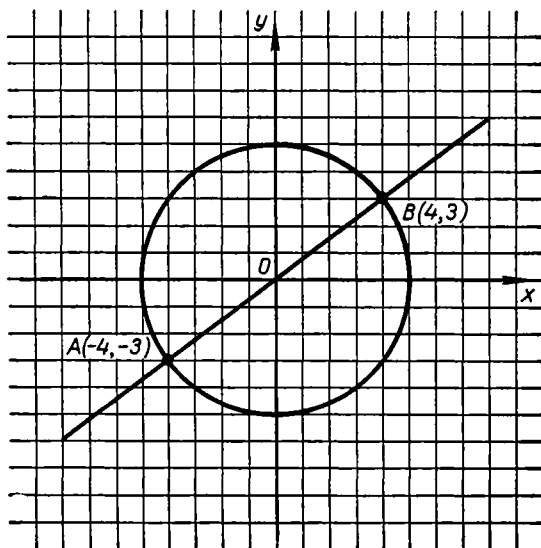


Рис. 11

Например, возьмем уравнения $y = \frac{3}{4}x$, $x^2 + y^2 = 25$. Первое из них является уравнением прямой, а второе — уравнением окружности (см. рис. 11). Если рассматривать эти два уравнения как систему

$$\begin{cases} y = \frac{3}{4}x \\ x^2 + y^2 = 25, \end{cases}$$

то решения будут изображаться точками пересечения прямой и окружности (то есть точками A и B на рис. 11). Если же рассматривать эти уравнения как совокупность уравнений

$$\begin{cases} y = \frac{3}{4}x, \\ x^2 + y^2 = 25, \end{cases}$$

то решения этой совокупности изображаются геометрической фигурой, получаемой объединением прямой и окружности.

Чтобы различать системы уравнений и совокупности уравнений, мы и стали обозначать систему уравнений так:

$$\begin{cases} F_1(x, y) = F_2(x, y), \\ \Phi_1(x, y) = \Phi_2(x, y), \end{cases}$$

а совокупность уравнений так:

$$\begin{cases} F_1(x, y) = F_2(x, y), \\ \Phi_1(x, y) = \Phi_2(x, y). \end{cases}$$

Можно говорить и о таком более сложном понятии, как совокупность систем уравнений. Например, возьмем такую запись:

$$\begin{cases} \begin{cases} F_1(x, y) = 0, \\ \Phi_1(x, y) = 0, \end{cases} \\ \begin{cases} F_2(x, y) = 0, \\ \Phi_2(x, y) = 0. \end{cases} \end{cases} \quad (2)$$

Она означает, что надо найти решения системы уравнений

$$\begin{cases} F_1(x, y) = 0, \\ \Phi_1(x, y) = 0 \end{cases}$$

и найти решения системы уравнений

$$\begin{cases} F_2(x, y) = 0, \\ \Phi_2(x, y) = 0 \end{cases}$$

и объединить найденные решения.

Геометрически это изображается так: надо найти точки пересечения линий $F_1(x, y) = 0$ и $\Phi_1(x, y) = 0$ и точки пересечения линий $F_2(x, y) = 0$ и $\Phi_2(x, y) = 0$ и объединить найденные точки в одно множество. Иными словами, если A_k — множество точек плоскости, координаты которых удовлетворяют уравнению $F_k(x, y) = 0$, а B_k — множество точек плоскости, удовлетворяющих уравнению $\Phi_k(x, y) = 0$, то решения совокупности систем (2) образуют множество

$$(A_1 \cap B_1) \cup (A_2 \cap B_2).$$

У п р а ж н е н и е 6. Дана система совокупностей уравнений:

$$\begin{cases} \begin{cases} F_1(x, y) = 0, \\ F_2(x, y) = 0, \end{cases} \\ \begin{cases} \Phi_1(x, y) = 0, \\ \Phi_2(x, y) = 0. \end{cases} \end{cases} \quad (3)$$

Обозначим через A_k множество точек плоскости, координаты которых удовлетворяют уравнению $F_k(x, y) = 0$, и через B_k — множество точек плоскости, координаты которых удовлетворяют уравнению $\Phi_k(x, y) = 0$. Каково множество точек, удовлетворяющих системе (3)?

5. Равносильные системы уравнений. Две системы уравнений

$$\begin{cases} F_1(x, y) = F_2(x, y), \\ \Phi_1(x, y) = \Phi_2(x, y) \end{cases} \quad (1)$$

и

$$\begin{cases} F_3(x, y) = F_4(x, y), \\ \Phi_3(x, y) = \Phi_4(x, y) \end{cases} \quad (2)$$

называются *равносильными*, если всякое решение первой системы является решением второй, а всякое решение второй системы является решением первой.

В частности, любые две несовместные системы уравнений равносильны.

Геометрически это означает следующее: линии $F_1(x, y) = F_2(x, y)$ и $\Phi_1(x, y) = \Phi_2(x, y)$ пере-

секаются в тех же самых точках, что и кривые $F_3(x, y) = F_4(x, y)$ и $\Phi_3(x, y) = \Phi_4(x, y)$ (см. рис. 12).

Процесс решения системы уравнений заключается в том, что ее последовательно заменяют равносильными ей системами уравнений (или совокупностями систем уравнений) до тех пор, пока не придут к совокупности вида:

$$\begin{cases} x = a_1, \\ y = b_1, \\ \vdots \\ x_n = a_n, \\ y = b_n. \end{cases} \quad (3)$$

Эта совокупность и дает решения заданной системы уравнений.

При решении систем уравнений чаще всего используются следующие теоремы о равносильности.

Теорема 1. Если в системе

$$\begin{cases} F_1(x, y) = F_2(x, y), \\ \Phi_1(x, y) = \Phi_2(x, y) \end{cases} \quad (4)$$

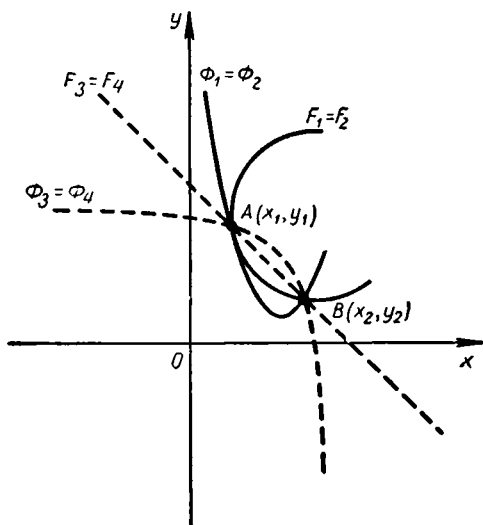


Рис. 12

заменить любое из уравнений равносильным ему уравнением, то получим систему, равносильную первоначальной.

Доказательство. Пусть $F_1^*(x, y) = F_2^*(x, y)$ равносильно уравнению $F_1(x, y) = F_2(x, y)$. Обозначим через A множество решений уравнения $F_1(x, y) = F_2(x, y)$, через A^* — множество решений уравнения $F_1^*(x, y) = F_2^*(x, y)$, а через B — множество решений уравнения $\Phi_1(x, y) = \Phi_2(x, y)$. Тогда множеством решений системы (4) является пересечение $A \cap B$, а множеством решений системы

$$\begin{cases} F_1^*(x, y) = F_2^*(x, y), \\ \Phi_1(x, y) = \Phi_2(x, y) \end{cases} \quad (4')$$

является пересечение $A^* \cap B$. Поскольку уравнения $F_1(x, y) = F_2(x, y)$ и $F_1^*(x, y) = F_2^*(x, y)$ равносильны, то $A = A^*$, а значит, и $A \cap B = A^* \cap B$, то есть системы (4) и (4') равносильны. Теорема доказана.

Из этой теоремы вытекает такое

Следствие. Каждая система уравнений

$$\begin{cases} F_1(x, y) = F_2(x, y), \\ \Phi_1(x, y) = \Phi_2(x, y) \end{cases}$$

равносильна некоторой системе уравнений вида

$$\begin{cases} f(x, y) = 0, \\ \varphi(x, y) = 0. \end{cases}$$

В самом деле, уравнение $F_1(x, y) = F_2(x, y)$ равносильно уравнению $F_1(x, y) - F_2(x, y) = 0$, а уравнение $\Phi_1(x, y) = \Phi_2(x, y)$ — уравнению $\Phi_1(x, y) - \Phi_2(x, y) = 0$.

Теорема 2. Если функции $F_k(x, y)$ ($1 \leq k \leq n$) определены на некотором множестве M , то на этом множестве уравнение

$$F_1(x, y) F_2(x, y) \dots F_n(x, y) = 0 \quad (5)$$

равносильно совокупности уравнений

$$\begin{cases} F_1(x, y) = 0, \\ F_2(x, y) = 0, \\ \vdots \\ F_n(x, y) = 0. \end{cases} \quad (6)$$

Доказательство. Если $\begin{cases} x = a \\ y = b \end{cases}$ — решение уравнения (5), то имеет место равенство

$$F_1(a, b) F_2(a, b) \dots F_n(a, b) = 0. \quad (5')$$

Но произведение нескольких чисел может равняться нулю тогда и только тогда, когда равен нулю хотя бы один из сомножителей. Поэтому для неко-

того k , $1 \leq k \leq n$, имеем: $F_k(a, b) = 0$, и, значит, $\begin{cases} x = a \\ y = b \end{cases}$ — одно из решений совокупности (6).

Обратно, если $\begin{cases} x = a \\ y = b \end{cases}$ — одно из решений совокупности (6), то по крайней мере для одного k имеем $F_k(a, b) = 0$, а тогда выполняется равенство (5'), и поэтому $\begin{cases} x = a \\ y = b \end{cases}$ — одно из решений уравнения (5).

Из теоремы 2 вытекает

Следствие. Система уравнений

$$\begin{cases} F_1(x, y) F_2(x, y) \dots F_n(x, y) = 0, \\ \Phi(x, y) = 0 \end{cases}$$

равносильна совокупности систем уравнений

$$\left[\begin{cases} F_1(x, y) = 0, \\ \Phi(x, y) = 0, \\ \\ F_n(x, y) = 0, \\ \Phi(x, y) = 0. \end{cases} \right.$$

Например, система уравнений

$$\begin{cases} (x - y)(x + y - 2) = 0, \\ x^2 + y^2 = 16 \end{cases}$$

равносильна совокупности систем

$$\left[\begin{cases} x - y = 0, \\ x^2 + y^2 = 16, \\ \\ x + y - 2 = 0, \\ x^2 + y^2 = 16. \end{cases} \right.$$

Это следствие позволяет сводить системы к совокупностям более простых систем.

6. Метод подстановки. Теоремы п. 5 относятся по сути дела к отдельным уравнениям, а не к системе в целом. При решении систем уравнений применяются также преобразования уравнений, затрагивающие не одно уравнение, а несколько. Например, для решения системы

$$\begin{cases} y - x^2 = 2, \\ y^2 + y - x^4 = 26 \end{cases}$$

мы находим из первого уравнения выражение y через x : $y = x^2 + 2$ — и подставляем это выражение во второе уравнение. Решая полученное уравнение $5x^2 + 6 = 26$, находим корни $\begin{cases} x = 2, \\ x = -2. \end{cases}$ Так как $y = x^2 + 2$, то оба соответствующих значения неизвестного y равны 6. Значит, решение системы можно записать в виде:

$$\left[\begin{cases} x = 2, \\ y = 6, \\ x = -2, \\ y = 6. \end{cases} \right.$$

Метод, которым была решена эта система, называется *методом подстановки*. Он позволяет сводить решение системы уравнений с двумя неизвестными к более простой задаче — решению одного уравнения с одним неизвестным. Выясним теперь, на чем же основан метод подстановки. Для этого докажем следующую теорему.

Теорема 3. Система уравнений

$$\begin{cases} y = f(x), \\ \Phi(x, y) = 0 \end{cases} \quad (1)$$

равносильна системе уравнений

$$\begin{cases} y = f(x), \\ \Phi(x, f(x)) = 0. \end{cases} \quad (2)$$

Доказательство. Пусть $\begin{cases} x = a \\ y = b \end{cases}$ — решение системы уравнений (1). Тогда $b = f(a)$ и $\Phi(a, b) = 0$. Поэтому $\Phi(a, f(a)) = 0$. Равенства $b = f(a)$ и $\Phi(a, f(a)) = 0$ показывают, что $\begin{cases} x = a \\ y = b \end{cases}$ является решением системы уравнений (2).

Обратно, пусть $\begin{cases} x = a \\ y = b \end{cases}$ — решение системы уравнений (2). Тогда имеют место равенства $b = f(a)$ и $\Phi(a, f(a)) = 0$. Из них вытекает, что $\Phi(a, b) = 0$. А это и означает, что $\begin{cases} x = a \\ y = b \end{cases}$ является решением системы уравнений (1).

Тем самым равносильность систем уравнений (1) и (2) доказана.

Из теорем 2 и 3 вытекает

Следствие. Если уравнение $F(x, y) = 0$ равносильно уравнению $y = f(x)$, то система уравнений

$$\begin{cases} F(x, y) = 0, \\ \Phi(x, y) = 0 \end{cases}$$

равносильна системе уравнений

$$\begin{cases} y = f(a), \\ \Phi(x, f(x)) = 0. \end{cases}$$

Мы уже говорили, что теорема 3 лежит в основе метода решения систем уравнений с двумя неизвестными, называемого *методом исключения неизвестных*. Он состоит в следующем.

Пусть задана система уравнений

$$\begin{cases} F(x, y) = 0, \\ \Phi(x, y) = 0. \end{cases} \quad (1)$$

Выразим из первого уравнения системы y через x , то есть заменим уравнение $F(x, y) = 0$ равносильным ему уравнением $y = f(x)$. Полученное выражение для y подставим во второе уравнение, то есть заменим систему уравнений (1) равносильной ей системой

$$\begin{cases} y = f(x), \\ \Phi(x, f(x)) = 0. \end{cases} \quad (4)$$

Уравнение $\Phi(x, f(x))$ является уже уравнением с одним неизвестным. Решая его, получим корни x_1, \dots, x_k . Им соответствуют значения $y_1 = f(x_1), \dots, y_k = f(x_k)$ неизвестного y . В соответствии с этим получаем решения

$$\begin{cases} x = x_1, \\ y = f(x_1), \end{cases} \dots, \begin{cases} x = x_k, \\ y = f(x_k) \end{cases}$$

заданной системы.

Часто приходится заменять уравнение $F(x, y) = 0$ не одним уравнением вида $y = f(x)$, а совокупностью

$$\begin{cases} y = f_1(x), \\ \dots \dots \dots \\ y = f_m(x) \end{cases}$$

таких уравнений. Тогда и система (1) заменяется совокупностью систем

$$\left[\begin{cases} y = f_1(x), \\ \Phi(x, f_1(x)) = 0, \\ \dots \dots \dots \\ y = f_m(x), \\ \Phi(x, f_m(x)) = 0. \end{cases} \right. \quad (5)$$

Из каждой системы этой совокупности получаем описанным выше методом решения заданной системы, после чего объединяем их.

П р и м е р ы

1. Решить систему уравнений:

$$\begin{cases} y + x^2 = 5, \\ y^2 + x^4 = 17. \end{cases}$$

Из первого уравнения системы находим $y = 5 - x^2$. Подставляя это значение во второе уравнение, получаем:

$$(5 - x^2)^2 + x^4 = 17,$$

или, после упрощения,

$$x^4 - 5x^2 + 4 = 0.$$

Корнями этого биквадратного уравнения являются числа:

$$x_1 = 1, \quad x_2 = -1, \quad x_3 = 2, \quad x_4 = -2.$$

Им соответствуют значения:

$$y_1 = 4, \quad y_2 = 4, \quad y_3 = 1, \quad y_4 = 1.$$

Значит, решения заданной системы уравнений $\begin{cases} x_1 \\ y_1 \end{cases}$ имеют вид:

$$\begin{cases} x_1 = 1, \\ y = 4, \end{cases} \quad \begin{cases} x_2 = -1, \\ y_2 = 4, \end{cases} \quad \begin{cases} x_3 = 2, \\ y_3 = 1, \end{cases} \quad \begin{cases} x_4 = -2, \\ y_4 = 1. \end{cases}$$

2. Решить систему уравнений:

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 25, \\ x^2 + xy + y^2 = 37. \end{cases}$$

Из первого уравнения системы получаем:

$$y = \pm \sqrt{25 - x^2}.$$

Значит, нам надо решить совокупность двух систем уравнений:

$$\left[\begin{cases} y = \sqrt{25 - x^2}, \\ x^2 + xy + y^2 = 37, \\ y = -\sqrt{25 - x^2}, \\ x^2 + xy + y^2 = 37. \end{cases} \right.$$

Делая в первой системе подстановку, получаем:

$$x^2 + x\sqrt{25 - x^2} + 25 - x^2 = 37,$$

или $x \sqrt{25 - x^2} = 12$. Решая (возведением в квадрат) это иррациональное уравнение, находим корни $x_1 = 3$, $x_2 = 4$. Им соответствуют значения $y_1 = 4$, $y_2 = 3$. Итак, первая система имеет решения:

$$\begin{cases} x_1 = 3, \\ y_1 = 4, \end{cases} \quad \begin{cases} x_2 = 4, \\ y_2 = 3. \end{cases}$$

Точно так же доказывается, что вторая система имеет решения:

$$\begin{cases} x_3 = -3, \\ y_2 = -4, \end{cases} \quad \begin{cases} x_4 = -4, \\ y_4 = -3. \end{cases}$$

Следовательно, заданная система имеет решения:

$$\begin{cases} x_1 = 3, \\ y_1 = 4, \end{cases} \quad \begin{cases} x_2 = 4, \\ y_2 = 3, \end{cases} \quad \begin{cases} x_3 = -3, \\ y_3 = -4, \end{cases} \quad \begin{cases} x_4 = -4, \\ y_4 = -3. \end{cases}$$

7. Метод алгебраического сложения уравнений. Кроме метода подстановки, при решении систем алгебраических уравнений применяется *метод алгебраического сложения*. Он основан на следующей теореме.

Теорема 4. Если к одному из уравнений системы

$$\begin{cases} F(x, y) = 0, \\ \Phi(x, y) = 0 \end{cases} \quad (1)$$

прибавить другое уравнение, умноженное на любой множитель $f(x, y)$, определенный при всех допустимых значениях неизвестных, а второе уравнение оставим неизменным, то получится система уравнений, равносильная исходной.

Таким образом, система (1) равносильна системе

$$\begin{cases} F(x, y) + f(x, y)\Phi(x, y) = 0, \\ \Phi(x, y) = 0, \end{cases} \quad (2)$$

где множитель $f(x, y)$ определен при всех допустимых значениях неизвестных.

Доказательство. Пусть $x = a$, $y = b$ — решение системы (1), то есть $F(a, b) = 0$ и $\Phi(a, b) = 0$.

Умножим обе части равенства $\Phi(a, b) = 0$ на число $f(a, b)$ и прибавим к равенству $F(a, b) = 0$. Мы получим, что $F(a, b) + f(a, b)\Phi(a, b) = 0$, а потому $x = a$, $y = b$ удовлетворяет и системе (2).

Точно так же доказывается, что любое решение системы уравнений (2) удовлетворяет системе уравнений (1). Значит, системы уравнений (1) и (2) равносильны.

Из теоремы 4 вытекает такое

Следствие. Если к одному из уравнений системы (1) прибавить другое уравнение системы, умноженное на любое число, а второе уравнение оставить неизменным, то получим систему, равносильную первоначальной.

Покажем, как применяются эти утверждения для решения систем уравнений. Пусть дана система уравнений:

$$\begin{cases} x^3 + y^3 = 9, \\ x^2y + xy^2 = 6. \end{cases}$$

Здесь нецелесообразно выражать x через y или y через x , так как мы получили бы довольно сложное иррациональное уравнение. Поэтому поступим иначе. Прибавим к первому уравнению системы второе уравнение, умноженное на 3. В силу формулы для куба суммы получим систему уравнений:

$$\begin{cases} (x + y)^3 = 27, \\ x^2y + xy^2 = 6, \end{cases}$$

равносильную заданной. Эта система равносильна системе:

$$\begin{cases} x + y = 3, \\ xy(x + y) = 6 \end{cases}$$

(поскольку уравнение $(x + y)^3 = 27$ равносильно $x + y = 3$).

А теперь выразим из первого уравнения y через x и подставим во второе уравнение. Мы получим:

$$\begin{cases} y = 3 - x, \\ 3x(3 - x) = 6, \end{cases}$$

или

$$\begin{cases} y = 3 - x, \\ x^2 - 3x + 2 = 0. \end{cases}$$

Из второго уравнения находим: $x_1 = 1$, $x_2 = 2$. Соответствующие значения y равны $y_1 = 2$, $y_2 = 1$. Значит, решениями заданной системы уравнений являются:

$$\begin{cases} x_1 = 1, \\ y_1 = 2, \end{cases} \quad \begin{cases} x_2 = 2, \\ y_2 = 1. \end{cases}$$

Задача. Массы трех планет A , B и C ¹ равны соответственно M , $2M$, $3M$. Через планеты проведена плоскость и на ней выбрана

¹ Принимаемых, как обычно, за «материальные точки».

система координат. Координаты планет равны соответственно $A(0,0)$, $B(a, 0)$, $C(2a, b)$. При каком значении b на плоскости существует точка, в которой притяжение ко всем трем планетам одинаково?

Решение. По закону всемирного тяготения сила притяжения между телами с массами m_1 и m_2 равна $\gamma \frac{m_1 m_2}{r^2}$, где γ — гравитационная постоянная, а r — расстояние между этими телами. Если $D(x, y)$ — некоторая точка плоскости, то ее расстояние до точки A равно $r_1 = \sqrt{x^2 + y^2}$, до точки $B(2a, 0)$ равно

$$r_2 = \sqrt{(x-a)^2 + y^2},$$

а до точки $C(b, c)$ равно

$$r_3 = \sqrt{(x-2a)^2 + (y-b)^2}.$$

Поэтому силы, с которыми тело массы m , находящееся в точке D , притягивается к планетам, равны

$$F_1 = \gamma \frac{Mm}{x^2 + y^2},$$

$$F_2 = \gamma \frac{2Mm}{(x-a)^2 + y^2},$$

$$F_3 = \gamma \frac{3Mm}{(x-2a)^2 + (y-b)^2}.$$

По условию задачи должны выполняться условия $F_1 = F_2$, $F_1 = F_3$, или, иначе,

$$\begin{aligned} \frac{\gamma Mm}{x^2 + y^2} &= \frac{2\gamma Mm}{(x-a)^2 + y^2}, \\ \frac{\gamma Mm}{x^2 + y^2} &= \frac{3\gamma Mm}{(x-2a)^2 + (y-b)^2}. \end{aligned}$$

После сокращения обоих уравнений на γMm и освобождения от знаменателей получаем равносильную систему уравнений

$$\begin{cases} (x-a)^2 + y^2 = 2(x^2 + y^2), \\ (x-2a)^2 + (y-b)^2 = 3(x^2 + y^2) \end{cases}$$

или

$$\begin{cases} x^2 + y^2 + 2ax - a^2 = 0, \\ x^2 + y^2 + 2ax + by - \frac{1}{2}(4a^2 + b^2) = 0. \end{cases}$$

Вычтем первое уравнение из второго. Мы получим, что

$$by - a^2 - \frac{1}{2}b^2 = 0,$$

и потому

$$y = \frac{a^2}{b} + \frac{1}{2}b.$$

Подставляя это значение y в первое уравнение, получаем для x квадратное уравнение

$$x^2 + 2ax + \left(\frac{a^2}{b} + \frac{1}{2}b\right)^2 - a^2 = 0.$$

Из него находим:

$$\begin{aligned} x_{1,2} &= -a \pm \sqrt{2a^2 - \left(\frac{a^2}{b} + \frac{1}{2}b\right)^2} = \\ &= -a \pm \sqrt{a^2 - \frac{a^4}{b^2} - \frac{1}{4}b^2} = \\ &= a \pm \sqrt{-\left(\frac{a^2}{b} - \frac{b}{2}\right)^2}. \end{aligned}$$

Отсюда получаем, что x принимает действительные значения лишь в случае, когда $\frac{a^2}{b} - \frac{b}{2} = 0$, то есть при $b = \pm a\sqrt{2}$. Если $b = a\sqrt{2}$, то искомой точкой является $D_1(-a, a\sqrt{2})$, а если $b = -a\sqrt{2}$, то $D_2(-a, -a\sqrt{2})$.

У п р а ж н е н и е 7. Решите следующие системы уравнений:

а) $\begin{cases} 4x^2 + 7y^2 = 148, \\ 3x^2 - y^2 = 11; \end{cases}$

д) $\begin{cases} x^2 + xy = 15, \\ xy - x^2 = 2; \end{cases}$

б) $\begin{cases} x - \frac{x-y}{2} = 4, \\ y - \frac{x+3y}{x+2} = 1; \end{cases}$

е) $\begin{cases} x^2 - xy + y^2 = 21, \\ y^2 - 2xy + 15 = 0; \end{cases}$

в) $\begin{cases} xy = 1, \\ 3x - 5y = 2; \end{cases}$

ж) $\begin{cases} \frac{x+y}{x-y} + \frac{x-y}{x+y} = \frac{10}{3}, \\ x^2 + y^2 = 45; \end{cases}$

г) $\begin{cases} x^2 + xy + 2y^2 = 74, \\ 2x^2 + 2xy + y^2 = 73; \end{cases}$

з) $\begin{cases} x + y = x^2, \\ 3y - x = y^2; \end{cases}$

$$\text{и) } \begin{cases} x + 2y + \frac{3x}{y} = 16, \\ 3x + y + \frac{3x}{y} = 23; \end{cases} \quad \text{л) } \begin{cases} \sqrt{x+y} + \sqrt{x-y} = \sqrt{a}, \\ \sqrt{x^2+y^2} + \sqrt{x^2-y^2} = b; \end{cases}$$

$$\text{к) } \begin{cases} \frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1, \\ \frac{a}{x} + \frac{b}{y} = 4; \end{cases} \quad \text{м) } \begin{cases} 2\sqrt{x^2+y^2} + xy = 1, \\ \frac{x}{y} + \frac{y}{x} = a; \end{cases}$$

$$\text{н) } \begin{cases} \sqrt{\frac{a^2-x^2}{y^2-b^2} + \frac{y^2-b^2}{a^2-x^2}} + \sqrt{\frac{a^2+x^2}{y^2+b^2} + \frac{y^2+b^2}{a^2+x^2}} = 4, \\ xy = ab; \end{cases}$$

$$\text{о) } \begin{cases} \sqrt{x^2 + \sqrt[3]{x^4 y^2}} + \sqrt{y^2 + \sqrt[3]{x^2 y^4}} = a, \\ x + y + \sqrt[3]{bxy} = b. \end{cases}$$

8. Метод введения новых неизвестных. Для решения многих систем оказывается удобно ввести вместо x и y новые неизвестные. Рассмотрим следующий пример:

$$\begin{cases} xy(x^2 + y^2) = 300, \\ xy + x^2 + y^2 = 37. \end{cases}$$

Если положить $xy = t$, $x^2 + y^2 = s$, то получим для определения t и s систему уравнений:

$$\begin{cases} ts = 300, \\ t + s = 37. \end{cases}$$

Решая эту систему, получаем, что

$$\begin{cases} t = 12, \\ s = 25; \end{cases} \quad \begin{cases} t = 25, \\ s = 12. \end{cases}$$

Так как $t = xy$, $s = x^2 + y^2$, то для отыскания x и y получаем две системы уравнений:

$$\begin{cases} xy = 12, \\ x^2 + y^2 = 25; \end{cases} \quad \begin{cases} xy = 25, \\ x^2 + y^2 = 12. \end{cases}$$

Решениями первой системы являются:

$$\begin{cases} x_1 = 3, \\ y_1 = 4; \end{cases} \quad \begin{cases} x_2 = 4, \\ y_2 = 3. \end{cases}$$

Вторая же система не имеет действительных решений.

Общего правила для выбора новых неизвестных не существует. Однако в некоторых случаях можно указать полезные правила (см. п. 9 и § 3).

9*. Системы однородных уравнений. Назовем $F(x, y)$ *однородным многочленом относительно x и y степени n* , если при замене x на ax и y на ay $F(x, y)$ умножается на a^n :

$$F(ax, ay) = a^n F(x, y).$$

Например, $3x^2 - 9xy + 5y^2$ — однородный многочлен второй степени, а $7x^4 + 6x^3y + 5x^2y^2 - 3xy^3 + 2y^4$ — однородный многочлен четвертой степени.

Пусть одно из уравнений системы имеет вид: $F(x, y) = 0$, где $F(x, y)$ — однородный многочлен. Тогда решение системы сводится к решению двух уравнений, каждое из которых содержит лишь одно неизвестное. Покажем на примере, как это делается.

Пусть дана система уравнений:

$$\begin{cases} 3x^2 - 4xy + y^2 = 0, \\ x^2 + 2y^2 = 19. \end{cases} \quad (1)$$

Посмотрим сначала, есть ли у этого уравнения решения, для которых $x = 0$. Подставляя $x = 0$ в оба уравнения системы, получаем систему уравнений:

$$\begin{cases} y^3 = 0, \\ 2y^2 = 19. \end{cases}$$

Эта система несовместна, так как из первого уравнения получаем $y = 0$, а из второго $-y = \pm \sqrt{\frac{19}{2}}$.

Итак, система не имеет решений, для которых $x = 0$. Поэтому первое уравнение системы можно разделить на x^2 (в общем случае — на x^n , где n — степень многочлена $F(x, y)$). Мы получим уравнение:

$$3 - 4 \frac{y}{x} + \frac{y^2}{x^2} = 0.$$

Положим $y = tx$. Мы придем к системе уравнений:

$$\begin{cases} t^2 - 4t + 3 = 0, \\ x^2(1 + 2t^2) = 19. \end{cases}$$

Корнями первого уравнения являются $t_1 = 1$, $t_2 = 3$. Подставляя во второе уравнение t_1 , получаем $x = \pm \sqrt{\frac{19}{3}}$. Подставляя же

$t_2 = 3$, получаем $x = \pm 1$. Так как $y = tx$, то мы имеем следующие решения системы (1):

$$\begin{cases} x_1 = \sqrt{\frac{19}{3}}, \\ y_1 = \sqrt{\frac{19}{3}}, \end{cases} \quad \begin{cases} x_2 = -\sqrt{\frac{19}{3}}, \\ y_2 = -\sqrt{\frac{19}{3}}, \end{cases} \quad \begin{cases} x_3 = 1, \\ y_3 = 3, \end{cases} \quad \begin{cases} x_4 = -1, \\ y_4 = -3. \end{cases}$$

В следующем примере система имеет решения, для которых $x = 0$:

$$\begin{cases} 3x^2 - 4x^2y + xy^2 = 0, \\ x^2 + y^2 = 2. \end{cases}$$

При $x = 0$ первое уравнение обращается в равенство $0 = 0$, а второе принимает вид $y^2 = 2$. Из него находим $y = \pm\sqrt{2}$. Мы нашли уже два решения системы:

$$\begin{cases} x_1 = 0, \\ y_1 = \sqrt{2}, \end{cases} \quad \begin{cases} x_2 = 0, \\ y_2 = -\sqrt{2}. \end{cases}$$

Другие решения получаются так же, как и в первом случае. Мы делим первое уравнение системы на x^3 (случай, когда $x = 0$ и деление невозможно, уже рассмотрен) и заменяем y на tx . Получаем систему уравнений:

$$\begin{cases} t^2 - 4t + 3 = 0, \\ x^2(1 + t^2) = 2. \end{cases}$$

Из первого уравнения находим $t_1 = 1$, $t_2 = 3$. Подставляя эти решения во второе уравнение и находя x , приходим к следующим решениям системы:

$$\begin{cases} x_3 = 1, \\ y_3 = 1, \end{cases} \quad \begin{cases} x_4 = -1, \\ y_4 = -1, \end{cases} \quad \begin{cases} x_5 = \sqrt{0,2}, \\ y_5 = 3\sqrt{0,2}, \end{cases} \quad \begin{cases} x_6 = -\sqrt{0,2}, \\ y_6 = -3\sqrt{0,2}. \end{cases}$$

З а д а ч а. От пристани A одновременно отправились вниз по течению катер и плот. Катер спустился вниз по течению на 96 км, затем повернул обратно и вернулся в A через 14 часов. Найти скорость катера в стоячей воде, если известно, что катер встретил плот на обратном пути на расстоянии 24 км от A .

Решение. Сначала составим систему уравнений. В качестве неизвестных выберем скорость u катера в стоячей воде и скорость течения v . Тогда скорость катера при движении по течению равна $u + v$, а при движении против течения $u - v$. Зна-

чит, чтобы пройти вниз по течению 96 км, ему надо $\frac{96}{u+v}$ часов, а вверх по течению $\frac{96}{u-v}$ часов. Всего он затратит $\frac{96}{u+v} + \frac{96}{u-v}$ часов. Но по условию задачи он вернулся назад через 14 часов. Значит,

$$\frac{96}{u+v} + \frac{96}{u-v} = 14.$$

Чтобы получить второе уравнение, найдем, какое время затратил катер до встречи с плотом. Он прошел 96 км вниз по течению и 72 км против течения. На это он затратил $\frac{96}{u+v} + \frac{72}{u-v}$ часов.

Плот же проплыл 24 км со скоростью v и затратил $\frac{24}{v}$ часов. Так как плот и катер одновременно отправились из A , то имеем уравнение

$$\frac{96}{u+v} + \frac{72}{u-v} = \frac{24}{v}.$$

Мы получим систему уравнений:

$$\begin{cases} \frac{96}{u+v} + \frac{96}{u-v} = 14, \\ \frac{96}{u+v} + \frac{72}{u-v} = \frac{24}{v}. \end{cases}$$

При замене u на ut и v на vt обе части второго уравнения умножаются на $\frac{1}{t}$. Поэтому оно является однородным уравнением степени однородности — 1. Так как $v=0$ не удовлетворяет уравнению, мы можем положить $u = vz$. Тогда второе уравнение примет вид:

$$\frac{96}{z+1} + \frac{72}{z-1} = 24.$$

Освобождаясь от знаменателей, получим:

$$24z^2 - 168z = 0.$$

Так как $z \neq 0$, то $z = 7$. Следовательно, $u = 7v$. Подставляя $u = 7v$ в первое уравнение системы, находим:

$$\frac{96}{8v} + \frac{96}{6v} = 14,$$

откуда $v = 2$ (км/ч).

Поэтому $u = 14$ км/ч.

У п р а ж н е н и е 8. Решите системы уравнений:

$$а) \begin{cases} x^2 + y^2 = \frac{25}{12} xy, \\ x^2 - y^2 = 7; \end{cases}$$

$$б) \begin{cases} x^4 + y^4 + x^3y + xy^3 = \frac{112}{9} x^2y^2, \\ x + y = 4; \end{cases}$$

$$в) \begin{cases} (x + y)^2 + (x - y)^2 = \frac{5}{2} (x^2 - y^2), \\ x^2 + y^2 = 20; \end{cases}$$

$$г) \begin{cases} x^4 + y^4 = \frac{17}{4} x^2y^2, \\ x^3 + y^3 = 9; \end{cases} \quad д) \begin{cases} x^3 + x^2y + xy^2 + y^3 = 0, \\ x^2 + 4y^2 = 5. \end{cases}$$

10*. Геометрическая интерпретация решения систем двух уравнений с двумя неизвестными. Мы уже знаем, что решение системы двух уравнений с двумя неизвестными

$$\begin{cases} F(x, y) = 0, \\ \Phi(x, y) = 0 \end{cases}$$

геометрически истолковывается как отыскание точек пересечения двух линий. Этим можно воспользоваться для приближенного решения системы уравнений. Именно, если изобразить линии $F(x, y) = 0$ и $\Phi(x, y) = 0$, мы сможем найти координаты точек пересечения этих линий и тем самым значения неизвестных. Поскольку линии чертятся лишь приближенно, мы получаем не точные, а приближенные значения решений системы. Тем не менее, решая графически систему, мы можем узнать, сколько она имеет решений, и, хотя бы грубо, найти приближенные значения этих решений.

При графическом решении систем уравнений мы сталкиваемся с различными кривыми. В курсе геометрии были выведены уравнения прямой, окружности, параболы, гиперболы и эллипса. В дальнейшем мы будем пользоваться этими кривыми.

Рассмотрим некоторые примеры систем уравнений.

Пусть дана система

$$\begin{cases} y = x^2 + 4x + 4, \\ 2x + y + 4 = 0. \end{cases} \quad (1) \quad (2)$$

Выразив из уравнения (2) y через x и подставив в первое уравнение, получаем квадратное уравнение:

$$-2x - 4 = x^2 + 4x + 4.$$

Его корни

$$x_1 = -4, \quad x_2 = -2.$$

Подставив их во второе уравнение, получаем:

$$y_1 = 4, \quad y_2 = 0.$$

Итак, система имеет два решения:

$$\begin{cases} x_1 = -4, \\ y_1 = 4, \end{cases} \quad \begin{cases} x_2 = -2, \\ y_2 = 0. \end{cases}$$

Построим теперь линии, выражаемые уравнениями (1) и (2). Уравнение (1) — это уравнение параболы $y = (x + 2)^2$, которая

получается из параболы $y = x^2$ сдвигом на 2 единицы влево вдоль оси абсциссы. Уравнение же (2) выражает прямую линию $y = -2x - 4$. Рис. 13 дает геометрическое изображение нашей системы. Мы видим из рисунка, что парабола и прямая пересекаются в двух точках $A(-4, 4)$ и $A_2(-2, 0)$ в соответствии с полученным аналитическим путем решением.

Парабола может иметь с прямой линией не две, а одну точку пересечения и даже не иметь ни одной точки пересечения.

Возьмем систему уравнений:

$$\begin{cases} y = x^2 - 2x + 4, \\ y = 2x. \end{cases} \quad (3)$$

Ее единственное решение:

$$\begin{cases} x = 2, \\ y = 4. \end{cases}$$

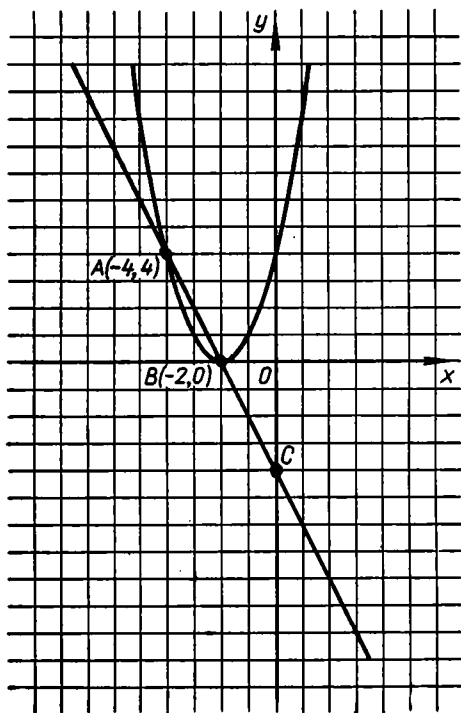


Рис. 13

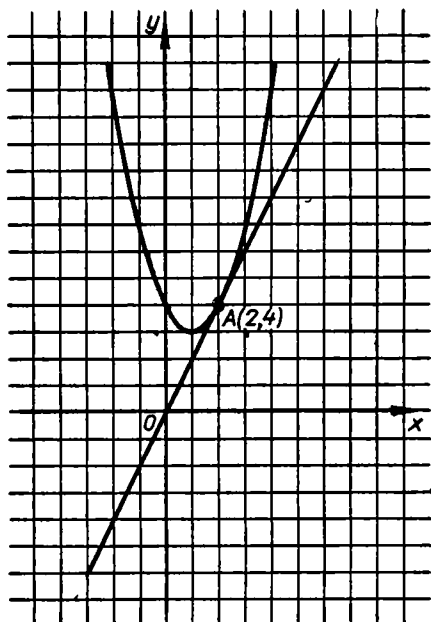


Рис. 14

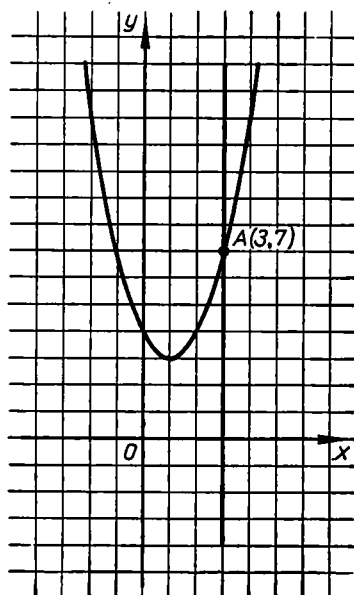


Рис. 15

Из рис. 14 мы видим, что прямая $y = 2x$ касается параболы

$$y = x^2 - 2x + 4 = (x - 1)^2 + 3.$$

Система уравнений

$$\begin{cases} y = x^2 - 2x + 4, \\ x = 3 \end{cases} \quad (4)$$

тоже имеет одно решение:

$$\begin{cases} x = 3, \\ y = 4. \end{cases}$$

Но в этом случае прямая не касается параболы, а пересекает ее (см. рис. 15).

Система уравнений

$$\begin{cases} y = x^2 - 2x + 4, \\ y = 2x - 1 \end{cases} \quad (5)$$

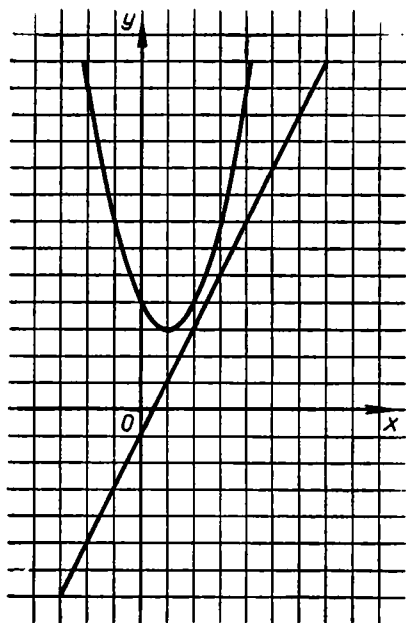


Рис. 16

не имеет ни одного решения — здесь прямая и парабола не пересекаются (см. рис. 16).

Теперь рассмотрим систему, геометрический смысл которой заключается в отыскании точек пересечения прямой и гиперболы. Пусть система имеет вид:

$$\begin{cases} xy = 12, \\ x - 2y - 2 = 0. \end{cases} \quad (6)$$

Решая ее способом подстановки, находим решения:

$$\begin{cases} x_1 = -4, \\ y_1 = -3, \end{cases} \quad \begin{cases} x_2 = 6, \\ y_2 = 2. \end{cases}$$

Эти же решения получаются графическим способом (см. рис. 17). Однако следует иметь в виду, что графический способ дает лишь приближенные значения корней и, решая систему (6) графически, мы не можем быть уверены, что решение имеет вид $x = -4$, $y = -3$, а не, например, $x = -4,01$, $y = -2,99$.

Как и в случае параболы, может случиться, что прямая имеет не две, а меньше общих точек с гиперболой.

Перейдем к системам, в которых оба уравнения имеют вторую степень. Можно доказать, что такие системы уравнений имеют не более четырех решений.

Вообще можно доказать, что система двух уравнений с двумя неизвестными такая, что первое уравнение имеет степень m , а второе — степень n , имеет не более mn решений.

Рассмотрим, например, систему:

$$\begin{cases} y = x^2 + 5x, \end{cases} \quad (7)$$

$$\begin{cases} x = y^2 + 5y. \end{cases} \quad (8)$$

Первое из этих уравнений представляет параболу с осью, параллельной оси ординат, а второе — параболу с осью, параллельной оси абсцисс (см. рис. 18). Из рисунка видно, что эти параболы пересекаются в четырех точках. Чтобы найти координаты точек пере-

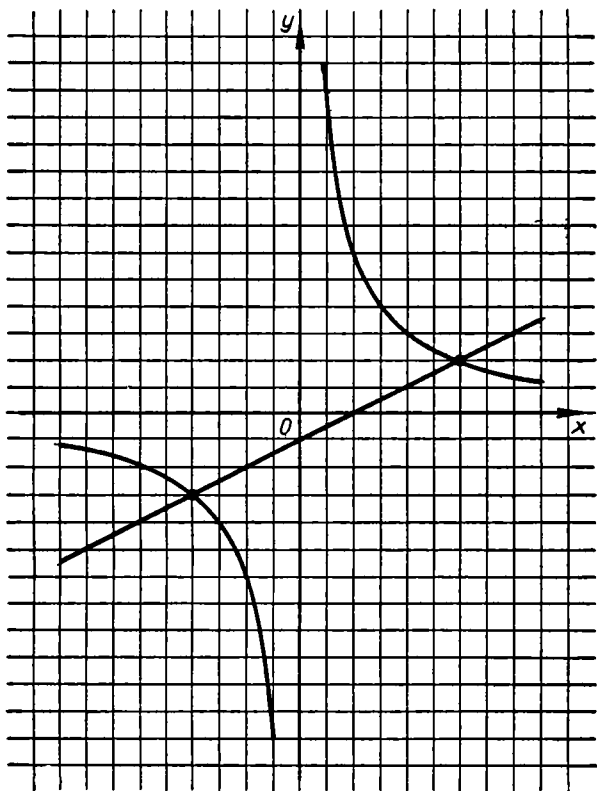


Рис. 17

сечения, решим эту систему методом алгебраического сложения. Именно, вычтем из уравнения (8) уравнение (7). Мы получим равносильную систему уравнений:

$$\begin{cases} y = x^2 + 5x, \\ (y - x)(x + y + 6) = 0. \end{cases}$$

Эта система равносильна совокупности систем:

$$\left[\begin{cases} y = x^2 + 5x, \\ y - x = 0, \end{cases} \right. \left. \begin{cases} y = x^2 + 5x, \\ x + y + 6 = 0. \end{cases} \right.$$

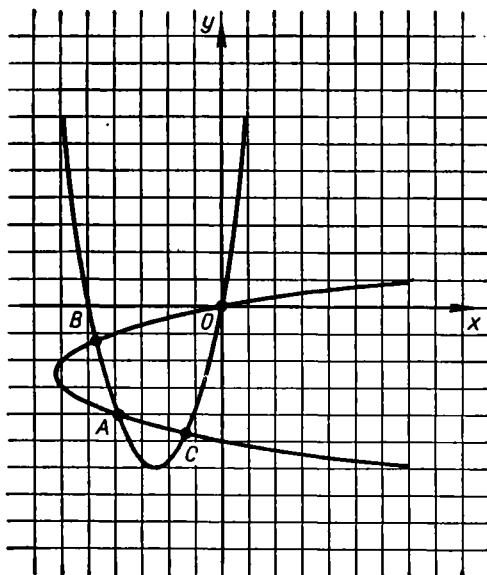


Рис. 18

Обе системы этой совокупности решаются методом подстановки. Мы получаем при этом следующие решения заданной системы:

$$\begin{cases} x_1 = 0, \\ y_1 = 0, \end{cases} \quad \begin{cases} x_2 = -4, \\ y_2 = -4, \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_3 = 3 - \sqrt{3}, \\ y_3 = -3 - \sqrt{3}, \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_4 = -3 + \sqrt{3}, \\ y_4 = -3 - \sqrt{3}. \end{cases}$$

Система уравнений

$$\begin{cases} x^2 + y^2 + 4x - 6y = 12, \\ xy - 3x + 2y = 11 \end{cases}$$

тоже имеет четыре решения. Она выражает задачу об отыскании точек пересечения окружности и гиперболы (см. рис. 19). Чтобы решить эту систему,

надо прибавить к первому уравнению удвоенное второе уравнение.

В некоторых случаях получается меньше чем четыре решения системы. Например, система

$$\begin{cases} y - x^2 - 2x = 1, \\ x^2 + y^2 - 2x - 6y + 5 = 0 \end{cases}$$

имеет два решения. Она выражает задачу об отыскании точек пересечения параболы и окружности (рис. 20).

Столько же решений имеет система

$$\begin{cases} x^2 + y^2 + 2x - 6y - 6 = 0, \\ x^2 + y^2 + 8x + 2y - 32 = 0 \end{cases}$$

(пересечение двух окружностей) (рис. 21).

У п р а ж н е н и я

9. Решите графически следующие системы уравнений и проверьте полученные ответы путем аналитического решения:

$$\begin{array}{ll} \text{а) } \begin{cases} x = y^2 + 5y, \\ y = x^2 + 5x; \end{cases} & \text{б) } \begin{cases} x^2 - 8x - 4y = 6, \\ y^2 + 5y - 5x = 0; \end{cases} \end{array}$$

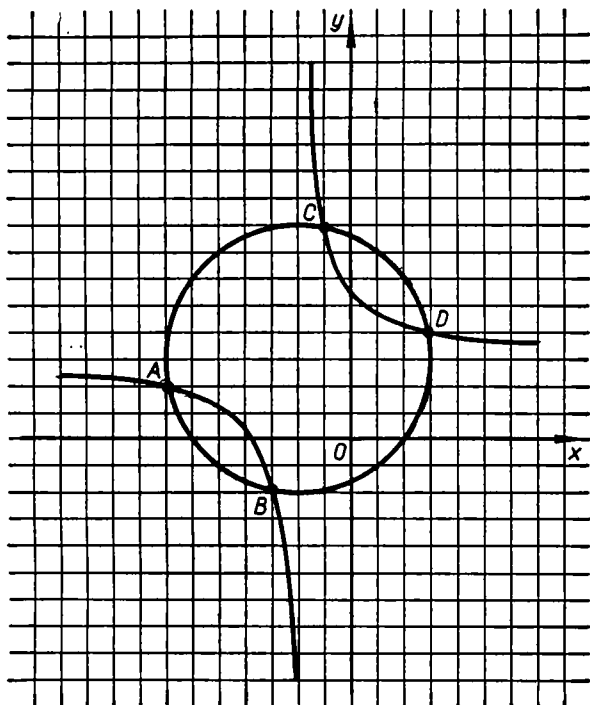


Рис. 19

- в) $\begin{cases} x^2 + y^2 = 36, \\ x^2 + 6y = 36; \end{cases}$ з) $\begin{cases} x^2 + y^2 + 4x - 6y = 13, \\ xy - 3x + 2y = 11; \end{cases}$
- г) $\begin{cases} x^2 - 4x - 6y = 20, \\ xy = -8; \end{cases}$ и) $\begin{cases} x^2 - y^2 = 9, \\ x = \frac{1}{2}y^2 - 3; \end{cases}$
- д) $\begin{cases} x^2 + y^2 = 25, \\ x^2 + (y - 9)^2 = 36; \end{cases}$ к) $\begin{cases} xy - 2y - 3x = 16, \\ x^2 + y^2 - 2x - 4y = 45; \end{cases}$
- е) $\begin{cases} x^2 - y^2 = 25, \\ x^2 + y^2 = 47; \end{cases}$ л) $\begin{cases} 9x^2 + 25y^2 = 225, \\ 4x + 5y = 25. \end{cases}$
- ж) $\begin{cases} x^2 - y^2 = 25, \\ x^2 + y^2 = 25; \end{cases}$

10. а) Найдите условие, при котором прямая $y = kx + m$ касается эллипса

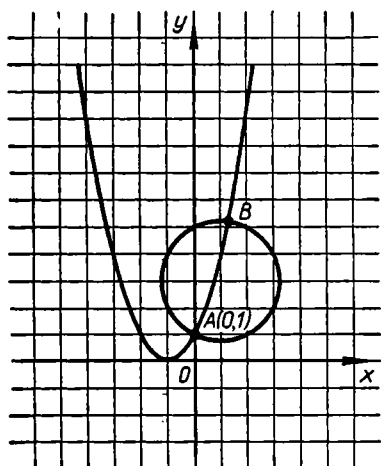


Рис. 20

$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ (то есть условие, когда система уравнений

$$\begin{cases} y = kx + m, \\ \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \end{cases}$$

имеет только одно решение).

б) То же для прямой $y = kx + m$ и гиперболы

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

в) То же для прямой $y = kx + m$ и параболы

$$y^2 = 2px.$$

г) То же для прямой $y = kx + m$ и окружности

$$(x - a)^2 + (y - b)^2 = R^2.$$

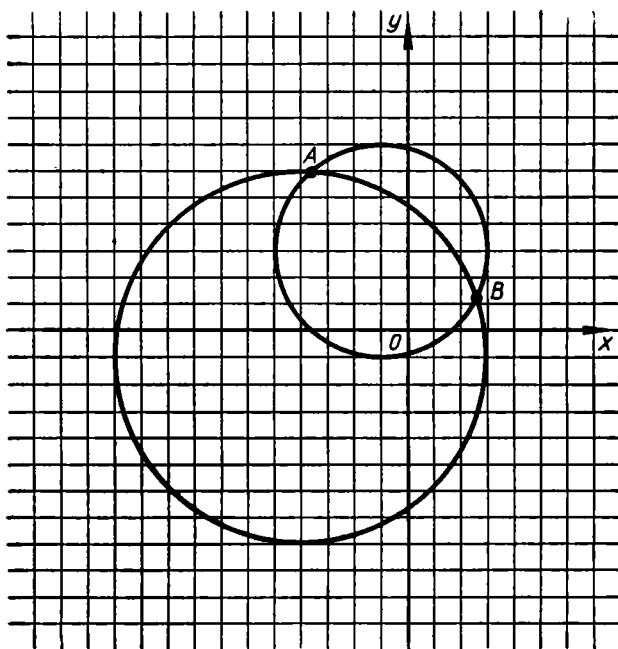


Рис. 21

§ 2*. Системы линейных уравнений

1. Введение. Уравнения первой степени с двумя и тремя неизвестными изучают в восьмилетней школе. Как показано в курсе геометрии, уравнение первой степени с двумя переменными $Ax + By = C$ задает прямую линию. Поэтому принято называть уравнение первой степени *линейным*. Например, линейное уравнение относительно неизвестных x, y, z, \dots, u может быть сведено к виду

$$Ax + By + Cz + \dots + Du = E. \quad (1)$$

Числа A, B, C, \dots, D называют коэффициентами при неизвестных, а E — свободным членом уравнения.

Мы рассмотрим в этом параграфе системы линейных уравнений со многими неизвестными. Для таких систем становится неудобным обозначать неизвестные через x, y, z, \dots, u . Значительно удобнее перенумеровать неизвестные и обозначить их x_1, x_2, \dots, x_n . Коэффициенты при неизвестных тоже неудобно обозначить различными буквами A, B, C, \dots, D . Обычно их обозначают одной буквой с двумя номерами (индексами). Первый номер обозначает номер уравнения, а второй — номер неизвестного. Например, a_{34} — это коэффициент при x_4 в третьем уравнении. Вообще a_{ij} — коэффициент при x_j в i -м уравнении. Свободные члены мы будем обозначать через $b_i, i = 1, \dots, m$.

В восьмилетней школе мы рассматривали лишь системы уравнений, для которых число уравнений равнялось числу неизвестных. Сейчас мы будем изучать системы, состоящие из m линейных уравнений с n неизвестными. Такие системы записываются следующим образом:

[illegible]

Например, для системы

$$\begin{cases} 3x_1 - 4x_2 + 7x_3 + 6x_4 = 1, \\ 2x_1 - 3x_2 - 6x_3 + 11x_4 = 3, \\ 5x_1 + x_2 - 8x_3 + 2x_4 = 5 \end{cases}$$

имеем: $m = 3$, $n = 4$, $a_{11} = 3$, $a_{12} = -4$, $a_{13} = 7$, $a_{14} = 6$, $b_1 = 1$, $a_{21} = 2$ и т. д.

Эта теорема вытекает из того, что ни один набор чисел $x_1 = \alpha_1, \dots, x_n = \alpha_n$ не удовлетворяет уравнению (4).

У п р а ж н е н и я

11. Пусть существуют такие числа $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_{m-1}$, что после умножения первого уравнения системы (1) на λ_1 , второго на $\lambda_2, \dots, (m-1)$ -го на λ_{m-1} и сложения получается m -е уравнение этой системы. Докажите, что после отбрасывания m -го уравнения получается система, равносильная заданной.

12. Пусть после умножения на числа $\lambda_1, \dots, \lambda_{m-1}$ и сложения уравнений получается уравнение с той же левой частью, что и m -е уравнение системы, но с другим свободным членом. Докажите, что система несовместна.

3. Пример решения системы линейных уравнений методом Гаусса. В восьмилетней школе системы линейных уравнений (с двумя или тремя неизвестными) решаются или методом подстановки, или методом алгебраического сложения. Сейчас мы изложим метод Гаусса, очень близкий к методу алгебраического сложения, но отличающийся от него большей систематичностью. Покажем сначала этот метод на следующем примере.

Пусть надо решить систему уравнений:

$$\begin{cases} 2x_1 - 4x_2 + x_3 - 5x_4 = 2, \\ 4x_1 - 7x_2 - x_3 - 8x_4 = -5, \\ 10x_1 - 18x_2 + 2x_3 - 23x_4 = 3, \\ 2x_1 - 3x_2 + x_3 - x_4 = 0. \end{cases} \quad (1)$$

Умножим первое уравнение системы на -2 и прибавим его ко второму, потом умножим первое уравнение на -5 и прибавим к третьему, наконец, умножим первое уравнение на -1 и прибавим к четвертому. Система уравнений примет вид:

$$\begin{cases} 2x_1 - 4x_2 + x_3 - 5x_4 = 2, \\ x_2 - 3x_3 + 2x_4 = -9, \\ 2x_2 - 3x_3 + 2x_4 = -7, \\ x_2 + 4x_4 = -2. \end{cases} \quad (2)$$

Мы видим, что в результате преобразований неизвестное x_1 осталось лишь в первом уравнении.

Теперь преобразуем тем же путем три последних уравнения. Умножим второе уравнение на -2 и прибавим к третьему, а потом умножим второе уравнение на -1 и прибавим к четвертому.

$$\begin{cases} 2x_1 - 4x_2 + x_3 - 5x_4 = 2, \\ x_2 - 3x_3 + 2x_4 = -9, \\ 3x_3 - 2x_4 = 11, \\ 3x_3 + 2x_4 = 7. \end{cases} \quad (3)$$

Здесь для краткости введены следующие обозначения:

[illegible]

и т. д.

Таким образом, если $a_{11} \neq 0$, то удастся исключить x_1 из всех уравнений системы, начиная со второго. Если же $a_{11} = 0$, то возможны различные случаи, в зависимости от того, какой вид имеет первое уравнение системы. Эти случаи таковы:

а) Все коэффициенты и свободный член первого уравнения равны нулю: $a_{11} = a_{12} = \dots = a_{1n} = 0$ и $b_1 = 0$. В этом случае первое уравнение системы имеет вид:

$$0 \cdot x_1 + 0 \cdot x_2 + \dots + 0 \cdot x_n = 0.$$

В силу теоремы 6, п. 2, мы можем его отбросить, не меняя множества решений системы (1).

б) Все коэффициенты a_{1k} равны нулю, а b_1 отлично от нуля: $a_{11} = \dots = a_{1n} = 0$. $b_1 \neq 0$. Тогда первое уравнение нашей системы имеет вид:

$$0x_1 + 0x_2 + \dots + 0x_n = b_1,$$

и по теореме 7, п. 2, система несовместна.

в) $a_{i1} = 0$, но среди коэффициентов a_{i2}, \dots, a_{in} есть отличные от нуля, скажем $a_{ij} \neq 0$. Тогда надо поменять номера у неизвестных x_1 и x_j , то есть ввести новые неизвестные x'_1 и x'_j , такие, что $x'_1 = x_j$, $x'_j = x_1$. Разумеется, при этом мы уже получим систему, неравносильную заданной (например, системы

$$\begin{cases} 2x + 3y = 8, \\ x + 2y = 5 \end{cases}$$

И

$$\begin{cases} 3x + 2y = 8, \\ 2x + y = 5 \end{cases}$$

из одного и того же числа уравнений. Доказательство этого утверждения довольно сложно, и мы его опускаем. Отметим, что *ранг r системы не больше числа t уравнений этой системы.*

5. Решение обобщенно-треугольной системы линейных уравнений. Покажем теперь, что любая обобщенно-треугольная система уравнений совместна, и выясним, когда она имеет единственное решение. Сначала разберем случай, когда ранг системы r равен числу неизвестных n , $r = n$. Тогда система (4), п. 4, имеет вид:

$$\begin{aligned} c_{11}x_1 + c_{12}x_2 + \dots + c_{1n}x_n &= d_1, \\ c_{22}x_2 + \dots + c_{2n}x_n &= d_2, \\ &\vdots \\ c_{nn}x_n &= d_n, \end{aligned} \quad (1)$$

то есть является треугольной. При этом $c_{11} \neq 0$, $c_{22} \neq 0$, \dots , $c_{nn} \neq 0$. Треугольная система уравнений решается очень просто. Из последнего уравнения системы находим, что $x_n = \frac{d_n}{c_{nn}}$. Подставим это значение в предпоследнее уравнение. Мы получим, что

$$c_{n-1,n}x_{n-1} + c_{n-1,n} \frac{d_n}{c_{nn}} = d_{n-1},$$

и поэтому

$$x_{n-1} = \frac{d_{n-1}c_{nn} - d_n c_{n-1,n}}{c_{n-1,n-1}c_{nn}}.$$

После этого последовательно определяем x_{n-2} , x_{n-3} и т. д. вплоть до x_1 , которое находим из первого уравнения. Мы видим, что треугольная система имеет единственное решение. Следовательно, при $r = n$ заданная система уравнений имеет единственное решение. Пусть теперь $r < n$. В этом случае обобщенно-треугольная система имеет вид:

$$\begin{cases} c_{11}x_1 + \dots + c_{1r}x_r + c_{1,r+1}x_{r+1} + \dots + c_{1n}x_n = d_1, \\ \dots \\ c_{rr}x_r + c_{r,r+1}x_{r+1} + \dots + c_{rn}x_n = d_r. \end{cases} \quad (2)$$

Перенесем слагаемые, содержащие неизвестные x_{r+1} , \dots , x_n , в правую часть уравнений. Система примет вид:

$$\begin{cases} c_{11}x_1 + \dots + c_{1r}x_r = d_1 - c_{1,r+1}x_{r+1} - \dots - c_{1n}x_n, \\ \dots \\ c_{rr}x_r = d_r - c_{r,r+1}x_{r+1} - \dots - c_{rn}x_n. \end{cases} \quad (3)$$

будут и ненулевые решения. Мы доказали, таким образом, следующую теорему.

Теорема. Для того чтобы система однородных линейных уравнений имела ненулевое решение, необходимо и достаточно, чтобы ранг r этой системы был меньше числа неизвестных n .

Так как ранг системы заведомо меньше числа уравнений исходной системы, то отсюда получаем

Следствие. Для того чтобы система m однородных линейных уравнений с n неизвестными имела ненулевое решение, достаточно, чтобы число уравнений было меньше числа неизвестных, $m < n$.

Системы однородных линейных уравнений решаются методом Гаусса. Решим, например, систему уравнений:

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 + 5x_3 = 0, \\ 2x_1 + x_2 - 5x_3 = 0, \\ 4x_1 - 3x_2 + 5x_3 = 0. \end{cases}$$

Применяя метод Гаусса, приходим к системе уравнений:

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 + 5x_3 = 0, \\ 5x_2 - 15x_3 = 0. \end{cases}$$

Ее можно записать так:

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 = -5x_3, \\ 5x_2 = 15x_3. \end{cases}$$

Отсюда находим, что $x_2 = 3x_3$, $x_1 = x_3$. При любом значении x_3 получаем решение системы (*). Отметим, что полученное решение можно представить в следующем виде:

$$x_1 : x_2 : x_3 = 1 : 3 : 1.$$

У п р а ж н е н и я

16. Решите системы однородных линейных уравнений:

$$\begin{aligned} \text{а) } \begin{cases} 2x_1 + 3x_2 - x_3 + 5x_4 = 0, \\ 3x_1 - x_2 + 2x_3 - 7x_4 = 0, \\ 4x_1 + x_2 - 3x_3 + 6x_4 = 0, \\ x_1 - 2x_2 + 4x_3 - 7x_4 = 0; \end{cases} & \text{б) } \begin{cases} x_1 + x_2 - 3x_4 - x_5 = 0, \\ x_1 - x_2 + 2x_3 - x_4 = 0, \\ 4x_1 - 2x_2 + 6x_3 + 3x_4 - 4x_5 = 0, \\ 2x_1 + 4x_2 - 2x_3 + 4x_4 - 7x_5 = 0. \end{cases} \end{aligned}$$

17. Уравнение прямой линии на плоскости имеет вид: $Ax + By + C = 0$. Напишите уравнение прямой, проходящей через точки: а) $M(-1, 3)$; $N(4, 7)$; б) $M(-1, 3)$; $N(-1, 7)$.

18. Общее уравнение окружности на плоскости имеет вид:

$$A(x^2 + y^2) + 2Dx + 2Ey + F = 0.$$

Напишите уравнение окружности, проходящей через точки:

а) $M(6, 10)$; $N(3, 1)$; $P(7, 3)$;

б) $M(1, 3)$; $N(4, 6)$; $P(6, 8)$.

Объясните результат задачи 18б.

Мы изучим сейчас симметрические многочлены от двух переменных, то есть такие многочлены $f(x, y)$, что $f(x, y) = f(y, x)$.

Например, многочлен $x^2 + y^2$ симметричен. Многочлен же $x^2 + y^3$ не является симметрическим. Если заменить в нем x на y , а y на x , то получится многочлен $y^2 + x^3$, который не совпадает с первоначальным.

Простейшими симметрическими многочленами от двух переменных x и y являются сумма и произведение этих переменных, то есть $x + y$ и xy . Введем для этих многочленов специальные обозначения:

$$\sigma_1 = x + y,$$

$$\sigma_2 = xy.$$

Симметрическими являются многочлены вида $x^n + y^n$. Их называют *степенными суммами*. Принято обозначать многочлен $x^n + y^n$ через S_n . Таким образом, $S_0 = x^0 + y^0 = 2$, $S_1 = x + y$, $S_2 = x^2 + y^2$, $S_3 = x^3 + y^3$ и т. д.

2. Выражение степенных сумм через σ_1 и σ_2 . Рассмотрим первые три степенные суммы S_1, S_2, S_3 . Легко видеть, что их можно выразить через многочлены σ_1 и σ_2 :

$$\begin{aligned} S_1 &= x + y = \sigma_1, \\ S_2 &= x^2 + y^2 = (x + y)^2 - 2xy = \sigma_1^2 - 2\sigma_2, \\ S_3 &= x^3 + y^3 = (x + y)(x^2 - xy + y^2) = \\ &= \sigma_1(\sigma_1^2 - 3\sigma_2) = \sigma_1^3 - 3\sigma_1\sigma_2. \end{aligned}$$

Докажем, что это утверждение верно для любых степенных сумм.

Теорема 8. *Любая степенная сумма S_n может быть представлена в виде многочлена от переменных σ_1, σ_2 .*

Иными словами, для любого n существует такой многочлен $f_n(\sigma_1, \sigma_2)$, что после подстановки в него $\sigma_1 = x + y$, $\sigma_2 = xy$ и упрощения он превращается в S_n :

$$S_n = x^n + y^n = f_n(x + y, xy).$$

Доказательство. Применим для доказательства метод математической индукции. При $n = 1$ наше утверждение справедливо, поскольку $S_k = x + y = \sigma_1$. Таким образом, $f_1(\sigma_1, \sigma_2) = \sigma_1$. Предположим теперь, что утверждение доказано для степенных сумм S_k , $1 \leq k \leq n - 1$. Пусть для любой такой суммы найден многочлен $f_k(\sigma_1, \sigma_2)$, $1 \leq k \leq n - 1$, обладающий тем свойством, что $S_k = f_k(x + y, xy)$. Заметим теперь, что

$$\begin{aligned} (x + y)(x^{n-1} + y^{n-1}) &= x^n + x^{n-1}y + xy^{n-1} + y^n = \\ &= x^n + y^n + xy(x^{n-2} + y^{n-2}) \end{aligned}$$

и потому

$$x^n + y^n = (x + y)(x^{n-1} + y^{n-1}) - xy(x^{n-2} + y^{n-2}).$$

Это равенство можно записать так:

$$S_n = \sigma_1 S_{n-1} - \sigma_2 S_{n-2}.$$

Так как

$$S_{n-1} = f_{n-1}(\sigma_1, \sigma_2), S_{n-2} = f_{n-2}(\sigma_1, \sigma_2),$$

то получаем, что

$$S_n = \sigma_1 f_{n-1}(\sigma_1, \sigma_2) - \sigma_2 f_{n-2}(\sigma_1, \sigma_2).$$

Мы предположили, что $f_{n-2}(\sigma_1, \sigma_2)$ и $f_{n-1}(\sigma_1, \sigma_2)$ — многочлены от σ_1 и σ_2 . Подставим выражения этих многочленов в полученное равенство, раскроем скобки, приведем подобные члены и сгруппируем их в порядке убывания степеней σ_1 . В результате мы получим выражение для S_n в виде многочлена от σ_1 и σ_2 .

Итак, доказываемое утверждение верно при $n = 1$ и из его справедливости при $1 \leq k \leq n - 1$ следует справедливость для n . Значит, оно верно для всех n .

П р и м е р ы

1) Выразим через σ_1 и σ_2 степенные суммы S_4, S_5, S_6 . По формуле (1) имеем:

$$S_4 = \sigma_1 S_3 - \sigma_2 S_2.$$

Так как

$$S_3 = \sigma_1^3 - 3\sigma_1\sigma_2, S_2 = \sigma_1^2 - 2\sigma_2,$$

то

$$\begin{aligned} S &= \sigma_1(\sigma_1^3 - 3\sigma_1\sigma_2) - \sigma_2(\sigma_1^2 - 2\sigma_2) = \\ &= \sigma_1^4 - 4\sigma_1^2\sigma_2 + 2\sigma_2^2. \end{aligned}$$

Точно так же находим:

$$\begin{aligned} S_5 &= \sigma_1 S_4 - \sigma_2 S_3 = \sigma_1(\sigma_1^4 - 4\sigma_1^2\sigma_2 + 2\sigma_2^2) - \\ &\quad - \sigma_2(\sigma_1^3 - 3\sigma_1\sigma_2) = \sigma_1^5 - 5\sigma_1^3\sigma_2 + 5\sigma_1\sigma_2^2, \\ S_6 &= \sigma_1 S_5 - \sigma_2 S_4 = \sigma_1(\sigma_1^5 - 5\sigma_1^3\sigma_2 + 5\sigma_1\sigma_2^2) - \\ &\quad - \sigma_2(\sigma_1^4 - 4\sigma_1^2\sigma_2 + 2\sigma_2^2) = \\ &= \sigma_1^6 - 6\sigma_1^4\sigma_2 + 9\sigma_1^2\sigma_2^2 - 2\sigma_2^3. \end{aligned}$$

У п р а ж н е н и я

25. Выразить через σ_1 и σ_2 степенные суммы S_7, S_8, S_9, S_{10} .

26. Не решая квадратного уравнения $x^2 - 6x + 10 = 0$, составить новое уравнение, корнями которого были бы кубы корней заданного уравнения.

27. Не решая уравнения $x^2 - 3x + 1 = 0$, найти: а) сумму четвертых степеней его корней,

б) сумму шестых степеней его корней.

3. Основная теорема о симметрических многочленах от двух переменных. Теорема 1, п. 7, является частным случаем следующего общего утверждения.

Теорема 9. Для любого симметрического многочлена $F(x, y)$ существует такой (вообще говоря, несимметрический) многочлен $f(\sigma_1, \sigma_2)$, что $F(x, y) = f(x + y, xy)$.

Доказательство. Пусть $F(x, y)$ — симметрический многочлен. Возьмем какой-нибудь из его членов ax^ky^l . Если $k = l$, то этот член имеет вид ax^ky^k и может быть записан так:

$$ax^ky^k = a(xy)^k = a\sigma_2^k.$$

Если же $k \neq l$, скажем $k > l$, то наряду со слагаемым ax^ky^l в $F(x, y)$ входит и симметрическое с ним слагаемое ax^ly^k . Но сумму $ax^ky^l + ax^ly^k$ можно записать так:

$$ax^ky^l + ax^ly^k = ax^ly^l (x^{k-l} + y^{k-l}) = a\sigma_2^l S_{k-l}.$$

Мы уже умеем выражать S_{k-l} через σ_1 и σ_2 . Следовательно, и сумма $ax^ky^l + ax^ly^k$ выражается через σ_1 и σ_2 . Так как это рассуждение применимо к любому слагаемому ax^ky^l , то и весь многочлен $F(x, y)$ можно выразить через σ_1 и σ_2 .

Пример

Выразить через σ_1 и σ_2 симметрический многочлен

$$F(x, y) = x^4 + 5x^3y + 6x^2y^2 + 5xy^3 + y^4.$$

Мы имеем:

$$F(x, y) = (x^4 + y^4) + 5xy(x^2 + y^2) + 6x^2y^2.$$

Применяя формулу для S_4 и S_2 , получаем, что

$$F(x, y) = \sigma_1^4 - 4\sigma_1^2\sigma_2 + 2\sigma_2^2 + 5\sigma_2(\sigma_1^2 - 2\sigma_2) + 6\sigma_2^2 = \sigma_1^4 + \sigma_1^2\sigma_2 - 2\sigma_2^2.$$

Упражнения

28. Выразить через σ_1 и σ_2 симметрические многочлены

а) $x^3 + 4x^2y + 4xy^2 + y^3$;

б) $x^5 + 6x^4y - 10x^3y^2 - 10x^2y^3 + 6xy^4 + y^5$.

29. Дано квадратное уравнение

$$2x^2 + 3x - 5 = 0,$$

имеющее корни α и β . Составить новое квадратное уравнение, корни которого были бы

$$2\alpha + \frac{3}{\beta} \quad \text{и} \quad 2\beta + \frac{3}{\alpha}.$$

30. Дано квадратное уравнение

$$3x^2 + 7x + 4 = 0,$$

имеющее корни α и β . Составить новое квадратное уравнение, имеющее корни

$$\frac{\alpha}{\beta-1} \text{ и } \frac{\beta}{\alpha-1}.$$

31. Составить квадратное уравнение с корнями

$$\frac{\alpha}{2\alpha+\beta} \text{ и } \frac{\beta}{2\beta+\alpha},$$

где α и β — корни уравнения

$$2x^2 - 4x + 3 = 0.$$

32. Разложить на множители многочлены:

а) $10x^4 - 27x^3y - 110x^2y^2 - 27xy^3 + 10y^4$;

б) $2x^4 + 7x^3y + 9x^2y^2 + 7xy^3 + 2y^4$

(выразите их через σ_1 и σ_2).

33. Разложить на множители многочлены:

а) $2x^4 + 3x^3y + 6x^2y^2 + 3xy^3 + 2y^4$;

б) $3x^4 - 8x^3y + 14x^2y^2 - 8xy^3 + 3y^4$

(попробуйте представить их в виде произведения двух симметричных друг другу множителей).

4. Системы симметрических алгебраических уравнений. Мы уже говорили, что иногда удается упростить решение системы алгебраических уравнений, удачно введя новые неизвестные. Этот путь решения приводит к успеху, если заданная система уравнений симметрична, то есть имеет вид:

$$\begin{cases} P(x, y) = 0, \\ Q(x, y) = 0, \end{cases}$$

где $P(x, y)$ и $Q(x, y)$ — симметрические многочлены от x и y .

Простейшей системой такого вида является:

$$\begin{cases} x+y=a, \\ xy=b. \end{cases} \quad (1)$$

Будем рассматривать числа x и y как корни некоторого квадратного уравнения. Тогда по теореме Виета коэффициент при первой степени неизвестного в этом уравнении равен $-a$, а свободный член равен b . Иными словами, квадратное уравнение с корнями x и y имеет вид:

$$z^2 - az + b = 0. \quad (2)$$

Пусть корни этого уравнения z_1 и z_2 . Тогда либо $x = z_1$, $y = z_2$, либо $x = z_2$, $y = z_1$.

Рассмотрим теперь более сложную систему:

$$\begin{cases} x^2 + xy + y^2 = 4, \\ x + xy + y = 2. \end{cases} \quad (3)$$

Так как левые части обоих уравнений симметрично зависят от x и y , то введем вместо x и y новые неизвестные $\sigma_1 = x + y$, $\sigma_2 = xy$.

Выразим через эти неизвестные левые части уравнений (3). Мы получим:

$$x^2 + xy + y^2 = (x + y)^2 - xy = \sigma_1^2 - \sigma_2$$

и

$$x + xy + y = \sigma_1 + \sigma_2.$$

Таким образом, заданная система свелась к следующей:

$$\begin{cases} \sigma_1^2 - \sigma_2 = 4, \\ \sigma_1 + \sigma_2 = 2. \end{cases}$$

Сложив эти уравнения, получим квадратное уравнение относительно σ_1 :

$$\sigma_1^2 + \sigma_1 - 6 = 0.$$

Из него следует, что $\sigma_1 = 2$ и $\sigma'_1 = -3$. Так как $\sigma_1 + \sigma_2 = 2$, то $\sigma_2 = 0$ и $\sigma'_2 = 5$.

Поскольку $\sigma_1 = x + y$, $\sigma_2 = xy$, то наша система свелась к совокупности двух систем:

$$\begin{cases} x + y = 2, \\ xy = 0 \end{cases} \quad \text{или} \quad \begin{cases} x + y = -3, \\ xy = 5. \end{cases}$$

Решая первую систему, находим два решения:

$$\begin{cases} x_1 = 2, \\ y_1 = 0, \end{cases} \quad \begin{cases} x_2 = 0, \\ y_2 = 2. \end{cases}$$

Вторая система действительных решений не имеет.

Точно так же решается система уравнений:

$$\begin{cases} x + y = 5, \\ x^5 + y^5 = 275. \end{cases}$$

Так как

$$x^5 + y^5 = S_5 = \sigma_1^5 - 5\sigma_1^3\sigma_2 + 5\sigma_1\sigma_2^2,$$

то данную систему можно записать в виде:

$$\begin{cases} \sigma_1 = 5, \\ \sigma_1^5 - 5\sigma_1^3\sigma_2 + 5\sigma_1\sigma_2^2 = 275. \end{cases}$$

Подставляя во второе уравнение значение $\sigma_1 = 5$, получаем квадратное уравнение:

$$25\sigma_2^2 - 625\sigma_2 + 2850 = 0.$$

Из него находим, что $\sigma_2 = 6$ и $\sigma'_2 = 19$. Тем самым заданная система свелась к системам:

$$\begin{cases} x + y = 5, \\ xy = 6 \end{cases} \quad \text{и} \quad \begin{cases} x + y = 5, \\ xy = 19. \end{cases}$$

Решая первую систему, получаем:

$$\begin{cases} x_1 = 2, \\ y_1 = 3, \end{cases} \quad \begin{cases} x_2 = 3, \\ y_2 = 2. \end{cases}$$

Вторая же система не имеет действительных решений.

Выгода введения неизвестных $\sigma_1 = x + y$, $\sigma_2 = xy$ состоит в том, что при такой замене понижается степень уравнения, поскольку $\sigma_2 = xy$ имеет вторую степень относительно x и y . Например, во втором разобранном примере система пятой степени свелась к квадратному уравнению.

У п р а ж н е н и е 34. Решить следующие системы уравнений:

а) $\begin{cases} xy = 15, \\ x + y + x^2 + y^2 = 42; \end{cases}$ д) $\begin{cases} x^2 + xy + y^2 = 49, \\ x^4 + x^2y^2 + y^4 = 931; \end{cases}$ и) $\begin{cases} x^4 + y^4 = 14x^2y^2, \\ x + y = a; \end{cases}$

б) $\begin{cases} \frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{5}{4}, \\ xy(x + y) = 20; \end{cases}$ е) $\begin{cases} x + y - \sqrt{xy} = 7, \\ x^2 + y^2 + xy = 133; \end{cases}$ к) $\begin{cases} x^2 + y^2 - x - y = a, \\ x^4 + y^4 + x + y - 2(x^3 + y^3) = b; \end{cases}$

в) $\begin{cases} \frac{x^2}{y^2} + \frac{y^2}{x^2} = 12, \\ \frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{1}{3}; \end{cases}$ ж) $\begin{cases} x^4 + y^4 = a^4, \\ x + y = b; \end{cases}$ л) $\begin{cases} \frac{x^5 + y^5}{x^3 + y^3} = \frac{31}{7}, \\ x^2 + xy + y^2 = 3; \end{cases}$

г) $\begin{cases} x^2 + y^2 = 7 + xy, \\ x^3 + y^3 = 6xy - 1; \end{cases}$ з) $\begin{cases} x^5 - y^5 = a^5, \\ x - y = b; \end{cases}$ м) $\begin{cases} x^3 + y^3 + xy(x + y) = 13, \\ x^2y^2(x^2 + y^2) = 468. \end{cases}$

5. Применение симметрических многочленов к решению иррациональных уравнений. Решение некоторых иррациональных уравнений можно свести к решению систем симметрических алгебраических уравнений. Рассмотрим иррациональное уравнение

$$\sqrt[4]{x} + \sqrt[4]{97 - x} = 5.$$

Здесь выгодно ввести два вспомогательных неизвестных, положив

$$\sqrt[4]{x} = u, \quad \sqrt[4]{97 - x} = v.$$

Тогда заданное уравнение примет вид: $u + v = 5$. Кроме того, имеем: $u^4 + v^4 = x + 97 - x = 97$. Таким образом, мы получили следующую систему уравнений относительно u и v :

$$\begin{cases} u + v = 5, \\ u^4 + v^4 = 97. \end{cases}$$

Введем новые неизвестные: $\sigma_1 = u + v$, $\sigma_2 = uv$. Так как $u^4 + v^4 = S_4 = \sigma_1^4 - 4\sigma_1\sigma_2 + 2\sigma_2^2$, то мы получим новую систему уравнений:

$$\begin{cases} \sigma_1 = 5, \\ \sigma_1^4 - 4\sigma_1\sigma_2 + 2\sigma_2^2 = 97. \end{cases}$$

Подставим во второе уравнение значение $\sigma_1 = 5$. Получим квадратное уравнение относительно σ_2 :

$$\sigma_2^2 - 50\sigma_2 + 264 = 0.$$

Решая его, находим $\sigma_2 = 6$ и $\sigma_2' = 44$. Таким образом, задача свелась к решению двух систем уравнений:

$$\begin{cases} u + v = 5, \\ uv = 6 \end{cases} \quad \text{или} \quad \begin{cases} u + v = 5, \\ uv = 44. \end{cases}$$

Первая из этих систем имеет два решения: $u_1 = 3$, $v_1 = 2$ и $u_2 = 2$, $v_2 = 3$. Так как $u = \sqrt[4]{x}$, то для первоначального уравнения находим два значения корней:

$$x_1 = 81, \quad x_2 = 16.$$

Вторая система не имеет действительных корней.

Итак, заданное уравнение имеет лишь два корня: $x_1 = 81$ и $x_2 = 16$.

У п р а ж н е н и е 35. Решите следующие иррациональные уравнения:

а) $\sqrt[5]{\frac{1}{2} + x} + \sqrt[5]{\frac{1}{2} - x} = 1;$

б) $x + \sqrt{17 - x^2} + x\sqrt{17 - x^2} = 9;$

в) $x\sqrt[3]{35 - x^3}(x + \sqrt[3]{35 - x^3}) = 30.$

§ 4. Неравенства с многими переменными

В параграфе 3 главы II мы рассмотрели задачи на доказательство и решение неравенств, содержащих одно неизвестное. В случае многих неизвестных задачи становятся значительно сложнее. Некоторые из них будут рассмотрены здесь. Неравенства, которые

будут установлены в этом параграфе, играют важную роль в самых различных вопросах математики. В частности, мы покажем ниже, как с помощью этих неравенств решать задачи на отыскание наибольших и наименьших значений.

1. Среднее арифметическое и среднее геометрическое двух чисел. Возьмем два числа 2 и 8. Среднее арифметическое этих чисел

равно $\frac{2+8}{2} = 5$, а среднее геометрическое $\sqrt{2 \cdot 8} = 4$. Мы ви-

дим, что для этих чисел среднее геометрическое меньше среднего арифметического. То же самое получится, если взять числа 1 и 9: их среднее арифметическое равно 5, а среднее геометрическое равно 3. Для чисел 1 и 2 среднее арифметическое равно 1,5, а среднее геометрическое равно $\sqrt{2} \approx 1,41$. Во всех разобранных примерах подмеченная нами закономерность имеет место. Это дает основание предположить, что вообще для любых двух неотрицательных чисел x и y их среднее геометрическое \sqrt{xy} не больше среднего арифметического $\frac{x+y}{2}$, то есть что

$$\sqrt{xy} \leq \frac{x+y}{2}. \quad (1)$$

Мы докажем сейчас это утверждение. Так как числа x и y по условию неотрицательны, то мы можем положить $x = a^2$, $y = b^2$, где $a \geq 0$, $b \geq 0$. Тогда неравенство (1) примет вид:

$$ab \leq \frac{a^2 + b^2}{2},$$

или, что то же самое, $a^2 + b^2 - 2ab \geq 0$. Но это неравенство очевидно, поскольку равносильно заведомо верному неравенству $(a - b)^2 \geq 0$.

Итак, неравенство (1) доказано. Отметим, что оно верно лишь при условии $x \geq 0$, $y \geq 0$: если числа x и y имеют различные знаки, то левая часть неравенства не имеет смысла; если же x и y отрицательны, то $\sqrt{xy} > 0$, $\frac{x+y}{2} < 0$, а потому неравенство (1) не имеет места.

Отметим еще, что $(a - b)^2 = 0$ тогда и только тогда, когда $a = b$. Отсюда сразу следует, что $\sqrt{xy} = \frac{x+y}{2}$ тогда и только тогда, когда $x = y$.

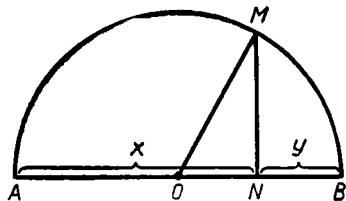


Рис. 22

Мы доказали неравенство (1) чисто алгебраически. Но его можно доказать и геометрически. Для этого отложим отрезки x и y и примем сумму этих отрезков за диаметр полуокружности (см. рис. 22). Тогда среднее геометрическое отрезков x и y равно отрезку MN , а их среднее арифметическое — радиусу окружности. Ясно, что MN не превосходит OM , причем $MN = OM$ тогда и только тогда, когда $x = y$.

У п р а ж н е н и я

36. Назовем средним гармоническим чисел x и y число $\frac{2xy}{x+y}$, а их сред-

ним квадратическим — число $\sqrt{\frac{x^2+y^2}{2}}$.

Доказать, что для любых неотрицательных чисел x и y имеем:

$$\frac{2xy}{x+y} < \sqrt{xy} < \frac{x+y}{2} < \sqrt{\frac{x^2+y^2}{2}}.$$

37. Пусть x и y — такие неотрицательные числа, что $x + y = 1$. Доказать, что

$$x^3 + y^3 > \frac{1}{2}; \quad x^4 + y^4 > \frac{1}{8}; \quad x^8 + y^8 > \frac{1}{128}.$$

2. Среднее арифметическое и среднее геометрическое трех чисел. Попробуем теперь обобщить выведенное в п. 1 неравенство. Для положительных чисел x_1, x_2, \dots, x_n их *средним арифметическим* называют

$$\frac{x_1 + x_2 + \dots + x_n}{n},$$

а *средним геометрическим* —

$$\sqrt[n]{x_1 x_2 \dots x_n}.$$

В п. 1 мы доказали, что при $n = 2$ выполняется неравенство

$$\sqrt[n]{x_1 x_2 \dots x_n} \leq \frac{x_1 + x_2 + \dots + x_n}{n}, \quad (1)$$

причем знак равенства имеет место тогда и только тогда, когда

$$x_1 = x_2 = \dots = x_n.$$

Это неравенство верно для всех натуральных значений n . Мы ограничимся доказательством этого неравенства при $n = 3$.

В математике часто, прежде чем доказывать гипотезу в общем виде, пытаются доказать какой-нибудь частный случай сделанного предположения. Если оказывается, что частный случай неверен, то тем более неверна и гипотеза в общем виде; если же удастся доказать гипотезу в частном случае, то возрастают шансы на то, что и в общем случае предположение верно.

Итак, попытаемся доказать, что при $x \geq 0$, $y \geq 0$, $z \geq 0$:

$$\sqrt[3]{xyz} \leq \frac{x+y+z}{3}. \quad (2)$$

Так как по условию $x \geq 0$, $y \geq 0$, $z \geq 0$, то мы можем положить $x = a^3$, $y = b^3$, $z = c^3$, где $a \geq 0$, $b \geq 0$, $c \geq 0$. Неравенство (2) принимает вид:

$$3abc \leq a^3 + b^3 + c^3 \quad (3)$$

или

$$a^3 + b^3 + c^3 - 3abc \geq 0. \quad (4)$$

Чтобы доказать неравенство (3), используем разложение на множители

$$a^3 + b^3 + c^3 - 3abc = (a+b+c)(a^2+b^2+c^2-ab-ac-bc). \quad (5)$$

(Формулу (5) можно проверить непосредственно, перемножив многочлены в правой части равенства.)

Так как по условию $a+b+c \geq 0$, то все свелось к доказательству неравенства

$$a^2 + b^2 + c^2 - ab - bc - ac \geq 0, \quad (6)$$

а оно справедливо, так как

$$\begin{aligned} & a^2 + b^2 + c^2 - ab - bc - ac = \\ &= \frac{1}{2}[(a-b)^2 + (a-c)^2 + (b-c)^2], \end{aligned}$$

тем самым соотношение (4), а с ним и (2) доказано. Это, как мы говорили, повышает шансы на то, что неравенство (1) справедливо при всех n .

Заметим, что $(a-b)^2 + (a-c)^2 + (b-c)^2 = 0$ тогда и только тогда, когда $a = b = c$. Поэтому в соотношении (2) знак равенства имеет место лишь при $x = y = z$.

3. Неравенство Коши (двумерный вариант). Выведем теперь новое неравенство. Для этого рассмотрим произведение $(a^2 + b^2) \times (c^2 + d^2)$ и раскроем в нем скобки. Мы получим многочлен $a^2c^2 + a^2d^2 + b^2c^2 + b^2d^2$, который совпадает с многочленом, получающимся после раскрытия скобок в выражении

$$(ac + bd)^2 + (ad - bc)^2.$$

Таким образом, справедливо тождество

$$(a^2 + b^2)(c^2 + d^2) = (ac + bd)^2 + (ad - bc)^2. \quad (1)$$

Так как $(ad - bc)^2 \geq 0$, то из этого тождества следует неравенство

$$(a^2 + b^2)(c^2 + d^2) \geq (ac + bd)^2, \quad (2)$$

справедливое для любых действительных чисел a, b, c, d . Это неравенство, а особенно его обобщения, имеет большое значение для многих вопросов математического анализа. Оно называется *неравенством Коши* или, точнее, двумерным случаем неравенства Коши.

Из соотношения (1) вытекает, что знак равенства имеет место в (2) тогда и только тогда, когда $ad = bc$. Мы будем называть в этом случае числа a, b, c, d пропорциональными. Это связано с тем, что если $b \neq 0, d \neq 0$, то соотношение $ad = bc$ можно записать так:

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d}.$$

Приведенный выше вывод неравенства (2) кажется на первый взгляд очень вычурным и искусственным. В отличие от неравенства $\sqrt{xy} \leq \frac{x+y}{2}$, основанного на простом и очевидном тождестве

$(a - b)^2 \geq 0$, неравенство (2) основано на далеко не очевидном с первого взгляда тождестве (1). Естественно поэтому желание найти другой подход к этому неравенству, при котором оно стало бы очевидным. Американские математики Э. Беккенбах и Р. Беллман пишут по этому поводу следующее (см. их книгу «Введение в неравенства». 1965): «Нерушимым принципом математики является то, что в ней нет случайных фактов и положений. Каждый результат, какое бы место он не занимал, находит свое истолкование, благодаря которому этот результат становится прозрачным, само собой разумеющимся. Это истолкование может не сразу броситься в глаза, и оно может быть найдено не сразу. Часто подлинный смысл математической теоремы проясняется только тогда, когда мы посмотрим на нее, так сказать, «сверху», то есть с точки зрения более общей теории. Однако истолкование, поясняющее смысл теоремы, имеется всегда — и это исключительно важно. Если бы дело обстояло не так, то математика выродилась бы в набор несвязных формальных трюков и схоластических выкрутасов».

Часто наиболее простое истолкование алгебраического результата имеет геометрический характер. Формулы, которые кажутся совершенно непонятными и сложными, становятся очевидными, когда раскрывается их геометрическое содержание.

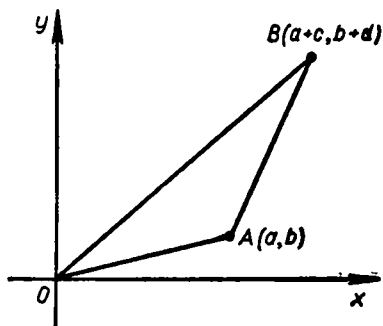


Рис. 23

Не составляет исключение и неравенство (2). Пусть числа a, b, c, d неотрицательны. Возьмем треугольник, изображенный на рис. 23. С помощью теоремы Пифагора легко подсчитать, что длины отрезков OA, AB и OB определяются равенствами

$$OA = \sqrt{a^2 + b^2}, \quad AB = \sqrt{c^2 + d^2}$$

и

$$OB = \sqrt{(a+c)^2 + (b+d)^2}.$$

Но длина стороны OB не превосходит суммы длин двух других сторон. Поэтому имеем $OB \leq OA + AB$. Подставляя в это неравенство выражения для длин отрезков OB, OA и AB , получаем, что

$$\sqrt{(a+c)^2 + (b+d)^2} \leq \sqrt{a^2 + b^2} + \sqrt{c^2 + d^2}. \quad (3)$$

Возведем обе части этого неравенства в квадрат. Так как обе части неравенства (3) положительны, то после этого получим равносильное неравенство:

$$(a+c)^2 + (b+d)^2 \leq a^2 + b^2 + c^2 + d^2 + 2\sqrt{(a^2 + b^2)(c^2 + d^2)}.$$

Раскроем скобки в левой части и приведем подобные члены. Мы получаем:

$$(ac + bd)^2 \leq \sqrt{(a^2 + b^2)(c^2 + d^2)}.$$

Еще раз возведя обе части неравенства в квадрат, приходим к неравенству Коши:

$$(ac + bd)^2 \leq (a^2 + b^2)(c^2 + d^2).$$

Тем самым неравенство Коши доказано при неотрицательных значениях a, b, c, d .

Чтобы доказать его для любых значений a, b, c, d , достаточно заметить, что $x^2 = |x|^2$, и потому

$$(ac + bd)^2 = |ac + bd|^2 \leq (|ac| + |bd|)^2 = (|a||c| + |b||d|)^2. \quad (4)$$

Но по доказанному

$$(|a||c| + |b||d|)^2 \leq (|a|^2 + |b|^2)(|c|^2 + |d|^2) = (a^2 + b^2)(c^2 + d^2). \quad (5)$$

Из неравенств (4) и (5) вытекает:

$$(ac + bd)^2 \leq (a^2 + b^2)(c^2 + d^2).$$

Итак, мы доказали, что неравенство Коши вытекает из элементарной теоремы геометрии: длина стороны треугольника не больше суммы длин двух других сторон. Нетрудно показать, что эти два утверждения эквивалентны друг другу — из неравенства Коши следует неравенство (3).

Неравенство (2) является частным случаем более общего неравенства

$$(x_1 y_1 + \dots + x_n y_n)^2 \leq (x_1^2 + \dots + x_n^2)(y_1^2 + \dots + y_n^2).$$

которое справедливо для любых действительных чисел x_1, \dots, x_n ; y_1, \dots, y_n . Это неравенство вытекает из тождества

$$(x_1^2 + \dots + x_n^2)(y_1^2 + \dots + y_n^2) = \\ = (x_1 y_1 + \dots + x_n y_n)^2 + (x_1 y_2 - x_2 y_1)^2 + \dots + \\ + (x_{n-1} y_n - x_n y_{n-1})^2.$$

У п р а ж н е н и е 38. Докажите неравенства:

а) $\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \dots + \frac{1}{2n} > \frac{1}{2};$

б) $\frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \dots + \frac{1}{n^2} < 1$ для всех n ;

в) $n! \geq n^{\frac{n}{2}};$

г) $1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{n}} > 2\sqrt{n+1} - 2;$

д) $|a| - |b| \leq |a+b| \leq |a| + |b|;$

е) $\frac{a^3+b^3}{2} \geq \frac{(a+b)^3}{8} \quad (a > 0, b > 0);$

ж) $\frac{a^4+b^4}{2} > \left(\frac{a+b}{2}\right)^4 \quad (a > 0, b > 0);$

з) $3(a^2+b^2+c^2) \geq (a+b+c)^2;$

и) $\frac{bc}{a} + \frac{ac}{b} + \frac{ab}{c} > a+b+c, \quad (a > 0, b > 0, c > 0);$

к) $\frac{1}{8} \frac{(a-b)^2}{a} < \frac{a+b}{2} - \sqrt{ab} < \frac{1}{8} \frac{(a-b)^2}{b} \quad (a > 0, b > 0);$

л) $\sqrt{(a+c)(b+d)} > \sqrt{ab} + \sqrt{cd} \quad (a > 0, b \geq 0, d \geq 0);$

м) $(a+b)(a+c)(b+c) \geq 8abc;$

н) $\frac{a}{b+c} + \frac{b}{a+c} + \frac{c}{a+b} \geq \frac{3}{2};$

о) $\sqrt[3]{(a+k)(b+l)(c+m)} \geq \sqrt[3]{abc} + \sqrt[3]{klm} \quad \begin{matrix} (a > 0, b > 0, c > 0, \\ k > 0, l > 0, m > 0); \end{matrix}$

п) $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \geq \frac{9}{a+b+c} \quad (a > 0, b > 0, c > 0);$

р) $\sqrt[n]{n} \leq \sqrt[n]{n!} \leq \frac{n+1}{2};$

с) $\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n < \left(1 + \frac{1}{n+1}\right)^{n+1} < 3;$

т) $2 < \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1} < \left(1 + \frac{1}{n-1}\right)^n < 4;$

у) $(x_1 + x_2 + \dots + x_n) \left(\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \dots + \frac{1}{x_n}\right) > n^2$

$(x_i > 0, i = 1, 2, \dots, n);$

$$\phi) \frac{1}{\frac{1}{a} + \frac{1}{b}} + \frac{1}{\frac{1}{c} + \frac{1}{d}} < \frac{1}{\frac{1}{a+b} + \frac{1}{c+d}};$$

$$x) (a^m + b^m)^{\frac{1}{m}} \leq (a^n + b^n)^{\frac{1}{n}} \quad (a > 0, b > 0, m > n > 0);$$

$$ц) (ab + bc + ac)^3 \geq 27a^2b^2c^2 \quad (a > 0, b > 0, c > 0);$$

$$ч) (a + b)^n \leq 2^{n-1} (a^n + b^n) \quad (a > 0, b > 0);$$

$$ш) a^4 + b^4 \geq a^3b + ab^3 \quad (a > 0, b > 0);$$

$$щ) \frac{a}{\sqrt{b}} + \frac{b}{\sqrt{a}} \geq \sqrt{a} + \sqrt{b} \quad (a > 0, b > 0);$$

$$э) x^5 + y^5 \geq x^4y + xy^4 \quad (x > 0, y > 0);$$

$$ю) ab(a+b) + ac(a+c) + bc(b+c) \geq 6abc \quad (a > 0, b > 0, c > 0);$$

$$я) a + b + c \geq \sqrt{ab} + \sqrt{bc} + \sqrt{ac} \quad (a > 0, b > 0, c > 0).$$

4. Задачи на наибольшие и наименьшие значения. Великий русский математик П. Л. Чебышев писал в одной из своих работ, что особенную важность имеют те методы науки, которые позволяют решать задачу, общую для всей практической деятельности человека: как располагать средствами своими для достижения по возможности большей выгоды. Так, рабочий-металлист старается из куска металла получить как можно больше деталей; раскройщик на обувной фабрике старается из куска кожи выкроить как можно больше заготовок; строитель хочет сделать из бревна балку наибольшей прочности и т. д.

Во многих случаях задачи такого характера допускают математическую формулировку. Их называют задачами на наибольшие и наименьшие значения. Общий метод решения таких задач дает математический анализ. Однако много таких задач решается с помощью неравенств.

Рассмотрим следующую задачу.

Имеется 200 м проволоки. Огородить ею прямоугольный участок земли наибольшей площади.

Обозначим стороны прямоугольника через x и y (см. рис. 24). Из условия задачи следует, что $2x + 2y = 200$, а потому $x + y = 100$. Площадь прямоугольника $s = xy$. Но из неравенства между средним геометрическим и средним арифметическим следует, что

$$xy \leq \left(\frac{x+y}{2} \right)^2 = \frac{100^2}{4} = 2500. \quad (1)$$

Значит, огородить участок, площадь которого была бы больше 2500 м^2 , невозможно. В то же время мы знаем, что квадратный участок земли с периметром 200 м имеет площадь 2500 м^2 . Задача решена: чтобы получить прямоугольный участок наибольшей площади, имеющий периметр 200 м , надо взять квадрат со стороной 50 м .

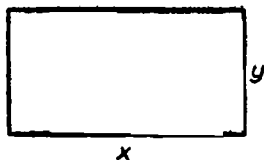


Рис. 24

Эту же задачу можно решить иначе. Из условия следует, что $y = 100 - x$, а потому $s = x(100 - x)$. Ясно, что сторона меняется в пределах $0 \leq x \leq 100$. Таким образом, нам надо найти наибольшее значение функции $s = x(100 - x)$ на отрезке $0 \leq x \leq 100$. Для этого преобразуем выражение следующим образом:

$$s = 100x - x^2 = 2500 - (50 - x)^2.$$

Ясно, что $(50 - x)^2$ неотрицательно при всех значениях x и равно нулю лишь при $x = 50$. Но если уменьшаемое постоянно, то разность имеет наибольшее значение, когда вычитаемое принимает наименьшее значение. Этим наименьшим значением вычитаемого является в данном случае нуль. Поэтому мы снова приходим к выводу, что площадь максимальна, если $x = 50$.

Рассмотрим теперь задачу, «двойственную» рассмотренной.

Требуется огородить проволокой прямоугольный участок земли площадью 2500 м^2 . Какую форму он должен иметь, чтобы количество проволоки, пошедшей на ограду, было наименьшим?

Здесь нам задана площадь $s = xy = 2500$. Снова применяя равенство между средними, получаем, что

$$2500 \leq \left(\frac{x+y}{2}\right)^2. \quad (2)$$

Так как $x + y > 0$, то из (2) получаем: $x + y \geq 100$. Так как на ограду надо $2x + 2y$ проволоки, количество необходимой проволоки не может быть меньше, чем 200 м . А именно 200 м надо на ограду квадратного участка земли.

В обеих задачах мы получили одно и то же решение — участок земли должен быть квадратным. Это не случайно. Многие задачи на наибольшие и наименьшие значения распадаются на «пары» двойственных задач. В одной из них надо найти наибольшее значение некоторой величины (в нашем случае — площади) при условии, что другая величина сохраняет постоянное значение (в нашем случае — периметр). А в двойственной задаче надо найти наименьшее значение второй величины при условии, что первая сохра-

няет постоянное значение. Эти две задачи имеют общее решение.

Метод, применяемый нами к решению рассмотренных задач, приводит к следующему общему результату.

Из всех прямоугольников с данным периметром наибольшую площадь имеет квадрат.

На самом деле условие, что четырехугольник является прямоугольником, здесь излишне — из всех четырехугольников с данным периметром квадрат имеет наибольшую площадь.

Мы не будем сейчас доказывать это утверждение для четырехугольников, а докажем аналогичную теорему для треугольников: *из всех треугольников, имеющих данный периметр $2p$, наибольшая площадь у правильного треугольника.*

Для доказательства воспользуемся формулой Герона, выражающей площадь треугольника S через стороны x, y, z :

$$S = \sqrt{p(p-x)(p-y)(p-z)}.$$

Ясно, что площадь принимает наибольшее значение одновременно с выражением $(p-x)(p-y)(p-z)$.

Применим к числам $p-x, p-y, p-z$ неравенство между средними. Так как $x+y+z=2p$, то

$$\frac{(p-x) + (p-y) + (p-z)}{3} = p - \frac{x+y+z}{3} = \frac{p}{3},$$

и мы получаем, что

$$(p-x)(p-y)(p-z) \leq \left[\frac{(p-x) + (p-y) + (p-z)}{3} \right]^3 = \frac{p^3}{27}.$$

Это неравенство показывает, что площадь S треугольника с периметром $2p$ не превосходит $\frac{p^2 \sqrt{3}}{9}$:

$$S = \sqrt{p(p-x)(p-y)(p-z)} \leq \sqrt{\frac{p^4}{27}} \leq \frac{p^2 \sqrt{3}}{9}. \quad (3)$$

При этом знак равенства в соотношении (3) достигается, если $p-x = p-y = p-z$, то есть если треугольник равносторонний.

Можно доказать, что вообще из всех n -угольников с данным периметром наибольшую площадь имеет правильный многоугольник. А из всех фигур с данным периметром наибольшую площадь имеет круг. Но доказательство этого утверждения требует привлечения неэлементарных методов.

В некоторых случаях приходится прибегать к преобразованию изучаемого выражения — с таким примером мы столкнулись выше, когда заменили $s = 100x - x^2$ на $s = 2500 - (50-x)^2$. Чаше всего применяют следующие преобразования:

а) отбрасывание постоянных слагаемых (ясно, что они не влияют на наибольшие и наименьшие значения функции);

б) отбрасывание постоянных сомножителей (при этом если сомножитель отрицателен, то при его отбрасывании наибольшие значения становятся наименьшими и наоборот);

в) замена изучаемого выражения его квадратом. Если выражение неотрицательно, то оно принимает наибольшие и наименьшие значения одновременно со своим квадратом;

г) замена выражения A на $\frac{1}{A}$ (при этом наибольшие значения переходят в наименьшие и обратно).

Приведем примеры, когда такие преобразования упрощают решение задачи.

Инженерные расчеты показывают, что прочность балки с прямоугольным сечением пропорциональна ширине балки a и квадрату ее высоты h . Иными словами, прочность такой балки (измеренная в некоторых единицах) равна kah^2 , где k — коэффициент, зависящий от длины балки, материала, из которого она сделана, и т. д.

Деревянные балки обычно вытесывают из круглых бревен.

Задача. Как сделать из бревна, имеющего радиус R , балку наибольшей прочности?

Решение. Обозначим высоту вырезанной балки через x .

Тогда из рис. 25 ясно, что ее ширина равна $\sqrt{4R^2 - x^2}$, а, значит, прочность балки выражается формулой:

$$y = kx^2 \sqrt{4R^2 - x^2}. \quad (4)$$

Здесь непосредственно неравенство между средними неприменимо. Однако если разделить выражение (4) на k и возвести результат в квадрат, то получим:

$$\left(\frac{y}{k}\right)^2 = x^4 (4R^2 - x^2),$$

или

$$2 \left(\frac{y}{k}\right)^3 = x^2 x^2 (8R^2 - 2x^2).$$

А теперь мы представили $2 \left(\frac{y}{k}\right)^3$ в виде произведения трех множителей, сумма которых постоянна:

$$x^2 + x^2 + 8R^2 - 2x^2 = 8R^2.$$

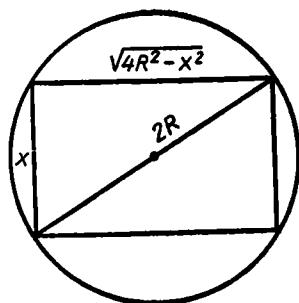


Рис. 25

Следовательно, в силу неравенства между средними имеем:

$$2 \left(\frac{y}{k} \right)^2 \leq \left[\frac{x^2 + x^2 + 8R^2 - 2x^2}{3} \right]^3 = \frac{512R^6}{27}.$$

Знак равенства достигается здесь, если все три сомножителя равны друг другу. А это будет, если $x^2 = 8R^2 - 2x^2$, то есть если $x = \frac{2R\sqrt{6}}{3}$.

При $x = \frac{2R\sqrt{6}}{3}$ ширина балки равна:

$$a = \sqrt{4R^2 - x^2} = \frac{2R\sqrt{3}}{3}.$$

Отношение $\frac{x}{a}$ равно $\sqrt{2} \approx 1,4$. Именно такое отношение высоты

балки к ее ширине и предписывается правилами производства строительных работ.

У п р а ж н е н и я

39. В круг радиуса R вписать прямоугольник наибольшей площади.

40. Дан квадратный кусок картона со стороной a . По углам из него вырезают квадратики со стороной x и из оставшейся фигуры делают открытую коробку. Какого размера должны быть вырезанные квадратики, чтобы получилась коробка наибольшего объема (см. рис. 26)?

41. Требуется огородить участок земли, примыкающий одной стороной к морю, с помощью 200 м проволоки. Какую форму должен иметь участок, чтобы площадь его была наибольшей?

42. При каких размерах прямоугольная коробка с полной поверхностью S имеет наибольший объем? (У к а з а н и е: использовать неравенство ц) из упр. 38.)

43. Из проволоки длиной 24 см надо сделать модель прямоугольного параллелепипеда. При каких размерах сторон объем параллелепипеда будет наибольшим?

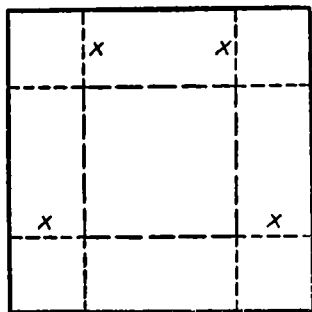


Рис. 26

44. Найти прямоугольник наибольшей площади, если длина его диагонали равна l .

45. Заданы периметр $2p$ треугольника и длина a одной из его сторон. Какие длины должны иметь две другие стороны, чтобы площадь треугольника была наибольшей?

46. При истечении воды через отверстие в толстой стене (рис. 27) секундный расход воды определяется по формуле:

$$Q = cy \sqrt{h-y},$$

где y — диаметр отверстия, h — глубина его нижней точки, c — некоторая постоянная. При каком y получается наибольшее значение для Q ?

47. Стоимость плавания корабля в течение часа определяется формулой вида $a +$

$+bv^3$, где a и b — постоянные, а v — скорость корабля (первое слагаемое связано с расходами на амортизацию и содержание команды, а второе — с расходами на топливо). При какой скорости судно пройдет расстояние l с наименьшими затратами?

§ 5. Решение неравенств

1. Общие замечания. Перейдем теперь к решению неравенств. Пусть дано неравенство

$$F(x, y, \dots, z) > 0. \quad (1)$$

Решением этого неравенства называется любой набор чисел a, b, \dots, c такой, что $F(a, b, \dots, c) > 0$. Обычно ставится вопрос об отыскании всех решений данного неравенства, то есть о нахождении множества всех значений $x=a, y=b, \dots, z=c$, при которых неравенство выполняется. Это множество называют *множеством решений* неравенства.

Если неравенство содержит два неизвестных, то есть имеет вид $F(x, y) > 0$, то множеством его решений является некоторое множество числовых пар (a, b) . Каждая такая пара изображается точкой плоскости. Поэтому множество решений неравенства с двумя неизвестными геометрически изображается множеством точек плоскости.

Мы будем рассматривать также системы и совокупности неравенств. Пусть задано несколько неравенств (мы пишем неравенства с двумя неизвестными, но, вообще говоря, их число может быть любым):

$$\begin{cases} F_1(x, y) > 0, \\ \dots \dots \dots \\ F_n(x, y) > 0. \end{cases} \quad (2)$$

Говорят, что они образуют *систему неравенств*, если требуется найти значения $x=a, y=b$, при которых выполняются все неравенства (2), то есть такие a и b , что $F_1(a, b) > 0, \dots, F_n(a, b) > 0$.

Пусть A_1 — множество решений неравенства $F_1(x, y) > 0$, A_2 — множество решений неравенства $F_2(x, y) > 0, \dots, A_n$ — множество решений неравенства $F_n(a, b) > 0$. Очевидно, что множеством решений системы (2) является множество B — пересечение указанных множеств:

$$B = A_1 A_2 \dots A_n.$$

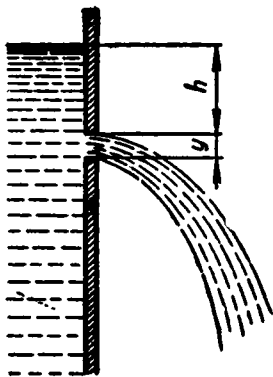


Рис. 27

Наряду с системами неравенств мы будем рассматривать их совокупности. Говорят, что неравенства

$$\begin{cases} F_1(x, y) > 0 \\ \vdots \\ F_n(x, y) > 0 \end{cases} \quad (3)$$

образуют *совокупность*, если требуется найти значения, удовлетворяющие хотя бы одно из этих неравенств.

Ясно, что множество C всех решений совокупности (3) является суммой множеств решений каждого неравенства:

$$C = A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n.$$

2. Неравенства с двумя переменными. Рассмотрим теперь неравенства с двумя переменными. Все такие неравенства равносильны неравенствам вида

$$F(x, y) > 0.$$

Например, неравенство

$$3x^2 - y < 7x + 2xy + 1$$

равносильно неравенству

$$7x + 2x + 1 - 3x^2 + y > 0.$$

Чаше всего встречается случай, когда уравнение $F(x, y) = 0$ задает линию, разбивающую плоскость на две или несколько частей. В одних из этих частей выполняется неравенство $F(x, y) < 0$, а в других — неравенство $F(x, y) > 0$. Иными словами, линия $F(x, y) = 0$ отделяет часть плоскости, где $F(x, y) > 0$, от части плоскости, где

$$F(x, y) < 0.$$

Рассмотрим, например, неравенство

$$3x + y + 6 > 0.$$

Уравнение $3x + y + 6 = 0$ задает прямую линию (см. рис. 28). Эта прямая разбивает всю плоскость на

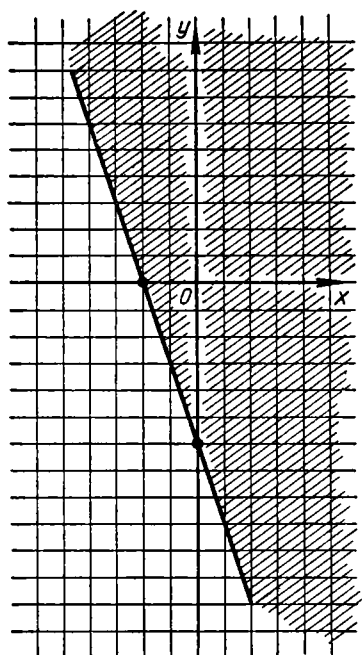


Рис. 28

две полуплоскости. Ясно, что при уменьшении y величина $3x + y + 6$ уменьшается. Поэтому ниже прямой $3x + y + 6 = 0$ располагаются точки, в которых $3x + y + 6 < 0$, а выше этой прямой — точки, где $3x + y + 6 > 0$.

Совершенно так же решается общее линейное неравенство

$$Ax + By + C > 0. \quad (1)$$

Прямая $Ax + By + C = 0$ разбивает плоскость на две полуплоскости. Если $B > 0$, то при увеличении y величина $Ax + By + C$ увеличивается, а при уменьшении y — уменьшается. Поэтому при $B > 0$ выше прямой $Ax + By + C = 0$ лежат точки, где $Ax + By + C > 0$, а ниже этой прямой — точки, где $Ax + By + C < 0$. В случае $B < 0$ роли полуплоскостей меняются.

На практике для выяснения того, в какой полуплоскости мы имеем $Ax + By + C < 0$, а в какой $Ax + By + C > 0$, применяют *метод контрольных точек*. Для этого берут контрольную точку (разумеется, не лежащую на прямой $Ax + By + C = 0$) и проверяют, какой знак имеет в этой точке выражение $Ax + By + C$. Тот же знак имеет указанное выражение и во всей полуплоскости, где лежит контрольная точка. Во второй полуплоскости $Ax + By + C$ имеет противоположный знак.

Точно так же решаются и нелинейные неравенства с двумя неизвестными. Например, решим неравенство:

$$x^2 - 4x + y^2 + 6y - 12 > 0. \quad (2)$$

Уравнение

$$x^2 - 4x + y^2 + 6y - 12 = 0$$

можно записать в виде

$$(x - 2)^2 + (y + 3)^2 = 25. \quad (3)$$

Это уравнение окружности с центром в точке $A(2, -3)$ и радиусом 5 (рис. 29). Окружность (3) разбивает плоскость на две части — внутреннюю и внешнюю области. Чтобы узнать, в какой из них имеет место неравенство (2), возьмем контрольную точку во внутренней области. В качестве такой точки удобно взять центр $A(2, -3)$ нашей

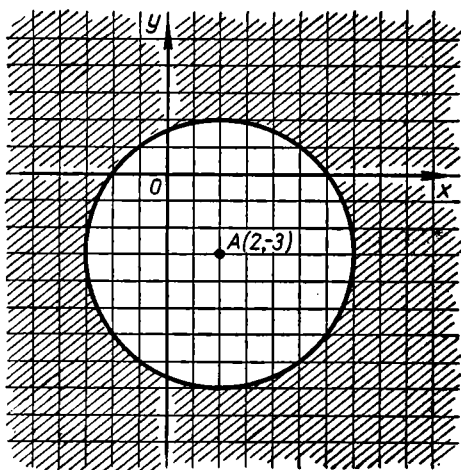


Рис. 29.

окружности. Подставляя координаты точки $A(2, -3)$ в левую часть неравенства (2), получаем отрицательное число -25 . Значит, и во всех точках, лежащих внутри окружности, выполняется неравенство

$$x^2 - 4x + y^2 + 6y - 12 < 0.$$

Отсюда вытекает, что неравенство (2) имеет место во внешней для окружности области (3).

3. Задание областей неравенствами и системами неравенств. Разобранные примеры показывают, что области на плоскости можно задавать неравенствами. Иногда вместо одного неравенства приходится брать системы или совокупности неравенств.

Рассмотрим некоторые примеры.

Пусть задана система неравенств:

$$\begin{cases} x + y + 1 \geq 0, \\ x^2 + y^2 \leq 25. \end{cases} \quad (1)$$

Мы уже знаем, что неравенство $x + y + 1 \geq 0$ задает полуплоскость, лежащую над прямой $x + y + 1 = 0$ ¹. Неравенство же

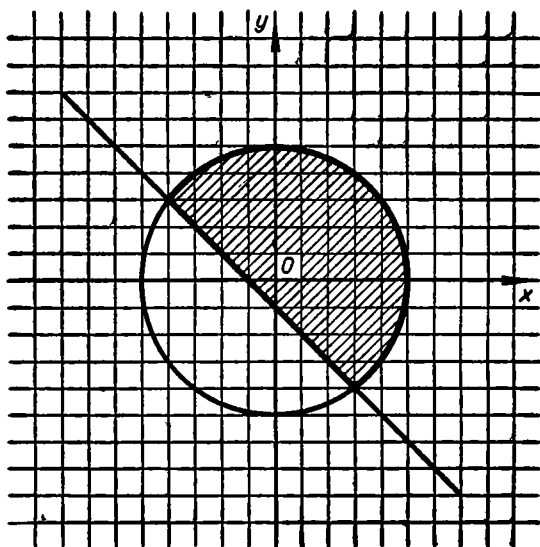


Рис. 30

¹ Сама прямая включается в полуплоскость.

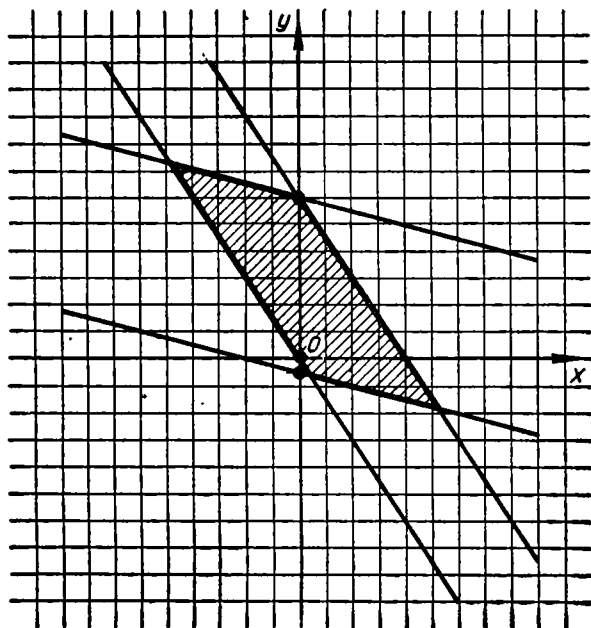


Рис. 31

$x^2 + y^2 \leq 25$ задает область, ограниченную окружностью $x^2 + y^2 = 25$. Множеством решений системы неравенств (1) является пересечение этих двух областей, изображенное на рис. 30, то есть круговой сегмент.

Далее, рассмотрим систему неравенств:

$$\begin{cases} 2x + y \geq 0, \\ 2x + y \leq 4, \\ x + 4y \geq -1, \\ x + 4y \leq 3. \end{cases} \quad (2)$$

Множеством решений этой системы является параллелограмм, изображенный на рис. 31.

Во многих случаях удобнее всего задавать области системой неравенств вида:

$$\begin{cases} a \leq x \leq b, \\ \varphi(x) \leq y \leq f(x). \end{cases} \quad (3)$$

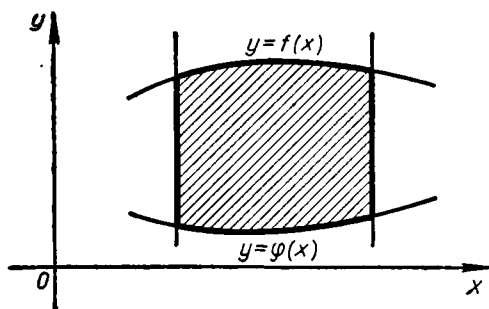


Рис. 32

Эта система указывает границы изменения x , а для каждого x , лежащего между a и b , — границы изменения y (см. рис. 32). Иногда приходится предварительно разбивать область на части и каждую часть задавать системой вида (3) или, что то же самое, задавать область совокупностью систем (3).

Пример. Пусть об-

ласть D задана системой неравенств:

$$\begin{cases} y + 4x + 18 \geq 2y + 2x + 9, \\ y + 6x \geq 2x^2 + 4x - 7. \end{cases}$$

Эту систему неравенств можно переписать в виде:

$$\begin{cases} y \leq 2x + 9, \\ y \geq 2x^2 - 2x - 7. \end{cases}$$

Множеством ее решений является область, изображенная на рис. 33 и ограниченная прямой $y = 2x + 9$ и параболой $y = 2x^2 - 2x - 7$. Найдем точки пересечения прямой и параболы. Для этого надо решить систему уравнений:

$$\begin{cases} y = 2x + 9, \\ y = 2x^2 - 2x - 7. \end{cases}$$

Система приводит к уравнению $2x + 9 = 2x^2 - 2x - 7$, корнями которого являются $x_1 = -2$, $x_2 = 4$. Поэтому точки пересечения прямой и параболы имеют координаты:

$$A_1(-2, 5); A_2(4, 17).$$

Отсюда следует, что рассматриваемая область задается неравенствами:

$$\begin{cases} -2 \leq x \leq 4, \\ 2x^2 - 2x - 7 \leq y \leq 2x + 9. \end{cases}$$

Задача. Расстояние между двумя небесными телами A и B^1 равно a , а масса первого m_1 больше массы второго m_2 в $k > 1$ раз.

¹ Принимаемых за материальные точки.

Найти область, в которой сила притяжения ко второму телу больше, чем к первому.

Решение. Проведем плоскость через прямую AB и выберем на этой плоскости систему координат следующим образом. В качестве начала координат выберем точку A , а ось абсцисс проведем через точку B . Координаты точки B имеют вид $B(a, 0)$. Выберем любую точку плоскости $M(x, y)$. Расстояние этой точки до A равно

$$r_1 = \sqrt{x^2 + y^2},$$

а до B равно

$$r_2 = \sqrt{(x - a)^2 + y^2}.$$

По закону всемирного тяготения сила притяжения между телами с массами m_1 и m_2 равна $\frac{\gamma m_1 m_2}{r^2}$, где γ — гравитационная постоянная, а r — расстояние между этими телами. Поэтому если в точке N находится тело с массой m , то оно притягивается к первому небесному телу с силой

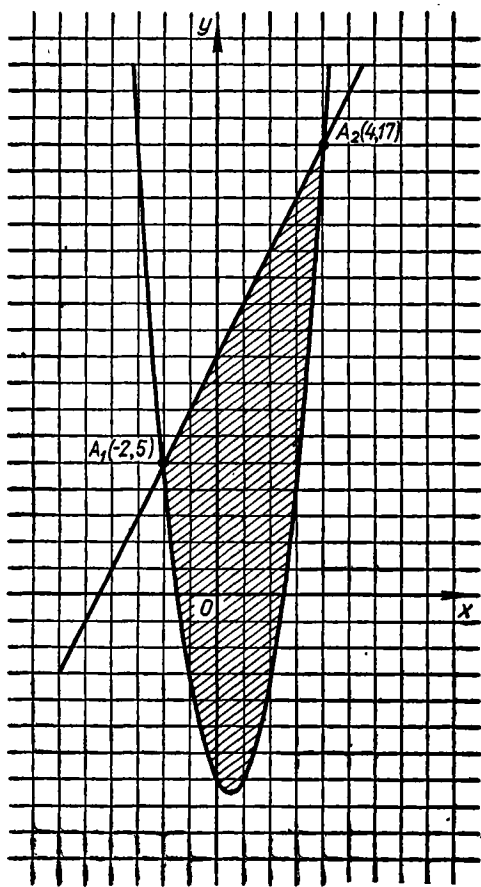


Рис. 33

$$F_1 = \frac{\gamma m_1 m}{r_1^2},$$

а ко второму — с силой

$$F_2 = \frac{\gamma m_2 m}{r_2^2}.$$

По условию задачи нам надо найти точки, в которых выполняется неравенство $F_2 > F_1$, то есть

$$\frac{\gamma m_2 m}{(x-a)^2 + y^2} > \frac{\gamma m_1 m}{x^2 + y^2}.$$

Учитывая, что по условию $\frac{m_1}{m_2} = k$, получаем равносильное неравенство

$$x^2 + y^2 > k [(x-a)^2 + y^2]. \quad (*)$$

Раскрывая скобки и преобразуя полученное выражение, получаем:

$$(k-1)x^2 - 2akx + ka^2 + (k-1)y^2 < 0$$

или

$$x^2 - \frac{2ak}{k-1}x + y^2 + \frac{ka^2}{k-1} < 0.$$

Выделяя полный квадрат, перепишем это неравенство в виде

$$\left(x - \frac{ak}{k-1}\right)^2 + y^2 < \frac{ka^2}{(k-1)^2}.$$

Уравнение

$$\left(x - \frac{ak}{k-1}\right)^2 + y^2 = \frac{ka^2}{(k-1)^2}$$

является уравнением окружности с центром в точке $\left(\frac{ak}{k-1}, 0\right)$

и радиусом $R = \frac{a\sqrt{k}}{k-1}$. Внутри этой окружности притяжение ко второму телу больше, чем к первому. Чтобы получить область в пространстве, внутри которой притяжение ко второму телу больше, чем к первому, надо повернуть эту окружность вокруг прямой AB . Мы получим сферу, ограничивающую область с искомым свойством.

В решенном примере мы получили неравенство (*), определяющее искомую область на плоскости.

У п р а ж н е н и я

48. Вычертить области, заданные системами неравенств:

а) $-6 \leq x \leq 2, \quad \frac{x^2}{4} - 1 \leq y \leq 2 - x;$

б) $1 \leq x \leq 3, \quad x^2 \leq y \leq x + 9;$

в) $0 \leq y \leq 4, \quad y \leq x \leq 10 - y;$

г) $0 \leq x \leq 3, \quad 0 \leq y \leq \sqrt{25 - x^2}.$

49. Задать неравенствами треугольник с вершинами

$$O(0, 0); A(1, 0); B(1, 1).$$

50. Задать неравенствами трапецию с вершинами

$$O(0, 0); A(2, 0); B(1, 1); C(0, 1).$$

51. Задать неравенствами параллелограмм с вершинами

$$A(1, 2); B(2, 4); C(2, 7); D(1, 5).$$

52. Задать неравенствами круговой сектор OAB с центром в точке $O(0, 0)$, у которого концы дуги $A(1, 1)$ и $B(-1, 1)$.

53. Задать неравенствами параболический сегмент AOB , $O(0, 0)$, ограниченный дугой параболы AOB и отрезком прямой AB , соединяющим точки $A(-1, 2)$ и $B(1, 2)$.

54. Область D задана системой неравенств. Задать ее системой неравенств вида (3) (стр. 187):

$$\text{а) } x \geq 0, y \geq 0, x + 5 \geq y; \quad \text{г) } y > x, x > 1, y < -1;$$

$$\text{б) } x^2 + y^2 \leq a^2; \quad \text{д) } \begin{cases} y < x < y + 4, \\ 0 < y < 2. \end{cases}$$

$$\text{в) } x^2 + y^2 < x;$$

55. Область D задана системой неравенств вида:

$$a < x < b; \quad \varphi(x) \leq y \leq f(x).$$

Задать ее системой неравенств вида:

$$c < y < d; \quad \varphi_1(y) < x < f_1(x).$$

$$\text{а) } 0 < x < 4, \quad 3x^2 < y < 12x; \quad \text{в) } 0 < x < 1, \quad -\sqrt{1-x^2} \leq y < 1-x;$$

$$\text{б) } 0 < x < 1, \quad 2x < y < 3x; \quad \text{г) } 0 \leq x < 1, \quad \frac{x^2}{2} \leq y < \sqrt{3-x^2}.$$

4*. Понятие о линейном программировании. Решение систем неравенств находит многочисленные практические приложения. Наиболее важные из них связаны с задачами экономики и планирования. Чаще всего эти задачи формулируются так: найти наилучший план производства при заданных ресурсах. Задание ресурсов имеет обычно вид неравенств. Поэтому приходится искать наибольшее или наименьшее значение, принимаемое некоторой функцией в области, заданной системой неравенств.

Приведем пример такой задачи:

Имеются два пункта производства A и B некоторого вида продукции и три пункта I , II , III его потребления. В пункте A производится 250 единиц продукции, а в пункте B — 350 единиц. В пункте I

требуется 150 единиц, в пункте II — 240 единиц и в пункте III — 210 единиц. Стоимость перевозки одной единицы продукции из пункта производства в пункт потребления дается следующей таблицей.

Таблица 1

	I	II	III
A	4	3	5
B	5	6	4

Требуется оставить план перевозки продукции, при котором сумма расходов на перевозку будет наименьшей.

Обозначим количество продукции, перевозимой из пункта A в пункт I, через x , а из пункта A в пункт II — через y . Так как полная потребность в пункте I равна 150 единиц, то из пункта B надо еще завезти $(150 - x)$ единиц. Точно так же из пункта B в пункт II надо завезти $(240 - y)$ единиц. Далее, производительность пункта A равна 250 единиц, а мы уже распределили $(x + y)$ единиц. Значит, в пункт III идет из пункта A $(250 - x - y)$ единиц. Чтобы полностью обеспечить потребность пункта III, осталось завезти $210 - (250 - x - y) = x + y - 40$ единиц из пункта B.

Итак, план перевозок задается следующей таблицей.

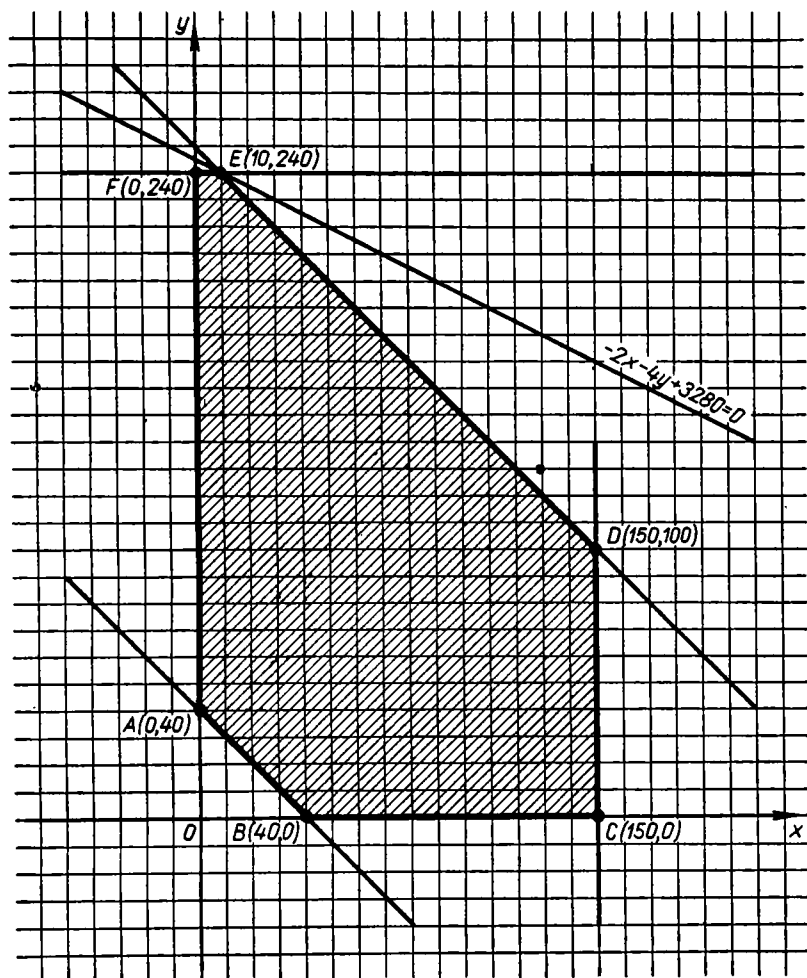
Таблица 2

I	II	III
x	y	$250 - x - y$
150	240	$x + y - 40$

Чтобы найти полную стоимость перевозки, надо умножить каждое число этой единицы на соответствующее число таблицы 1 (там указана стоимость перевозки одной единицы продукции) и сложить полученные произведения. Мы получим выражение:

$$S(x, y) = 4x + 3y + 5(250 - x - y) + 5 \cdot (150 - x) + 6(240 - y) + 4(x + y - 40) = -2x - 4y + 3280. \quad (1)$$

По условию задачи требуется найти минимум этого выражения. Но величины x и y не могут принимать произвольных значений.



Ведь количество перевозимой продукции не может быть отрицательным числом. Поэтому все числа таблицы II неотрицательны:

$$\begin{aligned} x \geq 0, \quad y \geq 0, \quad 250 - x - y \geq 0, \\ 150 - x \geq 0, \quad 240 - y \geq 0, \quad x + y - 40 \geq 0. \end{aligned} \quad (2)$$

Итак, нам надо найти минимум функции $S(x, y)$ в области, задаваемой системой неравенств (2). Эта область изображена на рис. 34—она является многоугольником, ограниченным прямыми

$$x = 0, y = 0, 250 - x - y = 0, 150 - x = 0, 240 - y = 0, \\ x + y - 40 = 0.$$

Решая совместно уравнение этих прямых, находим координаты вершин многоугольника:

$$A(0, 40); B(40, 0); C(150, 0); D(150, 100); E(10, 240); \\ F(0, 240).$$

Функция $S(x, y)$ принимает наименьшее значение в одной из вершин многоугольника $ABCDEF$.

В самом деле, выясним, где располагаются точки, в которых значения этой функции одинаковы (так называемые линии уровня функции $S(x, y) = -2x - 4y + 3280$). Если значение функции $S(x, y)$ равно c , то $-2x - 4y + 3280 = c$. Но это уравнение прямой линии. Значит, для функции линиями уровня являются прямые линии $-2x - 4y + 3280 = c$. Все эти прямые параллельны друг другу.

Если линия уровня пересекает многоугольник, то соответствующее значение c не является ни наименьшим, ни наибольшим. Ведь немного изменив c , мы получим прямую, которая также пересекает многоугольник. Если же линия уровня проходит через одну из вершин многоугольника, причем весь многоугольник остается на одну сторону от этой линии, то соответствующее значение c является наименьшим или наибольшим. Когда c меняется в одну сторону, то получается линия, пересекающая многоугольник, а когда меняется в противоположную сторону, получается линия, не имеющая с многоугольником общих точек.

Итак, функция $S(x, y) = -2x - 4y + 3280$ принимает наименьшее значение на многоугольнике в одной из его вершин. Поскольку мы уже знаем эти вершины, то подставим соответствующие значения координат и найдем, что

$$S(0, 40) = 3120; \quad S(40, 0) = 3200; \quad S(150, 0) = 2980; \\ S(150, 100) = 2580; \quad S(10, 240) = 2300; \quad S(0, 240) = 2320.$$

Наименьшим из этих значений является 2300. Это значение функция принимает в точке $E(10, 240)$. Значит, $x = 10, y = 240$. Подставляя эти значения в план перевозок (см. таблицу II), получаем:

	I	II	III
A	10	240	0
B	140	0	210

Таким образом, из пункта А в пункт I надо перевезти 10 единиц продукции, из пункта А в пункт II — 240 единиц и т. д. Стоимость намеченного плана равна 2300.

Рассмотренная задача относится к большому классу задач, возникающих не только в экономике, но и в других областях человеческой деятельности. В этих задачах требуется найти наибольшее или наименьшее значение некоторой линейной функции от переменных x_1, x_2, \dots, x_n :

$$S(x_1, x_2, \dots, x_n) = b_1x_1 + b_2x_2 + \dots + b_nx_n.$$

При этом область изменения переменных задается системой линейных неравенств

$$\sum_{i=1}^n a_{ij}x_i \leq c_j, \quad 1 \leq j \leq m,$$

и линейных уравнений

$$\sum_{i=1}^n \alpha_{ik}x_i = \gamma_k, \quad 1 \leq k \leq s.$$

Задачи такого типа называются задачами *линейного программирования*.

У п р а ж н е н и я

56. На животноводческой ферме производится откорм скота. Пусть известно, что каждому животному надо ежедневно выдать не менее 6 единиц вещества А, 8 единиц вещества В и 12 единиц вещества С (например, жиры, белки, углеводы). Для откорма животных можно закупить два вида кормов (например, жмых и комбикорм). Единица веса первого корма содержит 21 единицу вещества А, 2 единицы вещества В и 4 единицы вещества С, а стоимость ее равна 3 рублям. Для второго корма соответствующие числа равны 3; 2 и 2 рублям. Требуется составить рацион, при котором была бы обеспечена суточная потребность в веществах А, В, С, причем стоимость его была бы наименьшей.

57. Предприятие для производства двух видов продукции должно использовать три вида сырья, имеющихся на этом предприятии в следующих количествах: 17 единиц вида А, 9 единиц вида В и 8 единиц вида С. На производство одной единицы первого вида продукции надо израсходовать (2, 0, 2) единицы указанных видов сырья, а для второго вида продукции эти показатели равны (2, 3, 0) (ноль означает, что данное сырье не требуется для данного вида продукции). Прибыль, получаемая предприятием от реализации единицы первого вида продукции, равна 3 условным единицам, а от реализации единицы второго вида продукции равна 4 таким же единицам. Требуется спланировать работу предприятия так, чтобы обеспечить наибольшую прибыль.

5. Краткие исторические сведения. Общий метод исключения одного неизвестного из двух уравнений с двумя неизвестными разработал французский математик П. Ферма (1601—1665), известный своими работами по

КОМПЛЕКСНЫЕ ЧИСЛА

§ 1. Комплексные числа в алгебраической форме

1. Развитие понятия о числе. При изучении математики мы неоднократно встречались с обобщением понятия числа. Первоначально под числами понимали лишь натуральные числа $1, 2, \dots, n, \dots$. Этих чисел достаточно для счета отдельных предметов. Кроме того, как мы знаем, множество N натуральных чисел замкнуто относительно операций сложения и умножения — сумма и произведение натуральных чисел снова являются натуральными числами.

Однако разность двух натуральных чисел уже не всегда натуральное число. Чтобы сделать операцию вычитания неограниченно выполнимой, вводят числа нового вида — отрицательные целые числа, а кроме того, число нуль. В результате получается множество Z целых чисел. Это множество замкнуто относительно операций сложения, вычитания и умножения, то есть является *числовым кольцом* (см. п. 6 § I гл. I).

Следующий шаг в расширении множества чисел связан с желанием сделать выполнимой операцию деления на любое число, отличное от нуля. Этот шаг приводит к множеству R всех рациональных чисел. Множество R замкнуто уже относительно всех четырех арифметических операций — сложения, вычитания, умножения и деления (исключая, конечно, операцию деления на нуль). Оно является, таким образом, *числовым полем*.

Необходимость дальнейшего расширения множества чисел диктовалась двумя причинами. Одна связана с практическими приложениями математики — рациональных чисел недостаточно, чтобы выразить результаты любых измерений. Вторая причина является чисто алгебраической — в множестве рациональных чисел не имеют решений такие уравнения, как $x^2 - 2 = 0$, хотя коэффициенты этих уравнений — целые числа. И если введение действительных чисел позволяет выражать результаты любых измерений, то с задачей решения уравнений дело обстоит иначе. Уравнения $x^2 + 1 = 0$ и $x^2 + 4x + 5 = 0$ и в множестве действительных чисел не имеют

решения. Поэтому возникает необходимость в дальнейшем расширении понятия числа. Этому расширению, приводящему к понятию комплексного числа, и посвящена данная глава.

Выясним сначала, какие общие требования предъявляются при расширении понятия о числе. Предположим, что мы уже имеем некоторое множество чисел A , в котором определены те или иные арифметические операции (например, множество целых чисел с операциями сложения, вычитания и умножения). Для того чтобы получить более широкое числовое множество, мы берем некоторое новое множество B . Вообще говоря, оно может не содержать множество A . Но во всяком случае должно быть установлено взаимно-однозначное соответствие между элементами множества A и некоторой частью A' множества B . После установления этого соответствия мы отождествляем элементы из A с соответствующими им элементами из A' и можем рассматривать A как часть B .

Чтобы иметь право называть элементы множества B числами, надо определить в нем арифметические операции. Это определение не может быть произвольным — ведь некоторые элементы множества B соответствуют элементам исходного множества A , для которых арифметические операции уже определены. Ясно, что новое определение не должно противоречить исходному.

Уточним это требование. Пусть, например, в множестве A определена операция сложения и пусть соответствие между множеством A и частью A' множества B имеет вид $a \longleftrightarrow a'$. Тогда должно иметь место равенство:

$$(a + b)' = a' + b'.$$

Это равенство означает, что безразлично — сначала ли мы складываем a и b , а потом берем элемент из B , соответствующий сумме, или сначала берем элементы из B , соответствующие a и b , а потом складываем их.

Чтобы сделать эти, несколько абстрактные рассуждения более понятными читателю, напомним, как определяются рациональные числа, исходя из множества целых чисел (см. «Анализ», § 1 гл. I). Мы сначала вводим выражения

$\frac{m}{n}$, где m и n — целые числа, и объединяем в один класс такие выражения $\frac{m}{n}$ и $\frac{p}{q}$, что $mq = pn$. После этого класс, содержащий выражение $\frac{n}{1}$, отождествляется с целым числом n . Арифметические операции теперь вводятся по формулам

$$\frac{m}{n} + \frac{p}{q} = \frac{mq + pn}{nq}; \quad \frac{m}{n} \cdot \frac{p}{q} = \frac{mp}{nq}$$

и т. д. При этом из равенств

$$\frac{m}{1} + \frac{p}{1} = \frac{m+p}{1}, \quad \frac{m}{1} \cdot \frac{n}{1} = \frac{mn}{1}$$

видно, что эти определения не противоречат ранее введенным для целых чисел.

2. Комплексные числа. Мы уже говорили, что понятие комплексного числа вводится из-за того, что некоторые уравнения с действительными коэффициентами не имеют решений в области действительных чисел. Поэтому мы хотим расширить числовую область так, чтобы в расширенной области такие уравнения, как $x^2 + 1 = 0$ или $x^2 + 4x + 5 = 0$, имели решения.

Новые «числа», которые мы сейчас определим, называются *комплексными*. Они не выражают результата какого-либо измерения — мы знаем, что для выражения результатов измерений достаточно действительных чисел. Из-за этого теория комплексных чисел имеет более абстрактный, более формальный характер, чем теория действительных чисел. Заметим, что, несмотря на кажущуюся абстрактность понятия комплексного числа, теория комплексных чисел и функций комплексного переменного имеет в настоящее время многочисленные практические применения.

Теория функций комплексного переменного применяется в настоящее время для решения задач теории упругости, аэромеханики, гидромеханики, электротехники, атомной физики и т. д.

Перейдем к построению множества комплексных чисел.

Как уже говорилось выше, мы сначала определим элементы множества комплексных чисел, потом установим соответствие между действительными числами и некоторыми из этих элементов и, наконец, определим арифметические операции для элементов нашего множества. Только после этого можно будет с полным правом называть элементы нашего множества *числами*. Однако, для того чтобы не менять по ходу изложения названия, мы будем с самого начала называть элементы строящегося множества *комплексными числами*.

О п р е д е л е н и е. *Комплексным числом* z называют пару (a, b) действительных чисел a и b , взятых в определенном порядке.

При этом две пары (a, b) и (c, d) считаются равными тогда и только тогда, когда $a = c$ и $b = d$. Таким образом, одно равенство $(a, b) = (c, d)$ для комплексных чисел равносильно двум равенствам $a = c$ и $b = d$ для действительных чисел.

Мы уже говорили, что при построении нового числового множества надо отождествить некоторые его элементы с элементами исходного числового множества. В случае комплексных чисел отождествляют пары вида $(a, 0)$ с действительными числами a . Этим уста-

навливается взаимно-однозначное соответствие между множеством действительных чисел и частью множества комплексных чисел, состоящей из пар вида $(a, 0)$. В дальнейшем, определяя действия над комплексными числами, мы будем следить за тем, чтобы для пар вида $(a, 0)$ эти действия превращались в обычные действия над действительными числами.

Если $z = (a, b)$ — комплексное число, то a называют его *действительной частью*, а b — *мнимой частью*. Приняты обозначения $a = \operatorname{Re} z$, $b = \operatorname{Im} z$ (от французских слов *rèele* — действительный и *imaginaire* — мнимый). Числа $z = (a, b)$, для которых $b \neq 0$, называют *мнимыми числами*, а числа вида $z = (0, b)$ — *чисто мнимыми числами*.

3. Сложение комплексных чисел; умножение на действительные числа. Определим теперь в множестве комплексных чисел две операции: сложение и умножение на действительные числа. Эти операции определяются «покоординатно», то есть формулами

$$(a, b) + (c, d) = (a + c, b + d) \quad (1)$$

$$c(a, b) = (ca, cb). \quad (2)$$

Так как

$$(a, 0) + (c, 0) = (a + c, 0)$$

$$c(a, 0) = (ca, 0),$$

то для чисел вида $(a, 0)$, которые мы отождествили с действительными числами a , введенные операции совпадают с обычными операциями сложения и умножения действительных чисел.

Кроме того, легко проверить, что сложение комплексных чисел коммутативно и ассоциативно.

Введенное нами обозначение $z = (a, b)$ для комплексных чисел неудобно тем, что действительные числа приходится обозначать $(a, 0)$. Поэтому обычно пользуются иной записью этих чисел. Обозначим комплексное число $(0, 1)$ через i . Тогда по формулам (1) и (2) имеем:

$$(a, b) = (a, 0) + (0, b) = (a, 0) + b(0, 1).$$

Так как $(a, 0)$ тождественно с a и $(0, 1)$ обозначено i , то эту запись можно представить в виде:

$$(a, b) = a + bi.$$

В дальнейшем мы и будем обозначать комплексные числа в виде $z = a + bi$ (мы не могли пользоваться этой записью с самого начала, так как не были определены действия сложения и умножения на действительное число, а потому запись $a + bi$ не имела смысла).

Сложение комплексных чисел и умножение их на действительные числа записываются теперь следующим образом:

$$(a + bi) + (c + di) = (a + c) + (b + d)i, \quad (3)$$

$$c(a + bi) = ca + cbi. \quad (4)$$

Кроме того, напомним, что равенство $a + bi = c + di$ равносильно двум равенствам: $a = c$ и $b = d$.

Разностью комплексных чисел $a + bi$ и $c + di$ называют такое комплексное число $u + vi$, что $a + bi = (c + di) + (u + vi)$. Из правила сложения комплексных чисел выводим, что

$$a + bi = (c + u) + (d + v)i.$$

Это равенство равносильно двум равенствам:

$$a = c + u,$$

$$b = d + v,$$

из которых получаем: $u = a - c$, $v = b - d$.

Итак,

$$(a + bi) - (c + di) = (a - c) + (b - d)i.$$

У п р а ж н е н и я

1. Выполнить действия над комплексными числами:

а) $\left(2\frac{3}{4} + 3\frac{1}{3}i\right) - \left(\frac{1}{3} - 1\frac{1}{3}i\right);$

б) $[1, (3) + 0,2(6)i] - [-2, 1(3) + 0,6(2)i];$

в) $(2\sqrt{3} - 4i\sqrt{2}) - (\sqrt{27} - i\sqrt{32}) + \left(\frac{2}{\sqrt{3}} + \frac{2i}{\sqrt{2}}\right);$

г) $\left[\left(\frac{m}{n} - \frac{ni}{m}\right) - \left(\frac{n}{m} - \frac{mi}{n}\right)\right] - \left[\left(\frac{1}{n} - \frac{i}{m}\right) - \left(\frac{1}{m} - \frac{i}{n}\right)\right];$

д) $(4 + 3i) \cdot 0, (4);$

е) $(-2 - 3i)[-1, (4)].$

2. Найти действительные числа x и y так, чтобы выполнялись равенства:

а) $\frac{2i}{x} - yi + 4 = 3i - \frac{7}{x} + 2y;$

б) $(1 + i)x + (1 - i)y = 3 - i;$

в) $(2 + 3i)x + (2 - 3i)(x + y) = 7 - 8i.$

4. Умножение комплексных чисел. Определим теперь для комплексных чисел операцию умножения.

Сначала положим о о п р е д е л е н и ю $i^2 = -1$. Мы хотим, чтобы операция умножения действительных чисел была коммутативной, ассоциативной и дистрибутивной относительно сложения.

Для этого необходимо определить умножение комплексных чисел следующим образом:

$$(a + bi)(c + di) = ac + adi + bci + bdi^2 = (ac - bd) + (ad + bc)i. \quad (1)$$

Иными словами, комплексные числа надо умножать как многочлены относительно буквы i , заменяя в результате i^2 на -1 .

Прямая проверка, которую мы опускаем, показывает, что определенное таким образом умножение комплексных чисел действительно обладает свойствами коммутативности, ассоциативности и дистрибутивности относительно сложения.

Ранее уже было определено умножение комплексных чисел на действительные; поэтому надо еще проверить, что данное нами сейчас определение умножения сводится в случае, когда один из множителей действительный, к данному ранее. По формуле (1) имеем:

$$c(a + bi) = (c + 0i)(a + bi) = ca + cbi.$$

Это совпадает с формулой (4), п. 3.

Отметим формулы для степеней числа i . Мы имеем: $i^2 = -1$,

$$i^3 = i^2 \cdot i = -i, \quad i^4 = i^2 \cdot i^2 = (-1)(-1) = 1.$$

Теперь уже легко видеть, что при возведении числа в степени с натуральными показателями имеет место периодичность значений степени: из равенства $i^4 = 1$ вытекает, что если $n = 4k + m$, то $i^n = i^m$. Иными словами, чтобы найти i^n , надо возвести i в степень, показатель которой равен остатку от деления n на 4.

У п р а ж н е н и я

3. Вычислите следующие выражения:

а) $(-3, 2i)(-4, 5i)$;

б) $(1 + i)(1 - i)$;

в) $(\sqrt{3} - i)(\sqrt{3} + i)$;

г) $(1 - \sqrt{3}i)(\sqrt{3} + \sqrt{6}i)$;

д) $\left(\sqrt{\frac{1}{3}} - \sqrt{\frac{2}{3}}i\right)(1 + \sqrt{2}i)$;

е) $i\sqrt{2 + \sqrt{3}} \left(\frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}}i\right)$;

ж) $(2 + 5i)^2(3 - i)$;

з) $(3 + i)^3$;

и) $(1 + 2i)^2(1 - 2i)^2$;

к) $(2 + i)^4 + (2 - i)^4$;

л) $i^{127}, i^{218}, i^{736}$.

4. Запишите определение действия умножения для комплексных чисел на языке пар.

5. Найдите действительные числа x и y такие, что

$$(2x - 3yi)(2x + 3yi) + xi = 97 + 2i.$$

5. Квадратные уравнения с действительными коэффициентами.

Из формулы $i^2 = -1$, или, иначе, $i^2 + 1 = 0$, следует разрешимость уравнения $x^2 + 1 = 0$ в множестве комплексных чисел. Именно одним из его корней является число i . Другой корень — число $-i$. В самом деле, $(-i)^2 + 1 = -1 + 1 = 0$. Можно показать,

что уравнение $x^2 + 1 = 0$ не имеет иных корней в множестве комплексных чисел.

Вообще любое квадратное уравнение $ax^2 + bx + c = 0$ с действительными коэффициентами разрешимо в множестве комплексных чисел. Если $b^2 - 4ac \geq 0$, то, как мы уже знаем, корни уравнения являются числа

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

(совпадающие друг с другом, если $b^2 - 4ac = 0$). Если же $b^2 - 4ac < 0$, то $4ac - b^2 > 0$, и формула для решения квадратного уравнения дает

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{-b \pm i \sqrt{4ac - b^2}}{2a}.$$

У п р а ж н е н и е 6. Решите квадратные уравнения:

- а) $x^2 - 2x + 2 = 0$; г) $x^2 + x + 1 = 0$;
 б) $x^2 + 10x + 50 = 0$; д) $x^2 + 3 = 0$.
 в) $9x^2 - 12x + 7 = 0$;

6. Деление комплексных чисел. Мы определили в множестве комплексных чисел операции сложения, вычитания и умножения, причем эти операции обладают теми же свойствами, что и соответствующие операции над действительными числами. Поэтому множество комплексных чисел образует кольцо. Сейчас мы покажем, что это множество является полем, то есть что в нем определена операция деления на любое отличное от нуля число.

Пусть $z = a + bi$ и $w = c + di$ — два комплексных числа, причем $c + di \neq 0$ (напомним: это означает, что хоть одно из чисел c и d отлично от нуля). Частным от деления z на w называют комплексное число $s = u + vi$, такое, что $ws = z$. Покажем, что такое число существует и единственно.

По формуле (1), п. 4, равенство $ws = z$, или, что то же,

$$(c + di)(u + vi) = a + bi,$$

переписывается так:

$$cu - dv + (cv + du)i = a + bi. \quad (1)$$

Но два комплексных числа равны тогда и только тогда, когда равны их действительная и мнимая части. Поэтому из (1) получаем систему линейных уравнений:

$$\begin{cases} cu - dv = a, \\ du + cv = b. \end{cases}$$

Эта система имеет единственное решение:

$$u = \frac{ac + bd}{c^2 + d^2}, \quad v = \frac{bc - ad}{c^2 + d^2} \quad (2)$$

(знаменатель дробей отличен от нуля, так как по условию хотя бы одно из чисел c и d отлично от нуля).

Итак, если $w \neq 0$, то существует одно и только одно комплексное число $s = u + iv$, такое, что $ws = z$. Это число называется *частным* от деления z на w и обозначается z/w . Из формулы (2) следует, что

$$\frac{a + bi}{c + di} = \frac{ac + bd}{c^2 + d^2} + \frac{bc - ad}{c^2 + d^2} i.$$

У п р а ж н е н и я

7. Вычислить выражения:

- а) $\frac{3 + 2i}{7 - 2i}$; д) $\frac{-\sqrt{3} + i\sqrt{3}}{1 - i}$; н) $\left(\frac{2}{\sqrt{2} + i}\right)^2$;
 б) $\frac{3 + i}{3 - i} + \frac{3 - i}{3 + i}$; е) $\frac{b\sqrt{2}}{\sqrt{2} + bi}$; к) $i + i^2 + i^3 + i^4$;
 в) $\left(\frac{1 - 2i}{1 + 2i}\right)^3$; ж) $\frac{a\sqrt{b} + b\sqrt{a}i}{b\sqrt{a} - a\sqrt{b}i}$; л) $i^n + i^{n+1} + i^{n+2} + i^{n+3}$;
 г) $\frac{\sqrt{3} - i}{\sqrt{3} - 3i}$; з) $\left(\frac{1 - i\sqrt{2}}{2}\right)^2$; м) $\frac{(1 + i)(1 - i)^4}{(1 + 2i)^3}$;
 и) $\frac{\sqrt[4]{\frac{1}{2}} - 2\sqrt{\frac{1}{2}}}{\sqrt[4]{\frac{1}{2}} + \sqrt[2]{\frac{1}{2}}i} \cdot \frac{1}{1 - \sqrt[11]{\frac{1}{4}}i}$; о) $\frac{3 + i}{3 - i} : \frac{2}{5(1 - i)}$;
 п) $(-0,5 + i\frac{\sqrt{3}}{2})^3$;
 р) $(6 - 0,2\sqrt{60}i)[(\sqrt{8}i - \sqrt{18}i + 4) \left(\sqrt{\frac{1}{2}}i - \sqrt[4]{\frac{1}{2}}i\right) + 5(\sqrt{0,6}i - \sqrt{5,4}i + 2)]$;
 с) $\frac{2(\sqrt{5}i + \sqrt{3}i)^2(\sqrt{15} - 4)(\sqrt{3}i + i)(1 - \sqrt{3})}{(7 + 5\sqrt{2})(\sqrt{2}i - i)^3}$.

8. Показать, что если $1 + \varepsilon + \varepsilon^2 = 0$, то $(a + b + c)(a + b\varepsilon + c\varepsilon^2) \times (a + b\varepsilon^2 + c\varepsilon) = a^3 + b^3 + c^3 - 3abc$.

9. Решить систему линейных уравнений

$$\begin{cases} x + y + z = A, \\ x + y\varepsilon + z\varepsilon^2 = B, \\ x + y\varepsilon^2 + z\varepsilon = C, \end{cases}$$

где ε удовлетворяет условию $1 + \varepsilon + \varepsilon^2 = 0$.

З а м е ч а н и е. Правила алгебраических преобразований не изменяются при переходе от действительных чисел к комплексным. В противоположность этому теория неравенств не может быть распространена на комплексные числа. Разумеется, можно (и даже многими различными способами) условиться, какое из двух произвольных комплексных чисел считать большим, а какое меньшим.

Например, можно условиться считать, что $a + bi < c + di$, когда $a < c$, а если $a = c$ — когда $b < d$. Однако для комплексных чисел невозможно определить понятия «больше» и «меньше» так, чтобы сохранились в силе известные ранее связи этих понятий с арифметическими действиями. В самом деле, предположим, что мы каким-нибудь способом определили для комплексных чисел понятие «больше» так, что из двух различных комплексных чисел одно и только одно всегда больше другого. Тогда должно быть или $i > 0$, или $i < 0$. Если $i > 0$, то, умножая обе части этого неравенства на число i (которое по предположению положительно), мы должны получить, в силу известного свойства неравенств, $i^2 > 0$, тогда как в действительности $i^2 = -1 < 0$. Точно так же если $i < 0$, то, умножая обе части этого неравенства на число i (которое теперь по предположению отрицательно), мы снова должны прийти к неравенству $i^2 > 0$, которое противоречит тому, что $i^2 = -1$.

7. Сопряженные комплексные числа. О п р е д е л е н и е. Два комплексных числа, имеющие одну и ту же действительную часть и взаимно противоположные коэффициенты мнимых частей, называются (*взаимно*) *сопряженными*.

Для любого комплексного числа z существует одно и только одно сопряженное с ним комплексное число, которое обозначается \bar{z} . Если $z = a + bi$, то $\bar{z} = a - bi$. Очевидно, $z = \bar{\bar{z}}$ тогда и только тогда, когда z — действительное число.

Отметим, что *сумма и произведение двух сопряженных комплексных чисел являются действительными числами*:

$$\begin{aligned} z + \bar{z} &= (a + bi) + (a - bi) = 2a, \\ z \cdot \bar{z} &= (a + bi)(a - bi) = a^2 - b^2 i^2 = a^2 + b^2. \end{aligned}$$

Ранее было выведено правило деления комплексных чисел. Это правило можно проще получить с помощью сопряженных комплексных чисел.

Умножим числитель и знаменатель дроби $\frac{a+bi}{c+di}$ на число $c - di$, комплексно сопряженное со знаменателем. Выполнив действия и отделив действительную часть от мнимой, получаем:

$$\frac{(a + bi)(c - di)}{(c + di)(c - di)} = \frac{ac + bd}{c^2 + d^2} + i \frac{bc - ad}{c^2 + d^2}.$$

Этот результат совпадает с формулой, полученной в п. 6.

Эту формулу можно не запоминать, а только помнить, что при делении надо числитель и знаменатель дроби умножить на число, комплексно сопряженное со знаменателем.

Теорема 1. Число, сопряженное с суммой или произведением комплексных чисел, есть сумма или соответственно произведение чисел, сопряженных данным комплексным числом:

$$\overline{z + w} = \bar{z} + \bar{w}; \quad (1)$$

$$\overline{zw} = \bar{z} \cdot \bar{w}. \quad (2)$$

Доказательство. Пусть $z = a + bi$, $w = c + di$. Тогда $\bar{z} = a - bi$, $\bar{w} = c - di$. Имеем:

$$\begin{aligned} \overline{z + w} &= \overline{(a + c) + (b + d)i} = (a + c) - (b + d)i = \\ &= (a - bi) + (c - di) = \bar{z} + \bar{w}. \end{aligned}$$

Точно так же

$$\begin{aligned} \overline{zw} &= \overline{(ac - bd) + (ad + bc)i} = (ac - bd) - \\ &- (ad + bc)i = (a - bi)(c - di) = \bar{z}\bar{w}. \end{aligned}$$

Эта теорема показывает, что, поставив в соответствие каждому комплексному числу сопряженное с ним число, мы получили взаимно однозначное отображение поля комплексных чисел K на это же поле K , при котором сохраняются операции сложения и умножения.

Из теоремы 1 непосредственно вытекает следующее

Следствие 1. Число, сопряженное (натуральной) степени комплексного числа, равно той же степени числа, сопряженного данному:

$$\overline{z^n} = (\bar{z})^n.$$

Далее, если нам дан многочлен

$$P(z) = a_0 z^n + a_1 z^{n-1} + \dots + a^n,$$

коэффициенты которого — комплексные числа, то, заменив каждый коэффициент a_k сопряженным ему комплексным числом \bar{a}_k , мы получим новый многочлен, который обозначим через

$$\bar{P}(z) = \bar{a}_0 z^n + \bar{a}_1 z^{n-1} + \dots + \bar{a}_n.$$

Если теперь в полученном многочлене произвольное значение переменной z заменить сопряженным ему значением \bar{z} , то в силу доказанной выше теоремы и следствия 1 полученное значение многочлена $\bar{P}(\bar{z})$ будет комплексным числом, сопряженным с исходным значением многочлена $P(z)$:

$$\bar{P}(\bar{z}) = \overline{P(z)}. \quad (3)$$

Если, в частности, все коэффициенты a_k многочлена $P(z)$ — действительные числа, то $P(z)$ и $\overline{P(z)}$ — один и тот же многочлен, и формула (3) дает:

$$P(\overline{z}) = \overline{P(z)}.$$

Таким образом, мы получили

Следствие 2. При замене в многочлене с действительными коэффициентами произвольного значения аргумента сопряженным ему числом значение многочлена также заменяется сопряженным ему числом.

У п р а ж н е н и я

10. Докажите, что если сумма и произведение двух комплексных чисел являются действительными числами, то эти комплексные числа — взаимно сопряженные.

11. а) При каких действительных значениях x и y комплексные числа $5 + ixy$ и $x + y + 4i$ будут сопряженными?

б) Сколько решений будет иметь задача 11а, если не требовать в ее условии, чтобы числа x и y были действительными? Приведите несколько примеров.

12. Разложить на множители выражения:

а) $m^2 + n^2$, б) $4a^2 + 9b^2$, в) $x^2 + 4x + 13$, г) $x^2 - 6x + 25$.

13. Упростить выражения:

а) $(a + 1 + i)(a - 1 + i)(a - 1 - i)(a + 1 - i)$,

б) $(x + 2 - 3i)(x - 2 + 3i)(x + i)(x - i)$,

в) $(3b + 4 + 5i)(3b - 4 - 5i)$.

14. Составить квадратное уравнение с действительными коэффициентами, одним из корней которого является число

а) i , б) $1 + i$, в) $2 - 7i$, г) $1 + 2i\sqrt{3}$.

15. Найдите комплексное число, равное квадрату сопряженного с ним числа.

16. Справедливо ли следствие 2 теоремы 1 для многочленов с произвольными комплексными коэффициентами?

8. Извлечение квадратных корней из комплексных чисел. Пусть c — комплексное число. Квадратным корнем из этого числа называют комплексное число z такое, что $z^2 = c$. В этом случае пишут: $z = \sqrt{c}$. Найдём выражение для $\sqrt{a + bi}$ через a и b . Пусть $z = u + iv$. Тогда имеем:

$$(u + iv)^2 = a + bi,$$

или, иначе,

$$u^2 - v^2 + 2uvi = a + bi.$$

Это равенство равносильно системе уравнений:

$$\begin{cases} u^2 - v^2 = a, \\ 2uv = b. \end{cases}$$

Чтобы решить эту систему, найдем из второго уравнения $v = \frac{b}{2u}$ и подставим в первое уравнение. Мы получим уравнение, содержащее лишь неизвестное u :

$$u^3 - \frac{b^2}{4u^3} = a$$

или

$$4u^4 - 4au^3 - b^2 = 0.$$

Это биквадратное уравнение. Решая его относительно u^3 , находим, что

$$u_1^2 = \frac{a + \sqrt{a^2 + b^2}}{2}, \quad u_2^2 = \frac{a - \sqrt{a^2 + b^2}}{2}.$$

Но u должно быть действительным числом, а потому u^2 положительно. Так как $a^2 < a^2 + b^2$, то $|a| < \sqrt{a^2 + b^2}$, и потому $a - \sqrt{a^2 + b^2} < 0$. Итак, для u^2 мы должны взять лишь первое выражение. А тогда для u находим два значения — одно положительное, а второе отрицательное:

$$u = \pm \sqrt{\frac{a + \sqrt{a^2 + b^2}}{2}}.$$

Число u обращается в нуль, лишь если $b = 0$ и $a \rightarrow$ отрицательное число (в этом случае $a + \sqrt{a^2} = 0$), но решение уравнения $u^2 = a$, $a < 0$ мы уже рассмотрели в п. 5. Потому можно считать, что $u \neq 0$. Подставляя значение в равенство $v = \frac{b}{2u}$, находим v :

$$v = \pm \frac{b}{\sqrt{2[a + \sqrt{a^2 + b^2}]}}.$$

Полученное выражение для v можно преобразовать, умножив числитель и знаменатель дроби на $\sqrt{\sqrt{a^2 + b^2} - a}$.

Так как

$$\sqrt{\sqrt{a^2 + b^2} + a} \sqrt{\sqrt{a^2 + b^2} - a} = \sqrt{a^2 + b^2 - a^2} = \sqrt{b^2} = |b|,$$

то

$$v = \pm \frac{b}{|b|} \sqrt{\frac{\sqrt{a^2 + b^2} - a}{2}}.$$

Но $\frac{b}{|b|}$ — это знак числа b , или, иначе, $\text{sign } b$.

Поэтому

$$\sqrt{a + bi} = \pm \left[\sqrt{\frac{\sqrt{a^2 + b^2} + a}{2}} + i \text{sign } b \sqrt{\frac{\sqrt{a^2 + b^2} - a}{2}} \right].$$

Например,

$$\begin{aligned} \sqrt{3 + 4i} &= \pm \left[\sqrt{\frac{\sqrt{25} + 3}{2}} + i \sqrt{\frac{\sqrt{25} - 3}{2}} \right] = \pm (2 + i); \\ \sqrt{3 - 4i} &= \pm (2 - i). \end{aligned}$$

Мы показали, что из любого комплексного числа $z = a + bi$ можно извлечь квадратный корень, причем если $z \neq 0$, то этот корень имеет два значения, отличающиеся друг от друга знаком.

У п р а ж н е н и я

17. Вычислите квадратные корни:

а) $\sqrt{5 - 12i}$; в) $\sqrt{1 + i\sqrt{3}}$

б) $\sqrt{24 + 7i}$; г) $\sqrt{2 + i\sqrt{2}}$.

18. Решите квадратные уравнения:

а) $z^2 - (2 + i)z + 2i = 0$;

б) $z^2 - (5 + 2i)z + 5 + 5i = 0$.

§ 2. Тригонометрическая форма комплексных чисел

1. Геометрическое изображение комплексных чисел. Мы знаем, что действительные числа можно изображать точками на числовой оси. Комплексное число $z = a + bi$ задается двумя действительными числами a и b . Поэтому естественно изображать комплексные числа точками на плоскости. Именно, каждому комплексному числу $z = a + bi$ ставится в соответствие точка $M(a, b)$. В частности, числу i ставится в соответствие точка $M_0(0, 1)$. Действительным числам соответствуют точки оси абсцисс, а чисто мнимым числам — точки оси ординат.

Построенное соответствие между комплексными числами и точками плоскости является взаимно-однозначным. Часто вместо точек плоскости рассматривают их радиус-векторы, то есть векторы, идущие из начала координат $O(0, 0)$ в точку M . Тогда получаем взаимно-однозначное соответствие между комплексными числами и радиус-векторами \overline{OM} (см. рис. 35). Разумеется, вместо радиус-векторов можно брать любые равные им векторы.

Изображение комплексных чисел с помощью векторов удобно тем, что при этом сложение и вычитание комплексных чисел получают простое геометрическое истолкование. Мы знаем, что при сложении комплексных чисел отдельно складываются их действительные и мнимые части:

$$(a + bi) + (c + di) = (a + c) + (b + d)i.$$

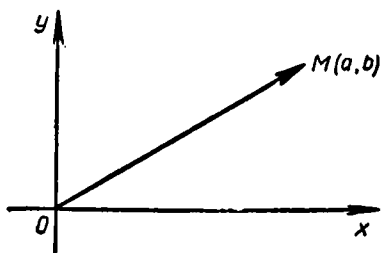


Рис. 35

Точно так же при сложении векторов отдельно складываются их координаты: если $\overline{OM} = a\bar{i} + b\bar{j}$ и $\overline{ON} = c\bar{i} + d\bar{j}$, то $\overline{OM} + \overline{ON} = (a + c)\bar{i} + (b + d)\bar{j}$. Поэтому при указанном соответствии между комплексными числами и векторами операции сложения и вычитания комплексных чисел переходят в операции сложения и вычитания векторов.

Точнее это означает следующее: если числу z соответствует вектор \overline{OM} , а числу t — вектор \overline{ON} , то числу $z + t$ соответствует вектор $\overline{OM} + \overline{ON}$, а числу $z - t$ — вектор $\overline{OM} - \overline{ON}$.

Если одно из слагаемых считать постоянным и равным $c = a + bi$, а второе переменным и положить $w = z + c$, то w — функция, определенная для комплексных значений аргумента z и принимающая комплексные значения. Из изложенного выше ясно, что этой функции соответствует геометрическое преобразование плоскости, при котором точка $M(x, y)$ переходит в точку $P(x + a, y + b)$. Это преобразование есть не что иное, как параллельный перенос плоскости на вектор с координатами a и b .

Вопрос о геометрическом истолковании умножения и деления комплексных чисел будет рассмотрен позже.

У п р а ж н е н и я

19. Как расположены точки комплексной плоскости, соответствующие комплексно-сопряженным числам $z = a + bi$ и $z = a - bi$?

20. Как расположены на комплексной плоскости точки, соответствующие противоположным числам z и $-z$?

21. Во что переходит круг единичного радиуса с центром в начале координат при преобразовании $w = z - 2 + 3i$?

2. Полярная система координат. Мы задавали положение точки на плоскости ее декартовыми координатами — абсциссой и ординатой. Наряду с этой системой координат часто применяют другую, называемую *полярной системой координат*. Чтобы задать полярную систему координат, выбирают точку O (*полюс*) и выходящий из этой точки луч l (*полярную ось*). Положение точки M на плоскости задается двумя числами — длиной r вектора \overline{OM} и углом φ , который этот вектор образует с полярной осью. При этом угол φ измеряется в радианной мере и отсчитывается против часовой стрелки (см. рис. 36).

Ясно, что координата r — неотрицательное действительное число и однозначно определена положением точки M . Координата же φ определена неоднозначно, так как угол между вектором \overline{OM} и осью l определен лишь с точностью до кратного 2π . Для точки O координата φ не определена.

Установим связь между декартовыми координатами (x, y) и полярными координатами (r, φ) (см. рис. 37). Мы будем считать, что полюс совпадает с началом координат $O(0, 0)$, а полярная ось — с положительным направлением оси абсцисс. В этом случае в силу

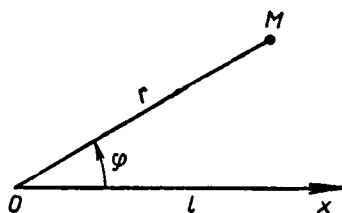


Рис. 36

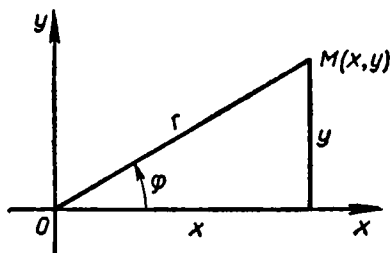


Рис. 37

определения тригонометрических функций (см. «Математический анализ», п. 1 § 2 главы V) имеем:

$$\begin{cases} x = r \cos \varphi, \\ y = r \sin \varphi. \end{cases} \quad (1)$$

Отсюда выводится, что

$$\begin{cases} r = \sqrt{x^2 + y^2}, \\ \cos \varphi = \frac{x}{r}, \\ \sin \varphi = \frac{y}{r}. \end{cases} \quad (2)$$

Соотношения (1) и (2) позволяют находить декартовы координаты точки по ее полярным координатам и обратно.

Пример. Найти полярные координаты точки $M(\sqrt{3}, -1)$. Мы имеем:

$$r = \sqrt{(\sqrt{3})^2 + (-1)^2} = 2,$$

$$\cos \varphi = \frac{\sqrt{3}}{2}, \quad \sin \varphi = -\frac{1}{2}.$$

По заданным значениям $\cos \varphi$ и $\sin \varphi$ находим, что $\varphi = -\frac{\pi}{6}$.

Значит, полярные координаты точки M равны $(2, -\frac{\pi}{6})$.

Иногда отыскание полярных координат точки легче делать непосредственно исходя из рисунка, чем из формул (2). Возьмем, например, точку $M(-1, 1)$. Из рис. 38 очевидно, что для этой точки

$$r = 2, \quad \text{а} \quad \varphi = \frac{3}{4}\pi.$$

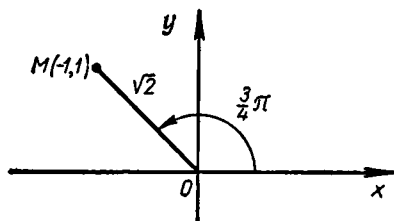


Рис. 38

Для точек, лежащих на положительном направлении оси абсцисс, угол φ равен (с точностью до кратного 2π) нулю, для точек на отрицательном направлении оси абсцисс он равен π , для точек на положительном и отрицательном направлениях оси ординат соответственно $\frac{\pi}{2}$ и $\frac{3}{2}\pi$.

3. Тригонометрическая форма комплексного числа. Комплексные числа, как мы знаем, изображаются точками плоскости или же векторами, идущими в эти точки из нулевой точки O . Задание комплексного числа z в алгебраической форме равносильно заданию абсциссы и ординаты соответствующей точки M или вектора \overline{OM} . Но вектор \overline{OM} на плоскости может быть задан и иначе, а именно, своей длиной и углом, который он образует с каким-нибудь фиксированным направлением, то есть полярными координатами точки M .

О п р е д е л е н и е. Длина вектора, соответствующего комплексному числу z , называется *модулем* числа z , а радианная мера угла, образованного этим вектором с положительным направлением действительной оси, — *аргументом* комплексного числа φ . Модуль комплексного числа z обозначается $|z|$; аргумент этого числа обозначается $\text{Arg } z$.

Модуль любого комплексного числа z есть неотрицательное действительное число, равное нулю тогда и только тогда, когда $z=0$. Аргумент любого комплексного числа $z \neq 0$ имеет бесконечно много значений (поскольку угол, фигурирующий в определении аргумента, определен не однозначно), отличающихся друг от друга на числа, кратные 2π .

В тех случаях, когда хотят иметь однозначно определенное значение аргумента, выбирают значение, лежащее между $-\pi$ и π , и обозначают его через $\arg z$: $-\pi < \arg z \leq \pi$. Ясно, что на отрицательной действительной полуоси функция $\arg z$ имеет разрыв: когда мы пересекаем эту полуось, значение $\arg z$ скачком меняется на 2π — увеличивается, если ось пересекают снизу вверх, и уменьшается, если ось пересекают сверху вниз.

Например, $|1 - i| = \sqrt{2}$, $\arg(1 - i) = -\frac{\pi}{4}$, $|2i| = 2$, $\arg 2i = \frac{\pi}{2}$, $|-5| = 5$, $\text{Arg}(-5) = \pi + 2\pi k$ (рис. 39). Наряду с обозначениями $|z|$ и $\text{Arg } z$ мы будем обозначать модуль через r , а аргумент через φ .

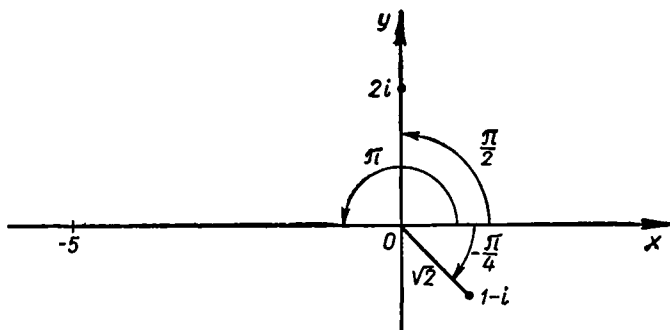


Рис. 39

Если комплексное число z является действительным, то есть если соответствующий ему вектор расположен на действительной оси, то определенное только что понятие модуля, очевидно, совпадает с известным ранее понятием абсолютной величины числа z . Этим оправдывается употребление для модуля комплексного числа того же обозначения, которое было ранее принято для абсолютной величины действительного числа. Аргумент же действительного числа z равен $2k\pi$, если $z > 0$, и равен $\pi + 2k\pi$, если $z < 0$.

Можно сказать, что модуль комплексного числа — это расстояние от точки O до точки M . Вспоминая, что число $z_2 - z_1$ изображается разностью векторов OM_2 и OM_1 , то есть вектором, идущим из M_1 в M_2 , получаем важный результат: *если числу z_1 соответствует точка M_1 , а числу z_2 — точка M_2 , то $|z_2 - z_1|$ равно расстоянию между этими точками:*

$$|z_2 - z_1| = M_1M_2.$$

Зная модуль и аргумент комплексного числа, нетрудно найти его действительную и мнимую части, то есть представить его в алгебраической форме.

По формулам (1), п. 2, имеем:

$$\begin{aligned} x &= r \cos \varphi = |z| \cos (\operatorname{Arg} z), \\ y &= r \sin \varphi = |z| \sin (\operatorname{Arg} z). \end{aligned}$$

Выражение $r = |z|$ и $\varphi = \operatorname{Arg} z$ через x и y дается формулами (2), п. 2:

$$r = \sqrt{x^2 + y^2},$$

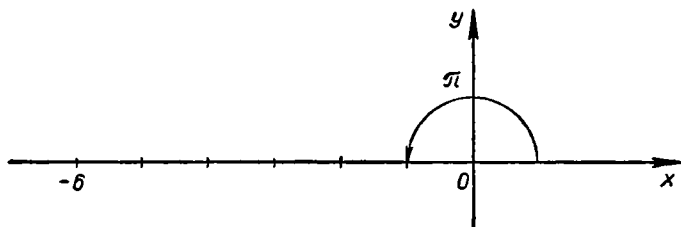


Рис. 40

$$\begin{aligned}\sin \varphi &= \frac{y}{r} = \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}}, \\ \cos \varphi &= \frac{x}{r} = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}, \quad \operatorname{tg} \varphi = \frac{y}{x}.\end{aligned}\tag{1}$$

Любое из соотношений (1) позволяет найти угол $\varphi = \operatorname{Arg} z$, если учитывать дополнительно, что знаки чисел x и y определяют четверть, которой принадлежит искомое значение аргумента.

П р и м е р ы.

1. Представить в тригонометрической форме число $\sqrt{3} - i$.

Мы имеем: $r = \sqrt{3 + 1} = 2$ и $\sin \varphi = -\frac{1}{2}$, $\cos \varphi = \frac{\sqrt{3}}{2}$, откуда $\varphi = -\frac{\pi}{6}$. Значит, $\sqrt{3} - i = 2 \left[\cos \left(-\frac{\pi}{6} \right) + i \sin \left(-\frac{\pi}{6} \right) \right]$.

2. Представить в тригонометрической форме число -6 .

Из рис. 40 мы имеем: $r = 6$, $\varphi = \pi$. Значит,

$$-6 = 6 (\cos \pi + i \sin \pi).$$

3*. Представить в тригонометрической форме число

$$z = -2 \left(\cos \frac{\pi}{5} - i \sin \frac{\pi}{5} \right).$$

Данное выражение не является тригонометрической формой числа z , во-первых, потому, что модуль этого числа не может быть равен -2 , а во-вторых, потому, что коэффициент мнимой части выражения в скобках равен $-\sin \frac{\pi}{5}$, а не $\sin \frac{\pi}{5}$. Представив число z в виде

$$z = 2 \left(-\cos \frac{\pi}{5} + i \sin \frac{\pi}{5} \right),$$

увидим, что аргументом z является такой угол φ , что $\cos \varphi = -\cos \frac{\pi}{5}$, $\sin \varphi = \sin \frac{\pi}{5}$. Такой угол φ нетрудно найти: $\varphi = \pi - \frac{\pi}{5} = \frac{4}{5}\pi$. Итак, искомое представление числа z в тригонометрической форме есть

$$z = 2 \left(\cos \frac{4\pi}{5} + i \sin \frac{4\pi}{5} \right).$$

У п р а ж н е н и я

22. Представить в тригонометрической форме комплексные числа:

- а) $\sqrt{3} + i$; г) $1 - i\sqrt{3}$; ж) $3 \cos \frac{\pi}{6} - 3i \sin \frac{\pi}{6}$;
 б) $2 - 2i$; д) $3 + 4i$; з) $\sin \frac{\pi}{8} - i \cos \frac{\pi}{8}$;
 в) $6 + 6i$; е) $-3 \left(\cos \frac{\pi}{7} + i \sin \frac{\pi}{7} \right)$; и) $-2 \sin \frac{\pi}{12} + 2i \cos \frac{\pi}{12}$.

23. Представить в алгебраической форме числа:

- а) $3 \left(\cos \frac{\pi}{6} + i \sin \frac{\pi}{6} \right)$; б) $8 \left(\cos \frac{2\pi}{3} + i \sin \frac{2\pi}{3} \right)$.

24. Докажите, что для любых комплексных чисел

$$|z_1| - |z_2| \leq |z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2|.$$

25. Докажите, что если $|z| = 1$, то $z^{-1} = \frac{1}{z}$.

26. Докажите, что если $|z| = 1$, то z можно представить в виде $z = \frac{a+i}{a-i}$,

где a — действительное число.

27. Докажите, что если $|z| = 1$, то для любого действительного числа φ имеем

$$\left| \frac{z \cos \varphi + \sin \varphi}{z \sin \varphi + \cos \varphi} \right| = 1.$$

28. Вычислите модули комплексных чисел:

- а) $z = (1 + i)^4 + 3i$; б) $z = \frac{\sqrt{a^2 + b^2} + i\sqrt{2ab}}{(a - b) + 2i\sqrt{ab}}$.

29. Докажите, что для любых комплексных чисел z_1, z_2 выполняется равенство

$$|z_1 + z_2|^2 + |z_1 - z_2|^2 = 2(|z_1|^2 + |z_2|^2).$$

30. Из всех комплексных чисел, удовлетворяющих условию $z - 25i < \leq 15$, найдите число, имеющее наименьшее значение аргумента (если значения аргумента брать заключенными между $-\pi$ и π).

31. Изобразите на чертеже геометрическое место точек комплексной плоскости, удовлетворяющих условию:

- а) $\operatorname{Re} z > 1$; в) $|z - 4i| = 7$; д) $\bar{z}z + 3\bar{z} + 3z = 0$;
б) $\operatorname{Im} z < -2$; г) $|z - 4 + i| < 5$; е) $\left| \frac{z-1}{z-4} \right| = 3$.

32. Напишите условия, которым удовлетворяют все точки каждой из областей, изображенных на рис. 41, и только эти точки.

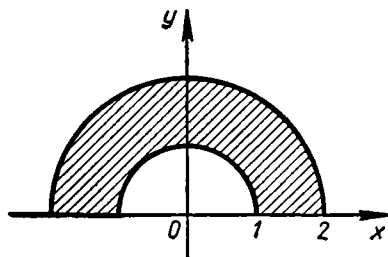
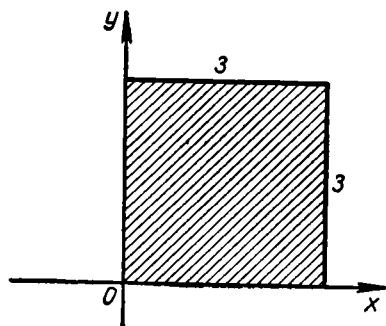
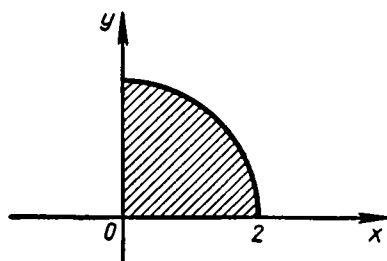


Рис. 41

4. Умножение и деление комплексных чисел в тригонометрической форме. В то время как сложение и вычитание комплексных чисел удобнее делать в алгебраической форме, умножение и деление проще выполнять, используя тригонометрическую форму комплексных чисел.

Возьмем два произвольных комплексных числа, заданных в тригонометрической форме:

$$z_1 = r_1 (\cos \varphi_1 + i \sin \varphi_1),$$

$$z_2 = r_2 (\cos \varphi_2 + i \sin \varphi_2).$$

Перемножая эти числа, получим:

$$\begin{aligned} z_1 z_2 &= r_1 (\cos \varphi_1 + i \sin \varphi_1) \cdot r_2 (\cos \varphi_2 + i \sin \varphi_2) \\ &= r_1 r_2 (\cos \varphi_1 \cos \varphi_2 - \sin \varphi_1 \sin \varphi_2 + i (\sin \varphi_1 \cos \varphi_2 + \cos \varphi_1 \sin \varphi_2)). \end{aligned}$$

Но по формулам тригонометрии

$$\begin{aligned} \cos \varphi_1 \cos \varphi_2 - \sin \varphi_1 \sin \varphi_2 &= \\ &= \cos (\varphi_1 + \varphi_2), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \sin \varphi_1 \cos \varphi_2 + \cos \varphi_1 \sin \varphi_2 &= \\ &= \sin (\varphi_1 + \varphi_2), \end{aligned}$$

и потому

$$z_1 z_2 = r_1 r_2 (\cos (\varphi_1 + \varphi_2) + i \sin (\varphi_1 + \varphi_2)). \quad (1)$$

Таким образом, при умножении комплексных чисел их модули перемножаются, а аргументы

складываются. Так как при этом модули преобразуются отдельно, а аргументы — отдельно, то выполнение умножения в тригонометрической форме проще, чем в алгебраической.

Из равенства (1) вытекают соотношения:

$$|z_1 z_2| = |z_1| |z_2|, \quad (2)$$

$$\text{Arg } (z_1 z_2) = \text{Arg } z_1 + \text{Arg } z_2. \quad (3)$$

Поскольку деление — действие, обратное умножению, то при $z_1 \neq 0$ получаем, что

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1}{r_2} [\cos(\varphi_1 - \varphi_2) + i \sin(\varphi_1 - \varphi_2)],$$

или

$$\left| \frac{z_1}{z_2} \right| = \frac{|z_1|}{|z_2|}, \quad (4)$$

$$\text{Arg } \frac{z_1}{z_2} = \text{Arg } z_1 - \text{Arg } z_2. \quad (5)$$

Иными словами, *модуль частного равен отношению модулей делимого и делителя, а аргумент частного — разности аргументов делимого и делителя.*

Остановимся теперь на геометрическом смысле умножения комплексных чисел. Формулы (1) — (3) показывают, что для нахождения произведения $z_1 z_2$ надо сначала увеличить модуль числа z_1 в $|z_2|$ раз, не изменяя его модуля, а затем увеличить аргумент полученного числа на $\text{Arg } z_2$, не изменяя его модуля. Первая из этих операций геометрически означает гомотеию относительно точки O с коэффициентом $|z_2|$, а вторая — поворот относительно точки O на угол, равный $\text{Arg } z_2$. Считая здесь один множитель постоянным ($z_2 = c$), а другой — переменным ($z_1 = z$), можем сформулировать результат так: формула

$$w = cz$$

определяет на комплексной плоскости произведение гомотеии относительно точки O (с коэффициентом, равным $|c|$) и поворота относительно той же точки O (на угол, равный $\text{Arg } c$, см. рис. 42). Отметим, что если

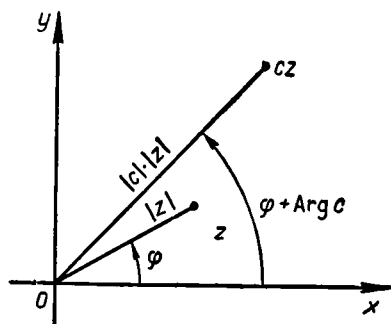


Рис. 42

¹ Здесь, как и далее в аналогичных случаях, равенство означает, что обе части совпадают с точностью до кратного 2π .

число r представлено в тригонометрической форме $c = r(\cos \varphi + i \sin \varphi)$, то умножение на первый множитель дает указанную здесь гомотеию, а на второй — поворот.

У п р а ж н е н и я

33. Вычислить следующие выражения, представив их в тригонометрической форме

$$\text{а) } \frac{\sqrt{3} + i}{1 - i}; \quad \text{б) } \frac{\sqrt{3} + \sqrt{3}i}{1 - \sqrt{3}i}; \quad \text{в) } \frac{1 + \cos \alpha + i \sin \alpha}{1 + \cos \alpha - i \sin \alpha}.$$

34. Вычислить $\frac{1}{1 - z}$, где $z = \cos \varphi + i \sin \varphi$.

35. Какое геометрическое преобразование комплексной плоскости определяют формулы:

- а) $w = cz$ (где c — действительное число);
б) $w = 3z + 5i$?

36. Выразите в виде $w = f(z)$ геометрическое преобразование комплексной плоскости, состоящее в последовательном выполнении:

а) гомотеии относительно точки O с коэффициентом 2 и переноса на 3 единицы вниз;

б) тех же преобразований в обратном порядке.

37. а) Выразите в виде $w = f(z)$ гомотеию комплексной плоскости относительно точки z_0 с коэффициентом 5.

б) Докажите, что гомотеию, указанную в задаче 37а, можно представить в виде произведения гомотеии относительно нулевой точки и параллельного переноса.

38. Постройте образ области, заштрихованной на рис. 43, при преобразовании:

- а) $w = iz$; б) $w = (2 + i)z$; в) $w = (2 + i)z + 1 - 2i$.

5. Возведение комплексных чисел в степень. Формула Муавра.
Из формулы (2), п. 4, вытекает, что если

$$z = r(\cos \varphi + i \sin \varphi),$$

то

$$z^n = r^n(\cos n\varphi + i \sin n\varphi). \quad (1)$$

Иными словами, при возведении комплексного числа z в степень с натуральным показателем его модуль возводится в степень с тем же показателем, а аргумент умножается на показатель степени:

$$|z^n| = |z|^n,$$

$$\operatorname{Arg} |z^n| = n \operatorname{Arg} z.$$

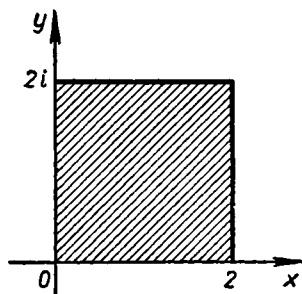


Рис. 43

Вычислим, например, $(\sqrt{3} - i)^8$. Для этого сначала найдем модуль и аргумент числа $z = \sqrt{3} - i$. Мы имеем:

$$|z| = \sqrt{3+1} = 2, \quad \cos \varphi = \frac{\sqrt{3}}{2}, \quad \sin \varphi = -\frac{1}{2}.$$

Отсюда $\varphi = -\frac{\pi}{6}$, а, значит, тригонометрическая форма числа z имеет вид:

$$\sqrt{3} - i = 2 \left[\cos \left(-\frac{\pi}{6} \right) + i \sin \left(-\frac{\pi}{6} \right) \right].$$

Но тогда по формуле (1) имеем:

$$\begin{aligned} (\sqrt{3} - i)^8 &= 2^8 \left[\cos \left(-\frac{8}{6}\pi \right) + i \sin \left(-\frac{8\pi}{6} \right) \right] = \\ &= 256 \left[-\frac{1}{2} + \frac{i\sqrt{3}}{2} \right] = -128 + 128\sqrt{3}i. \end{aligned}$$

Разумеется, возведение в степень по формуле бинома Ньютона было бы здесь гораздо сложнее.

Отметим частный случай формулы (1), называемый *формулой Муавра*. Положим в равенстве (1) $r = 1$. Мы получим, что

$$(\cos \varphi + i \sin \varphi)^n = \cos n\varphi + i \sin n\varphi. \quad (2)$$

Этой формулой можно пользоваться для выражения синусов и косинусов кратных углов через синусы и косинусы угла φ .

Например, при $n = 3$ получаем:

$$\begin{aligned} \cos 3\varphi + i \sin 3\varphi &= [\cos \varphi + i \sin \varphi]^3 = \cos^3 \varphi + 3i \cos^2 \varphi \sin \varphi - \\ &- 3 \cos \varphi \sin^2 \varphi - i \sin^3 \varphi. \end{aligned}$$

Но из равенства комплексных чисел вытекает равенство действительных и мнимых частей. Поэтому

$$\begin{aligned} \cos 3\varphi &= \cos^3 \varphi - 3 \cos \varphi \sin^2 \varphi, \\ \sin 3\varphi &= 3 \cos^2 \varphi \sin \varphi - \sin^3 \varphi. \end{aligned}$$

У п р а ж н е н и я

39. Вычислите следующие выражения:

$$\text{а) } \frac{(1+i)^5(\sqrt{3}+i)^{10}}{(1-i)^4(1-i\sqrt{3})^{11}}, \quad \text{б) } \frac{(1-i)^7(-\sqrt{3}-i)^{12}}{(1+i)^{15}}; \quad \text{в) } \frac{(1+i)^{124}}{(1-i)^{98}-i(1+i)^{98}}.$$

40. Пользуясь формулой Муавра, выразить:

- а) $\cos 4\varphi$ и $\sin 4\varphi$ через $\cos \varphi$ и $\sin \varphi$;
б) $\cos 5\varphi$ и $\sin 5\varphi$ через $\cos \varphi$ и $\sin \varphi$.

41. Пользуясь формулой Муавра и биномом Ньютона, выведите формулы для $\cos n\varphi$ и $\sin n\varphi$ через $\cos \varphi$ и $\sin \varphi$.

42. Найдите $(1 + \sin \varphi + i \cos \varphi)^n$.

43. Докажите, что при любом (натуральном) n $\cos \varphi$ можно рационально выразить через $\sin \varphi$. Можно ли то же самое сказать о $\sin n\varphi$?

44. Докажите, что если $z + \frac{1}{z} = 2 \cos \varphi$ (где z — комплексное число), то $z^n + \frac{1}{z^n} = 2 \cos n\varphi$.

45. Найдите сумму:

а) $\sin \varphi + \sin 2\varphi + \dots + \sin n\varphi$,

б) $\cos \varphi + \cos 2\varphi + \dots + \cos n\varphi$.

(У к а з а н и е: Считая φ аргументом некоторого комплексного числа z , рассмотрите сумму $z + z^2 + \dots + z^n$).

6. Извлечение корня из комплексного числа. Как и для действительных чисел, *корнем n -й степени из комплексного числа c* называется такое комплексное число z , что $z^n = c$. Корень n -й степени из c обозначают $\sqrt[n]{c}$. Таким образом, если $z = \sqrt[n]{c}$, то $z^n = c$. Мы покажем сейчас, что из любого комплексного числа c можно извлечь корень n -й степени, причем если $c = 0$, то $\sqrt[n]{c}$ принимает n значений.

Связь между комплексными числами z и z^n записывается наиболее просто, если эти числа выражены в тригонометрической форме. Поэтому при решении уравнения $z^n = c$ следует пользоваться именно этим представлением комплексных чисел. Обозначим модуль и аргумент данного числа c соответственно через r и α (считая α каким-нибудь одним из значений $\text{Arg } c$), а модуль и аргумент искомого числа z — через ρ и φ . Тогда

$$z = \rho(\cos \varphi + i \sin \varphi), \quad c = r(\cos \alpha + i \sin \alpha),$$

и в силу формулы (1), п. 5, равенство $z^n = c$ переписывается так:

$$\rho^n (\cos n\varphi + i \sin n\varphi) = r(\cos \alpha + i \sin \alpha). \quad (1)$$

Чтобы выполнялось равенство (1), нужно, чтобы неизвестные ρ и φ удовлетворяли соотношениям

$$\rho^n = r, \quad n\varphi = \alpha + 2k\pi, \quad (2)$$

где k — какое-нибудь целое число. Учитывая, что ρ должно быть неотрицательным действительным числом, находим отсюда:

$$\rho = r^{\frac{1}{n}}, \quad \varphi = \frac{\alpha}{n} + \frac{2\pi k}{n}. \quad (3)$$

Итак, для модуля ρ неизвестного числа z мы получили единственное, вполне определенное значение. Что же касается аргумента φ этого числа, то он может принимать различные значения $\varphi = \varphi_k$ в зависимости от значений целого числа k . Однако не всегда различным значениям k будут соответствовать различные числа $z = z_k$. В самом деле, при увеличении k на 1 $\varphi_k = \text{Arg } z_k$ увеличивается на $\frac{2\pi}{n}$; при увеличении k на n единиц φ_k увеличивается на 2π , а это значит, что $z_{k+n} = z_k$. Следовательно, формулы (3) определяют n различных комплексных чисел z_k , которые можно получить, придавая k любые n последовательных целых значений, например, беря $k = 0, 1, \dots, n - 1$. Попутно мы видим также, что точки, изображающие все получаемые значения z_k , лежат на одной окружности (центром которой является точка O , а радиусом — число ρ) и делят эту окружность на равные части (дуга между любыми двумя соседними точками составляет $\frac{2\pi}{n}$ рад.), то есть являются вершинами правильного n -угольника.

Итак, нами получена следующая

Теорема Корень n -й степени из любого комплексного числа имеет в поле комплексных чисел n значений:

$$\sqrt[n]{r(\cos \alpha + i \sin \alpha)} = r^{\frac{1}{n}} \left(\cos \frac{\alpha + 2k\pi}{n} + i \sin \frac{\alpha + 2k\pi}{n} \right), \quad k = 0, 1, \dots, n - 1. \quad (4)$$

Эти значения изображаются вершинами правильного n -угольника с центром в нулевой точке.

Рассмотрим некоторые частные случаи этой теоремы.

1) Квадратный корень из комплексного числа. При $n = 2$ формулы (3) определяют два значения корня $z = \sqrt{c}$:

$$\begin{aligned} z_0 &= r^{\frac{1}{2}} \left(\cos \frac{\alpha}{2} + i \sin \frac{\alpha}{2} \right), \\ z_1 &= r^{\frac{1}{2}} \left[\cos \left(\frac{\alpha}{2} + \pi \right) + i \sin \left(\frac{\alpha}{2} + \pi \right) \right] = \\ &= -r^{\frac{1}{2}} \left(\cos \frac{\alpha}{2} + i \sin \frac{\alpha}{2} \right). \end{aligned}$$

Эти значения оказываются (как и следовало ожидать) взаимно противоположными.

2) Кубический корень из комплексного числа. При $n = 3$ формулы (3) дают три значения корня $z = \sqrt[3]{c}$:

$$z_0 = r^{\frac{1}{3}} \left(\cos \frac{\alpha}{3} + i \sin \frac{\alpha}{3} \right),$$

$$z_1 = r^{\frac{1}{3}} \left(\cos \frac{\alpha + 2\pi}{3} + i \sin \frac{\alpha + 2\pi}{3} \right),$$

$$z_2 = r^{\frac{1}{3}} \left(\cos \frac{\alpha + 4\pi}{3} + i \sin \frac{\alpha + 4\pi}{3} \right).$$

Например, если $c = i$, то $r = 1$, $\alpha = \frac{\pi}{2}$, и мы получаем следующие значения $z = \sqrt[3]{i}$:

$$z_0 = \cos \frac{\pi}{6} + i \sin \frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{i}{2},$$

$$z_1 = \cos \frac{5}{6} \pi + i \sin \frac{5}{6} \pi = -\frac{3}{2} + \frac{i}{2},$$

$$z_2 = \cos \frac{3}{2} \pi + i \sin \frac{3}{2} \pi = -i.$$

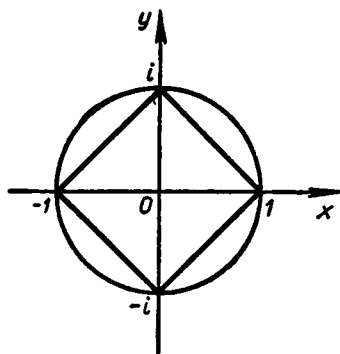


Рис. 44

3) Корень n -й степени из положительного действительного числа. Если a — положительное действительное число, то $r = a$, $\alpha = 0$. Формулы (3) дают в этом случае

$$\sqrt[n]{a} = a^{\frac{1}{n}} \left(\cos \frac{2k\pi}{n} + i \sin \frac{2k\pi}{n} \right).$$

При $k = 0$ мы получаем положительное действительное значение

$$z_0 = a^{\frac{1}{n}} (\cos 0 + i \sin 0) = a^{\frac{1}{n}},$$

то есть арифметическое значение корня.

Если n — четное число, то при $k = \frac{n}{2}$ мы получим еще одно действительное (отрицательное) значение корня:

$$z_{\frac{n}{2}} = a^{\frac{1}{n}} (\cos \pi + i \sin \pi) = -a^{\frac{1}{n}}.$$

Так, например, для $\sqrt[4]{1}$ получаем следующие значения:

$$z_0 = 1, z_1 = i, z_2 = -1, z_3 = -i \text{ (рис. 44).}$$

Если же n — нечетное число, то арифметическое значение корня $\sqrt[n]{a}$ является единственным действительным его значением.

Так, например, для $\sqrt[3]{1}$ мы получаем, кроме арифметического значения $z_0 = 1$, еще два мнимых значения:

$$z_1 = \cos \frac{2\pi}{3} + i \sin \frac{2\pi}{3} = -\frac{1}{2} + i \frac{\sqrt{3}}{2},$$

$$z_2 = \cos \frac{4\pi}{3} + i \sin \frac{4\pi}{3} = -\frac{1}{2} - i \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

В заключение остановимся на одном моменте, отличающем извлечение корня в поле комплексных чисел от того же действия в поле действительных чисел. В поле действительных чисел, когда значение корня оказывается единственным, символом $\sqrt[n]{c}$ обозначают лишь одно из всех значений корня — его арифметическое значение. При этом правила действий над радикалами относятся именно к арифметическим значениям. В поле же комплексных чисел невозможно выбрать для каждого из выражений $\sqrt[n]{a}$ какое-нибудь одно значение в качестве «главного» («арифметического») так, чтобы применительно к этим значениям оставались справедливыми известные нам правила действий над радикалами.

В самом деле, предположим, что для любого n (или даже только для $n = 2$) и для любого комплексного числа a мы каким-то способом выбрали одно из значений $\sqrt[n]{a}$ так, что для этих «главных» значений корня справедливо тождество

$$\sqrt[n]{ab} = \sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b}. \quad (5)$$

Тогда с помощью формулы (5) мы получили бы (обозначая каждый раз символом $\sqrt[n]{a}$ «главное» значение квадратного корня):

$$\begin{aligned} \sqrt{a} &= \sqrt{(-1)(-a)} = \sqrt{(-1)} \sqrt{-a} = \sqrt{-1} \sqrt{(-1)(-a)} = \\ &= (\sqrt{-1})^2 \sqrt{a} = -\sqrt{a} \end{aligned}$$

(ибо $(\sqrt{-1})^2 = -1$, независимо от того, какое из значений $\sqrt{-1}$: i или $-i$ принято в качестве «главного»). Полученное противоречие и доказывает наше утверждение. Таким образом, понятие арифметического корня при пере-

ходе от действительных чисел к комплексным теряет смысл, и все значения корня оказываются совершенно равноправными между собой. Поэтому символ $\sqrt[n]{a}$ в применении к комплексным числам означает не одно число, а совокупность n чисел.

У п р а ж н е н и я

46. Сколько и какие значения имеет произведение $\sqrt{-16} \cdot \sqrt{-9}$?

47. Можно ли утверждать, что для комплексных чисел справедливы равенства:

$$\sqrt{(a+bi)(c+di)} = \sqrt{a+bi} \sqrt{c+di};$$

$$\sqrt{(a+bi)^2} = (\sqrt{a+bi})^2?$$

48. Вычислить выражения:

$$\sqrt[3]{i}, \quad \sqrt[4]{i}, \quad \sqrt[3]{-2+2i}, \quad \sqrt[4]{-1}.$$

49. Решить квадратные уравнения:

а) $x^2 - 4ix + 12 = 0$; б) $x^2 + 7ix - 12 = 0$; в) $x^2 - 8ix - 15 = 0$.

50. Справедлива ли теорема, обратная теореме настоящего пункта: всякие n комплексных чисел, изображаемые вершинами правильного n -угольника с центром в нулевой точке, являются значениями корня n -й степени из некоторого комплексного числа?

51. Выведите из формулы (4) известные ранее утверждения о действительных значениях корня из отрицательного действительного числа.

52. а) Докажите, что все значения $\sqrt[n]{1}$ являются степенями одного из них.

б) Докажите, что при любом n совокупность всех значений $\sqrt[n]{1}$ замкнута относительно действий умножения и деления.

53. Докажите, что все значения $\sqrt[n]{a}$ можно получить, умножая какое-нибудь одно значение этого корня на все значения $\sqrt[n]{1}$.

7*. Функции комплексного переменного и преобразования комплексной плоскости. В анализе мы познакомились с функциями действительного переменного. Совершенно так же определяется, что такое функция комплексного переменного. Именно если каждому числу z из некоторого множества A поставлено в соответствие некоторое число w , то говорят, что задана *функция* $w = f(z)$. С некоторыми функциями мы уже встречались: на стр. 210 — с функцией $w = z + c$, а на стр. 217 — с функцией $w = cz$.

В отличие от функций действительного переменного функции комплексного переменного нельзя изображать с помощью графика. Ведь для переменной z нужны две координаты x и y , для переменной w нужны еще две координаты, а всего 4 координаты. Ясно,

что «график» функции комплексного переменного не может быть изображен в трехмерном пространстве.

Для функций комплексного переменного пользуются иной формой описания — с каждой такой функцией связывают преобразование комплексной плоскости. Именно, каждой точке z множества G ставят в соответствие точку $w = f(z)$. Иногда берут два экземпляра комплексной плоскости — плоскость z и плоскость w и ставят в соответствие точке z на первой плоскости точку $w = f(z)$ на второй плоскости. При этом вместо преобразования плоскости получают отображение плоскости z на плоскость w .

Мы уже рассматривали некоторые геометрические преобразования, связанные с функциями комплексного переменного. Так, функции $w = z + c$, $c = a + bi$ соответствует параллельный перенос на вектор с координатами a и b , а функции $w = cz$ — преобразование, сводящееся к гомотетии с коэффициентом $|c|$ и повороту на угол $\text{Arg } c$ вокруг начала координат.

Задание функции комплексного переменного сводится по сути дела к заданию двух функций, каждая из которых зависит от двух действительных переменных. Возьмем, например, функцию $w = z^2$. Пусть $z = x + iy$, $w = u + iv$. Тогда эту функцию можно записать так:

$$u + iv = (x + iy)^2 = x^2 + 2ixy + i^2y^2 = x^2 - y^2 + 2ixy. \quad (1)$$

Но два комплексных числа равны тогда и только тогда, когда равны их действительная и мнимая части. Поэтому из равенства (1) получаем:

$$\begin{aligned} u &= x^2 - y^2, \\ v &= 2xy. \end{aligned} \quad (2)$$

Из формул (2) видно, что, например, точка $M_1(3, 1)$ переходит при этом преобразовании в точку $N_1(8, 6)$, точка $M_2(0, 2)$ — в точку $N_2(-4, 4)$ и т. д.

Посмотрим, в какую линию переходит при преобразовании $w = z^2$ прямая $y = c$. Для этого положим в равенствах (2) $y = c$. Мы получим:

$$\begin{aligned} u &= x^2 - c^2, \\ v &= 2cx. \end{aligned}$$

Исключим из этих равенств x . Для этого найдем x из второго равенства и подставим в первое равенство. Мы получим уравнение

$$u = \frac{v^2}{4c^2} - c^2.$$

Оно является уравнением параболы на плоскости (u, v) . Ось этой параболы совпадает с осью Ou , а вершина находится в точке $P(-c^2, 0)$. Точно так же устанавливается, что прямые $x = c$ переходят в параболы

$$u = c^2 - \frac{v^2}{4c^2}.$$

Таким образом преобразование $w = z^2$ переводит координатную сетку на плоскости в сетку, состоящую из двух семейств парабол (рис. 45). Через каждую точку плоскости проходит по одной параболе каждого семейства. Эти параболы пересекаются под прямым углом — преобразование $w = z^2$ меняет вид кривых, но сохраняет углы между ними (исключением является лишь точка $z = 0$, в этой точке при преобразовании $w = z^2$ все углы удваиваются). Преобразования, сохраняющие углы между кривыми, называются *конформными*.

Рассмотрим еще преобразование $w = \frac{1}{z}$ («обратная пропорциональность»). Если $z = r(\cos \varphi + i \sin \varphi)$, то $w = \frac{1}{z} = \frac{1}{r} [\cos(-\varphi) +$

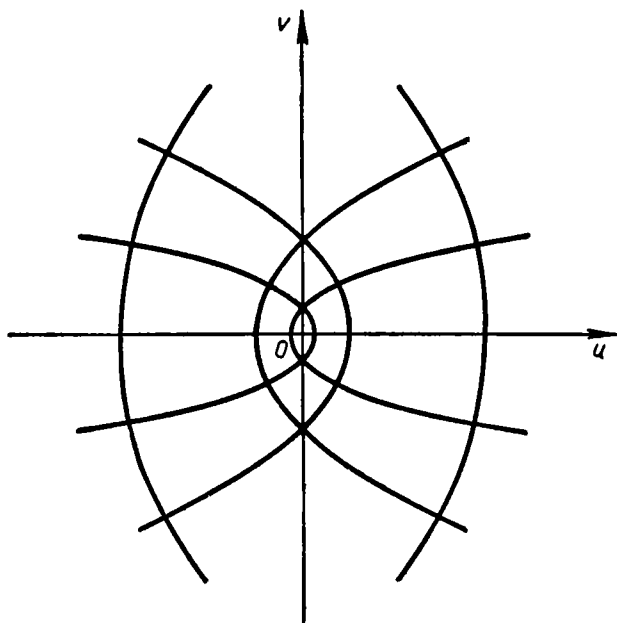


Рис. 45

$+ i \sin(-\varphi)]$. Таким образом, при преобразовании $w = \frac{1}{z}$ точка $z \neq 0$ с модулем r и аргументом φ переходит в точку w с модулем $\frac{1}{r}$ и аргументом $-\varphi$. Это преобразование можно разбить на два. Первое из них состоит в том, что модуль числа не меняется, а аргумент φ заменяется на $-\varphi$. При этом преобразовании точка z переходит в точку, симметричную с ней относительно оси абсцисс. При втором преобразовании аргумент числа остается неизменным, а модуль r заменяется на $\frac{1}{r}$. При этом преобразовании точки остаются на том же самом луче, проходящем через начало координат, но их расстояние до начала координат заменяется обратным числом. Второе преобразование называют в геометрии *инверсией с центром в точке O* (и коэффициентом 1) или, иначе, *симметрией относительно единичной окружности*. Последнее название связано с тем, что при инверсии точки единичной окружности $|z| = 1$ остаются неподвижными.

У п р а ж н е н и я

54. В какую точку переходит $z = 1 + i$ при преобразовании $w = z^3$?

55. В какую линию переходит при преобразовании $w = \frac{1}{z}$ прямая $x = 4$?

56. Запишите в виде двух функций от двух действительных переменных следующие функции комплексного переменного:

а) $w = \frac{1}{z}$; в) $w = z + 2\bar{z}$; д) $w = \bar{z} + z^2$.

б) $w = \frac{1}{z^2}$; г) $w = z^3$.

57. Во что перейдут при преобразовании $w = z^2$ области, изображенные на рис. 41, а, б, в (см. стр. 216)?

58. Во что перейдет при преобразовании $w = z^2$:

а) прямая, параллельная мнимой оси и проходящая через точку 1;

б) полуплоскость, расположенная справа от этой прямой;

в) часть плоскости («полоса»), ограниченная этой прямой и мнимой осью?

59. Во что перейдет при преобразовании $w = z^2$:

а) прямая, параллельная действительной оси и проходящая через точку i ;

б) полуплоскость, расположенная выше этой прямой;

в) полоса, ограниченная этой прямой и действительной осью?

60. Во что перейдет при преобразовании $w = z^2$ совокупность тех точек $z = x + iy$ комплексной плоскости, для которых

а) $0 < x < 1, 0 < y < 1$; б) $x > 1, y > 1$?

61. Во что перейдут области, указанные в задаче 60, при преобразовании $w = \frac{1}{z}$?

62. Во что переходит при преобразовании $w = \frac{1+z}{1-z}$:

а) мнимая ось;

б) полуплоскость, расположенная справа от мнимой оси?

(У к а з а н и е: выразите z через w и найдите условия, которым должно удовлетворять w , чтобы z принадлежало заданному множеству.)

63. Запишите в виде $w = f(z)$ формулу преобразования комплексной плоскости, переводящего круг $|z| < 1$ в полуплоскость, ограниченную мнимой осью и расположенную:

а) справа от нее;

б) слева от нее.

(У к а з а н и е: воспользуйтесь результатами задачи 62.)

§ 3. Некоторые виды алгебраических уравнений

1. Комплексные корни алгебраических уравнений. В предыдущих главах мы рассматривали лишь уравнения с действительными коэффициентами и лишь действительные корни таких уравнений.

После введения комплексных чисел круг изучаемых уравнений расширяется. Теперь уже можно рассматривать и уравнения с комплексными коэффициентами, например, такие, как

$$(2 + 5i)x^2 - 4ix + 7 = 0$$

или

$$x^7 - ix^5 + 2ix^3 - 1 = 0.$$

Для этих уравнений, да и для уравнений с действительными коэффициентами, теперь можно рассматривать не только действительные, но и комплексные корни. Например, ранее для уравнения $x^4 - 16 = 0$ мы имели лишь два корня: $x_1 = 2$, $x_2 = -2$. Это уравнение можно записать в виде

$$(x - 2)(x + 2)(x^2 + 4) = 0,$$

причем третий множитель для действительных значений x не обращается в нуль. Теперь мы можем решить и уравнение

$$x^2 + 4 = 0,$$

получающееся приравниванием нулю третьего множителя. Оно дает еще два корня: $x_3 = 2i$, $x_4 = -2i$.

Таким образом, над полем комплексных чисел уравнение $x_4 - 16 = 0$ имеет четыре корня:

$$x_1 = 2, \quad x_2 = -2, \quad x_3 = 2i, \quad x_4 = -2i.$$

Можно показать, что почти все свойства многочленов и уравнений над полем действительных чисел сохраняются после перехода к многочленам и уравнениям над полем комплексных чисел. Повторим кратко эти свойства.

Если $f(x)$ — многочлен над полем комплексных чисел и α — любое комплексное число, то остаток от деления $f(x)$ на $(x - \alpha)$ равен $f(\alpha)$. В частности, если α — корень многочлена $f(x)$, то $f(x)$ делится на $(x - \alpha)$ без остатка. Если $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_k$ — различные корни многочлена $f(x)$, то $f(x)$ делится без остатка на выражение $(x - \alpha_1) \dots (x - \alpha_k)$. Поэтому многочлен n -й степени не может иметь больше чем n различных корней.

Мы опускаем доказательство этих свойств в случае многочленов над полем комплексных чисел, поскольку оно проводится точно так же, как в главе II.

Перейдем теперь к рассмотрению некоторых типов уравнений, решение которых тривиально над полем действительных чисел, но представляет большой интерес после расширения этого поля до поля комплексных чисел.

2. Двучленные уравнения. Двучленными уравнениями называют уравнения вида

$$ax^n + b = 0, \quad a \neq 0.$$

Перенесем свободный член уравнения в правую часть и разделим обе части получившегося равенства на a . Мы получим уравнение

$$x^n = -\frac{b}{a}. \quad (1)$$

Если a и b — действительные числа и если рассматриваются лишь действительные корни уравнения, то дело обстоит следующим образом: при четном n уравнение имеет два корня, если $\frac{b}{a} < 0$, и ни одного корня, если $\frac{b}{a} > 0$; при нечетном n уравнение имеет только один корень.

Будем теперь считать a и b любыми комплексными числами (в частном случае — действительными числами) и поставим задачу отыскания всех комплексных корней уравнения (1).

Ясно, что решениями нашего уравнения являются корни n -й степени из числа $-\frac{b}{a}$. Обозначим модуль этого числа через r , а его аргумент через φ :

$$-\frac{b}{a} = r(\cos \varphi + i \sin \varphi).$$

Тогда по формуле (4) из п. 6 § 2 все решения двучленного уравнения даются формулой:

$$x = \sqrt[n]{r} \left(\cos \frac{\varphi + 2k\pi}{n} + i \sin \frac{\varphi + 2k\pi}{n} \right), \quad (2)$$

где k пробегает значения $0, 1, \dots, n-1$.

Рассмотрим отдельно уравнения вида $x^n - 1 = 0$. Их решения называются *корнями n -й степени из единицы*. При некоторых значениях n можно вычислить корни n -й степени из единицы, не прибегая к тригонометрической форме комплексных чисел.

Решим уравнение:

$$x^3 - 1 = 0.$$

Разлагая левую часть на множители, получаем

$$(x - 1)(x^2 + x + 1) = 0.$$

Тем самым решение нашего уравнения свелось к решению линейного уравнения $x - 1 = 0$ и квадратного уравнения $x^2 + x + 1 = 0$. Решая их, находим, что корнями третьей степени из единицы являются

$$x_1 = 1, \quad x_{2,3} = -\frac{1}{2} \pm i \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Точно так же решается уравнение $x^4 - 1 = 0$. Разлагая левую часть на множители, получаем:

$$(x - 1)(x + 1)(x^2 + 1) = 0.$$

Отсюда следует, что корнями уравнения являются числа:

$$x_1 = 1, \quad x_2 = -1, \quad x_{3,4} = \pm i.$$

Уравнение $x^6 - 1 = 0$ можно записать в виде:

$$(x^3 - 1)(x^3 + 1) = 0,$$

или, иначе,

$$(x - 1)(x + 1)(x^2 + x + 1)(x^2 - x + 1) = 0.$$

Поэтому его корнями являются числа:

$$x_1 = 1, \quad x_2 = -1, \quad x_{3,4} = -\frac{1}{2} \pm i \frac{\sqrt{3}}{2},$$

$$x_{5,6} = \frac{1}{2} \pm i \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Далее, решим уравнение $x^8 - 1 = 0$. Разлагая левую часть на множители, получаем:

$$(x - 1)(x + 1)(x^2 + 1)(x^4 + 1) = 0.$$

Легко найти четыре корня этого уравнения: $x_1 = 1$, $x_2 = -1$, $x_3 = i$, $x_4 = -i$. Чтобы найти остальные корни, надо решить уравнение $x^4 + 1 = 0$. Для этого добавим и вычтем $2x^2$. Мы получим уравнение

$$x^4 + 2x^2 + 1 - 2x^2 = 0,$$

или, иначе,

$$(x^2 + 1)^2 - (x\sqrt{2})^2 = 0.$$

Разлагая левую часть на множители, получаем:

$$(x^2 + x\sqrt{2} + 1)(x^2 - x\sqrt{2} + 1) = 0.$$

Теперь задача свелась к решению совокупности двух квадратных уравнений:

$$\begin{cases} x^2 + x\sqrt{2} + 1 = 0, \\ x^2 - x\sqrt{2} + 1 = 0. \end{cases}$$

Из них находим еще четыре корня уравнения:

$$x_{5,6} = -\frac{\sqrt{2}}{2}(1 \pm i),$$

$$x_{7,8} = \frac{\sqrt{2}}{2}(1 \pm i).$$

Несколько сложнее решение уравнения

$$x^6 - 1 = 0.$$

Разлагая левую часть на множители, получаем уравнение:

$$(x - 1)(x^4 + x^3 + x^2 + x + 1) = 0.$$

Поэтому $x_1 = 1$. Для отыскания остальных корней надо решить уравнение $x^4 + x^3 + x^2 + x + 1 = 0$. Это уравнение является возвратным. Разделим обе части уравнения на x^2 и положим $x + \frac{1}{x} = z$. Так как

$$x^2 + \frac{1}{x^2} = z^2 - 2,$$

то уравнение примет вид: $z^2 + z - 1 = 0$. Отсюда находим: $z_{1,2} = -\frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{5}}{2}$. Поэтому решение нашего уравнения сводится к решению двух уравнений:

$$x + \frac{1}{x} = \frac{-1 + \sqrt{5}}{2} \text{ и } x + \frac{1}{x} = \frac{-1 - \sqrt{5}}{2},$$

или, что то же, совокупности квадратных уравнений:

$$x^2 + \frac{1 - \sqrt{5}}{2}x + 1 = 0 \text{ и } x^2 + \frac{1 + \sqrt{5}}{2}x + 1 = 0.$$

Решая эти уравнения, находим, что

$$x_{2,3} = \frac{\sqrt{5} - 1 \pm i\sqrt{10 + 2\sqrt{5}}}{4},$$

$$x_{4,5} = \frac{-\sqrt{5} - 1 \pm i\sqrt{10 - 2\sqrt{5}}}{4}.$$

3. Корни из единицы и построение правильных многоугольников. Мы знаем, что точки, изображающие корни n -й степени из единицы, лежат на окружности единичного радиуса с центром в начале координат и являются вершинами правильного n -угольника, вписанного в эту окружность. Одной из вершин этого правильного n -угольника является точка $z = 1$.

В предыдущем пункте мы получили для $n = 2, 3, 4, 5, 6, 8$ формулы, выражающие корни n -й степени из единицы. Эти формулы содержат лишь квадратичные иррациональности.

Из геометрии известно, как, зная отрезки a и b , построить циркулем и линейкой их сумму, как построить отрезок длины \sqrt{ab} и как делить отрезок на равные части. Пользуясь этим, можно, исходя из единичного отрезка, построить циркулем и линейкой вершины правильного n -угольника при $n = 2, 3, 4, 5, 6, 8$.

Знаменитый немецкий математик Гаусс исследовал в 1797 году вопрос о том, какие правильные многоугольники можно построить циркулем и линейкой. Оказалось, что если число $n = 2^{2^m} + 1$ простое, то n -угольник мож-

но построить циркулем и линейкой. Например, при $m = 0$ получаем $n = 3$, при $m = 1$ имеем $n = 5$, при $m = 2$ имеем $n = 17$, а при $m = 3$ имеем $n = 257$. Числа 3, 5, 17 и 257 — простые. Поэтому правильные треугольник, пятиугольник, 17-угольник и 257-угольник можно построить циркулем и линейкой.

Будем называть простые числа вида $p = 2^{2^m} + 1$ *гауссовскими*. Из результатов Гаусса следует, что правильный n -угольник можно построить циркулем и линейкой тогда и только тогда, когда $n = 2^k p_1 \dots p_n$, где p_1, \dots, p_n — различные между собой гауссовские простые числа. Например, правильный семиугольник нельзя построить циркулем и линейкой.

4. Трехчленные уравнения. Трехчленными называют уравнения вида

$$ax^{2n} + bx^n + c = 0. \quad (1)$$

Для того чтобы решить это уравнение, сделаем подстановку $x^n = z$. Тогда $x^{2n} = z^2$, и наше уравнение сводится к квадратному уравнению $az^2 + bz + c = 0$. Это уравнение имеет два корня: z_1 и z_2 . Так как $x^n = z$, решение уравнения (1) сводится к решению совокупности двух двучленных уравнений

$$\begin{cases} x^n = z_1, \\ x^n = z_2, \end{cases}$$

которое выполняется так, как было описано в п. 2. Так как каждое двучленное уравнение n -й степени имеет n корней, то трехчленное уравнение (1) имеет $2n$ корней, то есть столько корней, какова его степень.

П р и м е р ы. Решим уравнение $x^8 + 17x^4 + 16 = 0$. Полагая $x^4 = z$, приходим к квадратному уравнению $z^2 + 17z + 16 = 0$. Его корнями являются числа $z_1 = -1$, $z_2 = -16$. Теперь нам надо решить двучленные уравнения $x^4 = -1$, $x^4 = -16$. Из них находим, что:

$$x_1 = \cos \frac{\pi}{4} + i \sin \frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2} + i \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\sqrt{2}}{2} (1 + i),$$

$$x_2 = \frac{\sqrt{2}}{2} (-1 + i), \quad x_3 = \frac{\sqrt{2}}{2} (-1 - i),$$

$$x_4 = \frac{\sqrt{2}}{2} (1 - i), \quad x_5 = \sqrt{2} (1 + i), \quad x_6 = \sqrt{2} (-1 + i),$$

$$x_7 = \sqrt{2} (-1 - i), \quad x_8 = \sqrt{2} (1 - i).$$

У п р а ж н е н и е 64. Решите уравнения:

а) $x^8 - 15x^4 - 16 = 0$, в) $x^6 + (1 - \frac{3}{2}i)x^3 - \frac{3}{2}i = 0$.

б) $x^6 - 7x^3 - 8 = 0$;

§ 4. Основная теорема алгебры многочленов и ее следствия

1. Основная теорема алгебры многочленов. Мы доказали в п. 3 § 2 главы 1, что алгебраический многочлен n -й степени не может иметь больше чем n корней. Возникает вопрос, всегда ли многочлен n -й степени имеет ровно n корней или же число корней может оказаться меньше n ? Мы покажем ниже, что любой многочлен n -й степени с комплексными коэффициентами всегда имеет ровно n корней. При этом если среди корней есть кратные, то они считаются столько раз, какова их кратность.

Сформулированные сейчас утверждения вытекают из следующей теоремы, которую (ввиду ее важности) называют **основной теоремой алгебры многочленов**.

Теорема. *Любой многочлен ненулевой степени имеет хотя бы один комплексный корень.*

Коэффициенты многочлена могут быть любыми комплексными числами (в частности—действительными числами); нужно лишь, чтобы степень многочлена была отлична от нуля.

Доказательство этой теоремы весьма сложно, и мы не будем его здесь приводить.

Покажем теперь, как из основной теоремы алгебры многочленов вытекает утверждение о числе корней многочлена. Сначала докажем методом математической индукции следующую лемму.

Лемма. *Любой многочлен n -й степени*

$$f(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \dots + a_{n-1}x + a_n \quad (a_0 \neq 0, n \geq 1)$$

может быть представлен в виде произведения линейных множителей

$$f(x) = a_0(x - \alpha_1) \cdot \dots \cdot (x - \alpha_n). \quad (1)$$

Доказательство. При $n = 1$ утверждение очевидно — многочлен имеет вид $ax + b$; вынося за скобку a , мы приведем его к виду $a(x + \frac{b}{a})$, что и требовалось доказать.

Предположим, что для многочленов $(n - 1)$ -й степени уже доказана возможность представить их в виде произведения $n - 1$ линейного множителя. Покажем, что тогда и многочлен n -й степени можно представить в аналогичном виде. В самом деле, пусть

$$f(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \dots + a_n$$

— многочлен n -й степени. По основной теореме алгебры многочленов этот многочлен имеет по крайней мере один комплексный корень α_n . Но тогда по теореме Безу многочлен $f(x)$ делится на $x - \alpha_n$, так что его можно представить в виде

$$f(x) = (x - \alpha_n) \varphi(x). \quad (2)$$

Ясно, что $\varphi(x)$ — многочлен $(n - 1)$ -й степени, старший коэффициент которого равен a_0 . Поэтому по предположению индукции его можно представить в виде

$$\varphi(x) = a_0(x - \alpha_1) \dots (x - \alpha_{n-1}). \quad (3)$$

Из равенств (2) и (3) следует, что

$$f(x) = a_0(x - \alpha_1) \dots (x - \alpha_{n-1}) (x - \alpha_n).$$

Значит, и многочлен n -й степени можно представить в виде произведения линейных множителей.

Итак, утверждение доказано для многочленов первой степени и показано, что из его справедливости для многочленов $(n - 1)$ -й степени вытекает, что оно верно и для многочленов n -й степени. Поэтому оно верно для всех многочленов любой ненулевой степени.

Теперь уже легко доказать утверждение о числе корней многочлена. Возьмем любой многочлен n -й степени и запишем его в виде произведения линейных множителей

$$f(x) = a_0(x - \alpha_1) \dots (x - \alpha_n). \quad (4)$$

Ясно, что числа $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ являются корнями нашего многочлена — при подстановке вместо x одного из этих чисел хотя бы один из сомножителей в (4) обращается в нуль. В то же время ни одно из чисел, отличных от $\alpha_1, \dots, \alpha_n$, не является корнем многочлена $f(x)$: если подставить такое число вместо x в разложение (4), то ни одна из скобок не обратится в нуль, а произведение отличных от нуля комплексных чисел само отлично от нуля.

Итак, мы доказали, что *многочлен n -й степени имеет ровно n корней $\alpha_1, \dots, \alpha_n$* . Разумеется, среди этих корней могут оказаться и совпадающие. Тогда соответствующий корень считается столько раз,

сколько раз он встречается среди чисел $\alpha_1, \dots, \alpha_n$. Но если α встречается среди чисел $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ ровно k раз, то многочлен $f(x)$ делится на $(x - \alpha)^k$ и не делится на $(x - \alpha)^{k+1}$. Значит, α является корнем k -й кратности многочлена $f(x)$.

Из приведенных рассуждений вытекает справедливость следующей теоремы:

Теорема. *Каждый многочлен n -й степени с комплексными коэффициентами имеет n корней, где каждый корень считается столько раз, какова его кратность.*

У п р а ж н е н и я

65. Составить многочлен наименьшей степени со старшим коэффициентом 5 и корнями

$$\alpha_1 = 1, \alpha_2 = 3 - i, \alpha_3 = 4, \alpha_4 = i.$$

66. Составить многочлен наименьшей степени со старшим коэффициентом 6, имеющий корень 3 второй кратности и корень i третьей кратности.

2. Многочлены с действительными коэффициентами. Вернемся теперь к изучению многочленов над полем действительных чисел, то есть будем изучать многочлены

$$f(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \dots + a_n,$$

где a_0, a_1, \dots, a_n — действительные числа.

Основное свойство таких многочленов выражается следующей теоремой.

Теорема. *Если комплексное число $\alpha = \beta + \gamma i$ является корнем многочлена*

$$f(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \dots + a_n$$

с действительными коэффициентами, то и сопряженное с ним число $\bar{\alpha} = \beta - \gamma i$ является корнем того же уравнения.

Д о к а з а т е л ь с т в о. По условию при подстановке числа α в многочлен $f(x)$ получаем нуль, $f(\alpha) = 0$.

Но мы знаем (см. стр. 207), что при подстановке в многочлен $f(x)$ с действительными коэффициентами комплексного числа $\bar{\alpha}$, сопряженного с α , получается число, сопряженное с $f(\alpha)$. Иными словами, $f(\bar{\alpha}) = \overline{f(\alpha)}$. Но $f(\alpha) = 0$, а $\overline{0} = 0$ и потому $f(\bar{\alpha}) = 0$. Тем самым доказано, что $\bar{\alpha}$ — тоже корень многочлена $f(x)$.

Докажите сами, что кратность корня $\bar{\alpha}$ такова же, как и корня α .

П р и м е р. Построить многочлен наименьшей степени с действительными коэффициентами, имеющий корни $\alpha_1 = 4$, $\alpha_2 = 5 - 3i$.

Из доказанной теоремы вытекает, что этот многочлен, кроме корня $\alpha_3 = 5 - 3i$, должен иметь и сопряженный с ним корень $\alpha_4 = 5 + 3i$ (для корня $\alpha_1 = 4$ наша теорема не дает ничего нового, так как $\bar{4} = 4$). Поэтому искомым многочлен должен иметь следующий вид:

$$f(x) = (x - 4)(x - 5 + 3i)(x - 5 - 3i).$$

Раскроем скобки в этом выражении. Это удобнее всего сделать так:

$$\begin{aligned} & (x - 5 - 3i)(x - 5 + 3i) = \\ & = (x - 5)^2 - (3i)^2 = (x - 5)^2 + 9 = x^2 - 10x + 34. \end{aligned}$$

Поэтому дело свелось к перемножению многочленов с действительными коэффициентами:

$$f(x) = (x - 4)(x^2 - 10x + 34) = x^3 - 14x^2 + 74x - 136.$$

У п р а ж н е н и я

67. Построить многочлен наименьшей степени с действительными коэффициентами, имеющий корни

$$\alpha_1 = 4 - i, \alpha_2 = 2 + 3i.$$

68. Построить многочлен наименьшей степени с действительными коэффициентами, имеющий корень $2 + i$ кратности два и корень 3 кратности четыре.

3. Разложение на множители многочленов с действительными коэффициентами. Займемся теперь разложением на множители многочленов с действительными коэффициентами. Из результатов п. 1 следует, что их, как и любой многочлен с комплексными коэффициентами, можно разложить на линейные множители:

$$f(x) = a_0(x - \alpha_1)(x - \alpha_2) \dots (x - \alpha_n).$$

Однако среди этих множителей могут встретиться и множители, для которых α_k не является действительным числом. Если мы хотим получить разложение на множители с действительными коэффициентами, надо сгруппировать сомножители, соответствующие сопряженным корням многочлена.

Изменим обозначение корней. Через $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ будем обозначать действительные корни многочлена, а через

$$\begin{aligned} \beta_1 = \gamma_1 + i\delta_1, \quad \bar{\beta}_1 = \gamma_1 - i\delta_1, \dots, \quad \beta_j = \gamma_j + i\delta_j, \\ \bar{\beta}_j = \gamma_j - i\delta_j \end{aligned}$$

— его мнимые корни. Общее число корней равно n и потому $k + 2j = n$.

Каждому действительному корню α_m соответствует действительный сомножитель $x - \alpha_m$ в разложении $f(x)$. Корням же $\beta_m = \gamma_m + i\delta_m$ и $\bar{\beta}_m = \gamma_m - i\delta_m$ соответствует множитель

$$\begin{aligned}(x - \beta_m)(x - \bar{\beta}_m) &= (x - \gamma_m - i\delta_m) \times \\ &\times (x - \gamma_m + i\delta_m) = (x - \gamma_m)^2 - (i\delta_m)^2 = \\ &= x^2 - 2\gamma_m x + \gamma_m^2 + \delta_m^2.\end{aligned}$$

Таким образом, паре сопряженных комплексных корней

$$\beta_m = \gamma_m + i\delta_m \text{ и } \bar{\beta}_m = \gamma_m - i\delta_m$$

многочлена $f(x)$ соответствует в разложении этого многочлена действительный множитель

$$x^2 - 2\gamma_m x + \gamma_m^2 + \delta_m^2.$$

Этот квадратный трехчлен не имеет действительных корней. Заменяя таким образом все множители, соответствующие комплексным корням многочлена $f(x)$, получим разложение вида

$$\begin{aligned}f(x) &= a_0(x - \alpha_1) \cdot \dots \cdot (x - \alpha_k)(x^2 - 2\gamma_1 x + \gamma_1^2 + \delta_1^2) \times \dots \\ &\dots \times (x^2 - 2\gamma_p x + \gamma_p^2 + \delta_p^2).\end{aligned}$$

Мы доказали следующую теорему.

Теорема. *Любой многочлен $f(x)$ с действительными коэффициентами может быть разложен в произведение действительных множителей 1-й и 2-й степени, причем множители 2-й степени не имеют действительных корней.*

У п р а ж н е н и е 69. Разложить на действительные множители 1-й и 2-й степени следующие многочлены:

- | | | |
|----------------|----------------|-----------------------|
| а) $x^5 - 1$, | г) $x^4 + 1$, | е) $x^4 + x^2 + 1$; |
| б) $x^6 - 1$; | д) $x^8 - 1$; | ж) $x^4 + 3x^2 + 1$. |
| в) $x^9 + 1$; | | |

4. Краткие исторические сведения. При решении квадратных уравнений математики столкнулись со случаями, когда в ответ входил квадратный корень из отрицательного числа (например, $x^2 + 1 = 0$, $x^2 + 4x + 13 = 0$). В течение долгого времени считали, что такие уравнения попросту не имеют решений (а еще ранее математики не признавали и отрицательных чисел; лишь истолкование таких чисел, как «долга», «потери» и т. д., сделало их равноправными с положительными; впрочем, еще в XVIII веке некоторые английские ученые отказывались иметь с ними дело).

В конце XVI века было открыто, что в случае, когда кубическое уравнение

$$x^3 + px + q = 0$$

имеет три действительных корня (как, например, уравнение $x^3 - 13x + 12 = 0$, имеющее корни 1, 3, -4), его решение по формуле Кардано приводит к извлечению квадратных корней из отрицательных чисел.

Таким образом, создалось положение, когда для получения действительного результата надо было использовать квадратные корни из отрицательных чисел. Кардано доказал, что выражения $x = 5 - \sqrt{-15}$, $y = 5 + \sqrt{-15}$ удовлетворяют системе уравнений

$$\begin{cases} x + y = 10, \\ xy = 40, \end{cases}$$

если произвести с ними действия как с обычными двучленами и положить $-\sqrt{-15} \sqrt{-15} = 15$.

В начале XVIII века Лейбниц дал разложение на мнимые множители двучлена $a^4 + b^4$. С этого времени начали постепенно развиваться формальные вычисления с комплексными числами, не сопровождавшиеся, однако, изучением вопроса об их обосновании. Французский математик Муавр (1667—1754) в начале XVIII века нашел формулу

$$(\cos \varphi + i \sin \varphi)^n = \cos n\varphi + i \sin n\varphi$$

и применил ее к вычислению корней из комплексных чисел. (Его обозначения отличались от современных. Современный вид придал этой формуле Эйлер.) Даламбер в 1747 году показал, что всякое алгебраическое выражение, образованное из комплексных чисел, может быть приведено к виду $a + bi$, где a и b — действительные числа. Он дал также нестрогое доказательство теоремы о том, что всякий многочлен ненулевой степени с комплексными коэффициентами имеет по крайней мере один комплексный (в частном случае — действительный) корень. Строгое доказательство этой теоремы было provedено в 1799 году великим немецким математиком Гауссом (1777—1855). Гаусс же в 1831 году дал геометрическое истолкование комплексных чисел (до него такое истолкование предлагали другие математики, но их работы остались незамеченными). Гаусс ввел и название «комплексное число». Он систематически применял обозначение i , введенное в одной работе Эйлером. В 1821 году французский математик О. Коши (1789—1857) ввел название «модуль» для величины $\sqrt{a^2 + b^2}$. Ему же принадлежит название «сопряженные комплексные числа».

В работах Эйлера и Даламбера были заложены основы теории функций комплексного переменного. Эта теория была развита в работах Коши и немецких математиков Б. Римана (1826—1866) и К. Вейерштрасса (1815—1897). В настоящее время методы теории функций комплексного переменного широко используются в теории упругости, аэро- и гидродинамике, электростатике, картографии, электротехнике и других областях физики и техники. Приложения этой теории к задачам упругости ведут свое начало от работ русского ученого Г. В. Колосова (1867—1936). Н. Е. Жуковский (1847—1921) и его ученик С. А. Чаплыгин (1869—1942) применили методы теории функций комплексного переменного к расчету профиля крыла самолета. Исследования по применениям этих методов к другим задачам аэро- и гидромеханики были выполнены советскими учеными М. В. Келдышем и М. А. Лаврентьевым.

§ 1. Конечные цепные дроби

1. Алгоритм Евклида. В арифметике часто приходится искать наибольший общий делитель двух натуральных чисел. В младших классах эту задачу решают с помощью разложения чисел на простые множители. Однако этот способ в школе не получает теоретического обоснования, так как он опирается на не доказываемую (а часто и не формулируемую) довольно трудную теорему о существовании и единственности разложения натуральных чисел на простые множители.

Другой метод решения этой задачи, свободный от указанного недостатка, изложен еще в книге Евклида «Начала» (III век до н. э.); его называют *алгоритмом Евклида* или *способом последовательного деления*. Изложим этот способ.

Напомним сначала некоторые свойства деления с остатком. Пусть a — целое число и b — натуральное число. Существуют такие целые числа q (частное) и r (остаток), что $a = bq + r$ и $0 \leq r < b$. Эти числа однозначно определены.

Справедливо следующее утверждение: если $a = bq + r$, то наибольший общий делитель чисел a и b совпадает с наибольшим общим делителем чисел b и r .

В самом деле, обозначим наибольший общий делитель чисел a и b через d , а наибольший общий делитель чисел b и r — через d_1 . Из соотношения $r = a - bq$ получаем, что d является делителем и числа r , то есть d будет общим (но не обязательно наибольшим) делителем чисел b и r . Отсюда следует, что $d \leq d_1$. Обратно, из соотношения $a = bq + r$ следует, что наибольший общий делитель чисел b и r является делителем числа a , а значит, $d_1 \leq d$. Из двух соотношений $d \leq d_1$ и $d_1 \leq d$ получаем $d = d_1$.

Теперь опишем алгоритм Евклида. Он заключается в том, что для целого числа a и натурального числа b последовательно нахо-

больше, чем наша дробь. Если же округлить знаменатель в сторону увеличения, то мы получим дробь $1 + \frac{1}{299}$, которая меньше рассматриваемой. Таким образом,

$$\frac{300}{299} < \frac{3188699}{3178040} < \frac{299}{298}. \quad (2)$$

Разность полученных приближений $\frac{300}{299}$ и $\frac{299}{298}$ мала:

$$\frac{299}{298} - \frac{300}{299} = \frac{1}{298 \cdot 299} \approx \frac{1}{90000}.$$

Значит, как $\frac{299}{298}$, так и $\frac{300}{299}$ дают приближенное значение для дроби $\frac{3188699}{3178040}$ с точностью не меньшей, чем $\frac{1}{90000}$.

Если мы хотим получить еще лучшее приближение, надо аналогичным образом преобразовать отброшенную дробную часть $\frac{1658}{10659}$:

$$\frac{1658}{10659} = \frac{1}{\frac{10659}{1658}} = \frac{1}{6 + \frac{711}{1658}}.$$

Подставляя это выражение в (1), получаем:

$$\frac{3188699}{3178040} = 1 + \frac{1}{298 + \frac{1}{6 + \frac{711}{1658}}}. \quad (3)$$

Ясно, что дробь $\frac{1}{6 + \frac{711}{1658}}$ заключена между $\frac{1}{7}$ и $\frac{1}{6}$.

Поэтому получаем для $\frac{3188699}{3178040}$ границы:

$$1 + \frac{1}{298 + \frac{1}{6}} < \frac{3188699}{3178040} < 1 + \frac{1}{298 + \frac{1}{7}},$$

или, преобразуя дроби, $\frac{1795}{1789} < \frac{3188699}{3178040} < \frac{2094}{2087}$.

Получились оценки с большими знаменателями, чем в (2). Но их точность существенно выше — погрешность полученных приближений не больше, чем $\frac{1}{1789 \cdot 2087} \approx \frac{1}{3\,600\,000}$.

Продолжая описанный процесс, мы получим в конце концов точное выражение для $\frac{3188699}{3178040}$ в виде «многоэтажной» дроби:

$$\frac{3188699}{3178040} = 1 + \frac{1}{298 + \frac{1}{6 + \frac{1}{2 + \frac{1}{3 + \frac{1}{78 + \frac{1}{1 + \frac{1}{2}}}}}}} \quad (4)$$

Разумеется, полученная дробь менее удобна, чем $\frac{3188699}{3178040}$. Но она позволяет получать приближенные значения заданной дроби, имеющие небольшие знаменатели. Чтобы получить такие приближенные значения, надо оборвать процесс на каком-то шагу, заменив смешанное число его целой частью, и превратить полученное выражение в обыкновенную дробь. Дроби вида (4) и называют *цепными* или, иначе, *непрерывными дробями*.

3. Определение цепной дроби. Введем следующее общее определение:

Всякое выражение вида

$$a_0 + \frac{b_0}{a_1 + \frac{b_1}{a_2 + \dots + \frac{b_{n-1}}{a_{n-1} + \frac{b_n}{a_n}}}} \quad (1)$$

где $b_0, b_1, \dots, b_n; a_0, a_1, \dots, a_n$ могут быть любыми действительными или комплексными числами, а также функциями от одной или нескольких переменных, называется *конечной цепной* (или *непрерывной*) *дробью*. b_0, b_1, \dots, b_n называются *частными числителями*.

ми, а a_0, a_1, \dots, a_n — частными знаменателями или неполными частными. В записи (1), естественно, предполагается, что $a_i \neq 0$ ($i = 1, 2, \dots, n$). Это условие не касается a_0 , которое может быть равным нулю.

Для получения приближенных значений дробей используют частный вид цепных дробей, у которых все числители равны 1 ($b_0 = b_1 = \dots = b_n = 1$), а знаменатели — натуральные числа ($a_i \geq 1, i = 1, 2, \dots, n$):

$$a_0 + \frac{1}{a_1 + \frac{1}{a_2 + \dots + \frac{1}{a_{n-1} + \frac{1}{a_n}}}} \quad (2)$$

Форма записи (2), как и форма (1), очень громоздка; поэтому вместо (2) часто употребляются упрощенные записи, например

$$[a_0, a_1, \dots, a_{n-1}, a_n] \quad (3)$$

или

$$a_0 + \frac{1|}{|a_1} + \frac{1|}{|a_2} + \dots + \frac{1|}{|a_n}.$$

Все же часто мы будем пользоваться развернутой записью (2).

Ясно, что всякая цепная дробь вида (2) выражает некоторое рациональное число. Чтобы получить выражение этого числа в виде обыкновенной дроби, надо «свернуть» цепную дробь, выполняя (начиная «с конца») все указанные операции.

П р и м е р. Вычислить значение цепной дроби $1 + \frac{1}{3 + \frac{1}{2 + \frac{1}{4}}}$.

Здесь $a_0 = 1, a_1 = 3, a_2 = 2, a_3 = 4$. Вычисление будет состоять из следующих шагов:

$$1^0. \quad 2 + \frac{1}{4} = \frac{9}{4}.$$

$$2^0. \quad 3 + \frac{4}{9} = \frac{31}{9}.$$

$$3^0. \quad 1 + \frac{9}{31} = \frac{40}{31}.$$

$$\text{Ответ: } [1, 3, 2, 4] = \frac{40}{31}.$$

Обращение конечной цепной дроби в обыкновенную — всегда выполнимая задача. На это потребуется не более чем n шагов, каждый из которых состоит в сложении двух чисел: целого числа и правильной дроби.

У п р а ж н е н и я. Вычислить цепные дроби:

1. $[1, 2, 3]$.
2. $[1, 3, 2]$.
3. $[2, 1, 3]$.
4. $[3, 1, 2]$.

4. Представление рациональных чисел в виде конечной цепной дроби. В предыдущем параграфе было показано, что любую конечную цепную дробь можно обратить в рациональное число. Покажем теперь, что и обратно — любое рациональное число r можно обратить в цепную дробь.

Теорема 1. *Всякое рациональное число можно представить в виде конечной цепной дроби.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Всякое рациональное число r можно представить в виде отношения двух целых чисел $r = \frac{P}{Q}$. При этом, не теряя общности, можно считать $Q > 0$ (в противном случае изменим знаки у P и Q). Применим к числам P и Q алгоритм Евклида (см. § 1):

$$P = Qa_0 + r_1, \quad (1)$$

$$Q = r_1a_1 + r_2, \quad (2)$$

$$r_1 = r_2a_2 + r_3,$$

$$\dots \dots \dots$$

$$r_{k-2} = r_{k-1}a_{k-1} + r_k, \quad (k-1)$$

$$r_{k-1} = r_k a_k, \quad (k)$$

где $Q > r_1 > r_2 > \dots > r_n > 0$ (если $|P| > Q$, то $a_0 = 0$). Каждое из полученных равенств можно переписать по-другому:

$$\frac{P}{Q} = a_0 + \frac{1}{\frac{Q}{r_1}}, \quad (1')$$

$$\frac{Q}{r_1} = a_1 + \frac{1}{\frac{r_1}{r_2}}, \quad (2')$$

$$\dots \dots \dots$$

$$\frac{r_{k-1}}{r_k} = a_k. \quad (k')$$

Нетрудно заметить, что каждое из этих равенств можно понимать как нахождение целой части неправильной дроби; каждое из неполных частных a_i представляет собой целую часть соответствующей дроби¹:

$$a_0 = E\left(\frac{P}{Q}\right), \quad a_1 = E\left(\frac{Q}{r_1}\right), \quad \dots, \quad a_k = E\left(\frac{r_{k-1}}{r_k}\right).$$

Подставив значение дроби $\frac{r_1}{Q}$ из (2') в знаменатель дроби равенства (1'), получим:

$$\frac{P}{Q} = a_0 + \frac{1}{a_1 + \frac{1}{\frac{r_2}{r_1}}}.$$

Затем значение дроби $\frac{r_2}{r_1}$, взятое из равенства (3), подставим в знаменатель дроби $\frac{1}{\frac{r_2}{r_1}}$. Продолжая процесс подстановки до конца, получим:

$$\frac{P}{Q} = a_0 + \frac{1}{a_1 + \frac{1}{a_2 + \dots + \frac{1}{a_{k-1} + \frac{1}{a_k}}}},$$

$$\text{или } \frac{P}{Q} = [a_0, a_1, \dots, a_{k-1}, a_k].$$

Число частных знаменателей, которое получится при разложении заданного рационального числа в цепную дробь, заранее узнать невозможно. Оно зависит от «природы» числа. Так, мало отличающиеся «на вид» числа $\frac{17}{11}$ и $\frac{19}{13}$

¹ Через $E(x)$ обозначают целую часть числа x , то есть наибольшее целое число, содержащееся в числе x :

$$E(x) \leq x < E(x) + 1.$$

разлагаются в цепные дроби, имеющие разное число частных знаменателей:

$$\frac{17}{11} = 1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{5}}}, \quad \frac{19}{13} = 1 + \frac{1}{2 + \frac{1}{6}}.$$

Обратите внимание на характер доказательства теоремы 1. По существу получено больше, чем требовалось. Ведь надо было лишь доказать, что любое рациональное число можно представить в виде конечной цепной дроби. Мы же не только доказали этот факт, но и указали способ построения искомой цепной дроби.

Покажем теперь, что *разложение любого рационального числа в цепную дробь однозначно определено*. При этом рассматриваются лишь разложения, удовлетворяющие следующему условию: последний частный знаменатель должен быть больше 1. В противном случае могут существовать и различные разложения в цепную дробь одного и того же рационального числа.

Пример. Разложим в цепную дробь число $\frac{3}{2}$:

$$\frac{3}{2} = 1 + \frac{1}{2}.$$

Последний частный знаменатель можно представить в виде $2 = 1 + \frac{1}{1}$. В таком случае число $\frac{3}{2}$ можно записать в виде цепной дроби по-иному: $\frac{3}{2} = 1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1}}$. Получилось, что одну и ту

же дробь $\frac{3}{2}$ мы разложили в цепную дробь двумя различными способами: $[1, 2]$ и $[1, 1, 1]$. Так можно поступить с любым рациональным числом. Например, для числа $\frac{17}{11}$ можно получить две цепные дроби:

$$1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{5}}} = [1, 1, 1, 5]; \quad 1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{4 + \frac{1}{1}}}} = [1, 1, 1, 4, 1].$$

Чтобы исключить двусмысленность в разложении рационального числа в цепную дробь, связанную с такими искусственными «удлинениями», как раз и приходится предполагать последний частный знаменатель большим 1.

Однозначность разложения мы докажем от противного. Допустим, что число $r = \frac{P}{Q}$ удалось разложить в две разные цепные дроби:

$$\frac{P}{Q} = [a_0, a_1, \dots, a_k] \text{ и } \frac{P}{Q} = [b_0, b_1, \dots, b_s],$$

где

$$a_i \geq 1, \quad 1 \leq i \leq k-1, \quad a_k > 1$$

и

$$b_j \geq 1, \quad 1 \leq j \leq s-1, \quad b_s > 1.$$

При этом допускается, что различны не только сами частные знаменатели, но и их количество ($k \neq s$).

Мы имеем равенства:

$$\frac{P}{Q} = a_0 + \frac{1}{a_1 + \frac{1}{a_2 + \dots + \frac{1}{a_k}}} = b_0 + \frac{1}{b_1 + \frac{1}{b_2 + \dots + \frac{1}{b_s}}}$$

Так как a_1, \dots, a_k — натуральные числа, то $\frac{P}{Q} - a_0$ лежит между 0 и 1, $0 \leq r - a_0 < 1$. Иными словами, $a_0 = E\left(\frac{P}{Q}\right)$. Точно так же $b_0 = E\left(\frac{P}{Q}\right)$. Значит, $a_0 = b_0$ и

$$\frac{r_1}{Q} = \frac{1}{a_1 + \frac{1}{a_2 + \dots + \frac{1}{a_k}}} = \frac{1}{b_1 + \frac{1}{b_2 + \dots + \frac{1}{b_s}}}.$$

Отсюда следует, что

$$\frac{Q}{r_1} = a_1 + \frac{1}{a_2 + \dots + \frac{1}{a_k}} = b_1 + \frac{1}{b_2 + \dots + \frac{1}{b_s}}$$

Но точно так же $a_1 = E\left(\frac{Q}{r_1}\right)$ и $b_1 = E\left(\frac{Q}{r_1}\right)$. Отсюда следует $a_1 = b_1$. Продолжая процесс сравнения соответствующих частных знаменателей, получим для всех $i \leq k, s$, $a_i = b_i$. Если теперь допустить, например, что $k < s$, то после k -го шага мы придем к равенству

$$a_k = [b_k, \dots, b_s],$$

которое невозможно, поскольку a_k — целое число, а $[b_k, \dots, b_s]$ — дробное. Точно так же доказывается, что невозможно неравенство $k > s$. Итак, $k = s$ и $a_i = b_i$ для всех i . Однозначность разложения доказана.

У п р а ж н е н и е 5. Обратить следующие обыкновенные дроби в
целные:

a) $\frac{355}{113}$; б) $\frac{271}{100}$; в) $\frac{707}{500}$.

5. Подходящие дроби. Как уже говорилось, цепные дроби служат для получения приближенных значений, имеющих малые знаменатели. Эти приближенные значения получаются так: число разлагают в цепную дробь и обрывают процесс разложения на некотором шагу, заменяя смешанную дробь ее целой частью. Получающиеся таким образом дроби называются *подходящими дробями* для данной цепной дроби. Иными словами, *подходящими дробями для заданной цепной дроби*

$$[a_0, a_1, \dots, a_n]$$

называются дроби

$$[a_0]; [a_0, a_1]; [a_0, a_1, a_2]; \dots; [a_0, a_1, \dots, a_n].$$

У цепной дроби с n частными знаменателями имеется ровно n подходящих дробей; последняя подходящая дробь равна данной цепной дроби.

Пример. Вычислим подходящие дроби цепной дроби $[1, 2, 3, 4]$:

$$\begin{aligned} 1) [1] &= 1; & 3) [1, 2, 3] &= 1 + \frac{1}{2 + \frac{1}{3}} = \frac{10}{7}; \\ 2) [1, 2] &= 1 + \frac{1}{2} = \frac{3}{2}; & 4) [1, 2, 3, 4] &= \frac{1}{2 + \frac{1}{3 + \frac{1}{4}}} = \frac{43}{30}. \end{aligned}$$

Чем больше номер подходящей дроби, тем утомительнее ее непосредственное обращение в обыкновенную дробь. При этом все предыдущие вычисления оказываются бесполезными для дальнейшего, все приходится выполнять вновь.

Естественно искать путь вычисления подходящих дробей данной цепной дроби, при котором использовались бы значения предыдущих дробей. Оказывается, для этого можно использовать так называемые рекуррентные соотношения между тремя последовательными подходящими дробями.

Вернемся к предыдущему примеру. Запишем подходящие дроби следующим образом:

$$1 = \frac{1}{1}; \quad \frac{3}{2}; \quad \frac{10}{7} = \frac{3 \cdot \overline{3} + 1}{2 \cdot \overline{3} + 1}; \quad \frac{43}{30} = \frac{10 \cdot \overline{4} + 3}{7 \cdot \overline{4} + 2}.$$

Правило, по которому записаны третья и четвертая подходящие дроби, таково: в числителе записываются два слагаемых — числители двух предыдущих подходящих дробей, а в знаменателе — знаменатели предыдущих подходящих дробей, как показано ниже. И тут и там делается пропуск для множителя:

$$\frac{3 \square + 1}{2 \square + 1}; \quad \frac{10 \square + 3}{7 \square + 2}.$$

Оставленное место для множителя заполняется соответствующим частным знаменателем.

Докажем это правило в общем виде. Обозначим числитель и знаменатель i -й подходящей дроби через P_i и Q_i . В этих обозначениях правило записывается так:

$$\frac{P_i}{Q_i} = \frac{P_{i-1} a_i + P_{i-2}}{Q_{i-1} a_i + Q_{i-2}} \quad (1)$$

(здесь $i = 2, 3, \dots, n$).

Доказательство ведется с помощью математической индукции по индексу i .

Проверим сперва правило для $i = 2$; первые три подходящие дроби имеют вид:

$$\frac{P_0}{Q_0} = \frac{a_0}{1}, \quad \frac{P_1}{Q_1} = a_0 + \frac{1}{a_1} = \frac{a_0 a_1 + 1}{a_1},$$

$$\frac{P_2}{Q_2} = a_0 + \frac{1}{a_1 + \frac{1}{a_2}} = a_0 + \frac{a_2}{a_1 a_2 + 1} = \frac{a_0 a_1 a_2 + a_2 + a_0}{a_1 a_2 + 1}.$$

Отсюда следует, что

$$\frac{P_2}{Q_2} = \frac{a_0 a_1 a_2 + a_2 + a_0}{a_1 a_2 + 1} = \frac{(a_0 a_1 + 1) a_2 + a_0}{a_1 a_2 + 1} = \frac{P_1 a_2 + P_0}{Q_1 a_2 + Q_0}.$$

Таким образом, правило верно при $i = 2$.

Допустим теперь, что правило верно для $i = k - 1$, то есть что

$$\frac{P_{k-1}}{Q_{k-1}} = \frac{P_{k-2} a_{k-1} + P_{k-3}}{Q_{k-2} a_{k-1} + Q_{k-3}}. \quad (2)$$

Докажем, что это же правило верно и при $i = k$, а именно, что имеет место равенство:

$$\frac{P_k}{Q_k} = \frac{P_{k-1} a_k + P_{k-2}}{Q_{k-1} a_k + Q_{k-2}}.$$

Чтобы получить k -ю подходящую дробь, надо в $(k - 1)$ -й подходящей дроби $(k - 1)$ -й частный знаменатель a_{k-1} заменить на выражение $a_{k-1} + \frac{1}{a_k}$. Сделаем эту замену и преобразуем числитель и знаменатель:

$$\begin{aligned} \frac{P_k}{Q_k} &= \frac{P_{k-2} \left(a_{k-1} + \frac{1}{a_k} \right) + P_{k-3}}{Q_{k-2} \left(a_{k-1} + \frac{1}{a_k} \right) + Q_{k-3}} = \\ &= \frac{P_{k-2} (a_{k-1} a_k + 1) + P_{k-3} a_k}{Q_{k-2} (a_{k-1} a_k + 1) + Q_{k-3} a_k} = \\ &= \frac{(P_{k-2} a_{k-1} + P_{k-3}) a_k + P_{k-2}}{(Q_{k-2} a_{k-1} + Q_{k-3}) a_k + Q_{k-2}}. \end{aligned}$$

По предположению индукции имеем:

$$\begin{aligned} P_{k-2} a_{k-1} + P_{k-3} &= P_{k-1}, \\ Q_{k-2} a_{k-1} + Q_{k-3} &= Q_{k-1}. \end{aligned}$$

Поэтому

$$\frac{P_k}{Q_k} = \frac{P_{k-1} a_k + P_{k-2}}{Q_{k-1} a_k + Q_{k-2}},$$

Итак, наша формула верна и при $i=k$. Значит, она верна при всех i . Иными словами, мы доказали, что

$$P_i = P_{i-1} a_i + P_{i-2}, \quad (3)$$

$$Q_i = Q_{i-1} a_i + Q_{i-2}, \quad (4)$$

где $i = 2, 3, \dots, n, \dots$.

Для того чтобы формулы (3) и (4) не теряли смысла при $i = 1$, вводят определения $P_{-1} = 1$, $Q_{-1} = 0$, которые носят чисто формальный характер, но делают правила (3) — (4) верными и при $i = 1$.

Покажем, как проводится вычисление, на примере цепной дроби $[2, 3, 2, 7, 4]$. Вычисление удобно располагать в табличку, которую заполняют последовательно. Первые два столбика заполняют компонентами первых двух подходящих дробей (нулевой и первой подходящей дроби), которые вычисляются непосредственно; третий столбик заполняется компонентами второй подходящей дроби, которые находятся по правилу: числитель первой подходящей дроби умножается на второй частный знаменатель, к полученному произведению прибавляется числитель нулевой подходящей дроби: так же находится и знаменатель второй подходящей дроби. Точно так же определяются числители и знаменатели последующих подходящих дробей. Вот последовательные шаги заполнения таблички:

1-й шаг

2
1

2-й шаг

		2
2	7	
1	3	

3-й шаг

		2	7
2	7	16	
1	3	7	

4-й шаг

		2	7	4
2	7	16	109	
1	3	7	52	

5-й шаг

		2	7	4
2	7	16	109	452
1	3	7	52	215

Значит, $[2, 3, 2, 7, 4] = \frac{452}{215}$.

Упражнения

6. Вычислить подходящие дроби для цепной дроби $[2, 4, 3, 2]$.

7. Даны подходящие дроби цепной дроби: $\frac{3}{1}; \frac{10}{3}; \frac{33}{10}$. Найти a_2 .

8. Предпоследняя подходящая дробь равна $\frac{14}{9}$, последний частный знаменатель равен 3. Вычислить цепную дробь.

9. Дана цепная дробь $[4, 3, 1, 2]$. Вычислить последнюю и предпоследнюю подходящие дроби и найти разность между ними.

10. $\frac{P_n}{Q_n} = [a_0, a_1, \dots, a_n]$, $n = 0, 1, 2, \dots$

Доказать тождества:

$$а) \frac{P_n}{Q_n} - \frac{P_0}{Q_0} = \frac{1}{Q_0 Q_1} - \frac{1}{Q_1 Q_2} + \frac{1}{Q_2 Q_3} - \dots + \frac{(-1)^{n-1}}{Q_{n-1} Q_n};$$

$$б) P_{n+2} Q_{n-2} - P_{n-2} Q_{n+2} = (-1)^n (a_n a_{n+1} a_{n+2} + a_n + a_{n+2});$$

$$в) \frac{P_n}{P_{n-1}} = [a_n, a_{n-1}, \dots, a_0];$$

$$г) \frac{Q_n}{Q_{n-1}} = [a_n, a_{n-1}, \dots, a_1].$$

$$11. \text{ Пусть } \frac{P_n}{Q_n} = [a_0, a_1, \dots, a_n]$$

и дробь симметрична, то есть $a_0 = a_n, a_1 = a_{n-1}, \dots$. Доказать, что $P_{n-1} = Q_n$.

12. Дана дробь $[a, a, \dots, a]$. Доказать, что $P_n^2 + P_{n+1}^2 = P_{n-1} P_{n+1} + P_n P_{n+2}$.

13. Пусть $a_1, a_2, \dots, a_m, \dots, a_n$ — положительные числа. Что больше:

$$[1, a_1, a_2, \dots, a_m] \text{ или } [1, a_1, \dots, a_m, \dots, a_n]?$$

14*. Решить в целых положительных числах уравнение:

$$1 - \frac{1}{2 + \frac{1}{3 + \frac{1}{\ddots + \frac{1}{n}}}} = \frac{1}{x_1 + \frac{1}{x_2 + \frac{1}{\ddots + \frac{1}{x_n}}}}.$$

6. Свойства подходящих дробей. Полученное выше правило вычисления подходящих дробей имеет фундаментальное значение для всей теории цепных дробей. Кроме способа непосредственного вычисления последовательности подходящих дробей, из него получается ряд важных свойств частных числителей и частных знаменателей и подходящих дробей цепной дроби.

Рассмотрим некоторые из этих свойств.

1) Докажем, что для $i = 1, 2, 3, \dots, n$ имеет место равенство:

$$P_i Q_{i-1} - P_{i-1} Q_i = (-1)^{i-1}. \quad (1)$$

Доказательство проведем индукцией по индексу i .

Покажем прежде всего справедливость формулы (1) при $i=1$.

Заметим, что $\frac{P_0}{Q_0} = \frac{a_0}{1}$, $\frac{P_1}{Q_1} = \frac{a_0 a_1 + 1}{a_1}$, откуда $P_0 = a_0$,

$$Q_0 = 1, \quad P_1 = a_0 a_1 + 1, \quad Q_1 = a_1.$$

Значит,

$$\frac{P_1}{Q_1} - \frac{P_0}{Q_0} = \frac{P_1 Q_0 - P_0 Q_1}{Q_0 Q_1} = \frac{(a_0 a_1 + 1) - a_0 a_1}{Q_0 Q_1} = \frac{1}{Q_0 Q_1},$$

откуда следует, что

$$P_1 Q_0 - P_0 Q_1 = 1,$$

то есть формула (1) справедлива при $i = 1$.

Предположим, что формула (1) справедлива при $i = m - 1$:

$$P_{m-1} Q_{m-2} - Q_{m-1} P_{m-2} = (-1)^{m-2}. \quad (1')$$

Докажем, что она справедлива и при $i = m$, то есть что

$$P_m Q_{m-1} - P_{m-1} Q_m = (-1)^{m-1}.$$

Для этого выразим P_m и Q_m по формулам (3) и (4) из п. 5 и сделаем соответствующие подстановки:

$$\begin{aligned} P_m Q_{m-1} - P_{m-1} Q_m &= (P_{m-1} a_m + P_{m-2}) Q_{m-1} - \\ &\quad - P_{m-1} (Q_{m-1} a_m + Q_{m-2}) = \\ &= P_{m-2} Q_{m-1} - P_{m-1} Q_{m-2} = \\ &= - (P_{m-1} Q_{m-2} - P_{m-2} Q_{m-1}). \end{aligned}$$

В силу формулы (1') получаем:

$$P_m Q_{m-1} - P_{m-1} Q_m = -(-1)^{m-2} = (-1)^{m-1}.$$

Итак, из справедливости формулы (1) при $i = m - 1$ следует ее справедливость при $i = m$. Значит, она верна при всех значениях i .

2) Докажем, что при $i = 1, 2, 3, \dots$ имеет место равенство:

$$\frac{P_i}{Q_i} - \frac{P_{i-1}}{Q_{i-1}} = \frac{(-1)^{i-1}}{Q_i Q_{i-1}}. \quad (2)$$

Доказательство. Преобразуем левую часть равенства (2) и применим свойство (1):

$$\frac{P_i}{Q_i} - \frac{P_{i-1}}{Q_{i-1}} = \frac{P_i Q_{i-1} - P_{i-1} Q_i}{Q_i Q_{i-1}} = \frac{(-1)^{i-1}}{Q_i Q_{i-1}}.$$

Из последних двух свойств вытекает важное следствие.

3) *Подходящие дроби цепной дроби несократимы.*

Будем доказывать это утверждение от противного. Предположим, что какая-то дробь $\frac{P_l}{Q_l}$ сократима. Это значит, что числитель и знаменатель дроби имеют общий множитель. Обозначим его через c ; тогда $P_l = cP^*$ и $Q_l = cQ^*$. Подставив эти значения P_l и Q_l в равенство (1), мы получим:

$$QcP^*_{l-1} - cP_{l-1}Q^* = (-1)^l.$$

Но последнее равенство неверно, так как левая часть делится на c , а правая — нет. Следовательно, наше предположение, что частные числитель и знаменатель P_l и Q_l имеют общий множитель, неверно.

У п р а ж н е н и я

15. Сократить дробь $\frac{8547}{4144}$.

16. Английский ярд составляет 0,914383 метра. Найти приближенное отношение метра к ярду.

17. Год равен 365,2422 суткам. Разложить эту дробь в цепную и найти первые четыре подходящие дроби.

18. Разность между последней и предпоследней подходящими дробями равна $\frac{1}{42}$. Подберите два-три набора пар чисел, которые могли бы быть соответственно числителями и знаменателями этих подходящих дробей.

19. Разложите рациональное число $\frac{43}{40}$ в цепную дробь. Найдите все ее подходящие дроби. Чему равна разность между двумя последними подходящими дробями?

7. **Диофантовы уравнения первой степени.** Мы знаем, что одно уравнение с двумя неизвестными, вообще говоря, имеет бесчисленное множество решений. Однако если рассматривать такие уравнения лишь в множестве целых чисел, то может оказаться, что уравнение имеет лишь конечное множество решений.

Например, уравнение $x^2 + y^2 = 8$ имеет бесчисленное множество действительных решений. Целыми же решениями уравнения являются лишь $(2, 2)$; $(-2, 2)$; $(2, -2)$; $(-2, -2)$.

Уравнения, для которых ищутся лишь целые решения, обычно называют *диофантовыми*¹.

Вопрос о решении уравнений в целых числах довольно сложен. Мы рассмотрим сейчас самый простой вид таких уравнений, а именно уравнения вида

$$ax + by = c, \quad (1)$$

где a , b и c — целые числа.

¹ По имени древнегреческого математика Диофанта Александрийского (III—IV в. н. э.).

Такие уравнения можно решать с помощью цепных дробей.
Для примера рассмотрим

$$43x + 30y = 11.$$

Разложим $\frac{43}{30}$ в цепную дробь: $\frac{43}{30} = [1, 2, 3, 4]$. Рассмотрим разность между предпоследней и последней подходящими дробями:

$$\frac{43}{30} - \frac{10}{7} = \frac{43 \cdot 7 - 30 \cdot 10}{30 \cdot 7} = \frac{301 - 300}{30 \cdot 7} = \frac{1}{30 \cdot 7}.$$

Значит,

$$43 \cdot 7 - 30 \cdot 10 = 1. \quad (2)$$

Умножим обе части равенства (2) на 11:

$$43 \cdot 77 - 30 \cdot 110 = 11.$$

Получилось, что $x = 77$ и $y = -110$ являются решениями заданного уравнения.

Нетрудно заметить, что решением того же уравнения будет любая пара чисел (x, y) , следующим образом выражающихся через целый параметр t :

$$x = 77 + 30t, \quad y = 43t - 110.$$

Этот метод всегда применим, если c делится на наибольший общий делитель чисел a и b . В противном случае уравнение не имеет целых решений.

Иногда ставится задача решений диофантовых уравнений в множестве натуральных чисел. Для этого нужно сначала решить его в целых числах, а потом найти значения t , при которых x и y положительны.

В разобранном выше примере для этого нужно решить в целых числах систему неравенств:

$$\begin{cases} 77 + 30t > 0, \\ 43t - 110 > 0. \end{cases}$$

Решая ее, находим $t = 3, 4, 5, \dots$

У п р а ж н е н и я

20. Решить диофантовы уравнения в множестве натуральных чисел:

а) $4x + 7y = 41$;

б) $7x - 5y = 21$;

в) $19x + 17y = 15$.

21. Пусть a и b — взаимно простые натуральные числа. Доказать, что уравнение $ax + by = ab$ не имеет решений в натуральных числах.

22. У школьника была некоторая сумма денег монетами достоинством 15 коп. и 20 коп., причем двадцатикопеечных монет было больше, чем пятнадцатикопеечных. Пятую часть всех денег школьник истратил, отдав 2 монеты за билет в кино. Половину оставшихся у него денег он отдал за обед, оплатив его тремя монетами. Сколько монет каждого достоинства было у школьника вначале?

8. Подходящие дроби и календарь. Астрономы подсчитали, что время полного оборота Земли вокруг Солнца приблизительно равно 365 суткам 5 ча-

сам 48 минутам 46 секунд. Если это время выразить в сутках, то получим приближенно 365,2422 суток.

Обратим дробную часть в цепную дробь:

$$\frac{2422}{10000} = [0, 4, 7, 1, 3, 4, 1, 1, 1, 2].$$

Первые три подходящие дроби: $\frac{P_0}{Q_0} = \frac{1}{4}$; $\frac{P_1}{Q_1} = \frac{7}{29}$, $\frac{P_2}{Q_2} = \frac{8}{33}$.

Первая подходящая дробь $\frac{1}{4}$ показывает, что, считая год равным 365 дням, мы делаем ошибку на четверть суток. За четыре года получается отставание на одни сутки. Чтобы устранить это отставание, Юлий Цезарь в 45 году до нашей эры ввел новый («юлианский») календарь, в котором каждый четвертый год считался високосным — в феврале прибавляют один день.

Однако через столетия снова начала накапливаться ошибка. Чтобы ее оценить, рассмотрим разность

$$\frac{P_2}{Q_2} - \frac{P_0}{Q_0} = \frac{8}{33} - \frac{1}{4} = -\frac{1}{132}.$$

Таким образом, за каждые 132 года прибавляется лишний день (за 396 лет — 3 лишних дня).

Более точный календарь был введен папой Григорием XXII в 1582 году.

Во-первых, он выкинул в этом году 10 дней (следующий день после четверга 4 октября 1582 года именовался пятницей 15 октября), во-вторых, постановил в каждые четыреста лет три високосных года обращать в простые, а один оставить високосным. При переходе нашей страны на григорианский календарь в 1918 году разница во времени уже возросла до 13 суток, что и составляет разницу между старым и новым стилем.

У п р а ж н е н и е 23. Придумать более точный календарь, чем григорианский.

9*. Приближение цепной дроби подходящими дробями. Выясним теперь характер приближения подходящих дробей к рациональному числу, разложенному в данную цепную дробь. Для этого нам понадобится следующее утверждение.

Теорема 2. Пусть дана цепная дробь длины n :

$$[a_0, a_1, \dots, a_n].$$

При увеличении последнего знаменателя a_n дробь увеличивается, если ее длина n четная, и уменьшается, если n нечетно.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Проведем доказательство с помощью индукции по n . При $n = 0$ утверждение очевидно. В этом случае «дробь» имеет вид a_0 и увеличивается при увеличении a_0 (при этом a_0 может, увеличиваясь, принимать не только целые, а любые значения).

Пусть теорема уже доказана для дробей длины k . Рассмотрим дробь длины $k+1$: $r = [a_0, a_1, \dots, a_{k+1}]$. Ее можно представить в виде

$$r = a_0 + \frac{1}{r_1},$$

где

$$r_1 = [a_1, a_2, \dots, a_{k+1}]$$

— цепная дробь длины k .

Пусть $k+1$ — четное число. Тогда r_1 — дробь нечетной длины k . Поэтому по предположению индукции она уменьшается при увеличении a_{k+1} . Но при уменьшении r_1 выражение $a_0 + \frac{1}{r_1}$, то есть r , увеличивается.

Если же $k+1$ — нечетное число, то r_1 — дробь четной длины k и по предположению индукции увеличивается при увеличении a_{k+1} . Но тогда $r = a_0 + \frac{1}{r_1}$ уменьшается при увеличении a_{k+1} .

Итак, предположив, что теорема верна для $n = k$, мы доказали ее справедливость при $n = k+1$. Так как при $n = 0$ она верна, то она справедлива для всех значений n .

Из теоремы 2 вытекает важное

Следствие. *Всякая четная подходящая дробь не больше значения цепной дроби, а всякая нечетная подходящая дробь не меньше этого значения.*

Доказательство. Пусть дана дробь

$$r = [a_0, a_1, \dots, a_k, a_{k+1}, \dots, a_n]$$

и

$$\frac{P_k}{Q_k} = [a_0, a_1, \dots, a_k]$$

— ее k -я подходящая дробь. Дробь r можно записать в виде

$$r = a_0 + \frac{1}{a_1 + \frac{1}{a_2 + \frac{1}{\ddots + \frac{1}{a_k + r_k}}}} = [a_0, a_1, \dots, a_k + r_k],$$

где положено

$$r_k = \frac{1}{a_{k+1} + \cfrac{1}{a_{k+2} + \cfrac{1}{a_{k+3} + \cfrac{1}{a_{k+4} + \cfrac{1}{a_{k+5} + \cfrac{1}{a_n}}}}}} .$$

Таким образом, цепная дробь r получается из подходящей дроби $\frac{P_k}{Q_k}$ увеличением последнего знаменателя a_k до значения $a_k + r_k$.

Из теоремы 2 следует, что если k — четное число, то дробь при этом увеличивается, а если k — нечетно, то она уменьшается. Значит, при четном $k (k = 2l)$ имеем: $\frac{P_{2l}}{Q_{2l}} \leq r$, а при нечетном $k (k = 2l + 1)$

имеет место $\frac{P_{2l+1}}{Q_{2l+1}} \geq r$. Следствие доказано.

Из этого следствия вытекает, что если $2l + 1 \leq n$, то справедливо неравенство

$$\frac{P_{2l}}{Q_{2l}} \leq r \leq \frac{P_{2l+1}}{Q_{2l+1}} .$$

Более точную информацию о характере приближения подходящих дробей $\frac{P_k}{Q_k}$ к числу r дает следующая

Теорема 3. *Имеют место неравенства*

$$\frac{P_{2l}}{Q_{2l}} < \frac{P_{2l+2}}{Q_{2l+2}}$$

и

$$\frac{P_{2l-1}}{Q_{2l-1}} > \frac{P_{2l+1}}{Q_{2l+1}} .$$

Доказательство. Подходящая дробь $\frac{P_{k+2}}{Q_{k+2}}$ получается из подходящей дроби $\frac{P_k}{Q_k}$ заменой частного знаменателя a_k выражением $a_k + \frac{1}{a_{k+1} + \frac{1}{a_{k+2}}}$. Так как это выражение больше a_k , то при

четном k подходящая дробь увеличивается, а при нечетном уменьшается. Отсюда и вытекает теорема 3.

Из теоремы 3 и следствия из теоремы 2 вытекает, что четные подходящие дроби приближаются к числу $r = \frac{P}{Q}$, монотонно возрастающая и оставаясь все время не больше, чем $\frac{P}{Q}$. Нечетные подходящие дроби приближаются к $r = \frac{P}{Q}$, монотонно убывая и оставаясь все время не меньше, чем $\frac{P}{Q}$. При этом равняться $\frac{P}{Q}$ может лишь последняя подходящая дробь. Итак, мы имеем:

$$\frac{P_0}{Q_0} < \frac{P_2}{Q_2} < \dots < \frac{P_{2l}}{Q_{2l}} \leq \frac{P}{Q} \leq \frac{P_{2l+1}}{Q_{2l+1}} < \dots < \frac{P_1}{Q_1}.$$

Знак равенства имеет место слева, если $n = 2l$, и справа, если $n = 2l + 1$.

Оценим теперь отклонение подходящей дроби $\frac{P_k}{Q_k}$ от числа $\frac{P}{Q}$. Для этого воспользуемся доказанным выше утверждением: при любом k число $\frac{P}{Q}$ лежит между подходящими дробями $\frac{P_k}{Q_k}$ и $\frac{P_{k+1}}{Q_{k+1}}$. Из него вытекает, что

$$\left| \frac{P}{Q} - \frac{P_k}{Q_k} \right| \leq \left| \frac{P_{k+1}}{Q_{k+1}} - \frac{P_k}{Q_k} \right|. \quad (1)$$

Но

$$\left| \frac{P_{k+1}}{Q_{k+1}} - \frac{P_k}{Q_k} \right| = \left| \frac{P_{k+1} Q_k - P_k Q_{k+1}}{Q_k Q_{k+1}} \right|.$$

По формуле (1) из п. 6 имеем:

$$P_{k+1} Q_k - P_k Q_{k+1} = (-1)^k,$$

а потому

$$\left| \frac{P_{k+1}}{Q_{k+1}} - \frac{P_k}{Q_k} \right| = \frac{1}{Q_k Q_{k+1}}. \quad (2)$$

Из формул (1) и (2) следует, что

$$\left| \frac{P}{Q} - \frac{P_k}{Q_k} \right| < \frac{1}{Q_k Q_{k+1}}.$$

Так как $Q_{k+1} = Q_k \cdot a_{k+1} + Q_{k-1} > Q_k a_{k+1}$, то

$$\left| \frac{P}{Q} - \frac{P_k}{Q_k} \right| < \frac{1}{Q_k^2 a_{k+1}}.$$

§ 2. Бесконечные цепные дроби

1. Разложение иррациональных чисел в цепные дроби. До сих пор мы разлагали в цепные дроби рациональные числа. При этом процесс нахождения частных знаменателей сводился на каждом шагу к выделению целой части неправильной обыкновенной дроби.

Возьмем теперь какое-нибудь иррациональное число, например $\sqrt{5}$. Алгоритм Евклида здесь неприменим. Однако выделение целой части этого числа — вполне реальная задача. В самом деле, ясно, что $2 < \sqrt{5} < 3$, так что $E(\sqrt{5}) = 2$. Значит, число $\sqrt{5}$ представимо в виде $\sqrt{5} = 2 + (\sqrt{5} - 2)$. Во втором слагаемом уничтожим иррациональность в числителе:

$$\sqrt{5} - 2 = \frac{(\sqrt{5} - 2)(\sqrt{5} + 2)}{\sqrt{5} + 2} = \frac{1}{\sqrt{5} + 2}.$$

Таким образом, $\sqrt{5} = 2 + \frac{1}{\sqrt{5} + 2}$.

Выделим целую часть числа $\sqrt{5} + 2$: $E(\sqrt{5} + 2) = 4$. Значит $\sqrt{5} + 2$ можно представить в виде $4 + \alpha$. Ясно, что $\alpha = \sqrt{5} + 2 - 4 = \sqrt{5} - 2$, поэтому $\sqrt{5} + 2 = 4 + \sqrt{5} - 2$. Снова уничтожим иррациональность в числителе второго слагаемого:

$$\sqrt{5} - 2 = \frac{1}{\sqrt{5} + 2}.$$

В итоге получилось:

$$\sqrt{5} = 2 + \frac{1}{4 + \frac{1}{\sqrt{5} + 2}}.$$

Прделаем еще один аналогичный шаг:

$$\sqrt{5} = 2 + \frac{1}{4 + \frac{1}{4 + \frac{1}{\sqrt{5} + 2}}}.$$

Нетрудно заметить, что процесс выделения целой части и образования цепной дроби в данном примере не имеет конца. В каждом новом знаменателе будет появляться 4 и слагаемое $\sqrt{5} - 2$. Поэтому ясно, что $\sqrt{5}$ представляется в виде бесконечной цепной дроби:

$$\sqrt{5} = [2, 4, 4, 4, \dots].$$

Мы видим, что цепные дроби являются хорошим аппаратом для вычисления квадратных корней.

Проверим, насколько полезен этот способ — как точно находится значение $\sqrt{5}$ с помощью цепных дробей.

Для сравнения будем брать подходящие дроби и обращать их в обыкновенные, а затем полученные обыкновенные — в десятичные. Десятичные приближения, получаемые из подходящих дробей, будем сравнивать со значением $\sqrt{5}$, взятым из таблиц Брадиса ($\sqrt{5} \approx 2,236$):

$$\frac{P_0}{Q_0} = \frac{2}{1} = 2; \quad \frac{P_1}{Q_1} = 2 + \frac{1}{4} = 2,25;$$

$$\frac{P_2}{Q_2} = [2, 4, 4] = 2 + \frac{4}{17} \approx 2,235;$$

$$\frac{P_3}{Q_3} = [2, 4, 4, 4] = \frac{161}{72} \approx 2,2361.$$

Получилось, что уже для четвертой подходящей дроби результат приближения $\sqrt{5}$ по точности не уступает значению, указанному в четырехзначной таблице значений квадратных корней. Больше того, значение той же подходящей дроби $\frac{P_3}{Q_3} = 2,2361$ равно значению $\sqrt{5}$, указанному в пятизначной таблице. Вообще, нахождение приближений с помощью цепных дробей — мощный вычислительный аппарат.

Возьмем произвольное иррациональное число α . Выделим его целую часть и обозначим ее через a_0 .

$$a_0 = E(\alpha)$$

или

$$\alpha = a_0 + \alpha_0,$$

где $0 < \alpha_0 < 1$. Далее, пусть a_1 — целая часть $\frac{1}{\alpha_0}$, то есть $a_1 = E\left(\frac{1}{\alpha_0}\right)$. Тогда

$$\frac{1}{\alpha_0} = a_1 + \alpha_1, \quad \alpha = a_0 + \frac{1}{a_1 + \alpha_1},$$

где $0 < \alpha_1 < 1$.

Пусть $a_2 = E\left(\frac{1}{\alpha_1}\right)$, тогда

$$\frac{1}{\alpha_1} = a_2 + \alpha_2$$

и

$$\alpha = a_0 + \frac{1}{a_1 + \frac{1}{a_2 + \alpha_2}}.$$

Через n шагов получим:

$$\alpha = a_0 + \frac{1}{a_1 + \frac{1}{a_2 + \frac{1}{\ddots + \frac{1}{a_n + \alpha_n}}}},$$

где a_0 — целое число, a_1, \dots, a_n — натуральные числа и $0 < \alpha_n < 1$. Этот процесс бесконечен. В самом деле, ни одно α_n не может оказаться равным нулю. Ведь если какое-то $\alpha_n = 0$, то цепная дробь окажется конечной, а такие дроби являются рациональными числами. Мы же взяли для разложения иррациональное число.

Таким образом, *каждому иррациональному числу соответствует бесконечная цепная дробь*

$$\begin{aligned} \alpha &= [a_0, a_1, \dots, a_n, \dots] = \\ &= a_0 + \frac{1}{a_1 + \frac{1}{\ddots + \frac{1}{a_n + \frac{1}{\ddots}}}}, \end{aligned}$$

для которой $a_1, a_2, \dots, a_n, \dots$ — натуральные числа (a_0 может быть целым числом любого знака).

Построим для полученной дроби последовательность ее подходящих дробей (в отличие от случая разложения рациональных чисел эта последовательность бесконечна). Можно доказать, что *последовательность*

$$\frac{P_0}{Q_0}, \frac{P_1}{Q_1}, \dots, \frac{P_n}{Q_n}, \dots \quad (1)$$

подходящих дробей сходится к разлагаемому числу α . Мы опускаем здесь это доказательство.

2. Подходящие дроби и наилучшие приближения иррациональных чисел рациональными. Мы научились изображать любые числа, как рациональные, так и иррациональные, в виде цепных дробей. Выясним теперь, в чем заключаются преимущества и недостатки такого изображения.

Основное преимущество записи чисел в виде цепных дробей по сравнению с их записью в виде систематических (например, десятичных) дробей состоит в том, что эта запись не зависит от выбора системы счисления. Ведь неполные знаменатели получались путем выделения целой части из неправильных дробей, а эта операция при любой системе счисления приводит к одному и тому же результату (конечно, с точностью до записи в разных системах счисления самих неполных знаменателей). Поэтому запись числа в виде цепной дроби отражает его «существенные» арифметические свойства, а не свойства, связанные с выбором той или иной системы счисления.

Например, при записи рационального числа в виде систематической дроби может получиться либо конечная дробь, либо бесконечная периодическая или смешанная) дробь. При записи же рационального числа в виде цепной дроби всегда получается конечная дробь, причем это характерно только для рациональных чисел. Можно доказать, что *квадратичные иррациональности, и только они, представляются в виде периодических цепных дробей*. Выразить же условие того, что данное число является квадратичной иррациональностью, в терминах систематических дробей невозможно.

Но самое важное преимущество цепных дробей по сравнению с систематическими заключается в том, что они дают *наилучшее приближение* данного числа с помощью дробей, имеющих не слишком большие знаменатели. Уточним это утверждение.

Пусть даны число α и несократимая дробь $\frac{P}{Q}$. Естественной мерой отклонения $\frac{P}{Q}$ от α является $\left| \frac{P}{Q} - \alpha \right|$. Однако в теоретических вопросах оказалось удобнее рассматривать в качестве меры отклонения число $|P - Q\alpha|$. Ясно, что если $|P - Q\alpha|$ мало, то тем более мало число $\left| \frac{P}{Q} - \alpha \right|$. Обратное верно не всегда, так как знаменатель Q может оказаться большим числом.

Пусть число α разложено в цепную дробь. Легко оценить отклонение подходящей дроби $\frac{P_n}{Q_n}$ от α . Так как α лежит между $\frac{P_n}{Q_n}$ и $\frac{P_{n+1}}{Q_{n+1}}$, то имеем:

$$|P_n - Q_n\alpha| \leq Q_n \left| \frac{P_n}{Q_n} - \frac{P_{n+1}}{Q_{n+1}} \right| = Q_n \left| \frac{Q_{n+1}P_n - P_{n+1}Q_n}{Q_nQ_{n+1}} \right| = \frac{1}{Q_{n+1}}.$$

Оказывается, для любой дроби, знаменатель которой не превосходит Q_n , отклонение больше, чем $\frac{1}{Q_{n+1}}$. Иными словами, справедлива следующая

Теорема 4. Если $\frac{P_n}{Q_n}$ — подходящая дробь для разложения числа α в цепную дробь, то для любой дроби $\frac{p}{q}$, такой, что $0 < q \leq Q_n$, выполняется неравенство

$$|p - q\alpha| > |P_n - Q_n\alpha|.$$

Единственным исключением является подходящая дробь $\frac{P_0}{Q_0} = \frac{a_0}{1}$ для числа вида $\alpha = a_0 + \frac{1}{2}$.

Доказательство этой теоремы мы опускаем.

Теорема 4 показывает, что подходящие дроби являются наилучшими приближениями для числа α по сравнению со всеми дробями, знаменатель которых не превосходит знаменателя подходящей дроби. Именно это свойство послужило причиной введения цепных дробей в математику и детального изучения их теории. В конце XVII века голландский математик и физик Гюйгенс хотел построить модель Солнечной системы с помощью зубчатых колес. При этом возникла задача определить число зубцов так, чтобы отношение этих чисел для двух связанных между собой колес было по возможности близко к отношению времен α обращения соответствующих планет, причем число зубцов не должно быть слишком большим. Таким образом, встал вопрос об отыскании рациональной дроби, числитель и знаменатель которой были бы не слишком большими числами и которая наилучшим образом приближала число α . С помощью теории цепных дробей задача была решена.

Отметим, что цепные дроби как аппарат для изображения действительных чисел имеют и недостатки: дело в том, что над действительными числами, изображенными в виде цепных дробей, практически трудно выполнять арифметические операции — сложение, вычитание, умножение и деление. (Попробуйте, например, сложить или перемножить дроби

$$[2, 1, 3, 1, 4] \text{ и } [3, 2, 4, 6, 8],$$

не переводя их в обыкновенные.)

3. Цепные дроби как вычислительный инструмент. Рассмотрим некоторые примеры приближения иррациональных чисел подходящими дробями.

Начнем с числа π . Разлагая число $\pi = 3,14159265\dots$ в цепную дробь, получаем: $\pi = [3, 7, 15, 1, 292, 2, 2\dots]$. Найдем подходящие дроби для этой цепной дроби:

$$\frac{P_0}{Q_0} = \frac{3}{1} = 3, \quad \frac{P_1}{Q_1} = 3 + \frac{1}{7} = \frac{22}{7},$$

а затем составим таблицу для вычисления последующих дробей с помощью рекуррентного правила:

		15	1
3	22	333	355
1	7	106	113

Получаем подходящие дроби $\frac{333}{106}$ и $\frac{355}{113}$. Приближение $\frac{P_1}{Q_1}$, равное $\frac{22}{7}$, было известно еще Архимеду, а приближением $\frac{355}{113}$ пользовался Андриан Меций еще в конце XVI столетия. Первое приближение очень удобно тем, что знаменатель 7 очень невелик. Во второй дроби при сравнительно небольшом знаменателе 113 получается приближенное значение π с высокой точностью.

Чтобы оценить эту точность, используем формулу

$$\left| \alpha - \frac{P_n}{Q_n} \right| \leq \frac{1}{Q_n \cdot Q_{n+1}}.$$

В нашем случае $Q_n = 113$, а $Q_{n+1} = Q_n \cdot a_{n+1} + Q_{n-1} = 113 \cdot 292 + 106 = 33102$.

Значит,

$$\left| \pi - \frac{355}{113} \right| < \frac{1}{113 \cdot 33102} \approx \frac{1}{3500000},$$

то есть точность полученного ответа превышает 10^{-6} . Обращая дробь $\frac{355}{113}$ в десятичную, получаем:

$$\pi \approx 3,141592\dots$$

С помощью цепных дробей можно выполнять вычисление логарифмов при любом основании. Вычислим, например, $\lg 20$. Полученный результат будем сравнивать со значением $\lg 20$, взятым из таблицы Брадиса:

$$\lg 20 = 1,3010.$$

Обозначим искомое число через x ; $\lg 20 = x$. Значит,

$$10^x = 20. \quad (1)$$

Ясно, что $1 < x < 2$; поэтому

$$x = 1 + \frac{1}{x_1}$$

и

$$10^{1+\frac{1}{x_1}} = 20 \quad (x_1 > 1),$$

откуда

$$10 \cdot 10^{\frac{1}{x_1}} = 10 \cdot 2 \quad \text{и} \quad 10^{\frac{1}{x_1}} = 2.$$

Последнее равенство возведем в степень x_1 :

$$2^{x_1} = 10. \quad (2)$$

Значит,

$$3 < x_1 < 4, \\ x_1 = 3 + \frac{1}{x_2}, \text{ где } x_2 > 1.$$

Подставим значение x_1 в равенство (2):

$$2^{3+\frac{1}{x_2}} = 10.$$

Отсюда $2^{\frac{1}{x_2}} = \frac{10}{8}$ и потому $2 = \left(\frac{5}{4}\right)^{x_2}$. Но тогда

$3 < x_2 < 4$, то есть $x_2 = 3 + \frac{1}{x_3}$, где $x_3 > 1$.

Получаем¹:

$$\lg 20 = 1 + \frac{1}{3 + \frac{1}{3 + \dots}},$$

$$\frac{P_0}{Q_0} = 1, \quad \frac{P_1}{Q_1} = 1,33, \quad \frac{P_2}{Q_2} = 1,300.$$

4. Краткие исторические сведения. К цепным дробям приводит по сути дела применявшийся еще в древнем Вавилоне способ извлечения квадратных корней. В явном виде такие дроби впервые встречаются в 1572 году в алгебре итальянского математика Бомбелли. Современное обозначение цепных дробей встречается у итальянского математика Кательди в 1613 году. Теорию непрерывных дробей построил Х. Гюйгенс (1629—1695), встретившийся с ними при конструировании планетария. Глубокие результаты в теории цепных дробей были получены в середине XVIII века Леонардом Эйлером и французским математиком Ж.-Л. Лагранжем (1736—1813), который доказал, что квадратичные иррациональности обращаются в периодические цепные дроби. Цепные дроби оказались могучим орудием исследования в руках знаменитого русского математика П. Л. Чебышева (1821—1894) и его учеников. В настоящее время интерес к цепным дробям вновь возрос, так как они оказались удобным средством вычисления функций на электронных вычислительных машинах.

¹ Эта дробь не является периодической.

§ 1. Комбинаторные задачи

Среди различных задач, которые приходится решать математикам, встречаются такие, где нужно ответить на вопрос: каким числом различных способов можно осуществить требуемое? Такие задачи принято называть *комбинаторными задачами*. Для решения таких задач созданы общие методы и выведены готовые формулы. Однако для того чтобы лучше ознакомиться с методами их решения, мы начнем не с общих методов и готовых формул, а с рассмотрения конкретных примеров.

Пример 1. Каким числом способов можно обить 12 различных стульев, если есть 12 образцов обивочного материала, причем каждый материал имеется в любом количестве?

Решение. Поскольку имеется 12 различных образцов обивочного материала, то один стул можно обить двенадцатью различными способами. То же самое справедливо и для второго стула, так как каждый обивочный материал имеется в любом количестве. Но каждый способ обивки первого стула можно соединить с любым способом обивки второго, так что число различных способов обивки двух стульев равно $12^2 = 144$.

При этом важно, что имеющиеся стулья *различны*. Если бы они были одинаковыми, то число различных способов обивки было бы меньшим, так как способы, при которых первый стул обит материалом *a*, а второй — материалом *b*, или, наоборот, первый стул обит материалом *b*, а второй — материалом *a*, нельзя было бы считать различными способами.

Итак, для двух различных стульев мы получили 12^2 различных способов их обивки. Очевидно, что для каждого следующего стула остается в силе приведенное выше рассуждение: для каждого стула существует двенадцать возможных способов обивки, и каждый способ обивки данного стула можно соединить с любым спо-

собою обивки предыдущих. Отсюда следует, что для трех стульев число различных способов обивки составляет 12^3 , для четырех — 12^4 и т. д. Для двенадцати стульев это число составляет 12^{12} .

Пример 2. Каким числом способов можно рассадить 12 гостей на имеющихся 12 различных стульях?

Решение. Представим себе, что гости входят в комнату по одному. Первому из входящих гостей предоставляется выбор из 12 различных стульев, т. е. 12 возможностей, как и в предыдущем примере. Однако уже для следующего гостя остаются не те же двенадцать возможностей, что и для первого, а всего лишь одиннадцать, поскольку один из стульев оказывается уже занятым. По-прежнему каждое место, занятое первым гостем, может комбинироваться с любым другим местом, занятым вторым; поэтому общее число различных способов, с помощью которых можно рассадить двух гостей, равно $12 \cdot 11 = 132$.

Дальнейший ход решения теперь уже ясен. Для гостя, входящего третьим, останется только 10 различных возможностей, так как из 12 мест два места окажутся уже занятыми. Поэтому для трех гостей число различных способов рассадить их составляет $12 \cdot 11 \cdot 10 = 1320$. Продолжая аналогичные рассуждения, найдем, что общее число различных способов рассадить 12 гостей на 12 стульях составляет $12 \cdot 11 \cdot \dots \cdot 2 \cdot 1 = 12! = 479001600$.

Пример 3. В отделении 12 солдат. Каким числом способов можно составить наряд из двух человек, если один из них должен быть назначен старшим?

Решение этой задачи очень похоже на решение предыдущей. Действительно, если назначить сначала старшего по наряду, то для его выбора у нас имеется 12 различных возможностей: каждый солдат отделения может быть назначен старшим наряда. После того как старший наряда назначен, вторым в наряд может быть назначен любой из оставшихся одиннадцати. Как и во всех предыдущих случаях, общее число различных нарядов составляет $12 \cdot 11 = 132$.

Пример 4. Какое число различных парных нарядов можно назначить из 12 солдат отделения, если не требуется назначать старшего по наряду?

Решение. Легко понять, что число таких нарядов должно быть меньше, чем в предыдущем примере. Действительно, наряды — Иванов (старший) и Петров или Петров (старший) и Иванов — различны, тогда как, если не требуется назначать старшего, эти два солдата в обоих случаях составляют один и тот же наряд. Каждый парный наряд без старшего можно превратить в два различных на-

ряда со старшим. Поэтому число различных парных нарядов со старшим в два раза больше, чем нарядов без старших. Отсюда следует, что интересующее нас в данном примере число различных парных нарядов из 12 солдат отделения в два раза меньше, чем получено в предыдущем примере, т. е. равно $\frac{132}{2} = 66$.

Пример 5. Клавиатура пианино состоит из 88 клавиш. Сколько различных музыкальных фраз можно составить из 6 нот, допуская повторения одних и тех же нот в одной фразе?

Решение. Как и в примере 1, в качестве первой ноты для музыкальной фразы можно взять любую из 88 нот, т. е. для первой ноты мы имеем 88 возможностей. Так как повторения допускаются, то для второй ноты мы снова имеем те же 88 возможностей, и поэтому музыкальных фраз из двух нот существует 88^2 . Продолжая рассуждения, как в примере 1, найдем, что число различных музыкальных фраз из 6 нот составляет $88^6 = 464\,404\,086\,784$.

Пример 6. Сколько различных музыкальных фраз можно составить из 6 нот, если не допускать в одной фразе повторений уже встречавшихся звуков?

Решение этой задачи так же отличается от решения предыдущей, как решение задачи примера 2 от примера 1. Действительно, при составлении произвольной музыкальной фразы для первой ноты мы имеем по-прежнему 88 возможностей. Для второй ноты число возможностей уменьшится уже до 87, так как нота, использованная первой, не должна больше употребляться. После того как выбрана вторая нота, для третьей остается уже только 86 возможностей. Теперь ясно, что общее число различных музыкальных фраз из 6 нот без повторений равно произведению $88 \cdot 87 \cdot 86 \cdot 85 \cdot 84 \cdot 83 = 390\,190\,489\,920$.

Пример 7. Сколько существует различных аккордов из шести нот?

Решение. Аккорд отличается от музыкальной фразы тем, что все ноты, в него входящие, звучат одновременно. Отсюда следует, что все ноты аккорда должны быть различными. Кроме того, различные музыкальные фразы могут приводить к одному и тому же аккорду, если они состоят из одних и тех же нот, но расположенных в фразе в различном порядке. Поэтому, подобно примеру 4, так как число различных музыкальных фраз уже известно, нам остается определить, сколько различных музыкальных фраз могут «склеиваться» в один и тот же аккорд, или, наоборот, сколько различных фраз получается из одного и того же аккорда.

Мы приходим, таким образом, к задаче, аналогичной рассмотренной в примере 6: имеется аккорд из шести различных нот,

сколько различных музыкальных фраз можно из него составить? В качестве первой ноты для составляемой музыкальной фразы можно взять любую из входящих в аккорд нот, то есть мы имеем для нее шесть различных возможностей. Для второй ноты остается уже только пять возможностей, для третьей — четыре и т. д.

Теперь уже ясно, что число различных музыкальных фраз, которые можно получить из одного аккорда из шести нот, равно $6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 6! = 720$. Это означает, что $6!$ различных музыкальных фраз склеиваются в один и тот же аккорд, так что число возможных аккордов будет в $6!$ раз меньше, чем число различных музыкальных фраз. Итак, мы получаем, что число различных возможных аккордов из 6 нот равно:

$$\frac{88 \cdot 87 \cdot 86 \cdot 85 \cdot 84 \cdot 83}{6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1} = \frac{390190489920}{720} = 541\,931\,236.$$

Пример 8. Из города A в город B ведет k дорог, а в город C — l дорог. В город D из города B ведет m дорог, а из города C — n дорог. Города B и C дорогами не соединяются. Сколько различных автобусных маршрутов можно провести между городами A и D ?

Решение. Число автобусных маршрутов определяется числом различных дорог между городами. Всего из города A выходит $k + l$ дорог, а в город D входит $m + n$ дорог. Мы не можем, однако, сказать, что общее число дорог равно произведению этих чисел, так как здесь невозможно комбинировать любую дорогу, выходящую из A , с любой дорогой, входящей в D . Если же рассматривать отдельно дороги, проходящие через B или через C , то такая комбинация возможна.

Рассмотрим всевозможные маршруты, идущие из A в D через B . Из A в B ведет k дорог, а из B в D — m дорог. Каждую из таких дорог, выходящих из A , можно комбинировать с любой дорогой, входящей в D ; поэтому общее число различных маршрутов, как и во всех предыдущих задачах, получается перемножением числа возможностей и равно km . Следовательно, число различных маршрутов, идущих из A в D через B , равно km .

Аналогично подсчитывается число различных маршрутов, идущих из A в D через C ; оно равно ln . Далее, мы замечаем, что всякий автобусный маршрут, соединяющий города A и D , должен проходить или через B , или через C , и, значит, он должен входить либо в число km маршрутов, идущих через B , либо в число ln маршрутов, идущих через C . Общее число различных маршрутов равно тогда сумме $km + ln$.

§ 2. Комбинаторные задачи. Продолжение

Прежде чем перейти к следующим примерам, подведем некоторые итоги. Рассмотренные в предыдущем параграфе примеры имели между собой много общего и решались по существу одинаковыми приемами. Главная мысль, которая лежит в основе всех решений, может быть сформулирована в виде следующего общего правила:

если некоторый выбор может быть сделан m различными способами, а для каждого из этих способов некоторый второй выбор может быть сделан n различными способами, то число способов для осуществления последовательности двух этих выборов равно произведению $m \cdot n$.

Фактически при решении всех задач мы пользовались этим общим правилом, и нужно было только определить число различных возможностей в том или ином случае. Это число менялось в зависимости от условий задачи.

Другое общее правило имеет следующий вид:

если некоторый выбор может быть сделан m различными способами, а другой выбор — n различными способами (отличными от предыдущих), то общее число способов, которыми можно осуществить какой-нибудь один из этих выборов, равен сумме $m + n$.

Это правило также применялось нами в предыдущем параграфе (см. пример 8).

При внимательном рассмотрении задач предыдущего параграфа можно заметить, что мы имеем дело с очень небольшим числом различных типов задач. Чтобы сделать этот вывод более наглядным, рассмотрим еще несколько примеров.

Пример 1. Во взводе 5 сержантов и 50 солдат. Сколькими способами можно составить наряд из одного сержанта и трех солдат?

Решение. Очевидно, что одного сержанта из пяти можно выбрать пятью различными способами. В соответствии с приведенным выше правилом остается определить число возможностей выбора трех солдат, а затем числа возможностей выбора солдат и выбора сержантов между собой перемножить, поскольку каждого сержанта можно отправить в наряд с любой группой солдат.

Для определения числа возможностей выбора трех солдат нам придется снова воспользоваться первым правилом, как мы это уже и делали все время, не формулируя его явно. Нам придется при этом действовать в два приема.

Представим себе сначала, что назначаемых в наряд солдат мы вызываем по одному и строим в шеренгу. Тогда легко подсчитать, что при вызове первого солдата у нас есть 50 различных возможно-

стей; после того как один солдат уже вызван, для выбора второго остается 49 возможностей, а для выбора третьего — лишь 48. Таким образом, применяя правило умножения, находим, что всего для выбора трех солдат в определенном порядке число возможностей равно произведению $50 \cdot 49 \cdot 48$. На этом и заканчивается первая часть решения, но отнюдь не все решение.

В предыдущем абзаце совсем не зря выделены слова «в определенном порядке». Полученное произведение не равно числу возможностей выбора трех солдат, а больше этого числа, причем выделенные слова как раз и объясняют, почему. Дело в том, что мы можем получить один и тот же наряд, вызывая солдат в различном порядке. Поэтому необходимо подсчитать, какое число раз может получиться один и тот же наряд, и разделить полученное выше произведение на это число.

Остается, следовательно, определить, в каком числе случаев будет получаться один и тот же наряд. Это можно подсчитать, решая в каком-то смысле обратную задачу: каким числом способов можно расставить в шеренгу трех солдат уже выбранного наряда. Очевидно, что это число равно требуемому. Но это число легко подсчитать, пользуясь обычным приемом: чтобы поставить какого-либо солдата на первое место, есть три различные возможности, на второе место остается два солдата и на третье — только один. Поэтому общее число возможных перестановок трех солдат в шеренге равно $3 \cdot 2 \cdot 1 = 3! = 6$.

Итак, каждый наряд из трех солдат можно расставить в шеренгу $3!$ различными способами, а, значит, в произведении $50 \cdot 49 \cdot 48$, показывающем число возможностей при выборе трех человек в определенном порядке, каждый наряд считается ровно $3!$ раз. Поэтому общее число различных способов, которыми можно назначить в наряд трех солдат из пятидесяти, равно

$$\frac{50 \cdot 49 \cdot 48}{3 \cdot 2 \cdot 1} = 19\,600.$$

Число различных нарядов из одного сержанта и трех солдат равно теперь

$$19\,600 \cdot 5 = 98\,000.$$

Пример 2. Сколько членов, содержащих две буквы, получится после раскрытия скобок в выражении

$$(a + 1)(b + 1)(c + 1)(d + 1)(e + 1)(f + 1)?$$

Р е ш е н и е. После раскрытия всех скобок мы получим сумму некоторого числа слагаемых (нетрудно подсчитать, что общее число слагаемых равно $2^6 = 64$, но для решения поставленной задачи это не существенно), каждое из которых состоит из шести множителей. Различные множители, входящие в одно и то же произведение, берутся из различных скобок. При этом для каждого множителя есть две различные возможности — он может быть либо буквой, либо единицей.

Вопрос, поставленный в условии, состоит в том, чтобы определить, каким числом способов можно из шести множителей выбрать две буквы. В такой постановке он решается уже совсем просто. Пользуясь уже часто употреблявшимися рассуждениями, мы можем сразу написать, что число различных слагаемых, содержащих две буквы, равно

$$\frac{6 \cdot 5}{2} = 15.$$

Действительно, для выбора первой буквы у нас есть шесть возможностей, а для выбора второй — пять. Кроме того, каждую пару букв мы считаем дважды, один раз полагая первой одну из них, а другой раз — вторую.

П р и м е р 3. Подсчитаем, сколько в рассмотренном в предыдущем примере произведении слагаемых, содержащих четыре буквы.

Р е ш е н и е этой задачи аналогично решению предыдущей. Тем же методом можно подсчитать, что выбор четырех букв в определенном порядке может быть сделан $6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 = 360$ различными способами. С другой стороны, каждая четверка считается здесь несколько раз, именно столько, каким числом способов можно ее упорядочить. Число способов упорядочить четверку букв равно произведению $4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 24$. Поэтому число слагаемых, содержащих четыре буквы, равно

$$\frac{6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3}{4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1} = 15.$$

Этот ответ совпадает с ответом, полученным в предыдущем примере. Про это можно было бы догадаться заранее и, следовательно, обойтись без всяких вычислений, сославшись на предыдущий результат. В самом деле, легко понять, что комбинаций пар букв столько же, сколько комбинаций четверок: каждой паре букв соответствует одна-единственная определенная четверка, которая остается, когда мы удалим выбранную пару. Разным парам соответствуют разные четверки и, наоборот, разным четверкам соответствуют разные пары. Поэтому число различных пар и различных четверок букв одинаково.

Пример 4. В классе m мест. Каким числом способов можно рассадить в нем n учеников ($n < m$)?

Решение. Если в этой задаче и есть что-либо новое по сравнению с предыдущими, то только то, что в ней нет конкретных числовых данных. Способ решения задачи от этого, естественно, не изменяется.

Представим себе, что ученики входят в класс по одному. Тогда для первого из них имеется m возможностей выбрать место. После того как первый выбрал какое-то место, для второго остается $m - 1$ возможностей. Далее, для третьего будет $m - 2$ различных возможностей и т. д. Искомое число способов рассадить всех учеников выразится произведением

$$\underbrace{m(m-1)(m-2) \dots}_{n \text{ сомножителей}}.$$

Найдем последний сомножитель этого произведения. Его можно определить по-разному, например так: каждый сомножитель на единицу меньше предыдущего и получается вычитанием из m числа, на единицу меньшего, чем номер сомножителя. Поэтому сомножитель с номером n получается вычитанием из m числа $n - 1$, то есть равен $m - (n - 1) = m - n + 1$.

Можно рассуждать и иначе: после того как все ученики рассядутся, в классе должно остаться $m - n$ свободных мест. Перед входом последнего ученика свободных мест было на 1 больше, то есть $m - n + 1$. Таково же число возможностей для выбора мест последним учеником, то есть последний сомножитель в произведении.

Итак, искомое число различных способов рассадить n учеников на m местах равно произведению n последовательных целых чисел от m до $m - n + 1$ включительно:

$$\underbrace{m(m-1) \dots (m-n+1)}_{n \text{ сомножителей}}.$$

Пример 5. В комнате имеется пять лампочек. Сколько существует различных способов освещения?

Решение. После всех рассмотренных примеров читатель уже самостоятельно справится с несложным подсчетом того, сколько существует способов освещения, при которых горит данное число лампочек. Сложив все полученные результаты для каждого числа лампочек (от нуля до пяти включительно), мы и получим ответ на поставленный вопрос. Однако этот способ решения, при всей

своей простоте, потребует сравнительно длинных рассуждений и вычислений.

Между тем задача допускает простое и короткое решение, если проводить рассуждение в другом порядке. Рассмотрим сначала случай, когда в комнате имеется всего лишь одна лампочка. Тогда, очевидно, возможны ровно два различных способа освещения: лампочка либо горит, либо не горит.

Теперь присоединим к первой лампочке вторую. Она тоже может находиться в одном из двух состояний: гореть, либо не гореть. Так как каждое состояние второй лампочки можно комбинировать с любым состоянием первой, то для двух лампочек число различных состояний, то есть различных способов освещения, равно $2^2 = 4$.

Дальнейшие рассуждения теперь уже совершенно очевидны. Каждая из лампочек может находиться в двух состояниях. Поэтому, присоединяя новую лампочку к уже рассмотренным предыдущим, мы увеличиваем число возможных способов освещения вдвое. Следовательно, при трех лампочках будет 2^3 различных способов освещения, при четырех — 2^4 и, наконец, при пяти лампочках $2^5 = 32$ способа освещения.

Пример 6. Чему равен коэффициент при a^6b^{82} и при $a^{82}b^6$ в выражении $(a + b)^{88}$ после раскрытия скобок.

Решение. Внимательный читатель сразу заметит, что этот пример очень похож на только что разобранный выше пример 4. Еще большую похвалу заслужит тот, кто заметит связь этого примера с примером 7 из предыдущего параграфа.

Выражение $(a + b)^{88}$ можно рассматривать как произведение 88 скобок; из каждой нужно выбрать в качестве множителя одно из слагаемых: либо a , либо b . Если мы ищем коэффициент при a^6b^{82} , то нужно определить, каким числом способов можно выбрать из 88 букв a и b ровно шесть букв a . Но именно этот вопрос мы решали в примере 7 предыдущего параграфа, когда нужно было определить число различных аккордов из 6 нот.

Благодаря замеченной общности задач мы могли бы воспользоваться уже готовым результатом; но мы повторим совсем коротко приведенные там рассуждения в новых терминах, относящихся уже к данной задаче.

Шесть букв a можно разместить на 88 возможных местах числом способов, равным произведению

$$88 \cdot 87 \cdot 86 \cdot 85 \cdot 84 \cdot 83,$$

если выбрать эти буквы в определенном порядке. Поскольку порядок выбора букв нам безразличен, то каждая комбинация счи-

тается в этом произведении несколько раз: столько же, каким число способов можно переставлять между собой уже выбранные буквы на определенных шести местах.

Число возможных способов переставлять между собой шесть букв на шести местах, как мы уже видели, равно 6! Поэтому число различных способов выбрать шесть букв a из 88, а значит, и коэффициент при члене $a^6 b^{82}$ в разложении $(a + b)^{88}$, равно

$$\frac{88 \cdot 87 \cdot 86 \cdot 85 \cdot 84 \cdot 83}{6!} = 541\,931\,236.$$

Легко догадаться, что коэффициент при $a^{82} b^6$ равен тому же числу. Соответствующее рассуждение уже приводилось в примере 4: способов выбрать по 82 буквы a из 88 равно столько же, сколько способов выбрать по 6, так как каждой группе по 6 букв соответствует определенная группа по 82 буквы, состоящая из оставшихся 82 мест. Но мы можем и не обращаться к этому рассуждению, рассматривая для члена $a^{82} b^6$ не выбор 82 букв a , а, наоборот, выбор шести букв b . Отсюда снова вытекает, что коэффициенты при $a^6 b^{82}$ и $a^{82} b^6$ одинаковы.

У п р а ж н е н и я

1. Имеется пять сортов конвертов без марок и четыре сорта марок одного достоинства. Сколькими способами можно выбрать конверт и марку для посылки письма?

2. Сколькими способами можно указать на шахматной доске два квадрата — белый и черный? Ответить на тот же вопрос, если нет ограничений на цвет выбранных квадратов.

3. Из 12 слов мужского рода, 9 женского и 10 среднего надо выбрать по одному слову каждого рода. Сколькими способами может быть сделан этот выбор?

4. Имеется три волчка с 6, 8 и 10 гранями соответственно. Сколькими различными способами могут они упасть? Та же задача, если известно, что по крайней мере два волчка упали на сторону, помеченную цифрой 1.

§ 3. Определения и формулы

Примеров, рассмотренных в двух предыдущих параграфах, вполне достаточно, чтобы заметить некоторые общие закономерности и поставить общие задачи. Заметим прежде всего, что во всех рассмотренных примерах нам приходилось иметь дело с некоторыми конечными множествами и различными их подмножествами.

Нас интересовало или число всех возможных подмножеств (пример 5 из § 2), или число подмножеств, обладающих определенным количеством элементов (примеры 4, 7 из § 1, примеры 1, 2, 3, 6

из § 2). В других случаях нужно было рассматривать упорядоченные подмножества, в которых элементы были расположены определенным образом (примеры 3, 6 из § 1, пример 4 из § 2). Здесь нам нужно было знать число различных упорядоченных подмножеств, считая различным образом упорядоченные подмножества различными. Наконец, встречалась и задача, в которой нужно было определить количество различных способов упорядочить данное конечное множество, то есть расположить его элементы в определенном порядке (пример 2, § 1). Все эти задачи можно теперь рассмотреть в общем виде.

Рассмотрим прежде всего точное определение упоминавшегося выше термина *упорядоченное множество*.

Конечное множество, состоящее из n элементов, называется *упорядоченным*, если его элементы каким-либо образом занумерованы числами 1, 2, ..., n .

«Номера», которые при этом приписываются элементам множества, позволяют мыслить элементы этого множества «расположенными» в каком-то «порядке»: первый элемент «предшествует» второму (а второй «следует» за первым), второй предшествует третьему и т. д.

Одно и то же конечное множество можно, разумеется, упорядочить разными способами. Например, множество учеников данного класса можно упорядочить по росту (опять-таки двумя противоположными способами), по весу, по возрасту, по алфавиту фамилий и т. д. и т. п.

Не следует, однако, думать, что каждый такой «порядок» связан непременно с каким-либо «естественным правилом» упорядочения. Скажем, множество шахматных фигур (каждого цвета по отдельности или все 32) можно, конечно, упорядочить слева направо в порядке их расстановки на доске или по силе (а фигуры одинаковой силы — слева направо или еще как угодно), но можно считать «упорядочением» и «беспорядочную» последовательность, в которой мы случайно поставили их на доску для данной партии. А можно было бы их просто расставить в ряд в произвольном «порядке». Аналогично множество учеников данного класса можно считать упорядоченным в соответствии с тем (в достаточной мере случайным!) порядком, в котором они сегодня пришли в школу.

Короче говоря, «нумерация», о которой говорится в определении упорядоченного множества, не предполагает, вообще говоря, никакого заранее известного «закона» — упорядочивая конечное множество, мы просто приписываем каким-либо образом номера его элементам. И если в приведенных примерах легко было все же указать некоторые «естественные» способы упорядочения, то для упорядочения, например, множества муравьев в муравейнике или рыб в озере трудно указать более «естественный» способ, чем переловить их всех по очереди и перенумеровать в порядке попадания их в банку или на удочку...

Таким образом, речь, как правило, идет лишь о теоретическом, мысленном упорядочении, которое для конечного множества всегда возможно.

В отличие от соглашений, принятых нами выше (Введение, п. 1 и п. 6) для множеств неупорядоченных, упорядоченные множества мы будем считать *совпадающими* (или *равными*) лишь тогда, когда они не только состоят из одних и тех же элементов, но и упорядочены (расположены, занумерованы и т. п.) одинаковым образом.

Говоря о различных упорядоченных множествах, состоящих из одних и тех же элементов, мы уже несколько раз называли их различными *упорядочениями* какого-либо множества. Этим термином нам будет удобно пользоваться и в дальнейшем.

Поскольку в этой главе нам придется иметь дело только с *к о н е ч н ы* м и множествами и их подмножествами, мы не будем много говорить о распространении понятия упорядоченности на общий случай бесконечных множеств, ограничившись определением и парой примеров.

Множество (безразлично — конечное или бесконечное) называется *упорядоченным*, если между его элементами установлено некоторое отношение, называемое *отношением предшествования*¹, обладающее следующими свойствами.

1) Для любых двух различных элементов a и b данного множества либо a предшествует b , либо b предшествует a .

2) Для любых элементов a , b и c данного множества из того, что a предшествует b , а b предшествует c , следует, что a предшествует c .

Примером упорядоченного множества может служить множество N натуральных чисел, «естественным» образом упорядоченное по величине²: мы считаем, что n предшествует m , если $n < m$ (можно, конечно, было бы выбрать и упорядочение, обратное «естественному», то есть считать, что n предшествует m , когда $n > m$). Точно так же упорядочивается множество D всех действительных чисел. Множество K комплексных чисел, не обладающее никаким «естественным» порядком, можно, например, упорядочить, положив, что $a+bi$ предшествует $c+di$, если $a < c$, а при $a = c$, если $b < d$. Все эти множества можно, разумеется, упорядочить и иными способами.

Введем теперь следующее

О п р е д е л е н и е 1. Пусть дано конечное множество M , состоящее из m элементов. *Размещением из m элементов по n элементов* называют всякое упорядоченное подмножество множества M , состоящее из n элементов.

Из этого определения следует, что $n \leq m$ и что различные размещения отличаются друг от друга составом входящих в них элементов или порядком их расположения. Как видно из предыдущих параграфов, в комбинаторных задачах требуется знать число различных размещений из m элементов по n элементов. Это число принято обозначать символом A_m^n (A — первая буква французского слова *arrangement*, что означает *размещение, приведение в порядок*).

¹ Часто употребляют также термин «отношение порядка» или говорят об «отношении следования» (обратном к «предшествованию»).

² Именно этот «естественный порядок» натуральных чисел принят за основу введенного выше понятия упорядочения *к о н е ч н о* г о множества.

Теорема 1. Число различных размещений из m элементов по n элементов равно произведению n последовательных натуральных чисел, начиная от m и до $m - n + 1$ включительно:

$$A_m^n = \underbrace{m(m-1)(m-2) \cdot \dots \cdot (m-n+1)}_{n \text{ множителей}}. \quad (1)$$

Доказательство. Формула (1) была уже получена нами при разборе примера 4 в § 2. Здесь мы дадим вывод этой формулы, основанный на методе полной математической индукции. Индукцию будем вести по индексу n .

Пусть дано множество M , состоящее из m элементов. Очевидно, что число различных подмножеств этого множества, содержащих по одному элементу, равно числу m элементов M , то есть $A_m^1 = m$ (подмножества из одного элемента автоматически упорядочены, так как содержат только первый элемент).

Далее, из каждого размещения по одному элементу можно получить различные размещения по два элемента, присоединяя к выбранному первому элементу второй. Так как для выбора второго элемента мы имеем уже $m - 1$ возможностей (один из элементов уже использован!), то

$$A_m^2 = A_m^1 (m - 1) = m (m - 1).$$

Предположим теперь, что для некоторого значения $n = k$ справедлива формула

$$A_m^k = m (m - 1) \cdot \dots \cdot (m - k + 1),$$

и докажем, что такая же формула имеет место и для $n = k + 1$. Пусть образованы все размещения из m элементов по k элементов. Размещения по $k + 1$ элементу могут быть получены присоединением к каждому из полученных еще одного элемента на $(k + 1)$ -е место.

Из одного размещения по k элементов получится столько размещений по $k + 1$ элементу, сколько различных элементов можно присоединить, то есть $m - k$. Все получающиеся размещения будут различными, так как они отличаются последним элементом. Размещения по $k + 1$ элементу, получающиеся из различных размещений по k элементов, также не могут совпасть, поскольку их первые k элементов не совпадают. Остается добавить, что таким способом будут получены все размещения по $k + 1$ элементу. Отсюда следует, что число размещений по $k + 1$ элементу удовлетворяет равенству

$$A_m^{k+1} = A_m^k (m - k).$$

Воспользовавшись предположенной по индукции формулой для A_m^k , найдем:

$$A_m^{k+1} = m(m-1) \dots (m-k+1)(m-(k+1)+1),$$

что и утверждалось. Справедливость этой формулы для $n = 1$ и $n = 2$ была уже установлена выше; из принципа математической индукции следует, что формула (1) верна для всех $n \leq m$.

О п р е д е л е н и е 2. *Перестановками из n элементов* называют различные упорядочения данного конечного множества, состоящего из n элементов.

Таким образом, различные перестановки отличаются друг от друга лишь порядком элементов. Число возможных различных перестановок из n элементов обозначается символом P_n (от французского слова *permutation* — перестановка, перемещение).

Теорема 2. *Число различных перестановок из n элементов равно произведению всех последовательных целых чисел, начиная от n и до 1 включительно:*

$$P_n = n(n-1) \dots 2 \cdot 1 = n!. \quad (2)$$

Д о к а з а т е л ь с т в о этой теоремы окажется излишним, если мы заметим, что перестановки являются частным случаем размещений, а именно, при $m = n$. Значит, согласно формуле (1),

$$P_n = A_n^n = n(n-1) \dots 2 \cdot 1 = n!.$$

Впрочем, нетрудно доказать эту теорему и независимо от понятия размещения. Рассмотрим всевозможные перестановки из n элементов и подсчитаем, сколько из них начинаются одним и тем же определенным элементом. Если поставить выделенный элемент перед каждой из перестановок из остальных элементов, то мы получим все возможные перестановки, начинающиеся данным элементом. Следовательно, число всех перестановок из n элементов, начинающихся одним определенным элементом, равно P_{n-1} . Но тогда для числа всех возможных перестановок из n элементов находим:

$$P_n = nP_{n-1}, \quad (3)$$

так как любой из n элементов может оказаться выделенным.

Формулу (3) можно использовать для доказательства нашей теоремы, пользуясь индукцией по числу элементов множества. Очевидно, что $P_1 = 1$, так как один элемент может находиться только на первом месте. Допустим, что формула (2) верна для множества, содержащего $n-1$ элемент, то есть что

$$P_{n-1} = (n-1)!.$$

На основании формулы (3) найдем, что

$$P_n = nP_{n-1} = n \cdot (n-1)! = n!.$$

Таким образом, формула (2) верна для любого n .

У п р а ж н е н и я

5. Сколькими способами можно выбрать 3 различные краски из имеющихся пяти?

6. Пять девушек и трое юношей играют в городки. Сколькими способами они могут разбиться на две команды, по 4 человека в каждой команде, если в каждой команде должно быть хотя бы по одному юноше?

7. Из состава конференции, на которой присутствует 52 человека, надо избрать делегацию, состоящую из 5 человек. Сколькими способами можно это сделать?

8. У мамы m яблок и n груш. Каждый день в течение $(m + n)$ дней подряд она выдает по одному фрукту. Сколькими способами это может быть сделано?

9. Из группы, состоящей из 7 мужчин и 4 женщин, надо выбрать 6 человек так, чтобы среди них было не менее 2 женщин. Сколькими способами это можно сделать?

Как было указано выше, число перестановок можно получить из числа размещений. Можно сделать и обратное, выразив число размещений через число перестановок.

Теорема 3. Число различных размещений из m элементов по n элементов равно числу перестановок из m элементов, деленному на число перестановок из $m - n$ элементов:

$$A_m^n = \frac{P_m}{P_{m-n}}. \quad (4)$$

До к а з а т е л ь с т в о. Формулу (4) легко получить из формул (1) и (2). Действительно,

$$\begin{aligned} A_m^n &= m(m-1) \dots (m-n+1) = \frac{m(m-1) \dots (m-n+1)(m-n) \dots 2 \cdot 1}{(m-n) \dots 2 \cdot 1} = \\ &= \frac{m!}{(m-n)!} = \frac{P_m}{P_{m-n}}. \end{aligned}$$

Это доказательство, несмотря на простоту и очевидность, часто вызывает чувство неудовлетворенности, так как сводится к формальным выкладкам и не показывает существа дела. Поэтому мы приведем еще одно доказательство, опирающееся только на определения размещений и перестановок.

Пусть дано некоторое множество из m элементов и все размещения его элементов по n . Из каждого такого размещения можно получить перестановку элементов множества, присоединив к нему в произвольном порядке остальные $m - n$ элементов. В результате мы получим все перестановки из m элементов множества.

Следовательно, каждое размещение из m элементов по n элементов порождает столько перестановок по m элементов, сколькими различными способами к нему можно присоединить $m - n$ оставшихся элементов. Так как это можно сделать P_{m-n} различными способами, то общее число перестановок из m элементов равно

$$P_m = A_m^n \cdot P_{m-n},$$

откуда и следует равенство (4).

У п р а ж н е н и я

10. Сколькими способами можно составить трехцветный флаг (три горизонтальных цветных полосы равной ширины), если имеется материал 5 различных цветов? Та же задача, если одна из полос должна быть красной. (Красный — один из имеющихся цветов.)

11. Сколько словарей надо издать, чтобы можно было непосредственно выполнять переводы с любого из пяти языков: русского, английского, французского, немецкого, итальянского на любой другой из этих пяти языков?

12. Сколькими способами можно выбрать из полной колоды карт по одной карте каждой масти при условии, что среди вынутых карт нет ни одной пары одинаковых, то есть двух королей, двух десятков и т. д.?

13. В местком избрано 9 человек. Из них надо выбрать председателя, заместителя председателя, секретаря и культорга. Сколькими способами это можно сделать?

14. Найти сумму всех возможных пятизначных чисел, которые можно написать цифрами 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 и в которых каждая цифра повторяется один и только один раз.

О п р е д е л е н и е 3. Пусть дано конечное множество M , состоящее из m элементов. *Сочетанием из m элементов по n элементов* называется любое подмножество M , содержащее n элементов.

Таким образом, сочетания являются неупорядоченными и подмножествами, и различные сочетания различаются между собой только составом элементов. Число всех возможных сочетаний из m элементов по n обозначают через C_m^n (от французского *combinaison* — сочетание, комбинация), а также через $\binom{m}{n}$ или $C(m, n)$.

Теорема 4. Число всех возможных сочетаний из m элементов по n элементов ($1 \leq n \leq m$) равно произведению n последовательных натуральных чисел от m до $m - n + 1$, деленному на произведение n последовательных натуральных чисел от n до 1:

$$C_m^n = \frac{m(m-1) \cdot \dots \cdot (m-n+1)}{n(n-1) \cdot \dots \cdot 2 \cdot 1}. \quad (5)$$

Д о к а з а т е л ь с т в о этой теоремы сводится к доказательству следующего утверждения: *число сочетаний из m элементов по n элементов равно числу размещений из m элементов по n элементов, деленному на число перестановок из n элементов.* В самом деле, из этого утверждения, пользуясь формулами (1) и (2), легко получаем формулу (5).

Чтобы доказать теперь это утверждение, заметим, что каждое размещение из m элементов по n элементов может быть получено из такого же сочетания путем различных перестановок его элементов. Следовательно, каждое сочетание порождает столько размеще-

ний, сколько возможно различных перестановок его элементов.

Отсюда следует, что $A_m^n = C_m^n \cdot P_n$, или

$$C_m^n = \frac{A_m^n}{P_n}, \quad (6)$$

что и требовалось доказать.

Формулу (5) обычно приводят к более удобному для записи симметричному виду, умножая числитель и знаменатель на произведение всех натуральных чисел от $m - n$ до 1 включительно. Тогда мы приходим к формуле:

$$C_m^n = \frac{m!}{n! (m - n)!}. \quad (7)$$

Формула (7) означает, что

$$C_m^n = \frac{P_m}{P_n \cdot P_{m-n}}. \quad (8)$$

Рекомендуем читателю самостоятельно разобраться в комбинаторном смысле этого равенства, доказавши его непосредственно, исходя лишь из определения перестановок и сочетаний.

У п р а ж н е н и я

15. На собрании должны выступить 5 человек: *А*, *Б*, *В*, *Г* и *Д*. Сколькими способами можно расположить их в списке ораторов при условии, что *Б* не должен выступать до того, как выступит *А*?

16. Та же задача, но *А* должен выступить непосредственно перед *Б*.

17. Сколькими способами можно посадить за круглый стол 5 мужчин и 5 женщин так, чтобы никакие два лица одного пола не сидели рядом?

18. Найти сумму всех возможных пятизначных чисел, которые можно написать цифрами 1, 2, 3, 4, 5 и в которых каждая цифра повторяется один и только один раз.

Как было указано в формулировке теоремы 4, символ C_m^n имеет смысл при $1 \leq n \leq m$ и означает количество подмножеств множества M , содержащих ровно по n элементов. Ясно, что $C_m^0 = 1$; это следует и из формулы (5), но формулу (7) в этом случае применить нельзя, так как она будет содержать бессмысленный символ $0!$. Для общности принято полагать $0! = 1$. В этом случае формула (7) дает для C_m^n то же значение 1.

Удобно также ввести в рассмотрение символ C_m^0 , что означает число п у с т ы х подмножеств множества M , то есть $C_m^0 = 1$. То же самое получится и из формулы (7), если воспользоваться принятым условием $0! = 1$.

Принимаемое условие $0! = 1$ имеет на самом деле более глубокий смысл, чем просто возможность вычислять C_m^n или C_m^0 по формуле (7).

Более существенное основание для того, чтобы считать выражение $0!$ равным единице, состоит в следующем. Выражение $n!$ можно рассматри-

вать как функцию, определенную лишь для натурального аргумента n : $\varphi(n) = n!$. В своей области определения она удовлетворяет *функциональному уравнению* $\varphi(n) = n\varphi(n-1)$, справедливость которого легко проверяется для всех натуральных $n \geq 2$. Действительно, $n! = n \cdot (n-1)!$. Если же в этом равенстве положить $n = 1$, то мы получим $1! = 1 \cdot 0!$.

Однако все эти соображения являются не слишком убедительными, так как нельзя быть уверенным в том, что нам не встретится другая формула, в которой будет удобно полагать $0!$ равным какому-нибудь другому числу. Окончательное решение можно получить, идя вот каким путем. Естественно поставить вопрос: можно ли построить непрерывную функцию, определенную для всех значений x , и такую, которая для целых значений аргумента совпадает с $n!$, то есть *доопределить функцию $n!$, расширив ее область определения?* Напомним, что в математическом анализе такое расширение производится, например, для показательной функции $y = a^x$, которая вначале была определена лишь для натурального показателя степени.

Поставленный вопрос был решен Эйлером и Гауссом. С помощью различных формул (Эйлер — через интеграл, а Гаусс — через бесконечное произведение) они определили функцию, обладающую нужным свойством, и доказали единственность такой функции при некоторых естественных предположениях. Эта функция называется *гамма-функцией* и обозначается $\Gamma(x)$. Она определена для всех $x > 0$ и удовлетворяет функциональному уравнению $\Gamma(x) = x\Gamma(x-1)$, а для натуральных n принимает значения $\Gamma(n) = (n-1)!$.

Обе формулы, определяющие функцию $\Gamma(x)$, имеют смысл при $x = 1$ и определяют значение $\Gamma(1) = 1$. Но в силу равенства $\Gamma(n) = (n-1)!$ под выражением $0!$ следует понимать именно значение $\Gamma(1)$.

Все выведенные нами в настоящем параграфе формулы для числа размещений, перестановок и сочетаний фактически уже неоднократно выводились нами ранее для различных частных конкретных случаев при рассмотрении примеров в § 1, 2. Рассмотрим еще некоторые свойства сочетаний, которые потребуются в дальнейшем.

Теорема 5. Число сочетаний из m элементов по n элементов равно числу сочетаний из m элементов по $m - n$ элементов:

$$C_m^n = C_m^{m-n}. \quad (9)$$

Доказательство. Формально равенство (9) легко получить из формулы для числа сочетаний, записанной в виде (7). Действительно,

$$C_m^{m-n} = \frac{m!}{(m-n)! [m - (m-n)]!} = \frac{m!}{(m-n)! n!} = C_m^n.$$

Комбинаторный смысл этого равенства также достаточно ясен. Каждому подмножеству из n элементов соответствует единственное определенное подмножество из $m - n$ элементов — именно, тех, которые не вошли в первоначальное. Поэтому количество тех и других возможных подмножеств одинаково. При рассмотрении примеров (см. примеры 3 и 6 из § 2) мы фактически уже пользовались этим соображением.

Равенство (9) позволяет сокращать вычисления в тех случаях, когда $n > m - n$.

Теорема 6. Число сочетаний из m элементов по n элементов равно сумме числа сочетаний из $(m - 1)$ элементов по n элементов и по $(n - 1)$ элементов:

$$C_m^n = C_{m-1}^n + C_{m-1}^{n-1}. \quad (10)$$

Доказательство. как и в предыдущем случае, проведем двумя различными способами. Прежде всего, пользуясь формулой (7) для числа сочетаний, находим:

$$\begin{aligned} C_{m-1}^n + C_{m-1}^{n-1} &= \frac{(m-1)!}{n!(m-1-n)!} + \frac{(m-1)!}{(n-1)!(m-n)!} = \\ &= \frac{(m-1)!}{(n-1)!(m-n-1)!} \left(\frac{1}{n} + \frac{1}{m-n} \right) = \\ &= \frac{(m-1)! m}{(n-1)!(m-n-1)! n(m-n)} = \frac{m!}{n!(m-n)!} = C_m^n. \end{aligned}$$

Второе доказательство состоит в следующем. Выделим некоторый фиксированный элемент a множества M и рассмотрим сочетания из m элементов по n элементов, содержащие или не содержащие этот элемент. Число сочетаний по n элементов, не содержащих элемента a , равно, очевидно, C_{m-1}^n , так как здесь рассматриваются подмножества по n элементов, образованные из элементов множества, содержащего $m - 1$ элемент (множество M без элемента a). Сочетания, содержащие a , можно получить так: образовать всевозможные сочетания по $n - 1$ элементу из того же множества M без элемента a и к каждому из них присоединить a . Отсюда ясно, что число таких сочетаний равно C_{m-1}^{n-1} . Так как каждое сочетание по n элементов либо содержит данный элемент a , либо не содержит его, то оно принадлежит либо одной, либо другой группе. Поэтому

$$C_{m-1}^n + C_{m-1}^{n-1} = C_m^n,$$

что и утверждалось

Размещения, перестановки и сочетания вместе часто называют одним словом — *соединения*.

§ 4. Соединения с повторениями

Если рассмотреть теперь снова задачи, разобранные в §§ 1 и 2, то мы увидим, что решение почти всех из них не требует уже никаких рассуждений, а получается непосредственным применением нужной формулы из выведенных в предыдущем параграфе. Собственно говоря, все рассуждения, которые приводились при решении задач, были не чем иным, как именно выводом соответствующей формулы, но только для данного конкретного случая. Формулы § 3 потому и являются общими, что они применимы ко всем соедине-

ниям одного типа, и рассуждения, проведенные при выводе формул, освобождают нас от необходимости повторять их при решении каждой отдельной задачи.

Однако в числе приведенных там примеров есть и такие, которые не укладываются в уже рассмотренные схемы. К ним относятся, скажем, примеры 1 и 5 из § 1. Дело в том, что при определении различных видов соединений в предыдущем параграфе мы брали некоторое определенное множество, элементы которого существовали «в единственном экземпляре» и в каждое данное соединение могли входить только один раз. Между тем в некоторых случаях элементы в соединении могут повторяться, как например ноты в музыкальной фразе в примере 5 из § 1. Для того чтобы охватить общей теорией и такие задачи, необходимо рассмотреть *соединения с повторениями*, которым и посвящен настоящий параграф.

Пусть имеется m непересекающихся множеств A_1, A_2, \dots, A_m , каждое из которых содержит не менее чем n элементов. Для простоты мы будем называть элементы множества A_1 элементами 1-го сорта, элементы множества A_2 — элементами 2-го сорта, ..., элементы множества A_m — элементами m -го сорта. Иначе говоря, мы рассматриваем разбиение (см. п. 7 Введения) некоторого множества $A = A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_m$ на непересекающиеся подмножества A_1, A_2, \dots, A_m , состоящие из элементов различных «сортов». Все элементы каждого подмножества, то есть элементы одного и того же сорта, будем считать одинаковыми, или *совпадающими* между собой.

Слова «одинаковые» или «совпадающие» употребляются здесь в том смысле, в каком одинаковыми являются, например, 12 белых или 12 черных шахек. Именно в таком смысле понимается распространенное выражение «множество с повторяющимися элементами», хотя оно и не согласуется с описанным во Введении пониманием терминов «множество» и «элемент» (согласно которому множества, содержащие одни и те же элементы, считаются совпадающими).

Вообще, в таких случаях правильнее говорить о множестве *различных вхождений* «одинаковых» (точнее — *однородных*) элементов. Так, слово «алгебра» состоит из *шести* букв, но содержит *семь* вхождений букв (буква «а» входит дважды, остальные — по одному разу). С совершенно аналогичной по существу ситуацией мы уже имели дело в гл. I, говоря о «кратных» корнях многочленов.

Из элементов множества A , то есть элементов, входящих в различные его подмножества A_i , можно составлять различные упорядоченные множества, содержащие по n элементов в каждом. Такие упорядоченные множества принято называть *размещениями с повторениями из элементов m сортов по n элементов*, или, более коротко, просто *размещениями с повторениями из m элементов по n* .

В первом из этих терминов (более точном, но менее употребительном из-за своей громоздкости) явным образом указывается, что имеется не m различных элементов, а m различных сортов элементов; число же элементов любого сорта в размещении может быть каким угодно.

Для наглядности будем представлять себе, что элементами рассматриваемых множеств являются буквы. Если, например, $m = 3$, то это могут быть буквы a, b, c . Тогда возможны следующие размещения с повторениями этих трех элементов по $n = 2$:

$$\begin{array}{lll} aa, & ba, & ca, \\ ab, & bb, & cb, \\ ac, & bc, & cc. \end{array}$$

Размещения с повторениями можно рассматривать и в случае $n > m$, то есть неравенство $m \geq n$, которое считалось необходимым в предыдущем параграфе, здесь необходимым уже не является. Например, из $m = 2$ элемента a, b можно образовать размещения по $n = 3$ элемента. Они будут иметь вид:

$$\begin{array}{lll} aaa, & baa, & bba, \\ aab, & abb, & bbb, \\ aba, & bab, & \end{array}$$

Число различных возможных размещений с повторениями из m элементов по n элементов будем обозначать R_m^n .

Теорема 1. Число различных размещений с повторениями из m элементов по n элементов определяется по формуле:

$$R_m^n = m^n. \quad (1)$$

Доказательство. Прежде всего заметим, что размещения с повторениями по n элементов могут быть получены из размещений по $(n - 1)$ элементу присоединением еще одного элемента. Так как к каждому размещению по $(n - 1)$ элементу можно присоединить любой из имеющихся m элементов, то каждое размещение по $(n - 1)$ элементу порождает m различных размещений по n элементов, то есть

$$R_m^n = m R_m^{n-1}. \quad (2)$$

Проведем теперь доказательство формулы (1) по индукции. Ясно, что при $n = 1$ число размещений равно m :

$$R_m^1 = m.$$

Допустим, что для некоторого числа n справедливо равенство

$$R_m^n = m^n,$$

и найдем число размещений с повторениями из m элементов по n . Пользуясь формулой (2), получаем:

$$R_m^{n+1} = m R_m^n = m^{n+1}.$$

Таким образом, формула (1) справедлива для $n = 1$ и из ее справедливости для некоторого n следует и справедливость для $n + 1$. Теорема доказана.

У п р а ж н е н и я

19. Автомобильные номера состоят из одной, двух или трех букв и четырех цифр. Найти число таких номеров, если используются 32 буквы русского алфавита.

20. Поезду, в котором находится n пассажиров, предстоит сделать m остановок. Сколькими способами могут распределиться пассажиры между этими остановками?

21. Та же задача, если учитывается лишь количество пассажиров, вышедших на данной остановке.

22. Четверо студентов сдают экзамен. Сколькими способами могут быть поставлены им отметки, если известно, что никто из них не получил неудовлетворительной отметки?

23. Сколько чисел, меньших чем миллион, можно написать с помощью цифр 9, 8, 7?

24. Сколько чисел, меньших чем миллион, можно написать с помощью цифр 9, 8, 0? (Записи, начинающиеся с нуля, считаются недопустимыми.)

Для определения перестановки с повторениями рассмотрим множество, состоящее из n элементов, среди которых есть одинаковые¹. Как и раньше, мы можем представлять себе, что элементами этого множества являются буквы.

О п р е д е л е н и е 2. *Перестановкой с повторениями из n элементов* называется любое упорядочение конечного множества, состоящего из n элементов, среди которых имеются совпадающие¹.

Пусть рассматриваемое множество состоит из α букв a , β букв b , γ букв c , ..., λ букв l . Подсчитаем число возможных перестановок с повторениями для такого множества.

Занумеруем сначала все элементы a номерами $a_1, a_2, \dots, a_\alpha$, буквы b — номерами b_1, b_2, \dots, b_β и т. д. и будем считать все эти элементы различными. Тогда мы имеем множество, состоящее из

¹ Слова «одинаковые» и «совпадающие» употребляются здесь в смысле разнотипном на стр. 287. Иначе говоря, речь идет об упорядоченном множестве из n элементов не более чем n различных сортов.

n различных элементов, и число перестановок этого множества, в силу теоремы 2 предыдущего параграфа, равно $n!$, причем

$$n = \alpha + \beta + \gamma + \dots + \lambda.$$

Теперь мы заметим, что элементы $a_1, a_2, \dots, a_\alpha$ множества фактически не различаются между собой и поэтому среди всех $n!$ перестановок имеются совпадающие, так что каждая перестановка с повторениями считается здесь несколько раз. Подсчитаем, сколько именно.

Ясно, что две перестановки, отличающиеся друг от друга лишь расположением элементов a , совпадают между собой. Таких перестановок существует столько, сколько возможно различных перестановок элементов $a_1, a_2, \dots, a_\alpha$ между собой, то есть $P_\alpha = \alpha!$. Но то же самое относится и к элементу b : перестановки, отличающиеся лишь расположением элементов b_1, b_2, \dots, b_β , совпадают между собой, и таких перестановок существует ровно $P_\beta = \beta!$ и т. д.

Следовательно, в числе $n!$ перестановок всех элементов каждая считается $P_\alpha \cdot P_\beta \cdot P_\gamma \dots P_\lambda = \alpha! \beta! \gamma! \dots \lambda!$ раз. Отсюда следует, что число различных перестановок с повторениями в нашем случае равно

$$\frac{n!}{\alpha! \beta! \gamma! \dots \lambda!}.$$

Обозначая число перестановок через $N_n(\alpha, \beta, \gamma, \dots, \lambda)$, мы можем сформулировать полученный результат в виде следующей теоремы.

Теорема 2. Число различных перестановок из n элементов, в которых элементы a, b, c, \dots, l повторяются соответственно $\alpha, \beta, \gamma, \dots, \lambda$ раз, выражается формулой

$$N_n(\alpha, \beta, \gamma, \dots, \lambda) = \frac{(\alpha + \beta + \gamma + \dots + \lambda)!}{\alpha! \beta! \gamma! \dots \lambda!}. \quad (3)$$

У п р а ж н е н и я

25. У мамы два яблока, три груши и четыре апельсина. Каждый день в течение пяти дней подряд она выдает по одному фрукту. Сколькими способами это может быть сделано?

26. Сколько различных слов можно получить, переставляя буквы в слове «математика»? В слове «парабола»? В слове «ингредиент»?

27. Сколькими способами можно расставить белые фигуры (2 коня, 2 слона, 2 ладьи, ферзь и король) на первой линии шахматной доски?

28. Сколькими способами можно разбить $m + n + p$ предметов на три группы так, чтобы в одной было m , в другой n , а в третьей p предметов?

29. Сколькими способами можно расставить 20 книг в книжном шкафу с 5 полками, если каждая полка может вместить все 20 книг?

30. Сколькими способами можно надеть 5 различных колец на пальцы одной руки, исключая большой палец?

31. Сколькими способами можно переставить буквы слова «перешеек» так, чтобы четыре буквы «е» не шли подряд?

О п р е д е л е н и е 3. *Сочетанием с повторениями из m элементов по n элементов* называется всякое множество, содержащее n элементов, каждый из которых является элементом одного из данных m сортов.

Как видно из этого определения, сочетания с повторениями являются неупорядоченными множествами, так что расположение элементов в них несущественно. Различные сочетания отличаются друг от друга входящими в них элементами, причем каждый элемент может входить в сочетание несколько раз.

Например, из трех элементов a, b, c можно образовать такие сочетания с повторениями по два элемента:

$$\begin{array}{ccc} aa, & ac, & bc, \\ ab, & bb, & cc. \end{array}$$

Из тех же трех элементов сочетания с повторениями по три элемента будут следующими:

$$\begin{array}{ccccc} aaa, & aac, & abc, & acc, & bcc, \\ aab, & abb, & bbb, & bbc, & ccc. \end{array}$$

Ясно, что из элементов a, b, c можно составлять сочетания с повторениями и по четыре элемента и вообще по любому числу n элементов, так что для сочетаний с повторениями неравенство $m \geq n$ не является необходимым, а можно рассматривать и случай $m < n$.

Число различных возможных сочетаний с повторениями из m элементов по n элементов мы будем обозначать символом Γ_m^n . Для его нахождения можно воспользоваться следующей теоремой.

Теорема 3. *Число различных возможных сочетаний с повторениями из m элементов по n элементов может быть найдено по формуле*

$$\Gamma_m^n = \frac{(m + n - 1)!}{(m - 1)! n!}. \quad (4)$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Как уже говорилось выше, сочетания, в том числе с повторениями, являются неупорядоченными множествами. Поэтому всякое сочетание однозначно определяется тем, сколько элементов каждого сорта в него входит.

Например, если имеются элементы четырех сортов, то сочетание вполне определится, если сказать, что оно содержит два элемента первого сорта, четыре элемента второго, ни одного элемента третьего и один элемент четвертого сорта. Это есть одно из возможных сочетаний с повторениями из четырех элементов по семи. Та-

кое сочетание можно условно записать комбинацией четырех чисел (2, 4, 0, 1), показывающей, сколько элементов каждого сорта берется.

Другие сочетания определяются, например, комбинациями (3, 0, 0, 4) или (1, 1, 2, 3). Первая из них определяет сочетание, состоящее из трех элементов первого сорта и четырех элементов четвертого. Элементы второго и третьего сорта в это сочетание не входят. Вторая комбинация определяет сочетание, содержащее один элемент первого сорта, один — второго, два — третьего и три элемента четвертого сорта. Заметим еще, что, пока мы рассматриваем сочетания из четырех элементов по семи, условная запись представляет комбинацию всегда четырех чисел — по одному числу на каждый имеющийся сорт элементов, и сумма этих чисел всегда равна семи, то есть общему числу элементов, входящих в сочетание.

В общем случае, если мы захотим условной комбинацией чисел изобразить некоторое сочетание с повторением из m элементов по n элементов, то придется написать уже m целых неотрицательных чисел, снова по одному числу на каждый имеющийся сорт элементов, обозначив их, скажем, a_1, a_2, \dots, a_m , причем сумма этих чисел должна равняться числу элементов в сочетании, то есть n :

$$a_1 + a_2 + \dots + a_m = n.$$

Такую комбинацию мы будем записывать в виде (a_1, a_2, \dots, a_m) .

Комбинацию (a_1, a_2, \dots, a_m) , определяющую сочетание, можно записать, пользуясь только цифрами 1 и 0. Сделаем это следующим образом. Вместо числа a_1 , означающего количество элементов первого сорта в сочетании, напишем такое же число единиц. Затем таким же способом запишем число элементов второго сорта, а между этими двумя группами единиц поставим нуль для их разделения. Так же будем поступать и дальше. Комбинация (1, 1, 2, 3) изобразится тогда как (101011011), а комбинация (2, 1, 2, 2) — как (110101101). Запись (101101101) соответствует комбинации (1, 2, 3, 1).

Если какое-либо из чисел a_i равно нулю, то есть элементы данного сорта в сочетание не входят, то единиц на этом месте писать не будем, и два или несколько нулей могут тогда оказаться рядом. Например, комбинация (2, 4, 0, 1) запишется в виде (1101111001). Запись (1111000111) соответствует комбинации (4, 0, 0, 3).

Запись из нулей и единиц, соответствующая сочетанию из m элементов по n элементов, будет содержать ровно n единиц и $m - 1$ нулей. Действительно, количество единиц равно числу элементов в сочетании, а количество нулей на единицу меньше числа сортов

элементов, поскольку нуль употребляется лишь для их разделения. Поэтому число сочетаний с повторениями из m элементов по n элементов Γ_m^n равно числу перестановок из n единиц и $m - 1$ нулей. Как уже известно из теоремы 2, это число равно

$$\Gamma_m^n = N_{n+m-1}(n, m-1) = \frac{(n+m-1)!}{n!(m-1)!}.$$

Теорема доказана.

Если сравнить полученное выражение с формулой (7) для числа сочетаний без повторений, выведенной в предыдущем параграфе, то мы заметим, что

$$\Gamma_m^n = C_{n+m-1}^{m-1}.$$

Таким образом, число сочетаний с повторениями из m элементов по n элементов равно числу сочетаний без повторений из $n + m - 1$ элементов по $m - 1$ элементов.

Упражнения

32. В почтовом отделении продаются открытки 10 сортов. Сколькими способами можно купить в нем 12 открыток? Сколькими способами можно купить 8 открыток? Сколькими способами можно купить 8 различных открыток?

33. Сколько существует треугольников, длины сторон которых принимают одно из следующих значений: 4 см, 5 см, 6 см, 7 см?

34. Сколько можно построить различных прямоугольных параллелепипедов, длина каждого ребра которого является целым числом от 1 до 10?

35. В магазине имеется много пирожных каждого из четырех сортов. Сколькими способами можно купить 7 пирожных?

§ 5. Комбинаторные задачи. Окончание

В этом параграфе мы рассмотрим еще несколько комбинаторных задач, при решении которых будем пользоваться установленными выше формулами и правилами.

Пример 1. В некотором государстве каждые два человека отличаются набором зубов. Каково максимально возможное число жителей этого государства, если наибольшее число зубов у человека равно 32?

Решение. Эту задачу можно решить двумя способами. Первый способ заключается в том, что мы сначала ищем, сколько людей может иметь k зубов, а потом просуммируем полученные результаты от $k = 0$ до $k = 32$. Ясно, что k мест из 32 можно выбрать C_{32}^k способами. Поэтому ровно k зубов имеют не более чем C_{32}^k жителей. А тогда общее число жителей не превосходит

$$C_{32}^0 + C_{32}^1 + \dots + C_{32}^{32}.$$

Полученный этим способом ответ оказался очень громоздким. Выгоднее избрать другой путь, которым мы уже пользовались при решении примера 5 в § 2, — применить метод индукции¹.

Если речь идет об одном зубе, то возможны только два человека — один с зубом и второй без него. При двух зубах число возможных наборов зубов становится равным четырем: нет ни одного зуба, есть первый, есть второй и есть оба.

Увеличив число зубов до трех, мы удвоим число возможностей и получим восемь различных наборов. Действительно, каждый из рассмотренных наборов двух зубов может встретиться дважды — когда нет третьего зуба и когда он есть.

Обозначим число возможных наборов k зубов через S_k . Предыдущими рассуждениями мы доказали, что $S_1 = 2$, $S_2 = 4$, $S_3 = 8$. Допустим, что для некоторого k справедливо равенство $S_k = 2^k$, и докажем, что аналогичное равенство справедливо и для случая $k + 1$ зубов. Среди всех различных наборов, входящих в S_{k+1} , имеется ровно S_k наборов, в которых отсутствует $(k + 1)$ -й зуб, и столько же наборов, в которых $(k + 1)$ -й зуб имеется. Поэтому

$$S_{k+1} = S_k + S_k = 2S_k = 2^{k+1}.$$

Таким образом, при возможных n зубах число всех людей, отличающихся набором зубов, равно 2^n . В нашем случае $n = 32$, поэтому мы получаем $N = 2^{32}$. Как известно, $2^{10} = 1024 > 10^3$. Поэтому $N > 4 \cdot 10^9$, так что возможное население этого государства больше нынешнего населения всего земного шара.

Заметим, что полученный нами результат на самом деле дает больше, чем только оценку возможного населения забавного государства. Сравнивая полученное значение N с написанным выше выражением N как суммы сочетаний, мы приходим к формуле:

$$C_{32}^0 + C_{32}^1 + C_{32}^2 + \dots + C_{32}^{32} = 2^{32}.$$

Более того, из приведенного выше доказательства по индукции вытекает, что аналогичное равенство справедливо при любом n , то есть что имеет место формула

$$C_n^0 + C_n^1 + C_n^2 + \dots + C_n^n = 2^n.$$

Пример 2. Дана прямоугольная сетка квадратов размером $m \times n$. Каково число различных дорог на этой сетке, ведущих из левого верхнего угла в правый нижний (рис. 46)? (Все звенья дороги предполагаются идущими или вправо, или вниз — без воз-

¹ Эту задачу можно решить и еще одним способом: применяя формулу размещений с повторениями.

вращений; сходная ситуация возникает, скажем, при выборе одного из кратчайших маршрутов между двумя городскими перекрестками.)

Решение. Всякая дорога представляет собой ломаную, содержащую m горизонтальных и n вертикальных звеньев, то есть состоящую из $m + n$ звеньев. Различные дороги отличаются одна от другой лишь порядком чередования горизонтальных и вертикальных звеньев. Поэтому число возможных дорог равно числу способов, которыми можно выбрать n вертикальных отрезков из общего числа $m + n$ отрезков, а следовательно, есть C_{m+n}^n .

Можно было бы рассматривать число способов выбора не n вертикальных, а m горизонтальных отрезков и тогда мы получили бы ответ C_{m+n}^m . Но формула (9) из § 3 показывает, что $C_{m+n}^m = C_{m+n}^n$.

Полученный результат можно использовать для вывода еще одной интересной формулы. Пусть наша сетка является квадратной, то есть имеет размеры $n \times n$. Тогда из приведенного выше решения следует, что число различных дорог, соединяющих левый верхний угол с правым нижним, равно C_{2n}^n .

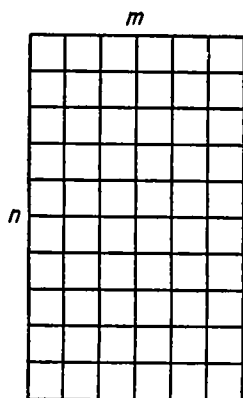


Рис. 46.

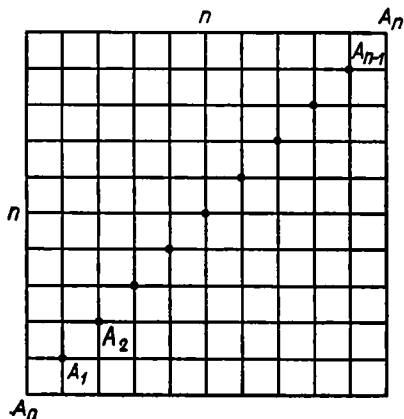


Рис. 47.

Вместе с тем число этих дорог можно подсчитать иначе. Рассмотрим диагональ, идущую из нижнего левого угла в верхний правый, и обозначим вершины, лежащие на этой диагонали, через A_0, A_1, \dots, A_n . Так как каждая дорога обязательно проходит через одну — и притом единственную — точку этой диагонали, то общее число дорог есть сумма числа дорог, идущих через точку A_0 , через точку A_1 , через точку A_2 , ..., через точку A_n .

Найдем число возможных дорог, идущих через точку A_k ($0 \leq k \leq n$). Если нумерация точек произведена снизу вверх, как

это показано на рис. 47, то точка A_k отстоит от нижней горизонтали на расстоянии k , считая за единицу измерения длину стороны квадрата сетки. От правой вертикали ее отделяют тогда $n-k$ горизонтальных отрезка.

Дорог, соединяющих верхний левый угол с точкой A_k , будет тогда $C_{(n-k)+k}^k = C_n^k$, а дорог, соединяющих точку A_k с нижним правым углом, будет $C_{k+(n-k)}^{n-k} = C_n^{n-k} = C_n^k$ (это видно из рассмотрения равных прямоугольников, противоположными вершинами которых служат верхний левый угол исходного квадрата и точка A_k и соответственно точка A_k и нижний правый угол квадрата). Поэтому общее число дорог, соединяющих верхний левый угол с нижним правым и проходящих через A_k , равно $(C_n^k)^2$. Но тогда общее число всех дорог равно сумме

$$(C_n^0)^2 + (C_n^1)^2 + (C_n^2)^2 + \dots + (C_n^n)^2.$$

Сравнивая полученную сумму с найденным выше выражением для числа дорог, мы приходим к формуле:

$$(C_n^0)^2 + (C_n^1)^2 + (C_n^2)^2 + \dots + (C_n^n)^2 = C_{2n}^n.$$

Пример 3. Шесть пассажиров садятся на остановке в трамвайный поезд, состоящий из трех трамвайных вагонов. Каким числом различных способов могут они распределиться в вагонах?

Решение. Прежде всего необходимо указать, что задача сформулирована недостаточно точно и допускает два различных толкования. Нас может интересовать или только число пассажиров в каждом вагоне или же кто именно в каком вагоне находится. Рассмотрим обе возможные формулировки.

Сначала рассмотрим случай, когда учитывается, кто в каком вагоне находится, то есть когда случаи «пассажир A в первом вагоне, а пассажир B — во втором» и «пассажир B в первом вагоне, а пассажир A — во втором» считаются различными.

Здесь мы имеем размещения с повторениями из трех элементов по шесть элементов: для каждого из шести пассажиров имеются три возможности. Пользуясь формулой (1) из § 4, получаем, что число различных способов, которыми шесть пассажиров могут распределиться в трех вагонах, равно:

$$R_3^6 = 3^6 = 729.$$

Иной результат получится в том случае, если нас интересует лишь число пассажиров в каждом вагоне, так что случаи «один пассажир в первом вагоне и один во втором» является единственным, независимо от того, кто из пассажиров где находится. Здесь нуж-

но подсчитывать уже не размещения, а сочетания с повторениями. По формуле (4) из §4 находим, что число различных способов распределения пассажиров в этом случае равно

$$\Gamma_3^6 = C_8^6 = C_8^2 = 28.$$

Пример 4. Сколькими способами можно распределить 28 костей домино между 4 игроками так, чтобы каждый получил 7 костей?

Решение. Первый игрок может выбрать 7 костей C_{28}^7 способами. После этого второй игрок должен выбрать 7 костей из оставшихся 21 кости. Это можно сделать C_{21}^7 способами. Третий игрок может выбрать кости C_{14}^7 способами, а четвертый — $C_7^7 = 1$ способом. Всего получаем

$$C_{28}^7 C_{21}^7 C_{14}^7 C_7^7 = \frac{28!}{7! 21!} \cdot \frac{21!}{7! 14!} \cdot \frac{14!}{7! 7!} = \frac{28!}{(7!)^4}$$

способов раздела костей.

Эту задачу можно решить иначе. Упорядочим все кости и отдадим первые 7 костей первому игроку, вторые 7 костей — второму игроку и т. д. Так как 28 костей можно упорядочить $28!$ способами, то получаем $28!$ способов раздела. Но некоторые из этих способов приводят к одинаковым результатам — игрокам неважно, в каком порядке приходят к ним кости, а важно лишь, какие именно кости они получат. Поэтому результат не изменится, если мы как угодно переставим друг с другом первые 7 костей, потом вторые 7 костей и т. д. Первые 7 костей можно переставить $7!$ способами, вторые 7 костей — тоже $7!$ способами и т. д. Всего получим $(7!)^4$ перестановок, дающих то же распределение костей, что и данная. Поэтому число способов раздела костей равно

$$\frac{28!}{(7!)^4}.$$

Пример 5. Сколькими способами можно разделить 40 яблок между 4 мальчиками (все яблоки считаются одинаковыми)?

Решение. Возьмем три одинаковые перегородки и рассмотрим всевозможные перестановки 43 предметов: 40 яблок и 3 перегородки. Каждой такой перестановке соответствует свой способ раздела: первый мальчик получает все яблоки от начала до первой перегородки, второй — все яблоки между первой и второй перегородками, третий — все яблоки между второй и третьей перегородками, а четвертый — все остальные яблоки. (Если, например, первая и вторая перегородки оказались рядом, то второй мальчик ничего не получает.) Значит, число способов раздела равно числу

перестановок 40 яблок и 3 перегородок. По формуле числа перестановок с повторениями получаем, что это число равно

$$N_{43}(40, 3) = \frac{43!}{40! 3!}.$$

Пример 6. Сколькими способами можно разделить 40 яблок между 4 мальчиками так, чтобы каждый получил по крайней мере 3 яблока (все яблоки по-прежнему считаются одинаковыми)?

Решение. Сначала дадим каждому мальчику по 3 яблока. А потом разделим оставшиеся 28 яблок так, как было сделано в предыдущей задаче. Всего получаем

$$N_{31}(28, 3) = \frac{31!}{28! 3!}$$

способов раздела.

Пример 7. Имеется m различных сигнальных флагов и k мачт, на которых их вывешивают. Значение сигнала зависит от того, в каком порядке развешаны флаги. Сколько сигналов можно передать этими флагами, если все флаги должны быть использованы, но некоторые из мачт могут оказаться пустыми?

Решение. Добавим к m флагам $k - 1$ перегородку и рассмотрим всевозможные перестановки из m различных флагов и k одинаковых перегородок. Как и в примере 5, каждой перестановке соответствует свой сигнал (на первую мачту вывешиваются по порядку все флаги от начала до первой перегородки и т. д.). Поэтому число сигналов равно числу таких перестановок, то есть равно

$$N_{m+k-1}(\underbrace{1, \dots, 1}_{m \text{ раз}}, k-1) = \frac{(m+k-1)!}{(k-1)!} = A_{m+k-1}^{k-1}.$$

Если бы мы не потребовали, чтобы все флаги были использованы, то число сигналов оказалось бы больше. В этом случае задача решалась бы в два этапа. Сначала выберем, какие флаги будут участвовать в сигнале. Если число выбираемых флагов равно s , то выбор можно сделать C_m^s способами. Как мы уже знаем, с помощью данных s флагов можно передать A_{s+k-1}^{k-1} сигналов. Поэтому всего имеем $C_m^s A_{s+k-1}^{k-1}$ сигналов, передаваемых s флагами. А общее число сигналов равно

$$C_m^0 A_{k-1}^{k-1} + C_m^1 A_k^{k-1} + \dots + C_m^s A_{s+k-1}^{k-1} + \dots + C_m^m A_{k+m-1}^{k-1}.$$

У п р а ж н е н и я

36. Двое ребят собрали 10 ромашек, 15 васильков и 14 незабудок. Сколькими способами они могут разделить эти цветы?

37. Решите ту же задачу при условии, что каждый из ребят должен получить не менее трех цветков каждого вида.

38. Сколькими способами можно разделить 45 яблок и 12 груш между тремя мальчиками?

39. Решите ту же задачу при условии, что каждый из мальчиков должен получить не менее трех фруктов каждого вида.

40. Сколькими способами можно разделить 10 белых грибов, 15 подберезовиков и 8 подосиновиков между 4 ребятами?

41. Сколько сигналов можно передать с помощью 6 различных флагов, вывешиваемых на 3 мачтах?

§ 6. Бином Ньютона и его обобщения

В главе I (§ 1, п. 8) была выведена формула бинома Ньютона:

$$(x + a)^n = x^n + C_n^1 x^{n-1} a + \dots + C_n^k x^{n-k} a^k + \dots + a^n. \quad (1)$$

Через C_n^k мы обозначили коэффициент при $x^{n-k} a^k$ в разложении $(x + a)^n$. Для C_n^k было получено соотношение $C_n^k = C_{n-1}^k + C_{n-1}^{k-1}$, которое позволяет вычислять эти коэффициенты один за другим. Сейчас мы получим явную формулу для C_n^k . Для этого мы покажем, что коэффициенты C_n^k — не что иное, как число сочетаний из n элементов по k (именно поэтому в гл. I было выбрано обозначение C_n^k).

В самом деле, запишем $(x + a)^n$ в виде произведения n сомножителей:

$$(x + a)^n = \underbrace{(x + a) \dots (x + a)}_{n \text{ раз}} \quad (2)$$

— и раскроем скобки в этом произведении, причем будем записывать все множители в том порядке, в котором они нам встретятся. Например, запишем

$$(x + a)^2 = (x + a)(x + a) = xx + xa + ax + aa \quad (3)$$

или

$$(x + a)^3 = (x + a)(x + a)(x + a) = xxx + xxa + xax + xaa + axx + axa + aax + aaa. \quad (4)$$

Видно, что в формулу (3) входят все размещения с повторениями из букв x и a , по две буквы в каждом размещении, а в формулу (4) — размещения с повторениями из тех же букв, содержащие по три буквы. То же самое будет в общем случае — после раскрытия скобок в формуле (2) получатся все размещения с повторениями из букв x и a , по n букв в каждом размещении.

Приведем подобные члены. Подобными будут члены, содержащие одинаковое количество букв a (тогда и букв x в них будет поровну). Найдем число членов, содержащих k букв a (и, следовательно, $n - k$ букв x). Эти члены являются всевозможными перестанов-

ками с повторениями, составленными из k букв a и $n - k$ букв x . Их число равно

$$N_n(k, n - k) = \frac{n!}{k!(n - k)!}.$$

Отсюда вытекает, что после приведения подобных членов коэффициент при $x^{k-n} a^k$ окажется равным $\frac{n!}{k!(n - k)!}$, то есть числу сочетаний из n элементов по k . Тем самым доказано, что числа C_n^k в формуле (1) действительно являются числами сочетаний из n элементов по k .

Рассмотрим несколько задач, связанных с формулой бинома Ньютона.

Пример 1. Определить коэффициент при x^{19} в разложении $(1 + x^5 + x^9)^{30}$.

Решение. Запишем данное нам выражение в виде:

$$[1 + x^5(1 + x^4)]^{30} = (1 + y)^{30},$$

где $y = x^5(1 + x^4)$. Отсюда видно, что x^{19} может получиться только из члена, содержащего y^3 . В соответствии с формулой (1) этот член имеет вид:

$$C_{30}^3 y^3 = C_{30}^3 x^{15} (1 + x^4)^3.$$

Для получения x^{19} нужно при раскрытии скобок взять член, содержащий x^4 в первой степени. Этот член имеет вид $C_3^1 x^4$; поэтому искомый коэффициент при x^{19} равен произведению

$$C_{30}^3 \cdot C_3^1 = \frac{30 \cdot 29 \cdot 28}{3 \cdot 2 \cdot 1} \cdot \frac{3}{1} = 12180.$$

Пример 2. С каким коэффициентом входит x^{30} в разложение $(1 + x^3 + x^7)^{30}$?

Решение. Выясним сначала, каким числом способов можно представить x^{30} в виде произведений x^3 и x^7 , для чего надо знать, какими способами можно представить число 30 в виде суммы слагаемых 3 и 7. Очевидно, что 30 можно представить в виде суммы десяти троек, и без участия слагаемого 7 других представлений нет. С участием 7 возможно только одно представление $30 = 7 + 7 + 7 + 3 + 3 + 3$, так как число семерок, входящих в сумму, должно быть кратно трем, иначе сумма не будет делиться на 3.

Итак, для нахождения коэффициента при x^{30} в $(1 + x^3 + x^7)^{30}$ нам нужно определить коэффициенты при членах $(x^3)^{10}$ и $(x^3)^3 (x^7)^3$.

Как и в предыдущем примере, перепишем наше выражение в виде $[1 + x^3(1 + x^4)]^{30}$ и воспользуемся формулой (1):

$$[1 + x^3(1 + x^4)]^{30} = 1 + C_{30}^1 x^3 (1 + x^4) + \dots + C_{30}^{10} [x^3(1 + x^4)]^{10} + \dots$$

Слагаемое $(x^3)^{10}$ есть только в последнем из выписанных нами членов, и коэффициент при нем равен C_{30}^{10} . Еще одно слагаемое вида $(x^3)^3 (x^4)^3$ или $(x^3)^6 (x^4)^3$ входит в слагаемое

$$C_{30}^6 [x^3(1 + x^4)]^6 = C_{30}^6 x^{18} (1 + x^4)^6$$

при раскрытии произведения $(1 + x^4)^6$.

Так как в этой последней скобке коэффициент при $(x^4)^3$ равен C_6^3 , то коэффициент при члене $(x^3)^6 (x^4)^3$ равен произведению $C_{30}^6 \cdot C_6^3$.

Окончательно, искомый коэффициент при x^{30} есть сумма

$$C_{30}^{10} + C_{30}^6 \cdot C_6^3 = 41\,920\,515.$$

У п р а ж н е н и е 42. Сколько рациональных членов содержится в разложении

$$(\sqrt{2} + \sqrt[4]{3})^{100}?$$

Подставляя в (1) $x = 1$, получим другой вывод формулы (1) из § 5. Аналогично, приняв в (1) $x = -1$, получим еще одну любопытную формулу:

$$C_n^0 - C_n^1 + C_n^2 - C_n^3 + \dots + (-1)^k C_n^k + \dots + (-1)^n C_n^n = 0,$$

или, иначе,

$$C_n^0 + C_n^2 + \dots = C_n^1 + C_n^3 + \dots,$$

то есть для любого n сумма сочетаний из n элементов по четному числу элементов равна сумме сочетаний из n элементов по нечетному числу элементов.

Формулу, аналогичную формуле бинома Ньютона, можно получить и для возведения в степень суммы нескольких слагаемых. Если число слагаемых невелико, то ее легко получить, применяя несколько раз формулу бинома Ньютона. Например, для трех слагаемых можно написать:

$$(x_1 + x_2 + x_3)^n = [(x_1 + x_2) + x_3]^n = \sum_{k=0}^n C_n^k (x_1 + x_2)^{n-k} x_3^k,$$

раскрывая, в свою очередь, каждое слагаемое справа по формуле (2). При небольших n это нетрудно сделать.

Пусть, например, $n = 2$. Тогда получаем:

$$(x_1 + x_2 + x_3)^2 = C_2^0 (x_1 + x_2)^2 + C_2^1 (x_1 + x_2) x_3 + C_2^2 x_3^2 = \\ = x_1^2 + 2x_1x_2 + x_2^2 + 2x_1x_3 + 2x_2x_3 + x_3^2.$$

При $n = 3$ находим:

$$(x_1 + x_2 + x_3)^3 = C_3^0 (x_1 + x_2)^3 + C_3^1 (x_1 + x_2)^2 x_3 + \\ + C_3^2 (x_1 + x_2) x_3^2 + C_3^3 x_3^3 = (x_1^3 + 3x_1^2x_2 + 3x_1x_2^2 + x_2^3) + \\ + 3(x_1^2 + 2x_1x_2 + x_2^2)x_3 + 3(x_1 + x_2)x_3^2 + x_3^3 = \\ = x_1^3 + 3x_1^2x_2 + 3x_1x_2^2 + x_2^3 + 3x_1^2x_3 + 6x_1x_2x_3 + \\ + 3x_2^2x_3 + 3x_1x_3^2 + 3x_2x_3^2 + x_3^3.$$

Таким образом, мы получили формулы для квадрата и куба суммы трех слагаемых, которые имеют вид:

$$(x_1 + x_2 + x_3)^2 = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + 2x_1x_2 + 2x_1x_3 + 2x_2x_3; \quad (3')$$

$$(x_1 + x_2 + x_3)^3 = x_1^3 + x_2^3 + x_3^3 + 3x_1^2x_2 + 3x_1^2x_3 + \\ + 3x_2^2x_3 + 3x_1x_2^2 + 3x_1x_3^2 + 3x_2x_3^2 + 6x_1x_2x_3. \quad (4')$$

Однако для больших n , не говоря уже о большом числе слагаемых, такой способ вывода формулы потребует уже чересчур сложных и громоздких вычислений.

Формулу для возведения в степень суммы нескольких слагаемых можно получить и непосредственно, подобно тому как мы это делали для формулы бинома Ньютона.

Действительно, n -я степень суммы $(x_1 + x_2 + \dots + x_m)^n$ есть произведение n одинаковых слагаемых вида $(x_1 + x_2 + \dots + x_m)$. Перемножив все скобки, мы получим сумму произведений, причем в каждом слагаемом будет n сомножителей. Общее число слагаемых равно числу размещений с повторениями из m элементов по n элементов, то есть $R_m^n = m^n$, так как множители, взятые из различных скобок, могут совпадать. Вследствие этого каждое отдельное слагаемое будет иметь вид

$$x_1^{\alpha_1} x_2^{\alpha_2} \dots x_m^{\alpha_m}.$$

Показатели степени $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m$ удовлетворяют, очевидно, условиям $\alpha_k \geq 0$ ($1 \leq k \leq m$) и

$$\alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_m = n,$$

то есть все они суть целые неотрицательные числа и их сумма равна n .

Чтобы определить коэффициент, который будет стоять у произведения $x_1^{\alpha_1} x_2^{\alpha_2} \dots x_m^{\alpha_m}$ после приведения подобных членов, нужно подсчитать, сколько раз такое произведение может встретиться. Это можно сделать следующим образом.

Каждому произведению (до приведения подобных членов) поставим в соответствие перестановку из элементов 1, 2, ..., m . При этом если из первой скобки берется, например, множитель x_2 , из второй — x_3 , из третьей — x_1 и т. д., то перестановка имеет вид 2, 3, 1 Иначе говоря, в перестановке на первом месте ставится номер элемента, взятого из первой скобки, на втором — номер элемента из второй скобки и т. д. Например, произведению $x_1 x_2 x_3 x_1 x_3$ соответствует перестановка 1, 2, 4, 1, 4, 3.

Ясно, что произведению $x_1^{\alpha_1} x_2^{\alpha_2} \dots x_m^{\alpha_m}$ ставится в соответствие такая перестановка, в которой элемент 1 повторяется на различных местах ровно α_1 раз, элемент 2 — ровно α_2 раз и т. д. В том случае, когда $\alpha_k = 0$, что возможно, соответствующий элемент k не входит в рассматриваемую перестановку вовсе.

Из сказанного вытекает, что произведение $x_1^{\alpha_1} x_2^{\alpha_2} \dots x_m^{\alpha_m}$ встречается среди слагаемых столько раз, сколько существует различных перестановок с повторениями из n элементов, в которых элемент 1 повторяется α_1 раз, элемент 2 повторяется α_2 раз, ..., элемент m повторяется α_m раз, то есть

$$N_n(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m) = \frac{n!}{\alpha_1! \alpha_2! \dots \alpha_m!} \quad (5)$$

(см. формулу (3) из § 4). Это же число служит коэффициентом при произведении $x_1^{\alpha_1} x_2^{\alpha_2} \dots x_m^{\alpha_m}$ в разложении n -й степени суммы m слагаемых.

Полученное можно выразить в виде следующей теоремы.

Теорема. *Результат возведения суммы m слагаемых в n -ю степень имеет вид:*

$$\begin{aligned} (x_1 + x_2 + \dots + x_m)^n &= \sum_{\alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_m = n} N_n(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m) x_1^{\alpha_1} x_2^{\alpha_2} \dots x_m^{\alpha_m} = \\ &= \sum_{\alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_m = n} \frac{n!}{\alpha_1! \alpha_2! \dots \alpha_m!} x_1^{\alpha_1} x_2^{\alpha_2} \dots x_m^{\alpha_m}, \end{aligned} \quad (6)$$

где суммирование распространяется на все возможные системы $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m$ целых неотрицательных чисел, удовлетворяющие условию $\alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_m = n$.

Эту теорему называют полиномиальной, а коэффициенты (5) — полиномиальными коэффициентами.

Легко убедиться в том, что формула бинома Ньютона является частным случаем полиномиальной формулы (6).

У п р а ж н е н и я

43. Найти число членов в разложениях:

а) $(a + b + c)^3$; б) $(a + b + c + d)^4$.

44. Найти наибольший коэффициент в разложениях:

а) $(a + b + c)^{10}$; б) $(a + b + c + d)^{11}$.

45. Найти коэффициент при x^4 в разложении

$$(1 + 2x + 3x^2)^{10}.$$

46. Найти коэффициент при x^k в разложении

$$(1 + x + x^2 + \dots + x^{n-1})^2.$$

§ 7. Краткие исторические сведения

Арифметический треугольник и закон образования его элементов были известны в Индии примерно за два века до н. э. Еще ранее в древней Греции изучались так называемые фигурные числа, совпадающие с некоторыми биномиальными коэффициентами. Таблица биномиальных коэффициентов до восьмой степени встречается у китайского математика Чжу Ши-цзе в 1303 году. Общая теорема о разложении бинома впервые встречается у арабского математика Джемшида ал-Каши в XIII веке, но была, по-видимому, известна еще в XI веке арабскому математику (и знаменитому поэту) Омару Хайяму.

Свойства биномиальных коэффициентов изучал французский математик и философ Блез Паскаль (1623—1662). Он установил связь этих коэффициентов с введенными Тартальей сочетаниями из n элементов по m . Сочетания и перестановки изучал также в XVII веке французский математик Таке. Научное обоснование теории сочетаний и перестановок дал в 1666 году Лейбниц. Перестановки с повторениями изучили французский математик Френикль де Басси в 1676 году и английский ученый Уоллис в 1693 году. Размещения рассматривал в 1713 году Якоб Бернулли. Лейбницу еще в 1678 году была известна формула для возведения многочлена в степень. Однако заслуга первого опубликования этой теоремы принадлежит Муавру. Комбинаторными задачами много занимался Леонард Эйлер.

Исаак Ньютон (1642—1727) обобщил в 1676 году формулу бинома на случай отрицательных и дробных показателей. Однако его вывод не был строгим. Строгое доказательство биномиальной теоремы, пригодное и для иррациональных показателей, дал норвежский математик Нильс Хенрик Абель.

В настоящее время комбинаторные методы применяются во многих разделах математики и их приложений.

У п р а ж н е н и я к г л а в е VII

47. Рота состоит из 3 офицеров, 6 сержантов и 60 рядовых. Сколькими способами можно выделить из них отряд, состоящий из одного офицера, двух сержантов и 20 рядовых? Та же задача, если в отряд должен войти командир роты и старший из сержантов?

48. Пусть p_1, \dots, p_n — различные простые числа. Сколько делителей имеет число

$$q = p_1^{\alpha_1} \dots p_n^{\alpha_n},$$

где $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ — некоторые натуральные числа (включая 1 и q)? Чему равна их сумма?

49. Сколькими способами можно составить 6 слов из 32 букв, если каждая буква используется один и только один раз?

50. Сколькими способами можно выбрать 12 человек из 17, если данные два человека из этих 17 не могут быть выбраны вместе?

51. В урне лежат жетоны с числами 1, 2, 3, ..., 10. Из нее вынимают 3 жетона. Во скольких случаях сумма написанных на них чисел равна 9? Не меньше 9?

52. Сколько слов, содержащих по пять букв каждое, можно составить из 33 букв, если допускаются повторения, но никакие две соседние буквы не должны совпадать, то есть такие слова, как «пресс» или «ссора», не допускаются?

53. Для премий на математической олимпиаде выделено 3 экземпляра одной книги, два экземпляра другой и один экземпляр третьей книги. Сколькими способами могут быть вручены премии, если в олимпиаде участвовало 20 человек и никому не дают двух книг сразу? Та же задача, если никому не дают двух экземпляров одной и той же книги, но могут быть вручены две или три различные книги.

54. Берутся кости домино от $(0, 0)$ до (n, n) . Показать, что число костей с суммой очков $n - r$ равно числу костей с суммой очков $n + r$ и что это число равно $\frac{1}{4}(2n - 2r + 3)$. Найти общее число всех костей.

55. Сколькими способами можно переставить буквы слова «обороноспособность» так, чтобы две буквы «о» не шли подряд?

56. Сколькими способами можно выбрать из слова «логарифм» две согласных и одну гласную букву? Та же задача, если среди выбранных букв обязательно есть буква «ф».

57. Сколькими различными способами можно выбрать буквы из фразы «Око за око, зуб за зуб»? Порядок букв не учитывается.

58. Найти сумму четырехзначных чисел, получаемых при всевозможных перестановках цифр 1, 2, 2, 5.

59. Найти сумму четырехзначных чисел, получаемых при всевозможных перестановках цифр 1, 1, 4, 4.

60. Сколько различных чисел, меньших, чем миллион, можно написать с помощью цифр 8 и 9?

61. Сколько различных четных чисел, меньших, чем миллион, можно написать с помощью цифр 9, 8, 0? (Записи, начинающиеся с нуля, считаются недопустимыми.)

62. Сколько различных нечетных чисел, меньших, чем миллион, можно написать с помощью цифр 9, 8, 7?

63. Сколько имеется различных шестизначных чисел, у которых три цифры — четные, а три — нечетные?

64. Сколькими способами можно выбрать из натуральных чисел от 1 до 30 три числа так, чтобы их сумма была четной?

65. Сколькими способами 4 черных шара, 4 белых шара и 4 синих шара могут быть разложены в 6 различных пакетов (некоторые пакеты могут быть пустыми)?

66. Ребенок ставит на шахматной доске белые и черные фигуры (по два

коня, два слона, две ладьи, ферзь и король каждого цвета). Сколькими способами он может это сделать?

67. Решите ту же задачу, если расставляются и все пешки (по 8 пешек каждого цвета).

68. Сколькими способами можно расставить 12 белых и 12 черных шашек на черные поля доски так, чтобы это положение было симметрично относительно центра доски?

69. То же самое, но при симметрии должны меняться цвета шашек.

70. Сколькими способами можно поставить 20 белых шашек на крайние линии шахматной доски так, чтобы это расположение не менялось при повороте доски на 90° ?

71. На плоскости задано n точек, из которых p лежат на одной прямой, а кроме них никакие 3 точки не лежат на одной прямой. Сколько существует треугольников, вершинами которых являются эти точки?

72. На прямой взяты p точек, а на параллельной ей прямой — еще q точек. Сколько существует треугольников, вершинами которых являются эти точки?

73. Пусть при том же условии на еще одной параллельной прямой взяты r точек, причем никакие три точки не лежат на одной прямой, пересекающей все три параллели. Сколько получится дополнительных треугольников?

74. Каждая сторона квадрата разбита на n частей. Сколько можно построить треугольников, вершинами которых являются точки деления?

75. На одной прямой взяты n точек, а на параллельной ей прямой m точек. Эти точки соединяют прямыми. Найти число точек пересечения проведенных прямых. (Мы считаем, что никакие три из проведенных прямых не пересекаются в одной точке, а также что точка пересечения данных прямых не входит в число выбранных.)

76. Даны n точек на плоскости, никакие три из которых не лежат на одной прямой и никакие 4 — на одной окружности. Через каждые две из этих точек проводится прямая, а через каждые три — окружность. Найти наибольшее число точек пересечения всех проведенных прямых со всеми окружностями.

77. Сколькими геометрически различными способами можно раскрасить грани куба шестью различными красками? Два способа считаются геометрически совпадающими, если один можно перевести в другой движением куба как твердого тела.

78. Сколькими геометрически различными способами можно раскрасить грани тетраэдра четырьмя различными красками?

79. Сколькими геометрически различными способами можно раскрасить грани октаэдра восьмью различными красками?

80. Решить аналогичные задачи для правильных додекаэдра и икосаэдра.

81. Найти сумму коэффициентов многочлена, получающегося после раскрытия скобок в выражении

$$(7x^3 - 13y^2 + 99)^{1984} (y^3 - 8y^2 + 6y + z)^2 + (2x^2 + 18y^3 - 21)^{1985}.$$

82. Доказать, что число точек пересечения диагоналей выпуклого n -угольника, лежащих вне этого многоугольника, равно $\frac{1}{12} n (n-3) (n-4) (n-5)$, а лежащих внутри него равно $\frac{1}{24} n (n-1) (n-2) (n-3)$ (предполагается,

что никакие две диагонали не параллельны и никакие три не пересекаются в одной точке).

83. На плоскости проведено p замкнутых кривых, каждая из которых пересекает все остальные по крайней мере в двух точках. Пусть n_r — число точек, в которых пересекаются r кривых. Доказать, что число замкнутых областей, ограниченных дугами этих кривых и не содержащих внутри себя таких дуг, равно

$$1 + n_2 + 2n_3 + \dots + rn_{r+1} + \dots + (p-1)n_p.$$

84. Доказать, что

$$\frac{[C_{n+1}^{r+1} - C_n^r]C_{n-1}^{r-1}}{(C_n^r)^2 - C_{n+1}^{r+1}C_{n-1}^{r-1}} = r.$$

85. Доказать, что

$$C_n^1 + 6C_n^2 + 6C_n^3 = n^3, \\ 1 + 7C_n^1 + 12C_n^2 + 6C_n^3 = (n+1)^3.$$

86. Доказать, что при $n \geq 2$ и $|x| < 1$ имеем:

$$(1+x)^n + (1-x)^n < 2^n.$$

87. Вычислить следующие суммы:

- а) $C_n^1 + 2C_n^2 + 3C_n^3 + \dots + nC_n^n$;
- б) $C_n^0 + 2C_n^1 + 3C_n^2 + \dots + (n+1)C_n^n$;
- в) $C_n^2 + 2C_n^3 + 3C_n^4 + \dots + (n-1)C_n^n$;
- г) $C_n^0 + 3C_n^1 + 5C_n^2 + \dots + (2n-1)C_n^n$.

§ 1. Событие и вероятность

Под *событием* мы будем понимать всякое явление, которое происходит или не происходит. Легко понять, что эта фраза отнюдь не может служить точным определением в том смысле, как мы понимаем математическое определение, однако мы вынуждены ею ограничиться.

Для большей ясности приведем некоторые примеры. Так, например, событием является выпадение герба при бросании монеты, выпадение того или иного числа очков (например, шестерки) при бросании игральной кости, попадание в цель при выстреле, нахождение молекулы газа в заранее выделенном объеме, опоздание в школу, приход в школу вовремя, прочтение (или непрочтение) этой книги (или «Евгения Онегина»)...

Различные события мы будем обозначать буквами A, B, C, \dots .

Событие называют *достоверным*, если оно непременно должно произойти. Так, достоверным является выпадение не более шести очков при бросании обычной игральной кости, появление белого шара при извлечении из урны, содержащей только белые шары, и т. п.

Наоборот, событие называют *невозможным*, если оно заведомо не наступит. Примерами невозможных событий являются извлечение более четырех тузов из обычной карточной колоды, появление красного шара из урны, содержащей лишь белые и черные шары, и т. п.

Пусть A — некоторое событие. Под событием, *противоположным* ему, будем понимать событие, состоящее в том, что A не наступило. Его обозначают через \bar{A} . Если, скажем, событие A состоит в появлении красной масти при вытаскивании карты из колоды, то \bar{A} означает появление черной.

События A и B называют *несовместными*, если наступление одного из них исключает возможность наступления другого. Так, появление любого возможного числа очков при бросании игральной

кости (событие A) несовместно с появлением иного числа (событие B). Выпадение четного числа очков несовместно с выпадением нечетного числа. Наоборот, выпадение четного числа очков (событие A) и числа очков, кратного трем (событие B), не будут несовместными, ибо выпадение шести очков означает наступление и события A , и события B , так что наступление одного из них не исключает наступления другого. Легко понять, что события A и \bar{A} всегда будут несовместными.

Рассмотрим некоторую совокупность событий A, B, \dots, L . Эти события принято называть *единственно возможными*, если в результате каждого испытания хотя бы одно из них наверно наступит. Говорят также, что рассматриваемые события образуют *полную группу событий*. Так, например, при бросании игральной кости полную группу образуют события, состоящие в выпадении одного, двух, трех, четырех, пяти и шести очков.

Теперь мы можем перейти к рассмотрению важнейшего понятия *вероятности события*.

Рассмотрим систему конечного числа событий A_1, A_2, \dots, A_n , относительно которой сделаем следующие предположения:

1. *Эти события попарно несовместны*; иначе говоря, для любых двух событий A_i и A_k ($i, k = 1, 2, \dots, n, i \neq k$) появление одного из них исключает появление другого.

2. *События A_1, A_2, \dots, A_n единственно возможны*, то есть какое-либо одно из них непременно должно наступить.

3. *События A_1, A_2, \dots, A_n равновозможны*. Это означает, что не существует никаких объективных причин, вследствие которых одно из них могло бы наступать чаще, чем какое-либо другое.

Пусть имеется событие A , которое наступает при появлении некоторых из наших «элементарных» событий A_1, A_2, \dots, A_n и не наступает при появлении других. Мы будем говорить в таком случае, что те из «элементарных» событий A_i , при наступлении которых наступает также событие A , *благоприятствуют* событию A .

Допустим, что из общего числа n рассматриваемых событий A_1, A_2, \dots, A_n событию A благоприятствует m из них. Тогда *вероятностью события A называется отношение числа событий, благоприятствующих событию A , к общему числу всех равновозможных событий*. Если, как это принято, обозначить вероятность события A через $P(A)$, то мы получаем по определению

$$P(A) = \frac{m}{n}.$$

Поясним приведенное нами определение примером. Рассмотрим бросание игральной кости и обозначим через A_1, A_2, \dots, A_6 события, состоящие в выпадении соответственно одного, двух, ..., шести оч-

ков. Легко проверить, что эти события удовлетворяют всем сделанным выше предположениям.

Отсюда следует, что

$$P(A_1) = P(A_2) = \dots = P(A_6) = \frac{1}{6},$$

потому что каждому из этих событий благоприятствует только оно само, так что здесь $m = 1$, а $n = 6$.

Если событие A означает появление четного числа очков, то ему благоприятствуют события A_2, A_4, A_6 , состоящие в появлении двух, четырех и шести очков. Поэтому для события A имеем $m = 3$, так что $P(A) = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$.

Пусть событие B состоит в появлении числа очков, кратного трем. Тогда событию B благоприятствуют «элементарные» события A_3 и A_6 , откуда следует, что для события B имеем $m = 2$. Поэтому $P(B) = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$.

Легко заметить, что для любого события A число благоприятствующих событий m удовлетворяет неравенствам $0 \leq m \leq n$. Поэтому *вероятность любого события A подчинена условиям*

$$0 \leq P(A) \leq 1.$$

Далее, если обозначить через E некоторое достоверное событие, то ему, очевидно, должны благоприятствовать все «элементарные» события A_i , так что для него должно быть $m = n$. Поэтому *вероятность достоверного события равна единице:*

$$P(E) = 1.$$

Если, наоборот, U — невозможное событие, то из самого определения следует, что здесь $m = 0$, так что вероятность невозможного события равна нулю:

$$P(U) = 0.$$

Рассмотрим несколько примеров, разъясняющих введенное нами понятие вероятности.

Пример 1. В урне находятся три синих, восемь красных и девять белых шаров одинакового размера и веса, неразличимых наощупь. Шары тщательно перемешаны. Какова вероятность появления синего, красного и белого шаров при одном вынимании шара из урны.

Решение. Так как появление любого шара можно считать равновероятным, то мы имеем всего $n = 3 + 8 + 9 = 20$ элементарных событий. Если через A, B, C обозначить события, состоящие в появлении соответственно синего, красного и белого шаров, а

через m_1, m_2, m_3 — число благоприятствующих этим событиям случаев, то ясно, что $m_1 = 3, m_2 = 8, m_3 = 9$. Поэтому

$$P(A) = \frac{3}{20} = 0,15; \quad P(B) = \frac{8}{20} = 0,40; \quad P(C) = \frac{9}{20} = 0,45.$$

Пример 2. Одновременно брошены две монеты. Какова вероятность появления m гербов ($m = 0, 1, 2$)?

Решение. Рассмотрим возможные при бросании двух монет исходы. Очевидно, их можно описать схемой

$$\Gamma\Gamma, \quad \Gamma P, \quad P\Gamma, \quad PP,$$

где Γ означает выпадение герба, а P — надписи. Таким образом, возможны четыре элементарных события. Поскольку монеты предполагаются однородными и имеющими геометрически правильную форму, то нет никаких оснований предполагать, что одна из сторон какой-либо монеты выпадает чаще других. Поэтому все четыре случая следует считать равновероятными. Но тогда, обозначив через P_m вероятность выпадения m гербов, легко получим:

$$P_0 = \frac{1}{4}; \quad P_1 = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}; \quad P_2 = \frac{1}{4}.$$

Пример 3. Одновременно бросаются две игральные кости, на гранях которых нанесены очки 1, 2, 3, 4, 5, 6. Какова вероятность того, что сумма очков, выпавших на двух костях, равна восьми?

Решение. Так как любое из возможного числа очков на одной кости может сочетаться с любым числом очков на другой, то общее число различных случаев равно $n = 6 \cdot 6 = 36$. Легко убедиться в том, что все эти случаи попарно несовместны, равновероятны и образуют полную группу событий. Для ответа на вопрос следует подсчитать, в каком числе случаев сумма очков равна восьми. Это будет, если число очков на брошенных костях равно

$$2 + 6, 3 + 5, 4 + 4, 5 + 3, 6 + 2,$$

причем первое слагаемое означает число очков на первой, а второе — на второй кости. Отсюда видно, что событию A , состоящему в том, что сумма очков, выпавших на двух костях, равна восьми, благоприятствует $m=5$ случаев. Поэтому

$$P(A) = \frac{5}{36}.$$

У п р а ж н е н и я

1. В урне a белых и b черных шаров. Из урны вынимаются два шара. Найти вероятности того, что оба шара будут белыми.

2. В партии из N изделий M бракованных. Из партии выбирается наугад n изделий. Определить вероятность того, что среди этих n изделий будет ровно m бракованных.

3. В кошельке лежат три монеты достоинством по 20 коп. и семь монет по 3 коп. Наудачу берется одна монета, а затем извлекается вторая, оказавшаяся монетой в 20 коп. Определить вероятность того, что и первая извлеченная монета имеет достоинство в 20 коп.

(У к а з а н и е: очередность извлечения при таких условиях не имеет значения.)

4. Определить вероятность того, что выбранное наудачу. целое число N при а) возведении в квадрат, б) возведении в четвертую степень даст число, оканчивающееся единицей.

(У к а з а н и е: можно рассматривать только однозначные числа.)

5. На паркетный пол наудачу бросается монета диаметра d . Паркет имеет форму квадратов со стороной $a > d$. Какова вероятность того, что монета не пересечет ни одной из сторон квадратов паркета. (У к а з а н и е: так как все квадраты паркета равноправны, то можно рассматривать лишь тот квадрат, внутрь которого попал центр монеты.)

§ 2. Сложные вероятности. Теоремы сложения и умножения. Условные вероятности

Непосредственный подсчет случаев, благоприятствующих данному событию, может оказаться затруднительным. Поэтому для определения вероятности события бывает выгодно представить данное событие в виде комбинации некоторых других, более простых событий. При этом, однако, надо знать правила, которым подчиняются вероятности при комбинации событий. Именно к этим правилам и относятся упомянутые в названии параграфа теоремы.

Первая из них относится к подсчету вероятности того, что осуществится хотя бы одно из нескольких событий.

Теорема сложения. Пусть A и B — два несовместных события. Тогда вероятность того, что осуществится хотя бы одно из этих двух событий, равна сумме их вероятностей:

$$P(A \text{ или } B) = P(A) + P(B). \quad (1)$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть A_1, A_2, \dots, A_n — полная группа попарно несовместных событий. Если $P(A) = p_1 = \frac{m_1}{n}$,

$P(B) = p_2 = \frac{m_2}{n}$, то среди этих n элементарных событий имеется ровно m_1 событий, благоприятствующих A , и ровно m_2 событий, благоприятствующих B . Так как события A и B несовместны, то никакое из событий не может благоприятствовать обоим этим событиям. Событию (A или B), состоящему в том, что наступает хотя бы одно из этих двух событий, благоприятствует, очевидно, как каждое из событий A_1 , благоприятствующих A , так и каждое из событий

A_1 , благоприятствующих B . Поэтому общее число событий, благоприятствующих событию (A или B), равно сумме $m_1 + m_2$, откуда следует:

$$P(A \text{ или } B) = \frac{m_1 + m_2}{n} = \frac{m_1}{n} + \frac{m_2}{n} = p_1 + p_2 = P(A) + P(B),$$

что и требовалось доказать¹.

Нетрудно видеть, что теорема сложения, сформулированная выше для случая двух событий, легко переносится на случай любого конечного числа их. Именно если A, B, C, \dots, L — попарно несовместные события, то

$$P(A \text{ или } B \text{ или } C \text{ или } \dots \text{ или } L) = P(A) + P(B) + P(C) + \dots + P(L). \quad (2)$$

Для случая трех событий, например, можно написать

$$P(A \text{ или } B \text{ или } C) = P[(A \text{ или } B) \text{ или } C] = P(A \text{ или } B) + P(C),$$

откуда уже вытекает наше утверждение. Далее следует воспользоваться методом математической индукции.

Важным следствием теоремы сложения является утверждение: если события A_1, A_2, \dots, A_n попарно несовместны и единственно возможны, то

$$P(A_1) + P(A_2) + \dots + P(A_n) = 1. \quad (3)$$

Действительно, событие (A_1 или A_2 или ... или A_n) по предположению достоверно и его вероятность, как было указано в § 1, равна единице. В частности, если A и \bar{A} означают два взаимно противоположных события, то

$$P(A) + P(\bar{A}) = 1.$$

Проиллюстрируем теорему сложения примерами.

Пример 1. При стрельбе по мишени вероятность сделать отличный выстрел равна 0,3, а вероятность сделать выстрел на оценку «хорошо» равна 0,4. Какова вероятность получить за сделанный выстрел оценку не ниже «хорошо»?

Решение. Если событие A означает получение оценки «отлично», а событие B — получение оценки «хорошо», то

$$P(A \text{ или } B) = P(A) + P(B) = 0,7.$$

Пример 2. В урне, содержащей n шаров белого, красного и черного цвета, находятся k белых шаров и l красных. Какова вероятность вынуть шар не черного цвета?

Решение. Если событие A состоит в появлении белого, а событие B — красного шара, то появление шара не черного цвета

¹ Заметим, что $P(A) + P(B) \leq 1$, так как $m_1 + m_2 \leq n$.

означает появление либо белого, либо красного шара. Так как по определению вероятности

$$P(A) = \frac{k}{n}, \quad P(B) = \frac{l}{n},$$

то по теореме сложения вероятность появления шара не черного цвета равна:

$$P(A \text{ или } B) = \frac{k}{n} + \frac{l}{n} = \frac{k+l}{n}.$$

Эту задачу можно решить и так. Пусть событие C состоит в появлении черного шара. Число черных шаров равно $n - (k + l)$, так что $P(C) = \frac{n-k-l}{n}$. Появление шара не черного цвета является противоположным событием \bar{C} , поэтому на основании указанного выше следствия из теоремы сложения имеем:

$$P(\bar{C}) = 1 - P(C) = 1 - \frac{n-k-l}{n} = \frac{k+l}{n},$$

как и раньше.

Пример 3. В денежно-вещевой лотерее на серию в 1000 билетов приходится 120 денежных и 80 вещевых выигрышей. Какова вероятность какого-либо выигрыша на один лотерейный билет?

Решение. Если обозначить через A событие, состоящее в выпадении денежного выигрыша и через B — вещевого, то из определения вероятности следует

$$P(A) = \frac{120}{1000} = 0,12; \quad P(B) = \frac{80}{1000} = 0,08.$$

Интересующее нас событие представляет (A или B), поэтому из теоремы сложения вытекает

$$P(A \text{ или } B) = P(A) + P(B) = 0,20.$$

Таким образом, вероятность какого-либо выигрыша равна 0,2.

Прежде чем перейти к следующей теореме, необходимо ознакомиться с новым важным понятием — понятием *условной вероятности*. Для этой цели мы начнем с рассмотрения следующего примера.

Пусть на складе имеется 400 электрических лампочек, изготовленных на двух различных заводах, причем на первом изготовлено 75% всех лампочек, а на втором — 25%. Допустим, что среди лампочек, изготовленных первым заводом, 83% удовлетворяют условиям определенного стандарта, а для продукции второго завода этот процент равен 63. Определим вероятность того, что случайно взятая со склада лампочка окажется удовлетворяющей условиям стандарта.

Заметим, что общее число имеющихся стандартных лампочек состоит из $400 \cdot 0,75 \cdot 0,83 = 249$ лампочек, изготовленных первым

заводом, и 63 лампочек, изготовленных вторым заводом, то есть равно 312. Так как выбор любой лампочки следует считать равновероятным, то мы имеем 312 благоприятствующих случаев из 400, так что

$$P(B) = \frac{312}{400} = 0,78,$$

где событие B состоит в том, что выбранная нами лампочка стандартна.

При этом подсчете не делалось никаких предположений о том, к продукции какого завода принадлежит выбранная нами лампочка. Если же какие-либо предположения такого рода сделать, то очевидно, что интересующая нас вероятность может измениться. Так, например, если известно, что выбранная лампочка изготовлена на первом заводе (событие A), то вероятность того, что она стандартна, будет уже не 0,78, а 0,83.

Такого рода вероятность, то есть вероятность события B при условии, что имеет место событие A , называют *условной вероятностью события B при условии наступления события A* и обозначают $P_A(B)$.

Если мы в предыдущем примере обозначим через A событие, состоящее в том, что выбранная лампочка изготовлена на первом заводе, то мы можем написать $P_A(B) = 0,83$.

Теперь мы можем сформулировать важную теорему, относящуюся к подсчету вероятности совмещения событий.

Теорема умножения. Вероятность совмещения событий A и B равна произведению вероятности одного из событий на условную вероятность другого в предположении, что первое имело место:

$$P(A \text{ и } B) = P(A) \cdot P_A(B). \quad (4)$$

При этом под *совмещением* событий A и B понимается *наступление каждого из них*, то есть наступление как события A , так и события B .

Д о к а з а т е л ь с т в о. Рассмотрим полную группу из n равновероятных попарно несовместных событий A_1, A_2, \dots, A_n , каждое из которых может быть благоприятствующим или неблагоприятствующим как для события A , так и для события B .

Разобьем все эти события на четыре различные группы следующим образом. К первой группе отнесем те из событий A_1, A_2, \dots, A_n , которые благоприятствуют и событию A , и событию B ; ко второй и третьей группам отнесем такие события A_i , которые благоприятствуют одному из двух интересующих нас событий и не благоприятствуют другому, например ко второй группе — те, которые благоприятствуют A , но не благоприятствуют B , а к третьей — те, которые благоприятствуют B , но не благоприятствуют A ; наконец, к

четвертой группе отнесем те из событий A_i , которые не благоприятствуют ни A , ни B .

Так как нумерация событий A_1, A_2, \dots, A_n не играет роли, то можно предположить, что это разбиение на четыре группы выглядит так:

I группа: A_1, A_2, \dots, A_k ;

II группа: $A_{k+1}, A_{k+2}, \dots, A_{k+l}$;

III группа: $A_{k+l+1}, A_{k+l+2}, \dots, A_{k+l+m}$;

IV группа: $A_{k+l+m+1}, \dots, A_n$.

Таким образом, среди n равновозможных и попарно несовместных событий A_1, A_2, \dots, A_n имеется k событий, благоприятствующих событию A , и событию B , l событий, благоприятствующих событию A , но не благоприятствующих событию B , m событий, благоприятствующих B , но не благоприятствующих A , и, наконец, $n - (k + l + m)$ событий, не благоприятствующих ни A , ни B .

Заметим, между прочим, что какая-либо из рассмотренных нами четырех групп (и даже не одна) может не содержать ни одного события. В этом случае соответствующее число, означающее количество событий в такой группе, будет равно нулю.

Произведенная нами разбивка на группы позволяет сразу написать

$$P(A \text{ и } B) = \frac{k}{n}, \quad P(A) = \frac{k+l}{n}, \quad P(B) = \frac{k+m}{n},$$

ибо совмещению событий A и B благоприятствуют события первой группы и только они. Общее число событий, благоприятствующих A , равно общему числу событий в первой и второй группах, а благоприятствующих B — общему числу событий в первой и третьей группах.

Подсчитаем теперь вероятность $P_A(B)$, то есть вероятность события B при условии, что событие A имело место. Теперь события, входящие в третью и четвертую группы, отпадают, так как их появление противоречило бы наступлению события A , и число возможных случаев оказывается равным уже не n , а $k + l$. Из них событию B благоприятствуют лишь события первой группы, так что мы получаем:

$$P_A(B) = \frac{k}{k+l}.$$

Для доказательства теоремы достаточно теперь написать очевидное тождество:

$$\frac{k}{n} = \frac{k+l}{n} \cdot \frac{k}{k+l},$$

и заменить в нем все три дроби вычисленными выше вероятностями. Мы приходим к утверждавшемуся в теореме равенству:

$$P(A \text{ и } B) = P(A) P_A(B).$$

Ясно, что написанное нами выше тождество имеет смысл лишь при $k + l \neq 0$, что справедливо всегда, если только A не есть невозможное событие.

Так как события A и B равноправны, то, поменяв их местами, получим другую форму теоремы умножения:

$$P(A \text{ и } B) = P(B) P_B(A). \quad (5)$$

Впрочем, это равенство можно получить тем же путем, что и предыдущее, если заметить, что $P_B(A) = \frac{k}{k+m}$, и воспользоваться тождеством $\frac{k}{n} = \frac{k+m}{n} \cdot \frac{k}{k+m}$.

Сравнивая правые части двух выражений для вероятности $P(A \text{ и } B)$, получим полезное равенство:

$$P(A) P_A(B) = P(B) P_B(A). \quad (6)$$

Рассмотрим теперь примеры, иллюстрирующие теорему умножения.

Пример 4. В продукции некоторого предприятия признаются годными (событие A) 96% изделий. К первому сорту (событие B) оказываются принадлежащими 75 изделий из каждой сотни годных. Определить вероятность того, что произвольно взятое изделие будет годным и принадлежит к первому сорту.

Решение. Искомая вероятность есть вероятность совмещения событий A и B . По условию имеем: $P(A) = 0,96$ и $P_A(B) = 0,75$. Поэтому теорема умножения дает

$$P(A \text{ и } B) = 0,96 \cdot 0,75 = 0,72.$$

Пример 5. Вероятность попадания в цель при отдельном выстреле (событие A) равна 0,2. Какова вероятность поразить цель, если 2% взрывателей дают отказы (т. е. в 2% случаев выстрела не произойдет)?

Решение. Пусть событие B состоит в том, что выстрел произойдет, а \bar{B} означает противоположное событие. Тогда по условию $P(\bar{B}) = 0,02$ и согласно следствию из теоремы сложения $P(B) = 1 - P(\bar{B}) = 0,98$. Далее, по условию $P_B(A) = 0,2$.

Поражение цели означает совмещение событий A и B (выстрел произойдет и даст попадание), поэтому по теореме умножения

$$P(A \text{ и } B) = P(B) \cdot P_B(A) = 0,196.$$

Важный частный случай теоремы умножения можно получить, если воспользоваться понятием *независимости событий*.

Два события называются независимыми, если вероятность одного из них не изменяется в результате того, наступило или не наступило другое.

Примерами независимых событий являются выпадение различного числа очков при повторном бросании игральной кости или той или иной стороны монет при повторном бросании монеты, так как очевидно, что вероятность выпадения герба при втором бросании равна $\frac{1}{2}$ независимо от того, выпал или не выпал герб в первом.

Аналогично, вероятность вынуть во второй раз белый шар из урны с белыми и черными шарами, если вынутый первым шар предварительно возвращен, не зависит от того, белый или черный шар был вынут в первый раз. Поэтому результаты первого и второго вынимания независимы между собой. Наоборот, если шар, вынутый первым, не возвращается в урну, то результат второго вынимания зависит от первого, ибо состав шаров, находящихся в урне после первого вынимания, меняется в зависимости от его исхода. Здесь мы имеем пример *зависимых событий*.

Пользуясь обозначениями, принятыми для условных вероятностей, можно записать условие независимости событий A и B в виде

$$P_A(B) = P_{\bar{A}}(B) = P(B),$$

или

$$P_B(A) = P_{\bar{B}}(A) = P(A).$$

Воспользовавшись этими равенствами, мы можем привести теорему умножения для независимых событий к следующей форме.

Если события A и B независимы, то вероятность их совмещения равна произведению вероятностей этих событий:

$$P(A \text{ и } B) = P(A) \cdot P(B). \quad (7)$$

Действительно, достаточно в первоначальном выражении теоремы умножения положить $P_A(B) = P(B)$, что вытекает из независимости событий, и мы получим требуемое равенство.

Рассмотрим теперь несколько событий: A, B, \dots, L . Будем называть их *независимыми в совокупности*, если вероятность появления любого из них не зависит от того, произошли ли какие-либо другие рассматриваемые события или нет¹.

¹ Отметим, что, для того чтобы события были независимыми в совокупности, недостаточно, чтобы они были лишь попарно независимы.

В случае событий, независимых в совокупности, теорема умножения может быть распространена на любое конечное число их, благодаря чему ее можно сформулировать так:

Вероятность совмещения событий A, B, \dots, L , независимых в совокупности, равна произведению вероятностей этих событий:

$$P(A \text{ и } B \text{ и } \dots \text{ и } L) = P(A) P(B) \dots P(L). \quad (8)$$

Пример 6. Рабочий обслуживает три автоматических станка, к каждому из которых нужно подойти для устранения неисправности, если станок остановится. Вероятность того, что первый станок не остановится в течение часа, равна 0,9. Та же вероятность для второго станка равна 0,8 и для третьего — 0,7. Определить вероятность того, что в течение часа рабочему не потребуется подойти ни к одному из обслуживаемых им станков.

Решение. Если считать станки работающими независимо друг от друга, то в силу теоремы умножения искомая вероятность совмещения трех событий равна произведению

$$0,9 \cdot 0,8 \cdot 0,7 = 0,504.$$

Пример 7. Вероятность сбить самолет винтовочным выстрелом $p = 0,004$. Какова вероятность уничтожения неприятельского самолета при одновременной стрельбе из 250 винтовок?

Решение. Вероятность того, что при одиночном выстреле самолет не будет сбит, по теореме сложения равна $1 - p = 0,996$. Тогда можно подсчитать с помощью теоремы умножения вероятность того, что самолет не будет сбит при 250 выстрелах, как вероятность совмещения событий. Она равна $0,996^{250}$. После этого мы можем снова воспользоваться теоремой сложения и найти вероятность того, что самолет будет сбит, как вероятность противоположного события

$$1 - 0,996^{250} \approx 0,62.$$

Отсюда видно, что, хотя вероятность сбить самолет одиночным винтовочным выстрелом ничтожно мала, тем не менее при стрельбе из 250 винтовок вероятность сбить самолет оказывается уже весьма ощутимой. Она существенно возрастает, если число винтовок увеличить. Так, при стрельбе из 500 винтовок вероятность сбить самолет, как легко подсчитать, равна $1 - 0,996^{500} \approx 0,87$, а при стрельбе из 1000 винтовок — даже $1 - 0,996^{1000} \approx 0,98$.

Доказанная выше теорема умножения позволяет несколько расширить теорему сложения, распространив ее на случай совместных событий. Ясно, что если события A и B совместимы, то вероятность наступления хотя бы одного из них не равна сумме их вероятностей. Например, если событие A означает выпадение четного

числа очков при бросании игральной кости, а событие B — выпадение числа очков, кратного трем, то событию (A или B) благоприятствует выпадение 2, 3, 4 и 6 очков, то есть

$$P(A \text{ или } B) = \frac{2}{3}.$$

С другой стороны, $P(A) = \frac{1}{2}$ и $P(B) = \frac{1}{3}$, то есть $P(A) + P(B) = \frac{5}{6}$. Таким образом, в этом случае

$$P(A \text{ или } B) \neq P(A) + P(B).$$

Отсюда видно, что в случае совместимых событий теорема сложения вероятностей должна быть изменена. Как мы сейчас увидим, ее можно сформулировать таким образом, чтобы она была справедлива и для совместимых, и для несовместных событий, так что ранее рассмотренная теорема сложения окажется частным случаем новой.

Расширенная теорема сложения. Пусть A и B — произвольные события. Вероятность того, что осуществится хотя бы одно из этих двух событий, равна сумме их вероятностей без вероятности их совмещения:

$$P(A \text{ или } B) = P(A) + P(B) - P(A \text{ и } B). \quad (9)$$

Доказательство. Пусть A_1, A_2, \dots, A_n — полная группа n попарно несовместных событий. Если $P(A) = \frac{m_1}{n}$, то событию A благоприятствует m_1 из n элементарных событий. Допустим, что среди них есть k событий, благоприятствующих также и событию B , а $m_1 - k$ ему не благоприятствуют. Тогда среди n элементарных событий имеется ровно k событий, благоприятствующих и A и B . Поэтому если $P(B) = \frac{m_2}{n}$, то среди m_2 событий, благоприятствующих B , имеется k событий, благоприятствующих A , и $m_2 - k$ событий, которые A не благоприятствуют.

Все элементарные события, которые благоприятствуют событию (A или B), должны благоприятствовать либо только A , либо только B , либо и A и B . Таким образом, общее число таких событий равно

$$(m_1 - k) + (m_2 - k) + k = m_1 + m_2 - k,$$

а вероятность

$$P(A \text{ или } B) = \frac{m_1 + m_2 - k}{n} = \frac{m_1}{n} + \frac{m_2}{n} - \frac{k}{n} = P(A) + P(B) - P(A \text{ и } B),$$

что и требовалось доказать.

Применяя формулу (9) к рассмотренному выше примеру выпадения числа очков при бросании игральной кости, получим:

$$P(A \text{ или } B) = \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} = \frac{2}{3},$$

что совпадает с результатом непосредственного подсчета.

Очевидно, что формула (1) является частным случаем (9). Действительно, если события A и B несовместны, то $k = 0$ и вероятность совмещения $P(A \text{ и } B) = 0$.

Пример 8. В электрическую цепь включены последовательно два предохранителя. Вероятность выхода из строя первого предохранителя равна 0,6, а второго 0,2. Определим вероятность прекращения питания в результате выхода из строя хотя бы одного из этих предохранителей.

Решение. Так как события A и B , состоящие в выходе из строя первого и второго из предохранителей, совместимы, то искомая вероятность определится по формуле (9):

$$P(A \text{ или } B) = 0,6 + 0,2 - 0,6 \cdot 0,2 = 0,68.$$

Упражнения

6. В лотерее 1000 билетов, из них на один билет падает выигрыш 500 рублей, на 10 билетов — выигрыши по 100 рублей, на 50 билетов — выигрыши по 5 рублей, остальные билеты невыигрышные. Некто покупает один билет. Найти вероятность выиграть не менее 20 рублей.

7. Две одинаковые монеты радиуса r расположены внутри круга радиуса R , в который наудачу бросается точка. Определить вероятность того, что эта точка упадет на одну из монет, если монеты не перекрываются.

8. Вероятность того, что изготовленная на первом станке деталь будет первосортной, равна 0,7. При изготовлении такой же детали на втором станке эта вероятность равна 0,8. На первом станке изготовлены две детали, на втором 3. Найти вероятность того, что все детали первосортные.

9. Сколько нужно взять чисел из таблицы случайных чисел, чтобы с вероятностью не менее 0,9 быть уверенным, что среди них хотя бы одно число четное?

10. В круг радиуса R вписан равносторонний треугольник. Какова вероятность того, что четыре наугад поставленные в данном круге точки окажутся внутри треугольника?

§ 3. Примеры вычисления вероятностей

В этом параграфе мы рассмотрим ряд примеров вычисления вероятностей. При этом будет использоваться непосредственный подсчет общего числа равновозможных случаев и числа благоприятствующих случаев на основе комбинаторных задач, а также теоремы сложения и умножения вероятностей, рассмотренные в начале настоящей главы.

Пример 1. Бросаются две игральные кости (кубики). Найти вероятность того, что на обеих костях окажется:

- а) одинаковое число очков;
- б) различное число очков.

Решение. Подсчитаем сначала общее число возможных результатов. Каждый результат бросания двух костей можно описать в виде некоторого размещения из шести элементов (шесть возможностей для числа выпавших очков) по два (бросаются две кости) с повторениями (может выпасть одно и то же число очков на обеих костях). Поэтому общее число элементарных событий есть

$$R_6^2 = 6^2 = 36.$$

Очевидно, все элементарные события следует считать равновероятными.

Число случаев, благоприятствующих появлению одинакового числа очков, равно 6. Отсюда следует, что ответом для задачи а) является вероятность

$$p_1 = \frac{6}{36} = \frac{1}{6}.$$

Событие, указанное в задаче б), является противоположным первоначальному, и его вероятность p_2 удовлетворяет условию

$$p_1 + p_2 = 1,$$

откуда
$$p_2 = \frac{5}{6}.$$

Пример 2. В городе имеется 10 000 велосипедов, занумерованных различными номерами от 0000 до 9999. Какова вероятность того, что номер первого встречного велосипеда будет содержать хотя бы одну цифру 8?

Решение. Найдем сначала вероятность того, что ни одна цифра случайно встреченного номера не будет восьмеркой.

Для первой цифры вероятность не быть восьмеркой равна 0,9, так как всех равновероятных возможностей — различных цифр — десять, а отличных от восьмерки — девять. Значения цифр в различных разрядах независимы. Тогда вероятность того, что все четыре цифры отличны от 8, можно определить как вероятность совмещения событий. Она равна $(0,9)^4 = 0,6561$.

Искомая вероятность есть вероятность противоположного события, а потому равна $1 - 0,6561 = 0,3439$.

Пример 3. Абонент, забывший одну цифру нужного ему номера телефона, набирает эту цифру наудачу. Какова вероятность, что ему придется звонить не более двух раз?

Решение. Представим для удобства рассуждений, что абонент всегда звонит дважды, независимо от результата первой попытки. Общее число равновозможных случаев представляет здесь число размещений из 10 цифр по две без повторений, поскольку два раза звонить по одному телефону не имеет смысла. Следовательно, это будет $A_{10}^2 = 90$. Благоприятствующими будут те случаи, когда нужная цифра встретится на первом или втором месте в комбинации с любой другой. Ясно, что таких случаев $9 + 9 = 18$. Искомая вероятность равна, следовательно, $p = 0,2$.

Пример 4. В отделении 12 солдат. В наряд назначаются два человека наугад. Какова вероятность попасть в наряд для каждого данного солдата?

Решение. Общее число различных парных нарядов в этом случае мы уже подсчитывали в примере 4 из § 1 предыдущей главы. Оно равно $C_{12}^2 = 66$. Число парных нарядов, не содержащих данного солдата, по тем же соображениям равно $C_{11}^2 = 55$. Поэтому вероятность не попасть в наряд равна $\frac{55}{66} = \frac{5}{6}$, а искомая вероятность попасть в наряд $p = \frac{1}{6}$.

Пример 5. В некоторой партии изделий число бракованных составляет 4%. Из числа годных изделий 75% являются первосортными. Какова вероятность того, что случайно выбранное изделие будет первосортным?

Решение. Пусть событие A означает, что изделие является годным, а событие B — что изделие относится к первому сорту. Тогда по условию

$$\begin{aligned} P(A) &= 1 - 0,04 = 0,96, \\ P_A(B) &= 0,75. \end{aligned}$$

Искомая вероятность есть вероятность совмещения событий и по теореме умножения равна:

$$P(A \text{ и } B) = P(A) P_A(B) = 0,96 \cdot 0,75 = 0,72.$$

Пример 6. В некоторой лотерее имеется всего n билетов, из которых m являются выигрышными. Определить вероятность хотя бы одного выигрыша для лица, обладающего k билетами.

Решение. Общее число равновозможных случаев выбора k билетов из имеющихся n равно числу сочетаний C_n^k . Так как не-

выигрышных билетов имеется $n - m$, то число элементарных событий, благоприятствующих событию «не выиграть ни на один билет», равно C_{n-m}^k . Следовательно, вероятность не выиграть ни на один билет равна $C_{n-m}^k : C_n^k$. Требуемое событие выиграть хотя бы на один билет является противоположным, и его вероятность равна

$$p = 1 - \frac{C_{n-m}^k}{C_n^k}.$$

Пример 7. Из карточной колоды с 36 картами извлекается наугад одна карта. Какова вероятность извлечь картинку (короля, даму или валета) любой масти или карту пиковой масти?

Решение. Так как в колоде всего 12 картинок, то вероятность извлечь картинку равна $\frac{12}{36} = \frac{1}{3}$. Вероятность извлечь карту пиковой масти равна $\frac{1}{4}$. Остается воспользоваться теоремой сложения.

Однако необходимо учесть, что рассматриваемые события совместимы, так что следует воспользоваться расширенной теоремой сложения (см. формулу (9) из § 2), которая дает:

$$p = \frac{1}{3} + \frac{1}{4} - \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{4} = \frac{1}{2}.$$

Это и есть искомая вероятность.

Пример 8. Шесть пассажиров садятся на остановке в трамвайный поезд, состоящий из трех трамвайных вагонов. Какова вероятность того, что:

- все пассажиры сядут в один вагон;
- хотя бы в один вагон не сядет ни один пассажир;
- в каждый вагон сядут по два пассажира?

Решение. Число различных способов, которыми пассажиры могут разместиться в вагонах, подсчитывалось в примере 6 из § 5 предыдущей главы. Так как нас заведомо интересует лишь число пассажиров в каждом вагоне, то это число различных способов есть число сочетаний с повторениями $\Gamma_3^6 = 28$. Число благоприятствующих событий подсчитывается непосредственно.

а) Благоприятствующих событий три — все пассажиры сели в первый вагон, или во второй, или в третий. Искомая вероятность

$$p_a = \frac{3}{28}.$$

б) Благоприятствующих событий 6: в трех случаях свободным остается один вагон и в трех случаях — два вагона. Искомая вероятность $p = \frac{6}{28} = \frac{3}{14}$.

в) Благоприятствующих событий одно. Вероятность равна $p = \frac{1}{28}$.

§ 4. Полная вероятность. Формула Бейеса

При вычислении вероятностей сложных событий часто приходится одновременно применять теоремы сложения и умножения. Рассмотрим следующий пример.

П р и м е р 1. Имеется три одинаковых на вид урны с различным составом белых и черных шаров. Пусть в первой урне находится m_1 белых и n_1 черных шаров, во второй урне соответственно m_2 белых и n_2 черных и, наконец, в третьей — m_3 белых и n_3 черных шара. Выбирается наугад¹ одна из урн, и из нее вынимается один шар. Требуется определить вероятность того, что вынутый шар окажется белым.

Р е ш е н и е. Сделаем сначала предположение, что шар вынут из первой урны. Можно сказать, что это предположение означает наступление события H_1 или осуществление гипотезы² H_1 . Так как выбор любой урны равновероятен, то вероятность этой гипотезы равна $P(H_1) = \frac{1}{3}$. Из предположения о составе шаров следует, что вероятность вынуть белый шар из первой урны (событие A_1) равна

$$P(A_1) = \frac{m_1}{m_1 + n_1}.$$

Рассмотрим сложное событие, состоящее в том, что выбрана первая урна и вынутый из нее шар оказался белым. Тогда вероятность такого события в силу теоремы умножения будет равна:

$$P(H_1 \text{ и } A_1) = P(H_1) P_{H_1}(A_1) = \frac{1}{3} \frac{m_1}{m_1 + n_1}$$

(см. формулу (4) предыдущего параграфа). Точно так же вероятность вынуть белый шар из второй урны есть вероятность сложного

¹ То есть выбор каждой урны равновозможен.

² Конечно, здесь термин «гипотеза» употребляется в смысле, не совсем совпадающем с общепринятым; но во всяком случае оба смысла не противоречат друг другу.

события, состоящего в совмещении события H_2 (выбрана вторая урна) и события A_2 (из второй урны вынут белый шар), в результате чего эта вероятность равна

$$P(H_2 \text{ и } A_2) = P(H_2) P_{H_2}(A_2) = \frac{1}{3} \frac{m_2}{m_2 + n_2},$$

а для третьей урны

$$P(H_3 \text{ и } A_3) = P(H_3) P_{H_3}(A_3) = \frac{1}{3} \frac{m_3}{m_3 + n_3}.$$

Пусть теперь событие A означает извлечение белого шара независимо от того, из какой именно урны он был вынут. Тогда, учитывая, что события H_1, H_2, H_3 являются несовместными, ибо выбирается лишь одна урна, мы можем воспользоваться для нахождения вероятности события теоремой сложения, которая дает

$$\begin{aligned} P(A) &= P[(H_1 \text{ и } A_1) \text{ или } (H_2 \text{ и } A_2), \text{ или } (H_3 \text{ и } A_3)] = \\ &= P(H_1) P_{H_1}(A_1) + P(H_2) P_{H_2}(A_2) + P(H_3) P_{H_3}(A_3) = \\ &= \frac{1}{3} \left(\frac{m_1}{m_1 + n_1} + \frac{m_2}{m_2 + n_2} + \frac{m_3}{m_3 + n_3} \right). \end{aligned}$$

Сформулируем теперь общую задачу. Пусть события H_1, H_2, \dots, H_n образуют полную группу событий и при наступлении каждого из них, например H_i , событие A может наступить с некоторой условной вероятностью $P_{H_i}(A)$. Какова вероятность наступления события A ?

Воспользовавшись, как и в примере, с которого мы начали, теоремой умножения, найдем, что вероятность наступления A при условии наступления H_1 равна

$$P(H_1 \text{ и } A) = P(H_1) P_{H_1}(A). \quad (1)$$

Аналогично

$$\begin{aligned} P(H_2 \text{ и } A) &= P(H_2) P_{H_2}(A), \\ P(H_n \text{ и } A) &= P(H_n) P_{H_n}(A). \end{aligned} \quad (2)$$

Теперь для нахождения вероятности события A можно воспользоваться теоремой сложения, так как события H_1, H_2, \dots, H_n несовместны. Складывая все равенства (1) и (2), приходим к формуле:

$$P(A) = P(H_1) P_{H_1}(A) + P(H_2) P_{H_2}(A) + \dots + P(H_n) P_{H_n}(A),$$

или, короче,

$$P(A) = \sum_{i=1}^n P(H_i) P_{H_i}(A). \quad (3)$$

Формула (3) называется *формулой полной вероятности*.

События H_1, H_2, \dots, H_n обычно называют в таких случаях *гипотезами*¹. В рассмотренном выше примере 1 имелось три гипотезы ($n = 3$), которые были равновероятны между собой:

$$P(H_1) = P(H_2) = P(H_3) = \frac{1}{3}.$$

Пример 2. При разрыве снаряда образуются крупные, средние и мелкие осколки, причем число крупных осколков составляет 0,1 их общего числа, а число средних и мелких — соответственно 0,3 и 0,6 общего числа осколков. При попадании в танк крупный осколок пробивает броню с вероятностью 0,9, средний — с вероятностью 0,3 и мелкий — с вероятностью 0,1. Какова вероятность того, что попавший в броню осколок пробьет ее?

Решение. В нашем примере имеется три гипотезы, вероятности которых $P(H_1) = 0,1$, $P(H_2) = 0,3$ и $P(H_3) = 0,6$. Пользуясь формулой полной вероятности (3), находим:

$$P(A) = 0,1 \cdot 0,9 + 0,3 \cdot 0,3 + 0,6 \cdot 0,1 = 0,24.$$

Используя формулу полной вероятности, можно получить еще одну важную формулу, которая называется *формулой Байеса* или *формулой вероятностей гипотез*.

Пусть мы имеем некоторую полную группу событий — гипотез H_i ($i = 1, 2, \dots, n$), вероятность каждой из которых $P(H_i)$ до произведения опыта имеет определенное значение. Предположим, что в результате опыта наступило некоторое событие A . Появление этого нового сведения — наступление события A — может повлечь за собой изменение первоначальных вероятностей гипотез.

Поясним сказанное примером. Пусть урна содержит три шара белого и черного цвета, однако распределение числа шаров по цветам неизвестно. До производства опыта о содержимом урны можно сделать четыре гипотезы:

- 1) 3 белых и 0 черных (H_1),
- 2) 2 белых и 1 черный (H_2),
- 3) 1 белый и 2 черных (H_3),
- 4) 0 белых и 3 черных (H_4),

которые мы будем считать равновероятными: $P(H_1) = P(H_2) = P(H_3) = P(H_4) = \frac{1}{4}$. Допустим, что в результате опыта был

¹ Ср. примечание на стр. 325.

вынут белый шар (событие A). В таком случае вероятность гипотезы H_4 делается равной нулю. Вероятности остальных трех гипотез также изменятся, причем их уже нельзя будет считать равновероятными; вероятность гипотезы H_1 , например, больше, чем вероятность гипотезы H_3 .

Поставим вопрос в общем виде: выяснить, каковы будут вероятности гипотез H_i после опыта в предположении, что в результате опыта наступило событие A .

Обозначим вероятности гипотез H_1, H_2, \dots, H_n до производства опыта соответственно через $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$:

$$P(H_i) = \alpha_i \quad (i = 1, 2, \dots, n), \quad \sum_{i=1}^n \alpha_i = 1.$$

Вероятности тех же гипотез после опыта, в результате которого наступило событие A , обозначим через $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n$:

$$P_A(H_i) = \beta_i \quad (i = 1, 2, \dots, n),$$

причем снова

$$\sum_{i=1}^n \beta_i = 1,$$

так как события H_1, H_2, \dots, H_n по-прежнему несовместны и единственно возможны. Обозначим условную вероятность $P_{H_i}(A)$ через p_i и полную вероятность события A через P .

Пользуясь равенством (6) предыдущего параграфа, которое следует из теоремы умножения, напомним:

$$P(H_i) P_{H_i}(A) = P(A) P_A(H_i),$$

или с введенными обозначениями

$$\alpha_i p_i = P \beta_i.$$

Отсюда

$$\beta_i = \frac{\alpha_i p_i}{P}.$$

Подставляя сюда выражение для полной вероятности P из формулы (3), получим:

$$\beta_i = \frac{\alpha_i p_i}{\sum_{j=1}^n \alpha_j p_j} = \frac{\alpha_i p_i}{\alpha_1 p_1 + \alpha_2 p_2 + \dots + \alpha_n p_n}. \quad (4)$$

Нетрудно проверить, что сумма всех вероятностей β_i действительно равна единице.

Формула (4), дающая выражение вероятности гипотезы H_i после опыта, и есть нужная нам *формула Бейеса*.

Вернемся снова к нашему примеру. В соответствии с принятыми обозначениями имеем: $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = \alpha_4 = \frac{1}{4}$.

Далее находим:

$$p_1 = P_{H_1}(A) = 1, \quad p_2 = \frac{2}{3}, \quad p_3 = \frac{1}{3}, \quad p_4 = 0.$$

Окончательно получим:

$$P_A(H_1) = \frac{\frac{1}{4} \cdot 1}{\frac{1}{4} \cdot 1 + \frac{1}{4} \cdot \frac{2}{3} + \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{3} + \frac{1}{4} \cdot 0} = \frac{1}{2}.$$

Аналогично:

$$P_A(H_2) = \frac{1}{3}, \quad P_A(H_3) = \frac{1}{6}, \quad P_A(H_4) = 0.$$

§ 5. Повторение испытаний

Правила сложения и умножения вероятностей дают возможность определять вероятности достаточно сложных комбинаций событий. Одной из наиболее простых и вместе с тем весьма распространенных ситуаций, с которой мы сейчас познакомимся, является *схема повторения независимых испытаний*.

Пусть при некотором испытании событие A может наступить или не наступить. Обозначим вероятность наступления события A через $P(A) = p$ и вероятность его ненаступления — через $P(\bar{A}) = q = 1 - p$.

Рассмотрим возможные исходы двух последовательных независимых испытаний. Они описываются в табл. 1, в которой приведены также вероятности различных исходов. Теперь нетрудно подсчитать, что вероятность двукратного появления события A равна

Таблица 1

Результаты испытаний	AA	$A\bar{A}$	$\bar{A}A$	$\bar{A}\bar{A}$
Вероятность	p^2	pq	qp	q^2

p^2 , вероятность его однократного появления (безразлично, при каком испытании, то есть вероятность того, что при двух испытани-

ях один раз наступит A и один раз \bar{A}) равна $2pq$, а вероятность того, что A не наступит ни разу, равна q^2 . Очевидно, что эти результаты единственно возможны, причем

$$p^2 + 2pq + q^2 = 1.$$

Приведенное рассуждение без труда переносится на случай большего числа испытаний. Например, при трех испытаниях вероятность наступления события A три раза подряд равна p^3 как вероятность совмещения событий. Чтобы найти вероятность наступления события A два раза, безразлично в каком порядке, заметим, что это возможно при следующих трех исходах: $AA\bar{A}$, $A\bar{A}A$, $\bar{A}AA$, вероятность каждого из которых p^2q , так что вероятность двукратного наступления события A при трех испытаниях $3p^2q$. Аналогично подсчитывается вероятность однократного наступления $3pq^2$ и вероятность того, что событие A не наступит ни разу, которая равна q^3 . Как и выше,

$$p^3 + 3p^2q + 3pq^2 + q^3 = 1.$$

Мы можем теперь формулировать общую задачу. *Производится серия из n независимых испытаний, причем вероятность наступления события A при каждом отдельном испытании равна p . Требуется определить вероятность $P_{m,n}$ того, что событие наступит точно m раз.*

Такая задача может встретиться, например, при подсчете вероятности m попаданий в цель при n выстрелах и во многих аналогичных случаях, которые будут рассмотрены ниже.

Заметим прежде всего, что два крайних частных случая

$$\begin{aligned} P_{n,n} &= p^n, \\ P_{0,n} &= q^n \end{aligned}$$

легко находятся по теореме умножения как вероятности совмещения событий.

Подсчитаем теперь вероятность того, что при n испытаниях событие A появится ровно m раз в определенном порядке, например, как в выражении

$$\underbrace{AA \dots A}_{m \text{ раз}} \underbrace{\bar{A} \dots \bar{A}}_{n-m \text{ раз}}.$$

Ясно, что эта вероятность равна $p^m q^{n-m}$. Очевидно, что вероятность появления события A также m раз, но в другом порядке, будет той же самой. Число всех возможных выражений из n элементов, в которых m раз встречается A в различном порядке, равно числу сочетаний C_n^m .

Поэтому, пользуясь теоремой сложения вероятностей, получаем:

$$P_{m,n} = C_n^m p^m q^{n-m} = \frac{n!}{m!(n-m)!} p^m q^{n-m}. \quad (1)$$

Из этой формулы видно, что вероятности $P_{m,n}$ представляют отдельные слагаемые в разложении бинома:

$$(p + q)^n = p^n + np^{n-1}q + \frac{n(n-1)}{2!} p^2 q^{n-2} + \dots + \\ + C_n^m p^m q^{n-m} + \dots + q^n = 1.$$

Поэтому формулу (1) называют *биномиальной*.

Итак, сформулированная выше задача полностью решена. Проиллюстрируем теперь полученную формулу двумя примерами.

Пример 1. Бросается монета 6 раз. Какова вероятность выпадения герба 0, 1, ..., 6 раз?

Решение. В данном случае $p = q = \frac{1}{2}$. Пользуясь полученной формулой, приходим к результатам:

$$P_{0,6} = P_{6,6} = \left(\frac{1}{2}\right)^6 = \frac{1}{64},$$

$$P_{1,6} = P_{5,6} = C_6^1 \left(\frac{1}{2}\right)^5 \left(\frac{1}{2}\right) = \frac{3}{32},$$

$$P_{2,6} = P_{4,6} = C_6^2 \left(\frac{1}{2}\right)^4 \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{15}{64},$$

$$P_{3,6} = C_6^3 \left(\frac{1}{2}\right)^3 \left(\frac{1}{2}\right)^3 = \frac{5}{16}.$$

Эти результаты можно изобразить графически, отложив по оси абсцисс значения m , а по оси ординат — значения $P_{m,6}$. Очевидно, что наиболее вероятное число выпадений герба $m = 3$, однако вероятность эта невелика.

Пример 2. Производится восемь выстрелов по резервуару с горючим, причем первое попадание вызывает течь, а второе — воспламенение горючего. Какова вероятность того, что резервуар будет подожжен, если вероятность попадания при отдельном выстреле равна $p = 0,2$?

Решение. Найдем сначала вероятность противоположного события, т. е. вероятность того, что резервуар не будет подожжен. Это произойдет лишь тогда, когда число попаданий не превзойдет единицы. Вероятность этого равна:

$$P_{0,8} + P_{1,8} = q^8 + C_8^1 p q^7.$$

Так как здесь $p = 0,2$ и $q = 0,8$, то

$$P_{0,8} + P_{1,8} = (0,8)^8 + 8 \cdot 0,2 \cdot (0,8)^7 \approx 0,503,$$

откуда следует, что вероятность того, что резервуар будет подожен, равна:

$$p = 1 - 0,503 = 0,497.$$

У п р а ж н е н и я

11. Определить вероятность того, что номер первой встретившейся автомашины не содержит: а) цифры пять; б) двух пятерок.

(У к а з а н и е: при решении принять, что все номера—четырёхзначные, неповторяющиеся и равновозможные.)

12. В семье десять детей. Считая вероятность рождения мальчика и девочки 0,5, определить вероятность того, что в данной семье: а) пять мальчиков, б) мальчиков не менее трех, но не более восьми.

13. Производится пять независимых выстрелов по цели, вероятность попадания в которую равна 0,2. Для разрушения цели достаточно трех попаданий. Найти вероятность того, что цель будет разрушена.

14. Среди коконов некоторой партии 30% цветных. Какова вероятность того, что среди 10 случайно отобранных из партии коконов: а) 3 цветных, в) не более 3 цветных?

15. Два баскетболиста делают по три броска мячом в корзину. Вероятность попадания мяча при каждом броске равна соответственно 0,6 и 0,7. Найти вероятность того, что у обоих будет равное количество попаданий.

§ 6. Примеры вычисления вероятностей. Окончание

Рассмотрим еще несколько примеров на вычисление вероятностей.

П р и м е р 1. При разрыве бронебойного снаряда крупные осколки составляют по весу 20% от общего веса снаряда, средние — 30% и мелкие — 50%. Вероятность того, что крупный осколок пробьет броню танка, равна 0,8. Для средних и мелких осколков та же вероятность равна соответственно 0,5 и 0,2. Подсчитаем вероятность того, что броня танка будет пробита.

Р е ш е н и е. Здесь следует воспользоваться формулой полной вероятности. Приняв в качестве гипотез различные размеры осколка, получим, что их вероятности равны соответственно 0,2, 0,3 и 0,5. Поэтому искомая вероятность равна

$$P(A) = 0,2 \cdot 0,8 + 0,3 \cdot 0,5 + 0,5 \cdot 0,2 = 0,41.$$

П р и м е р 2. В условиях предыдущего примера, если броня танка оказалась пробитой, какова вероятность того, что пробоина произошла от мелкого осколка?

Решение. Здесь мы можем применить формулу Байеса, которая дает:

$$P(H_3) = \frac{0,5 \cdot 0,2}{0,2 \cdot 0,8 + 0,3 \cdot 0,5 + 0,5 \cdot 0,2} = \frac{0,10}{0,41} = 0,244.$$

Пример 3. Для данного стрелка вероятность попадания в десятку равна 0,7, а в девятку — 0,3. Определить вероятность того, что этот стрелок при трех выстрелах выбьет не менее 29 очков.

Решение. Чтобы набрать не менее 29 очков, необходимо либо три раза попасть в десятку, либо два раза в десятку и один раз в девятку. Вероятность попасть три раза подряд в десятку находится по теореме умножения как вероятность совмещения событий. Она равна:

$$P_{3,3} = (0,7)^3 = 0,343.$$

Вероятность попадания два раза в десятку и один раз в девятку можно найти по биномиальной формуле:

$$P_{2,3} = C_3^2 (0,7)^2 0,3 = 0,441.$$

Искомая вероятность находится по теореме сложения и равна:

$$P = P_{3,3} + P_{2,3} = 0,784.$$

Пример 4. Что вероятнее выиграть у равносильного противника:

а) три партии из четырех или пять партий из восьми;

б) не менее трех партий из четырех или не менее пяти партий из восьми (считая, что ничейный исход партии исключен)?

Решение. Указание на равносильность противника следует рассматривать как утверждение, что вероятность выигрыша партии равна $p = \frac{1}{2}$, так же как и вероятность проигрыша $q = 1 - p = \frac{1}{2}$. Теперь мы можем воспользоваться формулой повторения испытаний.

а) Вероятность выиграть три партии из четырех находится по формуле:

$$P_{3,4} = C_4^3 p^3 q^1 = \frac{4!}{3! 1!} \left(\frac{1}{2}\right)^3 \left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{4}.$$

Аналогично для выигрыша пяти партий из восьми получаем:

$$P_{5,8} = C_8^5 p^5 q^3 = \frac{8!}{5! 3!} \left(\frac{1}{2}\right)^5 \left(\frac{1}{2}\right)^3 = \frac{7}{32}.$$

Отсюда видно, что вероятность выиграть три партии из четырех больше, чем вероятность выиграть пять партий из восьми, хотя на первый взгляд может показаться, что это не так.

б) Выигрыш не менее трех партий из четырех означает, что должны быть выиграны три либо четыре партии. По теореме сложения и формуле повторения испытаний находим:

$$R_{3,4} = P_{3,4} + P_{4,4} = \frac{1}{4} + \left(\frac{1}{2}\right)^4 = \frac{5}{16}.$$

Точно так же

$$R_{5,8} = P_{5,8} + P_{6,8} + P_{7,8} + P_{8,8} = \frac{7}{32} + \frac{8!}{6!2!} \left(\frac{1}{2}\right)^8 + \\ + \frac{8!}{7!1!} \left(\frac{1}{2}\right)^8 + \frac{8!}{8!0!} \left(\frac{1}{2}\right)^8 = \frac{93}{256}.$$

Сравнивая между собой полученные вероятности, замечаем, что вероятность выиграть не менее трех партий из четырех меньше, чем вероятность выиграть не менее пяти партий из восьми.

Пример 5. Из колоды, содержащей 36 карт, извлекаются одна за другой четыре карты. Какова вероятность того, что среди вынутых карт окажется не более одного туза? Рассмотреть два различных случая:

а) после проверки вынутой карты она снова возвращается в колоду;

б) вынутая карта в колоду не возвращается.

Решение.

а) Задача решается очень просто с помощью биномиальной формулы. Действительно, так как карта возвращается после каждого вынимания, то вероятность вынуть туз каждый раз остается одной и той же и равна $p = \frac{1}{9}$ (в колоде четыре туза).

Среди вынутых карт окажется не более одного туза, если число вынутых тузов будет равно либо нулю, либо единице.

Таким образом, искомая вероятность равна:

$$P_1 = P_{0,4} + P_{1,4} = C_4^0 \left(\frac{1}{9}\right)^0 \left(\frac{8}{9}\right)^4 + C_4^1 \left(\frac{1}{9}\right)^1 \left(\frac{8}{9}\right)^3 \approx 0,936.$$

б) В случае, когда вынутая карта в колоду не возвращается, дело обстоит сложнее, так как вероятность вынуть туз меняется от одного вынимания к другому и зависит от результатов предыдущего вынимания.

В первом вынимании вероятность вынуть туз равна $\frac{1}{9}$. Что касается второго вынимания, то эта вероятность будет иной. Именно,

если в первом случае был вынут туз, то вероятность вынуть туз во второй раз будет равна $\frac{3}{35}$. Если же в первом случае был вынут не туз, то вероятность вынуть туз во второй раз равна уже $\frac{4}{35}$.

Можно таким же способом проследить, какова будет вероятность вынуть туз в третий и четвертый раз в зависимости от исхода предыдущих выниманий. Однако это чересчур сложно и громоздко. Гораздо проще решать этот вопрос иначе в более общем виде. Для этой цели обратимся к следующему примеру.

Пример 6. Имеется N предметов, из которых M обладают некоторым признаком. Из этого множества предметов выбираются наугад (то есть выбор каждого из N предметов равновозможен) n предметов. Какова вероятность того, что среди них ровно m будут обладать этим признаком?

Решение. Найдем, прежде всего, общее число возможных комбинаций. Ясно, что оно равно числу сочетаний C_N^n . По условию, извлечение каждой из этих комбинаций следует считать равновозможным. Подсчитаем теперь число благоприятствующих событий.

Группу из m элементов, обладающих нужным признаком, из общего числа M таких элементов можно выбрать C_M^m различными способами. Далее, оставшиеся $n - m$ элементов, нужным признаком не обладающие, могут быть выбраны C_{N-M}^{n-m} различными способами, поскольку общее число таких элементов есть $N - M$. Так как любая группа элементов, обладающих нужным признаком, может комбинироваться с любой группой элементов, им не обладающих, то общее число благоприятствующих событий равно произведению $C_M^m C_{N-M}^{n-m}$.

Окончательно находим, что искомая вероятность равна:

$$P = \frac{C_M^m C_{N-M}^{n-m}}{C_N^n}.$$

Теперь мы можем возвратиться к решению задачи б) из предыдущего примера. Здесь у нас $N = 36$, $M = 4$, $n = 4$. Как и в а), нас интересуют случаи $m = 0$ (ни одного туза) и $m = 1$ (ровно один туз). Эти события несовместны, и по теореме сложения для искомой вероятности находим:

$$P_2 = \frac{C_4^0 C_{32}^4}{C_{36}^4} + \frac{C_4^1 C_{32}^3}{C_{36}^4} = \frac{C_{32}^4 + 4 C_{32}^3}{C_{36}^4} \approx 0,947.$$

§ 7. Краткие исторические сведения

Теория вероятностей возникла в середине XVII столетия в связи с подсчетом различных вероятностей, связанных с азартными играми в карты и в кости. Правда, первую такую задачу пытался решить еще в 1494 году итальянский математик Лука Пачиоли, но по-настоящему первые решения теоретико-вероятностных задач принадлежат французским математикам Блезу Паскалю (1623—1662) и Пьеру Ферма (1601—1665) и голландскому математику Христиану Гюйгенсу (1629—1695). Именно к этому времени относится возникновение использованного нами классического определения вероятности.

Эти работы были изложены Гюйгенсом в сочинении «О расчетах при азартной игре», вышедшем в 1657 году. Впоследствии оно было вновь издано в 1713 году в качестве первой части труда швейцарского математика Якоба Бернулли (1654—1705). Хотя это сочинение Бернулли являлось комментариями к сочинению Гюйгенса, на самом деле его роль оказалась куда более значительной. Здесь Бернулли были уже установлены все основные свойства вероятностей, рассмотрена схема независимых испытаний и выведена соответствующая формула. Кроме того, здесь доказана теорема о связи между вероятностью и частотой наступления события, которую сейчас называют теоремой Бернулли или *законом больших чисел в форме Бернулли*. Это была первая из теорем этого типа, играющих сейчас большую роль в теории вероятностей.

Следующий период истории теории вероятностей — XVIII век и начало XIX века — связан, главным образом, с именем французских математиков А. Муавра (1667—1754), П. Лапласа (1749—1827), С. Пуассона (1781—1840) и А. Лежандра (1752—1833) и немецкого математика К. Ф. Гаусса (1777—1855). В это время в теории вероятностей, кроме понятия случайного события, рассматривается уже понятие случайной величины. Теория вероятностей начала применяться уже в ряде научных областей — теории ошибок измерений, теории стрельбы и т. п.

В третьем периоде развития теории вероятностей, который относится ко второй половине XIX столетия, важнейшую роль в ней играли работы русских ученых П. Л. Чебышева (1821—1894), А. М. Ляпунова (1857—1918) и А. А. Маркова (1856—1922). В это время был доказан целый ряд предельных теорем и различных форм закона больших чисел. А. А. Марков рассмотрел одно из первых обобщений схемы Бернулли на случай зависимых испытаний, получившее название *цепей Маркова*.

Современный период истории теории вероятностей характеризуется возникновением и развитием многих новых областей и направлений. Наряду с понятием случайного события и случайной величины рассматриваются и играют наиболее существенную роль понятия случайной функции и случайного процесса. Круг применения теории вероятностей в различных областях науки и техники расширился настолько, что сейчас ее по праву можно считать одной из наиболее прикладных частей математики.

Большое значение для современной теории вероятностей имеют выдающиеся работы представителей советской школы, в частности, А. Н. Колмогорова, С. Н. Бернштейна и А. Я. Хинчина (1894—1959).

62к.

